

03063



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

24

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA DE LA COMPUTACION

**UN METODO DIRECTO DE COLOCACION CON
DOMINIOS YUXTAPUESTOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

LUIS OCHOA TOLEDO

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. ISMAEL HERRERA REVILLA

MEXICO, D.F.

2001



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

Un Método Directo de Colocación con Dominios Yuxtapuestos

Luis Ochoa Toledo

Maestría en Ciencias

Posgrado en Ciencias e Ingeniería de la Computación

Universidad Nacional Autónoma de México

2001

El presente trabajo presenta el desarrollo del Método Directo de Colocación sobre dominios Yuxtapuestos. El problema que se considera es de valores a la frontera con saltos prescritos en las fronteras internas del intervalo para el caso de una ecuación diferencial lineal de segundo orden. El orden de convergencia que se logra es similar al método de colocación convencional $O(h^4)$.

Este método, desde el punto de vista de los métodos de descomposición de dominios observa una amplia relación con el método de Schwarz, por lo que al combinarse con el procedimiento de colocación podemos realizar una implementación paralela muy eficiente, dada que su formulación es independiente de cualquier esquema iterativo.

Un punto importante de este desarrollo se basa en los requerimientos que necesita el método, ya que solo requiere la aproximación de la función en cada subintervalo, con lo cual siempre se obtiene un sistema tridiagonal y además simétrico, independiente del número de puntos de colocación que se emplee en cada subintervalo, lo cual en colocación convencional no se logra.

Los resultados numéricos que se obtuvieron se basaron aplicando la ecuación diferencial lineal de segundo orden mas general en una dimensión, observando que al compararse con el método de colocación estándar y el método de colocación Trefftz-Herrera, resulta ser tan preciso como estos, sin embargo en tiempos de ejecución si se observa una gran disminución.

Dedicatorias

A mis padres:

Noe Ochoa Calderon

Maria Prisciliana Toledo de Ochoa

A mis hermanos Minerva, Ulises y Sandra.

Al Ing. Simón Herrera Mayorga y Familia.

Agradecimientos

Al Dr. Ismael Herrera Revilla, por todo su apoyo en la realización de este trabajo, así como sus sugerencias aportadas.

Al M.C. Martín Díaz Vyera, por su apoyo en la comprensión de este tema.

Al comité revisor de este trabajo por las sugerencias aportadas a este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme realizar los estudios y este trabajo.

Al CONACYT y al SNI por su apoyo económico para la realización de estos estudios de maestría y el trabajo de tesis.

ÍNDICE

Cáp. I.-	Introducción-----	1
Cáp. II.-	Perspectiva General de los Métodos de Colocación-----	3
Cáp. III.-	Métodos Directos de Dominios Ajenos (Non-Overlapping)-----	6
	3.1.- Colocación de Hermite cúbicos-----	6
	3.2.- Interpretación como Métodos de Dominios Ajenos-----	9
Cáp. IV.-	Métodos Directos de Dominios Yuxtapuestos(Overlapping)-----	10
	4.1.- Colocación de Segundo Orden-----	10
	4.2.- Colocación de Precisión Ilimitada-----	18
	4.3.- Interpretación como Método de Dominios Yuxtapuestos-----	20
	4.4.- Análisis de Error-----	24
Cáp. V.-	Implantación Numérica-----	25
Cáp. VI.-	Resultados Numéricos y Discusión-----	29
Cáp. VII.-	Conclusiones-----	40
Apend A	Código Fuente-----	42
	Bibliografía-----	51

ÍNDICE DE FIGURAS, TABLAS Y GRÁFICAS

FIGURAS

Figura 3.1	Representación de Nodos en el Intervalo $[0,1]$ y h_i -----	6
Figura 4.1	Representación de los Subintervalos Traslapados sobre $[0,1]$ -----	20
Figura 5.1	Estructura Jerárquica de las Subrutinas-----	27

TABLAS

Tabla 5.1	Número de operaciones de las Subrutinas-----	28
Tabla 6.1	Resultados del error aplicados al ejemplo 1-----	30
Tabla 6.2	Tiempos de Ejecución del ejemplo 1-----	31
Tabla 6.3	Resultados del error aplicados al ejemplo 2-----	32
Tabla 6.4	Tiempos de Ejecución del ejemplo 2-----	33
Tabla 6.5	Resultados del error aplicados al ejemplo 3-----	35
Tabla 6.6	Tiempos de ejecución del ejemplo 3-----	36
Tabla 6.7	Resultados del error aplicados al ejemplo 4-----	37
Tabla 6.8	Tiempos de ejecución del ejemplo 4-----	38

GRÁFICAS

Gráfica 6.1	Resultados del error aplicados al ejemplo 1-----	30
Gráfica 6.2	Resultados del tiempo de ejecución aplicados al ejemplo 1-----	31
Gráfica 6.3	Resultados del error aplicados al ejemplo 2-----	33
Gráfica 6.4	Resultados del tiempo de ejecución aplicados al ejemplo 2-----	34
Gráfica 6.5	Resultados del error aplicados al ejemplo 3-----	35
Gráfica 6.6	Resultados del tiempo de ejecución aplicados al ejemplo 3-----	36
Gráfica 6.7	Resultados del error aplicados al ejemplo 4-----	38
Gráfica 6.8	Resultados del tiempo de ejecución aplicados al ejemplo 4-----	39

1. INTRODUCCIÓN

El método de colocación es un procedimiento de solución numérica para ecuaciones diferenciales parciales (PDE's) y ordinarias muy conocido y atractivo dado que su formulación es muy simple y también por su alta precisión y eficiencia, Herrera[21].

La clasificación de los métodos de colocación se da en 2 sentidos primeramente: métodos directos y métodos indirectos, los *directos* son aquellos en el cual la colocación se usa para construir la solución directamente y los *indirectos* son aquellos en el cual la colocación se aplica a construir funciones de prueba especializada. El enfoque de esta tesis es hacia los métodos directos.

En particular los métodos directos más conocidos son los siguientes:

- Método de Colocación Estándar, Russell[3], DeBoor[4], Carey[5].
- Método de Colocación de Direcciones Alternadas, Celia[7].

Los métodos indirectos son.

- Método de Colocación Trefftz-Herrera, Herrera[21].

En el capítulo 2 daremos una descripción general sobre los métodos de colocación que han dado origen a los actuales desarrollos sobre esta área.

Ahora, cada uno de estos grupos de métodos de colocación se dividen en dos subgrupos, dependiendo de si la subregión usada en la construcción de la solución de *Dominios Ajenos* ó *Dominios Yuxtapuestos*, este traslapada o no. Muchas de las investigaciones reportadas en la literatura han enfocado su atención a los métodos directos de Dominios Ajenos, Herrera[21]

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar una nueva metodología sobre los métodos directos de colocación de Dominios Yuxtapuestos y realizar una comparación numérica de eficiencia y análisis de error con respecto al método directo de colocación estándar, el cual se describirá en el capítulo 3, y el método indirecto Trefftz-Herrera de colocación en una dimensión, Herrera[21]. Dentro de los objetivos particulares que se pretenden seguir para lograrlo están los siguientes:

- Desarrollo de un método de solución para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, en una dimensión, formulando el método directo de colocación sobre dominios yuxtapuestos.
- Formulación del algoritmo.
- Desarrollo del programa de cómputo.
- Aplicación a algunos ejemplos.
- Comparación de resultados con otros métodos.
- Obtención del análisis de error del método desarrollado.

La formulación matemática que dió origen a esta investigación se explica en el capítulo 4, donde se describe el método directo de colocación en Dominios Yuxtapuestos en una dimensión. El capítulo 5 aborda la implantación computacional de esta metodología y posteriormente en el capítulo 6 se hace la comparación numérica y una discusión de los resultados obtenidos de este método con respecto al método de colocación estándar y el método de colocación Trefftz-Herrera.

Un punto a resaltar con el desarrollo de este método es el problema a considerar, este será un problema general de valores a la frontera con saltos prescritos.

Capítulo II

Perspectiva General de los Métodos de Colocación

2. PERSPECTIVA GENERAL DE LOS MÉTODOS DE COLOCACIÓN

A continuación se da una reseña histórica del origen de las ideas básicas sobre las que se basa el método de colocación y los elementos que están involucrados en su aplicación a las ecuaciones diferenciales.

En su tesis doctoral Celia[7], nos ofrece una historia de los métodos de colocación antes de 1983, de los cuales mencionaremos los puntos más importantes.

La idea de usar la palabra de colocación se le atribuye a Slater[1], quien la emplea cuando estudiaba las bandas de energía en los metales. Lanczos[2] fue el primero que introdujo el concepto de Colocación Ortogonal, cuando realizó una extensión de su trabajo relacionado a la solución de ecuaciones diferenciales por series de potencias truncada y uso un polinomio de orden n , seleccionando los puntos de Colocación como los n -ceros del polinomio de Chebysheff de orden n . El uso de *polinomios por partes* para calcular la función \hat{u} en el trabajo de Russell[3], permitió un análisis más fácil de la colocación, ya que los usó como funciones de base para lograr la aproximación. DeBoor[4] se enfocó en ubicar los puntos de colocación con respecto a cada elemento finito, con lo cual demostró que si hacían coincidir los puntos de colocación con las raíces de los polinomios de Legendre se obtenía una máxima precisión para problemas unidimensionales. Para una lectura mas completa sobre los trabajos desarrollados previos a 1983 se recomienda consultar Celia[7].

En su tesis doctoral Brill[20] comenta que todo el trabajo realizado antes de 1983 se basó exclusivamente en discretizaciones de colocación de ecuaciones diferenciales parciales y estuvo enfocado a estimar su precisión. A partir de esa fecha el trabajo comenzó a tomar fuerza con los métodos iterativos para solucionar los sistemas de ecuaciones lineales que se originan de las discretizaciones de la colocación.

Sin embargo, en trabajos como el de Dyksen[8], que comparó el método de colocación estándar con el método de Galerkin se observó que el de colocación es más eficiente, y para resolver los sistemas lineales se emplearon los métodos directos como eliminación gaussiana y factorización de Cholesky. Houstis[9] desarrolló un paquete de software con su documentación y ejemplos, que solucionaba ecuaciones elípticas en dos dimensiones con discretizaciones de colocación ortogonales. Cristara[10] paralelizó la solución de la discretización mediante colocación empleando polinomios de splines cuadráticos en lugar de los de Hermite cúbicos sobre una máquina paralela hipercubo. La introducción de la paralelización vía descomposición de dominios para el método de colocación comenzó con el trabajo de Zampieri[14] quién lo aplica a la solución de elasticidad lineal. Herrera[17] también desarrolló otro algoritmo de descomposición de dominios para el método de Colocación, aplicándolo a problemas de transporte y flujo subterráneo. En estos trabajos, se empleó la colocación ortogonal estándar, Robinson[16] también empleó tipo de colocación aplicándolo a ecuaciones diferenciales parciales con valores complejos y a la ecuación Schrödinger en una dimensión, Robinson[18].

El área en la cual se centra mas atención hoy en día es por un lado en la solución de los sistemas lineales como lo demuestran los trabajos de Brill[20] vía métodos tipo gradiente conjugado y principalmente empleando el método GMRES, el cual es un método para la solución de sistemas lineales de ecuaciones de manera iterativa aplicando un preconditionador, y de Ng[22] quien también se enfocó a desarrollar un método para solucionar numéricamente el problema de valores a la frontera aplicando el método de colocación usando splines cuadráticos en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en 2 dimensiones; y por el otro lado está el área de la discretización de colocación mediante los métodos de descomposición de dominio, tal como el trabajo de Herrera[21] quien emplea la formulación Trefftz-Herrera aplicando el método indirecto de colocación sobre dominios ajenos

La literatura existente hoy en día hace mucha referencia especialmente sobre los métodos directos basándose en dominios ajenos, hasta la fecha no existen desarrollos que empleen los dominios yuxtapuestos, el propósito de esta tesis se centra en el desarrollo de un método directo de colocación, vía descomposición de dominios, empleando dominios yuxtapuestos, además de considerar ecuaciones con saltos prescritos. Por otro lado es preciso dar unas definiciones que nos permitirán entender mas a fondo el método de colocación.

El *método de colocación* básicamente consiste en crear una solución aproximada como una combinación lineal de un conjunto apropiado de funciones, cuyos coeficientes se determinan al requerir la combinación que satisfaga la ecuación diferencial en ciertos puntos. La ecuación diferencial que se desea solucionar es de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \quad (2.1)$$

Donde \mathcal{L} es un operador diferencial. Sea X el espacio de funciones definidas en el dominio de \mathcal{L} . Entonces aproximar la solución $u(x)$ por el método de colocación consiste en encontrar una función $\hat{u}(x)$ la cual esté en un subespacio X_M de X , la cual satisfaga el operador de la ecuación en M puntos distintos. Esto es, nosotros necesitamos que

$$\mathcal{L}\hat{u}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (2.2)$$

Donde x_i se refiere a los *puntos de colocación*. Otro punto a considerar sobre este método es entender qué son las *funciones bases*, estas fundamentalmente son el conjunto de funciones que forman una base para el espacio X_M , también se conocen como *funciones de interpolación*, y a los intervalos que existen entre los nodos se les conoce como *subintervalos* o *elementos*.

El siguiente capítulo hace una descripción del método de colocación más usado, motivo por el cual se le nombra método de colocación estándar.

Capítulo III

Métodos Directos de Dominios Ajenos (Non- Overlapping)

3. MÉTODOS DIRECTOS DE DOMINIOS AJENOS

La clasificación de los métodos directos de colocación se da en 2 sentidos dependiendo de donde se encuentra la subregión usada en la construcción de la solución estos serán de Dominios Ajenos o Yuxtapuestos. En la literatura se ha prestado mucha atención a los métodos directos de Dominios Ajenos de los cuales daremos una breve descripción del mas difundido que es el Método Estándar de Colocación sobre Elementos Finitos usando polinomios de Hermite cúbicos.

3.1. - COLOCACION DE HERMITE CUBICOS.

El método de colocación de Hermite cúbicos también se conoce como la interpolación de Hermite, el cual lo podemos entender mediante la siguiente definición:

Sea $u(x)$ una función definida en el intervalo $X = [0, l]$. Si dividimos X en m elementos finitos lineales, es decir $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ aquí los $m+1$ puntos son puntos o nodos del intervalo esto es $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = l$. Y $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, m$. Quedando como en la siguiente figura:

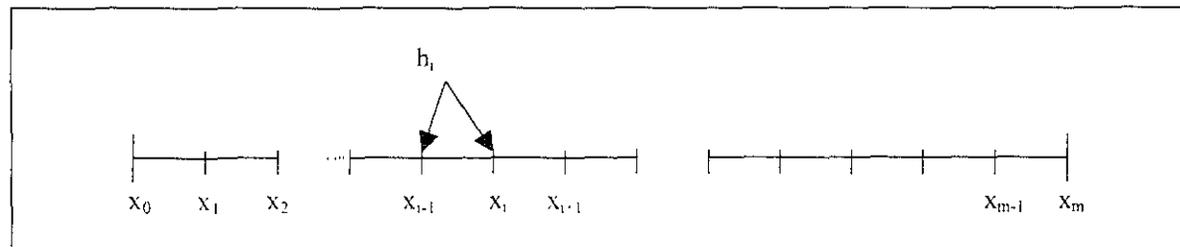


Fig. 3.1 Representación de Nodos en el intervalo $[0, l]$ y h_i .

Ahora si consideramos la ecuación diferencial elíptica de segundo orden que para el caso del alcance de esta tesis es sobre una dimensión de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}u \equiv -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + \frac{d}{dx} (bu) + cu = f_{\Omega} \quad (3.1)$$

sujeta a las condiciones de frontera de Dirichlet:

$$u(0) = u_0 \quad \text{y} \quad u(l) = u_l \quad (3.2)$$

Y formulamos este problema usando polinomios cúbicos por partes es decir cúbicos de Hermite y colocación ortogonal de acuerdo a la partición descrita anteriormente en el intervalo $X = [0, l]$ y también definimos $x_0 = 0$ y $x_E = l$, entonces la solución aproximada $\hat{u}(x)$ sería:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^E \hat{u}_i \cdot \hat{\phi}_i(x) = \sum_{i=0}^E \left\{ \hat{u}_i^0 h_i^0 + \hat{u}_i^1 h_i^1 \right\} \quad (3.3)$$

Donde aquí la notación empleada será como sigue: $\underline{u}_i = (\hat{u}_i^0, \hat{u}_i^1)$ y $\underline{\phi}_i = (h_i^0, h_i^1)$, donde $h_i^0(x)$ y $h_i^1(x)$ son polinomios cúbicos de Hermite por partes con soporte en el subintervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ excepto en los nodos de la frontera es decir, cuando $i=0$ o' E , en tal caso el soporte será modificado de una manera obvia. Evidentemente, cuando la solución aproximada $u(x)$ está determinada por la ecuación (3.3), ésta pertenece a $C^1([0, l])$. En conclusión, la solución aproximada $\hat{u}(x)$ deberá satisfacer la ecuación de colocación:

$$\left[\mathcal{L}\hat{u} - f_{\Omega} \right] x_j^e = 0 \quad e = 1, \dots, E, j = 1, 2 \quad (3.4)$$

Donde, para cada $e = 1, 2, \dots, E, x_j^e (j = 1, 2)$ son los puntos Gaussianos del subintervalo $[x_{e-1}, x_e]$. Si se sustituye la expresión de la ecuación (3.3) en (3.4), entonces el sistema de ecuaciones que resulta será:

$$\left[\sum_{i=0}^N \{ \hat{u}_i \mathcal{L}h_i^0 + \hat{u}'_i \mathcal{L}h_i^1 \} - f_{\Omega} \right]_{x_j^e} = 0 \quad e=1, \dots, E, j=1, 2 \quad (3.5)$$

Donde (3.5) en forma de sistema matricial será:

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{A}_1^0]_{x_1^1} & [\mathcal{A}_1^1]_{x_1^1} & [\mathcal{A}_2^0]_{x_1^1} & [\mathcal{A}_2^1]_{x_1^1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\mathcal{A}_1^0]_{x_2^1} & [\mathcal{A}_1^1]_{x_2^1} & [\mathcal{A}_2^0]_{x_2^1} & [\mathcal{A}_2^1]_{x_2^1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathcal{A}_2^0]_{x_1^2} & [\mathcal{A}_2^1]_{x_1^2} & [\mathcal{A}_3^0]_{x_1^2} & [\mathcal{A}_3^1]_{x_1^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathcal{A}_2^0]_{x_2^2} & [\mathcal{A}_2^1]_{x_2^2} & [\mathcal{A}_3^0]_{x_2^2} & [\mathcal{A}_3^1]_{x_2^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [\mathcal{A}_N^0]_{x_1^E} & [\mathcal{A}_N^1]_{x_1^E} & [\mathcal{A}_{N+1}^0]_{x_1^E} & [\mathcal{A}_{N+1}^1]_{x_1^E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [\mathcal{A}_N^0]_{x_2^E} & [\mathcal{A}_N^1]_{x_2^E} & [\mathcal{A}_{N+1}^0]_{x_2^E} & [\mathcal{A}_{N+1}^1]_{x_2^E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0 \\ u_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1^1) \\ f(x_2^1) \\ f(x_1^2) \\ f(x_2^2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_1^E) \\ f(x_2^E) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Quando este sistema de ecuaciones se complementa con las condiciones de frontera de la ecuación (3.2), se obtiene un sistema de $2(E+1) \times 2(E+1)$ que al solucionarse obtenemos valores para \hat{u}_i y para \hat{u}'_i .

El método descrito anteriormente es el método de colocación estándar, cuando se aplican polinomios cúbicos de Hermite, usando 2 puntos de colocación en cada subintervalo, el error estimado que se produce por la solución aproximada es del orden $O(h^4)$, tal y como se muestra en Prenter[6].

3.2. - INTERPRETACIÓN COMO MÉTODO DE DOMINIOS AJENOS.

El método de colocación nos permite desarrollar soluciones locales aproximadas con gran eficacia sobre subregiones y es por eso que se interpretan mejor como métodos de descomposición de dominios, los cuales hoy en día son una implementación muy efectiva de numerosas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales parciales especialmente sobre arquitecturas paralelas, Quarteroni[19].

Dentro de los métodos de descomposición de dominios directos, si tomamos en cuenta si las subregiones o subintervalos se encuentran traslapadas o no; estos métodos se clasifican como métodos de dominios ajenos ó métodos de dominios yuxtapuestos, dado que en este capítulo tratamos la colocación como un método directo de dominios ajenos aplicado a una ecuación diferencial de segundo orden describiremos brevemente como se puede interpretar el método de colocación como un método de descomposición de dominios ajenos.

Si estamos considerando la ecuación diferencial elíptica lineal de segundo orden(3.1) y tenemos a la región Ω como el intervalo lineal $[0, l]$ en el cual el problema se formula, y también consideramos la partición $\{\Omega_1, \dots, \Omega_r\}$ como una colección de subregiones separadas, donde la subregión Ω_i es el subintervalo denotado por $[x_{i-1}, x_i]$, y si definimos la función u_i sobre Ω_i que satisface la ecuación(3.1). Entonces desde un punto de vista de los métodos de colocación aplicados a dominios ajenos, la podemos interpretar como el proceso de encontrar el valor de cada u_i donde la subregión en la cual esta definida, esta no se traslapa con ninguna otra subregión.

Capítulo IV

Métodos Directos de Dominios Yuxtapuestos (Overlapping)

4. MÉTODOS DIRECTOS DE DOMINIOS YUXTAPUESTOS (OVERLAPPING)

En este capítulo expondremos la formulación matemática que nos permitirá implantar de manera numérica el método directo de colocación para dominios yuxtapuestos para una ecuación diferencial elíptica lineal en una dimensión, que es el objetivo de este trabajo de tesis; Para construir la aproximación de la ecuación, primeramente describiremos el problema a resolver que es el de valores en la frontera con saltos prescritos para una ecuación diferencial junto con el método de colocación usando 2 puntos de colocación sobre cada subintervalo de la partición aplicando los polinomios cúbicos de Hermite y posteriormente extenderemos esta metodología para un número arbitrario de puntos de colocación en cada subintervalo con polinomios de cualquier orden.

4.1. - COLOCACION DE SEGUNDO ORDEN.

Si consideramos la ecuación

$$\mathcal{L}u = f_{\Omega} \quad (4.1)$$

Donde \mathcal{L} es un operador diferencial de segundo orden, y el dominio $[0, \ell]$ esta dividido en E elementos es decir $\{x_0 = 0, x_1, \dots, x_E = \ell\}$. Y tenemos las condiciones de frontera y de salto respectivamente:

$$u(0) = g_{\tau_0}, \quad u(\ell) = g_{\tau\ell} \quad (4.2)$$

y

$$[[u]]_i = j_i^0 \equiv [[u_{\tau}]]_i \quad \text{y} \quad \left[\left[\frac{du}{dx} \right] \right]_i = j_i^1 \equiv \left[\left[\frac{du_{\tau}}{dx} \right] \right]_i; \quad i = 1, \dots, E-1 \quad (4.3)$$

Ahora si se considera $u(x) \in D$, (donde D es el espacio de funciones cuyos elementos pertenecen a $H^2(\Omega_i)$), como la única solución de este problema. Entonces en cada subintervalo $\Omega_i \equiv [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \dots, E-1$, definiremos la función $u'(x)$ que será la restricción de $u(x)$ en Ω_i .

Luego entonces para cada $i=1, \dots, E-1$, tendremos una función $u'(x)$, como la única solución del problema de valores a la frontera con saltos prescritos definida en el subintervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ la cual se deriva de las siguientes condiciones:

$$\mathcal{L}u' = f_{\Omega}, \text{ in } \Omega_i; \quad i=1, \dots, E-1 \quad (4.4)$$

Con sus saltos prescritos

$$\llbracket u' \rrbracket_i = j_i^0; \quad \left[\left[\frac{du'}{dx} \right] \right]_i = j_i^1; \quad i=1, \dots, E-1 \quad (4.5)$$

Su valor en el extremo derecho de cada elemento x_i

$$u'(x_{i-1}+) = u(x_{i-1}+) = \dot{u}(x_{i-1}) + \frac{1}{2} j_{i-1}^0; \quad i=2, \dots, E-1 \quad (4.6)$$

Su valor en el extremo izquierdo de cada elemento x_i

$$u'(x_{i+1}-) = u(x_{i+1}-) = \dot{u}(x_{i+1}) - \frac{1}{2} j_{i+1}^0; \quad i=1, \dots, E-2 \quad (4.7)$$

Y sus valores en la frontera respectivamente

$$u^1(0) = u(0) = g_{\partial 0} \quad (4.8)$$

$$u^{E-1}(\ell) = u(\ell) = g_{\partial \ell} \quad (4.9)$$

Antes de continuar es preciso definir quien es $\dot{u}(x_i)$, primero si se está considerando a $\llbracket u' \rrbracket_i = j_i^0 = u(x_i^+) - u(x_i^-)$, entonces el valor de $\dot{u}(x_i)$ se define como el promedio de $u(x_i^+)$ y $u(x_i^-)$, es decir $\dot{u}(x_i) = \frac{1}{2}(u(x_i^+) + u(x_i^-))$.

Ahora si consideramos la solución de cada $u'(x)$ como $u'(x) = u'_h(x) + u'_p(x); \quad i=1, \dots, E-1$. El siguiente punto a considerar será definir las dos funciones dentro de cada subintervalo Ω_i , las cuales serán las funciones homogéneas y particular respectivamente $u'_{hi}(x)$ y $u'_{pi}(x)$ por las siguientes condiciones:

Para $u'_H(x)$ tenemos que:

El valor en cada subintervalo es:

$$\mathcal{L}u'_H = 0, \text{ in } \Omega; \quad i = 1, \dots, E-1 \quad (4.10)$$

El valor del salto en cada subintervalo es:

$$\llbracket u'_H \rrbracket_i = \llbracket \frac{du'_H}{dx} \rrbracket_i = 0; \quad i = 1, \dots, E-1 \quad (4.11)$$

El valor de la frontera izquierda en cada subintervalo es:

$$u'_H(x_{i-1}+) = u(x_{i-1}+) = \dot{u}(x_{i-1}) + \frac{1}{2}j_{i-1}^0; \quad i = 2, \dots, E-1 \quad (4.12)$$

El valor de la frontera derecha en cada subintervalo es:

$$u'_H(x_{i+1}-) = u(x_{i+1}-) = \dot{u}(x_{i+1}) - \frac{1}{2}j_{i+1}^0; \quad i = 1, \dots, E-2 \quad (4.13)$$

El valor de la frontera izquierda es:

$$u'_H(x_{i-1}) = u(0) = g_{\partial 0}; \quad i = 1 \quad (4.14)$$

Y el valor de la frontera derecha es:

$$u'_H(x_{i+1}) = u(\ell) = g_{\partial \ell}; \quad i = E-1 \quad (4.15)$$

Y ahora para $u'_p(x)$ tenemos que:

El valor en cada subintervalo separadamente es:

$$\mathcal{L}u'_p = f_{\Omega}, \text{ en } (x_{i-1}, x_i) \text{ y } (x_i, x_{i+1}), \text{ para } i = 1, \dots, E-1 \quad (4.16)$$

El valor de la frontera en cada subintervalo es:

$$u'_p(x_{i-1}+) = u'_p(x_{i-1}-) = 0, \text{ para } i = 1, \dots, E-1 \quad (4.17)$$

Y el valor del salto en cada subintervalo es:

$$\llbracket u'_p \rrbracket_i = j_i^0 \text{ y } \llbracket \frac{du'_p}{dx} \rrbracket_i = j_i^1; i=1, \dots, E-1 \quad (4.18)$$

Entonces, con esto comprobamos que

$$u'(x) = u'_H(x) + u'_p(x); \quad i = 1, \dots, E-1 \quad (4.19)$$

Posteriormente para poder construir la función de $u'_H(x)$, para cada $i=1, \dots, E-1$ definimos a ϕ'_+ y ϕ'_- en Ω , por las siguientes condiciones:

$$\mathcal{L}\phi'_+ = 0; \quad \phi'_+(x_{i-1}) = 0, \quad \phi'_+(x_{i+1}) = 1 \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}\phi'_- = 0; \quad \phi'_-(x_{i-1}) = 1, \quad \phi'_-(x_{i+1}) = 0 \quad (4.21)$$

junto con sus saltos prescritos y las derivadas de ellos mismos respectivamente como:

$$\llbracket \phi'_+ \rrbracket_i = \llbracket \phi'_- \rrbracket_i = \left\llbracket \frac{d\phi'_+}{dx} \right\rrbracket_i = \left\llbracket \frac{d\phi'_-}{dx} \right\rrbracket_i = 0 \quad (4.22)$$

De lo anterior definimos que:

$$u'_H(x) = u'_H(x_{i-1})\phi'_-(x) + u'_H(x_{i+1})\phi'_+(x) \quad (4.23)$$

Al combinar (4.12)-(4.13) con (4.19) y (4.23) tenemos:

$$\dot{u}'_H(x_i) = \dot{u}(x_i) - \dot{u}'_p(x_i) = \{\dot{u}(x_{i-1}) + \frac{1}{2}j_{i-1}^0\}\phi'_-(x_i) + \{\dot{u}(x_{i+1}) - \frac{1}{2}j_{i+1}^0\}\phi'_+(x_i) \quad (4.24)$$

Por lo tanto de (4.24) obtenemos un sistema de ecuaciones para calcular \dot{u}_i

$$\begin{aligned} \dot{u}_i - \rho'_+ \dot{u}_{i+1} &= \rho'_- g_{\varepsilon 0} + \dot{u}'_p(x_i) - \frac{\rho'_-}{2} j_{i+1}^0; \quad i=1 \\ -\rho'_- \dot{u}_{i-1} + \dot{u}_i - \rho'_+ \dot{u}_{i+1} &= \frac{\rho'_-}{2} j_{i-1}^0 + \dot{u}'_p(x_i) - \frac{\rho'_-}{2} j_{i+1}^0; \quad i=2, \dots, E-2 \\ -\rho'_- \dot{u}_{i-1} + \dot{u}_i &= \frac{\rho'_-}{2} j_{i-1}^0 + \dot{u}'_p(x_i) + \rho'_+ g_{iE}; \quad i=E-1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde

$$\rho'_- = \phi'_-(x_i), \quad \rho'_+ = \phi'_+(x_i); \quad i=1, \dots, E-1 \quad (4.26)$$

Y este sistema de ecuaciones resultante se puede ver como

$$\begin{aligned} \dot{u}_i - \rho'_+ \dot{u}_{i+1} &= \mu_i; \quad i=1 \\ -\rho'_- \dot{u}_{i-1} + \dot{u}_i - \rho'_+ \dot{u}_{i+1} &= \mu_i; \quad i=2, \dots, E-2 \\ -\rho'_- \dot{u}_{i-1} + \dot{u}_i &= \mu_i; \quad i=E-1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \rho'_- g_{\beta 0} + \dot{u}'_p(x_1) - \frac{\rho'_+}{2} j_{1+1}^0; \quad i=1 \\ \mu_i &= \frac{\rho'_-}{2} j_{i-1}^0 + \dot{u}'_p(x_i) - \frac{\rho'_+}{2} j_{i+1}^0; \quad i=2, \dots, E-2 \\ \mu_{E-1} &= \frac{\rho'_-}{2} j_{E-1}^0 + \dot{u}'_p(x_{E-1}) + \rho'_- g_{\alpha E}; \quad i=E-1 \end{aligned} \tag{4.28}$$

La ecuación (4.27) resulta ser un sistema tridiagonal de E-1 ecuaciones, ahora para poder obtenerlo se requiere disponer del valor de las funciones ϕ'_+ , ϕ'_- y u'_p ($i=1, \dots, E-1$), las cuales se obtendrán usando primero la colocación sobre 2 puntos en cada subintervalo de la partición, aplicando los polinomios cúbicos de Hermite, como sigue a continuación:

Primero definimos los polinomios cúbicos de Hermite como:

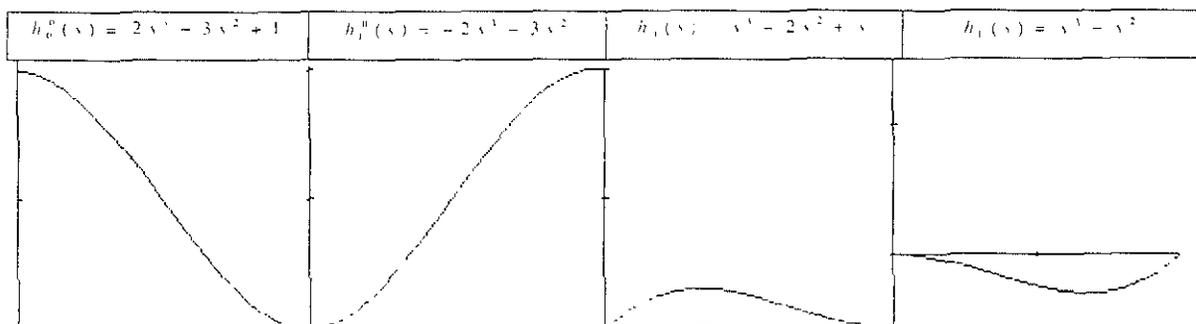
$$\underline{H}_i = \{H_{i-1}^1, H_i^0, H_i^1, H_{i+1}^1\} \tag{4.29}$$

Ahora aplicamos a (4.29) el operador diferencial para obtener:

$$\underline{\mathcal{L}}\underline{H}_i = \{\mathcal{L}H_{i-1}^1, \mathcal{L}H_i^0, \mathcal{L}H_i^1, \mathcal{L}H_{i+1}^1\} \tag{4.30}$$

Donde H_i^0 y H_i^1 , $i=0, \dots, E$, son los polinomios cúbicos de Hermite para el cual la función o sus derivadas toman el valor de uno en x_i , respectivamente.

Antes de continuar es preciso describir el comportamiento de los polinomios cúbicos de Hermite para lo cual tenemos que estos son básicamente unas curvas de interpolación que ofrecen una facilidad para calcularse pero que su uso es muy poderoso, dado que los polinomios de Hermite son cúbicos, estos requieren 4 parámetros para definir su unicidad, en un intervalo de (0,1) las funciones que los definen son las siguientes con sus correspondientes representación gráfica, donde s es el punto sobre el eje x del intervalo:



Luego entonces definimos

$$\underline{X}' \equiv \{\phi_-^{i1}(x_{i-1}), \phi_-^i(x_i), \phi_-^{i1}(x_i), \phi_-^{i1}(x_{i+1})\} \quad (4.31)$$

y

$$\underline{X}'_+ \equiv \{\phi_+^{i1}(x_{i-1}), \phi_+^i(x_i), \phi_+^{i1}(x_i), \phi_+^{i1}(x_{i+1})\} \quad (4.32)$$

Entonces, en vista de las condiciones de frontera (4.20)-(4.21) para ϕ_-^i y ϕ_+^i , estas funciones se pueden escribir como:

$$\phi_-^i \equiv H_{i-1}^0 + \underline{H}_i * \underline{X}'_- \quad (4.33)$$

y

$$\phi_+^i \equiv H_{i+1}^0 + \underline{H}_i * \underline{X}'_+ \quad (4.34)$$

o más explícitamente

$$\phi_-^i(x) = H_{i-1}^0(x) + \phi_-^{i1}(x_{i-1})H_{i-1}^1(x) + \phi_-^i(x_i)H_i^0(x) + \phi_-^{i1}(x_i)H_i^1(x) + \phi_-^{i1}(x_{i+1})H_{i+1}^1(x); \quad x_{i-1} < x < x_{i+1} \quad (4.35)$$

y

$$\phi_+^i(x) = H_{i+1}^0(x) + \phi_+^{i1}(x_{i-1})H_{i-1}^1(x) + \phi_+^i(x_i)H_i^0(x) + \phi_+^{i1}(x_i)H_i^1(x) + \phi_+^{i1}(x_{i+1})H_{i+1}^1(x); \quad x_{i-1} < x < x_{i+1} \quad (4.36)$$

Si las ecuaciones de colocación son

$$\mathcal{L}\phi_-^i(x) = 0; \quad x = x_i^*, x_i^{**}, x_{i+1}^*, x_{i+1}^{**} \quad (4.37)$$

y

$$\mathcal{L}\phi_+^i(x) = 0; \quad x = x_i^*, x_i^{**}, x_{i+1}^*, x_{i+1}^{**} \quad (4.38)$$

Donde x_i^* y x_i^{**} , para $i = 1, \dots, E$, son los puntos Gaussianos del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Y respectivamente x_{i+1}^* y x_{i+1}^{**} para $i = 1, \dots, E$ son los puntos Gaussianos del subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Este sistema de ecuaciones se puede escribir respectivamente como:

$$\mathcal{L}\underline{H}_i(x) * \underline{X}'_- = -\mathcal{L}H_{i-1}^0(x); \quad x = x_i^*, x_i^{**}, x_{i+1}^*, x_{i+1}^{**} \quad (4.39)$$

y

$$\mathcal{L}\underline{H}_i(x) * \underline{X}'_+ = -\mathcal{L}H_{i+1}^0(x); \quad x = x_i^*, x_i^{**}, x_{i+1}^*, x_{i+1}^{**} \quad (4.40)$$

Aquí observamos que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}H_{i-1}^1(x_i^*) & \mathcal{L}H_i^0(x_i^*) & \mathcal{L}H_i^1(x_i^*) & 0 \\ \mathcal{L}H_{i-1}^1(x_i^{**}) & \mathcal{L}H_i^0(x_i^{**}) & \mathcal{L}H_i^1(x_i^{**}) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}H_i^0(x_{i+1}^*) & \mathcal{L}H_i^1(x_{i+1}^*) & \mathcal{L}H_{i+1}^1(x_{i+1}^*) \\ 0 & \mathcal{L}H_i^0(x_{i+1}^{**}) & \mathcal{L}H_i^1(x_{i+1}^{**}) & \mathcal{L}H_{i+1}^1(x_{i+1}^{**}) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Resulta ser la misma matriz para ambos sistemas de ecuaciones, y el término derecho para cada sistema será respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -LH_i^0(x_i^*) \\ -LH_i^0(x_i^{**}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -LH_i^0(x_{i+1}^*) \\ -LH_i^0(x_{i+1}^{**}) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Luego entonces, para construir la función u_p^i , definimos en cada subintervalo Ω_i

a: $Y^i \equiv (Y_1^i, Y_2^i, Y_3^i, Y_4^i)$ y $\underline{j}_i \equiv (0, j_i^0, j_i^1, 0)$.

Donde $Y_1^i \equiv u_p^{i1}(x_{i-1})$, $Y_2^i \equiv u_p^i(x_i)$, $Y_3^i \equiv u_p^{i1}(x_i)$, $Y_4^i \equiv u_p^{i1}(x_{i+1})$ y j_i^0 es el salto prescrito y j_i^1 es la derivada del salto prescrito en Ω_i .

Entonces para los puntos de colocación en el subintervalo $x_{i-1} \leq x < x_i$, tenemos la siguiente ecuación:

$$u_p^i(x) = \underline{Y}^i * \underline{H}_i(x) - \frac{1}{2} \underline{j}_i * \underline{H}_i(x) \quad (4.43)$$

y para el subintervalo $x_i < x \leq x_{i+1}$ tenemos:

$$u_p^i(x) = \underline{Y}^i * \underline{H}_i(x) + \frac{1}{2} \underline{j}_i * \underline{H}_i(x) \quad (4.44)$$

Por lo tanto las ecuaciones de colocación son:

$$\mathcal{L}u_p^i(x) = f_\Omega(x), \text{ para } x = x_i^*, x_i^{**}, x_{i+1}^*, x_{i+1}^{**}, \quad (4.45)$$

y se pueden escribir como

$$\underline{Y}^i * \mathcal{L}\underline{H}_i(x) = f_\Omega(x) + \frac{1}{2} \underline{j}_i * \mathcal{L}\underline{H}_i(x), \text{ para } x = x_i^*, x_i^{**} \quad (4.46)$$

junto con

$$\underline{Y}^i * \mathcal{L}\underline{H}_i(x) = f_\Omega(x) - \frac{1}{2} \underline{j}_i * \mathcal{L}\underline{H}_i(x), \text{ para } x = x_{i+1}^*, x_{i+1}^{**} \quad (4.47)$$

De (4.46)-(4.47), la matriz resultante del sistema es otra vez la misma que la de (4.41) cambiando solo el término derecho del sistema de ecuaciones el cual será:

$$\begin{bmatrix} f_{\Omega}(x_i^*) + \frac{1}{2} j_i^0 LH_i^0(x_i^*) + \frac{1}{2} j_i^1 LH_i^1(x_i^*) \\ f_{\Omega}(x_i^{**}) + \frac{1}{2} j_i^0 LH_i^0(x_i^{**}) + \frac{1}{2} j_i^1 LH_i^1(x_i^{**}) \\ f_{\Omega}(x_{i+1}^*) - \frac{1}{2} j_i^0 LH_i^0(x_{i+1}^*) - \frac{1}{2} j_i^1 LH_i^1(x_{i+1}^*) \\ f_{\Omega}(x_{i+1}^{**}) - \frac{1}{2} j_i^0 LH_i^0(x_{i+1}^{**}) - \frac{1}{2} j_i^1 LH_i^1(x_{i+1}^{**}) \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

El procedimiento anterior que involucra (4.29)-(4.48) nos ayuda para la obtención sobre cada subintervalo Ω_i de los siguientes valores: $\phi'_-(x_i)$, $\phi'_+(x_i)$ y $u'_p(x_i)$. Los cuales son necesarios en cada subintervalo para obtener el sistema global descrito por (4.27) y así obtener el valor de u .

4.2.- COLOCACION DE PRECISION ILIMITADA.

En la sección previa hemos desarrollado la metodología que nos permitirá usar los polinomios cúbicos de Hermite para construir la aproximación para los valores de $\phi'_-(x_i)$, $\phi'_+(x_i)$ y $u'_p(x_i)$, usando 2 puntos de colocación en cada subintervalo. Esta sección explica un procedimiento para poder emplear un número **N** arbitrario de puntos de colocación sobre cada subintervalo usando polinomios de grado G, donde $G=N+1$. Efectivamente la extensión del procedimiento de segundo orden antes presentado a un método de orden arbitrario es directa. Efectivamente, esta solo requiere de modificar (4.33)-(4.34) de la siguiente manera:

$$\phi'_- \equiv H_{i-1}^0 + \underline{H}_i * \underline{X}'_- + \underline{Q}'_- \quad (4.49)$$

y

$$\phi'_+ \equiv H_{i+1}^0 + \underline{H}_i * \underline{X}'_+ + \underline{Q}'_+ \quad (4.50)$$

donde \underline{Q}'_- y \underline{Q}'_+ son polinomios por partes de grado G. Sea

$$p'(x) \equiv (x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2 \quad (4.51)$$

Entonces $\underline{Q}'_-(x) \equiv p'(x)q'_-(x)$, en $[x_{i-1}, x_i]$ y $\underline{Q}'_+(x) \equiv p'^{+1}(x)q'_+(x)$, en $[x_i, x_{i+1}]$, donde q'_- es un polinomio por partes en $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, el cual en turno es un polinomio de grado 4 en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$, separadamente. La función \underline{Q}'_+ es definida respectivamente.

La definición de u'_p , determinada por las ecuaciones (4.43)-(4.44) será modificada similarmente, agregándole al miembro derecho de las ecuaciones (4.43)-(4.44), un polinomio por partes \underline{Q}'_p de grado G el cual desaparece, en conjunto con la derivada de primer orden, en x_{i-1} , x_i y x_{i+1} . La expresión para \underline{Q}'_p que será usada es:

$$\underline{Q}'_p(x) \equiv p'(x)q'_p(x), \text{ en } [x_{i-1}, x_i] \quad (4.52)$$

y

$$\underline{Q}'_p(x) \equiv p'^{+1}(x)q'_p(x), \text{ en } [x_i, x_{i+1}] \quad (4.53)$$

Donde q'_p es un polinomio de grado 4, en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$, separadamente.

Para $i = 1, \dots, E$, sea x_i^α ($\alpha = 1, \dots, G-1$) los puntos Gaussianos del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces el sistema de ecuaciones a satisfacer para la construcción de ϕ'_- y ϕ'_+ es:

$$\mathcal{L}\underline{H}_i(x) * \underline{X}'_- + \mathcal{L}\underline{Q}'_- = -\mathcal{L}H_{i-1}^0(x); \quad x = x_i^\alpha, x_{i-1}^\alpha, \alpha = 1, \dots, G-1 \quad (4.54)$$

y

$$\mathcal{L}\underline{H}_i(x) * \underline{X}'_+ + \mathcal{L}\underline{Q}'_+ = -\mathcal{L}H_{i+1}^0(x); \quad x = x_i^\alpha, x_{i+1}^\alpha, \alpha = 1, \dots, G-1 \quad (4.55)$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones para u'_p es

$$\underline{Y}' * \mathcal{L}\underline{H}_i(x) + \mathcal{L}\underline{Q}'_p = f_\Omega(x) + \frac{1}{2} \underline{j}'_{i+1} * \mathcal{L}\underline{H}_i(x), \quad \text{en } x = x_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, G-1 \quad (4.56)$$

junto con

$$\underline{Y}' * \mathcal{L}\underline{H}_i(x) + \mathcal{L}\underline{Q}'_p = f_\Omega(x) - \frac{1}{2} \underline{j}'_{i-1} * \mathcal{L}\underline{H}_i(x), \quad \text{en } x = x_{i+1}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, G-1 \quad (4.57)$$

4.3.- INTERPRETACIÓN COMO MÉTODO DE DOMINIOS YUXTAPUESTOS.

La interpretación que podemos darle a este método directo de colocación propuesto y asociarlo como un método de dominios yuxtapuestos parte del siguiente hecho:

Si se está considerando solucionar el problema de valores a la frontera con saltos preescritos, para la ecuación diferencial lineal de segundo orden (3.1), en el intervalo $(0, l)$ y tenemos la partición del mismo intervalo como $\{x_0 = 0, x_1, \dots, x_{E-1}, x_E = l\}$.

Y si $\Omega_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ es el subintervalo i para $i = 1, \dots, E-1$, claramente podemos observar que los subintervalos están relacionados y de ahí parte el hecho de que se considere a los subintervalos como yuxtapuestos. Por lo tanto dado que el método descrito en el apartado 4.1 necesita primero resolver los problemas locales en cada subintervalo para obtener ϕ'_+ , ϕ'_- y u'_p ($i = 1, \dots, E-1$) y así poder construir el sistema global de ecuaciones el cual resulta ser un sistema tridiagonal como se aprecia en (4.27), la conclusión a la que podemos llegar para poder asumir que se esta resolviendo el problema como un método de dominios yuxtapuestos, reside en el hecho de que cuando se buscan las soluciones locales sobre cada subintervalo, estos están traslapados y esto lo podemos observar mas claramente en la siguiente figura:

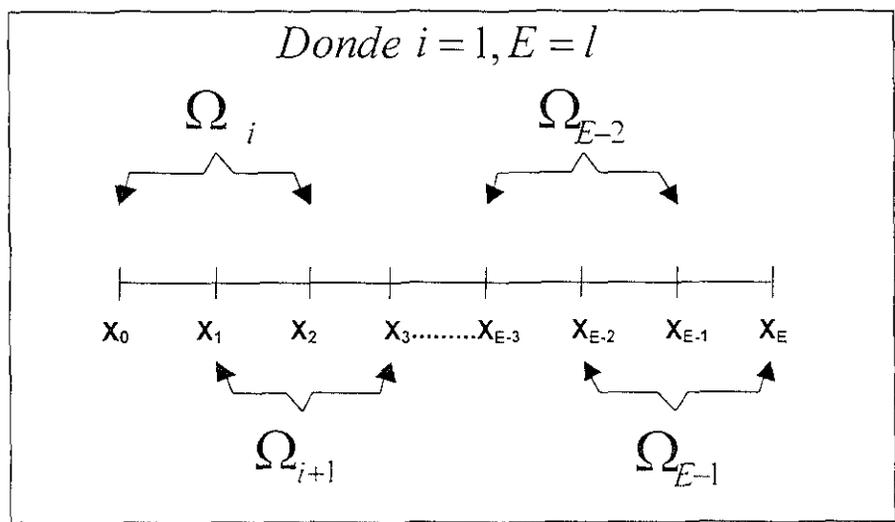


Fig 4 1 Representacion de los Subintervalos Traslapados sobre $[0, l]$

Por otro lado este método desde el punto de vista de Métodos de Descomposición de Dominios y al relacionarlo con el método de Schwarz, tenemos lo siguiente:

Si se considera una región Ω y una partición $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$ de Ω . Y la solución del problema de valores a la frontera con saltos prescritos es buscada, tal que

$$\mathcal{L}u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_\Omega; \text{ en } \Omega_i, \quad i=1, \dots, E \quad (4.58)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u = u_\partial; \text{ en } \partial\Omega \quad (4.59)$$

y condiciones de salto

$$[[u]] = j^0 = [[u_\Sigma]]; \text{ en } \Sigma \quad (4.60)$$

$$[[\underline{a} \cdot \nabla u]] \cdot \underline{n} = j^1 = [[\underline{a} \cdot \nabla u_\Sigma]] \cdot \underline{n}; \text{ en } \Sigma \quad (4.61)$$

La formulación anterior y la metodología que continua, se aplica aun si los coeficientes del operador diferencial son discontinuos. En el caso particular cuando los coeficientes son continuos, la condición de salto de (4.61) en presencia de(4.60) es equivalente a

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial u_\Sigma}{\partial n} \right]; \text{ sobre } \Sigma \quad (4.62)$$

Se asume que este problema tiene una y solo una solución. Así podemos formular un teorema donde consideremos 2 particiones conjugadas $\Pi' = \{\Omega'_1, \dots, \Omega'_E\}$ y $\Pi'' = \{\Omega''_1, \dots, \Omega''_E\}$, y el mapeo μ' y μ'' asociado a ellas mismas se considerara. También, la notación $\Sigma' \equiv \Sigma(\Omega, \Pi')$ y $\Sigma'' \equiv \Sigma(\Omega, \Pi'')$ será adoptada.

Teorema 4.1

Sea $\Pi' = \{\Omega'_1, \dots, \Omega'_E\}$ y $\Pi'' = \{\Omega''_1, \dots, \Omega''_E\}$, 2 particiones de Ω las cuales están conjugadas con respecto a Π y sea $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{l'})$ y $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{l''})$, dos familias de funciones, tal que:

- 1) Para cada $i=1, \dots, E'$, la función $\tilde{u}' \in \hat{H}^2(\Omega', \Pi')$ satisface las ecuaciones (4.58)-(4.60) y satisface a (4.61) en Σ' .
- 2) Para cada $i=1, \dots, E''$, la función $\tilde{u}'' \in \hat{H}^2(\Omega'', \Pi'')$ satisface las ecuaciones (4.58)-(4.60) y satisface a (4.61) en Σ'' .

Luego entonces, definimos $u' = (u'^1, \dots, u'^E) \in \hat{H}^2(\Omega, \Pi)$ y $u'' = (u''^1, \dots, u''^E) \in \hat{H}^2(\Omega, \Pi)$

por

$$u'^i = \tilde{u}'^{\mu(i)}|_{\Omega}; \quad i=1, \dots, E \tag{4.63}$$

y

$$u''^j = \tilde{u}''^{\mu(j)}|_{\Omega}; \quad j=1, \dots, E \tag{4.64}$$

Bajo estas suposiciones, se puede decir que lo siguiente es equivalente:

- I. u' y u'' son soluciones del problema de valores a la frontera en Ω
- II. $u' = u''$
- III. $\hat{u}'(\underline{x}) = \hat{u}''(\underline{x})$, por lo tanto $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$

Demostración:

Para demostrar los 3 puntos anteriores del teorema, vemos claramente que I implica II, dado el hecho de que el problema de valores en la frontera tiene una sola solución.

Ahora que II implique III, parte de la condición de salto(4.60) y de la definición del promedio sobre Σ . El punto III en presencia de(4.60), en turno implica

$$u'(\underline{x}+) = \hat{u}'(\underline{x}) + \frac{1}{2}[[u']] = \hat{u}'(\underline{x}) + \frac{1}{2}j^0 = \hat{u}''(\underline{x}) + \frac{1}{2}j^0 = \hat{u}''(\underline{x}) + \frac{1}{2}[[u'']] = u''(\underline{x}+) \tag{4.65}$$

Si consideramos que $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$ y que $\Sigma \cup \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^E \partial\Omega_i$, entonces entendemos que

los valores de las fronteras para u' y u'' coinciden en cada lado de Σ . Luego, junto con la unicidad de la solución asumida anteriormente para el problema de valores en la frontera en cada una de las subregiones de la partición, entonces se asume que $u' = u''$.

Con esto podemos concluir que existe una relación estrecha entre este método propuesto y el método de Schwarz alternante. Efectivamente, el método de Schwarz se puede derivar de (4.58)-(4.60) y el punto III, cuando un proceso iterativo se adopta para satisfacer el punto III. Para entender esto, consideremos a u^{2n} ($n=0,1,\dots$) y u^{2n+1} ($n=0,1,\dots$) que satisfacen (4.58)-(4.60), junto con

$$\overbrace{u^{2n+1}}^{\dot{}} = \overbrace{u^{2n}}^{\dot{}}, \text{ sobre } \Sigma', (n=0,1,\dots) \quad (4.66)$$

y

$$\overbrace{u^{2n+2}}^{\dot{}} = \overbrace{u^{2n+1}}^{\dot{}}, \text{ sobre } \Sigma'', (n=0,1,\dots) \quad (4.67)$$

Entonces, si la secuencia u^{2n} ($n=0,1,\dots$) converge a \bar{u} , mientras la secuencia u^{2n+1} ($n=0,1,\dots$) converge a \bar{u} , entonces se tiene que $\bar{u} = \bar{u} = u$, y esta función entonces satisface (4.58)-(4.60), junto con (4.61). En este caso cuando un principio variacional se puede aplicar, la interpretación de proyección es posible y el método alternante de Schwarz se puede derivar a partir de este método, Herrera[23].

4.4.- ANÁLISIS DE ERROR.

Sea el error definido por $e(x) \equiv \hat{u}(x) - u(x)$ donde $u(x)$ es la solución exacta del problema y $\hat{u}(x)$ es la solución aproximada obtenida por el método directo de colocación descrito en este capítulo, si $e(x) \equiv \hat{u}(x) - u(x)$ satisface la ecuación diferencial(3.1), junto con sus condiciones de salto y de frontera en los $e(x) \equiv \hat{u}(x) - u(x)$ puntos Gaussianos del subintervalo $e(x) \equiv \hat{u}(x) - u(x)$. Entonces el error estimado usando colocación ortogonal se aplica como lo demuestra Prenter[6]. Ahora si los coeficientes a, b y c son suficientemente suaves y f_Ω es por partes C^n , y también existen discontinuidades en Σ (Σ es la frontera de los nodos internos del intervalo), entonces el error que se obtiene es $|e|_\infty \leq \beta h^{2n}$ donde β es una constante independiente de E (donde E como hemos visto, es el número de intervalos en el cual se divide el intervalo $(0, l)$).

Capítulo V

Implantación Numérica

5. IMPLANTACION NUMÉRICA

El desarrollo computacional del método descrito en el capítulo 4 se realizó utilizando el lenguaje Fortran 90 (bajo la plataforma de Windows, aunque el código fuente es abierto para también ejecutarse en estaciones de trabajo), dada su versatilidad para atacar este tipo de problemas, para lo cual presentamos el algoritmo empleado:

Parámetros de entrada

- A y B Son el punto inicial y el punto final, en el caso simple será 0 y 1 respectivamente
- GO y GL Son los valores del intervalo en la frontera inicial y final respectivamente
- N Es el numero de elementos en el cual se dividirá el intervalo
- H: Es el tamaño del intervalo, que para este caso se consideran intervalos fijos

1. Calcular H , mediante la siguiente formula: $H = (B - A) / N$.
2. Para cada $i = 1, \dots, N - 1$, calcular ϕ_-^i, ϕ_+^i y u_p^i de la siguiente manera
 - 2.1. Calcular los 4 puntos de colocación en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}) mediante la transformación al intervalo i aplicando el polinomio de Legendre
 - 2.2. Construir el sistema local de ecuaciones descrito por la ecuación (4.41)
 - 2.3. Construir el lado derecho para el cálculo de ϕ_-^i, ϕ_+^i mediante la ecuación (4.42)
 - 2.4. Construir el lado derecho para el cálculo de u_p^i mediante la ecuación (4.48)
 - 2.5. Resolver el sistema de ecuaciones locales en el cual tenemos un sistema de la siguiente manera $Ax = B$ donde A es una matriz de 4×4 y B es una matriz de 4×3 al resolverlo obtenemos los valores ϕ_-^i, ϕ_+^i y u_p^i para el intervalo i .
 - 2.6. Una vez obtenido los valores de ϕ_-^i, ϕ_+^i y u_p^i para ese intervalo, realizar lo siguiente
 - 2.6.1. Si $i = 1$ entonces aplicar la primera ecuación del sistema (4.27).
 - 2.6.2. Otro si $i = N - 1$ entonces aplicar la tercera ecuación del sistema (4.27)
 - 2.6.3. En caso contrario aplicar la segunda ecuación del sistema (4.27)
3. Una vez que se tiene construido el sistema tridiagonal (4.27), se procede a resolverlo. Y se obtienen los valores de u_i , donde $i = 1, \dots, N - 1$.
4. Hacer el analisis de error comparando los valores de u_i , que son la solución aproximada con respecto a los valores de la solución analítica.

Este algoritmo se realizó utilizando la programación estructurada y por lo tanto este consiste de las siguiente rutinas:

Subrutina SLOCAL

La función principal de esta rutina es la construcción del sistema global de ecuaciones descrito por la ecuación (4.48), para cual hace una llamada a la rutina FMLOCAL y posteriormente resuelve el sistema local para cada intervalo i y conforme va resolviéndolo para cada intervalo también va construyendo el sistema global.

Subrutina FMLOCAL

Esta rutina su función principal es la de construir los sistemas locales para cada intervalo el cual como vimos en el método descrito en el capítulo 4 el lado izquierdo la ecuación (4.37) es el mismo para las soluciones de ϕ'_-, ϕ'_+ y u'_p , pero a su vez también se construye el termino derecho del sistema local de ecuaciones el cual si es diferente para cada caso como lo muestran las ecuaciones (4.38) y (4.44).

Subrutina GAUSSJ

Esta rutina se obtuvo del "numerical recipes", Press[15] el cual es el método para resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de gauss-jordán.

Subrutina TRIDIAG

Esta rutina también se obtuvo del "numerical recipes", Press[15] y esta nos resuelve un sistema de ecuaciones tridiagonal aplicando el método de Thomas, con lo cual nos facilita el ahorro de memoria y a la vez es un método rápido.

Subrutina H0

Esta rutina tiene por objetivo proporcionarnos el valor del punto de colocación aplicando el polinomio de Hermite H0

Subrutina H1

Esta rutina tiene por objetivo proporcionarnos el valor del punto de colocación aplicando el polinomio de Hermite H1.

Subrutina TSRF

Esta rutina la función que realiza es la de realizar la conversión de los puntos de colocación aplicando el polinomio de Hermite en el Intervalo $[-1,1]$ al subintervalo i .

Subrutina OPL

Esta rutina aplica el operador lineal a la ecuación diferencial de segundo orden.

Subrutina US

Esta rutina contiene la ecuación que representa el valor analítico de la ecuación a evaluar.

Subrutinas A, B, C, DA, DB, AN, BN, CN, F

Estas subrutinas contienen el valor de los coeficientes A, B, C de la ecuación diferencial de segundo orden (3.1).

La estructura jerárquica de las subrutinas se puede apreciar en la siguiente figura:

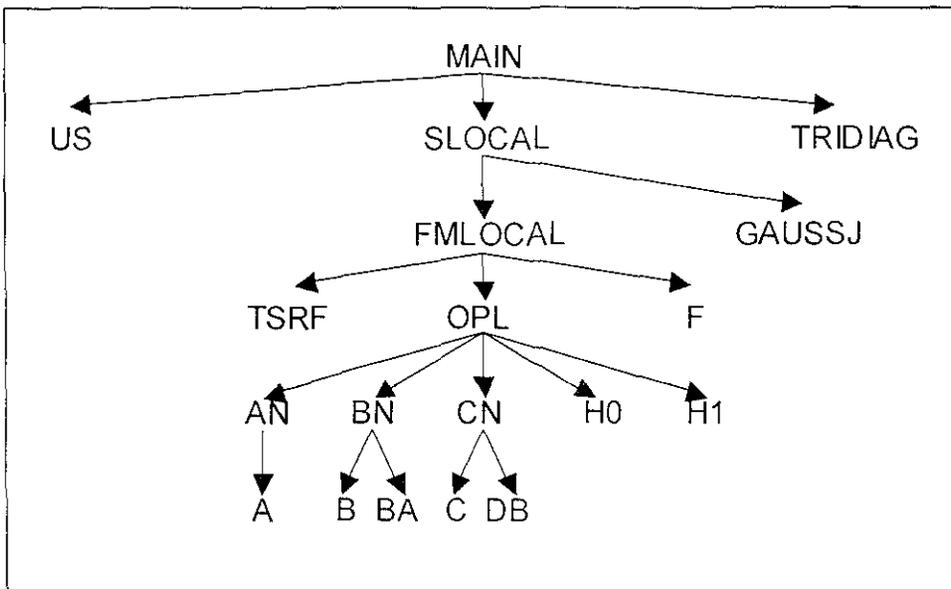


Figura 5. 1 Estructura Jerárquica de las Subrutinas

La complejidad computacional de este algoritmo se da en términos de N , donde N es el número de subintervalos en que se divide el dominio. Si consideramos operaciones de punto flotante, como divisiones, multiplicaciones, multiplicaciones-restas, multiplicaciones-sumas; Esta complejidad da aproximadamente un valor de $414N - 414$ operaciones de punto flotante.

Si se considera el número de operaciones para las subrutinas A, B, C, DA, DB, como una sola operación respectivamente. El número de operaciones que obtenemos por cada subrutina es el siguiente:

Subrutina	No. Operaciones	No. De Operaciones x Veces que se llama en función de N
US	1	$3+N$
TRIDIAG	-----	$1+5(N-2)$
SLOCAL	$404+4$	$408(N-1)$
GAUSSJ	56	$56(N-1)$
FMLOCAL	$332+16$	$348(N-1)$
TSRF	2	$8(N-1)$
F	1	$4(N-1)$
OPL	20	$320(N-1)$
H0	4	$96(N-1)$
H1	4	$96(N-1)$
A	1	$16(N-1)$
B	1	$16(N-1)$
C	1	$16(N-1)$
DA	1	$16(N-1)$
DB	1	$16(N-1)$
AN	1	$16(N-1)$
BN	1	$16(N-1)$
CN	1	$16(N-1)$

Si sumamos los valores de las subrutinas US, SLOCAL y TRIDIAG, las cuales acumulan el número de operaciones globalmente, tendremos lo siguiente:

$$3 + N + 408(N - 1) + 1 + 5(N - 2)$$

de aquí tenemos:

$$3 + 1 - 408 - 10 + N + 408N + 5N$$

para obtener finalmente:

$$\approx 414N - 414 \text{ operaciones de punto flotante}$$

Capítulo VI

Resultados Numéricos y Discusión

6. RESULTADOS NUMERICOS Y DISCUSIÓN

Los resultados numéricos que se obtuvieron con este método se basaron en solucionar la ecuación (3.1), sujeta a las condiciones de frontera de Dirichlet. Para lo cual los coeficientes a , b y c se tomaron como variables, el dominio definido fue el intervalo $[0, 1]$. Los saltos prescritos se tomaron como cero en todos los casos. Y para el caso de número de elementos se tomo en intervalos de 10, desde 10 hasta 200. Los tiempos de ejecución que se observan también fueron realizados en una maquina Intel II a 450 Mhz y con 128 Mb de RAM.

Ejemplo #1

El primer ejemplo que consideramos fue con el valor de los coeficientes siguientes:

$$a(x) = 1; \quad b(x) = 2px/q; \quad c(x) = -\left\{ \frac{4p(1+p)}{q^2} + \frac{2p^2}{q} + p^2 \right\}; \quad f(x) = 0$$

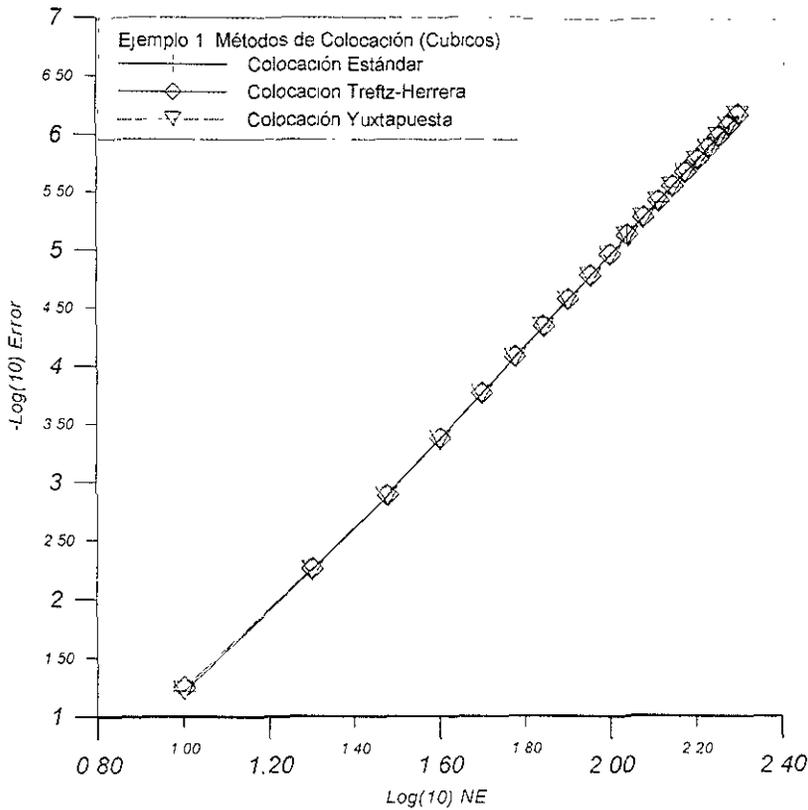
donde :

$$p = \sqrt{40\pi}; \quad q = 1 + p(1+x^2)$$

Donde para este ejemplo su solución analítica es $\sin(px)x \cos(px)$ donde : $p = \sqrt{40\pi}$, la comparación numérica que se realizó fue con el método estándar de colocación descrito en el capítulo 3; así como también con el método de colocación Trefftz-Herrera, Herrera[21]; Los resultados los podemos observar en la tabla 6.1; La primera columna (NE) nos especifica el número de elementos en que se dividió el intervalo, la siguiente el logaritmo base 10 de la primera columna, la columna (H(malla)) nos especifica el tamaño del subdominio, y las siguientes 6 columnas nos da el error, así como su logaritmo base 10 de cada método al compararse con la solución analítica. En la gráfica 6.1, podemos observar estos resultado de la tabla 6.1.

NE	Log NE	H (malla)	Col. Estándar		Col. Treftz-Herrera		Col. Yuxtapuesta	
			Error	-Log Error	Error	-Log Error	Error	-Log Error
10	1,00000	0,10000	6,10E-02	1,214869	5,71E-02	1,243211	6,10E-02	1,214869
20	1,30103	0,05000	5,73E-03	2,241993	5,56E-03	2,254874	5,73E-03	2,241993
30	1,47712	0,03333	1,33E-03	2,874581	1,30E-03	2,88637	1,33E-03	2,874581
40	1,60206	0,02500	4,34E-04	3,362818	4,22E-04	3,374284	4,34E-04	3,362818
50	1,69897	0,02000	1,78E-04	3,750717	1,73E-04	3,762048	1,78E-04	3,750717
60	1,77815	0,01667	8,59E-05	4,066137	8,37E-05	4,077254	8,59E-05	4,066137
70	1,84510	0,01429	4,69E-05	4,328928	4,57E-05	4,340032	4,69E-05	4,328928
80	1,90309	0,01250	2,75E-05	4,56	2,68E-05	4,571098	2,75E-05	4,56
90	1,95424	0,01111	1,72E-05	4,765581	1,67E-05	4,776678	1,72E-05	4,765581
100	2,00000	0,01000	1,13E-05	4,947747	1,10E-05	4,958759	1,13E-05	4,947747
110	2,04139	0,00909	7,73E-06	5,111994	7,53E-06	5,123016	7,73E-06	5,111994
120	2,07918	0,00833	5,46E-06	5,2631	5,32E-06	5,274133	5,46E-06	5,2631
130	2,11394	0,00769	3,95E-06	5,402854	3,86E-06	5,413895	3,95E-06	5,402854
140	2,14613	0,00714	2,95E-06	5,530815	2,87E-06	5,541802	2,95E-06	5,530815
150	2,17609	0,00667	2,24E-06	5,650179	2,18E-06	5,661178	2,24E-06	5,650179
160	2,20412	0,00650	1,73E-06	5,762414	1,68E-06	5,773423	1,73E-06	5,762414
170	2,23045	0,00588	1,35E-06	5,868245	1,32E-06	5,879213	1,35E-06	5,868245
180	2,25527	0,00556	1,08E-06	5,966856	1,05E-06	5,977835	1,08E-06	5,966856
190	2,27875	0,00526	8,70E-07	6,060586	8,48E-07	6,071575	8,70E-07	6,060586
200	2,30103	0,00500	7,08E-07	6,14985	6,90E-07	6,160849	7,08E-07	6,149849

Tabla 6.1 Resultados del error aplicados al ejemplo 1

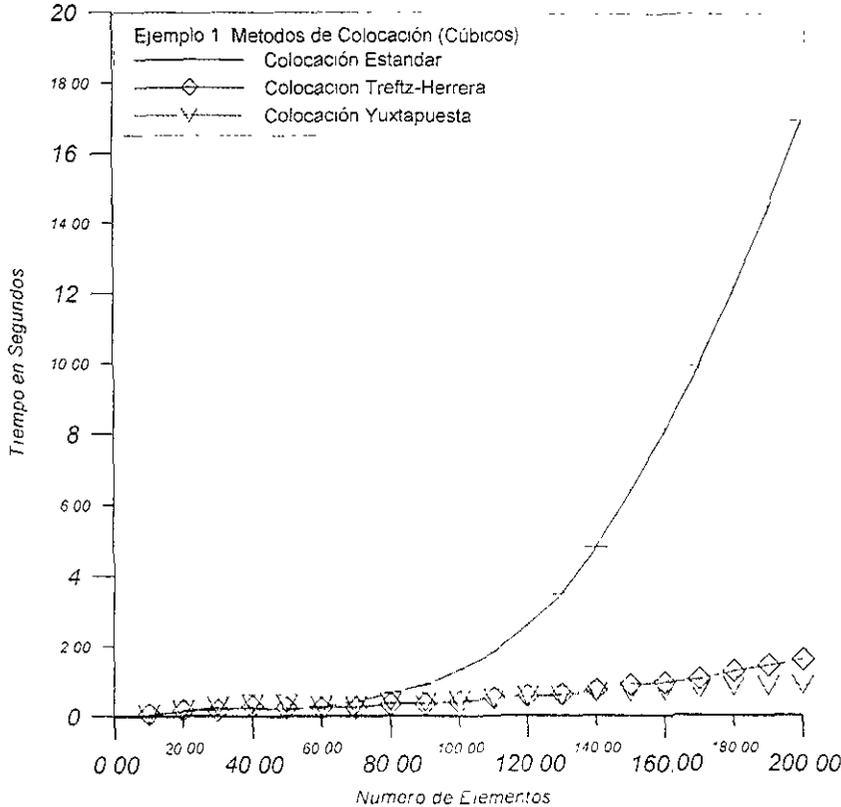


Gráfica 6.1 Resultados del error aplicados al ejemplo 1.

En la siguiente tabla 6.2 y la grafica 6.2 observamos los tiempos de ejecución que se obtuvieron para el ejemplo 1, en la maquina mencionada al principio de este capitulo.

No. Intervalos	Col. Estándar	Col. TH	Col. Yuxtapuesta
10	0.05	0.06	0.05
20	0.11	0.16	0.17
30	0.22	0.16	0.27
40	0.22	0.27	0.33
50	0.16	0.22	0.33
60	0.28	0.22	0.28
70	0.39	0.22	0.27
80	0.66	0.33	0.39
90	0.88	0.33	0.38
100	1.32	0.39	0.44
110	1.81	0.5	0.49
120	2.58	0.55	0.55
130	3.46	0.6	0.55
140	4.78	0.72	0.66
150	6.32	0.88	0.66
160	8.02	0.93	0.71
170	9.89	1.04	0.72
180	12.03	1.26	0.82
190	14.34	1.43	0.83
200	16.91	1.59	0.87

Tabla 6.2 Tiempos de Ejecución del Ejemplo 1.



Grafica 6.2 Resultados del Tiempo de Ejecución aplicados al ejemplo 2.

Ejemplo #2

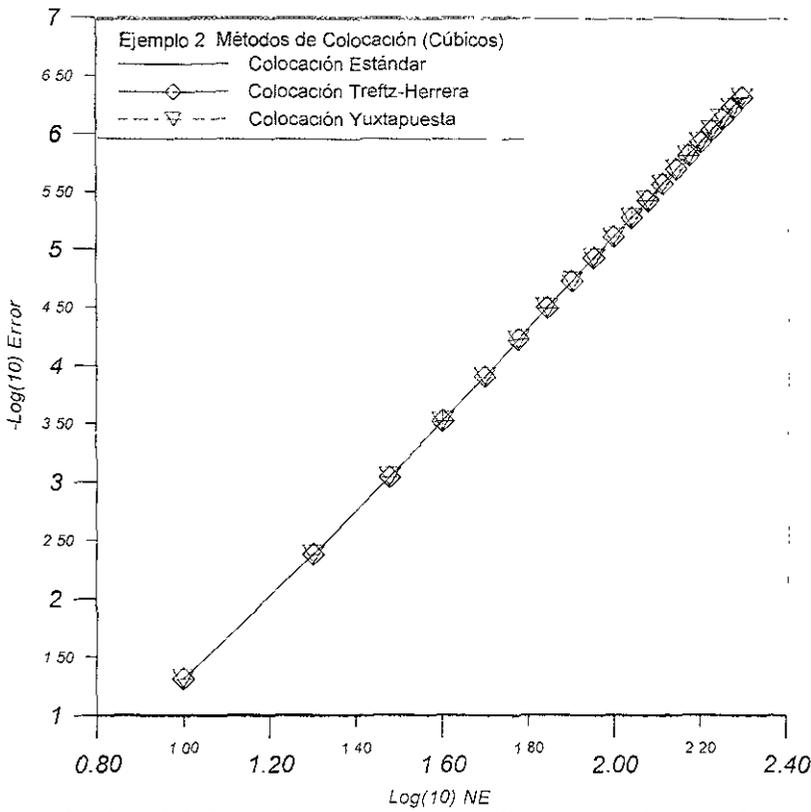
Este ejemplo que consideramos fue con el valor de los coeficientes siguientes:

$$a(x) = 1; \quad b(x) = 0; \quad c(x) = -40\pi^2; \quad f(x) = 0$$

La solución analítica es $u(x) = \sin(\sqrt{40}\pi x)$, los resultados obtenidos se compararon con los del método estándar de colocación descrito en el capítulo 3; Así como también con el método de colocación Trefftz-Herrera, Herrera[21]; Estos se pueden observar en la tabla 6.3. En la gráfica 6.3, podemos observar estos resultado de la tabla 6.3.

NE	Log NE	H (malla)	Col. Estándar		Col. Trefftz-Herrera		Col. Yuxtapuesta	
			Error	-Log Error	Error	-Log Error	Error	-Log Error
10	1,00000	0,1000	4,94E-02	1,306255	4,94E-02	1,306255	4,94E-02	1,306255
20	1,30103	0,0500	4,21E-03	2,376119	4,21E-03	2,376119	4,21E-03	2,376119
30	1,47712	0,0333	9,18E-04	3,036964	9,18E-04	3,036964	9,18E-04	3,036964
40	1,60206	0,0250	3,03E-04	3,518719	3,03E-04	3,518719	3,03E-04	3,518719
50	1,69897	0,0200	1,25E-04	3,902059	1,25E-04	3,902059	1,25E-04	3,902059
60	1,77815	0,0167	6,05E-05	4,218571	6,05E-05	4,218571	6,05E-05	4,218571
70	1,84510	0,0143	3,25E-05	4,487504	3,25E-05	4,487504	3,25E-05	4,487504
80	1,90309	0,0125	1,92E-05	4,716428	1,92E-05	4,716428	1,92E-05	4,716428
90	1,95424	0,0111	1,20E-05	4,919409	1,20E-05	4,919409	1,20E-05	4,919409
100	2,00000	0,0100	7,91E-06	5,102084	7,91E-06	5,102084	7,91E-06	5,102084
110	2,04139	0,0091	5,40E-06	5,267989	5,40E-06	5,267989	5,40E-06	5,267989
120	2,07918	0,0083	3,81E-06	5,419611	3,81E-06	5,419611	3,81E-06	5,419611
130	2,11394	0,0077	2,77E-06	5,557566	2,77E-06	5,557566	2,77E-06	5,557566
140	2,14613	0,0071	2,06E-06	5,685859	2,06E-06	5,685859	2,06E-06	5,685859
150	2,17609	0,0067	1,56E-06	5,805692	1,56E-06	5,805692	1,56E-06	5,805693
160	2,20412	0,0065	1,21E-06	5,918068	1,21E-06	5,918068	1,21E-06	5,918068
170	2,23045	0,0059	9,47E-07	6,023423	9,47E-07	6,023423	9,47E-07	6,023423
180	2,25527	0,0056	7,55E-07	6,122268	7,55E-07	6,122268	7,55E-07	6,122269
190	2,27875	0,0053	6,08E-07	6,21603	6,08E-07	6,21603	6,08E-07	6,21603
200	2,30103	0,0050	4,95E-07	6,305182	4,95E-07	6,305182	4,95E-07	6,305181

Tabla 6.3 Resultados del error aplicados al ejemplo 2

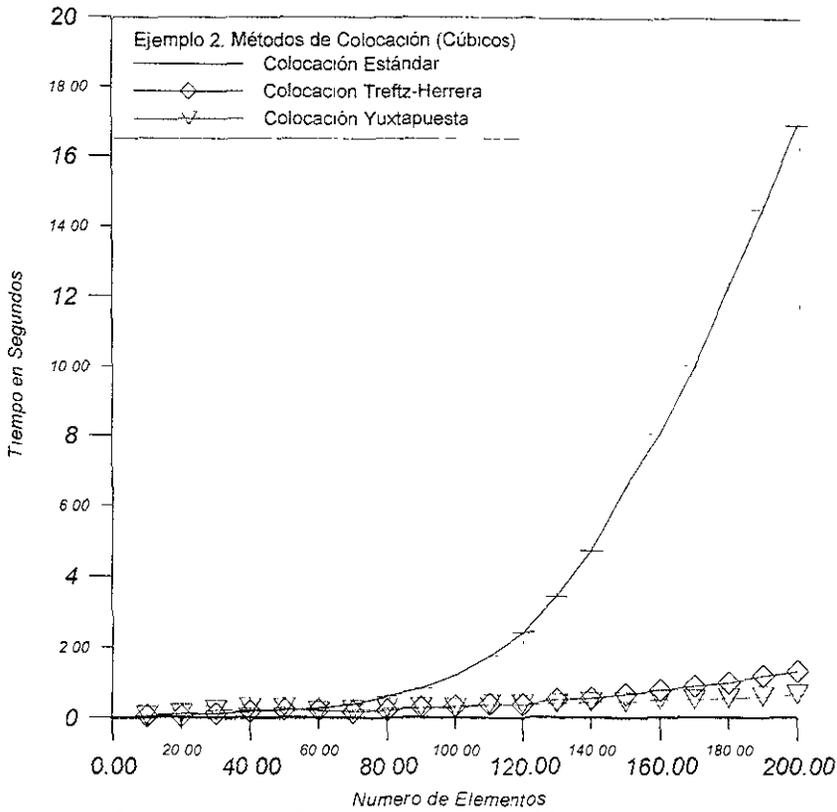


Gráfica 6.3 Resultados del error aplicados al ejemplo 2.

La siguiente tabla 6.4 y la grafica 6.4 se observa tiempos de ejecución que se obtuvieron para el ejemplo 2.

No. Intervalos	Col. Estándar	Col. TH	Col. Yuxtapuesta
10	0.06	0.06	0.06
20	0.11	0.05	0.11
30	0.11	0.11	0.22
40	0.22	0.17	0.27
50	0.22	0.22	0.27
60	0.27	0.22	0.17
70	0.38	0.16	0.22
80	0.61	0.22	0.27
90	0.83	0.28	0.28
100	1.21	0.33	0.27
110	1.76	0.38	0.38
120	2.42	0.38	0.39
130	3.41	0.5	0.38
140	4.72	0.55	0.44
150	6.54	0.66	0.44
160	8.02	0.77	0.5
170	9.99	0.88	0.5
180	12.25	0.99	0.55
190	14.45	1.16	0.6
200	16.86	1.31	0.66

Tabla 6.4 Tiempos de Ejecución del Ejemplo 2.



Gráfica 6.4 Resultados del Tiempo de Ejecución aplicados al ejemplo 2.

Ejemplo #3

El valor de los coeficientes para este ejemplo son los siguientes:

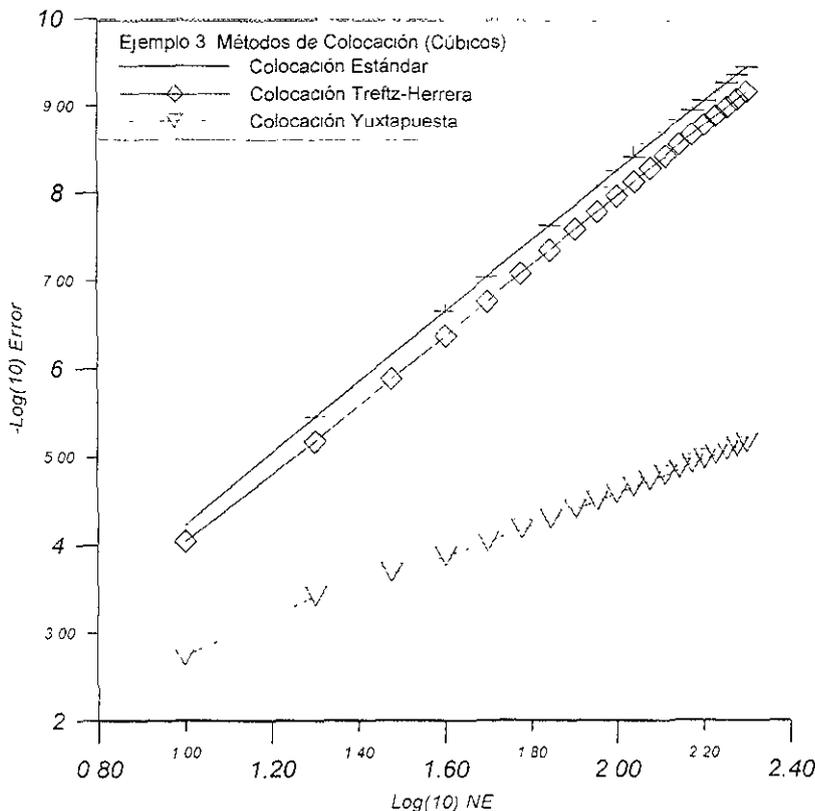
$$a(x) = x^2 - 1; \quad b(x) = 0, \quad c(x) = n(n+1); \quad f(x) = 0$$

donde : $n = \text{Polinomio de Legendre de orden } 5$

Para este ejemplo su solución analítica es $u(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$, los resultados obtenidos se compararon con los del método estándar de colocación descrito en el capítulo 3; así como también con el método de colocación Trefftz-Herrera, Herrera[21]; Estos se pueden observar en la tabla 6.5 En la gráfica 6.5, podemos observar estos resultado de la tabla 6.5.

NE	Log NE	H (malla)	Col. Estándar		Col. Trefftz-Herrera		Col. Yuxtapuesta	
			Error	-Log Error	Error	-Log Error	Error	-Log Error
10	1.00000	0,1000	5,95E-05	4,225256	9,14E-05	4,038855	1,84E-03	2,734064
20	1,30103	0,0500	3,57E-06	5,447543	6,76E-06	5,169998	3,84E-04	3,415493
30	1,47712	0,0333	6,99E-07	6,155329	1,31E-06	5,881148	2,09E-04	3,680827
40	1,60206	0,0250	2,21E-07	6,656269	4,23E-07	6,373683	1,34E-04	3,872579
50	1,69897	0,0200	9,03E-08	7,044096	1,73E-07	6,762072	9,22E-05	4,035319
60	1,77815	0,0167	4,36E-08	7,360983	8,36E-08	7,077987	6,69E-05	4,174328
70	1,84510	0,0143	2,35E-08	7,628903	4,52E-08	7,345091	5,07E-05	4,295014
80	1,90309	0,0125	1,38E-08	7,86098	2,64E-08	7,577723	3,97E-05	4,401413
90	1,95424	0,0111	8,60E-09	8,06568	1,65E-08	7,781232	3,19E-05	4,496445
100	2,00000	0,0100	5,64E-09	8,248786	1,08E-08	7,965354	2,62E-05	4,582253
110	2,04139	0,0091	3,85E-09	8,41442	7,42E-09	8,129718	2,19E-05	4,660435
120	2,07918	0,0083	2,72E-09	8,565609	5,22E-09	8,282005	1,85E-05	4,732236
130	2,11394	0,0077	1,97E-09	8,704652	3,80E-09	8,419912	1,59E-05	4,798601
140	2,14613	0,0071	1,47E-09	8,833395	2,82E-09	8,549246	1,38E-05	4,860273
150	2,17609	0,0067	1,11E-09	8,953261	2,15E-09	8,668539	1,21E-05	4,917928
160	2,20412	0,0065	8,60E-10	9,065387	1,66E-09	8,780918	1,07E-05	4,971981
170	2,23045	0,0059	6,75E-10	9,170709	1,30E-09	8,886021	9,49E-06	5,022867
180	2,25527	0,0056	5,37E-10	9,270018	1,03E-09	8,985358	8,49E-06	5,070989
190	2,27875	0,0053	4,33E-10	9,363947	8,33E-10	9,079308	7,65E-06	5,116423
200	2,30103	0,0050	3,52E-10	9,453056	6,79E-10	9,168306	6,92E-06	5,159734

Tabla 6.5 Resultados del error aplicados al ejemplo 3

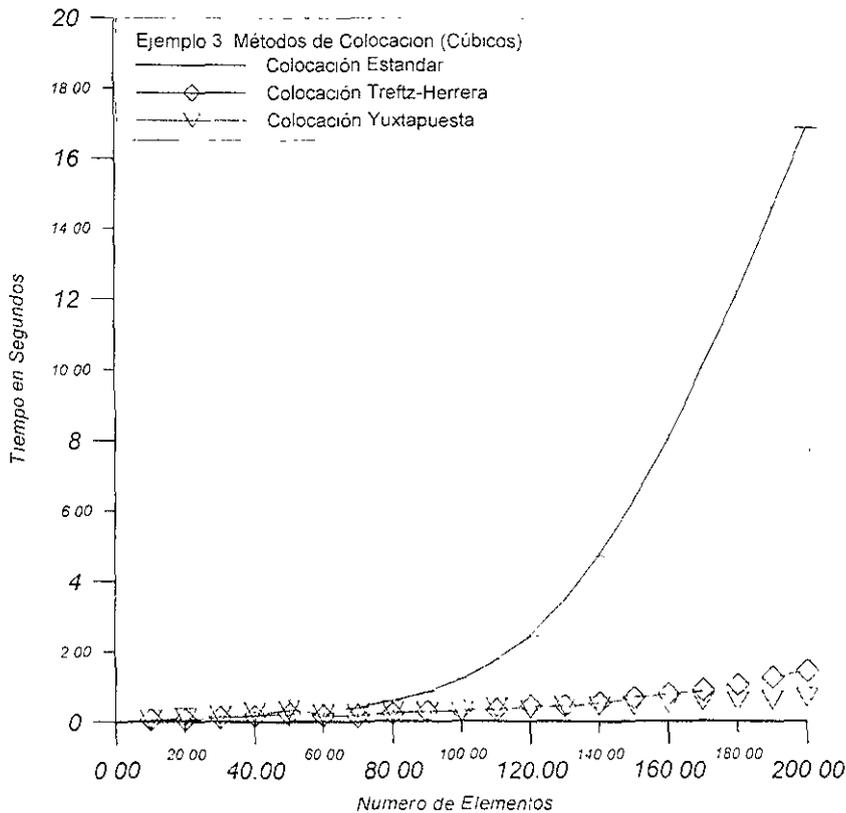


Gráfica 6.5 Resultados del error aplicados al ejemplo 3.

En la tabla 6.6 y la grafica 6.6 se observa tiempos de ejecución que se obtuvieron para el ejemplo 3.

No. Intervalos	Col. Estándar	Col. TH	Col. Yuxtapuesta
10	0	0.05	0.05
20	0.05	0.06	0.11
30	0.11	0.11	0.17
40	0.17	0.16	0.27
50	0.33	0.22	0.33
60	0.22	0.16	0.22
70	0.38	0.16	0.22
80	0.6	0.22	0.27
90	0.83	0.28	0.28
100	1.21	0.33	0.27
110	1.76	0.33	0.39
120	2.42	0.44	0.33
130	3.46	0.44	0.44
140	4.72	0.54	0.44
150	6.26	0.66	0.44
160	8.02	0.77	0.49
170	10.05	0.88	0.55
180	12.09	1.04	0.55
190	14.45	1.26	0.6
200	16.86	1.43	0.66

Tabla 6.6 Tiempos de Ejecución del Ejemplo 3.



Grafica 6.6 Resultados del Tiempo de Ejecución aplicados al ejemplo 3.

Ejemplo #4

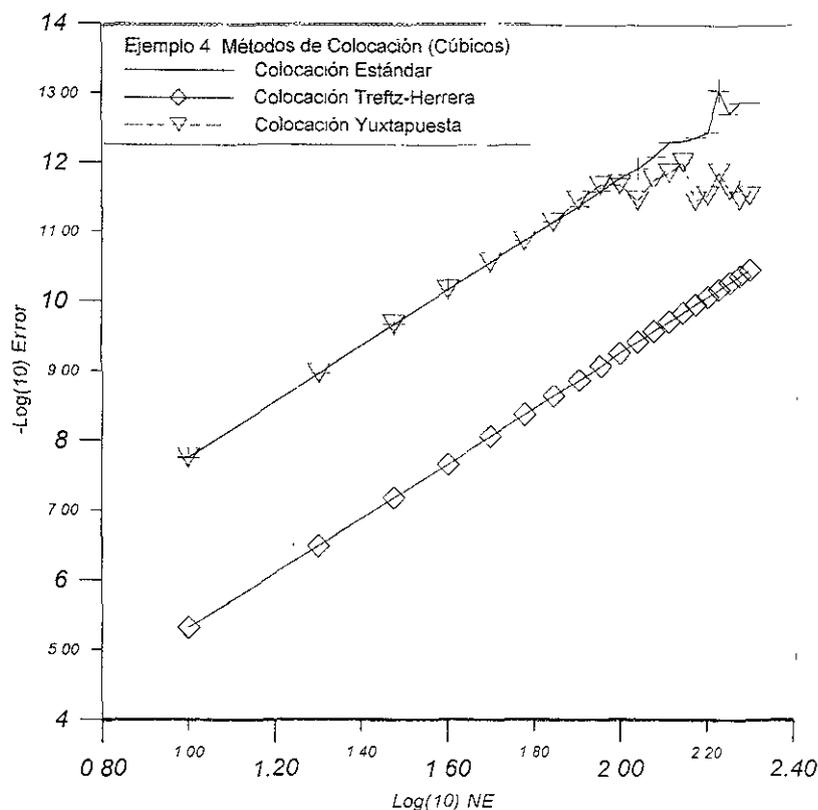
El valor de los coeficientes para este ejemplo son los siguientes:

$$a(x) = 4x^2 + 3; \quad b(x) = 3x - 1; \quad c(x) = 3x(x + 1); \quad f(x) = -(x + 1)^2 e^x$$

El dominio del intervalo es $[0,1]$ y su solución analítica es $u(x) = e^x$, los resultados obtenidos se compararon con los del método estándar de colocación descrito en el capítulo 3; así como también con el método de colocación Trefftz-Herrera, Herrera[21]; Estos se pueden observar en la tabla 6.7. y en la gráfica 6.7.

NE	Log NE	H (malla)	Col. Estándar		Col. Trefftz-Herrera		Col. Yuxtapuesta	
			Error	-Log Error	Error	-Log Error	Error	-Log Error
10	1,00000	0,1000	1,78E-08	7,750516	4,83E-06	5,316288	1,78E-08	7,750516
20	1,30103	0,0500	1,11E-09	8,953549	3,33E-07	6,477642	1,11E-09	8,953574
30	1,47712	0,0333	2,20E-10	9,657921	6,77E-08	7,169717	2,20E-10	9,65773
40	1,60206	0,0250	6,95E-11	10,15789	2,17E-08	7,663683	6,92E-11	10,15968
50	1,69897	0,0200	2,85E-11	10,54562	8,95E-09	8,047963	2,83E-11	10,5481
60	1,77815	0,0167	1,37E-11	10,86234	4,34E-09	8,362494	1,39E-11	10,85546
70	1,84510	0,0143	7,36E-12	11,13321	2,35E-09	8,628738	7,46E-12	11,1271
80	1,90309	0,0125	4,39E-12	11,35729	1,38E-09	8,859561	3,53E-12	11,45194
90	1,95424	0,0111	2,66E-12	11,57583	8,64E-10	9,063287	2,14E-12	11,6702
100	2,00000	0,0100	1,73E-12	11,76236	5,68E-10	9,245616	2,11E-12	11,67515
110	2,04139	0,0091	1,23E-12	11,9095	3,88E-10	9,410613	3,60E-12	11,44407
120	2,07918	0,0083	8,30E-13	12,08115	2,75E-10	9,561298	1,81E-12	11,74304
130	2,11394	0,0077	5,11E-13	12,29127	2,00E-10	9,699948	1,42E-12	11,84915
140	2,14613	0,0071	4,84E-13	12,3155	1,48E-10	9,828339	9,99E-13	12,00025
150	2,17609	0,0067	4,37E-13	12,35909	1,13E-10	9,947891	3,57E-12	11,44738
160	2,20412	0,0065	3,65E-13	12,43766	8,71E-11	10,05974	2,98E-12	11,52548
170	2,23045	0,0059	9,10E-14	13,04078	6,84E-11	10,16483	1,38E-12	11,86019
180	2,25527	0,0056	1,97E-13	12,70515	5,45E-11	10,26389	2,50E-12	11,60206
190	2,27875	0,0053	1,39E-13	12,85838	4,39E-11	10,35765	3,52E-12	11,45334
200	2,30103	0,0050	1,39E-13	12,85838	3,58E-11	10,44664	3,03E-12	11,51836

Tabla 6.7 Resultados del error aplicados al ejemplo 4

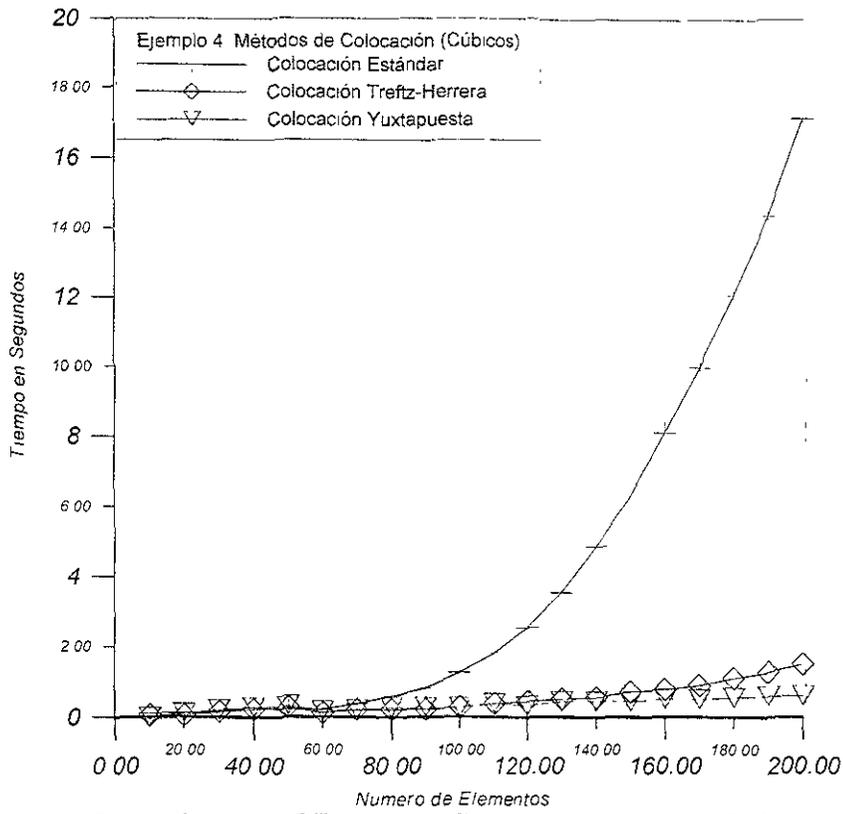


Gráfica 6.7 Resultados del error aplicados al ejemplo 4.

En la tabla 6.8 y la grafica 6.8 se observa tiempos de ejecución que se obtuvieron para el ejemplo 4.

No. Intervalos	Col. Estándar	Col. TH	Col. Yuxtapuesta
10	0.11	0.06	0
20	0.11	0.05	0.11
30	0.17	0.16	0.22
40	0.28	0.22	0.27
50	0.22	0.28	0.33
60	0.22	0.11	0.17
70	0.38	0.21	0.22
80	0.6	0.22	0.27
90	0.82	0.22	0.28
100	1.26	0.28	0.27
110	1.81	0.38	0.39
120	2.53	0.44	0.32
130	3.52	0.5	0.44
140	4.84	0.55	0.44
150	6.26	0.71	0.44
160	8.07	0.77	0.5
170	9.94	0.88	0.5
180	12.03	1.1	0.55
190	14.33	1.27	0.6
200	17.08	1.49	0.6

Tabla 6.8 Tiempos de Ejecución del Ejemplo 4.



Grafica 6.8 Resultados del Tiempo de Ejecución aplicados al ejemplo 4.

7. CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo de tesis fue desarrollar un método directo de colocación sobre dominios Yuxtapuestos en una dimensión. El problema que se consideró fué el de valores a la frontera con saltos prescritos en las fronteras internas del intervalo. Un punto a resaltar sobre esta propuesta es que se usa la colocación para construir la solución directamente, de ahí parte el hecho de que se denomine método directo de colocación.

El hecho de que se interprete como un método de dominios yuxtapuestos, parte de que los subintervalos $(x_{i-1}, x_{i+1}); i=1, \dots, E-1$, definidos para obtener la aproximación de los valores de ϕ'_+ , ϕ'_- y u'_p , y así construir el sistema global de ecuaciones para obtener la aproximación de u' ($i=1, \dots, E-1$), se encuentran traslapados, lo cual es una manera diferente de como se construye la solución aplicando el método de colocación estándar.

Por otro lado este método visto desde el campo de Métodos de Descomposición de Dominios se observa una amplia relación con el método de Schwarz, tal como se demuestra en el punto 4.3, de esta manera al combinarse con el procedimiento de colocación podemos realizar una implantación paralela dada que su formulación es independiente de cualquier esquema iterativo

Otro punto a resaltar reside en los requerimientos que necesita el método, ya que solo requiere la aproximación de la función en cada subintervalo, lo cual en colocación tradicional aparte de la función también se requiere la aproximación de la derivada de la función. Esto nos obliga a tener sistemas más grandes que el que se obtiene con este método propuesto, como vemos por la definición de (4.27) observamos que obtenemos un sistema tridiagonal y además simétrico, independientemente del número de puntos de colocación que se emplee en cada subintervalo, lo cual en colocación estándar no se logra.

Otra característica de este método es que permite manejar coeficientes discontinuos tales como saltos preescritos de la función y su derivada, lo cual el método de colocación tradicional no nos lo permite.

Los resultados numéricos que se obtuvieron se basaron aplicando la ecuación diferencial lineal de segundo orden más general en una dimensión(3.1) concluyendo que al compararse con el método de colocación estándar y el método de colocación Trefftz-Herrera, resulta ser tan preciso como estos, sin embargo en tiempos de ejecución si se observo una gran disminución.

Este trabajo así mismo también continua con la serie de trabajos presentados por el Dr. Herrera y sus colaboradores sobre los métodos de colocación para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Como trabajo futuros que se contemplan son los siguientes:

- Extender este método a 2 ó 3 dimensiones.
- En el área computacional implantarlo en máquinas de procesamiento paralelo dado su alta disponibilidad para orientarlo a este campo.
- En el área matemática también dada su amplia aplicabilidad, sé podría extender para aplicarlo a ecuaciones no-solo elípticas, sino también ecuaciones de tipo parabólicas ó hiperbólicas, así como a problemas de Stokes y de Elasticidad.

Apéndice A

Código Fuente en Fortran del Método Directo de Colocación sobre Dominios Yuxtapuestos en una Dimensión.

```

C-----C
C  YCOL1D_2.FOR  C
C-----C
C  ESTE PROGRAMA IMPLEMENTA EL ALGORITMO DE COLOCACION C
C  YUXTAPUESTA PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACION C
C  DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN DE LA FORMA SIGUIENTE: C
C    - D/DX[A(X)DU/DX] + D/DX[B(X)U]+ C(X)U = F(X) C
C      A=1, B=0, C=-40*(PI)**2, F=0 C
C      U=SIN(SQRT(40)*PI*X) C
C-----C
C  NNOD - NUM. DE NODOS C
C  H - LARGO DEL ELEMENTO C
C  NE - NÚMERO DE ELEMENTOS C
C  XMIN - COORDENADA DEL NODO INICIAL C
C  XMAX - COORDENADA DEL NODO FINAL C
C  UF(2)- VALORES DE FRONTERA C
C-----C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER (NEE=200)
PARAMETER (NEM1=NEE-1)
PARAMETER (NPAR1=4)
CHARACTER FMA1*5,SALIDA*12
COMMON /ALF/ALFA
COMMON /CONST/PI
COMMON /PARAM/FP
COMMON /MALLA/H,NE
COMMON /DOMINIO/XMIN,XMAX
COMMON /PUNTOSCOL/EC(2)
COMMON /FRONTERA/UF(2)
COMMON /SOLUCION/UN(NEE)
COMMON /NODOS/XNODOS(NEM1)
COMMON /SALTOS/SJ0(NEM1),SJ1(NEM1)
COMMON /MATL/AML(NPAR1,NPAR1),TDL(NPAR1,3)
COMMON /MATG/AG(NEM1),BG(NEM1),CG(NEM1),TDG(NEM1),U(NEM1)

PI=4.0D0*DATAN(1.0D0)
FP=DSQRT(40.0D0)*PI
ALFA = 20.0D0
XMIN=0.0D0
XMAX=1.0D0
C---CONDICIONES DE FRONTERA
UF(1)=US(XMIN)
UF(2)=US(XMAX)
FMA1='(A)'
NE=NEE
C---PUNTOS DE COLOCACION
EC(1)=- 577350269189626D0
EC(2)= 577350269189626D0

WRITE(*,*) ' NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA= '
READ(*,FMA1)SALIDA
OPEN(2,FILE=SALIDA,STATUS='UNKNOWN')
WRITE(2,FMA1) SALIDA
WRITE(2,*) ' XMIN= ',XMIN,' XMAX= ',XMAX
WRITE(2,*)'UF(1)=' ,UF(1),'UF(2)=' ,UF(2)
WRITE(2,*) ' '
WRITE(2,*) '   NE   H   ERRMAX   TIME'

DO 100 NE=10,NEE,10
    H=(XMAX-XMIN)/NE
    NS=NE-1

```

```

DO 10 I=1,NS
  U(I)=0.0D0
  TDG(I)=0.0D0
  AG(I)=0.0D0
  BG(I)=0.0D0
  CG(I)=0.0D0
  SJO(I)=0.0D0
  SJ1(I)=0.0D0
10 CONTINUE

C-----CREA PARTICION-----C
DO 15 I=1,NS
  XNODOS(I)=XMIN+H*I
15 CONTINUE

C-----CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA GLOBAL-----C
DO 20 ID=1,NS
  CALL SLOCAL(ID)
20 CONTINUE

  CALL TRIDIAG(AG,BG,CG,TDG,U,NS)

  WRITE(2,*)'-----SOLUCION U(I)-----'
  UN(1)=UF(1)
  DO 40 I=1,NS
    UN(I+1)=U(I)
    WRITE(2,*)I,U(I)
40 CONTINUE
  UN(NE+1)=UF(2)

C----REALIZA EL CALCULO DEL ERROR COMPARANDO LA SOLUCIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA
ERRMAX=0.0D0
WRITE(2,*)'-----SOLUCION U(I) EN NODOS-----'
WRITE(2,*)' N X UN US ERR'
DO 50 I=1,NE+1
  X=XMIN + (I-1)*H
  ERR=ABS(UN(I)-US(X))
  IF(ERR GT ERRMAX)ERRMAX=ERR
  WRITE(2,'(1X,I3,1X," ",F8.6,2(1X," ",F15.8),1X," ",E10.2)')
  I,X,UN(I),US(X),ERR
50 CONTINUE
  WRITE(2,*)' ERRMAX EN NODOS= ',ERRMAX
  ERRIN=0.0D0
  ERREX=0.0D0

100 CONTINUE
  CLOSE(2)
  STOP
  END

C-----C-----C
DOUBLE PRECISION FUNCTION TRSF(X,H)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C-----C-----C
C ESTA FUNCION REALIZA LA TRANSFORMACION C
C (-1,1) --> (0,H) C
C-----C-----C
  TRSF=(X+1.0D0)*H/2.0D0
  RETURN
  END
C-----C-----C

DOUBLE PRECISION FUNCTION AN(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C-----C-----C
C COÉFICIENTE A(X) DE LA ECUACION ELIPTICA C
C-----C-----C
  AN=-A(X)
  RETURN
  END

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION BN(X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C   COEFICIENTE B(X) DE LA ECUACION ELIPTICA   C
C-----C
BN=B(X)-DA(X)
RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION CN(X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C   COEFICIENTE C(X) DE LA ECUACION ELIPTICA   C
C-----C
CN=C(X)+DB(X)
RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION US(X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C   SOLUCION ANALÍTICA DE LA ECUACION ELIPTICA   C
C-----C
COMMON /CONST/PI
COMMON /PARAM/FP
COMMON /ALF/ALFA
C   US=DSIN(FP*X) + X*DCOS(FP*X)
C   US=DSIN(DSQRT(40.0D0)*PI*X)
US=(63.0D0*X**5 - 70.0D0*X**3 + 15.0D0*X)/8.0D0
C   US=EXP(X)
RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C   TÉRMINO DERECHO F(X) DE LA ECUACION ELIPTICA   C
C-----C
C   F=0.0D0
C   F=0.0D0
F=0.0D0
C   F=-(X+1.0D0)**2*EXP(X)
RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION A(X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C   COEFICIENTE A(X) DE LA ECUACION ELIPTICA   C
C-----C
C   A=1.0D0
C   A=1.0D0
A=X**2-1.0D0
C   A=4.0D0*(X**2)+3.0D0
RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION DA(X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C   DERIVADA DEL COEFICIENTE A(X) DE LA ECUACION ELIPTICA   C
C-----C
C   DA=0.0D0
C   DA=0.0D0
DA=2.0D0*X
C   DA=8.0D0*X
RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION B(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C COEFICIENTE B(X) DE LA ECUACION ELIPTICA C
C-----C
COMMON /ALF/ALFA
COMMON /PARAM/FP
C B=(2 0D0*FP*X)/FQ(X)
C B=0.0D0
B=0 0D0
C B=3 0D0*X-1 0D0
RETURN
END
    
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION DB(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C DERIVADA DEL COEFICIENTE B(X) DE LA ECUACION ELIPTICA C
C-----C
COMMON /PARAM/FP
C DB=2 0D0*FP*(1.0D0+ FP*(1 0D0-X*X))/FQ(X)**2
C DB=0.0D0
DB=0.0D0
C DB=3 0D0
RETURN
END
    
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION C(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C COEFICIENTE C(X) DE LA ECUACION ELIPTICA C
C-----C
COMMON /MALLA/H,NE
COMMON /CONST/PI
COMMON /PARAM/FP
C C=-((4 0D0*FP*(1 0D0+FP))/(FQ(X)*FQ(X)) +
C * ((2 0D0*FP**2)/FQ(X)) + FP**2)
C C=-40 0D0*PI**2
C=5 0D0*(5 0D0+1 0D0)
C C=3 0D0*X*(X+1.0D0)
RETURN
END
    
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FQ(X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C COEFICIENTE C(X) DE LA ECUACION ELIPTICA C
C-----C
COMMON /PARAM/FP
FQ=1 0D0 + FP*(1.0D0+X**2)
RETURN
END
C-----C
    
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H0(I,ND,X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C CALCULA LA DERIVADA ND DEL POLINOMIO CUBICO DE HERMITE C
C H0(X) EN EL INTERVALO I EVALUADA EN EL PUNTO X C
C-----C
PARAMETER (NEE=200)
PARAMETER (NEM1=NEE-1)
COMMON /DOMINIO/XMIN,XMAX
COMMON /MALLA/H,NE
COMMON /NODOS/XNODOS(NEM1)

IF ((I == 0.AND (X < XMIN .OR. X > XNODOS(1))) .OR
1 (I == NE .AND (X > XMAX OR X < XNODOS(NE - 1))) OR
2 (I > 1 .AND X < XNODOS(I - 1)) OR
3 (I < NE-1 .AND X > XNODOS(I + 1))) THEN
    H0=0.0D0
    RETURN
ENDIF
IF(I==0) THEN
    XNOD=XMIN
ELSEIF(I==NE) THEN
    XNOD=XMAX
ELSE
    XNOD = XNODOS(I)
ENDIF
IF(X>=XNOD)THEN
    Y = (X-XNOD)/H
ELSE
    Y = (XNOD-X)/H
ENDIF
GOTO(1,2,3),ND
1 H0 = 1.0D0-Y*Y*(3.0D0-2.0D0*Y)
  GOTO 100
2 IF(X>=XNOD) THEN
    Z = 6.0D0/H
  ELSE
    Z = -6.0D0/H
  ENDIF
  H0 = Z*Y*(Y - 1.0D0)
  GOTO 100
3 IF(X>=XNOD) THEN
    Z = 6.0D0/(H*H)
  ELSE
    Z = 6.0D0/(H*H)
  ENDIF
  H0 = Z*(2.0D0*Y - 1.0D0)
100 RETURN
END
    
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H1(I,ND,X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C CALCULA LA DERIVADA ND DEL POLINOMIO CUBICO DE HERMITE C
C H1(X) EN EL INTERVALO I C
C-----C
```

```
PARAMETER (NEE=200)
PARAMETER (NEM1=NEM-1)
COMMON /DOMINIO/XMIN,XMAX
COMMON /MALLA/H,NE
COMMON /NODOS/XNODOS(NEM1)
```

```
IF ((I == 0.AND (X < XMIN OR X > XNODOS(1))) OR
1 (I == NE .AND (X > XMAX OR X < XNODOS(NE - 1))) OR
2 (I > 1 .AND X < XNODOS(I - 1)) OR
3 (I < NE-1 .AND X > XNODOS(I + 1))) THEN
    H0=0.0D0
    RETURN
ENDIF
```

```
IF (I==0) THEN
    XNOD=XMIN
ELSEIF(I==NE) THEN
    XNOD=XMAX
ELSE
    XNOD = XNODOS(I)
ENDIF
```

```
IF (X>=XNOD) THEN
    Y = (X-XNOD)/H
ELSE
    Y = (XNOD-X)/H
ENDIF
GOTO(1,2,3),ND
1 IF(X >= XNOD) THEN
    Z = H
ELSE
    Z = -H
ENDIF
H1 = Z*Y*(1 0D0-Y*(2 0D0-Y))
GOTO 100
2 H1 = 1 0D0-Y*(4 0D0-3 0D0*Y)
GOTO 100
3 IF (X >= XNOD) THEN
    Z = 1 0D0/H
ELSE
    Z = -1 0D0/H
ENDIF
H1 = Z*(6 0D0*Y-4 0D0)
100 RETURN
END
```

DOUBLE PRECISION FUNCTION OPL(ID,HP,X)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
C-----C
C OPERADOR LINEAL C
C LU=- D/DX[A(X)DU/DX] + D/DX[B(X)U]+ C(X)U C
C DONDE U=HP - FUNCIÓN POLINOMIO CUBICO DE HERMITE (H0,H1)C
C X- PUNTO DE EVALUACIÓN C
C ID- NÚMERO DEL NODO C
C-----C
```

```
EXTERNAL HP
OPL= AN(X)*HP(ID,3,X)
1 +BN(X)*HP(ID,2,X)
2 +CN(X)*HP(ID,1,X)
RETURN
END
```

SUBROUTINE FMLOCAL(ID)

```

C-----C
C  FORMA MATRIZ LOCAL PARA EL NODO ID      C
C-----C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
PARAMETER (NEE=200)
PARAMETER (NEM1=NEE-1)
PARAMETER (NPAR1=4)
COMMON /MALLA/H,NE
COMMON /NODOS/XNODOS(NEM1)
COMMON /SALTOS/SJ0(NEM1),SJ1(NEM1)
COMMON /PUNTOSCOL/EC(2)
COMMON /MATL/AML(NPAR1,NPAR1),TDL(NPAR1,3)
COMMON /MATG/AG(NEM1),BG(NEM1),CG(NEM1),TDG(NEM1),U(NEM1)
  DIMENSION XC(4),SJI(4)
  EXTERNAL H0,H1

  XC(1)=XNODOS(ID)-H+TRSF(EC(1),H)
  XC(2)=XNODOS(ID)-H+TRSF(EC(2),H)
  XC(3)=XNODOS(ID)+TRSF(EC(1),H)
  XC(4)=XNODOS(ID)+TRSF(EC(2),H)
  SJI(1)=0.0D0
  SJI(2)=SJ0(ID)
  SJI(3)=SJ1(ID)
  SJI(4)=0.0D0
  AML=0.0D0
  TDL=0.0D0
  DO 10 I=1,4
    IF(I<3) THEN
      AML(I,1)=OPL(ID-1,H1,XC(I))
      AML(I,2)=OPL(ID,H0,XC(I))
      AML(I,3)=OPL(ID,H1,XC(I))
      TDL(I,1)=-OPL(ID-1,H0,XC(I))
    ELSE
      AML(I,2)=OPL(ID,H0,XC(I))
      AML(I,3)=OPL(ID,H1,XC(I))
      AML(I,4)=OPL(ID+1,H1,XC(I))
      TDL(I,2)=-OPL(ID+1,H0,XC(I))
    ENDIF
    SUMA=0.0D0
    DO 5 J=1,4
      SUMA=SUMA+AML(I,J)*SJI(J)
5    CONTINUE
    IF(I<3) THEN
      TDL(I,3)=F(XC(I))+0.5D0*SUMA
    ELSE
      TDL(I,3)=F(XC(I))-0.5D0*SUMA
    ENDIF
10  CONTINUE
  RETURN
  END
  
```

SUBROUTINE SLOCAL(ID)

```

C-----C
C  RESUELVE EL SISTEMA LOCAL PARA      C
C  FI_-,FI_+, PROMEDIO UP_-.          C
C-----C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
PARAMETER (NEE=200)
PARAMETER (NEM1=NEE-1)
PARAMETER (NPAR1=4)
COMMON /MALLA/H,NE
COMMON /PUNTOSCOL/EC(2)
COMMON /FRONTERA/UF(2)
COMMON /SALTOS/SJ0(NEM1),SJ1(NEM1)
COMMON /MATL/AML(NPAR1,NPAR1),TDL(NPAR1,3)
COMMON /MATG/AG(NEM1),BG(NEM1),CG(NEM1),TDG(NEM1),U(NEM1)
  
```

```

IS=2
CALL FMLOCAL(ID)
CALL GAUSSJ(AML,4,NPAR1,TDL,4,3)
IF(ID==1) THEN
  BG(ID)=1.0D0
  CG(ID)=-TDL(IS,2)
  TDG(ID)=TDL(IS,1)*UF(1)
  1 +TDL(IS,3)
  2 -TDL(IS,2)/2.0D0*SJ0(ID+1)
ELSEIF(ID==NE-1) THEN
  AG(ID)=-TDL(IS,1)
  BG(ID)=1.0D0
  TDG(ID)=TDL(IS,1)/2.0D0*SJ0(ID-1)
  1 +TDL(IS,3)
  2 +TDL(IS,2)*UF(2)
ELSE
  AG(ID)=-TDL(IS,1)
  BG(ID)=1.0D0
  CG(ID)=-TDL(IS,2)

  TDG(ID)=TDL(IS,1)/2.0D0*SJ0(ID-1)
  1 +TDL(IS,3)
  2 -TDL(IS,2)/2.0D0*SJ0(ID+1)
ENDIF
RETURN
END

```

SUBROUTINE GAUSSJ(A,N,NP,B,M,MP)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C INVERSIÓN USANDO EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN C
C-----C
PARAMETER (NPAR1=4)
PARAMETER (NMAX=NPAR1)
DIMENSION A(NP,NP),B(NP,MP),IPIV(NMAX),INDXR(NMAX),INDXC(NMAX)
DO 11 J=1,N
  IPIV(J)=0
11 CONTINUE
DO 22 I=1,N
  BIG=0
  DO 13 J=1,N
    IF(IPIV(J) NE 1)THEN
      DO 12 K=1,N
        IF (IPIV(K) EQ 0) THEN
          IF (ABS(A(J,K)) GE.BIG)THEN
            BIG=ABS(A(J,K))
            IROW=J
            ICOL=K
          ENDIF
        ELSE IF (IPIV(K) GT 1) THEN
          PAUSE 'SINGULAR MATRIX'
        ENDIF
      CONTINUE
    ENDIF
  CONTINUE
  IPIV(ICOL)=IPIV(ICOL)+1
  IF (IROW NE ICOL) THEN
    DO 14 L=1,N
      DUM=A(IROW,L)
      A(IROW,L)=A(ICOL,L)
      A(ICOL,L)=DUM
    CONTINUE
    DO 15 L=1,M
      DUM=B(IROW,L)
      B(IROW,L)=B(ICOL,L)
      B(ICOL,L)=DUM
    CONTINUE
  ENDIF
  INDXR(I)=IROW
  INDXC(I)=ICOL

```

```

IF (A(ICOL,ICOL) EQ.0 ) PAUSE 'SINGULAR MATRIX '
PIVINV=1 /A(ICOL,ICOL)
A(ICOL,ICOL)=1
DO 16 L=1,N
  A(ICOL,L)=A(ICOL,L)*PIVINV
16 CONTINUE
DO 17 L=1,M
  B(ICOL,L)=B(ICOL,L)*PIVINV
17 CONTINUE
DO 21 LL=1,N
  IF(LL NE.ICOL)THEN
    DUM=A(LL,ICOL)
    A(LL,ICOL)=0.
    DO 18 L=1,N
      A(LL,L)=A(LL,L)-A(ICOL,L)*DUM
18 CONTINUE
    DO 19 L=1,M
      B(LL,L)=B(LL,L)-B(ICOL,L)*DUM
19 CONTINUE
  ENDIF
21 CONTINUE
22 CONTINUE
DO 24 L=N 1,-1
  IF(INDXR(L) NE INDXC(L))THEN
    DO 23 K=1,N
      DUM=A(K,INDXR(L))
      A(K,INDXR(L))=A(K,INDXC(L))
      A(K,INDXC(L))=DUM
23 CONTINUE
  ENDIF
24 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE TRIDIAG(A,B,C,R,U,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

C-----C
C  MÉTODO DE THOMAS PARA MATRICES TRIDIAGONALES  C
C-----C
INTEGER N
PARAMETER (NEE=200)
PARAMETER (NEM1=NEE-1)
DIMENSION A(N),B(N),C(N),R(N),U(N)
INTEGER J
DIMENSION GAM(NEM1)
IF(B(1) EQ 0 )PAUSE 'TRIDAG REWRITE EQUATIONS'
BET=B(1)
U(1)=R(1)/BET
DO 11 J=2,N
  GAM(J)=C(J-1)/BET
  BET=B(J)-A(J)*GAM(J)
  IF(BET.EQ 0.)PAUSE 'TRIDAG FAILED'
  U(J)=(R(J)-A(J)*U(J-1))/BET
11 CONTINUE
DO 12 J=N-1,1,-1
  U(J)=U(J)-GAM(J+1)*U(J+1)
12 CONTINUE
RETURN
END

```

Bibliografía

- [1] Slater J. C., "Electronic Energy Bands in Metals" *Phys. Rev.*, Vol. 45, pp. 794-801, 1934.
- [2] Lanczos C., "Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions" *J. of Math. And Phys.*, Vol. 17, No. 3, pp. 123-199, 1938.
- [3] Russell R. D. y Shampine L. F., "A Collocation Method for Boundary Value Problems", *Numeric. Math.*, Vol. 19, pp. 1-28, 1972.
- [4] DeBoor C. y Swartz B., "Collocation at Gaussian Points", *S.I.A.M. J. Num. Anal.*, Vol. 10, No. 4, pp. 582-606, 1973.
- [5] Carey G. F. y Finlayson B. A., "Orthogonal Collocation on Finite Elements", *Chemical Engineering Science*, Vol. 30, pp. 587-596, Pergamon Press, 1975.
- [6] Prenter P. M., "Splines and Variational Methods, John Wiley, New York, 1975.
- [7] Celia M.A., "Collocation on Deformed Finite Elements and Alternating Direction Collocation", P.H. Dissertation, Princeton University, 1983.
- [8] Dyksen W. R., Houstis E. N., Lynch R. E. y Rice J. R., "The Performance of the Collocation and Galerkin Methods with Hermite Bi-Cubics", *SIAM, J. Numeric. Analysis*, Vol. 21, No. 4, pp. 695-715, 1984.
- [9] Houstis E. N., Mitchell W. F. y Rice J. R., "Collocation Software for Second-Order Elliptic Partial Differential Equations", *ACM Trans. Math. Software*, Vol 11, No. 4, pp. 379-412, 1985.
- [10] Cristara C. C., Houstis E. N. y Rice J. R., "A Parallel Spline Collocation-Capacitance Method for Elliptic Partial Differential Equations", *Supercomputing. 1988 Conference Proceedings*, pp. 375-384, ACM Press, New York, 1988.
- [11] Lions P.L., "On the Schwarz Alternating Method I", *Domain Decomposition Methods for PDE (DD1, 1987)*, SIAM, 1988, pp. 1-42.
- [12] Lions P.L., "On the Schwarz Alternating Method II: Stochastic Interpretation and Order Properties", *Domain Decomposition Methods for PDE (DD2, 1988)*, SIAM, 1989, pp. 47-70.

-
- [13] Bjørstad P. E., "Multiplicative and Additive Schwarz Methods: Convergence in the two domain case", *Domain Decomposition Methods for PDE (DD2, 1988)*, SIAM, 1989, pp. 147-159.
- [14] Zampieri E., "A Multidomain Spectral Collocation Solver for the Elasticity Problem", *University of Minnesota Supercomputer Institute Research Report UMSI 91/180*, 1991.
- [15] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. y Flannery B. P., "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing", Second Edition, Cambridge University Press Programs, 1986-1992.
- [16] Robinson M.P. y Fairweather G., "Orthogonal Cubic Spline Collocation Solution of Underwater Acoustic Wave Propagation Problems" *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 1, No. 3, pp. 355-370, 1993.
- [17] Herrera I., Guarnaccia J. y Pinder G. F., "Domain Decomposition Method for Collocation Procedures", *Computational Methods in Water Resources X*, Vol. 1, pp. 273-280, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [18] Robinson M.P. y Fairweather G., "Orthogonal Cubic Spline Collocation Methods for Schrodinger-Type Equations in One Space Variable", *Numeric. Math.*, Vol. 68, pp. 355-376, 1994.
- [19] Quarteroni A., Periaux J., Kuznetsov A. Y. y Widlund O. B., "Domain Decomposition Methods in Science and Engineering", *Proceedings of the Sixth International Conference on Domain Decomposition*, Como, Italia, AMS, Providence, Rhode Island, 1994.
- [20] Brill S. H., "The Solution of Two-Dimensional Partial Differential Equations via Hermite Collocation With Block Red-Black Gauss-Seidel Preconditioner", P.H. Dissertation, Vermont University, 1998.
- [21] Herrera I. y Diaz M., "Indirect Methods of Collocation Trefftz-Herrera Collocation", John Wiley & Sons, Inc. 1999.
- [22] Ng K. S., "Quadratic Spline Collocation Methods for Systems of Elliptics PDE's", M. Sc., University of Toronto, 2000.

- [23] Herrera I. y Yates R., "Domain Decomposition Methods: A Non-Iterative Schwarz Method", Artículo en preparación, 2001.