



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA
DE LA COMPUTACIÓN**

**“NÚMEROS CROMÁTICOS DE ALGUNAS
GRÁFICAS DE GIROS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A

José David Flores Peñaloza.

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA.

México, D.F.

Noviembre de 2006.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedico esta tesis a mi ahijadita
Alma Ángeles.
Porque has traído vida nueva a toda tu familia.
David.*

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que me han brindado su apoyo para llevar a cabo esta tesis. Es imposible citar a todas ellas, así que me restringiré a las más significativas en el desarrollo de esta tesis. De antemano ofrezco una disculpa por cualquier omisión involuntaria.

A toda mi familia. Especialmente a mis padres, mis hermanos, mis padrinos y mi tío **Arturo**. Por el invaluable e incondicional apoyo que siempre me han brindado. Sin ustedes nada de esto hubiera sido posible.

A Jorge Urrutia. Porque me has brindado todo tu apoyo y porque has confiado enormemente en mí. Muchas gracias por ayudarme a cumplir el sueño de dedicarme por completo a las Matemáticas. Es un orgullo ser tu estudiante. Gracias por ser mucho más que un simple supervisor.

A Ferran Hurtado. Porque me diste un trato excepcional y me recibiste cálidamente como un miembro más del grupo de investigación que diriges. Todo ello a pesar de mi absoluta inexperiencia en el área. Gracias por tu enorme calidez y por tu genial entusiasmo. Ha sido un honor y un placer trabajar contigo.

A Ruy Fabila y Clemens Huemer. Porque aprendí mucho trabajando con ustedes. Gracias por ser mis compañeros y mis amigos y porque, junto con **Tarso** y **Diego**, fueron mi familia mientras vivimos en Barcelona.

Al resto del grupo de geometría computacional de la UPC. Porque ha sido fantástico trabajar con ustedes.

A la gente de la UNAM. Porque he pasado momentos estupendos con ustedes. Gracias especialmente a **Amalia, Ana, Anabel, Alejandro, Boris Claudio, Crevel, David, Gerardo, Gibrán, Iván, Javier, Mario, Montse, Rafa, Ramiro, Rodrigo** y **Wendy**.

A mis sinodales, los Doctores **Ernesto Bribiesca, Francisco Hernández, Juan José Montellano** y **Sergio Rajsbaum**. No encuentro palabras para agradecerles su extraordinario apoyo en la revisión de esta tesis. Gracias también a Sergio y a Francisco porque, junto con **Jesús Savage**, me impartieron algunos de los mejores cursos que alguna vez haya tomado.

A la familia Sélem Mojica. Por haber sembrado en mí el genuino gusto por las matemáticas, y por permitirme ser su amigo.

Índice general

Prefacio	viii
1. Introducción	1
1.1. Gráficas de giros	1
1.2. Definiciones	4
1.2.1. Gráficas	4
1.2.2. Número cromático	7
1.2.3. Geometría	9
2. Gráfica de giros de triangulaciones del n-ángulo convexo	11
2.1. Definiciones	11
2.1.1. Resultados previos	11
2.2. Números de Catalan	13
2.3. Árboles binarios completos	14
2.4. Número cromático	15
2.4.1. Primera cota superior: $n - 2$	15
2.4.2. Segunda cota superior: $\lceil n/2 \rceil$	18
2.4.3. Tercera cota superior: $O(n/\log(n))$	20

2.4.4. Cota inferior	21
2.5. Gráfica de giros de triangulaciones con diagonales etiquetadas	21
2.5.1. Definiciones	22
2.5.2. Número cromático	24
3. Gráfica de giros de triángulos sobre el n-ágono convexo	28
3.1. Definiciones	28
3.2. Número Cromático	30
3.2.1. Cota Superior	30
3.2.2. Cota Inferior	33
3.3. Notas bibliográficas	35
4. Trayectorias hamiltonianas geométricas sobre el n-ágono convexo	36
4.1. Definiciones	36
4.2. Número cromático	37
4.3. Notas bibliográficas	44
5. Conclusiones y trabajo futuro	45
Bibliografía	47

Prefacio

La *geometría computacional* es una área de la computación con un desarrollo muy activo en los últimos años. Su objetivo es el estudio de algoritmos para resolver problemas planteados en términos geométricos. La geometría computacional se desarrolla junto con la *geometría combinatoria* en una perfecta simbiosis, fortaleciéndose mutuamente con cada nuevo descubrimiento. La geometría combinatoria es la rama de la matemática que estudia a los objetos geométricos considerándolos como entidades discretas. Es justo en esta disciplina en donde se desarrolla la investigación presentada en este trabajo; muy en particular en la línea de investigación conocida informalmente como *gráficas de giros*.

Las gráficas de giros tienen como vértices objetos geométricos y/o combinatorios. En estas, dos objetos son adyacentes si su estructura es lo más parecida posible. Existen trabajos de investigación que se han enfocado a estudiar numerosas propiedades de gráficas de giros. Curiosamente una propiedad que casi no se ha estudiado es la del *número cromático*. Es por ello que, motivados en llenar un poco el vacío en este apartado, hemos decidido investigar justo esta propiedad.

En este trabajo estudiamos el número cromático de varias familias de gráficas de giros (la mayoría introducidas por nosotros mismos). Todas estas familias tienen como parámetro el entero n : el tamaño del conjunto de puntos sobre el cual consideramos nuestros objetos geométricos.

El trabajo se divide en 5 capítulos:

Capítulo 1 introduce los conceptos de *gráfica de giros* y de *número cromático*. Establece también la terminología de teoría de gráficas y de geometría usada en el resto del libro.

Capítulo 2 estudia la gráfica de giros de *triangulaciones* de conjuntos de n puntos en posición convexa.

En la primera parte se da la definición de la gráfica y se mencionan los resultados previos de la misma. Se muestra que esta es una gráfica de alto interés debido a la

extensa investigación ya existente acerca de sus demás propiedades.

En la segunda parte se dan cotas superiores constructivas (originales) de orden lineal (respecto a n) para el número cromático de esta gráfica. Estas cotas permiten obtener los colores de vértices individuales sin tener que construir la gráfica completa, lo cual en la práctica es conveniente debido al tamaño exponencial de esta gráfica. También se da una cota teórica que mejora el orden asintótico de la coloración, estableciendo el valor del mismo en a lo más $O(n/\log n)$. Respecto a la cota inferior, se dan los valores del número cromático de la gráfica para los primeros valores de n .

En la parte final se define y estudia una variante de la gráfica, en la cual se considera que las diagonales de una triangulación tienen etiquetas únicas, y que al girar una arista esta conserva su etiqueta. Se demuestra que con esta modificación se obtiene una gráfica con número cromático 2. La definición de esta gráfica y el cálculo de su número cromático son aportaciones originales al conocimiento del área.

Capítulo 3 define y estudia la gráfica de giros de *triángulos* con vértices sobre un conjunto de n puntos en posición convexa. Se muestra que dada una coloración para la gráfica sobre n puntos, es posible duplicar el tamaño del conjunto de puntos y ocupar a lo más 4 nuevos colores para colorear la gráfica resultante, obteniendo con ello una cota superior de orden logarítmico (respecto a n). Se demuestra que este es el orden de complejidad del número cromático mostrando que el número cromático de una subgráfica inducida alcanza este valor asintótico.

La definición de esta gráfica y el cálculo de su número cromático son contribuciones originales a la geometría combinatoria.

Capítulo 4 define y estudia la gráfica de giros de *trayectorias hamiltonianas geométricas* sobre conjuntos de n puntos en posición convexa. Se demuestra que el número cromático de esta gráfica es exactamente n . Para ello se presenta una construcción que permite n -colorear a la gráfica, y se exhibe una subgráfica completa de orden n .

La definición de esta gráfica y el cálculo de su número cromático son contribuciones originales al área.

Capítulo 5 Presenta las conclusiones y propone trabajo futuro.

JOSÉ DAVID FLORES PEÑALOZA

Ciudad Universitaria, México
Noviembre del 2006

Capítulo 1

Introducción

1.1. Gráficas de giros

Dado un conjunto de objetos de la misma clase, es natural intentar agruparlos de acuerdo a su similitud. Esto es, intentamos que la proximidad de un objeto sea ocupada por otros objetos que difieran muy poco de él, para de esta manera hacer que entre más se parezcan dos objetos, más cercanos estén. Naturalmente esperamos también que dos objetos lejanos tengan poco en común. Formalizando esta idea obtenemos el concepto de gráfica de giros: Sea S un conjunto de objetos combinatorios con alguna relación (simétrica) $R \subseteq S \times S$ que formalice la noción de *similitud* entre estos objetos¹. La gráfica G cuyos vértices son los elementos de S , y donde dos de ellos son adyacentes si están relacionados por R , es una *gráfica de giros* de S .

Como ejemplo consideremos la *gráfica de giros de emparejamientos perfectos* de un conjunto de puntos en posición convexa. Un emparejamiento perfecto es una gráfica en la que todo vértice tiene grado 1. En el caso de un conjunto de puntos, decimos que un emparejamiento perfecto del mismo es todo emparejamiento perfecto que podemos dibujar con vértices sobre sus puntos; como restricción adicional para la definición de la gráfica de giros de emparejamientos perfectos, pediremos que los emparejamientos perfectos sean dibujados con aristas rectilíneas, y que no haya ningún par de aristas que se corte entre si.

Dado un conjunto de puntos en posición convexa P (como el de la figura 1.1), decimos que la *Gráfica de giros de emparejamientos perfectos* de P es la gráfica cuyos vértices son los emparejamientos perfectos del conjunto de puntos (como ejemplo la fig. 1.2), y donde

¹La relación R no tiene por que ser única, así podemos tener diferentes gráficas de giros sobre el mismo conjunto de objetos si es que para nuestros propósitos queremos usar diferentes criterios de “similitud”.

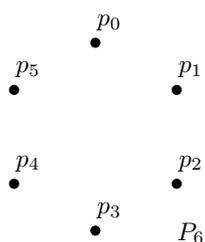


Figura 1.1: P_6 , un conjunto de 6 puntos en posición convexa.

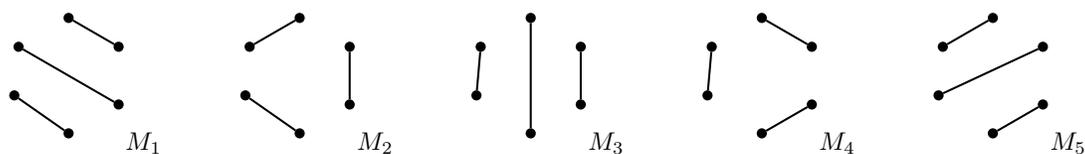


Figura 1.2: Los cinco posibles emparejamientos perfectos de P_6 .

dos de estos emparejamientos son adyacentes si se puede obtener uno del otro haciendo que dos parejas de puntos intercambien entre sí sus elementos, tal como lo ilustra la figura 1.3. Nótese que el giro se hace de manera que *no* se crean cortes en las aristas.

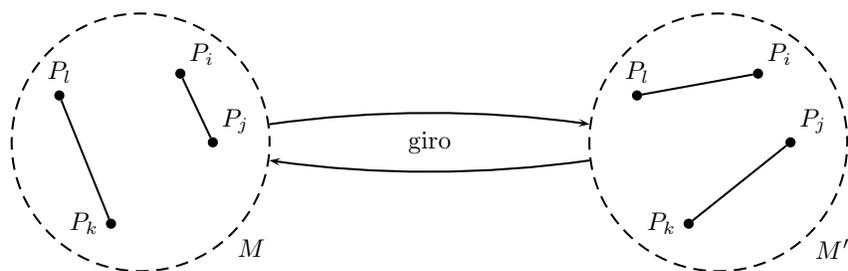


Figura 1.3: La operación de *giro* para emparejamientos perfectos: dos parejas se intercambian sus elementos.

De la definición anterior, se sigue que la gráfica de giros de emparejamientos de P_6 es aquella que tiene como vértices los emparejamientos mostrados en la figura 1.2, y sus adyacencias se muestran en la figura 1.4.

Las clases de objetos combinatorios a las cuales se les puede asociar una o más gráficas de giros abundan. Sin embargo, la intuición detrás del nombre "*gráfica de giros*" es más clara cuando consideramos como nuestras clases a colecciones de objetos geométricos, por ejemplo: triangulaciones de un conjunto de puntos (o de un polígono), emparejamientos de puntos o árboles generadores de una gráfica geométrica con vértices en un conjunto de

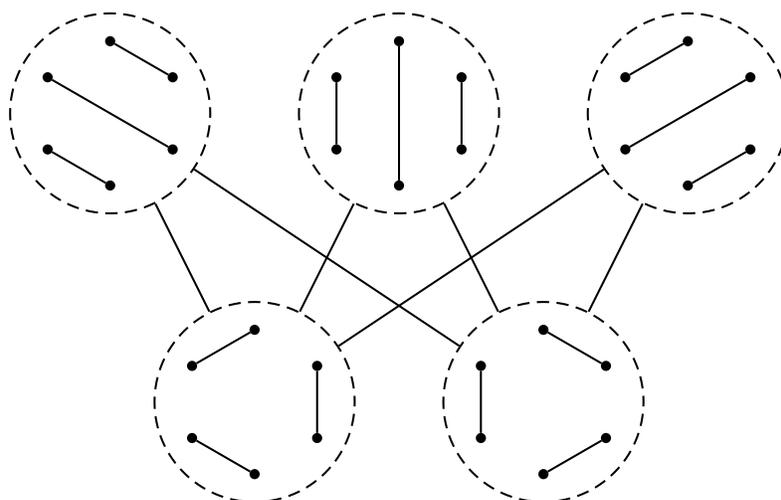


Figura 1.4: La gráfica de giros de emparejamientos de P_6 .

puntos fijo. En estas colecciones consideramos en general que dos de sus objetos son adyacentes si la diferencia entre los conjuntos de los subobjetos que los componen (triángulos, parejas de puntos y aristas respectivamente) es mínima. En todos estos ejemplos es natural imaginar que un objeto puede transformarse en otro adyacente a él mediante un simple “giro” de una arista, tal como se explica en la primera parte de cada uno de los capítulos siguientes. En este trabajo nos enfocaremos precisamente a investigar gráficas de giros sobre objetos geométricos.

Antes de definir y explicar a detalle todas estas estructuras geométricas y sus gráficas de giros asociadas, es conveniente discutir el porqué su estudio es interesante, y ciertamente lo es, pues solo hace falta hechar un vistazo a los estudios que previamente se han hecho sobre ellas para descubrir que el trabajo en el área es extenso (p.ej. [5, 13, 14, 18, 17, 16, 29, 24, 3, 11]).

Muchos de estos estudios se han enfocado a dos propiedades de las gráficas que tienen una aplicación inmediata en la computación: conexidad y hamiltonicidad. La conexidad en una gráfica de giros es deseable por que entonces partiendo de un objeto arbitrario es posible generar a cualquier otro mediante una secuencia de giros. Propiedades relacionadas son el diámetro y el radio de la gráfica; conociendo este último podemos saber cual es el número máximo de giros que tenemos que hacer para llegar de un objeto central a cualquier otro. La hamiltonicidad es útil por que la existencia de un ciclo hamiltoniano nos permite generar de manera muy eficiente todos los objetos, para ello simplemente hay que llevar a cabo la secuencia de giros asociada al ciclo hamiltoniano (esta generación será eficiente siempre y cuando hacer un giro en un objeto no sea una operación costosa, lo cual generalmente ocurre).

Aunque las aplicaciones han influenciado fuertemente el camino de las investigaciones, el estudio de las gráficas de giros tiene una gran justificación desde un punto de vista puramente matemático. Esto es por que en muchos de los casos las pruebas de las propiedades no son triviales y poseen una gran elegancia matemática. Al tratarse las gráficas de giros de objetos matemáticos, no está de más estudiar todas sus demás propiedades –sean o no aplicables– y las relaciones entre ellas. En este trabajo nos enfocamos al estudio de una propiedad que, si bien no lo es tanto como la conexidad y la hamiltonicidad, sí que es aplicable: el número cromático. Es un tanto sorprendente que siendo esta propiedad una invariante muy importante de cualquier gráfica, casi no existan trabajos al respecto; al grado de que, hasta donde conocemos, los únicos artículos que se ocupan del estudio de números cromáticos de gráficas de giros son [10] y [15].

1.2. Definiciones

Los conceptos de teoría de gráficas y de geometría usados en este trabajo son muy elementales. Presuponemos del lector un conocimiento básico de ambas disciplinas, sin embargo, para evitar ambigüedades es conveniente hacer un recuento de las definiciones más usadas en este trabajo. Hemos procurado usar terminología bien establecida en el área; aún así, en caso de que el lector requiera una explicación más detallada de los conceptos, o encuentre la omisión de algún término relevante, nos permitimos remitirlo a alguno de los libros de los que hemos adoptado nuestra terminología ([4, 8]).

1.2.1. Gráficas

Una *gráfica* G es un par ordenado de conjuntos disjuntos (V, E) tales que E es un subconjunto del conjunto $V \times V$ de pares no ordenados de V . En este trabajo consideramos solamente gráficas *finitas* (aquellas con un conjunto de vértices finito). El conjunto V es el conjunto de *vértices*, y el conjunto E es el conjunto de *aristas*. Si G es una gráfica, entonces $V = V(G)$ es el conjunto de vértices de G , y $E = E(G)$ es su conjunto de aristas. Se dice que una arista $\{x, y\}$ *une* los vértices x y y y se denota como xy . Entonces xy y yx se refieren a la misma arista; los vértices x y y son los *extremos* de esta arista. Si $xy \in E(G)$, entonces x y y son vértices *adyacentes* de G , y los vértices x y y son *incidentes* a la arista xy , de igual forma xy es incidente a x y y . Dos aristas son *adyacentes* si tienen exactamente un extremo en común.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Decimos que la *gráfica de líneas* de G es la gráfica $G' = (V', E')$ con $V' = E$ y $E' = \{e_1 e_2 | e_1, e_2 \in E(G), e_1 \text{ y } e_2 \text{ son adyacentes}\}$.

Decimos que $G' = (V', E')$ es una *subgráfica* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. En este caso escribimos $G' \subseteq G$. Si G' tiene *todas* las aristas de G que unen dos vértices en V' , entonces decimos que G' es la *subgráfica inducida* en G por V' . Si $V' = V$, entonces decimos que G' es una *subgráfica generadora* de G .

Es muy común construir nuevas gráficas a partir de otras eliminando o añadiendo algunos vértices y aristas. Si $W \subset V(G)$, entonces $G - W$ es la subgráfica inducida en G por $V(G) \setminus W$, es decir, la subgráfica de G que se obtiene al eliminar los vértices en W y *todas* las aristas incidentes a ellos. De igual forma, si $E' \subset E(G)$, entonces $G - E' = (V(G), E(G) \setminus E')$. Si $W = \{w\}$ y $E' = \{xy\}$, entonces esta notación se simplifica a $G - w$ y $G - xy$. De igual forma, si x y y son vértices no adyacentes de G , entonces $G + xy$ se obtiene de G uniendo x y y .

Si x es un vértice de una gráfica G , entonces ocasionalmente escribimos $x \in G$ en lugar de $x \in V(G)$. El *orden* de G es el número de vértices de G ; se denota $|G|$. Entonces $|G| = |V(G)|$. El *tamaño* de G es el número de aristas en G .

Dos gráficas son *isomorfas* si existe una correspondencia entre su conjunto de vértices que preserva adyacencias. Entonces $G = (V, E)$ es isomorfa a $G' = (V', E')$ si existe una biyección $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $xy \in E$ si y sólo si $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Es claro que dos gráficas isomorfas tienen el mismo orden y el mismo tamaño.

El tamaño de una gráfica de orden n es al menos 0 y a lo más $\binom{n}{2}$. Una gráfica de orden n y tamaño $\binom{n}{2}$ es llamada *gráfica completa de orden n* y se denota como K_n ; en K_n cualesquiera dos vértices son adyacentes (ver figura 1.5). Una gráfica cuyo conjunto de aristas es el conjunto vacío se llama *gráfica vacía*.

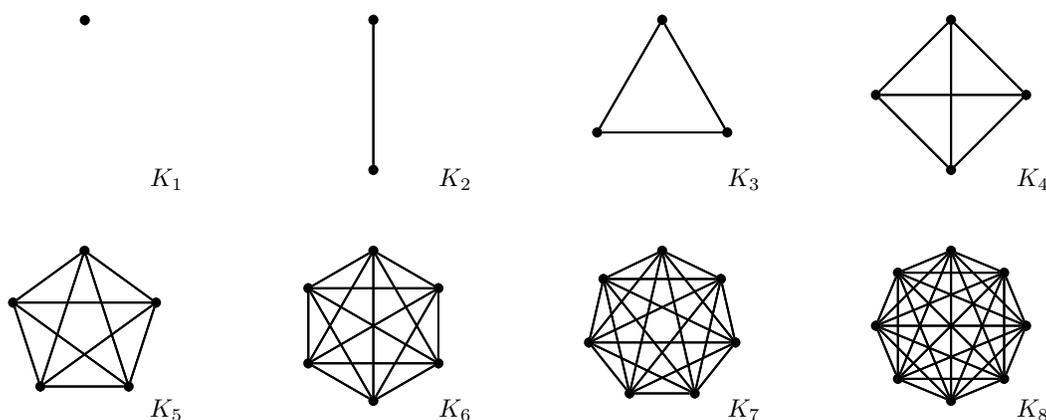


Figura 1.5: K_n para los primeros valores de n .

El conjunto de vértices adyacentes a un vértice $x \in G$, la *vecindad* de x , se denota

$N(x)$. Ocasionalmente nos referimos a $N(x)$ como *vecindad abierta* de x , mientras que a $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ la llamamos *vecindad cerrada* de x . También, $x \sim y$ significa que los vértices x y y son adyacentes. Así que $y \in N(x)$, $x \in N(y)$ y $y \sim x$ son todos equivalentes: cada uno de ellos significa que xy es una arista. El *grado* de x es $d(x) = |N(x)|$. Si queremos enfatizar que la gráfica subyacente es G , entonces escribimos $N_G(x)$ y $d_G(x)$; adoptamos una convención similar para otras funciones que dependen de una gráfica subyacente. El *grado mínimo* de una gráfica G se denota por $\delta(G)$ y el *grado máximo* por $\Delta(G)$. Un vértice de grado 0 es llamado *vértice aislado*. Si $\delta(G) = \Delta(G) = k$, entonces se dice que G es una gráfica *k-regular* o *regular de grado k*.

Una *trayectoria* es una gráfica P de la forma

$$V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}, \quad E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l\}.$$

A esta trayectoria P usualmente se le denota $x_0x_1 \cdots x_l$. Los vértices x_0 y x_l son los *extremos* de P ; también llamados *terminales*, y $l = |E(P)|$ es la *longitud* de P . Decimos que P es una trayectoria de x_0 a x_l , o una *trayectoria* $x_0 - x_l$. Por supuesto, P es también una trayectoria de x_l a x_0 . Algunas veces queremos hacer énfasis en que consideramos a P como una trayectoria de x_0 a x_l , entonces llamamos a x_0 el *vértice inicial* y a x_l el *vértice final*.

El término *independiente* se usa en conjunción con los vértices, las aristas y las trayectorias de una gráfica. Un conjunto de vértices (aristas) es *independiente* si no tiene dos elementos que sean adyacentes. Es decir, $W \subset V(G)$ consiste de *vértices independientes* si la subgráfica inducida por W es vacía. Un conjunto de trayectorias es *independiente* si para cualquier par de sus trayectorias cada vértice que pertenece a ambas es un vértice terminal. Entonces P_1, P_2, \dots, P_k son trayectorias de x a y independientes si $V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}$ con $i \neq j$. Las trayectorias P_i también son llamadas *disjuntas internamente*. Hay varias nociones relacionadas con la de una trayectoria en una gráfica. Una *caminata* W en una gráfica es una secuencia alternada de vértices y aristas, digamos $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_l, x_l$ tal que $e_i = x_{i-1}x_i$, $0 < i \leq l$. De acuerdo con la terminología anterior, W es una *caminata* $x_0 - x_l$ y se denota por $x_0x_1 \cdots x_l$; la *longitud* de W es l . A esta caminata W se le llama *paseo* si todas sus aristas son distintas. Note el lector que una trayectoria es un paseo con vértices todos distintos. Un paseo cuyos extremos coinciden (un paseo *cerrado*) es llamado *circuito*. Para ser precisos, un circuito es un paseo cerrado con vértices y dirección no distinguidos, de tal forma que dos triángulos que comparten un vértice dan lugar a exactamente dos circuitos con seis aristas. Si una caminata $W = x_0x_1 \cdots x_l$ es tal que $l \geq 3$, $x_0 = x_l$, y los vértices x_i , $0 < i < l$ son distintos entre si y distintos de x_0 , entonces decimos que W es un *ciclo*. Por simplicidad denotamos a este ciclo $x_0x_1 \cdots x_l$. Observemos que esta notación difiere de la de una trayectoria pues x_1x_l es también una arista de este ciclo. Un ciclo no tiene vértice inicial ni final, ni dirección; así que $x_1x_2 \cdots x_l, x_lx_{l-1} \cdots x_1, x_2x_3 \cdots x_lx_1$ y $x_lx_{l-1} \cdots x_1x_lx_{l-1} \cdots x_{i+1}$ denotan todos el mismo ciclo.

Frecuentemente usamos el símbolo P_l para denotar una trayectoria arbitraria de longitud l , y C_l para denotar un ciclo de longitud l . Llamamos a C_3 *triángulo*, a C_4 *cuadrilátero*, a C_5 *pentágono*, etc. Un ciclo es *par* (*impar*) si su longitud es par (impar).

Dados dos vértices x y y , su *distancia* $d(x, y)$ es la longitud mínima de una trayectoria $x - y$. Si no existe ninguna trayectoria $x - y$, entonces $d(x, y) = \infty$.

Una gráfica es *conexa* si para todo par $\{x, y\}$ de vértices distintos, hay una trayectoria de x a y . Note el lector que una gráfica conexa de orden al menos 2 no puede contener un vértice aislado. Una *subgráfica conexa maximal* es una *componente* de la gráfica. Una gráfica sin ciclos es un *bosque*, o una gráfica *acíclica*; un *árbol* es un bosque conexo. La relación entre un árbol y un bosque es más clara si observamos que un bosque es la unión disjunta de árboles; en otras palabras, un bosque es una gráfica en la que toda componente es un árbol.

Una gráfica G es *bipartita* con *clases de vértices* V_1 y V_2 si $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y toda arista une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . También se dice que G tiene una *bipartición* (V_1, V_2) . Análogamente G es *r-partita* con clases de vértices V_1, V_2, \dots, V_r (o *r-partición* (V_1, \dots, V_r)) si $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq r$ y no hay ninguna arista que une dos vértices de la misma clase. El símbolo K_{n_1, \dots, n_r} denota una gráfica *r-partita completa*: Esta tiene n_i vértices en la clase i y contiene todas las aristas que unen dos vértices de clases distintas.

1.2.2. Número cromático

Sea G una gráfica. El *número cromático* de G , $\chi(G)$, es el menor entero z tal que se puede asignar a cada $v_i \in V(G)$ un color ($col(v_i)$) de entre los posibles valores $1, 2, \dots, z$, de tal forma que $col(v_i) \neq col(v_j)$ si $v_i v_j \in E(G)$. En otras palabras, el número cromático de G es el mínimo entero r para el cual G es *r-partita*. Una *r-coloración propia* es una asignación concreta de colores a los vértices, usando r colores, tal que dos vértices adyacentes obtienen colores diferentes. Para abreviar, en este trabajo nos referiremos a una (*r*-)coloración propia como (*r*-)coloración.

Una definición muy cercana a la del número cromático es el de un *homomorfismo* entre gráficas: Dadas dos gráficas G y H , decimos que G es *homomorfa* a H si existe una función $h : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $h(x)h(y) \in E(H)$ si $xy \in E(G)$ para cualesquiera $x, y \in V(G)$. Es fácil ver que, dada una *n-coloración* (propia) col de H , podemos *n-colorear* a G con la coloración $col' : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ haciendo simplemente $col'(v) := col(h(v))$ para todo $v \in V(G)$. Por la definición de homomorfismo, se sigue de inmediato que dos vértices $x, y \in V(G)$ son mapeados a dos vértices adyacentes de $V(H)$, y por lo tanto $col'(x) = col(h(x)) \neq col(h(y)) = col'(y)$. En otras palabras, tenemos que dadas dos gráficas G y H ,

con G homomorfa a H , entonces $\chi(G) \leq \chi(H)$. Por lo tanto una manera equivalente de definir el número cromático de una gráfica G , es diciendo que $\chi(G)$ es el mínimo entero n tal que G es homomorfa a K_n .

Dada una gráfica G , una *coloración por aristas* es una coloración de su gráfica de líneas. De esta forma, el *número cromático por aristas* de G , $\chi'(G)$, es el número cromático de su gráfica de líneas.

El colorear una gráfica tiene muchas aplicaciones interesantes en la práctica. Se usa extensivamente en los módulos de optimización del código en compiladores: Un procesador tiene un número finito, generalmente pequeño, de registros. Es sobre los datos que se encuentran en estos registros que el procesador puede llevar a cabo las operaciones a la máxima velocidad, mucho más rápido que si los datos se encuentran en memoria RAM. Es por ello que un compilador debe procurar asignar las variables más usadas a este número pequeño de registros.

Este problema se modela haciendo una gráfica G , cuyos vértices son las variables del programa que se quieren mantener en registros, y donde dos de ellas son adyacentes si ambas aparecen simultáneamente en un contexto de ejecución; por ejemplo cuando ambas son declaradas en la misma subrutina. El problema de asignación de registros a variables se reduce entonces a buscar una r -coloración de G , donde r es el número de registros del procesador; de existir semejante coloración simplemente se asigna el registro $col(v)$ a la variable v , con la seguridad de que solo esa variable ocupara ese registro cuando esta esté activa.

Una aplicación más de la coloración de gráficas ocurre en la solución del problema de los horarios: En este caso queremos asignar salones a los diferentes grupos de una escuela. Así como en el problema de asignación de registros a variables, la solución se encuentra haciendo una gráfica y buscando una coloración apropiada. En este caso los vértices de la gráfica son los grupos, y dos son adyacentes si en algún momento sus horarios coinciden. Los colores asignados por la coloración corresponden entonces a los salones asignados a los grupos.

Otras aplicaciones importantes aparecen en el problema de asignación de frecuencias en redes inalámbricas, y en concordancias de patrones. Para más información en las aplicaciones de la coloración de gráficas se recomienda [27, 33, 19, 33].

La coloración de gráficas resulta muy útil, aunque hacerlo es computacionalmente costoso: El problema de encontrar coloración mínima en una gráfica es NP-duro. El problema de decisión correspondiente (¿Existe una coloración que use a lo más k colores?) es NP-completo, y es de hecho uno de los 21 problemas NP-completos de Karp [20]. Permanece NP-completo aún en gráficas planas con grado máximo 4, como fue probado por Garey y

Johnson en 1974 [12], aunque en gráficas planas es trivial para $k \neq 3$ (debido al teorema de los cuatro colores [2], que establece que toda gráfica plana es 4-coloreable).

Algunas propiedades interesantes del número cromático son:

1. $\chi(G) = 1$ si y sólo si G no contiene ninguna arista.
2. $\chi(G) \geq 3$ si y sólo si G tiene un ciclo de longitud impar (o equivalentemente, G no es bipartita).
3. $\chi(G) \geq \omega(G)$. Donde $\omega(G)$ denota el orden de la subgráfica completa inducida en G de mayor orden.
4. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
5. $\chi(G) \leq \Delta(G)$ excepto cuando G es una gráfica completa o un ciclo de longitud impar.
6. $\chi(G) \leq 4$ para toda gráfica plana G .

Este último es un resultado muy famoso, llamado *teorema de los cuatro colores*, fue conjeturado por primera vez en 1890 por P. J. Heawood, con la primera referencia escrita en 1852 por Augustus De Morgan; pero se mantuvo sin solución hasta 1976, cuando fue probado por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign.

1.2.3. Geometría

En este trabajo nos dedicamos a investigar números cromáticos de gráficas de giros. Hemos explicado anteriormente ambos conceptos: *números cromáticos* y *gráficas de giros*. Hemos mencionado también que el tipo de objetos sobre los que consideramos nuestras gráficas de giros son objetos geométricos. En esta sección introducimos las definiciones de geometría que consideramos pertinentes para el planteamiento de nuestras gráficas de giros, así como también pertinentes a las demostraciones de sus números cromáticos.

Un *polígono* es una trayectoria cerrada plana compuesta por un número finito de segmentos rectilíneos consecutivos. Los segmentos de líneas que componen el polígono se llaman sus *lados* o *aristas*, y los puntos donde las aristas coinciden se llaman *vértices*. Se dice que un polígono es *simple* si sus aristas se intersectan únicamente en sus extremos. Si un polígono es simple, entonces sus lados (y vértices) constituyen la frontera de una *región poligonal*. En este trabajo estudiaremos únicamente polígonos simples; de manera que para simplificar la notación el término *polígono* denotará también a la unión del polígono y de su

región interior. Un polígono P es *convexo* si para cualesquiera dos puntos contenidos en el, el segmento de recta que los une está totalmente contenido en P . Un polígono es *equilátero* si todas sus aristas tienen la misma longitud. Un polígono convexo P es llamado *cíclico* si todos sus vértices pertenecen a un mismo círculo. Un polígono simple es llamado *regular* si es cíclico y equilátero al mismo tiempo; todos los polígonos regulares con n vértices son *similares* entre sí; esto quiere decir que cualquiera se transforma en cualquier otro mediante una combinación de rotación y traslación del plano. Por la observación anterior, el término *n -ágono* denotará a *cualquier* polígono regular de n vértices. Los polígonos convexos de n vértices, para $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, se llaman respectivamente *triángulos*, *cuadriláteros* o *cuadrángulos*, *pentágonos*, *hexágonos*, *heptágonos* y *octágonos*.

Una *región* R del plano es *convexa* si para cualesquiera dos puntos de la misma, el segmento de recta que los une está completamente contenido en R .

Dado un conjunto $P_n = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ de n puntos en el plano, decimos que su *cierre convexo* (o *cerradura convexa*) es la intersección de todas las regiones convexas que contienen a todo $p_i \in P_n$. Llamamos *envolvente convexa* (o *frontera convexa*) de P_n a la frontera del cierre convexo de P_n . Decimos que P_n está en *posición convexa* si todo $P_i \in P_n$ está en su envolvente convexa.

Una *gráfica geométrica* es una gráfica dibujada sobre el plano de manera que sus vértices son puntos y sus aristas son segmentos de líneas rectas con extremos en esos puntos. Una *trayectoria geométrica* es entonces una sucesión de puntos (vértices) y segmentos de líneas (aristas) con extremos en los dos puntos próximos a ellas en la sucesión. De igual forma podemos generalizar los conceptos de gráfica completa, camino, paseo, árbol, etc. a sus correspondientes versiones geométricas. En este trabajo la expresión “gráfica” denotará “gráfica geométrica” a menos que indiquemos explícitamente su significado no geométrico.

Dada una gráfica geométrica con vértices en posición convexa G , decimos que una arista $e \in E(G)$ es una *diagonal* si sus extremos *no* son vértices consecutivos sobre la envolvente convexa de G . A las aristas de G que no son diagonales las llamamos simplemente *aristas de la envolvente convexa*.

Dado un polígono simple P , decimos que una *triangulación* de P es un conjunto maximal de aristas de la gráfica geométrica completa con vértices en los vértices de P , con la propiedad de que no se intersecan dos a dos excepto posiblemente en sus extremos. Análogamente decimos que una triangulación de un conjunto de puntos P_n es un conjunto maximal de aristas de la gráfica geométrica completa con vértices en P_n , con la propiedad de que no se intersecan dos a dos excepto posiblemente en sus extremos.

Capítulo 2

Gráfica de giros de triangulaciones del n -ágono convexo

2.1. Definiciones

Dado un conjunto de puntos en posición convexa $P_n = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$, definimos la *gráfica de giros de triangulaciones* de P_n como la gráfica cuyos vértices son todas las posibles triangulaciones de P_n ; dos triangulaciones son adyacentes si difieren por un solo *giro*: dos triángulos que forman un cuadrilátero son intercambiados por los otros dos triángulos que forman el mismo cuadrilátero. Podemos pensar que este intercambio de triángulos corresponde a girar una arista de la triangulación dentro del único cuadrilátero que la contiene (fig. 2.1).

La misma definición se aplica para la gráfica de giros de triangulaciones de polígonos convexos: sus vértices son todas las triangulaciones del polígono, y dos de ellas son adyacentes bajo la misma operación de giro (ver figura 2.2). Todas las gráficas de giros de aristas de triangulaciones, tanto de conjuntos de n puntos en posición convexa como de polígonos convexos de n lados, son isomorfas. Por lo tanto nos referiremos a ellas simplemente como *gráfica de giros de triangulaciones del n -ágono convexo*, y las denotaremos como $G_T(n)$.

2.1.1. Resultados previos

Existe numerosa bibliografía acerca del estudio de la gráfica de triangulaciones. En [17] F. Hurtado, M. Noy y J. Urrutia hacen un estudio extensivo de la gráfica de giros de triangulaciones de conjuntos de puntos en posición general (cuya definición es análoga a la del

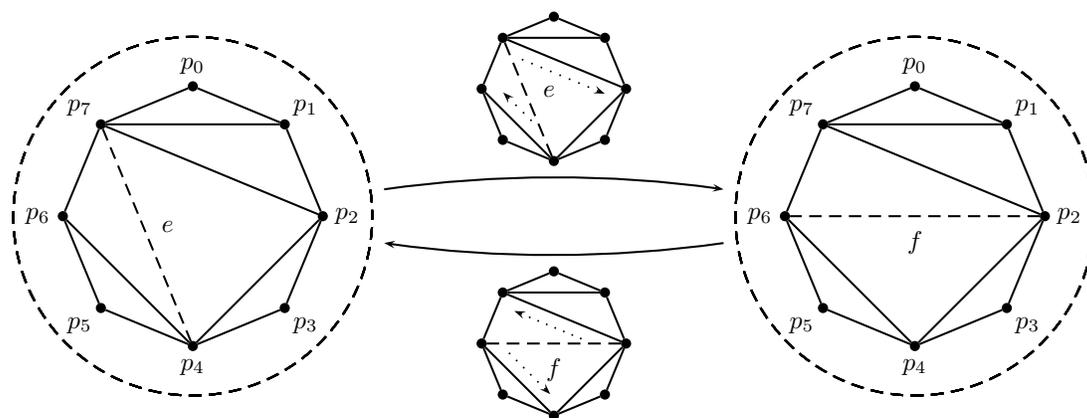


Figura 2.1: Un giro de la arista punteada transforma una triangulación en otra.

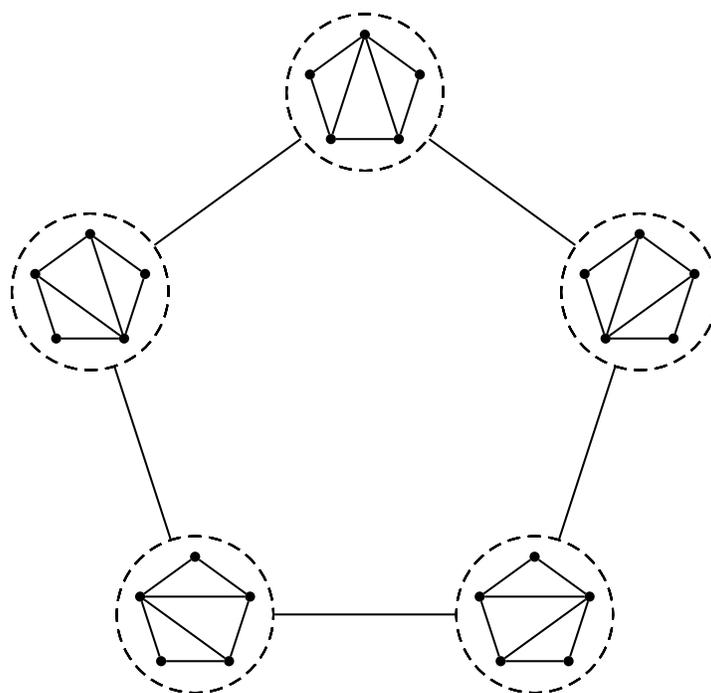


Figura 2.2: $G_T(5)$ es isomorfa a C_5 .

caso convexo). En [29] Sleator y Tarjan plantean y resuelven el problema de determinar el diámetro de $G_T(n)$ usando geometría hiperbólica tridimensional. En [24] Lucas probó que $G_T(n)$ tiene un ciclo hamiltoniano con una prueba larga y complicada, usando una manera particular de codificar árboles binarios. Algunos de los resultados de [24] son replantados y otros extendidos en [25]. En [16] F. Hurtado y M. Noy introducen un árbol de todas las triangulaciones de polígonos con cualquier número de vértices, el cual da un marco de trabajo en el que propiedades ya conocidas como hamiltonicidad, conectividad por vértices, centro, y grupo de automorfismos de $G_T(n)$ admiten pruebas nuevas y más sencillas.

Es muy interesante que siendo $G_T(n)$ una gráfica tan estudiada, aún no se conozca su número cromático. El interés en esta gráfica es evidente; es por ello que la seleccionamos como objetivo principal de nuestro estudio.

2.2. Números de Catalan

El planteamiento de la definición de $G_T(n)$ tiene relación directa con uno de los primeros problemas en geometría combinatoria: ¿Cuál es el número E_n de maneras en que se puede subdividir un polígono convexo de n lados en triángulos? Leonhard Euler planteó este problema a Christian Goldbach en 1751 y publicó su solución junto con Segner en 1760 [28]. La solución es el *número de Catalan* $E_n = C_{n-2}$. Es claro que este número es entonces el número de vértices que tiene $G_T(n)$. Los números de Catalan son la secuencia de enteros generada por la recurrencia

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}.$$

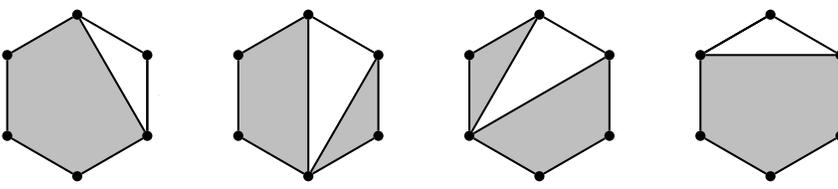
Esta recurrencia se obtiene al observar que toda triangulación del n -ágono contiene $n - 2$ triángulos; y que si etiquetamos los vértices del polígono del 0 al $n - 1$ en el sentido del reloj y fijamos el triángulo de lados 0, 1, i , nos queda de un lado un subproblema en el que hay que fijar $i - 2$ triángulos, y del otro lado un subproblema en el que hay que fijar $n - i - 1$ triángulos. Ambos subproblemas se resuelven recursivamente y de manera independiente (figura 2.3). Al combinar las soluciones obtenemos nuestra ecuación de recurrencia. La solución a la misma está dada por la expresión

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

y se obtiene de calcular los coeficientes de la función generadora

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z},$$

lo cual podemos hacer usando el teorema del binomio.



$$T(4) = T(3) \times T(0) + T(2) \times T(1) + T(1) \times T(2) + T(0) \times T(3)$$

Figura 2.3: Ejemplo de la enumeración recursiva de las triangulaciones de un polígono convexo. Al fijar el triángulo que contiene a la arista p_0p_1 se obtienen dos subpolígonos de tamaño menor que pueden triangularse de manera independiente.

Aunque Euler encontró la solución de los números de Catalan, estos son llamados así en honor de Eugène Charles Catalan, quien en 1838 [22] descubrió que los números de Catalan cuentan el número de formas diferentes en las que un producto de n diferentes factores ordenados puede ser calculados par a par (es decir, el número de parentizaciones binarias de n letras). Por ejemplo, para cuatro factores a, b, c, d tenemos 5 formas diferentes de parentizarlos: $(a(b(cd)))$, $(a((bc)d))$, $((ab)(cd))$, $((a(bc))d)$, $((((ab)c)d)$.

2.3. Árboles binarios completos

Los números de Catalan aparecen en el conteo de muchos otros objetos combinatorios. Estos objetos por lo general se definen de manera recursiva. Se pueden encontrar más de 140 interpretaciones combinatorias de los número de Catalan en el suplemento *Catalan adendum* de [31]. Aunque hay tantos objetos combinatorios que se relacionan con $G_T(n)$ por su tamaño, hay uno de estos en particular que nos resulta de bastante interés en el contexto del estudio de $G_T(n)$: los *árboles binarios completos con raíz* con $n - 2$ vértices internos –vértices que *no* son hojas–. Un *árbol binario completo con raíz* T_n es un árbol con $n + 1$ hojas y en el que todo vértice tiene 0 o 2 vértices *hijos* y todos los vértices, excepto un vértice especial llamado *raíz*, tienen un vértice *padre*.

Estos árboles resultan tener una correspondencia muy simple con las triangulaciones del n -ágono: dada una triangulación, extendemos su gráfica dual (un árbol binario) a nodos sobre las aristas del cierre convexo, considerando como raíz al dual del triángulo que contiene a la etiqueta e_0 (ver figura 2.4). Aún más, estos árboles tienen una operación muy útil en la práctica que equivale a la operación de giro que hemos definido en $G_T(n)$ (ver fig. 2.5). Es esta operación lo que hace que la gráfica de giros de *árboles binarios* ¡Sea isomorfa a la gráfica de giros de *triangulaciones*!. Por lo tanto el estudio de $G_T(n)$ nos permite

conocer también las propiedades de la gráfica de giros de árboles binarios; todo esto sin ningún esfuerzo extra. Esta es una motivación adicional para enfocarnos en el estudio del número cromático de $G_T(n)$.

Los árboles binarios son usados extensivamente como estructuras de datos. Estos permiten que algunos algoritmos se ejecuten muy eficientemente. En aplicaciones como la de búsqueda de datos en árboles binarios es importante que los árboles sobre los que se realiza la búsqueda se mantengan *balanceados*; esto es, que la diferencia entre las distancias mínima y máxima de la raíz a las hojas sea a lo más 1. Solo con esta propiedad podemos asegurar que la búsqueda se realizará en $O(\log(n))$ operaciones, siendo esta la complejidad óptima para esta operación [9]. De otra forma, con un árbol extremadamente desbalanceado, podríamos requerir de $O(n)$ operaciones, siendo esto tremendamente ineficiente. Sin embargo es imposible mantener balanceado el árbol todo el tiempo: algunas inserciones de nuevos datos pueden provocar un desbalanceo en la estructura. Lo que hay que hacer entonces es reconfigurar el árbol para llevarlo a una estructura más conveniente. Uno de los métodos para hacer esto es aplicar la operación de *rotación de árboles* [30]. El efecto de este procedimiento está ilustrado en la figura 2.5.

2.4. Número cromático

En nuestra investigación hemos podido obtener diferentes estimaciones de la cota superior de $\chi(G_T(n))$. Mencionaremos las cotas en un orden de menos a más justas.

2.4.1. Primera cota superior: $n - 2$

Teorema 1. $\chi(G_T(n)) \leq n - 2$.

Demostración. Sea $P_n = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ el conjunto de puntos de un n -ágono regular. Para colorear $G_T(n)$ con $n - 2$ colores, consideremos una $(n - 1)$ -coloración $col' : E(K_n) \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 2\}$ de las aristas de la gráfica geométrica completa con n vértices dibujada con sus vértices en P_n :

$$col'(p_i p_j) = i, \quad 0 \leq i < j \leq n - 1,$$

con esta coloración asignaremos a cada arista la etiqueta más pequeña de sus extremos (fig. 2.6).

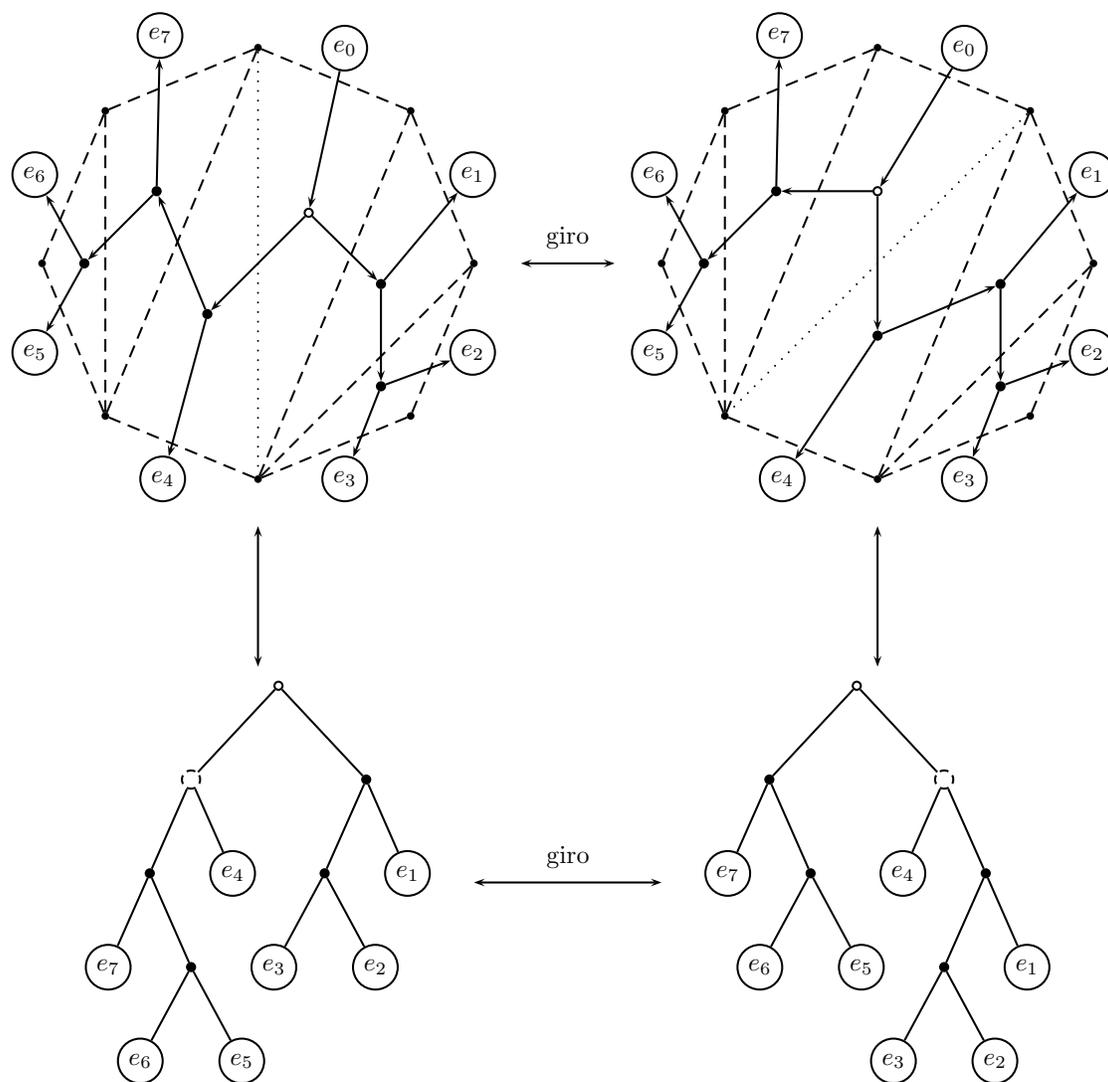


Figura 2.4: Arriba, dos triangulaciones adyacentes dibujadas con líneas discontinuas. La diagonal que se gira aparece punteada, los árboles asociados están dibujados encima de ellas. Abajo, los árboles asociados dibujados propiamente. Se indica que ambos son adyacentes bajo la operación de giro de árboles. Los vértices sobre los que se aplican los giros aparecen con trazos discontinuos.

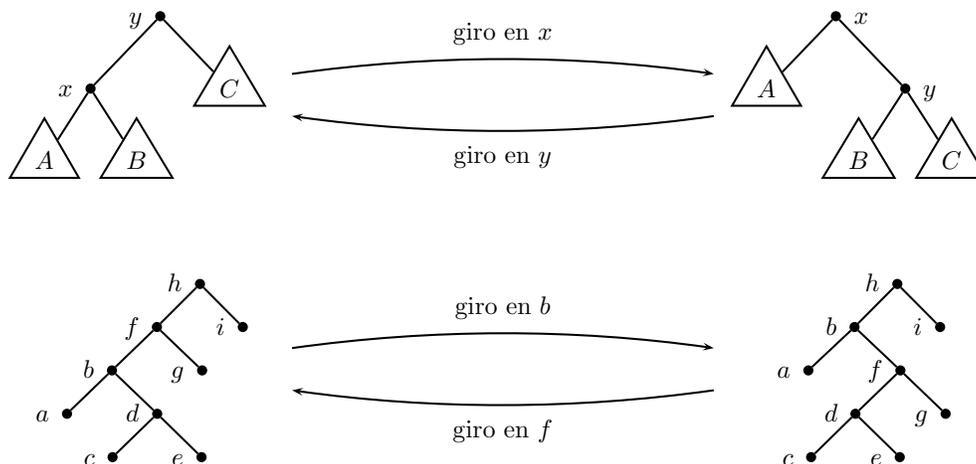


Figura 2.5: a) Definición general de rotación en árboles. Los triángulos denotan subárboles. El árbol mostrado podría ser parte de un árbol mayor. b) Rotación en un árbol de ocho vértices. Los vértices externos (hojas) no se muestran.

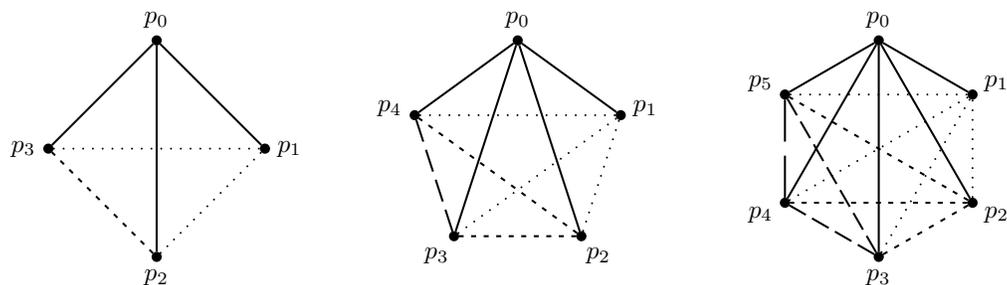


Figura 2.6: Coloreamos cada arista con la etiqueta más pequeña de sus extremos. Diferentes colores se representan con diferentes estilo de línea.

Ahora usaremos esta coloración de aristas para definir la $(n - 2)$ -coloración $col : V(G_T(n)) \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 3\}$ de $G_T(n)$ haciendo

$$col(T) = \left(\sum_{e \in T} col'(e) \right) \text{ mód } (n - 2).$$

Para observar que esta es una coloración propia, consideremos dos triangulaciones T_i y T_j adyacentes en $G_T(n)$, de tal forma que $T_i = T_j - f + h$. Analicemos el valor de $col(T_i) - col(T_j)$:

$$\begin{aligned} & col(T_i) - col(T_j) \\ &= \left(\left(\sum_{e \in T_i} col'(e) \right) \text{ mód } (n - 2) \right) - \left(\left(\sum_{e \in T_j} col'(e) \right) \text{ mód } (n - 2) \right) \\ &= \left(\left(\sum_{e \in T_i} col'(e) \right) - \left(\sum_{e \in T_j} col'(e) \right) \right) \text{ mód } (n - 2), \end{aligned}$$

como T_i y T_j tienen todas sus aristas *excepto* e y f en común, entonces

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sum_{e \in T_i} col'(e) \right) - \left(\sum_{e \in T_j} col'(e) \right) \right) \text{ mód } (n - 2) \\ &= (col'(h) - col'(f)) \text{ mód } (n - 2). \end{aligned}$$

Como f y h son ambas diagonales de un mismo cuadrilátero convexo, entonces no comparten ningún extremo. Como no comparten ningún extremo, entonces la etiqueta más pequeña de los extremos de f es diferente a la etiqueta más pequeña de los extremos de h . Por lo tanto $col'(e) \neq col'(f)$; y esto implica que $col(T_i) - col(T_j) \neq 0$. Entonces col es una coloración propia de $G_T(n)$. Observemos que es una $n - 2$ -coloración aunque usemos $n - 1$ colores para colorear a las aristas: esto es así por que la arista $p_{n-2}p_{n-1}$ (la cual es la única de color $n - 2$) nunca puede ser la arista que se reemplaza (pues pertenece a la frontera convexa).

□

2.4.2. Segunda cota superior: $\lceil n/2 \rceil$.

Teorema 2. $\chi(G_T(n)) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Demostración. Para obtener nuestra segunda cota de orden lineal, consideremos únicamente a $G_T(n)$ cuando n es par. En este caso existe una construcción bien conocida[23] que nos dice que las aristas de K_n se pueden descomponer en $n/2$ trayectorias hamiltonianas. En particular, para una K_n geométrica con vértices en posición convexa, tenemos que estas trayectorias no se autointersecan. La construcción procede de la siguiente forma: considérese un dibujo de K_n con vértices en posición convexa y aristas rectilíneas. Etiquetemos los vértices p_0 a p_{n-1} en el sentido del reloj. Sea P_0 la trayectoria que contiene a todas las aristas paralelas a la arista p_0p_1 y también a todas las aristas paralelas a la arista p_1p_{n-1} . De esta forma $P_0 = p_0p_1p_{n-1}p_2p_{n-2} \cdots p_{n/2+1}p_{n/2}$. En general, para $i = 0, 1, \dots, n/2 - 1$, definimos el conjunto de aristas de la trayectoria P_i como aquel que contiene a todas las aristas paralelas a $p_i p_{i+1}$ y a todas las aristas paralelas a $p_{i+1} p_{i-1}$, donde los subíndices se toman módulo n (ver figura 2.7).

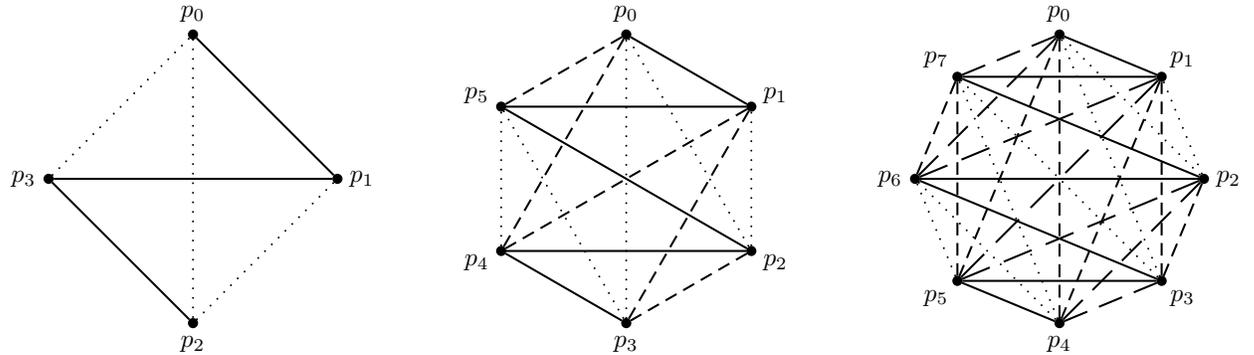


Figura 2.7: Descomposición de K_{2n} en n trayectorias hamiltonianas planas.

Con esta descomposición de $E(K_n)$ en $n/2$ trayectorias hamiltonianas, podemos colorear a las aristas de tal forma que $col'(e) = i$ para toda $e \in P_i$, $0 \leq i < n/2 - 1$. Aplicando entonces la misma técnica que en nuestra primera cota, definimos una coloración de $G_T(n)$ haciendo

$$col(T) = \left(\sum_{e \in T} col'(e) \right) \text{ mód } (n/2 - 1).$$

Es claro que esta es una coloración propia, pues la operación de giro para pasar de una triangulación a otra nos intercambia una arista interior por otra que la interseca en uno de sus puntos interiores. De esta forma si pasamos de la triangulación T_i a una triangulación adyacente T_j , con $T_i = T_j - f + h$, entonces, por la misma razón que en la primera cota, tenemos que $col(T_i) - col(T_j) = col'(h) - col'(f)$; y como h y f pertenecen a diferentes trayectorias (puesto que se intersecan en puntos interiores), entonces $col(T_i) - col(T_j) \neq 0$ y por tanto $col(T_i) \neq col(T_j)$.

La idea anterior nos permite colorear a $G_T(n)$ con $n/2$ colores en el caso en el que n es par. Si n es impar, entonces podemos considerar una coloración análoga para las aristas de

K_{n+1} con $(n + 1)/2$ colores y luego simplemente ignorar uno de sus vértices y las aristas incidentes a él y aplicar el mismo truco. Con esto coloreamos a $G_T(n)$ con $\lceil n/2 \rceil$ colores en general.

□

Como el lector se habrá percatado, las dos coloraciones anteriores tienen como idea central el agrupar las aristas de la gráfica completa en conjuntos *independientes*, en el sentido de que no existan dos aristas en alguno de estos conjuntos que se corten entre sí en puntos internos. Con ello podemos usar el mismo truco de colorear a las aristas según el conjunto en que se encuentran y definir el color de una triangulación como la suma de los colores de sus aristas, módulo el número de conjuntos en que las hemos agrupado. Lo anterior funciona por que como ya hemos mencionado, en la operación de giro se reemplaza una arista por otra que la corta al interior. Es normal intentar empujar esta idea lo más que se pueda, y querer tratar de agrupar las aristas de K_n en el mínimo número de conjuntos *independientes*. Sin embargo, con este enfoque podemos obtener en el mejor de los casos otra cota de orden lineal. Para probarlo recordemos que que una gráfica plana tiene a lo más $3n - 6$ aristas. Entonces, suponiendo que agrupamos las aristas en un número mínimo de conjuntos independientes, necesitamos por lo menos

$$\frac{\binom{n}{2}}{3n - 6} = \frac{n}{6} + \frac{n}{6(n - 2)} \in O(n)$$

de estos conjuntos.

Aún más, nuestra segunda cota es ya asintóticamente óptima, pues observemos que un conjunto maximal de aristas que no se cortan, en el caso convexo, tiene $n - 3$ aristas interiores. Como en total existen $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ de estas aristas, el número mínimo de conjuntos *independientes* en los que podemos agruparlas es $\frac{n(n-3)/2}{n-3} = \frac{n}{2}$.

2.4.3. Tercera cota superior: $O(n/\log(n))$.

La mejor cota superior que tenemos para $\chi(G_T(n))$ se obtiene como consecuencia inmediata del siguiente teorema [1, 26], el cual nos permitimos citar sin demostración.

Teorema 3 (Johansson). *Existe Δ_0 tal que toda gráfica libre de triángulos G con grado máximo $\Delta \geq \Delta_0$, tiene $\chi(G) \leq 160 \frac{\Delta}{\log(\Delta)}$.*

Observemos que $G_T(n)$ es una gráfica libre de triángulos, para ello consideremos una triangulación arbitraria T con aristas $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Sean T_1 y T_2 dos triangulaciones adyacentes a T . Sin pérdida de generalidad supongamos que las aristas de T_1 y T_2 son respectivamente $\{e'_1, e_2, e_3, \dots\}$ y $\{e_1, e'_2, e_3, \dots\}$ (lo que quiere decir que las aristas de T que se

giraron fueron e_1 y e_2 respectivamente). Entonces $e'_1 \notin T_2$ y $e_2 \notin T_2$, lo que implica que T_1 no es adyacente a T_2 .

De inmediato se sigue el

Corolario 1. $\chi(G_T(n)) \in O(\frac{n}{\log(n)})$.

Aunque la tercera cota mejora sustancialmente a las primeras dos, es muy importante comentar que es un resultado de tipo existencial: no nos dice nada acerca de como podemos encontrar una coloración de ese tamaño. En contraparte nuestras cotas de orden lineal nos dan una coloración explícita, y con esta se puede implementar un algoritmo muy eficiente para calcular los colores de vértices individuales, sin tener siquiera que calcular la gráfica completa.

2.4.4. Cota inferior

Desafortunadamente las únicas cotas inferiores que conocemos son constantes. Hemos podido calcular manualmente los primeros valores de $\chi(G_T(n))$. Esto es, para $n = 3, 4, 5, 6$ se tiene que $\chi(G_T(n)) = 3$. Debido a que $G_T(n)$ tiene una estructura libre de triángulos, y a su densidad relativamente baja, en un principio conjeturamos que el número cromático era en general 3. Sin embargo, por medio de una computadora, usando el método de *DSATUR* [6] y generando $G_T(n)$ usando la biblioteca *Stanford GraphBase* [21], hemos podido calcular los valores de $\chi(G_T(n))$ para $n = 7, 8, 9, 10$ y este valor se mantiene en 3 para $n = 7, 8, 9$, pero es 4 para $n = 10$.

2.5. Gráfica de giros de triangulaciones con diagonales etiquetadas

En esta sección proponemos una variación en la definición de $G_T(n)$, intentando con ello ganar un mayor entendimiento de su estructura.

La dificultad de colorear $G_T(n)$ se encuentra esencialmente en el hecho de que en cualquier triangulación, dado un triángulo adyacente a otros dos, el efecto de hacer cinco giros alternando sobre las dos diagonales que unen esos triángulos es el mismo que se obtiene al intercambiar ambas aristas. Como no podemos distinguir las aristas entre si, obtenemos la misma triangulación (fig. 2.2 en pag. 12). En el caso de conjuntos de cinco puntos en posición convexa, todas las triangulaciones tienen semejantes triángulos sobre los que

podemos hacer esa operación; en el caso de conjuntos de más de 5 puntos, se sigue por inducción que también los podemos encontrar en cualquier triangulación (considérese que toda triangulación tiene al menos dos triángulos que tienen dos lados en la frontera convexa, retírese uno de esos triángulos y aplíquese la inducción). Esta observación, interpretada en términos de $G_T(n)$, nos dice que, comenzando en cualquier vértice, podemos recorrer cinco aristas y regresar al mismo vértice. Es este ciclo de longitud impar el que provoca que $\chi(G_T(n \geq 5)) \geq 3$; aún más, esta misma operación de intercambio de dos aristas adyacentes consecutivas induce ciclos impares de tamaños arbitrarios dado n suficientemente grande.

2.5.1. Definiciones

Es interesante entonces eliminar la posibilidad de intercambiar dos aristas tras cinco giros, para investigar como se comporta la estructura de la gráfica después de ello. Con esta idea definimos lo siguiente. Sea $P_n = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto de n puntos en posición convexa. Decimos que una triangulación T de P_n es *etiquetada* si cada una de sus diagonales interiores está marcada con una etiqueta diferente (tomando los valores de las etiquetas del 0 al $n - 4$). Denotamos como $label(e)$ la etiqueta de la diagonal e . Como toda triangulación tiene $n - 3$ diagonales interiores, entonces tenemos $(n - 3)!$ maneras de etiquetar a una triangulación dada.

En el mismo espíritu que en $G_T(n)$, definimos la *gráfica de giros de triangulaciones con diagonales etiquetadas* de un conjunto de n puntos en posición convexa (o de un n -ágono convexo). Como la gráfica cuyos vértices son todas las triangulaciones *etiquetadas* del conjunto de puntos (n -ágono, respectivamente), y donde dos de ellas son adyacentes si una se puede obtener de la otra por la misma operación de *giro* que usamos en $G_T(n)$, con la propiedad extra de que ahora al girar una arista, esta conserva su etiqueta (ver figura 2.8 en la página 23 para un ejemplo). Denotamos a esta gráfica como $G'_T(n)$. En términos más formales, dos triangulaciones T_i y T_j , con $T_i = T_j - f + h$, y con etiquetaciones $label_{T_i}$ y $label_{T_j}$ respectivamente, son adyacentes en $G'_T(n)$ si y solo si T_i y T_j son adyacentes en $G_T(n)$, $label_{T_i}(e) = label_{T_j}(e)$ para toda $e \in T_i \cap T_j$ y $label_{T_i}(h) = label_{T_j}(f)$.

Es muy interesante que esta modificación de $G_T(n)$ resulta en una gráfica bipartita, por lo que $\chi(G'_T(n)) = 2$. Para mostrar este resultado identificaremos cada triangulación etiquetada con una permutación de las etiquetas; y mostraremos que un giro de aristas nos lleva de una triangulación asociada a una permutación *par* a una triangulación asociada a una permutación *impar*, y viceversa.

Antes de mostrar este resultado, mencionaremos brevemente una propiedad muy útil de las permutaciones. Se dice que una *inversión* ocurre en una permutación cuando un número

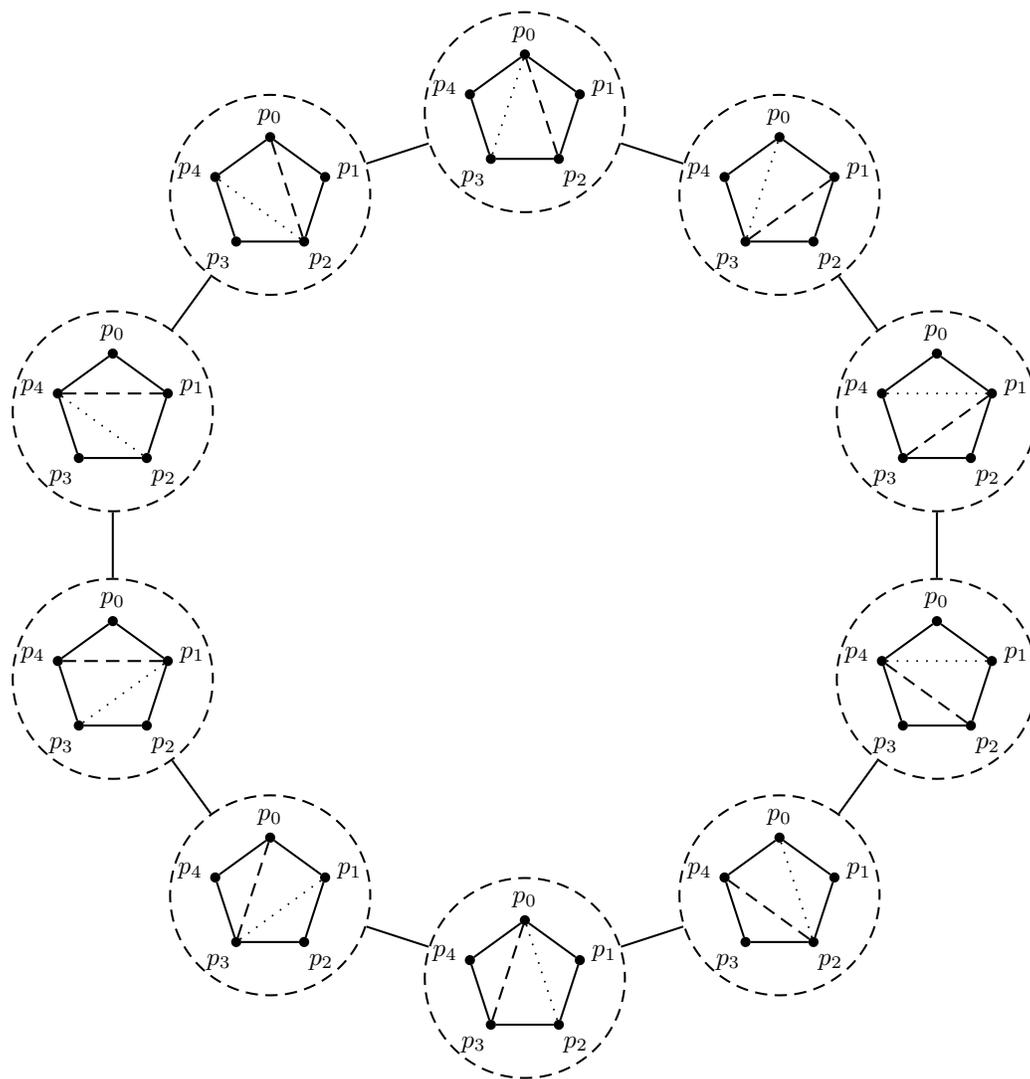


Figura 2.8: $G'_7(5)$ es isomorfa a C_{10} . Las etiquetas se indican con diferentes estilos de líneas.

aparece antes que uno más pequeño que él. Por ejemplo, la permutación [1 2 5 3 4] tiene dos inversiones. La *paridad* de una permutación se define como la paridad del número de inversiones en esa permutación. Entonces [1 2 5 3 4] es *par*, mientras que [1 2 5 4 3] es *impar*. Una *transposición* es una permutación que intercambia dos elementos mientras que deja los demás fijos. Es bien sabido que al aplicar una transposición a una permutación, se obtiene una nueva permutación de paridad diferente. Es justo esta propiedad de las permutaciones las que usaremos en nuestra prueba.

2.5.2. Número cromático

Teorema 4. $\chi(G'_T(n)) = 2$.

Demostración. Comencemos con la siguiente construcción: sea $P_n = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto de puntos dibujados uniforme (respecto a sus incrementos en la coordenada x) y consecutivamente sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ de la parábola $y = x^2$ (ver figura 2.9).

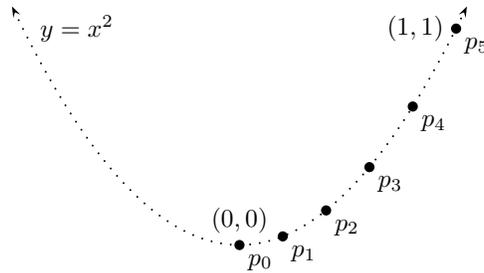


Figura 2.9: P_5 dibujado sobre el intervalo $[0, 1]$ de la parábola $y = x^2$.

Es claro que, dibujado de esta forma, P_n está en posición convexa, por lo que podemos interpretar a los vértices de $G'_T(n)$ como las triangulaciones etiquetadas de P_n . Dada cualquier triangulación T de P_n con etiquetación $label$, extendemos la etiquetación a la arista p_0p_{n-1} definiendo $label(p_0p_{n-1}) = n - 3$. Ahora tracemos desde cada vértice $p_j \neq p_0, p_{n-1}$ una semilínea horizontal h_j hacia la izquierda. Sea e_j la primera arista intersecada por h_j en un punto interior (ver fig. 2.10). Es claro que e_j está bien definida por que toda h interseca al menos a la arista p_0p_{n-1} . Asociamos a T la biyección l entre $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-2}\}$ y $\{0, 1, \dots, n - 3\}$ definiendo $l(p_j) = label(e_j)$ para todo $1 \leq j \leq n - 3$.

Para ver que esta es en efecto una biyección, notemos que toda diagonal interior $p_i p_k$ ($i < k$) es una arista exterior de la subtriangulación de $\{p_i, p_{i+1}, \dots, p_k\}$. Sea p_j el tercer vértice del único triángulo de esa subtriangulación que tiene como vértices a p_i y a p_k . Al trazar la semirecta h_j la primera arista que interseca es precisamente $p_i p_k$, pues el interior del triángulo $p_i p_j p_k$ es vacío. Lo anterior sucede también con la arista $p_0 p_{n-1}$. Como l relaciona a

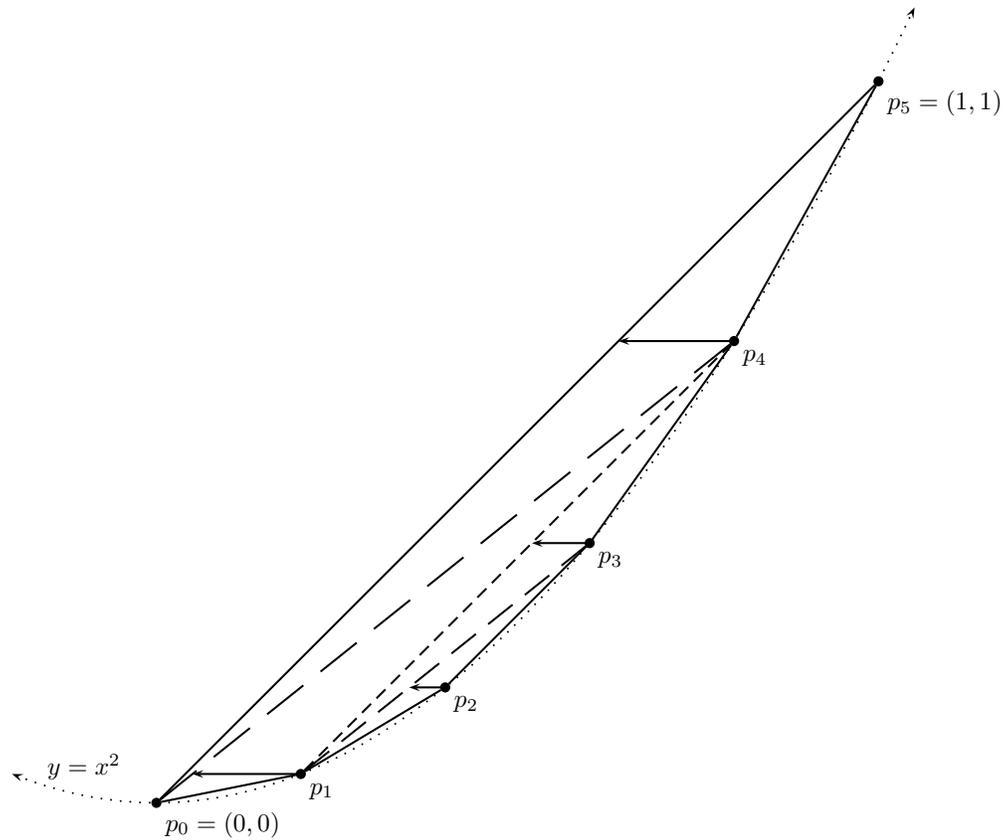


Figura 2.10: Una triangulación etiquetada de P_5 . Se muestra la asociación entre puntos y aristas que se obtiene al lanzar un rayo horizontal desde cada punto.

cada vértice con alguna etiqueta, y toda etiqueta se relaciona con un vértice, entonces l es una biyección.

Es conveniente considerar a las biyecciones asociadas a cada triangulación de $G'_T(n)$ como permutaciones de las etiquetas de la triangulación. Es decir, identificamos la triangulación T_i con etiquetación $label_i$ (extendida a la arista p_0p_{n-1}) con la permutación

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ l(p_1) & l(p_2) & \cdots & l(p_{n-2}) \end{pmatrix}.$$

Como ejemplo consideremos la figura 2.10. Supongamos que las etiquetas de las aristas p_0p_5 , p_0p_4 , p_1p_4 y p_1p_3 son 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Entonces la permutación σ asociada a esa triangulación etiquetada es

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que el giro de una arista nos lleva de una triangulación a otra de paridad diferente: sean T_i y T_j dos triangulaciones con etiquetaciones $label_i$ y $label_j$ respectivamente adyacentes en $G'_T(n)$, con $T_i = T_j - f + h$. Notemos que al intercambiar h por f para pasar de T_i a T_j , todos los triángulos, excepto dos, permanecen inalterados. Por lo tanto todos los vértices intermedios de esos triángulos permanecen asociados por l a las mismas etiquetas. Los únicos dos triángulos que se modifican son aquellos cuya unión forma el cuadrilátero que contiene a ambas f y h como diagonales. Es fácil observar que al hacer el giro, los vértices asociados a f y a h intercambian sus etiquetas asociadas (figura 2.11).

De esta forma tenemos que las permutaciones σ_i y σ_j asociadas a T_i y T_j difieren entre sí tan solo por dos entradas que han intercambiado sus posiciones. Como esto corresponde a aplicar una transposición, estas permutaciones tienen paridades distintas. Se sigue de inmediato que $G'_T(n)$ es bipartita, y por ello su número cromático es 2. \square

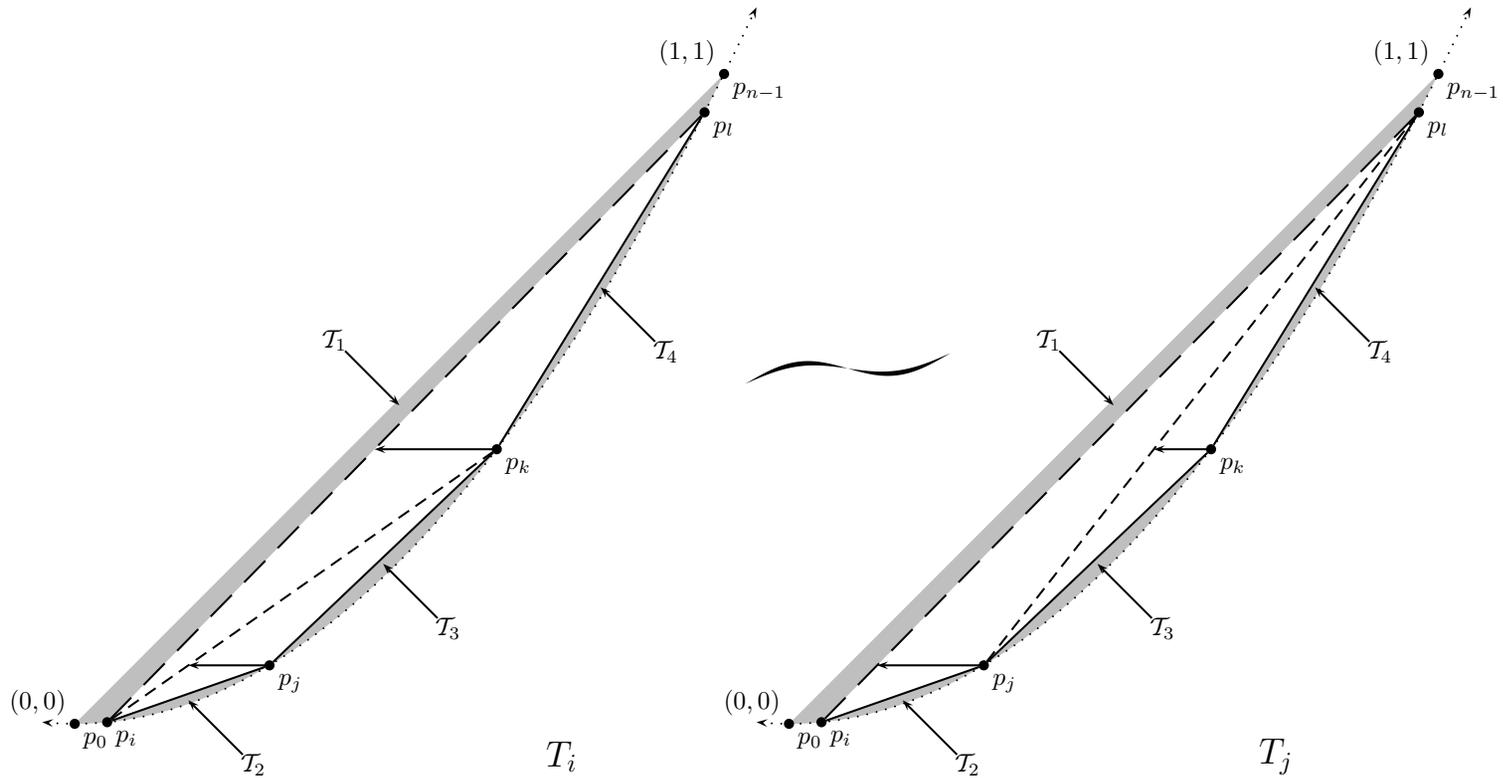


Figura 2.11: Al hacer un giro en una triangulación etiquetada, las subtriangulaciones \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_3 y \mathcal{T}_4 permanecen inalteradas. El único efecto sobre la asociación entre los vértices y las aristas es que p_j y p_k (los vértices intermedios del cuadrilátero que contiene a la arista que se gira) intercambian sus aristas asociadas.

Capítulo 3

Gráfica de giros de triángulos sobre el n -ágono convexo

3.1. Definiciones

Sea $P_n = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ el conjunto de vértices de un polígono convexo en el plano. Supongamos que sus aristas están etiquetadas a_0, a_1, \dots, a_{n-1} en el sentido de las manecillas del reloj, y que sus vértices están etiquetados p_0, p_1, \dots, p_{n-1} de tal manera que los extremos de la arista a_i son los vértices v_i y $v_{(i+1) \bmod n}$ (fig. 3.1).

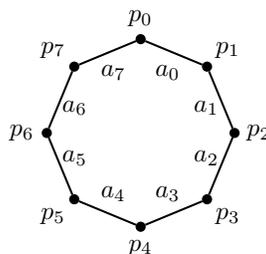


Figura 3.1: Un octágono etiquetado canónicamente.

La *gráfica de triángulos de P_n* , $G_\Delta(n)$, se define como la gráfica cuyos vértices son los $\binom{n}{3}$ posibles triángulos con vértices en P_n . Decimos que dos de estos son adyacentes si su intersección es exactamente un lado; es decir, comparten dos vértices, pero sus interiores son disjuntos (fig 3.2).

En este capítulo demostraremos cotas inferior y superior del número cromático de $G_\Delta(n)$, ambas de orden logarítmico.

3.2. Número Cromático

3.2.1. Cota Superior

Teorema 5. $\chi(G_\Delta(n)) \leq 2 + 4(\lceil \log_2 n \rceil - 2)$.

Esta cota la demostraremos por inducción sobre el tamaño de P_n , mostrando que es posible colorear $G_\Delta(2n)$ con los colores que usaríamos para colorear $G_\Delta(n)$, mas 4 colores extra.

Demostración. Como caso base consideremos $G_\Delta(4)$ (fig. 3.3). Esta gráfica tiene dos aristas y cuatro vértices de grado 1. Claramente su número cromático es dos.

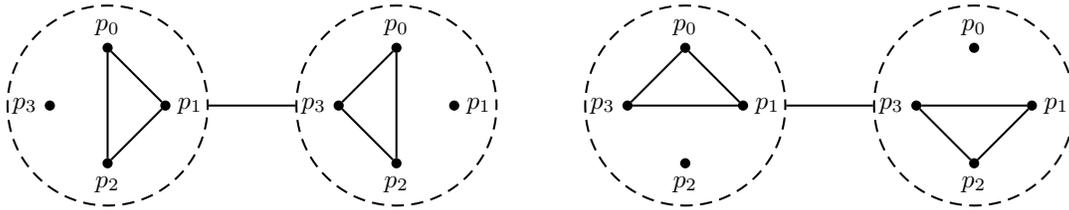


Figura 3.3: $G_\Delta(4)$

Por inducción, supongamos que hemos podido colorear a todas las gráficas $G_\Delta(n)$ usando χ_n colores, para todos los valores de $n \leq k$.

Consideremos $G_\Delta(2k)$. Clasifiquemos sus vértices en dos tipos: los triángulos en los que algún par de vértices son elementos consecutivos (mod $2k$) de P_{2k} son de tipo 1 (esta propiedad es equivalente a decir que el triángulo tiene un lado sobre la frontera convexa), el resto de los vértices son de tipo 2. Sea G_1 la subgráfica inducida en $G_\Delta(2k)$ por los vértices de tipo 1, y sea G_2 la subgráfica inducida en $G_\Delta(2k)$ por los vértices de tipo 2. La coloración de $G_\Delta(2k)$ es mediante la coloración independiente de sus subgráficas G_1 y G_2 .

Primer paso: Coloración de G_2

Mostraremos que existe un homomorfismo $h : G_2 \rightarrow G_\Delta(k)$, implicando con ello que $\chi(G_2) \leq \chi(G_\Delta(k))$.

Sea $\Delta_i \in V(G_2)$ el triángulo con vértices p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} . Definimos $h : V(G_2) \rightarrow V(G_\Delta(k))$ como la función tal que $h(\Delta_i) = \Delta'_i$, donde Δ'_i es el triángulo con vértices $p'_{i1}, p'_{i2}, p'_{i3}$ y

$$p'_{ij} = \begin{cases} \frac{p_{ij}}{2} & \text{si } p_{ij} \text{ es par} \\ \frac{p_{ij}-1}{2} & \text{si } p_{ij} \text{ es impar} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3).$$

La intuición detrás de la definición de h se encuentra al imaginar que los triángulos de P_{2k} tienen sus vértices *anclados* en puntos de P_{2k} , y que la operación que realizamos para identificar un triángulo de P_{2k} con uno de P_k es, primero, trasladar todos los puntos con posiciones impares a los puntos con posiciones pares (fig. 3.4-(a)) (con esto reducimos el número de puntos a la mitad), y segundo, mover los vértices del triángulo anclados sobre puntos que hemos removido al siguiente punto (en contra de las manecillas) que sí hemos conservado (fig 3.4-(b)).

El efecto de aplicar esta operación, es que hemos conseguido mover los vértices de un triángulo *empotrado* en los puntos de P_{2k} a los puntos de P_k . Aún más, por la naturaleza de la operación, dos triángulos que originalmente eran adyacentes en $G_{\Delta}(2k)$ son identificados a triángulos que son adyacentes en $G_{\Delta}(k)$.

Debido a la existencia del homomorfismo h , dada una coloración propia de $G_{\Delta}(k)$, $col : V(G_{\Delta}(k)) \rightarrow \{1, 2, \dots, \chi_k\}$, podemos colorear a G_2 con χ_k colores asignando $color(\Delta) := col(h(\Delta))$ para todo $\Delta \in V(G_2)$.

Segundo paso: coloración de G_1

Observemos que un triángulo de G_1 puede tener a lo más cuatro triángulos adyacentes (fig. 3.5).

Debido a que el grado máximo de G_1 es cuatro y que G_1 *no* es una gráfica completa ni es un ciclo, por el teorema de Brooks [7], que establece que el número cromático de una gráfica es a lo más su grado máximo excepto cuando la gráfica es completa o un ciclo de longitud impar, se sigue de inmediato que podemos colorear a G_1 usando a lo más 4 colores.

Completando la coloración

Como $V(G_{\Delta}(2k)) = V(G_1) \cup V(G_2)$, podemos colorear a $G_{\Delta}(2k)$ coloreando primero los vértices de G_2 usando χ_k colores, y luego coloreando a G_1 usando 4 nuevos colores. Por lo tanto $\chi(G_{\Delta}(2k)) \leq \chi(G_{\Delta}(k)) + 4$. Como $\chi(G_{\Delta}(4)) = 2$, entonces $\chi(G_{\Delta}(n)) \leq 2 + 4(\lceil \log_2 n \rceil - 2)$

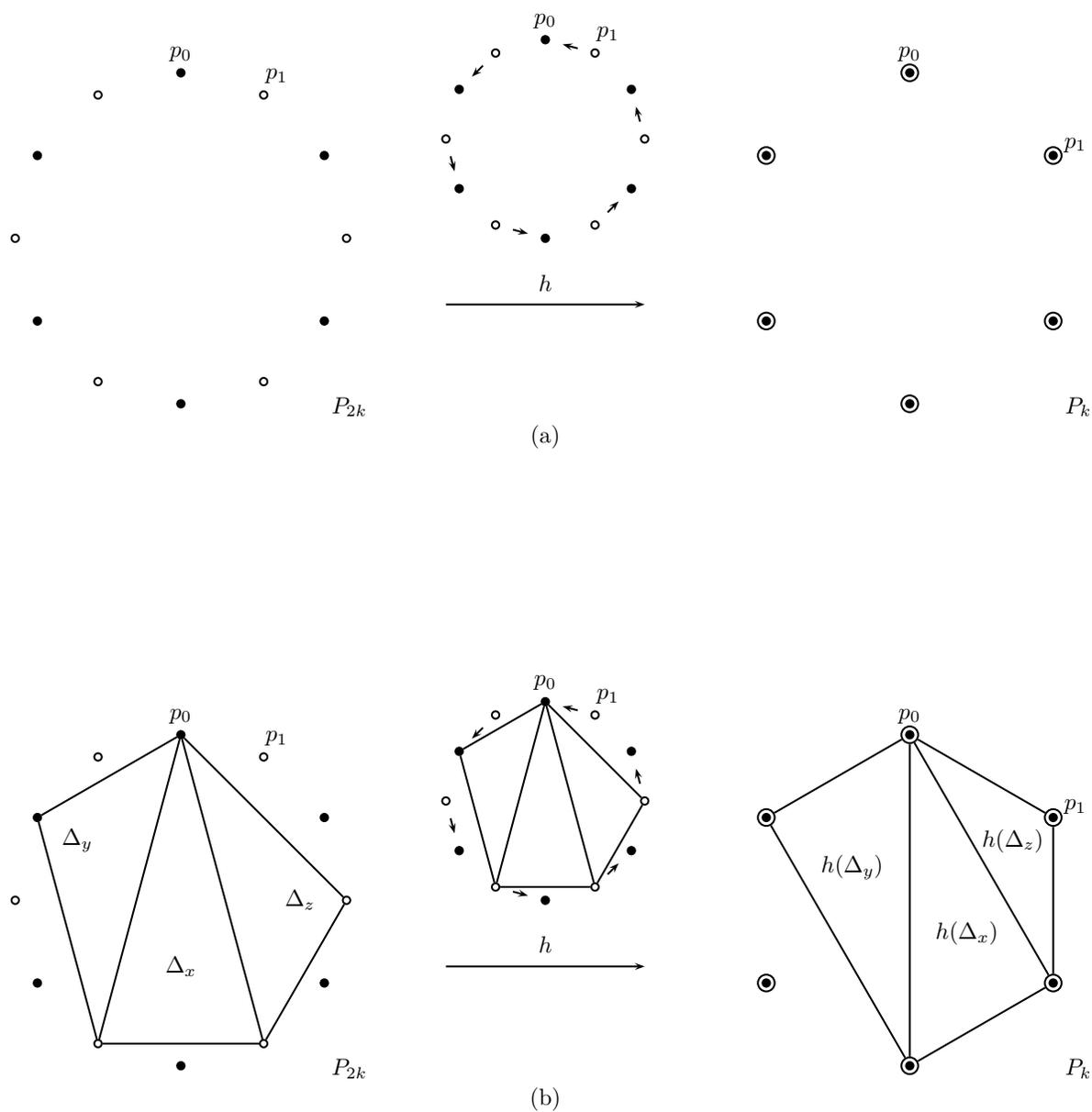


Figura 3.4: (a) El efecto de h es trasladar los puntos en posiciones impares a los puntos en posiciones pares (encimándolos), convirtiendo a P_{2k} en P_k . (b) Triángulos adyacentes en G_2 son asociados con triángulos adyacentes en $G_\Delta(k)$.

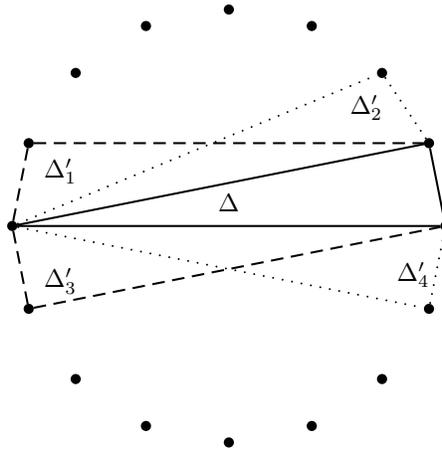


Figura 3.5: Un triángulo arbitrario Δ de G_1 tiene a lo más cuatro triángulos adyacentes (pues por definición los triángulos de G_1 necesitan tener un lado sobre la frontera convexa). Es claro que no hay dos vecinos de Δ que sean adyacentes entre si.

□

3.2.2. Cota Inferior

Teorema 6. $\chi(G_\Delta(n)) \geq \lceil \log_2(n-1) \rceil$.

Demostración. Sea S la subgráfica inducida en $G_\Delta(n)$ por el conjunto de los triángulos que tienen como alguno de sus vértices a p_0 . Sea $\Delta_{i,j} \in V(S)$ el triángulo de vértices p_0, p_i, p_j ($0 < i < j < n$) (figura 3.6).

Supongamos que $\chi(S) = k$ y que $col : V(S) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ es una coloración propia de S . Sea $f : P_n \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$ tal que $f(p_i) = \{col(\Delta_{i,j}), i < j < n\}$.

Observemos que $f(p_i) \neq f(p_j)$ para todo $0 < i < j < n$. Para ello supongamos por contradicción que existen p_i y p_j con $f(p_i) = f(p_j)$. Como $col(\Delta_{i,j}) \in f(p_i)$ y $f(p_j) = f(p_i)$, entonces $col(\Delta_{i,j}) \in f(p_j)$. Por lo tanto existe algún $k > j$ tal que $col(\Delta_{j,k}) = col(\Delta_{i,j})$ (fig. 3.7). Pero $\Delta_{i,j}$ es adyacente a $\Delta_{j,k}$ y por lo tanto ¡Se contradice la suposición de que col es una coloración propia!.

De esta observación se sigue que $n-1 \leq 2^k$.

Por lo anterior y como S es una subgráfica inducida de $G_\Delta(n)$, entonces $\chi(G_\Delta(n)) \geq \chi(S) \geq \lceil \log_2(n-1) \rceil$.

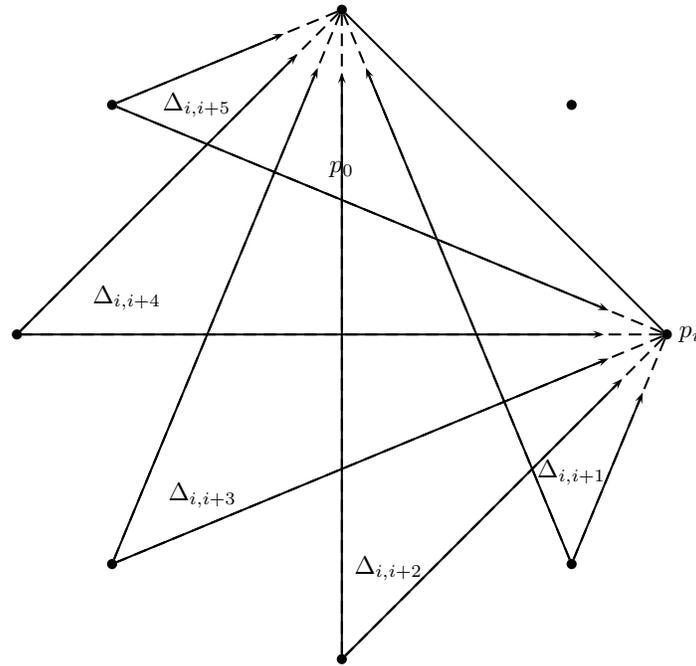


Figura 3.6: $f(p_i) = \{col(\Delta_{i,i+1})\} \cup \{col(\Delta_{i,i+2})\} \cup \dots \cup \{col(\Delta_{i,i+n-1})\}$.

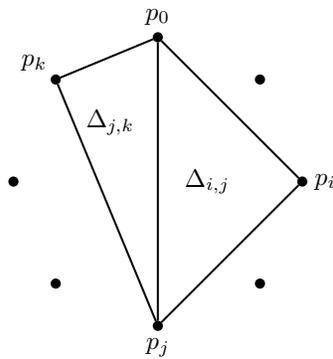


Figura 3.7: Si existen p_i y p_j con valores de f iguales, entonces hay un triángulo $\Delta_{j,k}$ con el mismo color que $\Delta_{i,j}$, y entonces la coloración *no* es propia.

□

De los teoremas 5 y 6 se sigue de inmediato el

Corolario 2. $\chi(G_\Delta(n)) \in O(\log n)$.

3.3. Notas bibliográficas

Introducimos la gráfica de giros de triángulos esperando de alguna manera ganar conocimiento acerca de la estructura de la gráfica de giros de triangulaciones. Esto no sucedió así, pues no encontramos la manera de aprovechar esta gráfica para colorear la gráfica de triangulaciones. Sin embargo logramos definir una gráfica que, hasta donde sabemos, nunca se había considerado. Es por esto último que no citamos bibliografía al respecto. La gran excepción la mencionamos a continuación.

Al buscar bibliografía relacionada con la gráfica de triángulos, descubrimos que la subgráfica inducida con la que logramos demostrar la cota inferior del número cromático es ya conocida en la literatura. Su nombre usual es *gráfica de desplazamiento* (shift graph). Su definición formal es la siguiente:

Decimos que un par ordenado (A, B) de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ es una (k, n) -*pareja desplazada* si existe un conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}\}$ tal que $A = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ y $B = \{i_2, i_3, i_{n+1}\}$.

Dados $1 \leq k < n$, la (k, n) -*gráfica de desplazamiento* $S(k, n)$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ con un subconjunto A de k elementos adyacente a otro subconjunto B de k elementos si (A, B) es una pareja desplazada.

Históricamente la gráfica $(2, n)$ -*gráfica de desplazamiento* es llamada simplemente *gráfica de desplazamiento*, mientras que a la gráfica $(3, n)$ -*gráfica de desplazamiento* se le conoce como *gráfica de doble desplazamiento*.

Es un resultado bien conocido que el número cromático de la *gráfica de desplazamiento* es exactamente $\lceil \log_2 n \rceil$. Este resultado se atribuye usualmente a Andras Hajnal [32]. En nuestra investigación hemos redescubierto este resultado. La gráfica de desplazamiento es popular como un ejemplo sencillo de una gráfica *libre de triángulos* de número cromático alto.

Capítulo 4

Gráfica de giros de trayectorias hamiltonianas geométricas sobre el n -ágono convexo

4.1. Definiciones

Sea $P_n = \{p_0, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ el conjunto de vértices de un polígono convexo en el plano. Supongamos que sus aristas están etiquetadas a_0, a_1, \dots, a_{n-1} en el sentido de las manecillas del reloj, y que sus vértices están etiquetados p_0, p_1, \dots, p_{n-1} de tal manera que los extremos de la arista a_i son los vértices v_i y $v_{(i+1) \bmod n}$ (figura 4.1).

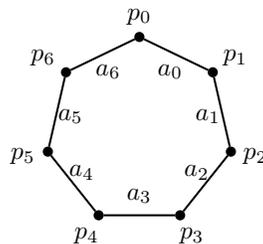


Figura 4.1: Un heptágono etiquetado canónicamente.

Una *trayectoria hamiltoniana geométrica (THG)* en P_n es una sucesión que alterna entre n vértices (puntos de P_n) y $n - 1$ aristas: $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{n-2}, e_{n-2}, v_{n-1}$; $v_i \neq v_j$ ($0 \leq i < j \leq n - 1$) tal que los extremos de e_i son v_i y v_{i+1} y no hay dos aristas que se

intersecan salvo en sus extremos. Dos THG's son iguales si sus conjuntos de aristas lo son (figura 4.2).

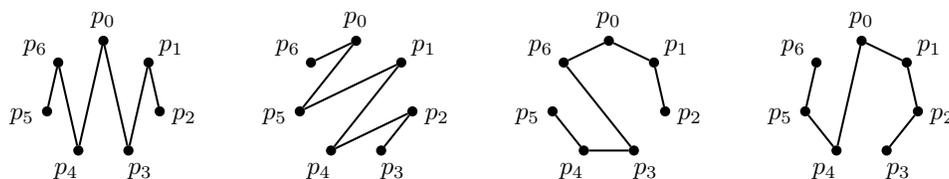


Figura 4.2: Cuatro trayectorias hamiltonianas geométricas diferentes sobre el heptágono de la figura 4.1

La gráfica de giros de trayectorias hamiltonianas geométricas en P_n , $G_\Gamma(n)$, es la gráfica que contiene como conjunto de vértices a todas las THG's de P_n . Dos de estas, Γ_i y Γ_j , son adyacentes si existen dos aristas $e \in E(\Gamma_i)$ y $f \in E(\Gamma_j)$ tales que $E(\Gamma_j) = E(\Gamma_i) - e + f$ (figuras 4.3 y 4.4).

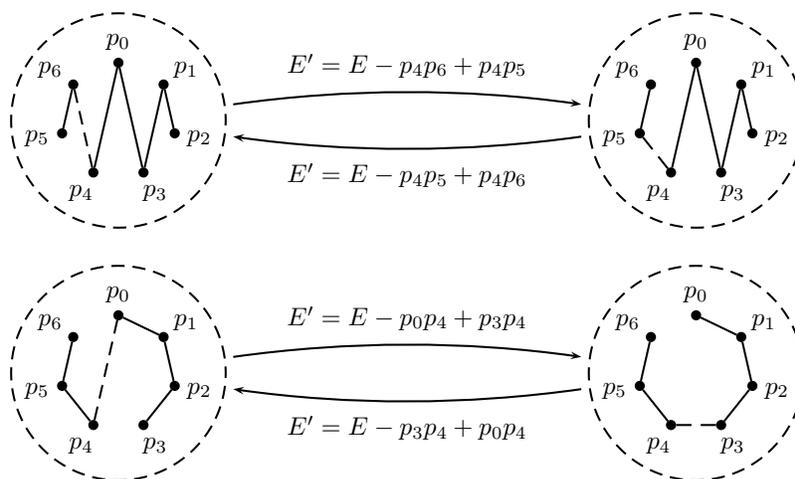


Figura 4.3: Dos parejas de trayectorias adyacentes sobre el heptágono. Las aristas que se reemplazan aparecen delineadas.

4.2. Número cromático

En este capítulo demostraremos que el número cromático de $G_\Gamma(n)$ es n , para $n \geq 3$.

Sea \mathcal{T}_i el conjunto de THG's de P_n con exactamente i diagonales interiores (ver figura 4.5). sea $G_{i,j}$, $i < j$, la subgráfica inducida en $G_\Gamma(n)$ por $\mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_{i+1} \cup \dots \cup \mathcal{T}_j$

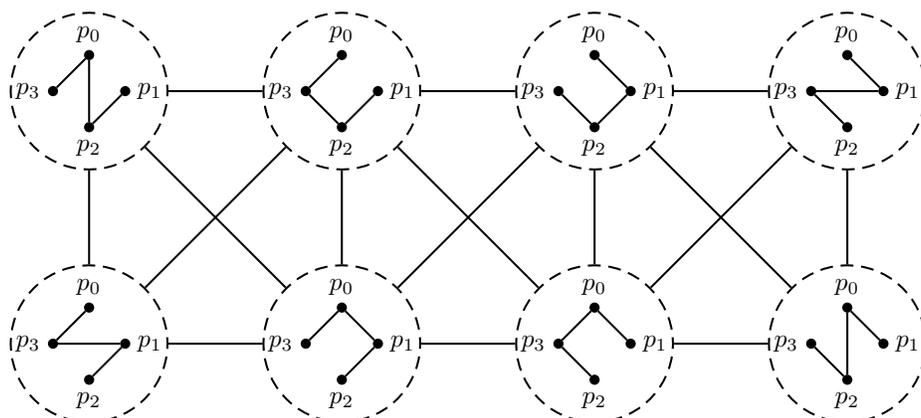


Figura 4.4: Gráfica de trayectorias de P_4 ($G_{\Gamma}(4)$).

La idea clave de la demostración es colorear los vértices de $G_{\Gamma}(n)$ familia por familia \mathcal{T}_i , comenzando en \mathcal{T}_0 y terminando en \mathcal{T}_{n-3} .

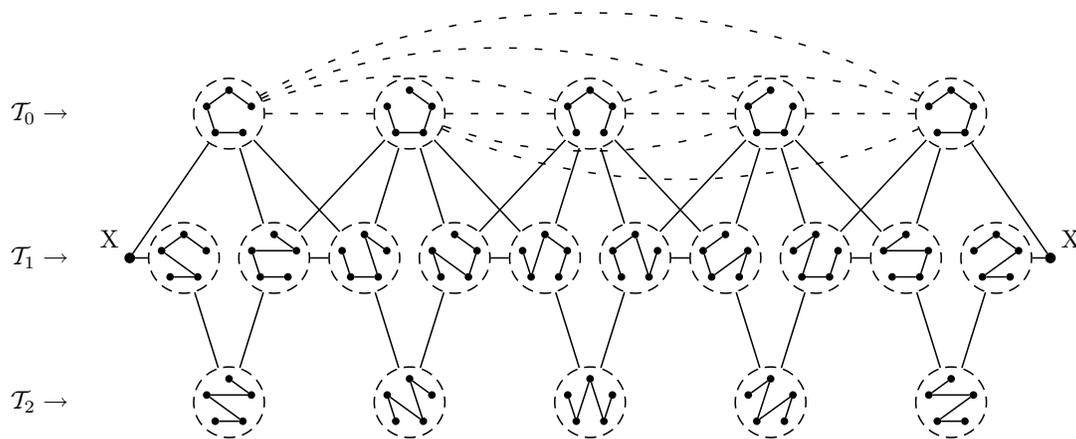


Figura 4.5: $G_{\Gamma}(5)$ con sus vértices agrupados por familias \mathcal{T}_i .

Demostraremos primero algunos Lemas acerca de la estructura de la gráfica.

Lema 1. *La subgráfica G_0 es una gráfica completa de orden n .*

Demostración. Las THG's de \mathcal{T}_0 son aquellas que se obtienen al remover alguna arista del polígono convexo. Sea Γ_i la THG obtenida al remover a_i . Γ_i puede obtenerse de Γ_j al remover de esta última a_i e insertar a_j . Como cualesquiera dos THG's de \mathcal{T}_0 son adyacentes en G_0 , entonces G_0 es una completa de orden n . (Esta subgráfica completa aparece ilustrada con aristas punteadas en la figura 4.5).

□

Lema 2. La subgráfica G_1 es un emparejamiento perfecto, y cada una de sus parejas, junto con su vecindad en $G_{0,1}$, forma una gráfica completa de orden 4.

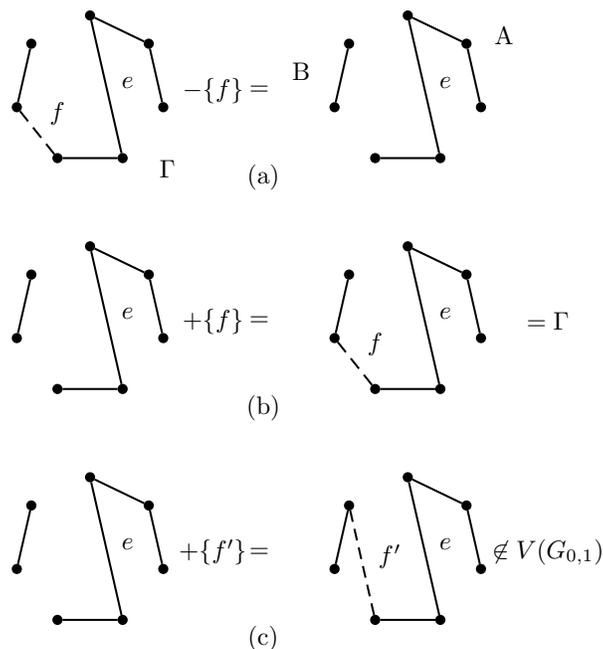


Figura 4.6: Caso 1 del Lema 2. No se puede obtener una trayectoria vecina en $G_{0,1}$ reemplazando una arista de la frontera convexa.

Demostración. Consideremos una THG cualquiera Γ de \mathcal{T}_1 . Por definición, Γ tiene una diagonal interior e . Removamos alguna arista, f , de Γ y analicemos las posibilidades de reubicarla para obtener una THG.

caso 1. Si $f \neq e$, entonces f pertenece a la frontera convexa y al removerla hemos convertido a Γ en dos subtrayectorias. Una de ellas contiene a e , llamemos A a esta subtrayectoria y B a la otra (fig. 4.6-(a)). Desde los extremos de B solo es visible un extremo de A , pues e la aísla visualmente del otro extremo. Existen dos formas -una sola, si B consta de un vértice aislado- de reconectar las dos subtrayectorias. La primera es la posibilidad trivial de reinsertar f (fig. 4.6-(b)), pero en este caso obtenemos Γ . La otra opción es conectar el extremo visible de A con el extremo de B que no es incidente a f . En este caso estamos insertando una diagonal interior, y la THG obtenida contiene dos diagonales interiores, por lo tanto pertenece a \mathcal{T}_2 y no es adyacente a Γ en $G_{0,1}$ (fig. 4.6-(c)).

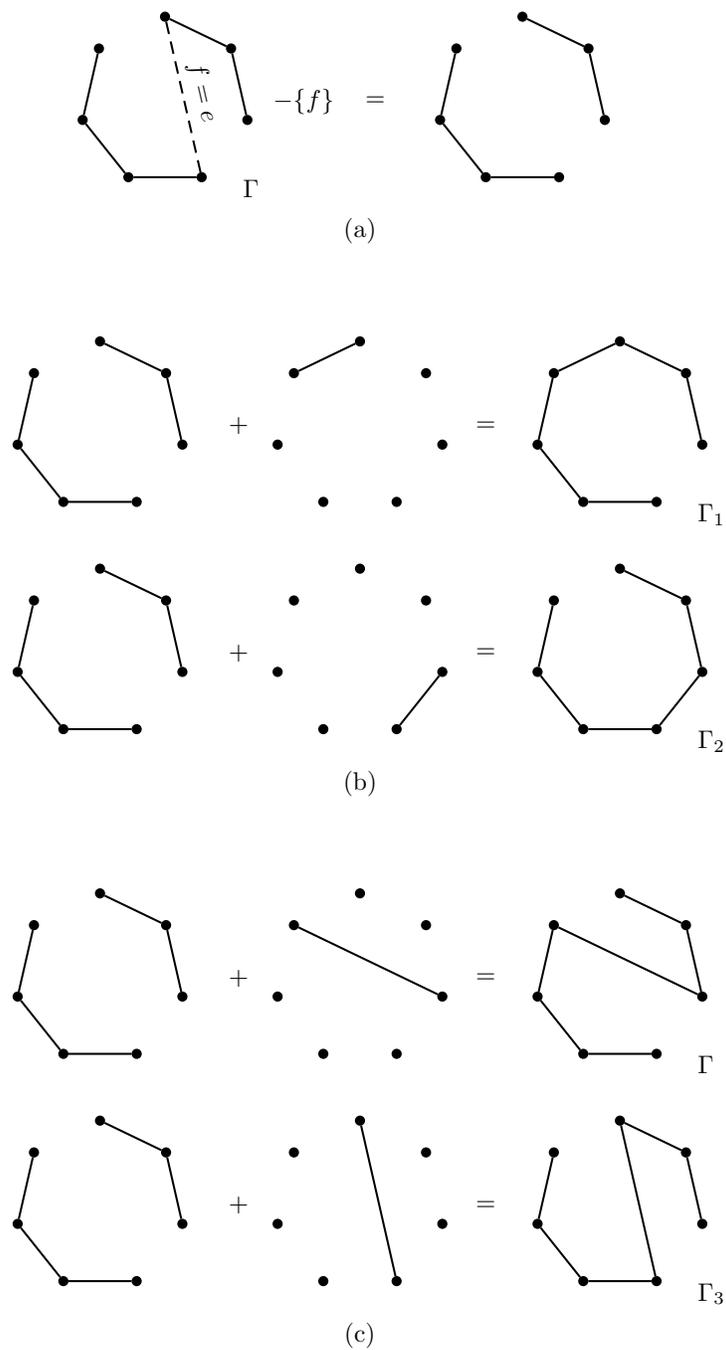


Figura 4.7: Caso 2 del Lema 2.

caso 2. Si $f = e$, al haber removido e lo que queda son dos subtrayectorias contenidas completamente en la frontera convexa (fig. 4.7-(a)). Como los cuatro extremos de ambas subtrayectorias son visibles entre si, tenemos cuatro posibilidades de insertar una arista para obtener una THG. Esta arista puede seleccionarse de entre dos aristas de la frontera convexa, o de entre dos diagonales interiores.

En caso de insertar alguna arista de la frontera convexa, obtenemos una THG de \mathcal{T}_0 (fig. 4.7-(b)). Llamemos a las dos THG's que podemos obtener de esta manera Γ_1 y Γ_2 . De otra forma, insertando una de las dos diagonales interiores, obtenemos una THG de \mathcal{T}_1 (fig. 4.7-(b)). Una de ellas es la propia Γ . Llamemos Γ_3 a la otra THG.

Por lo anterior, solo obtenemos THG's vecinas a Γ en $G_{0,1}$ en el segundo caso. Dos de estas pertenecen a \mathcal{T}_0 y solo una, Γ_3 , pertenece a G_1 . Se sigue de inmediato que G_1 es un emparejamiento perfecto. Aún más, los dos vecinos de Γ que pertenecen a \mathcal{T}_0 , Γ_1 y Γ_2 , son también los dos vecinos de Γ_3 pertenecientes a \mathcal{T}_0 . Y como G_0 es una gráfica completa, entonces $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ y Γ_3 forman una gráfica completa .

□

Lema 3. *Toda THG de $\mathcal{T}_i, i \geq 2$, tiene exactamente dos vecinos en $G_{0,i}$, y estos vecinos son THG's de \mathcal{T}_{i-1} .*

Demostración. Sea Γ una THG cualquiera de \mathcal{T}_i . Notemos que Γ se puede escribir de una única manera como la concatenación de tres subtrayectorias: A, B y C , tales que A y C tienen solo aristas de la frontera convexa y B comienza y termina con diagonales interiores (fig. 4.8-a). Sean e_i y e_j las aristas inicial y final respectivamente de B . Si removemos alguna de las aristas de Γ (llamémosla f), obtenemos dos subtrayectorias desconectadas. Las posibles maneras de reconectarlas para recuperar una THG dependen de la arista que hayamos removido.

caso 1. Si f es una arista de A o de C , entonces solo una de las subtrayectorias tiene diagonales interiores, llamemos γ_1 a la subtrayectoria que tiene diagonales interiores y γ_2 a la que no (fig. 4.8-b1). La única manera de insertar una arista para obtener una THG diferente a Γ es conectar el extremo de γ_1 adyacente a f con el extremo de γ_2 que no es adyacente a f . En este caso obtenemos una THG con una diagonal interior más que las que tiene Γ y por lo tanto pertenece a \mathcal{T}_{i+1} (fig. 4.8-b2). Entonces la THG obtenida no es adyacente a Γ en $G_{0,i}$.

caso 2. Si f es una arista de B diferente de e_i y de e_j , entonces los únicos dos extremos visibles entre si de las subtrayectorias son precisamente los adyacentes a f . Así que la única forma de obtener una THG es reinsertando f , obteniendo Γ (fig. 4.8-c).

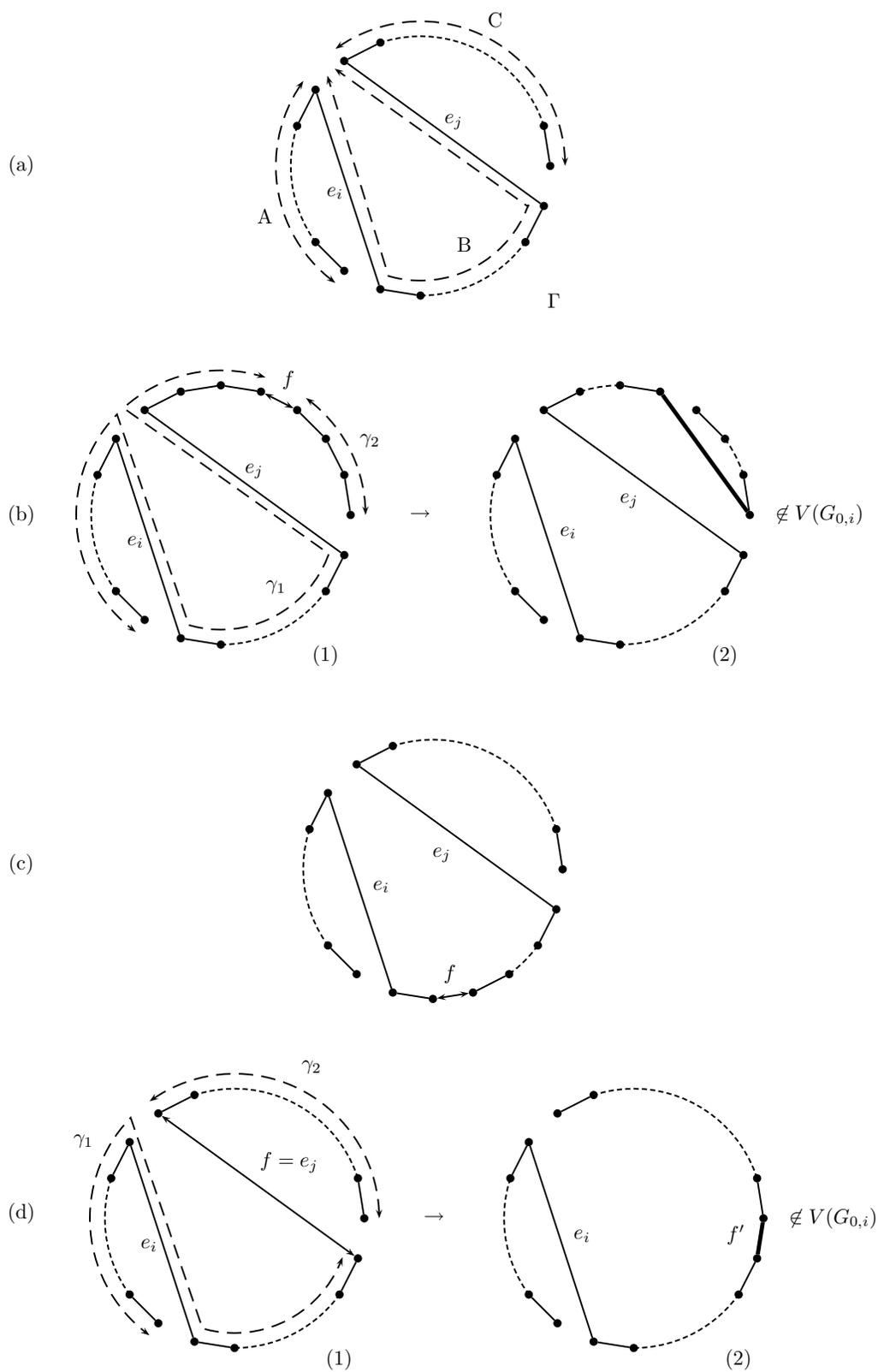


Figura 4.8: Ilustración del Lema 3.

caso 3. Si $f = e_i$ o $f = e_j$, entonces al igual que en el primer caso solo una de las subtrayectorias tiene diagonales interiores, llamemos γ_1 a esta subtrayectoria y γ_2 a la otra (fig. 4.8-d1). La única manera de obtener una THG distinta a Γ es conectando el extremo de γ_1 adyacente a f con el extremo de γ_2 que no es adyacente a f . En este caso estamos remplazando una diagonal por una arista de la frontera convexa. La THG resultante tiene una diagonal menos que Γ (fig. 4.8-d2), por lo tanto pertenece a \mathcal{T}_{i-1} , y es adyacente a Γ en $G_{0,i}$.

Del análisis de casos anterior concluimos que Γ tiene solo dos vecinos en $G_{0,i}$: aquellas THG's de \mathcal{T}_{i-1} obtenidas al remplazar e_i o e_j por una arista de la frontera convexa.

□

Teorema 7. *El número cromático de la gráfica de giros de trayectorias hamiltonianas geométricas de P_n , ($n \geq 3$), $\chi(G_\Gamma(n))$, es n .*

Demostración. El caso $n = 3$ se resuelve por simple inspección, en este caso la gráfica es isomorfa a K_3 y por tanto $\chi(G_\Gamma(3)) = 3$.

Para el caso $n \geq 4$ la prueba será por inducción, extendiendo una coloración propia de la subgráfica $G_{0,k}$ a la subgráfica $G_{0,k+1}$.

Como caso base probaremos una n -coloración de la subgráfica $G_{0,1}$. El corolario 1 establece que la subgráfica G_0 es una gráfica completa de tamaño n . Esto implica que n es una cota inferior para el número cromático de $G_\Gamma(n)$. Comenzaremos una coloración de la gráfica usando n colores para colorear esta subgráfica. Una vez que hemos coloreado G_0 extenderemos esa coloración a los vértices de $G_{0,1}$ usando el Lema 2. Este nos dice que G_1 es un emparejamiento perfecto, y que cada una de sus parejas, junto con su vecindad en $G_{0,1}$, forman una completa de tamaño 4. Lo que haremos es colorear una a una las parejas de G_1 , simplemente asignando a estos vértices dos colores diferentes a los ya usados en sus vecinos de G_0 . Esto siempre es posible por que $n \geq 4$, por lo cual siempre podemos escogerlos de entre $n - 2 \geq 2$ colores disponibles.

Como hipótesis de inducción supongamos que hemos extendido nuestra coloración a los vértices de la familia \mathcal{T}_i , para todo $i \leq k$. Para mostrar que podemos extender esta coloración a los vértices de la familia $k + 1$, usaremos el Lema 3. Este dice que todo vértice de G_{k+1} tiene exactamente dos vecinos en $G_{0,k+1}$, y que ambos pertenecen a G_k . Entonces podemos colorear uno por uno los vértices de G_{k+1} , simplemente asignándoles uno de los $n - 2$ colores diferentes a los de sus dos vecinos ya coloreados. □

4.3. Notas bibliográficas

Introducimos la gráfica de giros de trayectorias hamiltonianas en el mismo espíritu que la gráfica de giros de triangulaciones. Su definición es muy natural considerando el concepto de *giro* de arista, en el cual quitamos una arista e introducimos otra. Es curioso que siendo la definición de esta gráfica tan natural, no hayamos podido encontrar referencias a ellas en la literatura.

Considerando que no es un objeto conocido, algo natural para un trabajo futuro es preguntarse cuales son sus demás propiedades, y su generalización para conjuntos de puntos en posición general.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Se ha estudiado el número cromático de varias gráficas de giros. Las gráficas de giros son objetos bien conocidos y ya estudiados en la literatura; sin embargo, su número cromático ha sido una propiedad de la que muy pocos trabajos se han ocupado. Es por ello que, para hacer más completo el conocimiento que se tiene de esta área, nos hemos enfocado precisamente a la investigación de esta propiedad.

A continuación enumeramos los principales resultados obtenidos y el trabajo futuro a realizar al respecto.

Triangulaciones de n -ágonos convexos Se ha mostrado una relación entre las triangulaciones de n -ágonos convexos y árboles binarios. Esta relación hace que las gráficas de giros de ambos objetos sean isomorfas, brindando un interés particular en el estudio de esta gráfica.

Se dan cotas constructivas originales que permiten colorear la gráfica usando un número lineal de colores (respecto a n). Se da también una cota superior de orden $n/\log n$. Se dan los valores del número cromático para los primeros valores de n . Se muestra una variante original de la gráfica en la que se consideran triangulaciones con etiquetas distintas en sus diagonales. Se demuestra que el número cromático de la gráfica resultante es 2

El trabajo pendiente en esta gráfica es calcular su número cromático exacto, pues las cotas inferior y superior aún están muy alejadas.

Gráfica de triángulos sobre n -ágonos convexos Se da la definición original de esta gráfica. Se muestra una construcción con la cual, dada una coloración de $G_{\Delta}(n)$, se puede colorear $G_{\Delta}(2n)$ usando solamente cuatro nuevos colores, obteniendo con ello una cota superior de orden logarítmico.

Se demuestra que esta gráfica contiene como subgráfica inducida una gráfica con número cromático logarítmico. La prueba es original, pero redescubriendo un resultado ya conocido.

El trabajo pendiente en el número cromático de esta gráfica es el de ajustar las cotas, pues aunque ambas tienen el mismo orden de complejidad, aún hay una constante multiplicativa que las separa. El valor de esta constante presentado en este trabajo es 4; sin embargo, en una investigación muy reciente se ha podido reducir a 2. No fue posible incluir este resultado en esta obra por cuestiones de tiempo.

Resta también estudiar las demás propiedades de esta gráfica.

Trayectorias hamiltonianas geométricas sobre n -ágonos convexos Se da la definición original de esta gráfica. Se calcula su número cromático exacto, el cual resulta ser n . Para mostrar la cota superior se da una construcción que permite n -colorear la gráfica. La cota inferior se prueba exhibiendo una subgráfica de número cromático n .

Se deja para un trabajo futuro el estudiar las demás propiedades de esta gráfica.

Bibliografía

- [1] Johansson A. Asymptotic choice number for triangle free graphs. Technical report, DIMACS, 1996.
- [2] Kenneth Appel, Wolfgang Haken, and John Koch. Every planar map is four colorable. *Journal of Mathematics*, 21:439–567, 1977.
- [3] Esther M. Arkin, Martin Held, Joseph S. B. Mitchell, and Steven Skiena. Hamilton triangulations for fast rendering. In *ESA '94: Proceedings of the Second Annual European Symposium on Algorithms*, pages 36–47, London, UK, 1994. Springer-Verlag.
- [4] Bela Bollobas. *Modern Graph Theory*. Springer, 2002.
- [5] Nicolas Bonichon. A bijection between realizers of maximal plane graphs and pairs of non-crossing dyck paths. *Discrete Mathematics*, 298:104–114, 2005.
- [6] D. Brélaz. New methods to color vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22:251–256, 1979.
- [7] R. L. Brooks. On coloring the nodes of a network. In *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, volume 37, pages 194–197. Cambridge Philos. Soc., 1941.
- [8] Gary Chartrand and L. Lesniak. *Graphs and Digraphs, Fourth Edition*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [9] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Second Edition*. The MIT Press, 2001.
- [10] V. Estivill-Castro, M. Noy, and J. Urrutia. On the chromatic number of tree graphs. *Discrete Math.*, 223(1-3):363–366, 2000.
- [11] Francine Evans, Steven Skiena, and Amitabh Varshney. Optimizing triangle strips for fast rendering. In *VIS '96: Proceedings of the 7th conference on Visualization '96*, pages 319–326, Los Alamitos, CA, USA, 1996. IEEE Computer Society Press.

- [12] M. R. Garey, D. S. Johnson, and L. Stockmeyer. Some simplified np-complete problems. In *STOC '74: Proceedings of the sixth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 47–63, New York, NY, USA, 1974. ACM Press.
- [13] Wayne Goddard and Henda C. Swart. Distances between graphs under edge operations. *Discrete Math.*, 161(1-3):121–132, 1996.
- [14] Carmen Hernando, Michael E. Houle, and Ferran Hurtado. On local transformation of polygons with visibility properties. In *COCOON '00: Proceedings of the 6th Annual International Conference on Computing and Combinatorics*, pages 54–63, London, UK, 2000. Springer-Verlag.
- [15] M. C. Hernando, F. Hurtado, A. Márquez, M. Mora, and M. Noy. Geometric tree graphs of points in convex position. *Discrete Appl. Math.*, 93(1):51–66, 1999.
- [16] F. Hurtado and M. Noy. Graph of triangulations of a convex polygon and tree of triangulations. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 13(3):179–188, 1999.
- [17] F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia. Flipping edges in triangulations. In *SCG '96: Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry*, pages 214–223, New York, NY, USA, 1996. ACM Press.
- [18] Ferran Hurtado and Marc Noy. The graph of triangulations of a convex polygon. In *SCG '96: Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry*, pages 407–408, New York, NY, USA, 1996. ACM Press.
- [19] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, 1994.
- [20] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, New York, 1972.
- [21] Donald E. Knuth. *The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorial Computing*. Addison-Wesley Professional, 1993.
- [22] G. Lamé, E. Catalan, O. Rodrigues, and J. Binet. *Journal de Mathématiques*, 1838, 1839.
- [23] D. E. Lucas. *Recreations Mathématiques*, volume 2. Gauthiers Villars, Paris, 1892.
- [24] Joan M. Lucas. The rotation graph of binary trees is hamiltonian. *J. Algorithms*, 8(4):503–535, 1987.
- [25] Joan M. Lucas, D. Roelants van Baronaigien, and Frank Ruskey. On rotations and the generation of binary trees. *J. Algorithms*, 15(3):343–366, 1993.

-
- [26] Bruce Reed Michael S. Molloy. *Graph colouring and the probabilistic method*. Springer, 2002.
- [27] R.J. Opsut and Fred S. Roberts. On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment and traffic phasing problems. In G. Chartrand, Y. Alavi, D.L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster, and D.R. Lick, editors, *The Theory and Applications of Graphs*, pages 479–492, New York, NY, 1981. John Wiley & Sons.
- [28] J. Von Segner and L. Euler. *Novi Comentariorum Academiae Scientiarum Petropolitanae*, volume 7, pages 13–15, 203–209. 1760.
- [29] D D Sleator, R E Tarjan, and W P Thurston. Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. In *STOC '86: Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 122–135, New York, NY, USA, 1986. ACM Press.
- [30] Daniel Dominic Sleator and Robert Endre Tarjan. Self-adjusting binary search trees. *J. ACM*, 32(3):652–686, 1985.
- [31] Richard P. Stanley and Sergey Fomin. *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 2001.
- [32] William T. Trotter and Peter Winkler. Ramsey theory and sequences of random variables. *Comb. Probab. Comput.*, 7(2):221–238, 1998.
- [33] G. Yu, P. Kouvelis, and Luo. A weighted vertex packing problem for specially structured geometric graphs arising in the design of electronic testing fixtures. ORSA/TIMS Presentation, San Francisco, CA, 1992.

Índice de figuras

1.1.	P_6 , un conjunto de 6 puntos en posición convexa.	2
1.2.	Los cinco posibles emparejamientos perfectos de P_6	2
1.3.	La operación de <i>giro</i> para emparejamientos perfectos: dos parejas se intercambian sus elementos.	2
1.4.	La gráfica de giros de emparejamientos de P_6	3
1.5.	K_n para los primeros valores de n	5
2.1.	Un giro de la arista punteada transforma una triangulación en otra.	12
2.2.	$G_T(5)$ es isomorfa a C_5	12
2.3.	Ejemplo de la enumeración recursiva de las triangulaciones de un polígono convexo. Al fijar el triángulo que contiene a la arista p_0p_1 se obtienen dos subpolígonos de tamaño menor que pueden triangularse de manera independiente.	14
2.4.	Arriba, dos triangulaciones adyacentes dibujadas con líneas discontinuas. La diagonal que se gira aparece punteada, los árboles asociados están dibujados encima de ellas. Abajo, los árboles asociados dibujados propiamente. Se indica que ambos son adyacentes bajo la operación de giro de árboles. Los vértices sobre los que se aplican los giros aparecen con trazos discontinuos.	16
2.5.	a) Definición general de rotación en árboles. Los triángulos denotan subárboles. El árbol mostrado podría ser parte de un árbol mayor. b) Rotación en un árbol de ocho vértices. Los vértices externos (hojas) no se muestran.	17

2.6.	Coloreamos cada arista con la etiqueta más pequeña de sus extremos. Diferentes colores se representan con diferentes estilo de linea.	17
2.7.	Descomposición de K_{2n} en n trayectorias hamiltonianas <i>planas</i>	19
2.8.	$G'_T(5)$ es isomorfa a C_{10} . Las etiquetas se indican con diferentes estilos de lineas.	23
2.9.	P_5 dibujado sobre el intervalo $[0, 1]$ de la parábola $y = x^2$	24
2.10.	Una triangulación etiquetada de P_5 . Se muestra la asociación entre puntos y aristas que se obtiene al lanzar un rayo horizontal desde cada punto. . . .	25
2.11.	Al hacer un giro en una triangulación etiquetada, las subtriangulaciones $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ y \mathcal{T}_4 permanecen inalteradas. El único efecto sobre la asociación entre los vértices y las aristas es que p_j y p_k (los vértices intermedios del cuadrilátero que contiene a la arista que se gira) intercambian sus aristas asociadas.	27
3.1.	Un octágono etiquetado canónicamente.	28
3.2.	$G_\Delta(5)$ es isomorfa a C_{10}	29
3.3.	$G_\Delta(4)$	30
3.4.	(a) El efecto de h es trasladar los puntos en posiciones impares a los puntos en posiciones pares (encimándolos), convirtiendo a P_{2k} en P_k . (b) Triángulos adyacentes en G_2 son asociados con triángulos adyacentes en $G_\Delta(k)$	32
3.5.	Un triángulo arbitrario Δ de G_1 tiene a lo más cuatro triángulos adyacentes (pues por definición los triángulos de G_1 necesitan tener un lado sobre la frontera convexa). Es claro que no hay dos vecinos de Δ que sean adyacentes entre si.	33
3.6.	$f(p_i) = \{col(\Delta_{i,i+1})\} \cup \{col(\Delta_{i,i+2})\} \cup \dots \cup \{col(\Delta_{i,n-1})\}$	34
3.7.	Si existen p_i y p_j con valores de f iguales, entonces hay un triángulo $\Delta_{j,k}$ con el mismo color que $\Delta_{i,j}$, y entonces la coloración <i>no</i> es propia.	34
4.1.	Un heptágono etiquetado canónicamente.	36
4.2.	Cuatro trayectorias hamiltonianas geométricas diferentes sobre el heptágono de la figura 4.1	37

4.3. Dos parejas de trayectorias adyacentes sobre el heptágono. Las aristas que se remplazan aparecen delineadas.	37
4.4. Gráfica de trayectorias de P_4 ($G_\Gamma(4)$).	38
4.5. $G_\Gamma(5)$ con sus vértices agrupados por familias \mathcal{T}_i	38
4.6. Caso 1 del Lema 2. No se puede obtener una trayectoria vecina en $G_{0,1}$ remplazando una arista de la frontera convexa.	39
4.7. Caso 2 del Lema 2.	40
4.8. Ilustración del Lema 3.	42