

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
F A C U L T A D D E C I E N C I A S

M^a DEL PILAR JUANITA MERCADO DOMENECH

*Representación de
una superficie
sobre otra superficie*

TESIS PROFESIONAL

✓

MEXICO, 1947



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis adorados padres:

Dr. y Gral. SERAFIN MERCADO MONROY y
MERCEDES DOMENECH DE MERCADO M.

quienes con su sacrificio y cariño me llevaron a alcanzar esta meta

A mi querida abuelita
TERESA ESPASA VDA. DE DOMENECH
quien siempre tiene dulces palabras con-
soladoras en mis momentos de angustia.

A mis hermanos:
HECTOR,
MINE,
RAMON,
MARIA TERESA,
SERAFIN y
ROSA MARIA,
con quienes reparto las alegrías y dulzuras de mi hogar.

A mis familiares,
amigos y
compañeros
que contribuyen a la felicidad de mi vida.

A
todos mis Maestros con profundo respeto.

A mis maestros:

Dr. en C. ALFONSO NAPOLES GANDARA.
M. en C. ALBERTO BARAJAS CELIS.
M. en C. AGUSTIN ANFOSI.
Dr. en C. CARLOS GRAEF FERNANDEZ.
M. en C. ENRIQUETA GONZALEZ BAZ.
M. en C. FRANCISCO ZUBIETA RUSSI.
Ingeniero JAVIER BARROS SIERRA.
M. en C. JORGE QUIJANO (†).
M. en C. ROBERTO VAZQUEZ GARCIA.

que siempre han estado dispuestos a brindarme su inmensa
fuente de sabiduria.

A mis inseparables condiscipulas:
MARIA GUADALUPE LOMELI CEREZO,
CARMEN MENDOZA CARRILLO y
CELIA MONTERO NUÑEZ,
cariñosamente.

DESARROLLO
DEL TEMA

**"REPRESENTACION DE UNA SUPERFICIE
SOBRE OTRA SUPERFICIE"**

que fué designado por la
dirección de la Facultad
de Ciencias a la alumna
María del Pilar Juanita
Mercado Domenech para
presentar como tesis en
su examen profesional
para obtener el grado
de Maestra en Ciencias
M a t e m á t i c a s .

C O N T E N I D O :

INTRODUCCION:

- I. Diversos tipos de representación.
- II. Invariantes diferenciales.
- III. Cómo reconocer si dos superficies son aplicables.
- IV. Superficies de curvatura constante. Aplicabilidad.
- V. Aplicabilidad de helicoides.

INTRODUCCION:

Los primeros estudios que se hicieron sobre la aplicación del cálculo diferencial a la geometría tuvieron lugar al estudiar las líneas geodésicas, problema planteado primeramente en 1697 por Juan Bernoulli (1667-1748) dando a conocer la solución Euler en 1728.

En la teoría de las superficies se destacan los trabajos realizados por Carlos Federico Gauss (1777-1855), matemático alemán quien introdujo la representación esférica; encontró que un elemento de superficie de la representación esférica es al elemento correspondiente de la superficie por representar como 1 es al producto de los radios de curvatura principales. Gauss consideró el producto de los recíprocos de los radios de curvatura en un punto como la curvatura de la superficie en dicho punto. Este concepto permitió a Gauss clasificar las propiedades de las superficies en dos grupos: el de aquellas que presuponen una determinada posición de la superficie en el espacio y el de las que no se alteran al plegar la superficie. La curvatura Gaussiana o curvatura total es una de las propiedades que permanecen invariables al plegar la superficie. El teorema "Egregio" de Gauss, acerca de la curvatura, dice: la curvatura es la misma en puntos correspondientes de dos superficies inextensibles que pueden aplicarse una sobre otra. Aplicó Gauss en la solución general del problema de representación conforme, el uso de las variables auxiliares p, q .

Una de las aplicaciones que se dió a la Geometría Diferencial fué la representación de una superficie sobre el plano, en forma

DIVERSOS TIPOS DE REPRESENTACION

Se dice que una superficie está representada sobre otra, cuando se puede establecer una relación biunívoca entre los puntos de las dos superficies; un caso particular es la representación de la superficie de la Tierra sobre un plano, problema del que se ocupa la Cartografía. Los tipos más usuales de representación de superficies son: la representación conforme, la representación geodésica y la representación esférica, cuyas características principales se dan a continuación:

a) Representación conforme.

La representación conforme es aquella en la que, en la vecindad de cada par de puntos correspondientes, existe semejanza entre las figuras elementales.

Si S y S' son dos superficies representadas conformemente, en puntos correspondientes sus elementos lineales dS y dS' están ligados por la ecuación:

$$dS' = \mu dS$$

donde μ es una función del punto y se llama amplificación lineal. Si estas superficies son tales, que puntos correspondientes tengan las mismas coordenadas (u, v) , la condición necesaria y suficiente que deben cumplir para que se obtenga en ellas una representación conforme es: que las magnitudes de primer or-

especial a la representación de la esfera sobre un plano con fines Cartográficos.

La primera representación conforme conocida fué "La proyección estereográfica" dada por Hiparco de Nicea (140 a. C.), aplicándola a la representación de la esfera celeste. Las fórmulas que dan esta proyección fueron establecidas por Juan Enrique Lambert que fué el primero que examinó la representación conforme en el plano y José Luis Lagrange que fué el primero que notó la relación de ésta con la teoría de las funciones de variable compleja.

Otra forma de representación conforme es "La proyección de Mercator" dada por Nicolás Mercator en 1568, problema que estudió Leonardo Euler haciendo ver que en ella se conservan los ángulos y las áreas; esta proyección fué estudiada, además, por Pedro Simón Laplace (1779), encontrando la relación con la teoría de funciones de variable compleja. El astrónomo F. T. von Schubert extendió el estudio al caso de la representación de un esferoide sobre un plano.

En 1822 la Sociedad de Ciencias de Copenhague propuso la solución del problema, consistente en representar las partes de una superficie dada sobre otra superficie, de manera que la imagen y la superficie fueran semejantes en las pequeñas partes correspondientes. La solución de este problema fué dada por C. F. Gauss en 1825.

Fernando Minding (1839), Juan Enrique Lambert y E. Beltrami estudiaron las superficies de revolución de curvatura total constante negativa; Minding demostró que dos superficies con la misma curvatura constante son aplicables una sobre la otra.

Estos estudios han sido continuados y generalizados posteriormente por Ulises Dini, Christoffel, L. Eisenhardt y otros célebres matemáticos.

den E, F, G y E', F', G', de las dos superficies S y S' respectivamente, sean proporcionales. Así, los elementos lineales en un punto (u, v) son:

$$dS^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

$$dS'^2 = E' du'^2 + 2F' du'dv' + G' dv'^2$$

respectivamente, de donde se tendrá:

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} = \mu$$

ya que $\frac{dS'}{dS} = \mu$ por considerar que existe representación conforme entre ellas. Inversamente, si E, F, G son proporcionales a E', F', G' los elementos lineales en puntos correspondientes están en la misma razón y por lo tanto existe una representación conforme entre ellas.

En general, si φ y ψ son parámetros isométricos sobre una superficie S', y si u y v son parámetros isométricos sobre la otra superficie S, la representación conforme de estas superficies se efectúa haciendo corresponder al punto (u, v) el punto (φ , ψ) bajo la siguiente condición:

$$u + iv = f(\varphi + i\psi)$$

donde u + iv es una función analítica de $\varphi + i\psi$, o bien,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = -\frac{\partial v}{\partial \varphi} \dots \dots \dots (1)$$

donde, $u = u(\varphi, \psi)$, $y \quad v = v(\varphi, \psi) \dots \dots \dots (2)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial u}{\partial \psi} d\psi \dots \dots \dots (3)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \psi} d\psi$$

Los elementos lineales de las superficies S y S' están dados respectivamente por:

$$dS^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

$$dS'^2 = \lambda' (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

donde $\lambda = \lambda(u, v)$ y $\lambda' = \lambda'(\varphi, \psi)$.

Teniendo en cuenta (1), (2) y (3) se tiene:

$$dS = \mu dS'$$

luego la representación es conforme.

Un ejemplo de representación conforme está dado por la "Proyección de Mercator" que representa la superficie de una esfera sobre un plano. Esta representación consiste en lo siguiente.

El elemento lineal de la superficie de la esfera, en coordenadas cartesianas, está dado por:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En la esfera que tiene el centro en el origen cartesiano, las coordenadas están dadas por:

$$x = r \cos \lambda \cos \varphi$$

$$y = r \cos \lambda \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = r \operatorname{sen} \lambda$$

donde λ es la latitud y φ es la longitud; por lo que el elemento lineal toma la forma:

$$dS^2 = r^2 \cos^2 \lambda (d\varphi^2 + \sec^2 \lambda d\lambda^2)$$

Haciendo $\sec^2 \lambda d\lambda^2 = d\psi^2$, $d\psi = \sec \lambda d\lambda$

$$y \quad \psi = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)$$

entonces $dS^2 = r^2 \cos^2 \lambda (d\varphi^2 + d\psi^2)$

Por otra parte el elemento lineal del plano, en coordenadas cartesianas rectangulares, está dado por:

$$dS'^2 = dx'^2 + dy'^2$$

haciendo corresponder al punto (x, y) del plano el punto (φ, ψ) de la esfera, la representación conforme se obtiene con la condición:

$$x + iy = K (\varphi + i\psi) \text{ con } K = \text{cte.}$$

por lo tanto $x = K\varphi$, $y = K \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)$

y $dS'^2 = K^2 (d\varphi^2 + d\psi^2) = \frac{K^2}{r^2 \cos^2 \lambda} dS^2$

de donde
$$\mu^2 = \frac{K^2}{r^2 \cos^2 \lambda} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{K}{r \cos \lambda}$$

la amplificación lineal está dada por $\frac{K}{r \cos \lambda}$ la cual en el Ecuador

tiene su valor mínimo $\frac{K}{r}$ y aumenta indefinidamente hacia los polos. Los meridianos de la esfera dados por $\varphi = \text{cte.}$ están representados en el plano por $x = \text{cte.}$, o sea rectas paralelas equidistantes; los paralelos $\lambda = \text{cte.}$ con una diferencia constante de latitud están dados por rectas paralelas $y = \text{cte.}$ cuyas distancias aumentan hacia los polos.

Otro ejemplo de representación conforme lo da la "Proyección estereográfica", que proyecta la superficie de la esfera sobre un plano tangente, tomando como foco de proyección el punto diametralmente opuesto al punto de contacto.

El elemento lineal de la esfera está dado, según el ejemplo anterior, por:

$$dS^2 = r^2 \cos^2 \lambda (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

donde
$$\psi = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)$$

y el elemento lineal del plano está dado por:

$$dS'^2 = dx^2 + dy^2$$

haciendo la representación conforme según la transformación:

$$x + iy = Ke^{i(\varphi + i\psi)} = Ke^{-\psi} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

donde $x = Ke^{-\psi} \cos \varphi$ $y = Ke^{-\psi} \sin \varphi$,

$$x = \frac{K}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{K}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)} \sin \varphi$$

$$\text{así: } dS^2 = dx^2 + dy^2 = K^2 e^{-2\psi} (d\psi^2 + d\varphi^2) = \frac{K^2 e^{-2\psi}}{r^2 \cos^2 \lambda} dS^2$$

de donde, la representación es conforme y la amplificación lineal está dada por:

$$\mu = \frac{K e^{-\psi}}{r \cos \lambda}$$

Los meridianos $\varphi = \text{cte.}$ están representados por $\frac{x}{y} = \text{cte.}$ rectas que pasan por el origen de coordenadas y los paralelos $\lambda = \text{cte.}$ están representados por $x^2 + y^2 = \text{cte.}$ círculos con centro en el origen.

b).—Representación geodésica.

Es la representación de una superficie sobre otra de manera que líneas geodésicas de una de ellas correspondan a líneas geodésicas sobre la otra.

c).—Representación esférica.

La representación esférica consiste en hacer corresponder a cada punto de la superficie el extremo del vector unitario, que es normal a la superficie en dicho punto, trazados a partir de un origen común. Así, los puntos correspondientes a dicha superficie están sobre una esfera de radio unitario.

La representación esférica no es una representación conforme ya que los elementos de arco medidos sobre el mismo punto varían en la representación según la dirección en que se toman; en el caso de la representación esférica de una superficie mínima ésta es conforme.

Superficies aplicables.

Se dice que dos superficies son aplicables cuando pueden representarse conformemente con una amplificación lineal igual a 1 en cada uno de sus puntos.

Dos superficies aplicables pueden superponerse mediante deformaciones que no formen pliegues ni alargamientos.

Con respecto a las superficies aplicables se pueden mencionar, desde luego, las siguientes propiedades:

Si de dos superficies aplicables, una de ellas es aplicable a una tercera, las tres son aplicables entre si.

Teorema de Gauss.—Si dos superficies son aplicables, deben tener igual curvatura total en puntos correspondientes.

Los problemas fundamentales que se presentan en la teoría de la aplicabilidad, son el de reconocer si dos superficies cuyos elementos lineales se conocen son aplicables y cuáles son las fórmulas que dan la aplicabilidad, y dada una superficie reconocer sobre qué superficies es aplicable.

INVARIANTES DIFERENCIALES:

Para resolver el primer problema de la aplicabilidad se van a utilizar los invariantes diferenciales de una superficie. Considerando una familia de curvas $\varphi(u, v) = \text{cte.}$ sobre la superficie, gradiente de φ es la derivada de φ siguiendo la dirección de la normal a la curva, tangencialmente a la superficie, se tiene:

$$\text{Grad. } \varphi = \nabla\varphi = \frac{1}{H^2} \left(G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) \bar{r}_1 + \left(E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) \bar{r}_2$$

\bar{r}_1 y \bar{r}_2 representan a $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ respectivamente; de donde,

$$\text{Operador } \nabla = \frac{1}{H^2} \bar{r}_1 \left(G \frac{\partial}{\partial u} - F \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{H^2} \bar{r}_2 \left(E \frac{\partial}{\partial v} - F \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

El gradiente de φ es invariante ya que su valor es independiente de la elección de los parámetros u, v . El invariante $(\nabla\varphi)^2$ es el parámetro diferencial de primer orden de Beltrami y se simboliza por:

$$\Delta\varphi = \nabla\varphi \nabla\varphi = (\nabla\varphi)^2 \dots \dots \dots (1)$$

La condición necesaria y suficiente para que las curvas $\varphi = \text{cte.}$ sean paralelas es que $\Delta\varphi$ sea una función de φ solamente.

Si se considera la familia de curvas $\psi = \text{cte.}$ ortogona-

les a las curvas de la familia $\varphi = \text{cte.}$, los gradientes de dichas funciones son perpendiculares, así la condición necesaria y suficiente para que dos familias de curvas sean ortogonales es:

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0 \dots \dots \dots (2)$$

El invariante $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$ es el parámetro diferencial mixto de primer orden de Beltrami y se simboliza por:

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \dots \dots \dots (3)$$

La inclinación Θ de las dos curvas $\varphi = \text{cte.}$ y $\psi = \text{cte.}$ es la inclinación de $\nabla\varphi$ y $\nabla\psi$,

como
$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = k \cos\Theta$$

y
$$|\nabla\varphi \times \nabla\psi| = k \sin\Theta$$

donde
$$k = \sqrt{(\nabla\varphi)^2} \sqrt{(\nabla\psi)^2} = \sqrt{\Delta_1\varphi} \sqrt{\Delta_1\psi}$$

y teniendo en cuenta que $\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1$ se tiene:

$$(\nabla\varphi \cdot \nabla\psi)^2 + (\nabla\varphi \times \nabla\psi)^2 = \Delta_1\varphi \Delta_1\psi$$

$$\therefore \Delta_1(\varphi, \psi)^2 + (\nabla\varphi \times \nabla\psi)^2 = \Delta_1\varphi \Delta_1\psi \dots \dots \dots (4)$$

El invariante $\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$ es el parámetro diferencial de segundo orden de Beltrami, se simboliza por:

$$\Delta_2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi \dots \dots \dots (5)$$

En general, para una familia de curvas $\varphi = \text{cte.}$ de una superficie se tiene:

$$\nabla = \frac{1}{H^2} r_1 \left(G \frac{\partial}{\partial u} - F \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{H^2} r_2 \left(E \frac{\partial}{\partial v} - F \frac{\partial}{\partial u} \right) \dots (6)$$

$$\Delta_1\varphi = \frac{1}{H^2} E \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) + G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \right)^2 \dots (7)$$

$$\Delta_2(\varphi, \psi) = \frac{1}{H^2} E \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial v} - F \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) + G \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial u} \dots (8)$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{H} \frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{G}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{F}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{1}{H} \frac{\delta}{\delta v} \left(\frac{E}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{F}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \dots \dots (9)$$

Cuando las curvas paramétricas son ortogonales se tiene:
 $F = 0$ y $H = \sqrt{EG}$, así que,

$$\nabla = \frac{1}{E} \frac{\delta}{\delta u} r_1 - \frac{1}{G} \frac{\delta}{\delta v} r_2 \dots \dots (6')$$

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \dots \dots (7')$$

$$\Delta_1(\psi, \varphi) = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{1}{E} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \dots \dots (8')$$

$$\Delta_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\delta}{\delta u} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\delta}{\delta v} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \dots \dots (9')$$

Para las curvas paramétricas $u = \text{cte.}$, $v = \text{cte.}$ las fórmulas anteriores se simplifican como sigue:

$$\nabla u = \frac{G}{H^2} r_1 - \frac{F}{H^2} r_2$$

$$\nabla v = \frac{E}{H^2} r_2 - \frac{F}{H^2} r_1$$

así que, $\nabla u \times \nabla v = \frac{\bar{N}}{H}$

y $(\nabla u \times \nabla v)^2 = \frac{1}{H^2}$

de donde,
$$\Delta_{\cdot u} = \frac{G}{H^2} = G (\nabla u \times \nabla v)^2$$

$$\Delta_{\cdot(u, v)} = \frac{-F}{H^2} = -F(\nabla u \times \nabla v)^2 \dots \dots (10)$$

$$\Delta_{\cdot v} = \frac{E}{H^2} = E(\nabla u \times \nabla v)^2$$

Cuando las curvas paramétricas son ortogonales, $F = 0$ y $H = \sqrt{EG}$ por lo tanto se tiene:

$$\Delta_{\cdot u} = \frac{1}{E} \bar{r}_1 \dots \dots \dots (11)$$

$$\Delta_{\cdot v} = \frac{1}{G} \bar{r}_2$$

$$\Delta_{\cdot u} = \frac{1}{E}$$

$$\Delta_{\cdot v} = \frac{1}{G}$$

De las ecuaciones (10) y (4) se tiene que el elemento lineal para un sistema paramétrico cualquiera es:

$$dS^2 = \frac{\Delta_{\cdot v} du^2 - 2\Delta_{\cdot(u, v)} du dv + \Delta_{\cdot u} dv^2}{\Delta_{\cdot u} \Delta_{\cdot v} - \Delta_{\cdot(u, v)}^2} \dots \dots (12)$$

COMO RECONOCER SI DOS SUPERFICIES
SON APLICABLES:

El problema de reconocer si dos superficies, cuyos elementos lineales están dados por:

$$dS^2 = Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2$$

y
$$dS'^2 = E'du'^2 + 2F' du'dv' + G'dv'^2$$

son aplicables y encontrar las fórmulas de la aplicabilidad, consiste en ver si es posible hacer $dS = dS'$ y cuáles son las fórmulas de transformación.

Supongamos que las fórmulas de aplicabilidad de las superficies S y S' son:

$$\varphi(u, v) = \varphi'(u', v') \dots \dots \dots (1)$$

$$\psi(u, v) = \psi'(u', v')$$

las cuales tienen que cumplir como condición necesaria y suficiente

$$\Delta_1 \varphi = \Delta_1' \varphi' \qquad \Delta_1 \psi = \Delta_1' \psi' \dots \dots \dots (2)$$

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = \Delta_1'(\varphi', \psi')$$

Las ecuaciones (2) son necesarias por ser consecuencia de las ecuaciones (1) y además, son suficientes, porque si se consideran en cada punto de las superficies S y S' los valores correspondientes de φ y ψ como parámetros se tiene:

$$dS^2 = \frac{\Delta_1 \psi d\varphi^2 + 2\Delta_1(\varphi, \psi) d\varphi d\psi + \Delta_1 \varphi d\psi^2}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \Delta_1^2(\varphi, \psi)}$$

$$dS^2 = \frac{\Delta i \psi' d\varphi'^2 + 2\Delta i(\varphi', \psi') d\psi' d\varphi' + \Delta i \varphi' d\psi'^2}{\Delta i \varphi' \Delta i \psi' - \Delta i^2(\varphi', \psi')}$$

y con las ecuaciones (2) se tiene $dS = dS'$ y las dos superficies son aplicables.

En el caso de dos superficies con curvatura no constante $K = K(u, v)$ y $K' = K'(u', v')$, se puede tomar como primera fórmula de la aplicabilidad la condición:

$$K(u, v) = K'(u', v')$$

y considerando la segunda fórmula de la aplicabilidad

$$\Delta i K = \Delta i K'$$

el sistema (1) queda formado así:

$$K(u, v) = K'(u', v') \quad \dots \dots \dots (1')$$

$$\Delta i K(u, v) = \Delta i K'(u', v')$$

en el cual se pueden encontrar los tres casos siguientes:

a).—Que las dos ecuaciones (1') no sean compatibles. En tal caso las dos superficies no son aplicables.

b).—Las dos ecuaciones (1') son compatibles e independientes. En este caso, si de las ecuaciones (1') se deduce el sistema (2) dado por:

$$\Delta i K = \Delta i K' \quad \Delta i(\Delta i K) = \Delta i(\Delta i K') \quad \dots \dots (2')$$

$$\Delta i(\Delta i K, K) = \Delta i(\Delta i K', K')$$

las dos superficies son aplicables; si de las ecuaciones (1') no se deduce el sistema (2') las superficies no son aplicables.

c).—Las dos ecuaciones (1') no son independientes, o sea:

$$\Delta i K = f(K) \quad \Delta i K' = f(K') \quad \dots \dots (3)$$

En este caso, se toma como segunda ecuación de la aplicabilidad $\Delta_2 K$, quedando formado el sistema (1) por:

$$K(u, v) = K'(u', v') \quad \dots \dots \dots (1'')$$

$$\Delta_2 K(u, v) = \Delta_2 K'(u', v')$$

para el cual se repite lo dicho para el sistema (1')

Si en el sistema (1'') se tiene:

$$\Delta_2 K = F(K) \quad \text{y} \quad \Delta_2 K' = F(K') \quad \dots \dots (4)$$

el sistema de las ecuaciones (1) independientes, no se puede encontrar, pero las superficies son aplicables sobre una superficie de revolución, en la cual, la curva meridiana depende únicamente de las funciones $F(K)$ y $f(K)$, luego las dos superficies son aplicables entre sí por ser aplicables a una tercera.

La primera ecuación (4) expresa que las líneas sobre las cuales $K = \text{cte.}$ forman una familia de curvas geodésicamente paralelas; ahora bien, tomando las trayectorias $u = \text{cte.}$, ortogonales a las curvas anteriores y refiriendo la superficie al sistema formado por ellas, se tendrá que:

$$dS^2 = du^2 + C^2 dv^2 \dots \dots \dots (5)$$

donde
$$du^2 = EdK^2 = \frac{dK^2}{\Delta_1 K} ; \quad du = \frac{dK}{\sqrt{\Delta_1 K}}$$

entonces
$$u = \int \frac{dK}{\sqrt{\Delta_1 K}} \dots \dots \dots (6)$$

teniendo en cuenta la ecuación (9') del párrafo (2) y la ecuación (5), se tiene para una función ω cualquiera

$$\Delta_2 \omega = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial u} \left(C \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) ;$$

considerando $\omega = K$

$$\Delta_2 K = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial u} \left(C \frac{dK}{du} \right) = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} \frac{dK}{du} + \frac{d}{du} \frac{dK}{du}$$

y de la ecuación (6) se obtiene: $\frac{dK}{du} = \sqrt{\Delta_1 K}$, así que:

$$\Delta_2 K = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} \sqrt{\Delta_1 K} + \frac{d\sqrt{\Delta_1 K}}{du} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} \sqrt{\Delta_1 K} + \sqrt{\Delta_1 K} \frac{d\sqrt{\Delta_1 K}}{dK}$$

$$\frac{1}{C} \frac{\delta C}{\delta u} du = \frac{\Delta_2 K - \frac{1}{2} \frac{d(\Delta_1 K)}{dK}}{\sqrt{\Delta_1 K}} du$$

Reemplazado du por $\frac{dK}{\sqrt{\Delta_1 K}}$ en el segundo miembro, e integrando, se tiene:

$$C = V e^{\int \frac{\Delta_2 K - \frac{1}{2} \frac{d\Delta_1 K}{dK}}{\Delta_1 K} dK} = \frac{V}{\sqrt{\Delta_1 K}} e^{\int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK}$$

donde V es una función de v .

Substituyendo el valor de C en la ecuación (5) se tiene:

$$dS^2 = du^2 + \frac{2 \int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK}{\Delta_1 K} V^2 dv^2$$

substituyendo $V^2 dv^2$ por dv_1^2 y $\frac{2 \int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK}{\Delta_1 K}$

por $r(u)^2$, queda: $dS^2 = du^2 + r(u)^2 dv_1^2 \dots \dots \dots (7)$

que tiene la forma del elemento lineal (dS^2) de una superficie de revolución, donde

$$r(u) = \frac{\int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK}{\sqrt{\Delta_1 K}}$$

es función de u solamente y depende de la forma de las funciones $f(K)$ y $F(K)$, quedando así demostrado que las superficies S y S' consideradas son aplicables sobre una misma superficie de revolución.

SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE. APLICABILIDAD

Otro problema fundamental que se presenta en la aplicabilidad de superficies es el de reconocer, dada una superficie, las superficies aplicables a ella.

Considerando primeramente las superficies con curvatura total K etc., y teniendo en cuenta el Teorema de Gauss, estas superficies son aplicables sobre otra superficie de curvatura total constante e igual.

Las superficies de curvatura constante, según que la curvatura sea nula, positiva, o negativa son: desarrollables, esféricas o pseudoesféricas.

Las superficies desarrollables son aquellas que pueden desenvolverse sobre un plano.

Las superficies esféricas o de curvatura constante positiva son de tres tipos: esférica, esférica de tipo elíptico y esférica de tipo hiperbólico.

Las superficies pseudoesféricas o de curvatura constante negativa son de tres tipos: pseudoesférica de tipo elíptico, pseudoesférica de tipo hiperbólico y pseudoesférica de tipo parabólico o simplemente pseudoesfera.

Refiriendo la superficie de curvatura constante por estudiar, a un sistema de coordenadas geodésicas, el elemento lineal de dicha superficie tendrá la forma:

$$dS^2 = du^2 + Gdv^2 \dots \dots \dots (1)$$

y la curvatura total de la superficie estará dada por la ecuación:

$$K = - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\delta^2 \sqrt{G}}{\delta u^2} = \text{cte.} \dots \dots \dots (2)$$

En el caso en que la superficie considerada sea esférica, se tiene:

$$\frac{\delta^2 \sqrt{G}}{\delta u^2} = - \sqrt{G} \frac{1}{R^2}$$

de donde integrando se obtiene:

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cos \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sen} \frac{u}{R} \dots \dots (3)$$

Tomando como curva $u = 0$ una geodésica, las curvas $u = \text{cte.}$, trayectorias geodésicamente paralelas a la $u = 0$, y las curvas $v = \text{cte.}$ trayectorias geodésicas ortogonales a la curva $u = 0$ se tiene que la curvatura geodésica a lo largo de la curva $u = 0$ está dada por:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\delta \sqrt{G}}{\delta u} \right)_{u=0} = 0$$

de donde $\left(\frac{\delta \sqrt{G}}{\delta u} \right)_{u=0} = \frac{\psi(v)}{R} = 0$

y $(\sqrt{G})_{u=0} = \varphi(v) = C$ donde $C = \text{cte.}$

así el elemento lineal de una superficie esférica está dado por:

$$dS^2 = du^2 + C^2 \cos^2 \frac{u}{R} dv^2 \dots \dots \dots (4)$$

el cual es del tipo del elemento lineal de una superficie de revolución. Si la superficie se refiere a un sistema de coordenadas

cartesianas ortogonales, tomando el eje de revolución como eje z se tiene:

$$x = u_1 \cos v_1, \quad y = u_1 \operatorname{sen} v_1, \quad z = \varphi(u_1)$$

$$y \quad dS^2 = (1 + \varphi'^2(u_1)) du_1^2 + u_1^2 dv_1^2 \dots \dots (5)$$

donde u_1 es la distancia de un punto de la curva meridiana al eje de revolución y $\varphi(u_1)$ es la ecuación de la curva meridiana de la superficie. Comparando el elemento lineal dado por las ecuaciones (4) y (5) se tiene:

$$du^2 = (1 + \varphi'^2(u)) du_1^2$$

$$u_1 = C \cos \left(\frac{u}{R} \right)$$

$$dv = dv_1$$

$$\text{de donde: } \varphi(u_1) = \int \sqrt{du^2 - du_1^2} = \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{u}{R} \right)} du$$

en consecuencia las ecuaciones de una superficie de revolución con curvatura constante positiva están dadas por:

$$x = C \cos \left(\frac{u}{R} \right) \cos v$$

$$y = C \cos \left(\frac{u}{R} \right) \operatorname{sen} v$$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{u}{R} \right)} du$$

donde se pueden presentar tres casos según que C sea igual, mayor o menor que R dando lugar a los tres tipos de superficies esféricas enunciados.

1er. caso.— $C = R$. En este caso, las ecuaciones (6) están dadas por:

$$x = R \cos \frac{u}{R} \cos v, \quad y = R \cos \frac{u}{R} \sin v, \quad z = R \sin \frac{u}{R}$$

que son las ecuaciones de la esfera de radio R con centro en el origen.

2do. caso.— $C > R$. Para que la tercera ecuación del sistema (6) se realice se necesita que:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{u}{R} \leq \frac{R^2}{C^2}$$

y teniendo en cuenta que: $u_1 = R \cos \frac{u}{R}$

se tendrá $\sqrt{C^2 - R^2} \leq u_1 \leq C$

como z es una función periódica, la superficie consta de una sucesión de zonas limitadas por paralelos mínimos de radio $\sqrt{C^2 - R^2}$ y con un paralelo máximo de radio C . Esta superficie esférica es de "tipo hiperbólico".

3er. caso.— $C < R$. En este caso $0 \leq u_1 \leq C$, siendo cero cuando $u = \frac{mR\pi}{2}$. Como z es periódica la superficie consta de una sucesión de zonas en forma de huso con un paralelo máximo de radio C . Esta superficie esférica se llama de "tipo elíptico".

En el caso en que la superficie sea pseudoesférica, de la ecuación (2) se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\delta^2 \sqrt{G}}{\delta u^2} = \frac{1}{R^2}$$

de donde integrando se obtiene:

$$\sqrt{G} = \varphi(v) e^{\frac{u}{R}} + \psi(v) e^{-\frac{u}{R}} \dots \dots \dots (I)$$

$$y \quad \sqrt{G} = \varphi(v) \cosh \frac{u}{R} + \psi(v) \sinh \frac{u}{R} \dots (II)$$

donde considerando como curva $u = 0$ una geodésica, como $u = \text{cte.}$ trayectorias geodésicas paralelas a la curva $u = 0$ y como curva $v = \text{cte.}$ las trayectorias geodésicas ortogonales a la curva $u = 0$, se tiene que la curvatura geodésica a lo largo de la curva $v = 0$ está dada por:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\delta \sqrt{G}}{\delta u} \right)_{u=0} = 0$$

de donde
$$\left(\frac{\delta \sqrt{G}}{\delta u} \right)_{u=0} = \frac{\psi(v)}{R} = 0$$

y
$$(\sqrt{G})_{u=0} = \varphi(v) = C \quad \text{donde } C = \text{cte.}$$

así el elemento lineal en el caso (I) y (II) están dados por:

$$dS^2 = du^2 + C^2 \frac{2u}{e^{2u}} dv^2 \dots \dots \dots (7-I)$$

$$dS^2 = du^2 + C^2 \cosh \frac{u}{R} dv^2 \dots \dots \dots (7-II)$$

Cuando la superficie se refiere a un sistema geodésico polar con el polo en un punto O de la superficie, se tendrá:

$$(\sqrt{G})_{u=0} = \varphi(v) = 0$$

$$\left(\frac{\delta \sqrt{G}}{\delta u} \right)_{u=0} = \frac{\psi(v)}{R} = 1$$

de donde $\sqrt{G} = C \operatorname{senh} \frac{u}{R}$ donde $C = \text{cte.}$

así el elemento lineal está dado por:

$$dS^2 = du^2 + C^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} dv^2 \dots \dots (7\text{-III})$$

Los tres tipos del elemento lineal de las superficies pseudo-esféricas tienen la forma del elemento lineal de una superficie de revolución, de donde comparando las ecuaciones (7-I), (7-II) y (7-III) con la ecuación (5) se tiene:

$$u = C e^{u/R} ; \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2} 2 \frac{u}{e^{2u/R}}} du \dots (8\text{-I})$$

$$u = C \cosh \frac{u}{R} ; \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}} du \dots (8\text{-II})$$

$$u = C \operatorname{senh} \frac{u}{R} ; \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2} \cosh^2 \frac{u}{R}} du \dots (8\text{-III})$$

En el caso I.— Haciendo $C e^{u/R} = R \operatorname{sen} \Theta$

se obtiene: $u = R \operatorname{sen} \Theta$

$$y \quad z = R \int \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi = R \left(\log \tan \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right)$$

que son las ecuaciones de la tractriz teniendo como asíntota el eje OZ. Esta es la superficie Pseudoesférica de tipo parabólico o simplemente pseudoesfera que es la superficie generada por la rotación de la tractriz sobre su asíntota.

En el caso II: Los valores máximo y mínimo de $\sinh^2 \frac{u}{R}$ son $\frac{R^2}{C^2}$ y 0 respectivamente y los valores máximo y mínimo de u son $\sqrt{R^2 + C^2}$ y C respectivamente. Como z es una función periódica, la superficie consiste de una sucesión de zonas limitadas por paralelos máximos de radio $\sqrt{R^2 + C^2}$ y con paralelos mínimos de radio C . Esta superficie pseudo-esférica es del "tipo hiperbólico".

En el caso III: La superficie es real sólo para $C^2 \leq R^2$. Si se pone $R = C \operatorname{sen} \Theta$, los valores máximo y mínimo de $\cosh^2 \frac{u}{R}$ están dados por: $\csc^2 \Theta$ y 1 respectivamente y los valores máximo y mínimo de u son $R \cos \Theta$ y 0. Como z es periódica, la superficie consta de una sucesión de zonas con un paralelo máximo de radio $R \cos \Theta$ y un paralelo mínimo de radio 0. Esta superficie pseudoesférica es de tipo elíptico.

La aplicabilidad de las superficies de curvatura total constante se efectúa bajo los siguientes teoremas:

Las superficies de curvatura total nula, desarrollables, son aplicables sobre el plano.

Todas las superficies de curvatura total positiva constante

$K = \frac{1}{R^2}$ son aplicables sobre una esfera de radio R .

Las superficies pseudoesféricas de radio R o las superficies de curvatura constante negativa $K = -\frac{1}{R^2}$ son aplicables entre sí.

APLICABILIDAD DE HELICOIDES

Helicoide es la superficie generada por una curva plana llamada generatriz dotada de un doble movimiento de rotación y traslación, cuya razón de velocidades es constante. Todos los puntos de la generatriz describen hélices circulares teniendo como eje común el eje del helicoide. La curva determinada por una sección del plano meridiano se llama perfil meridiano del helicoide.

Las ecuaciones paramétricas del helicoide están dadas por:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(u) + mv,$$

tomando como eje z el eje de revolución del helicoide, representando por u la distancia de un punto de perfil meridiano al eje, por v el ángulo que gira el perfil meridiano en un tiempo cualquiera y por m la razón constante de velocidades de traslación y rotación.

El elemento lineal del helicoide estará dado por:

$$dS^2 = (1 + \varphi'^2(u)) du^2 + 2m\varphi'(u) du dv + (u^2 + m^2) dv^2$$

Haciendo: $v = kv_1 - m \int \frac{\varphi'(u) du}{u^2 + m^2}$ $k = \text{cte.}$

resulta:

$$dS^2 = \left(1 + \frac{u^2 \varphi'^2(u)}{u^2 + m^2} \right) du^2 + k^2 (u^2 + m^2) dv_1^2$$

Comparando esta forma del elemento lineal del helicoides con el elemento lineal de una superficie de revolución dado en la forma

$$dS^2 = (1 + \psi'^2(r)) dr^2 + r^2 dv_1^2$$

donde $z = \psi(r)$ es la ecuación de la curva meridiana, se ve que se pueden igualar considerando $r, \psi(r), u,$ y $\varphi(u)$ relacionadas por las ecuaciones:

$$r^2 = k^2 (u^2 + m^2)$$

$$(1 + \psi'^2(r)) \left(\frac{dr}{dv_1} \right)^2 = 1 + \frac{u^2 \varphi'^2(u)}{u^2 + m^2}$$

De lo anterior se obtiene el teorema siguiente dado por Bour: "Toda superficie helicoidal es aplicable sobre una superficie de revolución y las hélices se extienden sobre los paralelos."

Considerando, como un caso particular, el helicoides reglado con área mínima o superficie generada por las normales principales de la hélice circular, la cual tiene como perfil meridiano una recta apoyada normalmente al eje de revolución, se tendrá: $\varphi'(u) = 0$, de donde resulta

$$1 + \psi'^2(r) = \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = \frac{r^2}{K^2(r^2 - m^2 k^2)}$$

y tomando $k = 1$ se tiene

$$z = \psi(r) = m \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - m^2}} = m \operatorname{arg.} \cosh \left(\frac{r}{m} \right)$$

de donde la ecuación de las curvas meridianas está dada por:

$$r = m \cosh\left(\frac{z}{m}\right)$$

Así, el helicoide reglado de área mínima es aplicable sobre una catenoide de revolución.

O P I N I O N

DE LOS HH. MIEMBROS DEL
JURADO SOBRE ESTA TESIS

FACULTAD DE CIENCIAS,
Depto. de Matemáticas.
Número 9/3.

Señor Prof. M. en C. Alberto Barajas,
Director de la Facultad de Ciencias,
Presente.

Con referencia a su atenta comunicación número 733-433 con fecha 9 de este mes, me es grato informar a usted que después de haber leído la tesis aludida, presentada por la señorita María del Pilar Juanita Mercado Doménech, aspirante al grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de esta Facultad al digno cargo de usted, y después de haber hecho algunas sugerencias sobre dicha tesis a la Srita. Mercado, encuentro que es de aceptarse para el fin que se propone.

Durante varios meses la Srita. Mercado me ha informado con frecuencia sobre el desarrollo de su tema y ha consultado las obras y los artículos de algunas revistas matemáticas que le he señalado.

Reitero a usted mi atenta y distinguida consideración.

“POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU”

México, D. F., a 29 de octubre de 1947

El Jefe del Departamento,
DR. ALFONSO NAPOLES GANDARA.

M. en C. Alberto Barajas Celis,
Director de la Facultad de Ciencias,

Presente.

Después de estudiar detalladamente la Tesis de Maestra en Ciencias Matemáticas presentada por la alumna Juanita Mercado Doménech, la encuentro satisfactoria y creo que representa un esfuerzo muy digno de elogio de parte de la solicitante. No tengo que sugerir ninguna corrección, ni cambio en el trabajo presentado por la Srita. Mercado.

Aprovecho la oportunidad para reiterarle las seguridades de mi atenta y distinguida consideración.

“POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU”

México, D. F., 13 de octubre de 1947

DR. CARLOS GRAEF FERNANDEZ

Señor Doctor Don Alfonso Nápoles Gándara, Jefe
del Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias,

Presente.

Me permito informar a usted que he revisado el trabajo desarrollado por la Srita. María del Pilar Juanita Mercado Domenech, intitulado: REPRESENTACION DE UNA SUPERFICIE SOBRE OTRA SUPERFICIE", como Tesis para optar el grado de Maestra en Ciencias Matemáticas, el cual reúne los requisitos necesarios, por lo que le doy mi aprobación.

Sin otro particular, reitero a usted las seguridades de mi consideración distinguida.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

México, D. F., a 31 de octubre de 1947

El Director,

M. en C. ALBERTO BARAJAS C.

Al señor Don Alberto Barajas Celis,
Director de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional de México.

Presente.

En contestación de su atento Oficio de 9 del presente, tengo el placer de comunicar a usted que después de leer el trabajo desarrollado por la Srta. María del Pilar Juanita Mercado Doménech intitulado "REPRESENTACION DE UNA SUPERFICIE SOBRE OTRA SUPERFICIE" debo informarle que en mi concepto satisface ampliamente los requisitos para Tesis para el examen final de Maestra en Ciencias Matemáticas.

Al ponerlo en conocimiento de usted, aprovecho esta oportunidad para reiterarle las seguridades de mi atenta y distinguida consideración y respeto.

México, D. F., 19 de octubre de 1947

M. en Ciencias Matemáticas,
ENRIQUETA GONZALEZ BAZ.

BIBLIOGRAFIA

- Transactions of the American Mathematical Association T. VI
- Superficies de curvatura constante y sus transformaciones.Eisenhart L. P.
- Geometria differenziale.Bianchi Luigi.
- Leçons sur la theorie generale des surfaces. ...Darboux Gastón.
- Differential geometry of curves and surfaces. Forsyth A. R.
- Differential geometry of three dimensions. .Weatherburn C.E.
- An introduction to differential geometry. ...Eisenhart L. F.
- Development of mathematics.Bell E. T.
- Historia de las matemáticas.Cajori Florian.
- Diccionario Enciclopédico.Espasa-Calpe.
- Enciclopedia Británica.