

1-A  
2EJM

00384



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**ENUMERACION POLINOMIAL DE  
RELACIONES DE ORDEN SOBRE  $\mathbb{N}^n$**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS  
(MATEMATICAS)  
PRESENTA

**LUIS BERNARDO MORALES MENDOZA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER BRACHO CARPIZO**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1993



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Polynomial Enumeration of Ordering Relations on $\mathbb{N}^n$

Luis Bernardo Morales Mendoza

**Abstract:** Here  $R$  y  $N$  denote the real numbers and the nonnegative integers respectively, and  $s(x) = x_1 + \dots + x_n$  when  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$  with  $0 < n \in \mathbb{N}$ . A function  $f$  from  $\mathbb{R}^n$  on  $R$  is a packing function of dimension  $n$  if its restriction  $f|_{\mathbb{N}^n}$  is a bijection onto  $N$ . (Packing functions generalize Cantor's polynomials, and yield multidimensional-array storage schemes). Two functions are equivalent if relabeling variables makes them identical.

A function  $f$  enumerates an order  $<$  on  $\mathbb{N}^n$  if  $f$  is a packing function and  $f(x) < f(y)$  when  $x < y$ . An order  $<$  on  $\mathbb{N}^n$  is called diagonal if  $x < y$  when  $s(x) < s(y)$ . Then,  $f$  is a diagonal function if  $f$  enumerates a diagonal order.

We define and study the properties of "diagonal products" of diagonal orders. Starting from the natural order on  $\mathbb{N}$ , we construct inductively, with these diagonal products,  $b_n$  diagonal orders on  $\mathbb{N}^n$ , where

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, \dots) = (1, 1, 2, 6, 20, 72, 272, \dots);$$

also we show that for each of these diagonal orders there is a polynomial function that enumerates it. Hence, we construct  $b_n$  new inequivalent diagonal polynomials of dimension  $n$ .

Extending the tree arguments of [1], [2] we obtain new nondiagonal packing polynomials on  $N^n$ , for  $n > 2$ .

Finally, we prove, up to equivalence, that dimension 3 admits just two diagonal polynomials. (Formerly it was only known that dimension 2 admits only one [2]).

#### References

- [1] J.S. Lew, Polynomial enumeration of multidimensional lattices, Math. Systems Theory, 12, 253-270, 1979.
- [2] L.B. Morales, J.S. Lew, An enlarged of packing polynomial on multidimensional lattices, IBM Research Report RC 18291, 1992.

## **Contenido**

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>Ordenes y Polinomios</b>	
<b>2. Ordenes Diagonales</b>	<b>9</b>
<b>3. Enumeración de Productos y <math>Q</math>-polinomios</b>	<b>19</b>
<b>4. Composiciones de <math>Q</math>-polinomios</b>	<b>30</b>
<b>Clasificación de Polinomios Diagonales</b>	
<b>5. Polinomios Diagonales Arbitrarios</b>	<b>40</b>
<b>6. Clasificación de Polinomios Diagonales sobre <math>N^3</math></b>	<b>46</b>

## 1. Introducción

Denotamos por  $R$ ,  $Z$  y  $N$  a los conjuntos de números reales, de enteros y de enteros no negativos, respectivamente. Dado  $n \in N$ , representamos por  $N^n$  al conjunto de  $n$ -adas de enteros no negativos y por  $s(x)$  a la suma  $x_1 + \dots + x_n$ , para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in N^n$ , a  $s(x)$  se le llama el peso de  $x$ .

Sea  $f$  una función de  $R^n$  en  $R$  y  $<_\alpha$  un orden sobre  $N^n$ . Decimos que

- a)  $f$  es de *almacenamiento* si  $f|N^n$  es una inyección en  $N$ ;
- b)  $f$  es de *empacamiento* si  $f|N^n$  es una biyección sobre  $N$ ;
- c)  $f$  *enumera el orden*  $<_\alpha$  si  $f$  es de empacamiento y  $f(x) < f(y)$  cuando  $x <_\alpha y$ .
- d)  $<_\alpha$  es *diagonal* si  $<_\alpha$  es lineal sobre  $N^n$  y  $x <_\alpha y$  cuando  $s(x) < s(y)$ .

Los órdenes diagonales y los polinomios que enumeran dichos órdenes, llamados *polinomios diagonales*, tienen una larga historia: Parece que Cauchy tiene la originalidad sobre estos conceptos, pues en su "Cours d'analyse" [3] presenta un orden diagonal del arreglo  $\{a_{ij} : i, j = 1, \dots\}$  para interpretar una doble serie como una simple sumatoria. Específicamente, visitando sucesivamente las diagonales  $\{a_{ij} : i + j = n\}$ , para  $n = 1, 2, \dots$  y procediendo de izquierda a derecha sobre cada línea. Más tarde, Cantor, estudiando cardinalidades [1,2], usa estas ideas en un camino más fundamental para

probar la numerabilidad de los números racionales positivos. En efecto, observó que el polinomio

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + 1)(x + y) + x \quad (1.1)$$

enumera la latiz  $N^2$ , y extendió sus resultados a cualquier producto Cartesiano de conjuntos numerables.

Después, Chowla [4] exhibió una generalización en dimensiones mayores de ese orden diagonal y dio un polinomio diagonal que enumera dicho orden.

Un problema interesante en este contexto es el de encontrar todos los polinomios biyectivos de  $N^2$  en  $N$ . Sobre este problema hay algunos resultados. Fuertter y Pólya [5], uniendo dos notas individuales en un solo trabajo, demuestran que el polinomio de Cantor y el correspondiente  $f(y, x)$  son los únicos polinomios cuadráticos asociados con este problema. Pólya y Szegő [14], evaluando el área

$$\{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x, y \leq 1; 0 \leq f_d(x, y) \leq 1\},$$

para cualquier polinomio  $f$ , donde  $f_d$  es su parte homogénea de grado mayor, demuestran la no existencia de tales polinomios con  $f_d(x, y) > 0$  en el primer cuadrante, excepto los polinomios de Cantor. Lew y Rosenberg [6,7] generalizan la discusión del problema anterior considerando subconjuntos  $S$  de  $Z^2$  y, vía conceptos de densidad estándar asintótica de la teoría de números [13], demuestran la no existencia de polinomios biyectivos de  $Z^2$  o  $Z \times N$  sobre  $N$ , o de cualquier polinomio cuadrático de  $N^2$  sobre  $N$ , excepto los polinomios de Cantor.

Recientemente, Morales y Lew [10] para cada entero positivo  $n$ , construyen  $2^{n-2}$

polinomios diagonales sobre  $N^n$  esencialmente distintos; los cuales son generalizaciones de los polinomios de Chowla y, vía composiciones de estas funciones construyen una familia adicional de biyecciones de  $N^n$  en  $N$ , estas biyecciones no son polinomios diagonales. Con conceptos de árboles planos etiquetados clasifican dichas composiciones y cuentan el número de clases de equivalencia.

Una generalización del problema anterior es encontrar, para cada  $n > 0$ , todos los polinomios biyectivos de  $N^n$  sobre  $N$ . Este problema parece ser muy difícil, quizás solamente estudiando los polinomios diagonales pueda ser más tratable. Por otro lado, pensamos que todo polinomio biyectivo es una composición de polinomios diagonales sobre dimensiones menores.

En este trabajo aportamos tres resultados principales: la construcción de un buen número de nuevos polinomios diagonales; la caracterización de las composiciones de los polinomios diagonales vía árboles ordenados etiquetados y una clasificación de polinomios diagonales en dimensión tres.

La construcción la hacemos de la siguiente manera: Para cualquier pareja de enteros positivos  $k, m$  y dados dos órdenes, uno sobre  $N^k$  y otro sobre  $N^m$ , definimos el "producto" de estos órdenes, el cual resulta un orden sobre  $N^k \times N^m$ , con todas las propiedades deseables de los factores. Así, empezando con el único orden diagonal sobre los enteros positivos, podemos generar inductivamente el producto de órdenes sobre todas las dimensiones mayores. Entonces, a partir de la numeración de estos órdenes "producto", construimos inductivamente nuevos polinomios diagonales sobre

$N^n$  de grado total  $n$ . Estas funciones son una extensión excitante de todos los resultados previos sobre polinomios diagonales. Como se ve en el Corolario 3.11, estos polinomios generalizan los polinomios de Morales y Lew, y estos últimos, como ya se dijo, generalizan los polinomios de Chowla.

Las composiciones de polinomios diagonales dan nuevas funciones de empacamiento sobre dimensiones apropiadas, por consiguiente la caracterización de estos nuevos polinomios de empacamiento, por medio de ciertos diagramas de árbol es interesante.

Para la clasificación de polinomios diagonales en dimensión tres, por medio de aproximaciones asintóticas, demostramos que todo polinomio diagonal  $f$  de dimensión  $n$  es de grado total  $n$ , y además depende de un polinomio  $h$  de grado total  $n - 1$  sobre la misma dimensión. Luego, analizando los coeficientes de este polinomio  $h$ , probamos que las únicas funciones polinomiales diagonales son las construidas en este trabajo. Este resultado en dimensión tres refuerza la factibilidad de resolver el problema de describir todos los polinomios diagonales sobre cualquier dimensión.

Para explicar una propiedad importante de las funciones diagonales, consideremos, para cada  $w \in N$  y  $n$  un entero positivo, los conjuntos

$$D(n, w) = \{x \in N^n : s(x) = w\} \quad (1.2)$$

$$E(n, w) = \{x \in N^n : s(x) \leq w\}; \quad (1.3)$$

los conjuntos  $D(n, w)$  y  $E(n, w)$  son llamados, respectivamente, *hiperplano diagonal* (o *bloque*) de peso  $w$  y *cono diagonal* de altura  $w$ .

**Lema 1.1.** Si  $w \in N$  y  $n$  es un entero positivo entonces las cardinalidades de  $D(n, w)$  y  $E(n, w)$  son  $\binom{n-1+w}{n-1}$  y  $\binom{n+w}{n}$ , respectivamente.

**Demostración.** El coeficiente binomial  $\binom{n-1+w}{n-1}$  cuenta el número de maneras de arreglar  $w$  1's y  $n-1$  signos  $+$  en un renglón, y tales arreglos corresponden a las soluciones en enteros no negativos, o sea, a los elementos del conjunto  $D(n, w)$ . ■

Las funciones de Chowla son polinomios de empaquetamiento sobre  $N^n$ . Además, estas funciones tienen una propiedad especial: para cada peso  $w$  mapean biyectivamente  $E(n, w)$  sobre  $\{0, \dots, \binom{n+w}{n} - 1\}$ . Por consiguiente  $D(n, w)$  es también mapeado biyectivamente sobre una sucesión consecutiva de enteros no negativos. Si una función de  $n$  variables tiene la propiedad anterior, es llamada función *diagonal*.

Es fácil ver que si una función enumera un orden diagonal sobre  $N^n$ , entonces es una función diagonal y por tanto una función de empaquetamiento sobre  $N^n$ .

Denotamos por  $DO(n)$ ,  $DB(n)$  y  $DP(n)$  a las familias de relaciones de orden diagonal, funciones diagonales y polinomios diagonales sobre  $N^n$ , respectivamente.

Para cada permutación  $\sigma$  sobre el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ , cada vector  $x \in R^n$  y cada función  $f$  de  $n$  variables, denotamos

$$\sigma x = \sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad (1.4)$$

$$f\sigma(x) = f(\sigma x). \quad (1.5)$$

Dos relaciones de orden  $<_\alpha$  y  $<_\beta$  sobre  $N^n$  son *equivalentes* cuando existe un permutación  $\sigma$  tal que  $x <_\alpha y$  si y sólo si  $\sigma x <_\beta \sigma y$ . En consecuencia, si la función

$f$  enumera un orden  $\langle_{\alpha}$ , entonces  $f\sigma$  enumera el orden equivalente a  $\langle_{\alpha}$ . Luego, dos funciones  $f$  y  $g$  son *equivalentes* si  $f = g\sigma$ , para alguna permutación  $\sigma$ .

Para  $n > 0$  nuestros argumentos utilizan funciones  $f(x)$ , donde el vector  $x$  puede ser una simple combinación lineal de los vectores canónicos

$$e_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Un orden *normalizado*  $\langle_{\alpha} \in DO(n)$  significa un orden diagonal tal que  $e_i \langle_{\alpha} e_j$  si  $i < j$ , y es *uniformemente normalizado* si para  $w = 1, 2, \dots$ , tenemos que  $w e_i \langle_{\alpha} w e_j$  para  $i < j$ .  $UDO(n)$  denota la subfamilia de órdenes diagonales uniformemente normalizados sobre  $N^n$ .

Una motivación para construir funciones de almacenamiento es su aplicación al almacenamiento de arreglos multidimensionales en celdas de memoria de una computadora. En varios trabajos [11,12], Rosenberg ha estudiado el almacenamiento de *esquemas extendibles* para arreglos. Tales esquemas localizan posiciones del arreglo y así enumeran celdas de memoria, y permiten expansiones positivas de arreglos a lo largo de cualquier eje. Las funciones de almacenamiento con fórmulas polinomiales dan simples esquemas extendibles. Toda función de empacamiento sobre el mismo conjunto combina este mérito con una utilización óptima, pues no permite saltos en el almacenamiento de arreglos.

En la Sección 2 vemos que el orden de Chowla sobre  $N^n$  se puede construir inductivamente a partir del orden natural de los enteros positivos. Además, dado un orden  $\langle_{\alpha}$  sobre  $N^k$  y un orden  $\langle_{\beta}$  sobre  $N^m$ , definimos dos órdenes  $\langle_{\alpha \circ \beta}$  y  $\langle_{\alpha \circ \beta}$  sobre

$N^k \times N^m$  y demostramos que si  $\langle \alpha \rangle$  y  $\langle \beta \rangle$  son diagonales entonces los definidos también lo son.

En la sección 3, por medio de intervalos en conjunto linealmente ordenados demostramos que cada orden uniformemente normalizado de la sección 2, existe un polinomio diagonal de grado total  $n$  el cual enumera el orden dado. Y construimos, para cada entero positivo  $n$ , una familia  $DBQ(n)$  de polinomios diagonales de cardinalidad  $b_n$ , donde  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, \dots) = (1, 1, 2, 6, 20, 72, 272, \dots)$ .

En la sección 4 estudiamos algunas propiedades, de los polinomios del conjunto  $DBQ(n)$ , las cuales son usadas para demostrar que las clases de equivalencia de las composiciones de dichos polinomios son determinadas por la estructura de un árbol etiquetado.

En la Sección 5 damos una caracterización de los polinomios diagonales del conjunto  $DP(n)$ , la cual es usada en la última sección para describir todos los polinomios diagonales sobre  $N^k$ , con  $k \leq 3$ . Así, demostramos que los únicos polinomios diagonales en tales dimensiones son los construidos en la Sección 3. Además, a partir de esa caracterización definimos un operador idempotente sobre el conjunto  $DP(n)$  y demostramos que el conjunto  $DBQ(n)$  construido en la Sección 4 es invariante bajo dicho operador.

## 2. Ordenes Diagonales

El orden lineal sobre el conjunto  $N^n$  introducido por Chowla está definido de la siguiente manera.

**Definición 2.1.** Sean  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in N^n$ . Decimos que  $x$  precede a  $y$  si una de las siguientes condiciones es satisfecha

- i)  $s(x) < s(y)$ ;
- ii)  $s(x) = s(y)$  y existe  $t$  con  $1 \leq t < n$  tal que  $x_i = y_i$  para  $1 \leq i < t$  pero  $x_t > y_t$ .

Es fácil ver que este orden es un una relación de orden diagonal normalizado en  $N^n$ .

El orden de Chowla en tres dimensiones es  $(0,0,0)$  en el bloque de nivel 0;  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  en el bloque de nivel 1;  $(2,0,0)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(0,2,0)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(0,0,2)$  en el bloque de nivel 2;  $(3,0,0)$ ,  $(2,1,0)$ ,  $(2,0,1)$ ,  $(1,2,0)$ ,  $(1,1,1)$ ,  $(1,0,2)$ ,  $(0,3,0)$ ,  $(0,2,1)$ ,  $(0,1,2)$ ,  $(0,0,3)$  en el bloque de nivel 3, y así sucesivamente. Analizando este orden podemos ver que en cada bloque de nivel  $w = 1, 2, \dots$ , la ordenación de la proyección  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3)$  es el orden de Chowla en dos dimensiones (veáse Prop. 2.1).

Ahora, si  $n > 2$ , definamos los operadores  $A_k$  y  $B_k$ , para cada  $1 \leq k < n$ , de la

siguiente forma. Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  y  $m = n - k$ , sean

$$A_k x = (x_k, \dots, x_1) \in R^k, \quad (2.1)$$

$$B_k x = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in R^m. \quad (2.2)$$

**Proposición 2.1.** Sean  $x$  y  $y$  elementos de  $D(n, w)$ . Entonces  $x$  precede a  $y$  respecto al orden de Chowla en  $N^n$  si y sólo si  $B_1 x$  precede a  $B_1 y$  con respecto al orden de Chowla en  $N^{n-1}$ .

**Demostración.** Supongamos que  $x$  precede a  $y$  y  $s(x) = s(y)$ , entonces existe  $t$  tal que  $1 \leq t < n$  y  $x_i = y_i$  para  $1 \leq i < t$  pero  $x_t > y_t$ ; si  $t = 1$ , es claro que  $x_2 + \dots + x_n < y_2 + \dots + y_n$  por tanto  $(x_2, \dots, x_n)$  precede a  $(y_2, \dots, y_n)$ . Ahora, si  $t > 1$ , entonces  $(x_2, \dots, x_n)$  precede a  $(y_2, \dots, y_n)$  ya que  $x_i = y_i$  para  $2 \leq i < t$ , y  $x_t > y_t$ .

Recíprocamente, sean  $x$  y  $y$  elementos en  $D(n, w)$  tales que  $B_1 x$  precede a  $B_1 y$ . Entonces en el caso que  $x_2 + \dots + x_n < y_2 + \dots + y_n$  claramente tenemos  $x_1 > y_1$ , y por lo tanto  $x$  precede a  $y$  en  $N^n$ . Ahora, el otro caso  $x_2 + \dots + x_n = y_2 + \dots + y_n$  implica  $x_1 = y_1$ , por tanto existe un  $t$  con  $2 \leq t < n$  tal que  $x_i = y_i$ , para  $2 \leq i < t$  pero  $x_t > y_t$ . Luego,  $x$  precede a  $y$  en  $N^n$ . ■

La Proposición anterior nos sugiere construir órdenes diagonales en dimensiones mayores a partir de órdenes diagonales en dimensiones menores, empezando con el orden natural de los enteros positivos.

**Definición 2.2.** Sean  $<_\alpha$  y  $<_\beta$  relaciones de orden en  $N^k$  y  $N^m$ , respectivamente.

Definimos dos relaciones de orden  $<_{\alpha\beta}$  y  $<_{\alpha>\beta}$  en  $N^k \times N^m = N^{k+m}$  de la siguiente forma. Sean  $n = k + m$  y  $x, y$  en  $N^n$ . Entonces  $x <_{\alpha>\beta} y$  si

i)  $s(x) < s(y)$  o

ii)  $s(x) = s(y)$  y uno de los siguientes enunciados es verdadero:

a)  $B_k x <_{\beta} B_k y$ ;

b)  $B_k x = B_k y$  y  $A_k y <_{\alpha} A_k x$ .

Análogamente,  $x <_{\alpha\beta} y$  si

i)  $s(x) < s(y)$  o

ii)  $s(x) = s(y)$  y uno de los siguientes enunciados es verdadero:

a)  $A_k y <_{\alpha} A_k x$ ;

b)  $A_k y = A_k x$  y  $B_k x <_{\beta} B_k y$ .

Sea  $<_{\alpha}$  es el orden de Cantor sobre  $N^2$ , entonces el orden  $<_{\alpha\alpha}$  sobre el hiperplano diagonal  $D(4, 2)$  del conjunto  $N^4$  se puede ver geoméricamente.

Sean  $T$  y  $L$  respectivamente el tetraedro y el plano de la Figura 1. Claramente el hiperplano diagonal  $D(4, 2)$  es el subconjunto de puntos con coordenadas enteras no negativas del tetraedro  $T$ , en lo que sigue consideraremos el tetraedro  $T$  como el hiperplano diagonal  $D(4, 2)$ . El plano  $L$  es paralelo al plano determinado por los puntos  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 0)$  y  $(1, 0, 0, 1)$ . Para nuestro objetivo el plano  $L$  se moverá paralelamente en dirección al tetraedro  $T$ .

En la Figura 1 se puede ver que hay tres intersecciones del plano  $L$  con el tetraedro

$T$ . Sean  $T_1, T_2$  y  $T_3$  estas intersecciones. Después de estas observaciones, podemos decir cómo es el orden dentro del tetraedro  $T$ . El orden  $<_{\alpha\alpha}$  sobre  $T$  ordena  $T_1, T_2$  y  $T_3$  de menor a mayor. Ahora, la ordenación sobre  $T_1$  es  $(2, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 0)$ ; sobre  $T_2$  es  $(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ ; sobre  $T_3$  es  $(0, 0, 2, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 2)$ . Como se puede ver dentro de cada  $T_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ ,  $(x_1, x_2, x_3, x_4) <_{\alpha\alpha} (y_1, y_2, y_3, y_4)$  si la proyección  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_4)$  está ordenada por la relación de Cantor. Sin embargo si por esta proyección no se puede concluir nada, entonces tomamos la proyección  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_2, x_1)$  para determinar la ordenación.

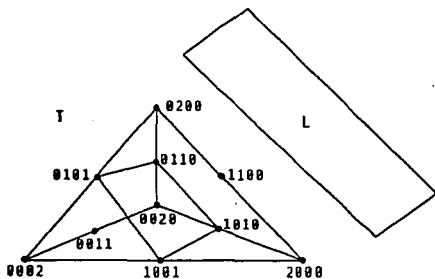


Figura 1.

**Lema 2.1.** Si  $<_{\alpha} \in UDO(k)$  y  $<_{\beta} \in UDO(m)$ , entonces  $<_{\alpha\alpha}$  y  $<_{\alpha\beta}$  son órdenes en  $UDO(k+m)$ .

**Demostración.** De la definición 2.2 podemos probar que los dos órdenes son diagonales.

Para probar que  $\langle_{\alpha \triangleright \beta}$  es un orden uniformemente normalizado, analizamos tres casos:

(a) si  $i < j \leq k$  entonces  $B_k w e_i = 0 = B_k w e_j$ , pero por hipótesis tenemos que  $A_k w e_j = w e_{k+1-j} \langle_{\alpha} w e_{k+1-i} = A_k w e_i$ .

(b) Si  $k < i < j$  entonces por hipótesis tenemos que  $B_k w e_i = w e_{i-k} \langle_{\beta} w e_{j-k} = B_k w e_j$ .

(c) Si  $i \leq k < j$  entonces  $B_k w e_i = 0 \langle_{\beta} w e_{j-k} = B_k w e_j$ .

En todos los casos, de la definición 2.2, tenemos que  $w e_i \langle_{\alpha \triangleright \beta} w e_j$ . Entonces  $\langle_{\alpha \triangleright \beta} \in UDO(k+m)$  De forma similar podemos probar que  $\langle_{\alpha \triangleleft \beta} \in UDO(n)$ . ■

Por definición tenemos que un orden uniformemente normalizado es también normalizado.

**Lema 2.2.** Sean  $\langle_{\alpha} \in UDO(k)$ ,  $\langle_{\beta} \in UDO(m)$ . Entonces  $\langle_{\alpha \triangleleft \beta} = \langle_{\alpha \triangleright \beta}$  si  $k = 1$  o  $m = 1$ .

**Demostración.** Sea  $n = k + m$ . Para probar el Lema necesitamos demostrar que  $x \langle_{\alpha \triangleleft \beta} y \iff x \langle_{\alpha \triangleright \beta} y$ , para todo  $x, y \in D(n, w)$ . Supongamos que  $k = 1$ , para  $m = 1$  la demostración es similar.

$\implies$ ). Si  $x \langle_{\alpha \triangleleft \beta} y$  entonces tenemos dos posibilidades:

(a) si  $A_1 x = x_1 > y_1 = A_1 y$  luego  $x_2 + \dots + x_n < y_2 + \dots + y_n$ , pues  $s(x) = s(y)$ ,

por lo tanto  $B_1x <_{\beta} B_1y$ .

(b) si  $A_1x = x_1 = y_1 = A_1y$  entonces de la definición 2.2 obtenemos  $B_1x <_{\beta} B_1y$ .

En ambos casos, de la definición 2.2, hemos probado que  $x <_{\alpha\beta} y$ .

$\Leftarrow$ ). Supongamos que  $x <_{\alpha\beta} y$  y  $y <_{\alpha\beta} x$ . Entonces tenemos dos posibilidades:

(a) si  $A_1y = y_1 > x_1 = A_1x$  luego  $x_2 + \dots + x_n > y_2 + \dots + y_n$ , pues  $s(x) = s(y)$ .

En consecuencia no es posible que  $x <_{\alpha\beta} y$ .

(b) si  $A_1y = y_1 = x_1 = A_1x$  entonces por la definición 2.2 necesariamente  $B_1y <_{\beta} B_1x$ , lo cual es una contradicción al hecho de que  $x <_{\alpha\beta} y$  ■

**Lema 2.3.** Sean  $\langle_{\alpha} \in UDO(k)$ ,  $\langle_{\beta} \in UDO(n-k)$ ,  $\langle_{\alpha'} \in UDO(k')$ , y  $\langle_{\beta'} \in NDO(n-k')$ , sean  $m = n-k$  y  $m' = n-k'$ . Entonces

a) Si  $1 < k$ ,  $k' < n-1$  entonces  $\langle_{\alpha} \neq \langle_{\alpha'}$  y  $\langle_{\alpha'} \neq \langle_{\beta'}$  son diferentes órdenes;

b) si  $\langle_{\alpha\beta} = \langle_{\alpha'\beta'}$  o  $\langle_{\alpha} \neq \langle_{\alpha'}$  y  $\langle_{\beta} = \langle_{\beta'}$ , entonces  $k = k'$  y  $\langle_{\alpha} = \langle_{\alpha'}$  y  $\langle_{\beta} = \langle_{\beta'}$ .

**Demostración.** a) Sean  $1 < k$ ,  $k' < n-1$ ,  $x = e_2 + e_{n-1}$  y  $y = e_1 + e_n$ . Claramente  $B_kx = e_{m-1}$  y  $B_ky = e_m$ , como  $\langle_{\beta}$  es normalizado, entonces  $B_kx <_{\beta} B_ky$ , luego por la definición del orden  $\langle_{\alpha\beta}$ , tenemos que  $x <_{\alpha\beta} y$ . Por otro lado,  $A_{k'}x = e_{k'-1}$  y  $A_{k'}y = e_{k'}$ . Luego  $A_{k'}x <_{\alpha'} A_{k'}y$ , y por la definición 2.2 tenemos  $y <_{\alpha'\beta'} x$ .

b) Supongamos que  $k < k'$ . Si  $x = e_1 + e_n$  y  $y = 2e_{k+1}$ , entonces  $B_kx = e_m$  y  $B_ky = 2e_1$ , así  $B_kx <_{\beta} B_ky$ , luego por la definición 2.2 tenemos  $x <_{\alpha\beta} y$ . Por otro lado,  $B_{k'}x = e_{m'}$  y  $B_{k'}y = 0$ , luego  $B_{k'}y <_{\beta} B_{k'}x$ , entonces por la definición 2.2 tenemos que  $y <_{\alpha'\beta'} x$ .

Ahora, supongamos que  $k = k'$  y  $\langle_{\beta} \neq \langle_{\beta'}$ , entonces podemos encontrar  $x, y \in N^m$

tales que  $x <_{\beta} y$  y  $y <_{\beta'} x$  por tanto,  $(0, x) <_{\alpha > \beta} (0, y)$  y  $(0, y) <_{\alpha' > \beta'} (0, x)$ . Análogamente se puede demostrar el Lema para el caso en que  $\alpha \neq \alpha'$ .

De forma semejante se puede demostrar que si  $\alpha <_{\alpha\beta} \alpha'$ , entonces  $k = k'$   
 $\alpha <_{\alpha} \alpha'$  y  $\beta <_{\beta} \beta'$ . ■

Aquí, utilizando conceptos desarrollados anteriormente, definimos una familia  $DOQ(n)$  de órdenes diagonales normalizados en  $N^n$ .

$DOQ(1)$  es la familia formada por el orden natural de los enteros positivos, el cual es diagonal y uniformemente normalizado. Ahora, para  $n > 1$ , supongamos construidas las familias  $DOQ(k)$ , para cualquier  $k < n$ ; entonces definimos  $DOQ(n)$  como el conjunto formado por todos los órdenes diagonales uniformemente normalizados  $\alpha <_{\alpha\beta}$  y  $\alpha >_{\alpha\beta}$  para cada pareja  $\alpha \in DOQ(k)$  y  $\beta \in DOQ(n-k)$ , donde  $k = 1, \dots, n-1$ . Claramente el conjunto  $DOQ(2)$  está formado justamente por el orden diagonal de Cantor [1,2]. Denotemos por  $b_n$  la cardinalidad del conjunto  $DOQ(n)$ . Ahora estudiaremos la sucesión de enteros  $\{b_n\}$ .

**Teorema 2.4.** Si  $n > 2$ , la sucesión  $\{b_n\}$  cumple la relación de recurrencia:

$$b_{n+1} = b_n + 2b_{n-1}b_2 + \dots + 2b_2b_{n-1} + b_n \quad (2.3)$$

con  $b_1 = b_2 = 1$ . Además, los órdenes diagonales en  $DOQ(n)$  no son equivalentes por parejas.

**Demostración.** Por el Lema 2.3 a) y b) las relaciones  $\alpha <_{\alpha\beta}$  y  $\alpha >_{\alpha\beta}$  son diferentes cuando  $1 < k < n-1$  y, por el Lema 2.2, son iguales cuando  $k = 1$  o  $k = n-1$ . Por consiguiente  $b_n$  cumple la ecuación (2.3). Ahora, por el Lema 2.1 los órdenes en

$DOQ(n)$  son normalizados, o sea  $e_i < e_j$ , si  $i < j$ . Por lo tanto no son equivalentes por parejas. ■

**Proposición 2.5.** La función generadora de la sucesión  $\{b_n\}$  es

$$G(x) = 1 + 2x - (1 - 4x - 4x^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

**Demostración.**  $G(x) = x + x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} =$

$$x + x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n + 2b_{n-1}b_2 + \dots + 2b_2b_{n-1} + b_n)x^{n+1} =$$

$$x + x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (2b_n + 2b_{n-1}b_2 + \dots + 2b_2b_{n-1} + 2b_n)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_nx^{n+1}.$$

Entonces  $G(x) = x + x^2 + 2G(x)^2 - 2xG(x)$ . Así,  $0 = x + x^2 - (2x + 1)G + 2G^2$ .

Resolviendo esta ecuación para  $G$  obtenemos (2.4). ■

Ahora, veamos de una manera intuitiva como están arreglados los nuevos órdenes.

La Tabla 1 muestra de arriba a abajo la ordenación  $<_{\alpha\beta}$  de los elementos de  $D(n, w)$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  es cualquier elemento de ese conjunto,  $w_1 = x_1 + \dots + x_k$  y  $w_2 = x_{k+1} + \dots + x_n$ . La segunda recta vertical de esta tabla divide a las  $n$ -adas en dos partes: una con  $k$  coordenadas y la otra con  $n-k$  coordenadas.

Cada dos rectas horizontales consecutivas de la Tabla 1 definen un intervalo  $I$  en  $D(n, w)$ ; claramente este conjunto es la unión de estos intervalos. Además podemos ver que la imagen, bajo  $B_k$ , de cada uno de esos intervalos es constante y dos de estos intervalos  $I$  e  $I'$  cumplen  $I <_{\alpha\beta} I'$  si  $B_k I <_{\beta} B_k I'$ .

De forma análoga la Tabla 2 muestra el orden  $<_{\alpha\beta}$  en el conjunto  $D(n, w)$ .

$w,$	...	$0$	$0,$	...	$0$
$0,$	...	$w$	$0,$	...	$0$
$w-1,$	...	$0$	$1,$	...	$0$
$0,$	...	$w-1$	$1,$	...	$0$

$w-1,$	...	$0$	$0,$	...	$1$
$0,$	...	$w-1$	$0,$	...	$1$

$w_1+1,$	...	$0$	$w_2-1,$	...	$0$
$0,$	...	$w_1+1$	$w_2-1,$	...	$0$

$w_1+1,$	...	$0$	$0,$	...	$w_2-1$
$0,$	...	$w_1+1$	$0,$	...	$w_2-1$

$w_1,$	...	$0$	$w_2,$	...	$0$
$x_1,$	...	$x_k$	$w_2,$	...	$0$
$0,$	...	$w_1$	$w_2,$	...	$0$

$w_1,$	...	$0$	$x_{k+1},$	...	$x_n$
$x_1,$	...	$x_k$	$x_{k+1},$	...	$x_n$
$0,$	...	$w_1$	$x_{k+1},$	...	$x_n$

$w_1,$	...	$0$	$0,$	...	$w_2$
$x_1,$	...	$x_k$	$0,$	...	$w_2$
$0,$	...	$w_1$	$0,$	...	$w_2$

$0,$	...	$0$	$w,$	...	$0$
------	-----	-----	------	-----	-----

$0,$	...	$0$	$0,$	...	$w$
------	-----	-----	------	-----	-----

I  
I  
I

Tabla 1

I  
I

$w_1, \dots, 0$	$0, \dots, 0$
$0, \dots, w$	$0, \dots, 0$
$w-1, \dots, 0$	$1, \dots, 0$
$w-1, \dots, 0$	$0, \dots, 1$
$0, \dots, w-1$	$1, \dots, 0$
$0, \dots, w-1$	$0, \dots, 1$
$w_1, \dots, 0$	$w_2, \dots, 0$
$w_1, \dots, 0$	$x_{k+1}, \dots, x_n$
$w_1, \dots, 0$	$0, \dots, w_2$
$x_1, \dots, x_k$	$w_2, \dots, 0$
$x_1, \dots, x_k$	$x_{k+1}, \dots, x_n$
$x_1, \dots, x_k$	$0, \dots, w_2$
$0, \dots, w_1$	$w_2, \dots, 0$
$0, \dots, w_1$	$x_{k+1}, \dots, x_n$
$0, \dots, w_1$	$0, \dots, w_2$
$w_1-1, \dots, 0$	$w_2+1, \dots, 0$
$w_1-1, \dots, 0$	$0, \dots, w_2+1$
$0, \dots, w_1-1$	$w_2+1, \dots, 0$
$0, \dots, w_1-1$	$0, \dots, w_2+1$
$0, \dots, 0$	$w, \dots, 0$
$0, \dots, 0$	$0, \dots, w$

Tabla 2

### 3. Enumeración de Productos y Q-polinomios

A partir de intervalos, en esta sección probamos que si  $f$  y  $g$  son dos funciones que enumeran respectivamente  $\langle_{\alpha} \in DOQ(k)$  y  $\langle_{\beta} \in DOQ(m)$ , entonces existen dos funciones  $h_1$  y  $h_2$ , definidas por las funciones  $f$  y  $g$ , tales que enumeran respectivamente los Q-ordenes  $\langle_{\alpha \circ \beta}$  y  $\langle_{\alpha \triangleleft \beta}$ . Además probamos que si las funciones  $f$  y  $g$  son polinomios diagonales entonces  $h_1$  y  $h_2$  son también polinomios diagonales.

**Lema 3.1.** La función  $h(x) = \binom{n+x_1+\dots+x_n}{n}$  de  $N^n$  en  $N$  se puede extender de una manera única a un polinomio sobre  $R^n$  de grado total  $n$ .

**Demostración.** Claramente, tenemos que

$$h(x) = \frac{1}{n!} (x_1 + \dots + x_n + n) \cdots (x_1 + \dots + x_n + 1). \quad (3.1)$$

En consecuencia,  $h$  se puede ver como un polinomio sobre  $R^n$ . Como el polinomio (3.1) es de grado total  $n$ , e interpola el arreglo triangular  $N^n$  en  $R^n$ , entonces de la teoría de interpolación multivariada [16], obtenemos la unicidad del polinomio (3.1) ■

Por el Lema 3.1 podemos considerar a la función  $h(x) = \binom{n+x_1+\dots+x_n}{n}$  como un polinomio de la forma (3.1).

**Lema 3.2.** Sean  $\langle_{\gamma} \in DOQ(k+m)$  y  $n = k+m$ . Sea  $1 \leq i \leq n$ . Entonces

$$w_{e_i} = \min \{x \in D(n, w) : x_i = 0, \text{ para todo } i < l\}. \quad (3.2)$$

$$we_l = \max \{x \in D(n, w) : x_i = 0, \text{ para todo } i > l\} \quad (3.3)$$

**Demostración.** Esto es trivial cuando  $n = 2$ , pues el único orden en  $DOQ(2)$  es el de Cantor. Supongamos cierto (3.2) y (3.3) para cualquier entero  $< n$ . Sea  $x = (0, \dots, 0, x_l, \dots, x_n) \in D(n, w)$ , analicemos dos casos:

(a) Si  $k < l$  entonces de la definición del operador  $A_k$ , tenemos que  $A_k we_l = (0, \dots, 0) = A_k x$ . Por hipótesis de inducción en (3.2) se sigue que  $B_k we_l = we_{l-k} \leq \beta (0, \dots, 0, y_{l-k}, \dots, y_{n-k}) = B_k x$  en  $D(m, w)$ , donde  $y_j = x_{j+k}$  para  $j = l-k, \dots, m$ .

(b) Si  $k \geq l$  entonces de la definición del operador  $B_k$  tenemos que  $B_k we_l = (0, \dots, 0) \leq \beta (x_{k+1}, \dots, x_n) = B_k x$ . Por hipótesis de inducción en (3.3) se sigue que  $A_k x = (y_1, \dots, y_{k-j+1}, 0, \dots, 0) \leq \alpha we_{k-l+1} = A_k we_l$ , en  $N^k$ , donde  $y_j = x_{k-j+1}$ , para  $j = 1, \dots, k = l+1$ .

De la definición 2.2 y de los casos (a) y (b) tenemos que  $we_l \leq_\gamma (0, \dots, 0, x_l, \dots, x_n)$  en  $D(n, w)$ , para los dos órdenes  $\gamma = \alpha \triangleright \beta$  y  $\gamma = \alpha \triangleleft \beta$ .

Similarmente, utilizando la inducción en (3.2) y (3.3) se demuestra (3.3). ■

Ahora, en el conjunto ordenado  $(N^n, <_{\alpha \triangleright \beta})$  definamos intervalos.

$$[x, y) = \{z \in N^n : x \leq_{\alpha \triangleright \beta} z <_{\alpha \triangleright \beta} y\}. \quad (3.4)$$

donde  $x$  y  $y$  son elementos de  $N^n$  con  $x <_{\alpha \triangleright \beta} y$ .

**Observación 1.** Si  $h$  es una función que numera el orden lineal  $<_\gamma$  sobre  $N^n$ , entonces de la definición de  $h$  tenemos que  $h(x)$  es igual a la cardinalidad del intervalo  $[0, x)$ , para cada  $x$  en  $N^n$ .

De lo anterior, si  $h$  es una función que numera el orden  $<_{\gamma}$ , entonces la cardinalidad del intervalo  $[x, y]$  es  $h(y) - h(x)$ .

En lo que sigue,  $<_{\alpha} \in DOQ(k)$  y  $<_{\beta} \in DOQ(m)$ , y a menos que se indique lo contrario, consideramos intervalos en el conjunto ordenado  $(N^n, <_{\alpha \triangleright \beta})$ .

Del Lema 3.2 podemos ver que

$$D(n, w) = [w e_1, w e_n], \quad (3.5)$$

$$E(n, w - 1) = [0, w e_1]. \quad (3.6)$$

Para simplificar la notación, cuando no exista confusión, los operadores  $A_k$  y  $B_k$  serán denotados simplemente por  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Es fácil demostrar que para cada  $x \in D(n, w)$ , con  $w_1 = s(Ax)$  y  $w_2 = s(Bx)$ , tenemos la siguiente unión disjunta

$$\begin{aligned} [0, x] &= [0, w e_1] \cup [w e_1, w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}] \cup \\ & [w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}, w_1 e_1 + Bx] \cup [w_1 e_1 + Bx, x]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

aquí abusamos de la notación al considerar  $Bx = (x_{k+1}, \dots, x_n)$  como el vector  $(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$  en  $N^n$ .

Si calculamos la cardinalidad de los cuatro intervalos del lado derecho de (3.7), entonces podemos calcular el número de elementos menores que  $x$ , es decir, podemos dar una función de  $N^n$  en  $N$  que enumera el orden  $<_{\alpha \triangleright \beta}$ .

**Observación 2.** Claramente, de (3.6) y del Lema 1.1, la cardinalidad del primer intervalo del lado derecho de (3.7) es  $\binom{n-1+s(x)}{n} - 1$ .

Dado un peso  $w$ , entonces para cualquier  $y \in E(m, w)$ , sea

$$I_{y,w} = D(k, w - s(y)) \times y, \quad (3.8)$$

es fácil ver que  $I_{y,w}$  es un subconjunto del conjunto  $D(n, w)$ .

**Lema 3.3.**  $|I_{y,w}| = \binom{k-1+w-s(y)}{k-1}$ .

**Demostración.** Si  $y \in E(m, w)$ , entonces el resultado se sigue de (3.8) y del Lema 1.1. ■

**Lema 3.4.**  $J = [w e_1, w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}] = \bigcup_{y <_{\beta} w_2 e_1} I_{y,w}$ .

**Demostración.** Primero, supongamos que  $z \in J$ , entonces  $s(z) = w$  y de la definición 2.2 tenemos  $Bz <_{\beta} w_2 e_1$ . Por tanto, si  $y = Bz$  obtenemos  $s(Az) = w - s(y)$ , luego de (3.8)  $z \in I_{y,w}$  con  $y <_{\beta} w_2 e_1$ .

Para la inclusión inversa. Sea  $z \in D(k, w - s(y)) \times y$ , para algún  $y <_{\beta} w_2 e_1$ , entonces por el Lema 3.2  $s(y) < w_2$ . Así,  $s(Az) = w - s(y) > w - w_2 = w_1$ . Por tanto, del Lema 3.2 resulta  $w_1 e_1 <_{\alpha} Az \leq_{\alpha} w e_1$ . Como  $Bz = y$  entonces  $Bz < w_2 e_1$ . De la definición 2.2 tenemos que  $w e_1 \leq_{\alpha \circ \beta} z <_{\alpha \circ \beta} w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}$ . Por tanto  $z \in J$ . ■

Para cada  $0 \leq w_2 \leq w$ , sea  $w_1 = w - w_2$ . Denotemos por  $p(k, w_2)$  la cardinalidad del intervalo  $[w e_1, w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}]$ .

**Lema 3.5.** Si  $w_2 > 0$  entonces

$$p(k, w_2) = \sum_{i=1}^{w_2} \binom{k-1+w_1+i}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-i}{n-k-1}, \quad (3.9)$$

y  $p(k, 0) = 0$ .

**Demostración.** Es fácil ver que  $p(k,0)$  es cero. Supongamos que  $w_2 > 0$  y sea  $J = \bigcup_{y < \beta w_2 e_1} I_{y,w}$ . En forma similar a la demostración del Lema 3.4 podemos probar que

$$J = \bigcup_{t=0}^{w_2-1} \bigcup_{s(y)=t} I_{y,w}. \quad (3.10)$$

Claramente, la unión del lado derecho de (3.10) es disjunta. Luego, de (3.10) y del Lema 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} |J| &= \sum_{t=0}^{w_2-1} \sum_{s(y)=t} \binom{k-1+w-s(y)}{k-1} = \\ &= \sum_{t=0}^{w_2-1} \binom{k-1+w-t}{k-1} \binom{m-1+t}{m-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{w_2} \binom{k-1+w_1+i}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-i}{n-k-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La segunda igualdad de (3.11) se obtiene del Lema 1.1 y la tercera se obtiene del siguiente cambio de índice  $i = w_2 - t$ . Por el Lema 3.4 el conjunto  $J$  es el intervalo  $[w_1 e_1, w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}]$ . En consecuencia se sigue el Lema. ■

Estudiemos la cardinalidad del tercer intervalo de (3.7).

En lo que sigue  $f$  y  $g$  serán funciones que numeran los órdenes  $<_\alpha$  y  $<_\beta$ , respectivamente.

**Lema 3.6.** Para cada  $x$  en  $D(n,w)$ , sean  $w_1 = s(Ax)$  y  $w_2 = s(Bx)$ . Si  $J = [w_1 e_1 + w_2 e_{k+1}, w_1 e_1 + Bx]$ , entonces

$$|J| = \binom{k-1+w_1}{k-1} [g(Bx) - g(w_2 e_1)]. \quad (3.12)$$

**Demostración.** Primero demostramos que  $J$  es la unión disjunta

$$J = \bigcup_{w_1 e_1 \leq \beta y < \beta Bx} I_{y,w}. \quad (3.13)$$

En efecto, de la definición de intervalos tenemos la inclusión  $\subset$ . Para probar la inclusión inversa, sea  $z$  un elemento de  $I_{y,w}$  para algún  $y$  con  $w_1 e_1 \leq \beta y < \beta Bx$ , entonces  $w_1 e_1 \leq \beta Bz < \beta Bx$  y  $s(Bz) = w_2$ , luego  $s(Az) = w_1$ . Por lo tanto  $z \in J$ .

Por otro lado, del Lema 3.3, de (3.13) y del hecho que cada intervalo  $I_{y,w}$  del lado derecho de (3.13) tiene la misma cardinalidad, tenemos que (3.12) es verdadera. ■

Por último, analicemos la cardinalidad del cuarto intervalo del lado derecho de (3.7).

**Lema 3.7.** Para cada  $x \in D(n,w)$ , sea  $w_1 = s(Ax)$  y  $w_2 = s(Bx)$ , si  $J = [w_1 e_1 + Bx, x]$ . Entonces

$$|J| = f(w_1 e_k) - f(Ax) + 1. \quad (3.14)$$

**Demostración.** Se puede demostrar que

$$J = \{z \in D(n,w) : Ax \leq_\alpha Az <_\alpha w_1 e_k \text{ y } Bz = Bx\}, \quad (3.15)$$

lo que implica el Lema. ■

**Definición 3.1.** Si  $f$  y  $g$  son respectivamente funciones de  $N^k$  en  $N$  y  $N^m$  en  $N$ , sea  $n = k + m$ . Entonces definimos respectivamente las funciones  $f \triangleright g$  y  $f \triangleleft g$ , de  $N^n$  en  $N$ , por las relaciones (3.16) y (3.17)

$$f \triangleright g(x) = \binom{n-1+s(x)}{n} + p(k, s(Bx)) +$$

$$\binom{k-1+w_1}{k-1} [g(Bx) - g(w_2e_1)] + f(w_1e_k) - f(Ax), \quad (3.16)$$

$$f \triangleleft g(x) = \binom{n+s(x)}{n} - 1 - p(m, s(Ax)) - \\ \binom{m-1+w_2}{m-1} [f(w_1e_k) - f(Ax)] - (g(w_2e_m) - g(Bx)). \quad (3.17)$$

Aquí  $w_1 = S(Ax)$  y  $w_2 = S(Bx)$ . Las funciones (3.16) y (3.17) son llamadas respectivamente *producto diagonal derecho e izquierdo* de  $f$  y  $g$ .

**Teorema 3.8.** Sea  $f$  la función que enumera el orden diagonal  $\langle_\alpha \in DOQ(k)$  y sea  $g$  la función que enumera el orden diagonal  $\langle_\beta \in DOQ(m)$ . Entonces  $f \triangleright g$  y  $f \triangleleft g$  son las funciones que enumeran respectivamente los órdenes  $\langle_{\alpha \triangleright \beta}$  y  $\langle_{\alpha \triangleleft \beta}$  sobre  $N^n$ , donde  $n = k + m$ .

**Demostración.** Los sumandos de (3.16) corresponden a las cardinalidades de la descomposición (3.7), según Observación 2, Lema 3.5, Lema 3.6 y Lema 3.7, respectivamente. En consecuencia de la Observación 1 tenemos que  $f \triangleright g(x)$  enumera el orden  $\langle_{\alpha \triangleright \beta}$ .

En un camino similar, en el conjunto ordenado  $(N^n, \langle_{\alpha \triangleleft \beta})$ , podemos probar resultados análogos a los demostrados en esta sección para los siguientes intervalos:

$$[0, x] = [0, we_n] - \{[x, px + w_2e_n] \cup [px + w_2e_n, w_1e_k + w_2e_n] \cup [w_1e_k + w_2e_n, we_n]\}, \quad (3.18)$$

donde  $px = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ , para obtener el resto del Teorema. ■

Ahora, estamos interesados en ver que sucede con las funciones  $f > g$  y  $f < g$  cuando  $f$  y  $g$  son funciones polinomiales.

Si las funciones  $f$  y  $g$  son polinomios, entonces tenemos que todos los sumandos de (3.16) y (3.17) son polinomios en las variables  $x_1, \dots, x_n$ ; con excepción de las funciones  $p(k, s(Bx))$  y  $p(k, s(Ax))$  las cuales no parecen ser polinomios en dichas variables, pues el límite de la sumatoria de (3.9) depende de  $s(Bx)$  y  $s(Ax)$ , respectivamente.

El siguiente Teorema proporciona una fórmula polinomial para la función  $p$  en dichas variables. Como se verá, la sumatoria (3.9) se puede expresar como una suma sobre la constante  $k$ .

**Teorema 3.9.** Dado un peso  $w$ , entonces para cada  $0 \leq w_2 \leq w$  tenemos que

$$p(k, w_2) = \sum_{i=1}^k \binom{i-1+w_1}{i-1} \binom{n-i-1+w_2}{n-i} \quad (3.19)$$

**Demostración.** Inducción sobre el entero  $w_2$ . Para  $w_2 = 0$  tenemos que  $p(k, 0) = 0$  y la sumatoria de la ecuación (3.9) es también cero. Supongamos válido el resultado para  $w_2 - 1$ . Utilizando la fórmula de suma de los coeficientes binomiales y la distribución  $(a-b)(c+d) = ac + ad - b(c+d)$  obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \binom{i-1+w_1}{i-1} \binom{n-i-1+w_2}{n-i} = \\ & \sum_{i=1}^k \left[ \binom{i-1+w_1+1}{i-1} - \binom{i-1+w_1}{i-1-1} \right] \left[ \binom{n-i-1+w_2-1}{n-i} + \binom{n-i+w_2-1}{n-i-1} \right] = \\ & \sum_{i=1}^k \binom{i-1+w_1+1}{i-1} \binom{n-i-1+w_2-1}{n-i} + \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k \binom{i-1+w_1+1}{i-1} \binom{n-i+w_2-1}{n-i-1} - \sum_{i=2}^k \binom{i-1+w_1}{i-1-1} \binom{n-i-1+w_2}{n-i}. \quad (3.20)$$

Por hipótesis de inducción la sumatoria del tercer renglón de (3.20) es igual a  $p(k, w_2 - 1)$ . Por otro, lado la resta de las sumatorias de los renglones cuarto y quinto de (3.20) se reduce a un solo sumando.

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^k \binom{i-1+w_1}{i-1} \binom{n-i-1+w_2}{n-i} = p(k, w_2 - 1) + \binom{k-1+w_1+1}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-1}{n-k-1}. \quad (3.21)$$

Ahora, sustituyendo (3.9) con  $w_2 - 1$  se tiene

$$p(k, w_2 - 1) = \sum_{i=1}^{w_2-1} \binom{k-1+w_1+1+i}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-1-i}{n-k-1} = \sum_{i=2}^{w_2} \binom{k-1+w_1+i}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-i}{n-k-1}. \quad (3.22)$$

Por lo tanto de (3.21) y (3.22) obtenemos

$$\sum_{i=1}^k \binom{i-1+w_1}{i-1} \binom{n-i-1+w_2}{n-i} = \sum_{i=2}^{w_2} \binom{k-1+w_1+i}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-i}{n-k-1} + \binom{k-1+w_1+1}{k-1} \binom{n-k-1+w_2-1}{n-k-1}.$$

Entonces de la igualdad anterior y de (3.9) la fórmula es cierta. ■

Por el Teorema 3.6 y el Lema 3.1, la función  $p(k, s(Bx))$  es un polinomio sobre  $R^n$  en las variables  $x_1, \dots, x_n$ . Además, cuenta el número de elementos del segundo intervalo del lado derecho de (3.7).

**Teorema 3.10.** Si  $f$  y  $g$  son los polinomios que enumeran respectivamente los órdenes  $\langle_\alpha \in DOQ(k)$  y  $\langle_\beta \in DOQ(k)$ . Entonces  $f \triangleright g(x)$  y  $f \triangleleft g(x)$  son polinomios que enumeran los órdenes  $\langle_{\alpha \triangleright \beta}$  y  $\langle_{\alpha \triangleleft \beta}$  sobre  $N^{k+m}$ , respectivamente.

**Demostración.** Por el Teorema 3.9 y el Lema 3.1 las funciones  $f \triangleright g(x)$  y  $f \triangleleft g(x)$  son polinomios y por el Teorema 3.8 tenemos la otra parte del Teorema. ■

El siguiente Teorema generaliza todas las construcciones previas de polinomios diagonales sobre  $N^n$ . Por consiguiente, proporciona nuevas funciones polinomiales de empacamiento sobre la latiz de enteros no negativos.

**Corolario 3.11.** Los órdenes en  $DOQ(n)$  son enumerados por polinomios diagonales.

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ . Para el orden diagonal en  $N^2$ , sabemos que el polinomio de Cantor lo enumera.

Para  $n > 2$ , supongamos que para cada  $1 \leq k < n$  existen los polinomios  $f$  y  $g$ , con  $m = n - k$ , que enumeran respectivamente los órdenes  $\langle_\alpha \in DOQ(k)$  y  $\langle_\beta \in DOQ(m)$ .

Si el orden en  $N^n$  es de la forma  $\langle_{\alpha \triangleright \beta}$ , entonces del Teorema 3.10 tenemos que el polinomio  $f \triangleright g$  enumera el orden dado.

Ahora, si el orden en  $N^n$  es de la forma  $\langle_{\alpha \triangleleft \beta}$ , entonces del Teorema 3.10 tenemos que el polinomio  $f \triangleleft g$  enumera dicho orden. ■

**Corolario 3.12.** Con la notación del Teorema 3.10.

a) Si  $k = 1$ , entonces los polinomios (3.16) y (3.17) coinciden y pueden ser reescritos como

$$h(x) = \binom{n-1+s(x)}{n} + g(Bx); \quad (3.23)$$

b) Si  $k = n-1$ , entonces los polinomios (3.16) y (3.17) coinciden y pueden ser reescritos como

$$h(x) = \binom{n+s(x)}{n} - 1 - f(Ax). \quad (3.24)$$

**Demostración.** Si se pone el valor apropiado en las fórmulas (3.16) y (3.17) obtenemos el Lema. ■

Los polinomios diagonales del tipo (3.23) y (3.24) fueron obtenidos por Morales y Lew [10].

En el Teorema 3.11 demostramos que para cada orden  $<_{\gamma}$  en  $DOQ(n)$ , existe un polinomio  $h$  que lo enumera. Denotemos por  $DBQ(n)$  al conjunto de tales funciones polinomiales; una función en este conjunto es llamada un  $Q$ -polinomio de dimensión  $n$ . Claramente del Teorema 3.11 la cardinalidad del conjunto  $DBQ(n)$  es la misma cardinalidad del conjunto  $DOQ(n)$ .

Cada  $Q$ -polinomio  $h$  es uniformemente normalizado es decir, para cada  $w = 1, 2, \dots$  tenemos que  $h(we_i) < h(we_j)$  si  $i < j$ , pues  $h$  enumera un orden del conjunto  $DOQ(n)$  los cuales son ordenes uniformemente normalizados.

Ejemplos de  $Q$ -polinomios:

El único polinomio en  $DBQ(2)$ ,

$$h(x_1, x_2) = \binom{1+x_1+x_2}{2}.$$

Los dos nuevos  $Q$ -polinomios de dimension 4, sea  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{aligned} h \triangleright h(x) &= \binom{3+s(x)}{4} + \binom{2+x_3+x_4}{3} + \binom{1+x_1+x_2}{1} \binom{1+x_3+x_4}{2} \\ &\quad \binom{1+x_1+x_2}{1} [h(x_3, x_4) - h(x_3+x_4, 0)] + h(0, x_1+x_2) - h(x_2, x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \triangleleft h(x) &= \binom{4+s(x)}{4} - 1 - \binom{2+x_1+x_2}{3} + \binom{1+x_3+x_4}{1} \binom{1+x_1+x_2}{2} \\ &\quad \binom{1+x_3+x_4}{1} [h(0, x_1+x_2) - h(x_2, x_1)] - h(0, x_3+x_4) + h(x_3, x_4). \end{aligned}$$

## 4. Composiciones de $Q$ -polinomios

Al principio de esta sección estudiaremos algunas propiedades de los  $Q$ -polinomios.

Las composiciones de los mapeos de nuestra familia básica  $DBQ(n)$  de polinomios diagonales proporcionan nuevas funciones de empaquetamiento en dimensiones mayores. Representamos esas composiciones por medio de árboles etiquetados. El Teorema 4.8 demuestra que estos árboles caracterizan todas las composiciones de los mapeos de  $DBQ(n)$ .

Es fácil ver del Teorema 3.11 que la función identidad  $I$  de  $N$  en  $N$  es el único  $Q$ -polinomio de dimensión 1. Entonces aplicando inductivamente el mismo Teorema obtenemos que cualquier  $Q$ -polinomio de dimensión  $n$  es de la forma  $f \triangleright g$  o  $f \triangleleft g$  con  $f$  y  $g$  dos  $Q$ -polinomios de dimensión respectivamente  $k$  y  $m$ , donde  $n = k + m$ . Del Corolario 3.12 obtenemos  $I \triangleright h = I \triangleleft h$  para cualquier  $Q$ -polinomio  $h$ . Para simplificar, denotemos por  $J = I \triangleright I = I \triangleleft I$  al único  $Q$ -polinomio de dimensión 2. Entonces  $DBQ(1) = \{I\}$ ,  $DBQ(2) = \{J\}$  y  $DBQ(3) = \{J \triangleright I, I \triangleright J\}$ . Sabemos que la cardinalidad  $b_n$  de este conjunto  $DBQ(n)$  cumple la relación de recurrencia (2.3).

Algunas propiedades de los  $Q$ -polinomios.

**Lema 4.1.** Si  $k, m > 1$   $f \in DBQ(k)$ ,  $g \in DBQ(m)$ , y  $n = k + m$  entonces

$$f \triangleright g(e_1 + e_{n-1}) < f \triangleright g(e_1 + e_n), \quad (4.1)$$

$$f \triangleleft g(e_1 + e_{n-1}) > f \triangleleft g(e_1 + e_n). \quad (4.2)$$

**Demostración.** Por el Teorema 3.10 los polinomios  $f \triangleright g$  y  $f \triangleleft g$  enumeran órdenes diagonales normalizados. En consecuencia de la demostración del Lema 2.3 (a) se sigue (4.1) y (4.2). ■

**Lema 4.2.** Sean  $f \in DBQ(k)$  y  $g \in DBQ(m)$ . Si  $h = f \triangleright g$  o  $h = f \triangleleft g$  entonces

$$\max \{j : h(2e_j) < h(e_1 + e_n)\} = k.$$

**Demostración.** Supongamos que  $h = f \triangleright g$ , para el otro caso la demostración es similar. De (3.19) obtenemos:

$$h(2e_i) = n + 1 + f(2e_k) - f(2e_{k+1-i}), \quad \text{para } 1 \leq i \leq k, \quad (4.3)$$

$$h(2e_{k+1}) = n + 1 + \frac{(k+1)k}{2} + km + g(2e_2) - g(2e_1), \quad (4.4)$$

$$h(e_1 + e_n) = n + 1 + \frac{(k+1)k}{2} + k(m-1) + g(2e_2) - g(2e_1). \quad (4.5)$$

De la definición de polinomios uniformemente normalizados tenemos que  $f(2e_k) - f(2e_{k+1-i}) < \frac{(k+1)k}{2}$  y  $0 < g(2e_2) - g(2e_1)$ . Por consiguiente de (4.3)-(4.5) se sigue el Lema. ■

**Lema 4.3.** Sea  $h$  en  $DBQ(n)$ . (a) Si  $w \in N$  entonces

$$h(we_1) = \binom{n-1+w}{n}, \quad h(we_n) = \binom{n+w}{n} - 1, \quad (4.6)$$

por tanto  $f(2e_1) = n + 1$ . (b) Si  $n > 1$  entonces

$$h(e_1 + e_2) = n + 2 \quad h(e_{n-1} + e_n) = -1 + \frac{n(n+3)}{2}. \quad (4.7)$$

**Demostración.** La función  $h$  tiene la forma  $f \triangleright g$  o  $f \triangleleft g$  donde  $f \in DBQ(k)$  y  $g \in DBQ(m)$  aquí  $0 < k < n$  y  $m = n - k$ . Supongamos que  $h = f \triangleright g$ , para la otra función la prueba es similar. Pero (a) es cierto para  $n = 1$  ó  $2$ , y si (a) es verdadero para cualquier entero menor que  $n$ , entonces  $g(we_k) = \binom{m+w}{m} - 1$  y  $g(we_1) = \binom{m-1+w}{m}$ . De (3.19) y (3.9) tenemos

$$h(we_n) = \binom{n-1+w}{n} + \sum_{i=1}^w \binom{k-1+i}{k-1} \binom{m-1+w-i}{m-1} + \\ -1 + \binom{m+w}{m} - \binom{m-1+w}{m}. \quad (4.8)$$

De la fórmula de la suma de los coeficientes binomiales los dos últimos sumandos de (4.8) es  $\binom{m-1+w}{m-1}$ . Entonces de lo anterior y de una fórmula bien conocida de los coeficientes binomiales, los tres últimos sumandos de (4.8) es igual a  $\binom{n-1+w}{n-1}$ . Por lo consiguiente, usando de nuevo la fórmula de la suma de los coeficientes binomiales, obtenemos el resultado para  $n$ . De forma similar podemos probar el resto del Lema. ■

**Lema 4.4.** Sean  $h \in DBQ(n)$ , entonces para cada  $j$  con  $1 \leq j \leq n$  tenemos que

$$h(we_j) = \min \{h(x) : x \in N^n \quad s(x) = w \quad x_i = 0 \text{ para todo } i < j\}, \quad (4.9)$$

$$h(we_j) = \max \{h(x) : x \in N^n \quad s(x) = w \quad x_i = 0 \text{ para todo } i > j\}. \quad (4.10)$$

**Demostración.** El Lema 3.2 y el Teorema 3.11 dan las relaciones (4.9) y (4.10). ■

### Composiciones de los $Q$ -polinomios

Es fácil ver que las composiciones de los  $Q$ -polinomios son funciones de empaquetamiento sobre los primeros cuadrantes que resultan. Así los polinomios

$$\begin{aligned} I \triangleright J(x_1, x_2, x_3), & \quad J \triangleright I(x_1, x_2, x_3), \\ J(J(x_1, x_2), x_3), & \quad J(x_1, J(x_2, x_3)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

son funciones de empaquetamiento sobre  $N^3$  y los árboles etiquetados de la figura 2 son representaciones naturales de (4.11).

La nomenclatura usada aquí para el concepto de árbol es la utilizada en la literatura de la teoría de computadoras, la cual es más importante en algoritmos computacionales, ver por ejemplo [8], [10] y [17]. Sin embargo daremos una definición en términos de teoría de gráficas.

Un árbol  $T$  es una gráfica dirigida acíclica y conexa que tiene un vértice *Raíz*( $T$ ) distinguido llamado *raíz*; cada otro vértice diferente a él tiene in-grado 1, la raíz tiene in-grado 0, y los nodos sucesores directos de cualquier nodo son linealmente ordenados. El *grado* de un nodo en un árbol es su ex-grado. Nodos de un árbol, los cuales no tienen sucesor, son llamados nodos *terminales*.

Los sucesores directos de un nodo dado  $t$  en un árbol son ordenados de izquierda a derecha como  $t_1, \dots, t_k$ . Cada uno de estos nodos son la raíz de un árbol  $T_i$ ; los árboles  $T_1, \dots, T_k$  son llamados subárboles del nodo  $t$ .

Como en [10] y [17] el término de un *árbol plano* significa un árbol *sin nodos de grado uno*. El conjunto  $C_n$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , contiene a todos los árboles con

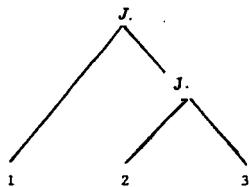
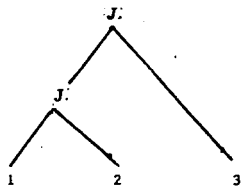
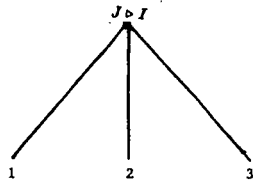
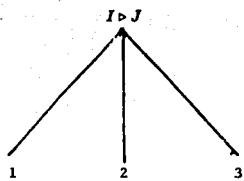


Figura 2

precisamente  $n$  nodos terminales. En particular, si  $T$  denota un árbol en  $C_n$  entonces ordenamos sus subárboles disjuntos de izquierda a derecha.

Para nuestros propósitos, necesitamos etiquetar todos los nodos de los árboles  $T$  en  $C_n$ . Esto se hace de la siguiente manera: para cualquier subárbol  $U$  de cualquier árbol  $T$ , si  $Raiz(U)$  tiene subárboles  $U_1, \dots, U_l$  entonces etiquetamos el nodo  $Raiz(U)$  con cualquier polinomio de  $DBQ(l)$ . Por último, etiquetamos los nodos terminales con las funciones  $x_1, \dots, x_n$ , donde para  $x$  en  $N^n$  tenemos que  $x_j(x) = x_j$ ; claramente estas funciones definen una permutación en  $S_n$ .

Distinguimos árboles topológicamente idénticos cuando ellos no tienen etiquetas idénticas en sus nodos correspondientes. El conjunto  $D_n$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , contiene a todos los tales árboles etiquetados con precisamente  $n$  nodos terminales.

Definamos ahora un mapeo de  $D_n$  en las funciones polinomiales de empacamiento sobre  $N^n$ . Si  $T \in D_n$  entonces definimos el polinomio  $T^*$  sobre  $N^n$ . En efecto si  $x_j$  es la etiqueta del  $j$ -ésimo nodo terminal entonces  $x_j(x) = x_j$ . Si  $U$  es cualquier subárbol y la  $Raiz(U)$  tiene los subárboles  $U_1, \dots, U_l$  y la etiqueta  $h$ , donde  $h$  es un  $Q$ -polinomio de dimensión  $l$ , entonces

$$U^* = h(U_1^*, \dots, U_l^*). \quad (4.12)$$

En (4.12) consideramos cada  $U_i^*$  como una función de todas las variables  $x_1, \dots, x_l$ , aunque no todas las variables pueden realmente influir en la función. Así, para toda función  $f(x)$  decimos que  $x_i$  es una variable *inactiva* cuando su valor no afecta a la función  $f(x)$ ; de otra forma decimos que es una variable *activa*. El conjunto de

variables activas de un subárbol  $T_j$ , llamado también su *dominio*, es el conjunto

$$R_j = \{(x_1, \dots, x_n) \in N^n : \text{para toda } x_i \notin t(T_j), x_i = 0\},$$

donde  $t(T_j)$  es el conjunto de nodos terminales de  $T_j$ . Sea  $R_0 = \{(0, \dots, 0)\}$ .

Denotemos por  $P_n$  al conjunto de todos los polinomios  $T^*$ . Las propiedades de este conjunto son el principal objetivo de esta sección. Una simple caracterización de esas composiciones de funciones proporciona un subconjunto de polinomios de empaquetamiento. Además, adecuados diagramas de árboles etiquetados pueden generar todos los elementos de la familia  $P_n$ . Así deseamos probar que cada  $T$  en  $D_n$  produce un polinomio diferente. En consecuencia, requerimos recobrar  $T$  a partir del mapeo  $T^*$ . Claramente, si  $T$  tiene una sola variable es el mapeo identidad, y si  $T$  tiene dos variables es el polinomio de Cantor o su equivalente. Por consiguiente en ambos casos recobrar  $T$  es trivial. Así, nuestra prueba reducirá el problema de  $n$  variables a varios problemas, cada uno con menos variables (activas).

Sean  $T_1, \dots, T_l$  los subárboles de la  $\text{Raíz}(T)$ ; claramente  $l = \text{grado de la raíz de } T$ . Sea  $h \in \text{DBQ}(l)$  la etiqueta de la  $\text{Raíz}(U)$ . Entonces por (4.12) tenemos que

$$T^* = h(T_1^*, \dots, T_l^*). \quad (4.13)$$

Si  $T^*$  es una función de la forma (4.13) entonces de la definición podemos ver que  $T^*(0, \dots, 0) = 0$ . Además, si  $x_{L(1)}, \dots, x_{L(l)}$  son los primeros nodos terminales respectivamente de  $T_1, \dots, T_l$ , entonces por el hecho que el polinomio  $h$  es normalizado tenemos que  $T^*(e_{L(j)}) = h(e_j) = j$ , para  $j = 1, \dots, l$ , pues  $T_j^*(e_{L(j)}) = 1$ .

En el siguiente Lema, del mapeo  $T^*$ , determinamos  $l = \text{grado}(\text{raiz}(T))$ .

**Lema 4.5.** Sea  $T^*$  un polinomio en  $P_n$  de la forma (4.13) y sea  $l = \text{grado}(T)$ .

Entonces

$$l + 2 = \min \{T^*(x) : x \text{ tiene al menos dos coordenadas diferentes de cero}\}. \quad (4.14)$$

**Demostración.** Por el parrafo anterior podemos determinar los enteros  $1 \leq L(i) \leq n$  tales que  $T^*(e_{L(i)}) = i$ , para  $i = 1, \dots, l$ , luego

$$T^*(e_{J(i)}) = h(T_1^*(e_{J(i)}), \dots, T_l^*(e_{J(i)})) = h(\delta_{i1} \dots \delta_{il}) = i. \quad (4.15)$$

Podemos suponer que  $l > 1$ , pues el árbol  $T$  no tiene nodos de grado uno. Entonces del Lema 4.3 tenemos que

$$T^*(e_{J(1)} + e_{J(2)}) = h(1, 1, 0, \dots, 0) = l + 2. \quad (4.16)$$

Ahora, si  $T_1$  tiene grado mayor que dos entonces  $\text{raiz}(T_1)$  tiene subárboles  $T_{1,1}, \dots, T_{1,s}$ , y si  $L(1,2)$  es el primer índice de las hojas de  $T_{1,2}$  entonces del Lema 4.3 tenemos

$$T^*(e_{J(1,2)}) = h(T_1^*(e_{J(1,2)}), 0, \dots, 0) = h(2, 0, \dots, 0) = l + 1. \quad (4.17)$$

De otra forma, si  $T_1$  es un nodo terminal entonces

$$T^*(2e_{J(1)}) = h(2, \dots, 0) = l + 1. \quad (4.18)$$

En consecuencia de (4.15)-(4.18)  $x$  tiene dos componentes distintas de cero cuando  $T^*(x) = l + 2$  y tiene menos componentes distintas de cero cuando  $T^*(x) < l + 2$ . De esto se sigue (4.14). ■

En el siguiente Lema determinamos, para  $j = 1, \dots, l$ , las funciones  $T_j^*$  y sus variables activas o sea los subconjunto  $R_j$  de  $N^n$ . Para esto necesitamos algunas definiciones.

Para cualquier conjunto  $R = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{j_1} = \dots = x_{j_s} = 0\}$  definimos

$$R^c = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 0, \text{ para toda } x_i \notin \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\}\}.$$

Definamos, para  $j = 1, \dots, l$ , las funciones  $b_j$  de  $N$  en  $N$ .

$$b_1(w) = \min \{T^*(y) : y \in R_0^c, \binom{l-1+w}{l} \leq T(y) \leq \binom{l+w}{l} - 1\}$$

y para  $1 < j \leq l$

$$b_j(w) = \min \{T^*(y) : y \in (R_0 + \dots + R_{j-1})^c, \binom{l-1+w}{l} \leq T(y) \leq \binom{l+w}{l-1}\}.$$

**Lema 4.6.** Sea  $T^*$  un polinomio en  $P_n$  que tiene la forma (4.13). Entonces podemos determinar las funciones  $T_1^*, \dots, T_l^*$  y sus dominios  $R_1, \dots, R_l$ , respectivamente.

**Demostración.** Por el lema 4.3 a)  $b_1(w) = \binom{l-1+w}{l}$ , así

$$x \in R_1 \text{ y } T_1^*(x) = w \iff T^*(x) = h(we_1) = b_1(w).$$

Por lo tanto  $x_{j_i}$  es un nodo terminal de  $T_1$  si y sólo si  $T(e_{j_i}) = b_1(w)$  para algún  $w \in N$ .

También  $T_1^*(x) = b_1^{-1}(w)$ , para  $x \in R_1$ .

En consecuencia, hemos determinado el mapeo  $T_1$  y su dominio  $R_1$ .

Supongamos que hemos determinado los mapeos  $T_i^*$  y sus dominios  $R_i$  para  $i < j$ .

Se puede ver de su definición que  $x \in (R_0 + \dots + R_{j-1})^c$  si y sólo si  $T_1^*(x) = \dots = T_{j-1}^*(x) = 0$ . Por consiguiente, del Lema 4.4 tenemos que

$$x \in R_j \text{ y } T_j^*(x) = w \iff T^*(x) = h(we_j) = b_j(w).$$

De la misma forma, tenemos que  $x_{p_i}$  es un nodo terminal de  $T_j$  si y sólo si  $T(e_{p_i}) = b_j(w)$ , para algún  $w \in N$ . También  $T_j^*(x) = b_j^{-1}(w)$ , para  $x \in R_j$ .

Claramente, por el Lema 4.4 podemos continuar este proceso hasta determinar todos los mapeos  $T_j^*$  y sus variables activas, es decir sus dominios  $R_j$ . ■

En los Lemas 4.5 y 4.6 hemos demostrado que apartir del mapeo  $T^*$  podemos obtener  $l = \text{grado}(\text{raiz}(T))$  y los mapeos  $T_1^*, \dots, T_l^*$ , cada uno con menos variables activas.

**Lema 4.7.** Si  $T^*$  es una función en  $P_n$  de la forma (4.13) entonces podemos determinar la estructura del árbol  $T$  y sus etiquetas.

**Demostración.** (doble inducción) Supongamos lo contrario, es decir, existen enteros  $n, l$  y un árbol etiquetado  $T$  en  $D_n$  con  $l$  subárboles de izquierda-a-derecha  $T_1, \dots, T_l$  de la  $\text{raiz}(T)$ , tales que el polinomio  $T^*$  no determina la estructura ni las etiquetas de  $T$ . Sea  $n$  el menor entero tal que lo anterior es cierto; claramente  $n > 2$ , pues el conjunto  $P_n$  contiene un sólo árbol para  $n = 1$  ó  $2$  y el Lema es verdadero. Si  $n$  tiene este menor valor, entonces el Lema falla para un menor entero  $l$ , y este entero  $l > 3$  ya que si  $l \leq 3$ , entonces por el Lema 4.1 podemos determinar los vectores  $e_{L(i)}$  tales que  $T(e_{L(i)}) = i$ , para  $i = 1, \dots, l$ . Por lo tanto podemos determinar la función  $h$ .

Por el Lema 4.6 la función  $T^*$  determina explícitamente los polinomios  $T_1^*, \dots, T_l^*$ . Sin embargo, cada  $T_i^*$  tiene un menor número de variables activas que la función  $T^*$ . Entonces, por hipótesis de inducción, para cada  $i = 1 \dots l$ , el polinomio  $T_i^*$  determina

las etiquetas y la estructura del árbol  $T_i$  y, como el entero  $i$  también se puede determinar por la función  $T^*$ . Por consiguiente podemos determinar las etiquetas y la estructura de  $T$ , lo cual es una contradicción. ■

**Teorema 4.8.** Dados  $i = 1, 2$  y  $n = 1, 2, \dots$ , sean  $T_i \in D_n$  y  $\pi \in S_n$ . Entonces  $T_1\pi_1 \sim T_2\pi_2$  si y sólo si  $T_1 = T_2$ . Mientras  $T_1\pi_1 = T_2\pi_2$  si y sólo si  $T_1 = T_2$  y  $\pi_1 = \pi_2$ .

**Demostración.** Si  $T_1 = T_2$  entonces  $T_1\pi_1 \sim T_2\pi_2$  por (1.5). Recíprocamente, si  $T_1\pi_1 \sim T_2\pi_2$  entonces  $T_1 = T_2$  por el Lema anterior. Si  $T_1\pi_1 = T_2\pi_2$  luego  $T_1 = T_2$  y  $\pi_1 = \pi_2$  por el Lema 4.7. Sin embargo, si  $\pi_1 \neq \pi_2$  entonces  $T_1\pi_1(e_j) \neq T_2\pi_2(e_j)$  para algún  $j$ . ■

El Teorema 4.8 nos dice que los elementos del conjunto  $D_n$  caracterizan las clases de equivalencia del conjunto  $P_n$  de composiciones de  $Q$ -polinomios. Es decir, dos polinomios en  $Q_n$  definen la misma clase de equivalencia precisamente cuando sus árboles etiquetados son idénticos.

## 5. Polinomios Diagonales Arbitrarios

Uno de los problemas más interesantes acerca de los polinomios de empaquetamiento es tratar de describir todos los polinomios diagonales  $n$ -dimensionales. En esta sección daremos algunos resultados para polinomios diagonales en dimensiones arbitrarias.

Si  $n > 0$  y  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $x$  es un vector racional (respectivamente entero) cuando cada  $x_i$  es racional (entero) para  $i = 1, \dots, n$ . Cualquier vector racional define un entero  $q = q(x)$ , donde  $q$  es el menor entero tal que  $qx$  es un vector entero. Claramente  $q$  es el m.c.m de los denominadores de los  $x_i$ .

Sea

$$K = \{x \in R^n : x_i \geq 0, s(x) = 1\}. \quad (5.1)$$

La topología usual en  $R^n$  define la topología relativa en  $K$ , cuyos abiertos son las intersecciones de  $K$  con los conjuntos abiertos de  $R^n$ . Para esta topología, claramente el conjunto de vectores racionales de  $K$  es denso.

Si  $x \in N^n$  y  $f \in DP(n)$  -recordamos que  $DP(n)$  es el conjunto de polinomios diagonales sobre  $N^n$ - entonces de la definición de funciones diagonales tenemos

$$\binom{n-1+s(x)}{n} \leq f(x) \leq \binom{n+s(x)}{n} - 1 \quad (5.2)$$

Aquí admitimos únicamente vectores enteros  $x$ . Pero podemos suponer  $s(x)$  muy grande. Entonces ambos coeficientes binomiales tienen una aproximación asintótica  $\frac{(n+s(x))^n}{n!}$ , cuando  $s(x) \rightarrow \infty$ . Por lo tanto

$$f(x) = \frac{s(x)^n}{n!} + O(s(x)^{n-1}). \quad (5.3)$$

Si  $f \in DP(n)$  de grado total  $d$ , y  $f_d$  es su parte homogénea de grado  $d$ , entonces  $f_d$  no es idénticamente cero.

**Lema 5.1.** Si  $f \in DP(n)$  entonces el grado total de  $f$  es  $n$ .

**Demostración.** Claramente  $\{u \in K : f(u) \neq 0\}$  es un conjunto no vacío y abierto, luego contiene un vector racional  $u$ . Si  $t \in N$  y  $q = q(u)$ , entonces  $qtu \in N^n$  y  $f(qtu)$  es un polinomio de grado  $d$  en  $qt$ . Luego

$$f(qtu) = f_d(u)(qt)^d + O((qt)^{d-1}) \quad (5.4)$$

cuando  $t$  toma valores enteros grandes. Si  $d \neq n$ , entonces (5.4) contradice (5.3), ya que  $s(qtu) = qt$ . ■

**Lema 5.2.** Si  $u \in K$  entonces  $f_n(u) = \frac{1}{n!}$ .

**Demostración.** Si no, entonces  $\{u \in K : f_n(u) \neq \frac{1}{n!}\}$  es un conjunto no vacío y abierto, por tanto contiene un vector racional  $u$ . Si  $t \in N$  y  $q = q(u)$ , de nuevo  $qtu \in N^n$  y  $f(qtu)$  es un polinomio de grado  $d$  en  $qt$ , así  $f$  satisface (5.4) cuando  $t$  toma valores enteros grandes. Claramente (5.3) y (5.4) tienen los mismos exponentes, pues  $d = n$ . Pero (5.3) y (5.4) tienen diferentes constantes  $\frac{1}{n!}$  y  $f_d(u)$ , respectivamente, y también  $s(qtu) = qt$ . Así, para un entero  $t$  suficientemente grande encontramos una contradicción. ■

Ahora, si  $x$  es cualquier elemento en  $N^n$ , entonces  $x = s(x)u$  con  $u \in K$ . Y por los Lemas 4.1 y 4.2 tenemos que

$$f(x) = f(s(x)u) = s(x)^n f_n(u) + O(s(x)^{n-1}) = \frac{s(x)^n}{n!} + O(s(x)^{n-1}).$$

En consecuencia (5.3) es verdadera para todo  $x \in N^n$ .

**Teorema 5.3.** Si  $f \in DP(n)$  entonces

$$f(x) = \binom{n-1+s(x)}{n} + h(x), \quad (5.6)$$

donde el grado de  $h$  es menor que  $n$ .

**Demostración.** Por el párrafo anterior tenemos que la fórmula (4.3) es verdadera sobre  $N^n$ . Y como (5.3) y (5.4) son equivalentes entonces obtenemos el Lema. ■

Por el Teorema 5.3 todo elemento  $f$  en  $DP(n)$  tiene la forma (5.6), entonces llamamos al polinomio  $h$  el *residuo* de  $f$ . Además, para todo tal  $f$  definimos el operador  $C$

$$Cf(x) = \binom{n-1+s(x)}{n} + \binom{n-1+s(x)}{n-1} - h(x_n, \dots, x_1) - 1. \quad (5.6)$$

Claramente de la definición de un polinomio diagonal  $f$  sobre  $N^n$ , tenemos que su residuo  $h$  mapea biyectivamente  $D(n, w)$  sobre el conjunto  $\{0, \dots, \binom{n-1+w}{n-1} - 1\}$ , para cada  $w \in N$ .

**Lema 5.4.** Si  $f \in DP(n)$  (resp.  $f \in NDP(n)$ ) entonces  $Cf \in DP(n)$  (resp.  $Cf \in NDP(n)$ ). Además,  $CCf = f$ .

**Demostración.** Si  $f \in DP(n)$  entonces de la ecuación (5.6) tenemos

$$Cf(x) = \binom{n+s(x)}{n} - h(x_n, \dots, x_1) - 1, \quad (5.7)$$

y, como para cada  $w$ ,  $-h-1$  es una biyección de  $D(n, w)$  sobre  $\{-\binom{n-1+w}{n-1}, \dots, -1\}$ , por la fórmula de suma de los coeficientes binomiales obtenemos que  $Cf$  es una biyección de  $E(n, w)$  sobre  $\{0, \dots, \binom{n+w}{n} - 1\}$ . La segunda parte se obtiene por una simple evaluación del operador  $C$ . ■

Nótese que la permutación en las variables de la ecuación (5.7) es para que  $Cf$  resulte un polinomio normalizado.

Por el Lema 5.4 tenemos que  $Cf \in DPQ(n)$  si  $f \in DPQ(n)$ , luego si  $h$  es el residuo de  $f$ , denotamos por  $Ch$  el residuo del polinomio  $Cf$ .

**Proposición 5.5.** Si  $f$  y  $g$  son polinomios diagonales de dimensión  $k$  y  $m$ , respectivamente. Entonces  $C(f \triangleright g) = g \triangleleft f$ .

**Demostración.** Sean  $n = k + m$  y  $\sigma$  la permutación  $\sigma(1, \dots, n) = (n, \dots, 1)$ . De las definiciones tenemos que  $B_k \sigma x = A_m x$  y  $A_k \sigma x = B_m x$ . Sustituyendo estas igualdades en (3.16) y (3.17) y de la definición del operador  $C$  obtenemos el Lema. ■

Hemos demostrado en la Proposición anterior que el conjunto de polinomios diagonales  $DPQ(n)$  es invariante bajo el operador  $C$ , es decir, que dicho operador no proporciona nuevos polinomios diagonales más que los de la sección anterior. De este resultado podemos pensar que las funciones del conjunto  $DPQ(n)$  son los únicos polinomios diagonales normalizados sobre  $N^n$ . Como se verá en la siguiente sección esto

es cierto en dimensiones menores que cuatro, pero para dimensiones mayores aún no se conoce la respuesta. En esta dirección estamos trabajando.

## 6. Clasificación de Polinomios Diagonales sobre $N^3$

Claramente la función identidad es el único polinomio diagonal sobre  $N$ . En esta sección probamos que existe un único polinomio diagonal normalizado sobre  $N^2$  y sólo dos sobre  $N^3$ .

Si  $f$  es una función diagonal, de la definición se sigue que  $f(0, \dots, 0) = 0$  y  $f$  toma las  $n$ -adas  $e_1, \dots, e_n$  sobre alguna permutación de los enteros  $1, \dots, n$ , así  $f$  determina una función equivalente  $g \in NDB(n)$ . Por consiguiente, para nuestros propósitos de describir todos los polinomios en  $DB(n)$ , es suficiente estudiar los elementos del conjunto  $NDP(n)$  de polinomios diagonales normalizados.

Para  $n = 2$ , si  $f \in NDP(2)$  y  $h$  es su residuo, entonces  $h(x, y) = ax + by$  y, como  $h(e_i) = i - 1$ , tenemos que  $a = 0$  y  $b = 1$ . Por lo tanto  $f$  es el polinomio de Cantor. Luego el número de polinomios diagonales sobre  $N^2$  es dos.

En lo subsiguiente  $f$  será un polinomio diagonal sobre  $N^3$  y  $h$  el residuo de  $f$ .

Por el Teorema 5.3 el polinomio residuo  $h$  de  $f$  puede escribirse como:

$$h(x, y, z) = a_2x^2 + a_1x + b_2y^2 + b_1y + c_2z^2 + c_1z + d_1xy + d_2xz + d_3yz \quad (6.1)$$

**Observación 1.** Dados los coeficientes  $a_2, b_2, c_2$  del polinomio  $h$  (ecuación 6.1), y dada la imagen de los vectores  $\bar{e}_1 = e_1 + e_2$ ,  $\bar{e}_2 = e_1 + e_3$  y  $\bar{e}_3 = e_2 + e_3$ , podemos determinar el polinomio  $h$ . En efecto, de (6.1) tenemos que  $d_1 = h(\bar{e}_1) - h(e_1) - h(e_2)$ ,  $d_2 = h(\bar{e}_2) - h(e_1) - h(e_3)$  y  $d_3 = h(\bar{e}_3) - h(e_2) - h(e_3)$ , como  $h(e_1) = 0$ ,  $h(e_2) = 1$  y  $h(e_3) = 2$ , entonces  $a_1 = -a_2$ ,  $b_1 = 1 - b_2$  y  $c_1 = 2 - c_2$ , y así obtenemos todos los coeficientes del polinomio  $h$ .

Sabemos que, para cada  $w \in N$ ,  $h$  es una biyección de  $D(3, w)$  sobre una sucesión consecutiva de enteros no negativos. Luego  $a_2, b_2, c_2 \geq 0$ , pues si uno es negativo, entonces podemos encontrar  $w$  tal que  $h(we_i) < 0$ .

**Lema 6.1.**  $a_2, b_2, c_2 \in \{0, \frac{1}{2}\}$ .

**Demostración.** Como  $h(e_3) = c_2 + c_1 \in N$  y  $h(2e_3) = 2(c_2 + c_1) + 2c_2 \in N$ , luego  $c_2 = \frac{k}{2}$  con  $k \in N$ . Supongamos que  $k > 1$ , entonces existe  $w$  tal que  $h(we_3) = \frac{k}{2}w^2 + c_1w > \frac{1}{2}(w^2 + 3w + 2) = |D(3, w)|$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $k \in \{0, 1\}$ . De forma análoga podemos probar que  $a_2$  y  $b_2$  son 0 ó  $\frac{1}{2}$ . ■

Para cada función polinomial  $f$  de grado total  $d$ , denotamos por  $c(f)$  al número de coeficientes no ceros de los  $x_i^d$ . Es fácil ver que  $c(f)$  es una función invariante bajo permutaciones.

**Lema 6.2.**  $c(h) \in \{1, 2\}$ .

**Demostración.** Es suficiente probar que  $c(h) \neq 3$  ya que, si  $c(h) = 0$ , entonces el residuo  $Ch$  del polinomio diagonal  $Cf$  cumple  $c(Ch) = 3$ . Supongamos lo contrario, es decir,  $c(h) = 3$ , luego  $a_2 = b_2 = c_2 = \frac{1}{2}$ , entonces por la Observación 1,  $h(2e_1) = 1$ ,

$h(2e_2) = 3$  y  $h(2e_3) = 5$ . Como  $h$  es una biyección de  $D(3, 2)$  sobre  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , entonces  $h$  mapea biyectivamente los vectores  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  sobre  $0, 2, 4$ . En todas las posibles biyecciones de la función  $h$  tenemos

$$\begin{aligned} h(e_1 + e_2 + e_3) &= h(e_1) + h(e_2) + h(e_3) + d_1 + d_2 + d_3 = \\ & [h(e_1) + h(e_2) + d_1] + [h(e_1) + h(e_3) + d_2] + \\ & [h(e_2) + h(e_3) + d_3] - [h(e_1) + h(e_2) + h(e_3)] = \\ & h(\bar{e}_1) + h(\bar{e}_2) + h(\bar{e}_3) - 0 - 1 - 2 = 6 - 3 = 3, \end{aligned}$$

además,  $h(3e_1) = 3$ , lo cual es una contradicción pues  $h$  es una biyección; así  $c(h) \neq 3$ .

■

**Lema 6.3.** Si  $b_2 \neq 0$  entonces  $e_2 \neq 0$ .

**Demostración.** Supongamos que  $b_2 \neq 0$  y  $e_2 = 0$ , luego por el Lema 6.1,  $b_2 = \frac{1}{2}$ ; así  $h(3e_2) = h(3e_3) = 6$ , lo cual es una contradicción pues  $h$  es biyectiva. ■

**Lema 6.4.**  $a_2 = 0$ .

**Demostración.** Si  $a_2 \neq 0$  entonces, por Lema 6.2,  $b_2 = 0$  ó  $e_2 = 0$ . Sin embargo, por el Lema 6.3, tenemos que  $b_2 = 0$ , y como  $a_2 = \frac{1}{2}$ , luego por la Observación 1 tenemos  $a_1 = -\frac{1}{2}$  y  $b_1 = 1$  lo cual implica  $h(3e_1) = h(e_2) = 3$ . Esto es una contradicción pues  $h$  es una biyección. ■

**Teorema 6.5.** Si  $h$  es el residuo de un polinomio diagonal normalizado sobre  $N^3$  entonces  $h$  tiene una de las siguientes formas:

$$h(x, y, z) = \frac{1}{2}(y^2 + y + z^2 + 3z) + yz, \quad (6.2)$$

$$h(x, y, z) = \frac{1}{2}(z^2 + 3z) + y + xz + yz. \quad (6.3)$$

**Demostración.** Por los Lemas 6.1-6.4 tenemos que  $a_2 = a_1 = 0$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$ ,  $c_1 = \frac{3}{2}$  y a)  $b_2 = b_1 = \frac{1}{2}$  ó b)  $b_2 = b_1 = 0$ . Es suficiente suponer a) pues si  $h$  satisface b) entonces  $Ch(x, y, z) = \binom{2+s(z)}{2} - h(x, y, x) - 1$  satisface a). Así, si a), entonces  $h(2e_1) = 0$ ,  $h(2e_2) = 3$  y  $h(2e_3) = 5$ . Por tanto, para determinar el polinomio  $h$ , necesitamos la imagen biyectiva de los vectores  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  sobre 1, 2, 4. Aquí examinaremos los seis posibles mapeos biyectivos.

Si  $h(\bar{e}_1) = 2$ ,  $h(\bar{e}_2) = 1$  y  $h(\bar{e}_3) = 4$ , ó  $h(\bar{e}_1) = 4$ ,  $h(\bar{e}_2) = 1$  y  $h(\bar{e}_3) = 2$ , ó  $h(\bar{e}_1) = 4$ ,  $h(\bar{e}_2) = 2$  y  $h(\bar{e}_3) = 1$ , entonces por la Observación 1 podemos determinar el polinomio  $h$  y así  $h(2e_1 + e_3) = 0$  y  $h(3e_1) = 0$ , lo cual es una contradicción. Alternativamente, si  $h(\bar{e}_1) = 1$ ,  $h(\bar{e}_2) = 4$  y  $h(\bar{e}_3) = 2$ , entonces  $h(e_1 + 2e_2) = h(e_1 + e_2 + e_3) = 4$ , otra vez una contradicción. Alternativamente, si  $h(\bar{e}_1) = 2$ ,  $h(\bar{e}_2) = 4$  y  $h(\bar{e}_3) = 1$ , entonces  $h(3e_3) = h(2e_2 + 2e_1) = 9$ , de nuevo una contradicción.

Así,  $h$  no puede ser un mapeo biyectivo a menos que  $h(\bar{e}_1) = 1$ ,  $h(\bar{e}_2) = 2$  y  $h(\bar{e}_3) = 4$ . Por tanto,  $d_1 = d_2 = 0$  y  $d_3 = 1$ . Esto demuestra (6.2). ■

Hemos probado que los únicos dos polinomios diagonales normalizados sobre  $N^3$  son los construidos en el Teorema 3.11. Por lo tanto la cardinalidad del conjunto  $DP(3)$  es 12.

## Bibliografía

- [1] G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J. reine angew. Math. (Crelle's J.) 84, 1878.
- [2] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math Ann. 45, 481-512, 1895. Traducido como Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, New York 1952.
- [3] A. L. Cauchy, Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, 1re partie: Analyse algébrique, l'Imprimerie Royale, Paris 1821, reimpresso por Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1968.
- [4] P. Chowla, On some polynomials which represent every natural number exactly once, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs ordhandling 34:2, 8-9, 1961.
- [5] R. Fuerter, G. Pólya, Rationale Abzählung der Gitterpunkte, Vierteljahr, Naturforsch, Gesellsch, Zurich, 58, 380-386, 1923.
- [6] J. S. Lew, A. L. Rosenberg, Polynomials Indexing of Integer Lattice-Points I, J. Number Theory, 10, 192-215, 1978.
- [7] J. S. Lew, A. L. Rosenberg, Polynomials Indexing of Integer Lattice-Points II, J. Number Theory, 10, 215-243, 1978.
- [8] J. S. Lew, Polynomial enumeration of multidimensional lattices, Math. Systems Theory, 12, (1979) 253-270, 1979.
- [9] J. S. Lew, Polynomial in two variables taking distinct integer values at lattice points, American Math. Monthly 88, 344-346, 1981.

- [10] L. B. Morales, J. S. Lew, An Enlarged of Packing Polynomial on Multidimensional Lattices, IBM Research Report RC 18291, 1 Septiembre 1992, sometido para su publicación a Math Systems Theory, 1992.
- [11] I. Niven, E. S. Zuckerman, An Introduction to the Theory of Numbers, 3rd. ed., Wiley, New York, 1976.
- [12] G. Pólya, G. Szego, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer-Verlag, New York, 1964. Traducido como Problems and Theorems in Analysis, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [13] A. L. Rosenberg, Data graphs and addressing schemes, J. Comput. Syst. Sci., 5,193-238, 1971.
- [14] A. L. Rosenberg, Storage mappings for extendible arrays, in R. T. Yeh (ed.), Current Trends in Programming Methodology IV: Data Structuring, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 263-311, 1978.
- [15] A. L. Rosenberg, On Storing Ragged Array by Hashing, Math. Systems Theory 10, 193-210, 1977.
- [16] E. W. Cherny, Multivariate Approximation Theory: Selected Topics, CBMS 51, SIAM, Pennsylvania 1986.