



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

OPERADORES DEL TIPO DE CONVOLUCIÓN
CON SÍMBOLOS OSCILATORIOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

JUAN LORETO HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. YURI KARLOVICH OZOLINSH



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Le agradezco a mis padres, a mis hermanos y a mis amigos por la motivación y ayuda que me brindaron durante el tiempo que estudié el doctorado.

Al Dr. Yuri Karlovich que es un excelente asesor, le agradezco lo mucho que me enseñó y todo el valioso tiempo que me dedicó.

A los sinodales les doy las gracias por haber leído y haber hecho observaciones a esta tesis.

Le agradezco también al Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca de la UNAM por apoyarme con una beca de lugar, a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM (DGEP) que me apoyó con una beca económica complementaria y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme apoyado con una beca económica completa.

Resumen.

En este trabajo estudié los operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos y con símbolos matriciales lentamente oscilatorios en espacios de Lebesgue con pesos de Muckenhoupt. Las entradas de los símbolos matriciales son multiplicadores de Fourier en espacios de Lebesgue con pesos.

Se estableció un criterio de Fredholm y fórmulas del índice para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos en espacios de Lebesgue con pesos para cierta subclase de pesos de Muckenhoupt. También se estudió la invertibilidad de tales operadores con símbolos matriciales casi periódicos en los mismos espacios de Lebesgue. En el caso escalar se obtuvo un criterio de semi-Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-casi periódicos, y para otra subclase de pesos de Muckenhoupt un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-periódicos. Se estableció la teoría de Fredholm para operadores de convolución con símbolos semi-casi periódicos sobre la unión finita de intervalos.

Se obtuvieron condiciones de Fredholm y una fórmula del índice para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales lentamente oscilatorios en espacios de Lebesgue con pesos de Muckenhoupt. Para definir el álgebra de símbolos lentamente oscilatorios que son multiplicadores de Fourier se aplicó la teoría de operadores pseudodiferenciales y de Calderón-Zygmund.

Por último se dio un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos generados por funciones semi-casi periódicas y lentamente oscilatorias en espacios de Lebesgue sin pesos.

Índice

1. Introducción.	1
2. Preliminares.	4
2.1. Definiciones de operadores de convolución y de Wiener-Hopf	4
2.2. Conceptos y propiedades básicas de la teoría de Fredholm	6
2.3. Funciones y matrices casi periódicas y sus factorizaciones	8
2.4. Pesos de Muckenhoupt y multiplicadores de Fourier	11
2.5. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos continuos a trozos en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$	15
2.6. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos en álgebras de Douglas	17
2.7. Operadores límite y espacios de ideales maximales para las álgebras de funciones semi-casi periódicas y lentamente oscilatorias	19
3. Operadores de Wiener-Hopf en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$	23
3.1. Representación de funciones semi-casi periódicas	23
3.2. Aplicaciones del teorema de Bochner-Phillips	25
3.3. Invertibilidad de símbolos de operadores de Wiener-Hopf	29
3.4. Invertibilidad de representaciones casi periódicas	29
3.5. El lema de Sarason y sus aplicaciones	31
3.6. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos casi periódicos	33
3.7. Invertibilidad de representaciones casi periódicas y factorización canónica	34
3.8. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-casi periódicos particulares	35
3.9. Teoría de semi-Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-casi periódicos en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$	38
3.10. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-periódicos en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$	42
4. Operadores de Wiener-Hopf en los espacios $L^p_N(\mathbf{R}, w)$	43
4.1. Representación e invertibilidad de símbolos matriciales semi-casi periódicos	43
4.2. Invertibilidad de símbolos matriciales para operadores de Wiener-Hopf semi- Fredholm	46
4.3. Invertibilidad de representaciones casi periódicas en el caso matricial	47
4.4. Reducción de los símbolos matriciales semi-casi periódicos a los símbolos matri- ciales continuos en $\overline{\mathbf{R}}$	48
4.5. Teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos: AP asíntotas factorizables	53
4.6. Un criterio de invertibilidad para operadores de Wiener-Hopf con símbolos ma- triciales casi periódicos: pesos de Muckenhoupt especiales.	55
4.7. Una aplicación de los operadores pseudodiferenciales	57
4.8. Teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos: pesos de Muckenhoupt especiales.	60
4.9. Operadores de convolución con símbolos semi-casi periódicos sobre la unión finita de intervalos	64

5. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales en	
$[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$	66
5.1. Operadores de convolución desde el punto de vista de operadores pseudodiferenciales	66
5.2. Símbolos lentamente oscilatorios y multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbf{R}, w)$	77
5.3. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SO_{p,w}]_{N \times N}$	79
5.4. Estudio local de la propiedad de Fredholm	82
5.5. Teoría de Fredholm	87
6. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos generados por	
matrices semi-casi periódicas y lentamente oscilatorias	92
6.1. El ideal \mathcal{K} y el álgebra $\mathbf{alg}(\operatorname{sgn} x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$	92
6.2. Media geométrica para funciones matriciales en $[AP_p]_{N \times N}$	95
6.3. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos en SAP_p	98
6.4. Criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SO_p, SAP_p]$	102
6.5. Propiedad de Fredholm y factorización AP generalizada	104
6.6. Operadores de convolución con símbolos en $[SO, SAP]$ sobre la unión finita de intervalos	106

1. Introducción.

Sea $W^0(a)$ el operador de convolución que es acotado en el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}, w)$ con peso w . Si γ es \mathbf{R} , $[0, \lambda]$ o la unión de intervalos de \mathbf{R} y χ_γ es la función característica de γ entonces la restricción del operador $W^0(a)$ sobre el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$, $\chi_\gamma W^0(a)$ se llama operador del tipo de convolución sobre γ con símbolo a . Los operadores de Wiener-Hopf son operadores de este tipo.

Los operadores del tipo de convolución tienen muchas aplicaciones en la física matemática [31], [32], [49], [66]. Es conocido que los operadores de convolución sobre intervalos finitos o unión de intervalos se presentan en el estudio de ciertos problemas elípticos de frontera asociados con la difracción de ondas acústicas y electromagnéticas por obstáculos en forma de bandas o arreglos de bandas. Los operadores del tipo de convolución sobre intervalos finitos se reducen a operadores del tipo de convolución sobre semiejes con símbolos matriciales casi periódicos, esto es, a operadores integrales no locales que tienen traslaciones con respecto a la variable dual (en el sentido de Fourier). Mas aún, el estudio de problemas de difracción del tipo de Sommerfeld por semiplanos, escalonados o no, también conducen a operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos (ver [53] y las referencias mencionadas ahí). Por lo tanto el estudio de los operadores del tipo de convolución con símbolos oscilatorios es crucial para progresar en la solución de los problemas de difracción mencionados.

Los trabajos pioneros sobre ecuaciones de Wiener-Hopf se remontan a Wiener y Hopf [78]. El artículo de síntesis [77] de Widom es una bonita introducción a las ideas básicas de Wiener y Hopf. Fueron Krein y Gohberg quienes realizaron el álgebra de Banach detrás de los operadores de Wiener-Hopf y la factorización de Wiener-Hopf y por lo tanto sentaron las bases de la teoría actual de Wiener-Hopf.

Los primeros en estudiar los operadores de convolución con símbolos en $AP + C_0(\mathbf{R})$ fueron Gohberg y Feldman [29], [30], [31] y Coburn y Douglas [18]. El problema de desarrollar una teoría que comprendiera ambos símbolos, los continuos a trozos y los casi periódicos fue sugerida a Donald Sarason por Israel Gohberg, esto condujo a la creación de las funciones semi-casi periódicas. Sarason [68] resolvió la teoría de Fredholm correspondiente a los operadores de Wiener-Hopf con tales símbolos. El hecho de que los operadores de convolución sobre un intervalo son equivalentes a operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $\mathbf{C}^{2 \times 2}$ ha sido conocido por mucho tiempo. Probablemente esta idea apareció primero en el trabajo [26]. También ver Novokshenov [55] y Paltsev [56]. Gohberg y Krein fueron los primeros en entender el trasfondo algebraico de Banach de la teoría de Fredholm de los operadores de Wiener-Hopf con símbolos continuos. El caso de las funciones matriciales continuas a trozos en el espacio L^2 fue tratado completamente por Gohberg y Krupnik [33], [34].

La teoría clásica de multiplicadores de Fourier en espacios L^p sin pesos se puede encontrar en [36]. Para pesos potenciales ver [23] y [64]. La desigualdad de Stechkin se encuentra en [71], para pesos potenciales fue establecida por Duduchava en [23] y para pesos generales de Muckenhoupt se encuentra en [16].

La teoría de Fredholm de operadores de Wiener-Hopf con símbolos continuos a trozos en espacios L^p sin pesos la inicio Duduchava en una serie de artículos comenzando con [21]. Una exposición completa está en los trabajos de Duduchava [22] y [23]. El paso a pesos potenciales está en el artículo [69] de Schneider, y para pesos generales de Muckenhoupt se encuentra en [16].

La admisión de oscilaciones casi periódicas en los símbolos de operadores integrales clásicos

de Toeplitz y de Wiener–Hopf aporta cambios cualitativos en propiedades de tales operadores. Por ejemplo, a diferencia de las funciones continuas a trozos existen sucesiones de funciones semi-casi periódicas convergentes uniformemente y tales que las sucesiones de los espectros de los operadores de Toeplitz o de Wiener–Hopf correspondientes no convergen en la métrica de Hausdorff al espectro del operador límite [14]. Además, los símbolos de tales operadores tienen dimensión infinita. La segunda propiedad explica la aparición de dificultades en el estudio de tales operadores.

Hasta ahora los problemas de invertibilidad de operadores integrales singulares con coeficientes matriciales casi periódicos y sus duales, los operadores de Wiener–Hopf con símbolos oscilatorios, han sido considerados principalmente sobre la clase de Wiener de coeficientes o símbolos casi periódicos con valores matriciales. Estos problemas sobre la invertibilidad están íntimamente relacionados con los problemas fundamentales de factorización de matrices casi periódicas en las clases de matrices de Bohr y de Besicovitch ([45], [46] y [39]). Se han obtenido algunos resultados sobre algoritmos de factorización casi periódica, factorizaciones explícitas y teoremas de existencia en [45] y [14] sobre la base de la teoría de fracciones continuas, haces de matrices, de ciertos algoritmos de reducción. Las aplicaciones de los problemas de interpolación y de la corona de Carleson en el problema de factorización canónica para funciones matriciales casi periódicas o, más generalmente, acotados y medibles, y por lo tanto, a la invertibilidad de operadores del tipo de convolución asociados fueron elaboradas en [5]–[4].

La teoría de Fredholm para operadores integrales singulares con coeficientes matriciales semi-casi periódicos, y para operadores del tipo de convolución con símbolos del mismo tipo, ha sido estudiada en [12], [13], [39], [45] y [7], [39], [45], [46], respectivamente; esto es, en el caso de asíntotas casi periódicas en los puntos de discontinuidad de los coeficientes o los símbolos. Tales operadores fueron estudiados en espacios de Lebesgue sin pesos o sólo con pesos potenciales.

Los resultados y técnicas correspondientes se encuentran en el libro [14], publicado en Birkhäuser en el año 2002.

En este trabajo se estudian tales operadores en espacios de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}, w)$ con pesos w , para cierta subclase de pesos de Muckenhoupt. También se estudia la propiedad de Fredholm de operadores del tipo de convolución con símbolos matriciales oscilatorios generados por matrices semi-casi periódicas y matrices lentamente oscilatorias.

La aparición de pesos trae serias dificultades en el estudio de tales operadores. La principal dificultad está relacionada con el hecho de que los operadores de translación U_λ dados por $(U_\lambda f)(x) = f(x - \lambda)$ para $\lambda \in \mathbf{R}$, dejan de ser isométricos en los espacios $L^p(\mathbf{R}, w)$, y en general no podemos garantizar su acotamiento uniforme. La propiedad de todos los operadores U_λ de ser isométricos en todos los espacios $L^p(\mathbf{R})$ ($1 < p < \infty$) nos permite probar la equivalencia de la invertibilidad de operadores de Wiener–Hopf con símbolos matriciales casi periódicos y la existencia de factorización canónica casi periódica para los símbolos correspondientes (ver [14, Capítulos 9 y 19]). Otro obstáculo está relacionado con la aparición de espectros locales masivos para los operadores de Wiener–Hopf.

Para extender las clases de símbolos, operadores y espacios se necesita explotar la teoría de operadores pseudodiferenciales (ver [72]–[76], [63], [10]) y técnicas de operadores límite (ver [51], [11], [63]).

La tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2 recordamos algunos conceptos y resultados básicos necesarios para comprender el material presentado. Se definen los operadores del tipo de convolución y sus símbolos, se establecen algunas propiedades generales de la teoría de Fredholm en espacios de Banach, se definen las clases AP y SAP de símbolos casi periódicos y

semi-casi periódicos respectivamente, y se presentan algunas propiedades relacionadas con esos símbolos tales como factorización AP y APW y la media geométrica. En este mismo capítulo se introducen los conceptos de pesos de Muckenhoupt y multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbf{R}, w)$, se define y se caracteriza la subclase $A_p^0(\mathbf{R})$ de pesos de Muckenhoupt relacionada con el hecho de que las funciones semi-casi periódicas a sean multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbf{R}, w)$, $a \in M_{p,w}$, y se expone la teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf $W(a)$ con símbolos continuos a trozos ($a \in PC_{p,w}$) en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ ($N \in \mathbf{N}$). También se presentan algunos resultados nuevos relacionados con la propiedad de Fredholm de operadores de Wiener-Hopf con símbolos en las álgebras de Douglas $[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$ generadas por funciones matriciales con entradas en $C_{p,w}(\mathbf{R})$ y $H_{\pm}^{\infty} \cap M_{p,w}$. Al final del capítulo 2 se estudia la teoría de operadores límite y espacios de ideales maximales que será utilizada en las secciones posteriores.

En el capítulo 3 se presentan resultados para el caso escalar ($N = 1$). Se establece un análogo para espacios con pesos de la representación de Sarason de funciones semi-casi periódicas, utilizando el teorema de Bochner-Phillips se prueba que las álgebras $AP_{p,w}$ y $SAP_{p,w}$ son inversamente cerradas en las álgebras AP y SAP respectivamente, se prueba la invertibilidad de símbolos en $SAP_{p,w}$ de operadores de Wiener-Hopf semi-Fredholm y la invertibilidad de las correspondientes representaciones casi periódicas para operadores de Wiener-Hopf que son Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, también se establece y se aplica la versión con pesos del lema de Sarason [67]. En este mismo capítulo se obtiene un análogo para espacios con pesos del teorema de Duduchava-Saginashvili [24] (también ver [14, Teorema 19.15]), esto es, se establece un criterio de semi-Fredholm y fórmulas de índice para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $SAP_{p,w}$ y símbolos semi-periódicos ($SP_{p,w}^{\mu}$) en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. También se obtiene un criterio de invertibilidad para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $AP_{p,w}$ en términos de mociones medias de símbolos, y para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $APW_{p,w}$ en términos de la factorización canónica $APW_{p,w}$ de sus símbolos.

En el capítulo 4 se generalizan algunos resultados del capítulo 3 al caso matricial ($N > 1$). Se construyen teorías de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ bajo la condición de que las representaciones casi periódicas en $\pm\infty$ de los símbolos sean $AP_{p,w}$ factorizables, y también para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ que tienen representaciones casi periódicas en $[APW_{p,w}]_{N \times N}$ y se satisface la condición de que los logaritmos de pesos de Muckenhoupt en $A_p^0(\mathbf{R})$ oscilen lentamente en ∞ en el sentido de [20]. También en este capítulo, aplicando resultados de [40] y [41] sobre operadores pseudodiferenciales con símbolos no regulares, se obtienen criterios de invertibilidad y de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales casi periódicos y semi-casi periódicos respectivamente. Estos criterios esencialmente están relacionados con la factorización canónica APW de las representaciones casi periódicas de los símbolos. Al final de esta sección se presenta la teoría de Fredholm para operadores de convolución con símbolos semi-casi periódicos sobre la unión finita de intervalos.

Los resultados de los capítulos 2–4 fueron publicados en [42].

En el capítulo 5 se estudian los operadores de Wiener-Hopf $W(a)$ con símbolos en el álgebra $[SO_{p,w}, C_{p,w}(\mathbf{R})]_{N \times N}$ generada por matrices en $[SO_{p,w}]_{N \times N}$ y $[C_{p,w}(\mathbf{R})]_{N \times N}$ en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ con pesos de Muckenhoupt $w \in A_p(\mathbf{R})$. A diferencia de los capítulos 3 y 4 donde las oscilaciones son casi periódicas, aquí se consideran oscilaciones de otro tipo: oscilaciones lentas. Las álgebras de operadores de convolución en los espacios $L_N^p(\mathbf{R})$ sin pesos, que son generadas por los operadores aI de multiplicación por matrices $a \in [SO, PC]_{N \times N}$ y por los operadores de convolución $W^0(b)$ con símbolos $b \in [SO_p, PC_p]_{N \times N}$, fueron investigados en [2]–

[3]. En este capítulo los operadores de Wiener-Hopf son estudiados en espacios de Lebesgue con pesos. Para esto se estudian los operadores de convolución desde el punto de vista de los operadores pseudodiferenciales aplicando estimaciones puntuales [1], la teoría de operadores pseudodiferenciales y operadores de Calderón-Zygmund en los espacios de Lebesgue con pesos de Muckenhoupt (ver [72], [40], [41]) y la teoría de operadores límite (ver [51], [11], [63]). Sobre la base de tales herramientas se define el álgebra de Banach $SO_{p,w}$ de símbolos lentamente oscilatorios que son multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbf{R}, w)$, se caracteriza su espacio de ideales maximales y se da un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con tales símbolos en el caso matricial. Finalmente en este capítulo se dan condiciones suficientes de Fredholm y una fórmula de índice para operadores de Wiener-Hopf $W(a)$ con símbolos $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ para pesos de Muckenhoupt arbitrarios y fue elaborado un criterio de Fredholm en el caso $w = |x|^\alpha$ ($-1/p < \alpha < 1 - 1/p$).

Los resultados del capítulo 5 fueron enviados para su publicación (ver [43]).

El capítulo 6 es dedicada al estudio de operadores de Wiener-Hopf $W(a)$ con símbolos en el álgebra $[SO_p, SAP_p]$, es decir, con oscilaciones de ambos tipos: casi periódicas y lentas. Los operadores de Toeplitz con símbolos matriciales $a \in [SO, SAP]_{N \times N}$ fueron investigados en [5]. También en el capítulo 6, se define la media geométrica para funciones matriciales en $[AP_p]_{N \times N}$, se da un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en el álgebra generada por funciones lentamente oscilatorias y por funciones semi-casi periódicas en espacios de Lebesgue sin pesos $L^p(\mathbf{R}_+)$. También para $p = 2$ se da un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SO, SAP]_{N \times N}$ en términos de factorización AP generalizada y se da un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SO, SAP]$ sobre la unión finita de intervalos.

2. Preliminares.

2.1. Definiciones de operadores de convolución y de Wiener-Hopf

Un *operador de convolución* A en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R})$ está dado por la fórmula

$$(Af)(t) = \int_{\mathbf{R}} k(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

Se dice que la función $k \in L^2(\mathbf{R})$ es el *núcleo de convolución* de A . Denotemos por $\mathcal{F} : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ a la *transformada de Fourier*,

$$(\mathcal{F}f)(x) := \hat{f}(x) := \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{itx} dt, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.2)$$

y sea $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ la inversa de \mathcal{F} ,

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} g(x)e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbf{R}.$$

El operador (2.1) puede escribirse formalmente como

$$A = \mathcal{F}^{-1} \hat{k} \mathcal{F} \quad (2.3)$$

o equivalentemente, $(\hat{A}f)(x) = \hat{k}(x)\hat{f}(x)$, $x \in \mathbf{R}$. La función \hat{k} es llamada el *símbolo* del operador (2.1). Dada una función $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, denotamos por aI al operador de multiplicación por a en $L^2(\mathbf{R})$:

$$aI : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}), f \mapsto af.$$

Obviamente, aI es acotado en $L^2(\mathbf{R})$ y $\|aI\| = \|a\|_\infty$. En el caso que aI siga a otro operador, digamos X , omitimos la I y abreviamos aIX como aX . Para $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, definimos el operador $W^0(a)$ por

$$W^0(a) : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}), f \mapsto \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}f.$$

Debido a (2.1) y (2.3) nos referimos al operador $W^0(a)$ como el *operador de convolución con símbolo a* .

Denotemos por $C(\mathbf{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas en \mathbf{R} (con valores complejos) y sean $BC(\mathbf{R}) := C(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ las funciones acotadas y continuas en \mathbf{R} . Denotamos por $C(\dot{\mathbf{R}})$ a las funciones $a \in BC(\mathbf{R})$ para las cuales los dos límites

$$a(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x), \quad a(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)$$

existen y coinciden; el valor común de estos límites es denotado por $a(\infty)$. Por último, $C_0(\dot{\mathbf{R}})$ es la colección de todas las funciones $a \in C(\dot{\mathbf{R}})$ para las cuales $a(\infty) = 0$. Claramente, $BC(\mathbf{R})$, $C(\dot{\mathbf{R}})$ y $C_0(\dot{\mathbf{R}})$ son C^* -subálgebras de $L^\infty(\mathbf{R})$.

Sea $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de todos operadores lineales acotados en un espacio de Banach X .

Sea $\mathbf{R}_+ := (0, \infty)$ los reales positivos. Extendiendo las funciones en $L^2(\mathbf{R}_+)$ por cero en todo \mathbf{R} , podemos considerar $L^2(\mathbf{R}_+)$ como un subespacio de $L^2(\mathbf{R})$. Denotamos por χ_+ a la función característica de \mathbf{R}_+ y también a la proyección canónica de $L^2(\mathbf{R})$ en $L^2(\mathbf{R}_+)$:

$$\chi_+ : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}_+), f \mapsto \chi_+f.$$

Para $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, la compresión del operador de convolución $W^0(a) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}))$ a $L^2(\mathbf{R}_+)$ es denotado por $W(a)$ y es llamado el *operador de Wiener-Hopf con símbolo a* . Por lo tanto

$$W(a) : L^2(\mathbf{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbf{R}_+), f \mapsto \chi_+W^0(a)f.$$

El mapeo $W : L^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}_+))$, $a \mapsto W(a)$, es obviamente lineal y continuo. Más aún, se puede probar que es una isometría, i.e.,

$$\|W(a)\| = \|a\|_\infty \text{ para cada } a \in L^\infty(\mathbf{R}).$$

Sin embargo, a diferencia de W^0 , el mapeo W no es un homomorfismo de álgebras. Por ejemplo, $W(e_1)W(e_{-1})$ es la multiplicación por la función característica de $(1, \infty)$, donde $e_1(x) = e^{ix}$ y $e_{-1}(x) = e^{-ix}$, mientras que $W(e_1e_{-1}) = I$.

Sea $\lambda \in (0, \infty)$ y $\chi_{(0,\lambda)}$ la función característica del intervalo $(0, \lambda)$. Identificamos $L^2(0, \lambda)$ con $\chi_{(0,\lambda)}L^2(\mathbf{R}_+)$ y consideramos a $L^2(0, \lambda)$ como un subespacio de $L^2(\mathbf{R}_+)$. Para $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, el *operador de convolución (finito)* $W_\lambda(a)$ es definido por

$$W_\lambda(a) : L^2(0, \lambda) \rightarrow L^2(0, \lambda), f \mapsto \chi_{(0,\lambda)}W(a)f.$$

Si $I \subset \mathbf{R}$ es cualquier intervalo de longitud λ , entonces la compresión de $W^0(a)$ a $L^2(I)$ puede ser transformada a $W_\lambda(a)$ por medio de un simple cambio de variables. Dado un subconjunto

medible E de \mathbf{R} , denotamos por $L_N^2(E)$ a la suma directa de N copias de $L^2(E)$. Representamos por $L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$ al álgebra de todas las funciones matriciales $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^{N \times N}$ con entradas en $L^\infty(\mathbf{R})$. Si \mathcal{A} es un subálgebra de $L^\infty(\mathbf{R})$, denotamos por $\mathcal{A}_{N \times N}$ o por $[\mathcal{A}]_{N \times N}$ a las funciones matriciales $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^{N \times N}$ cuyas entradas pertenecen a \mathcal{A} . Para $a = (a_{jk})_{j,k=1}^N \in L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$, el operador de multiplicación aI , el operador de convolución $W^0(a)$, el operador de Wiener-Hopf $W(a)$ y el operador de convolución finito $W_\lambda(a)$ son definidos en forma natural como:

$$\begin{aligned}
aI : L_N^2(\mathbf{R}) &\rightarrow L_N^2(\mathbf{R}), & (f_j)_{j=1}^N &\mapsto \left(\sum_{k=1}^N a_{jk} f_k \right)_{j=1}^N, \\
W^0(a) : L_N^2(\mathbf{R}) &\rightarrow L_N^2(\mathbf{R}), & (f_j)_{j=1}^N &\mapsto \left(\sum_{k=1}^N W^0(a_{jk}) f_k \right)_{j=1}^N, \\
W(a) : L_N^2(\mathbf{R}_+) &\rightarrow L_N^2(\mathbf{R}_+), & (f_j)_{j=1}^N &\mapsto \left(\sum_{k=1}^N W(a_{jk}) f_k \right)_{j=1}^N, \\
W_\lambda(a) : L_N^2(0, \lambda) &\rightarrow L_N^2(0, \lambda), & (f_j)_{j=1}^N &\mapsto \left(\sum_{k=1}^N W_\lambda(a_{jk}) f_k \right)_{j=1}^N.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

En otras palabras, pensamos en $L_N^2(E)$ como un espacio de columnas y en el operador como un operador matricial de $N \times N$ que actúa en este espacio de columnas.

2.2. Conceptos y propiedades básicas de la teoría de Fredholm

Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$. El *núcleo* $\text{Ker } A$ y la *imagen* $\text{Im } A$ de A son definidos por

$$\text{Ker } A := \{x \in X : Ax = 0\}, \quad \text{Im } A := \{Ax : x \in X\}.$$

Ambos $\text{Ker } A$ e $\text{Im } A$ son subespacios lineales de X , y $\text{Ker } A$ siempre es cerrado. Se dice que el operador A es *normalmente soluble* si $\text{Im } A$ es un subespacio cerrado de X . Si A es normalmente soluble, el *conúcleo* $\text{Coker } A$ es definido por

$$\text{Coker } A := X/\text{Im } A.$$

Para un operador A normalmente soluble, definimos

$$n(A) := \dim \text{Ker } A, \quad d(A) := \dim \text{Coker } A. \tag{2.5}$$

Notemos que $n(A)$ y $d(A)$ están en $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, y además

$$n(A) = d(A^*), \quad d(A) = n(A^*)$$

donde $A^* \in \mathcal{B}(X^*)$ es el operador adjunto de A . Dos operadores $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ son *equivalentes* si ninguno de ellos es normalmente soluble o ambos A y B son normalmente solubles y $n(A) = n(B)$ y $d(A) = d(B)$. Supongamos que $A \in \mathcal{B}(X)$ es normalmente soluble. El operador A es llamado *Fredholm* si $n(A)$ y $d(A)$ son finitos, y en ese caso el *índice* de A es definido como

$$\text{Ind } A := n(A) - d(A).$$

Se dice que el operador A es *propriadamente n -normal* si $n(A) < \infty$ y $d(A) = \infty$, y *propriadamente d -normal* si $d(A) < \infty$ y $n(A) = \infty$. Decimos que dos operadores $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ son *débilmente Φ -equivalentes* si ninguno de ellos es normalmente soluble o ambos A y B

son propiamente n -normal o bien propiamente d -normal o bien Fredholm. Denotamos por $\Phi(X)$, $\Phi_n(X)$ y $\Phi_d(X)$ al conjunto de todos los operadores en $\mathcal{B}(X)$ que son Fredholm, propiamente n -normales y propiamente d -normales, respectivamente. Los operadores en $\Phi(X) \cup \Phi_n(X)$ y $\Phi(X) \cup \Phi_d(X)$ son llamados n -normales y d -normales, respectivamente. Decimos que los operadores en $\Phi(X) \cup \Phi_n(X) \cup \Phi_d(X)$ son *semi-Fredholm*, y los que están en $\Phi_n(X) \cup \Phi_d(X)$ son *propiamente semi-Fredholm*. Definimos

$$\text{Ind } A = \begin{cases} -\infty, & \text{para } A \in \Phi_n(X), \\ +\infty, & \text{para } A \in \Phi_d(X). \end{cases}$$

Ahora recordemos algunas propiedades de operadores semi-Fredholm. Sea $\mathcal{K}(X)$ la colección de todos los operadores compactos en X . Notemos que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(X)$. Se puede mostrar que $A \in \Phi(X)$ si y sólo si la clase $A + \mathcal{K}(X)$ es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. Si $B + \mathcal{K}(X)$ es el inverso de $A + \mathcal{K}(X)$ entonces B es llamado un *regularizador* de A . Definimos el *espectro esencial* de A , $\text{sp}_{\text{ess}} A$, como el espectro de $A + \mathcal{K}(X)$ en $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$, i.e.,

$$\text{sp}_{\text{ess}} A := \{\lambda \in \mathbf{C} : A - \lambda I \text{ no es Fredholm}\}.$$

El $\text{sp}_{\text{ess}} A$ es un subconjunto del espectro de A , $\text{sp } A$, compacto y no vacío. Un operador $A \in \mathcal{B}(X)$ se llama *Fredholm-izquierdo* (respectivamente *Fredholm-derecho*) si existe un $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $BA - I$ (resp. $AB - I$) es compacto.

Teorema 2.1 *Los conjuntos $\Phi(X)$, $\Phi_n(X)$ y $\Phi_d(X)$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}(X)$ y la función*

$$\text{Ind} : \Phi(X) \cup \Phi_n(X) \cup \Phi_d(X) \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

es constante en las componentes conexas de $\Phi(X) \cup \Phi_n(X) \cup \Phi_d(X)$. Más aún, si $A \in \mathcal{B}(X)$ es semi-Fredholm, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $n(A + C) \leq n(A)$, $d(A + C) \leq d(A)$, siempre que $C \in \mathcal{B}(X)$ y $\|C\| \leq \epsilon$.

Teorema 2.2 *Si $A \in \Phi(X)$ ($\Phi_n(X)$, $\Phi_d(X)$) y $K \in \mathcal{K}(X)$, entonces $A + K \in \Phi(X)$ ($\Phi_n(X)$, $\Phi_d(X)$) e $\text{Ind}(A + K) = \text{Ind } A$.*

Teorema 2.3 *Si $A, B \in \Phi(X) \cup \Phi_n(X)$, ($\Phi(X) \cup \Phi_d(X)$) entonces $AB \in \Phi(X) \cup \Phi_n(X)$, ($\Phi(X) \cup \Phi_d(X)$) e $\text{Ind}(AB) = \text{Ind } A + \text{Ind } B$.*

Para consultar las demostraciones de los teoremas escritos ver, por ejemplo, [35], [31].

Lema 2.4 *Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A es n -normal;

ii) existe un operador compacto K y un $\delta > 0$ tal que

$$\|Ax\| + \|Kx\| \geq \delta\|x\| \text{ para todo } x \in X;$$

iii) existe un número finito de operadores compactos K_1, \dots, K_n y un $\delta > 0$ tal que

$$\|Ax\| + \sum_{j=1}^n \|K_j x\| \geq \delta\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

La demostración se encuentra en [50] y [62, sección 1.3.2].

2.3. Funciones y matrices casi periódicas y sus factorizaciones

Consideremos definiciones importantes de funciones escalares y matriciales casi periódicas y también de sus factorizaciones (ver el libro [14]).

Definición 2.5 *El subálgebra más pequeño de $L^\infty(\mathbf{R})$ que contiene todas las funciones e_λ definidas por, $e_\lambda(x) := e^{i\lambda x}$ ($\lambda, x \in \mathbf{R}$) es denotado por AP y llamado el álgebra de las funciones casi periódicas:*

$$AP := \text{alg}_{L^\infty(\mathbf{R})}\{e_\lambda : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Una función $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ que puede ser escrita como una suma finita de la forma $p = \sum r_j e_{\lambda_j}$, con $r_j \in \mathbf{C}$ y $\lambda_j \in \mathbf{R}$ es llamada *polinomio casi periódico*. La colección de los polinomios casi periódicos es denotada por AP^0 . Obviamente AP es la cerradura de AP^0 en $L^\infty(\mathbf{R})$ y AP es un C^* -subálgebra de $L^\infty(\mathbf{R})$.

Denotamos por $PC := PC(\dot{\mathbf{R}})$ al C^* -álgebra de todas las funciones acotadas y continuas a trozos en $\dot{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Por definición, $a \in PC$ si y sólo si $a \in L^\infty(\mathbf{R})$ y los límites unilaterales

$$a(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} a(x), \quad a(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} a(x)$$

existen para cada $x_0 \in \dot{\mathbf{R}}$; por convención,

$$a(\infty - 0) := \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x), \quad a(\infty + 0) := \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x).$$

Definimos las subálgebras de PC , $C(\overline{\mathbf{R}}) := C(\mathbf{R}) \cap PC$ y $PC_0 := \{a \in PC : a(\pm\infty) = 0\}$.

Definición 2.6 *El C^* -álgebra SAP de todas las funciones semi-casi periódicas en \mathbf{R} es definido como el menor subálgebra cerrada de $L^\infty(\mathbf{R})$ que contiene AP y $C(\overline{\mathbf{R}})$:*

$$SAP := \text{alg}_{L^\infty(\mathbf{R})}(AP, C(\overline{\mathbf{R}})).$$

Proposición 2.7 *Sea $A \subset (0, \infty)$ un conjunto no acotado y sea $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de intervalos $I_\alpha \subset \mathbf{R}$ tal que $|I_\alpha| = y_\alpha - x_\alpha \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$. Si $a \in AP$, entonces el límite*

$$M(a) := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} a(x) dx$$

existe, es finito y es independiente de la elección de la familia $\{I_\alpha\}$.

Proposición 2.8 *Si $a \in AP$ entonces el conjunto*

$$\Omega(a) := \{\lambda \in \mathbf{R} : M(ae_{-\lambda}) \neq 0\}$$

es a lo más numerable.

Definición 2.9 *Sea $a \in AP$. El número $M(a)$ dado por la Proposición 2.7 es llamado el valor principal de Bohr o simplemente valor principal de a . El conjunto $\Omega(a)$ de la Proposición 2.8 es el espectro de Bohr-Fourier de a .*

Sea $G\mathcal{A}$ el grupo de elementos invertibles de un álgebra \mathcal{A} con unidad.

Teorema 2.10 (Bohr) Si $a \in GAP$, entonces existe un número real $\kappa(a)$ y una función $b \in AP$ tal que

$$a(x) = e^{i\kappa(a)x} e^{b(x)} \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}. \quad (2.6)$$

Definición 2.11 Para $a \in GAP$, el número $\kappa(a)$ cuya existencia es garantizada por el Teorema 2.10 está determinado de forma única y es llamado la *moción media* de a . El número

$$\mathbf{d}(a) := e^{M(b)}$$

es llamado el *valor geométrico medio* de a .

Sea $H^\infty(\mathbf{C}_\pm)$ el conjunto de todas las funciones analíticas en $\mathbf{C}_\pm = \{z \in \mathbf{C} : \pm \text{Im } z > 0\}$. Denotamos por H_\pm^∞ al conjunto de todas las funciones $a \in L^\infty(\mathbf{R})$ que son límites no tangenciales de funciones en $H^\infty(\mathbf{C}_\pm)$. Se sabe que H_\pm^∞ son subálgebras cerradas de $L^\infty(\mathbf{R})$.

El conjunto de todas las funciones f que son analíticas en \mathbf{C}_\pm y satisfacen

$$\sup_{\pm y > 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x + iy)|^p dy < \infty$$

es denotado por $H^p(\mathbf{C}_\pm)$. Representamos por H_\pm^p al conjunto de funciones en $L^p(\mathbf{R})$ que son límites no tangenciales de funciones en $H^p(\mathbf{C}_\pm)$. Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces H_\pm^p son subespacios cerrados de $L^p(\mathbf{R})$.

Definimos

$$AP^+ := \text{alg}_{L^\infty(\mathbf{R})}\{e_\lambda : \lambda \geq 0\}, \quad AP^- := \text{alg}_{L^\infty(\mathbf{R})}\{e_\lambda : \lambda \leq 0\}. \quad (2.7)$$

AP^\pm son subálgebras cerradas de $AP \cap H_\pm^\infty$. Más aún $AP^- \cap AP^+ = \mathbf{C}$ y

$$\Omega(a) \subset [0, \infty) \text{ para } a \in AP^+, \quad \Omega(a) \subset (-\infty, 0] \text{ para } a \in AP^-.$$

Definición 2.12 Una función matricial $a \in GAP_{N \times N}$ admite una factorización derecha AP si puede ser representada en la forma

$$a(x) = a_-(x)d(x)a_+(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}, \quad (2.8)$$

con

$$a_- \in GAP_{N \times N}^-, \quad a_+ \in GAP_{N \times N}^+ \quad (2.9)$$

y

$$d(x) = \text{diag}(e^{i\lambda_1 x}, \dots, e^{i\lambda_N x}), \quad \lambda_j \in \mathbf{R}. \quad (2.10)$$

Una factorización derecha AP con $d(x) = I$ es llamada *factorización derecha canónica* AP . Si reemplazamos (2.8) por

$$a(x) = a_+(x)d(x)a_-(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}, \quad (2.11)$$

hablamos de *factorización izquierda* AP y *factorización izquierda canónica* AP .

Definición 2.13 Se sabe [14, Teorema 8.2] que si $a \in GAP_{N \times N}$ admite una factorización derecha AP $a = a_- da_+$, $d = \text{diag}(e_{\lambda_j})$, entonces los números $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbf{R}$ son, salvo rearrreglos, independientes de la elección particular de la factorización. Llamamos a $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ los índices derechos AP de a . Entonces existe una factorización derecha AP tal que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$; definimos

$$\kappa(a) := (\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N.$$

Análogamente si $a \in GAP_{N \times N}$ admite una factorización izquierda AP $a = a_+ fa_-$, $f = \text{diag}(e_{\mu_j})$, entonces los números μ_1, \dots, μ_N son únicamente determinados si pedimos que $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_N$. Llamamos a μ_1, \dots, μ_N los índices izquierdos AP de a y escribimos

$$\tilde{\kappa}(a) := (\mu_1, \dots, \mu_N), \quad \mu_1 \geq \dots \geq \mu_N.$$

Proposición 2.14 Si $a \in GAP_{N \times N}$ tiene factorización derecha AP con índices derechos AP iguales,

$$a = a_- da_+, \quad d(x) = \text{diag}(e^{i\lambda x}, \dots, e^{i\lambda x}),$$

entonces la matriz

$$\mathbf{d}(a) = M(a_-)M(a_+) \in \mathbf{C}^{N \times N}$$

es independiente de la elección particular de la factorización derecha AP.

Definición 2.15 La matriz $\mathbf{d}(a)$ dada por la Proposición 2.14 para cada función matricial $a \in GAP_{N \times N}$ con factorización derecha AP y con índices derechos AP iguales, es llamada la media geométrica derecha de a . Análogamente se define la media geométrica izquierda para $a \in GAP_{N \times N}$ con factorización izquierda AP y con índices izquierdos AP iguales.

Denotamos por APW las funciones $a \in AP$ que pueden ser representadas en la forma

$$a(x) = \sum_j a_j e^{i\lambda_j x}, \quad \lambda_j \in \mathbf{R}, \quad \|a\|_W := \sum_j |a_j| < \infty,$$

donde $a_j \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable de j 's. Es fácil ver que APW es un álgebra de Banach con las operaciones algebraicas puntuales y la norma $\|\cdot\|_W$. Representamos por APW^+ y APW^- a los conjuntos de todas las funciones $a \in APW$ para las cuales $\Omega(a) \in [0, \infty)$ y $\Omega(a) \in (-\infty, 0]$, respectivamente. Obviamente, APW^\pm son subálgebras cerradas de APW.

La factorización (2.8) es llamada una *factorización derecha APW*, si $a_\pm \in GAPW_{N \times N}^\pm$. Una factorización derecha APW con $d(x) = I_N$ es llamada una *factorización derecha canónica APW*.

El siguiente resultado puede ser consultado en [14, Lema 10.2].

Lema 2.16 Si $a_1, \dots, a_M \in AP_{N \times N}^0$ es una colección finita de matrices polinomiales casi periódicas, entonces existe una sucesión $\{h_n\} \subset \mathbf{R}$ tal que $h_n \rightarrow +\infty$ y $\|(a_m)_{h_n} - a_m\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $m \in \{1, \dots, M\}$, donde $(a_m)_{h_n}(x) = a_m(x + h_n)$ y $\|a\|_\infty = \|aI\|_{\mathcal{B}(L_N^2(\mathbf{R}))}$.

2.4. Pesos de Muckenhoupt y multiplicadores de Fourier

Sea E un subconjunto conexo de \mathbf{R} . Una función medible $w : E \rightarrow [0, \infty]$ es llamada un *peso* si $w^{-1}(\{0, \infty\})$ tiene medida (de Lebesgue) cero. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(E, w)$ al espacio de Lebesgue usual con la norma

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_E |f(x)|^p w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

El operador $P = \mathcal{F}\chi_+\mathcal{F}^{-1}$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbf{R})$ sobre H_+^2 , donde H_+^2 se puede identificar con el espacio de Hardy de funciones analíticas en el semiplano superior que tienen límites angulares en \mathbf{R} de la clase $L^2(\mathbf{R})$. Mientras que el operador $Q = \mathcal{F}\chi_-\mathcal{F}^{-1}$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbf{R})$ sobre H_-^2 . Denotamos por $A_p(\mathbf{R})$ al conjunto de todos los pesos w en \mathbf{R} para los cuales $L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$ y el operador P satisface la desigualdad

$$\|Pf\|_{p,w} \leq C_{p,w} \|f\|_{p,w} \text{ para toda } f \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$$

con alguna constante $C_{p,w} < \infty$ independiente de f . A los pesos en $A_p(\mathbf{R})$ se les llama *pesos de Muckenhoupt*. Como

$$P = \mathcal{F}\chi_+\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\chi_-\mathcal{F} = W^0(\chi_-) \quad (2.12)$$

y $W^0(-\operatorname{sgn}x)$ es el *operador integral singular de Cauchy* S , definido en $L^2(\mathbf{R})$ por

$$(Sf)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(s)}{s-t} ds, \quad t \in \mathbf{R},$$

la integral entendida en el sentido del valor principal, donde $\operatorname{sgn}x$ es la función continua a trozos definida por

$$\operatorname{sgn}x = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$P = \frac{1}{2}(I + S), \quad Q = \frac{1}{2}(I - S). \quad (2.13)$$

Por lo tanto, $w \in A_p(\mathbf{R})$ si y sólo si $L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$ y S se extiende de $L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ a un operador acotado en $L^p(\mathbf{R}, w)$ (ver, p. ej., [9]). Si $w \in A_p(\mathbf{R})$ entonces P se extiende (de forma única) a una proyección acotada en $L^p(\mathbf{R}, w)$. La imagen de $L^p(\mathbf{R}, w)$ bajo P es entonces un subespacio cerrado de $L^p(\mathbf{R}, w)$. Este subespacio de $L^p(\mathbf{R}, w)$ es denotado por $H^p(\mathbf{R}, w)$ y es llamado el *espacio de Hardy* con peso.

El siguiente teorema demostrado por Hunt, Muckenhoupt y Wheeden [37], caracteriza los pesos en $A_p(\mathbf{R})$.

Teorema 2.17 *Sea $1 < p < \infty$. Un peso w en \mathbf{R} pertenece a $A_p(\mathbf{R})$ si y sólo si*

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e I corre sobre todos los intervalos acotados $I \subset \mathbf{R}$; aquí $|I|$ es la longitud de I .

Supongamos que $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ denotará al espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w|\mathbf{R}_+)$. Una función $a \in L^\infty(\mathbf{R})$ es llamada *multiplicador de Fourier* en $L^p(\mathbf{R}, w)$ si el operador $W^0(a) = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$ mapea $L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ en si mismo y se extiende a un operador acotado en $L^p(\mathbf{R}, w)$. Denotamos por $M_{p,w}$ al conjunto de todos los multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbf{R}, w)$. A continuación probamos la siguiente afirmación sencilla.

Proposición 2.18 *El conjunto $M_{p,w}$ con la norma $\|a\|_{M_{p,w}} := \|W^0(a)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. En efecto, $M_{p,w} \subset L^\infty(\mathbf{R})$ es un álgebra conmutativa normada con unidad. Denotemos por $\overline{M}_{p,w}$ a la cerradura de $M_{p,w}$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{M_{p,w}} := \|W^0(\cdot)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}$. Entonces $\overline{M}_{p,w}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Sean X y X_0 los conjuntos de todos los homomorfismos complejos de las álgebras de Banach conmutativas $\overline{M}_{p,w}$ y $M_2 = L^\infty(\mathbf{R})$, respectivamente. Ya que $M_{p,w}$ es denso en $\overline{M}_{p,w}$, se pueden identificar los homomorfismos complejos continuos de $M_{p,w}$ y $\overline{M}_{p,w}$ (tales homomorfismos son continuos en $\overline{M}_{p,w}$ automáticamente, sus restricciones sobre $M_{p,w}$ son homomorfismos complejos continuos de $M_{p,w}$, y cada homomorfismo complejo continuo de $M_{p,w}$ se puede extender por continuidad a un homomorfismo complejo de $\overline{M}_{p,w}$). Como $M_{p,w} \subset L^\infty(\mathbf{R})$, tenemos que $X_0 \subset X$. Entonces, por [65, Teoremas 11.9 y 11.12], para cada $a \in M_{p,w}$ se tiene que

$$\|a\|_{M_2} = \|a\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = \sup_{\eta \in X_0} |\eta(a)| \leq \sup_{\eta \in X} |\eta(a)| \leq \|a\|_{M_{p,w}} \quad (2.14)$$

(aquí tomamos en cuenta que $L^\infty(\mathbf{R})$ es un C^* -álgebra). Si $\{f_n\} \subset M_{p,w}$ es una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{M_{p,w}}$, (2.14) implica que $\{f_n\}$ también es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbf{R})$. Entonces el límite de $\{f_n\}$ en la norma de $M_{p,w}$ pertenece a $L^\infty(\mathbf{R})$, esto implica que $\overline{M}_{p,w} \subset L^\infty(\mathbf{R})$, es decir, $M_{p,w}$ es completo. ■

Teorema 2.19 *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Cada uno de los conjuntos*

$$I_x(p, w) := \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : \left| \frac{\xi - x}{\xi + i} \right|^\lambda w(\xi) \in A_p(\mathbf{R}) \right\} \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$I_\infty(p, w) := \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : |\xi + i|^{-\lambda} w(\xi) \in A_p(\mathbf{R}) \right\}$$

son intervalos abiertos de longitud no mayor a 1 que contienen al origen,

$$I_x(p, w) = (-\nu_x^-(p, w), 1 - \nu_x^+(p, w)) \quad (x \in \dot{\mathbf{R}})$$

con $0 < \nu_x^-(p, w) \leq \nu_x^+(p, w) < 1$.

(Ver, por ejemplo, [16, Teorema 2.10]). Para cada $x \in \dot{\mathbf{R}}$, los números $\nu_x^\pm(p, w)$ están relacionados con los índices de potencialidad $\alpha_x(w)$ y $\beta_x(w)$ del peso $w \in A_p(\mathbf{R})$ (ver [9, Sección 3.6]):

$$\nu_x^-(p, w) = 1/p + \alpha_x(w), \quad \nu_x^+(p, w) = 1/p + \beta_x(w).$$

Teorema 2.20 (Desigualdad de Stechkin). *Si $a \in PC$ y a tiene variación total finita $V_1(a)$, entonces $a \in M_{p,w}$ y*

$$\|a\|_{M_{p,w}} \leq \|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} (\|a\|_\infty + V_1(a)). \quad (2.15)$$

Para ver la demostración del Teorema 2.20 consultar, por ejemplo, [14, Teorema 17.1].

De acuerdo con el Teorema 2.20, denotamos por $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ (resp. $PC_{p,w}$) la cerradura en $M_{p,w}$ del conjunto de todas las $a \in C(\dot{\mathbf{R}})$ (resp. $a \in PC$) que tienen variación acotada. Claramente $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) \subset PC_{p,w}$. Se puede demostrar (ver [64, Proposición 12.2], para el caso de pesos potenciales) que $PC_{p,w}$ es continuamente encajado en $L^\infty(\mathbf{R})$. Esto implica que

$$C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) \subset C(\dot{\mathbf{R}}), \quad PC_{p,w} \subset PC.$$

Definimos

$$C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) := \{a \in PC_{p,w} : a|_{\mathbf{R}} \text{ es continua}\}. \quad (2.16)$$

Para $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$, denotamos por $L^p(\mathbf{R}, w)$ al espacio de Lebesgue usual con la norma

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dado $N \in \mathbf{N}$, denotamos por $L_N^p(\mathbf{R}, w)$ al espacio de Banach de funciones vectoriales $f = (f_k)_{k=1}^N$ con entradas $f_k \in L^p(\mathbf{R}, w)$ y la norma $\|f\|_{L_N^p(\mathbf{R}, w)} = (\sum_{k=1}^N \|f_k\|_{p,w}^p)^{1/p}$.

Proposición 2.21 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, el operador

$$U_\lambda = \mathcal{F}^{-1} e^{i\lambda x} \mathcal{F}, \quad (2.17)$$

que actúa por la fórmula $(U_\lambda f)(x) = f(x - \lambda)$ para todo $x \in \mathbf{R}$, es acotado en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$ si y sólo si la función v_λ , definida por $v_\lambda(x) = \frac{w(x+\lambda)}{w(x)}$, pertenece a $L^\infty(\mathbf{R})$. En ese caso

$$\|U_\lambda\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} = \|v_\lambda\|_\infty. \quad (2.18)$$

Demostración. Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, el operador U_λ es acotado en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$ si y sólo si el operador $wU_\lambda w^{-1}I = U_\lambda v_\lambda I$ es acotado en el espacio $L^p(\mathbf{R})$; y sus normas coinciden. Como los operadores U_λ son isométricos en el espacio $L^p(\mathbf{R})$, obtenemos

$$\|U_\lambda\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} = \|U_\lambda v_\lambda I\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = \|v_\lambda I\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = \|v_\lambda\|_\infty,$$

lo que completa la demostración. \blacksquare

Ahora definimos el conjunto

$$A_p^0(\mathbf{R}) := \left\{ w \in A_p(\mathbf{R}) : v_\lambda = w(\cdot + \lambda)/w(\cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}) \text{ para todo } \lambda \in \mathbf{R} \right\}. \quad (2.19)$$

Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces por la Proposición 2.21 los operadores $U_\lambda = W^0(e_\lambda)$ son acotados en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$. Para tales w todos los operadores de la forma $W^0(\sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda e_\lambda)$ son acotados en $L^p(\mathbf{R}, w)$, donde $c_\lambda \in \mathbf{C}$ y Λ_0 es un subconjunto finito de \mathbf{R} , y por lo tanto el conjunto de los polinomios casi periódicos AP^0 está contenido en $M_{p,w}$. Definimos $AP_{p,w}$ como la cerradura en $M_{p,w}$ de AP^0 . Como AP^0 es un subespacio de $M_{p,w}$ entonces $AP_{p,w}$ es un subespacio cerrado de $M_{p,w}$. Si $a, b \in AP_{p,w}$ entonces existen sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ contenidas en AP^0 tales que $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$ en $M_{p,w}$. Como

$$\|ab - a_n b_n\|_{M_{p,w}} = \|ab - ab_n + ab_n - a_n b_n\|_{M_{p,w}} \leq \|a\|_{M_{p,w}} \|b - b_n\|_{M_{p,w}} + \|a - a_n\|_{M_{p,w}} \|b_n\|_{M_{p,w}},$$

se sigue que $ab \in AP_{p,w}$. Así que $AP_{p,w}$ es un subálgebra de Banach de $M_{p,w}$. Definimos $SAP_{p,w}$ como el menor subálgebra cerrada de $M_{p,w}$ que contiene a $C_{p,w}(\mathbf{R})$ y a $AP_{p,w}$. Claramente

$$AP_{p,w} \subset AP \subset L^\infty(\mathbf{R}), \quad SAP_{p,w} \subset SAP \subset L^\infty(\mathbf{R}). \quad (2.20)$$

De acuerdo con [57], un peso $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ es equivalente al peso continuo $\omega \in C(\mathbf{R})$ dado por

$$\omega(x) = \exp\left(\int_{-1/2}^{1/2} \ln w(x+t) dt\right), \quad (2.21)$$

donde la equivalencia significa que $w/\omega, \omega/w \in L^\infty(\mathbf{R})$. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que w es continuo en \mathbf{R} . Más aún, de la equivalencia de los pesos w y ω se sigue que

$$\max\left\{\sup_{x \in [-T, T]} \text{ess } |w(x)|, \sup_{x \in [-T, T]} \text{ess } |w^{-1}(x)|\right\} < \infty \quad \text{para cada } T > 0,$$

lo que implica que $\alpha_x(w) = \beta_x(w) = 0$ y de aquí $\nu_x^\pm(p, w) = 1/p$ para todos los puntos $x \in \dot{\mathbf{R}}$ excepto $x = \infty$.

Ejemplo 2.22 Consideremos el peso

$$w(x) = \begin{cases} e^{(\delta + \nu \sin(\eta \log(\log |x|))) \log |x|} & \text{si } |x| \geq e, \\ e^\delta & \text{si } |x| < e, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde $\delta, \nu, \eta \in \mathbf{R}$ y

$$-1/p < \delta - |\nu| \sqrt{\eta^2 + 1} \leq \delta + |\nu| \sqrt{\eta^2 + 1} < 1/q. \quad (2.23)$$

Haciendo $h(x) := \delta + \nu \sin(\eta x)$ y calculando los índices de potencialidad (ver [9, Sección 3.6]) por las fórmulas

$$\begin{aligned} \alpha_\infty(w) &= 1 - 2/p - \limsup_{x \rightarrow +\infty} [h(x) + h'(x)], \\ \beta_\infty(w) &= 1 - 2/p - \liminf_{x \rightarrow +\infty} [h(x) + h'(x)] \end{aligned}$$

de acuerdo con [44, Sección 5], deducimos de [9, Ejemplo 2.37] que

$$\alpha_\infty(w) = 1 - 2/p - \delta - |\nu| \sqrt{\eta^2 + 1}, \quad \beta_\infty(w) = 1 - 2/p - \delta + |\nu| \sqrt{\eta^2 + 1}. \quad (2.24)$$

De (2.23) y (2.24), obtenemos $-1/p < \alpha_\infty(w) \leq \beta_\infty(w) < 1/q$. Pasando al peso $\rho(t) = w(i \frac{1+t}{1-t}) |1-t|^{1-2/p}$ en $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ y aplicando las fórmulas $\alpha_1(\rho) = \alpha_\infty(w)$ y $\beta_1(\rho) = \beta_\infty(w)$, deducimos de [9, Teorema 2.33] que $\rho \in A_p(\mathbf{T})$. De aquí, $w \in A_p(\mathbf{R})$. Para $|x| > e$, obtenemos

$$(\log w)'(x) = |x|^{-1} [\nu \eta \cos(\eta \log(\log |x|)) + \delta + \nu \sin(\eta \log(\log |x|))],$$

y por lo tanto $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\log w)'(x) = 0$. Consecuentemente, $v_\lambda = \frac{w(\cdot + \lambda)}{w(\cdot)} \in C(\dot{\mathbf{R}})$ y $v_\lambda(\infty) = 1$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, lo cual implica que $w \in A_p^0(\mathbf{R})$.

Similarmente al caso $w = 1$ considerado en [72, Sección 3.2], obtenemos el siguiente resultado para pesos $w \in A_p(\mathbf{R})$.

Lema 2.23 *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$, entonces el conjunto \mathcal{Y} de todas las funciones $\psi \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ para las cuales $\mathcal{F}\psi$ tiene soporte compacto es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$.*

Demostración. Como $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$, se sigue que $w \in L^p_{loc}(\mathbf{R})$ y el conjunto $C_0^\infty(\mathbf{R})$ de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$ (ver, por ejemplo, [9, Sección 4.2]). Fijemos $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ y definamos $f_{-y}(x) := f(x-y)$. Como las funciones $f_{-y} - f$ tienen soporte compacto para todo $y \in \mathbf{R}$ y ya que $w \in L^p_{loc}(\mathbf{R})$, deducimos de la convergencia uniforme $f(x-y) \rightarrow f(x)$ cuando $y \rightarrow 0$ que

$$\Delta(y) := \|f_{-y} - f\|_{p,w} \rightarrow 0 \text{ cuando } y \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Para cada función $\varphi \in L^1(\mathbf{R})$ con $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x) dx = 1$, tenemos

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbf{R}} [f(x-y) - f(x)] \varphi_\varepsilon(y) dy \quad (2.26)$$

donde $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(x/\varepsilon)$ para $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ y $f * \varphi_\varepsilon$ es la convolución de f y φ_ε . Por la desigualdad de Minkowski para integrales, inferimos de (2.26) que

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{p,w} &= \left(\int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} [f(x-y) - f(x)] \varphi_\varepsilon(y) dy \right|^p w^p(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-y) - f(x)|^p w^p(x) dx \right)^{1/p} |\varphi_\varepsilon(y)| dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \Delta(y) |\varphi_\varepsilon(y)| dy = \int_{\mathbf{R}} \Delta(\varepsilon y) |\varphi(y)| dy < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f * \varphi_\varepsilon$ esta en $L^p(\mathbf{R}, w)$ junto con f . Más aún, $f * \varphi_\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ ya que $f \in L^2(\mathbf{R})$ y $\varphi_\varepsilon \in L^1(\mathbf{R})$. Entonces, del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y (2.25) se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \Delta(\varepsilon y) |\varphi(y)| dy = 0,$$

y de aquí $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{p,w} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalmente, eligiendo $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ tal que la función $\mathcal{F}\varphi$ tenga soporte compacto, concluimos que las funciones $f * \varphi_\varepsilon$ pertenecen al conjunto \mathcal{Y} , y por lo tanto este conjunto es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$. ■

2.5. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos continuos a trozos en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$

Los operadores de Wiener-Hopf con símbolos continuos a trozos en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ fueron investigados en [16] y [17] (ver también [14], [9]).

Dado $\nu \in (0, 1)$, el conjunto $\left\{ e^{2\pi(x+i\nu)} : x \in \mathbf{R} \right\}$ es un rayo que comienza en el origen y forma un ángulo $2\pi\nu$ con el semieje real positivo. Para $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ la transformación de Möbius

$$M_{z_1, z_2}(\zeta) := \frac{z_2 \zeta - z_1}{\zeta - 1}$$

mapea 0 a z_1 e ∞ a z_2 . Por lo tanto

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) := \left\{ M_{z_1, z_2}(e^{2\pi(x+i\nu)}) : x \in \mathbf{R} \right\} \cup \{z_1, z_2\}$$

es un arco circular entre z_1 y z_2 . Por ejemplo, $\mathcal{A}(z, z; \nu) = \{z\}$ y $\mathcal{A}(z_1, z_2; 1/2)$ es el segmento de línea entre z_1 y z_2 .

Dados $0 < \nu_1 \leq \nu_2 < 1$ definimos

$$\mathcal{H}(z_1, z_2; \nu_1, \nu_2) := \bigcup_{\nu \in [\nu_1, \nu_2]} \mathcal{A}(z_1, z_2; \nu).$$

Teorema 2.24 Sean $\nu_x^\pm(p, w)$ como en el Teorema 2.19. Si $a \in PC_{p, w}$, entonces el espectro esencial de $W(a)$ en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ es el conjunto

$$a_{p, w}^\#(\dot{\mathbf{R}}) := \left(\bigcup_{x \in \mathbf{R}} \mathcal{H}(a(x-0), a(x+0); \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)) \right) \cup \mathcal{H}(a(+\infty), a(-\infty); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)).$$

Si $0 \notin a_{p, w}^\#(\dot{\mathbf{R}})$, entonces el índice de $W(a)$ en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ es

$$\text{Ind } W(a) = -\text{wind}_{p, w} a,$$

donde $\text{wind}_{p, w} a$ es el número de vueltas que da alrededor del origen la curva naturalmente orientada

$$a_{p, w}^0(\dot{\mathbf{R}}) := \left(\bigcup_{x \in \mathbf{R}} \mathcal{A}(a(x-0), a(x+0); (\nu_\infty^-(p, w) + \nu_\infty^+(p, w))/2) \right) \cup \mathcal{A}(a(+\infty), a(-\infty); (\nu_0^-(p, w) + \nu_0^+(p, w))/2).$$

Denotemos por $\text{alg}_{p, w} W(PC)$ al subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$ que contiene todos los operadores $W(a)$ con $a \in PC_{p, w}$. Se puede mostrar que el conjunto $\mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$ de todos los operadores compactos es un subconjunto de $\text{alg}_{p, w} W(PC)$. Denotamos por A^π a la clase lateral $A + \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$.

Teorema 2.25 El álgebra de Banach

$$\text{alg}_{p, w} W^\pi(PC) := \text{alg}_{p, w} W(PC) / \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$$

es un subálgebra conmutativa e inversamente cerrada del álgebra de Calkin, esto es, del álgebra $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+, w)) / \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$. El espacio de ideales maximales puede ser identificado con

$$\mathcal{N}_{p, w} := \left(\bigcup_{x \in \mathbf{R}} (\{x\} \times \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))) \right) \cup (\{\infty\} \times \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)))$$

en el siguiente sentido: el mapeo de Gelfand

$$\Gamma : \text{alg}_{p, w} W^\pi(PC) \rightarrow C(\mathcal{N}_{p, w})$$

para $a \in PC_{p, w}$ y $(x, \mu) \in \mathcal{N}_{p, w}$ está dado por

$$(\Gamma W^\pi(a))(x, \mu) = (1 - \mu)a(x-0) + \mu a(x+0),$$

con la convención $a(\infty \pm 0) = a(\mp \infty)$.

Teorema 2.26 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, $N \in \mathbf{N}$, y $\nu_0^\pm := \nu_0^\pm(p, w)$. Para $b \in [C(\overline{\mathbf{R}})_{p,w}]_{N \times N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $W(b)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$.

ii) $\det b(x) \neq 0$ para cada $x \in \overline{\mathbf{R}}$ y

$$\nu + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j(b^{-1}(+\infty)b(-\infty)) \notin \mathbf{Z} \quad (2.27)$$

para cada $\nu \in [\nu_0^-, \nu_0^+]$ y cada valor propio $\xi_j = \xi_j(b^{-1}(+\infty)b(-\infty))$ de la matriz $b^{-1}(+\infty)b(-\infty)$.

iii) $\det b(x) \neq 0$ para cada $x \in \overline{\mathbf{R}}$ y

$$\text{sp}(b^{-1}(+\infty)b(-\infty)) \cap \Sigma[1 - \nu_0^+, 1 - \nu_0^-] = \emptyset, \quad (2.28)$$

donde $\Sigma[1 - \nu_0^+, 1 - \nu_0^-] := \{re^{2\pi i\varphi} : r \in [0, \infty], \varphi \in [1 - \nu_0^+, 1 - \nu_0^-]\}$.

En el caso en el que $W(b)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, el índice está dado por

$$\text{Ind } W(b) = -\text{ind}(\det b) + N\nu_0^0 - \sum_{j=1}^N \left\{ \nu_0^0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\}, \quad (2.29)$$

donde $\text{ind}(\det b) := \frac{1}{2\pi} \{ \arg \det b(x) \}_{x \in \overline{\mathbf{R}}}$ es el índice de Cauchy de $\det b \in C(\overline{\mathbf{R}})$ en $\overline{\mathbf{R}}$, $\nu_0^0 := (\nu_0^- + \nu_0^+)/2$, y en (2.29), $\{x\}$ significa la parte fraccional de $x \in \mathbf{R}$.

2.6. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos en álgebras de Douglas

Para $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$ definamos $H_{p,w,\pm}^\infty := H_\pm^\infty \cap M_{p,w}$. Es fácil ver que $H_{p,w,\pm}^\infty$ son subálgebras cerradas de $M_{p,w}$.

Proposición 2.27 Si $a_\pm \in H_{p,w,\pm}^\infty$ y $b \in M_{p,w}$, entonces

$$W(a_-ba_+) = W(a_-)W(b)W(a_+).$$

Demostración. Como es bien sabido (ver, por ejemplo, [14, Proposición 2.17]), si $a_\pm \in H_\pm^\infty$ y $b \in L^\infty(\mathbf{R})$, entonces para cada $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$,

$$W(a_-)W(b)W(a_+)f = W(a_-ba_+)f. \quad (2.30)$$

En particular, (2.30) se cumple si $a_\pm \in H_\pm^\infty \cap M_{p,w}$, y $b \in M_{p,w}$ porque $M_{p,w} \subset M_2 = L^\infty(\mathbf{R})$. Sólo resta aplicar (2.30) a funciones $f \in L^2(\mathbf{R}_+) \cap L^p(\mathbf{R}_+, w)$ y extender esta igualdad por continuidad a toda $f \in L^p(\mathbf{R}_+, w)$. ■

Sea $D_{p,w,\pm} := \text{alg}\{C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}), H_{p,w,\pm}^\infty\}$ el subálgebra de Banach más pequeña de $M_{p,w}$ que contiene a $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $H_{p,w,\pm}^\infty$, respectivamente.

Teorema 2.28 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$.

- (a) Si $a_{\pm} \in [D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$ y $b \in [M_{p,w}]_{N \times N}$, entonces $W(a_-ba_+) - W(a_-)W(b)W(a_+)$ es un operador compacto en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- (b) Si $a_{\pm} \in [D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$ y $\det a_{\pm}$ es invertible en $D_{p,w,\pm}$, entonces los operadores $W(a_{\pm})$ son Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbf{R}_+, w)$.

Demostración. Se probará la parte (a) para el caso escalar ($N = 1$). Para $N > 1$ la demostración se sigue del caso escalar. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$, entonces de [14, Lema 17.13] se sigue que el operador $\chi_+W^0(c) - W^0(c)\chi_+I$ con $c \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$. De aquí, el operador $\chi_+W^0(a)\chi_+W^0(b)\chi_+I - \chi_+W^0(a)W^0(b)\chi_+I$ también es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$ siempre que $a \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $b \in M_{p,w}$ o $a \in M_{p,w}$ y $b \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$. Esto y la Proposición 2.27 implican que el operador $W(a_-ba_+) - W(a_-)W(b)W(a_+)$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, si $a_{\pm} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\pm}^{\infty}$ y $b \in M_{p,w}$. De aquí

$$W^0\left(\sum_i \prod_j a_{ij}^{\pm}\right) = \sum_i \prod_j W^0(a_{ij}^{\pm}) + K,$$

donde la suma y el producto son finitos, K es un operador compacto en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, y $a_{ij}^{\pm} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\pm}^{\infty}$. Lo último implica la afirmación de la parte (a) para $b \in M_{p,w}$ y $a_{\pm} = \sum_i \prod_j a_{ij}^{\pm}$ con $a_{ij}^{\pm} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\pm}^{\infty}$. Aproximando $a_{\pm} \in D_{p,w,\pm}$ en $M_{p,w}$ por funciones $a_{\pm}^{(n)}$ de la forma $\sum_i \prod_j a_{ij}^{\pm}$, obtenemos la sucesión convergente de operadores compactos

$$K_n = W(a_-^{(n)}ba_+^{(n)}) - W(a_-^{(n)})W(b)W(a_+^{(n)}). \quad (2.31)$$

Pasando a los límites en ambos lados de (2.31), completamos la demostración de la parte (a).

La parte (b) se sigue de inmediato de la parte (a). ■

El Teorema 2.28 implica lo siguiente.

Corolario 2.29 Si $a, b \in M_{p,w}$ y al menos una de las funciones a, b pertenece a $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, entonces el operador $W(ab) - W(a)W(b)$ es compacto.

Empleando una $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ partición de la unidad en $M_{p,w}$, uno puede escribir el Corolario 2.29 como sigue.

Corolario 2.30 Si $a, b \in M_{p,w}$ y si para cada punto $t \in \dot{\mathbf{R}}$ existe una vecindad abierta $U(t) \subset \dot{\mathbf{R}}$ de t tal que al menos una de las funciones $\chi_{U(t)}a, \chi_{U(t)}b$ pertenece a $\chi_{U(t)}C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, entonces el operador $W(ab) - W(a)W(b)$ es compacto.

Lema 2.31 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, y $N \in \mathbf{N}$. Si $a, b \in [M_{p,w} \setminus \{0\}]_{N \times N}$ y existen funciones matriciales $f_{\pm} \in G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$ tales que $a = f_-bf_+$, entonces los operadores $W(a)$ y $W(b)$ son débilmente Φ -equivalentes en el espacio $L^p_N(\mathbf{R}, w)$, e

$$\text{Ind } W(a) = \text{Ind } W(f_-) + \text{Ind } W(b) + \text{Ind } W(f_+). \quad (2.32)$$

Demostración. El Teorema 2.28 implica que $W(a) = W(f_-)W(b)W(f_+) + K$, donde los operadores $W(f_{\pm})$ son Fredholm y K es un operador compacto. De los Teoremas 2.2, 2.3 se sigue que $W(a)$ y $W(b)$ son débilmente Φ -equivalentes. ■

2.7. Operadores límite y espacios de ideales maximales para las álgebras de funciones semi-casi periódicas y lentamente oscilatorias

Para una función continua $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ y un conjunto $I \subset \mathbf{R}$, sea

$$\text{osc}(f, I) = \sup_{t, s \in I} |f(t) - f(s)|.$$

Seguendo [60] denotamos por SO al conjunto de *funciones lentamente oscilatorias*,

$$SO := \left\{ f \in BC(\mathbf{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{osc}(f, [-2x, -x] \cup [x, 2x]) = 0 \right\}. \quad (2.33)$$

Claramente, SO es un C^* -subálgebra de $L^\infty(\mathbf{R})$ que contiene todas las funciones en $C(\dot{\mathbf{R}})$.

Dada una función $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ y $\epsilon > 0$, sea

$$cm_{x, \epsilon}(a) := \max_{h \in [-\epsilon, \epsilon]} |a(x+h) - a(x)|$$

una *oscilación local* de a en el punto $x \in \mathbf{R}$. De acuerdo con [20, p. 122], introducimos la clase

$$CM(\mathbf{R}) := \left\{ a \in BC(\mathbf{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} cm_{x, \epsilon}(a) = 0 \right\}, \quad (2.34)$$

donde ϵ es alguna (equivalentemente, cualquier) constante positiva pequeña. Por lo tanto, $CM(\mathbf{R})$ es la clase de funciones continuas en \mathbf{R} con oscilación local nula en infinito. Por [20, Capítulo 3, Lema 10.4], $CM(\mathbf{R})$ es un C^* -álgebra, siendo la cerradura en $L^\infty(\mathbf{R})$ del álgebra

$$CM^\infty(\mathbf{R}) := \left\{ a \in BC^\infty(\mathbf{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j a \right](x) = 0, j = 1, 2, \dots \right\}, \quad (2.35)$$

donde $BC^\infty(\mathbf{R})$ denota el conjunto de todas las funciones $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ infinitamente diferenciables que son acotadas junto con todas sus derivadas.

Para estudiar los operadores de Wiener-Hopf con símbolos generados por matrices semi-casi periódicas y matrices lentamente oscilatorias en los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}_+)$ necesitamos utilizar las técnicas de operadores límite. Definiremos los operadores límite y daremos algunas propiedades simples de estos (ver [51], [11], [63] y [6]).

Sea $1 < p < \infty$. Dado $y \in \mathbf{R}$, introducimos el operador de translación U_y en $L^p(\mathbf{R})$ por

$$(U_y f)(x) = f(x - y), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Claramente, los operadores U_y son invertibles, $U_y^{-1} = U_{-y}$, $(U_y)^* = U_y^{-1}$ y $\|U_y\| = 1$.

Sea $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$. El operador $A_h \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$ es llamado el *operador límite* de A con respecto a la sucesión $h = \{h_m\}$ de números reales que tienden a infinito (respectivamente, a $+\infty$ o a $-\infty$) si

$$A_h = \text{s-lim}_{m \rightarrow \infty} (U_{-h_m} A U_{h_m})$$

y existe un límite fuerte $B_h = \text{s-lim}_{m \rightarrow \infty} (U_{-h_m} A U_{h_m})^*$ en $\mathcal{B}(L^q(\mathbf{R}))$ donde $1/p + 1/q = 1$. De esta definición se sigue que $B_h = (A_h)^*$ y que el operador A puede tener sólo un operador límite A_h con respecto a una sucesión h dada.

En la siguiente proposición se reúnen las propiedades algebraicas de los operadores límite (ver [11, Proposición 6.1]).

Proposición 2.32 *Sea h una sucesión de números reales que tiende a ∞ (respectivamente, a $+\infty$, $-\infty$).*

(a) *Si $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$ y A_h existe, entonces $\|A_h\| \leq \|A\|$.*

(b) *Si $A, B \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$, $\alpha \in \mathbf{C}$, y A_h, B_h existen, entonces $(\alpha A)_h$, $(A + B)_h$, $(AB)_h$, $(A^*)_h$ también existe y*

$$(\alpha A)_h = \alpha A_h, \quad (A + B)_h = A_h + B_h, \quad (AB)_h = A_h B_h, \quad (A^*)_h = (A_h)^*.$$

(c) *Si $A, A^{(m)} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$, $\|A - A^{(m)}\| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, y $(A^{(m)})_h$ existe para toda m suficientemente grande, entonces A_h también existe, y*

$$A_h = \lim_{m \rightarrow \infty} (A^{(m)})_h.$$

Estudiemos la existencia de operadores límite para el operador de multiplicación aI con a en BUC , el conjunto de las funciones $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ que son acotadas y uniformemente continuas.

Proposición 2.33 [6] *Sean $a \in BUC$ y $h = \{h_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \infty$ (respectivamente, $+\infty$, $-\infty$). Entonces existe una subsucesión g de h tal que $(aI)_g \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$ existe y $(aI)_g = a_g I$, donde $a_g \in BUC$.*

Como $AP \subset BUC$ y $SO \subset BUC$, los operadores límite del operador aI cuando $a \in AP$ y $a \in SO$ siempre existen para una subsucesión $g \subset h$. Caractericemos estos operadores límite.

Proposición 2.34 [6] *Sea h una sucesión de números reales que tiende a ∞ (respectivamente, a $+\infty$, $-\infty$).*

(i) *Si $a \in AP$ y g es una subsucesión de h tal que existe un operador límite $(aI)_g = a_g I$, entonces $a_g \in AP$.*

(ii) *Si $a \in SO$ and g es una subsucesión de h tal que existe un operador límite $(aI)_g = a_g I$, entonces a_g es constante.*

Ahora definamos el espacio de ideales maximales $\mathcal{M}(SO)$ de SO , que es el espacio de todos los funcionales lineales multiplicativos de SO , haciendo uso del espacio $\mathcal{M}(C(\dot{\mathbf{R}}))$ de funcionales lineales multiplicativos de $C(\dot{\mathbf{R}})$. Identificando los puntos $t \in \dot{\mathbf{R}}$ con los funcionales de evaluación δ_t en $\dot{\mathbf{R}}$, $\delta_t(f) = f(t)$, donde $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, tenemos $\mathcal{M}(C(\dot{\mathbf{R}})) = \dot{\mathbf{R}}$. Como $C(\dot{\mathbf{R}})$ es un subálgebra del C^* -álgebra SO , cualquier funcional de evaluación $t \in \dot{\mathbf{R}}$ se extiende a un funcional lineal multiplicativo de SO . Sea

$$\mathcal{M}_t(SO) = \left\{ \xi \in \mathcal{M}(SO) : \xi|_{C(\dot{\mathbf{R}})} = \delta_t \right\}$$

la fibra de $\mathcal{M}(SO)$ sobre t . Por lo tanto $\mathcal{M}(SO) = \bigcup_{t \in \dot{\mathbf{R}}} \mathcal{M}_t(SO)$. Si $t \in \mathbf{R}$, la fibra $\mathcal{M}_t(SO)$ consiste sólo del funcional de evaluación en t , esto es, $\mathcal{M}_t(SO) = \{t\}$, y por lo tanto $\bigcup_{t \in \mathbf{R}} \mathcal{M}_t(SO) = \mathbf{R}$. La caracterización de $\mathcal{M}_\infty(SO)$ se da en la siguiente proposición que es probada por analogía con [11, Proposición 4.1].

Proposición 2.35 [6] $\mathcal{M}_\infty(SO) = (\text{clos}_{SO^*} \mathbf{R}) \setminus \mathbf{R}$, donde $\text{clos}_{SO^*} \mathbf{R}$ es la cerradura estrella-débil de \mathbf{R} en SO^* , el espacio dual de SO .

Por lo tanto, cualquier funcional $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ es el límite de una red $t_\alpha \in \mathbf{R}$ que no converge a funcionales $t \in \mathbf{R}$, esto es, $f(\xi) := \xi(f) = \lim_\alpha f(t_\alpha)$ para cada $f \in SO$.

Ahora estamos preparados para relacionar el espacio de ideales maximales de SO con los operadores límite del operador de multiplicación aI , $a \in SO$ (ver [11, Proposición 4.2 y Corolario 4.3]).

Proposición 2.36 Sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ un subconjunto numerable de SO . Si $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ entonces existe una sucesión $g = \{g_n\} \subset \mathbf{R}$ tal que $g_n \rightarrow \infty$ y

$$\xi(a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k(g_n), \quad k \in \mathbf{N}. \quad (2.36)$$

Inversamente, si $g_n \in \mathbf{R}$, $g_n \rightarrow \infty$, y los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(g_n)$ existen para todo k , entonces existe un $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ tal que (2.36) se cumple.

Por lo tanto, si $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, entonces bajo las condiciones de la Proposición 2.36 el operador límite de aI , $a \in SO$, con respecto a la sucesión g que tiende a infinito, puede ser definido por

$$(aI)_g = \xi(a)I, \quad a \in SO, \quad \xi \in \mathcal{M}_\infty(SO). \quad (2.37)$$

Terminaremos esta sección definiendo el operador límite de aI cuando $a \in [SO, SAP]$ (ver [6]).

Para cada C^* -álgebra $C \subset L^\infty(\mathbf{R})$ que contiene a $C(\mathbf{R})$, la fibra $\mathcal{M}_\infty(C)$ del espacio de ideales maximales $\mathcal{M}(C)$ es definida como los caracteres en $\mathcal{M}(C)$ que aniquilan todas las funciones en $C(\mathbf{R})$ que se anulan en ∞ . Sean A y B C^* -álgebras de funciones continuas y acotadas en \mathbf{R} que incluyen a $C(\mathbf{R})$, y $[A, B]$ el C^* -álgebra más pequeño que contiene A y B . Por [60], las álgebras A, B se dice que son *asintóticamente independientes* si $\mathcal{M}_\infty([A, B])$ y $\mathcal{M}_\infty(A) \times \mathcal{M}_\infty(B)$ son naturalmente homeomorfas, donde el homeomorfismo natural de $\mathcal{M}_\infty([A, B])$ sobre $\mathcal{M}_\infty(A) \times \mathcal{M}_\infty(B)$ está dado por el mapeo de restricción $\mu \mapsto (\mu|_A, \mu|_B)$.

De acuerdo con [60, Sección 3], las C^* -álgebras SO y SAP son *asintóticamente independientes*, esto es, tenemos lo siguiente.

Proposición 2.37 La fibra $\mathcal{M}_\infty([SO, SAP])$ es naturalmente homeomorfa al conjunto $\mathcal{M}_\infty(SO) \times \mathcal{M}_\infty(SAP)$.

Por la Proposición 2.37, para cada carácter $\mu \in \mathcal{M}_\infty([SO, SAP])$ existen caracteres $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ y $\nu \in \mathcal{M}_\infty(SAP)$ tales que $\mu|_{SO} = \xi$ y $\mu|_{SAP} = \nu$. En lo que sigue identificaremos los caracteres $\mu \in \mathcal{M}_\infty([SO, SAP])$ con los pares $(\xi, \nu) \in \mathcal{M}_\infty(SO) \times \mathcal{M}_\infty(SAP)$. Por lo tanto, de la Proposición 2.37 se sigue (ver [60, p. 1063]) que para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ tenemos un homeomorfismo natural

$$\beta_\xi : [SO, SAP] \rightarrow SAP|_{\mathcal{M}_\infty(SAP)}$$

dado por

$$(\beta_\xi \varphi)(\nu) = (\xi, \nu)\varphi, \quad \nu \in \mathcal{M}_\infty(SAP). \quad (2.38)$$

De aquí, para cada $\varphi \in [SO, SAP]$ existe una función no única $\varphi_\xi \in SAP$ con representación casi periódica en $\pm\infty$ únicamente determinada $\varphi_{\xi,\pm}$ tal que

$$\beta_\xi \varphi = \varphi_\xi|_{\mathcal{M}_\infty(SAP)}. \quad (2.39)$$

Identificando $\mathcal{M}_\infty(SAP)$ con $\mathcal{M}_\infty(AP) \times \mathcal{M}_\infty(AP)$ obtenemos

$$\varphi_\xi|_{\mathcal{M}_\infty(SAP)} = \left(\varphi_{\xi,+}|_{\mathcal{M}_\infty(AP)}, \varphi_{\xi,-}|_{\mathcal{M}_\infty(AP)} \right). \quad (2.40)$$

Como la fibra $\mathcal{M}_\infty(AP)$ es homeomorfa a $\mathcal{M}(AP)$ siendo \mathbf{R}_B la compactificación de Bohr de \mathbf{R} , los valores de las funciones casi periódicas $\varphi_{\xi,\pm}$ en $\mathcal{M}_\infty(AP)$ determinan completamente estas funciones en \mathbf{R} . Más aún, por (2.40), los mapeos

$$\gamma_\pm : \varphi_\xi|_{\mathcal{M}_\infty(SAP)} \mapsto \varphi_{\xi,\pm}|_{\mathcal{M}_\infty(AP)} \mapsto \varphi_{\xi,\pm}$$

son homomorfismos de álgebras de Banach de $SAP|_{\mathcal{M}_\infty(SAP)}$ sobre AP . Por lo tanto los mapeos

$$\nu_{\xi,\pm} = \gamma_\pm \circ \beta_\xi : [SO, SAP] \rightarrow AP \quad (2.41)$$

son homomorfismos de álgebras de Banach bien definidos que actúan por la regla

$$\nu_{\xi,\pm} \varphi = \varphi_{\xi,\pm}, \quad \xi \in \mathcal{M}_\infty(SO).$$

Claramente, el C^* -álgebra $[SO, SAP]$ consiste de los límites uniformes de sucesiones de funcionales de la forma

$$c_k = \sum_{i=1}^{m_k} b_{i,k} a_{i,k} \quad (2.42)$$

donde $b_{i,k} \in SO$, $a_{i,k} \in SAP$. Sean $\nu_\pm : SAP \rightarrow AP$ los homomorfismos de álgebras de Banach dados para funciones $a = a_+ u_+ + a_- u_- + a_0 \in SAP$, donde $u_\pm(x) = 2^{-1}(1 \pm \tanh x)$, $a_\pm \in AP$, $a_0 \in C_0(\dot{\mathbf{R}})$ y $a(\infty) = 0$, por

$$\nu_\pm(a_+ u_+ + a_- u_- + a_0) = a_\pm.$$

De aquí, si $c \in [SO, SAP]$ y $c = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ donde c_k están dados por (2.42), entonces para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los mapeos (2.41) actúan por la regla

$$\nu_{\xi,\pm} c = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} \xi(b_{i,k}) \nu_\pm(a_{i,k}). \quad (2.43)$$

De las Proposiciones 2.36 y 2.34 (ii) se sigue que para cada conjunto $\{b_{i,k}\} \subset SO$ a lo más numerable y cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, existe una sucesión $g = \{g_n\}$ que tiende a ∞ tal que para cada $x \in \mathbf{R}$,

$$\xi(b_{i,k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{i,k}(x + g_n). \quad (2.44)$$

La convergencia en (2.44) es uniforme en subconjuntos compactos de \mathbf{R} .

Ya que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de ε -casi períodos (ε -traslaciones) de una función $a \in AP$ es relativamente denso [52, Capítulo 6], usando el proceso diagonal y los argumentos de

la prueba del [60, Lema 1] es posible encontrar nuevas sucesiones $g_{\pm} = \{g_n^{\pm}\}$ que tienden a $\pm\infty$, respectivamente, y tales que para todo i, k y todo $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,k}(x + g_n^{\pm}) = (\nu_{\pm}(a_{i,k}))(x) \quad (2.45)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{i,k}(x + g_n^{\pm}) = \xi(b_{i,k}), \quad (2.46)$$

la convergencia en (2.45) es uniforme en \mathbf{R} y en (2.46) la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de \mathbf{R} . Consecuentemente, de (2.45), (2.46), y (2.43) se sigue que

$$(\nu_{\xi, \pm} c)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(x + g_n^{\pm}), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.47)$$

para la función dada

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} b_{i,k} a_{i,k} \in [SO, SAP].$$

Por lo tanto, para cada $c \in [SO, SAP]$ y cada $\xi \in \mathcal{M}_{\infty}(SO)$ existen sucesiones $g_{\pm} = \{g_n^{\pm}\} \rightarrow \pm\infty$ que nos permiten calcular las imágenes $\nu_{\xi, \pm} c$ de los homomorfismos $\nu_{\xi, \pm} : [SO, SAP] \rightarrow AP$.

Finalmente, la existencia de operadores límite para cI , $c \in [SO, SAP]$ que se sigue de las Proposiciones 2.33 y 2.34 nos permite definir $(cI)_{g_{\pm}}$ como operadores de multiplicación por funciones en AP . Eligiendo sucesiones g_{\pm} asociadas con un punto $\xi \in \mathcal{M}_{\infty}(SO)$ de acuerdo a la Proposición 2.36 y haciendo uso de las propiedades (2.43) y (2.47) de los homomorfismos $\nu_{\xi, \pm}$ uno puede generalizar (2.37) y definir

$$(cI)_{g_{\pm}} = c_{\xi, \pm} I \quad \text{para cada } c \in [SO, SAP] \text{ y cada } \xi \in \mathcal{M}_{\infty}(SO) \quad (2.48)$$

donde $c_{\xi, \pm} = \nu_{\xi, \pm} c$. Notemos que (2.48) no es cierto, en general, para sucesiones arbitrarias g_{\pm} que tienden a $\pm\infty$.

Remarquemos que los resultados de esta sección pueden ser generalizados al caso matricial, entrada a entrada.

3. Operadores de Wiener-Hopf en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$

3.1. Representación de funciones semi-casi periódicas

Sea $V_1(\mathbf{R}) \subset PC$ el álgebra de Banach de todas las funciones $f : \overline{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}$ de variación total acotada equipada con la norma

$$\|f\|_V := \|f\|_{L^{\infty}(\mathbf{R})} + V_1(f). \quad (3.1)$$

Ahora establecemos el siguiente análogo con pesos de un resultado de Sarason [68].

Fijemos u , una función real monótona creciente en $C(\overline{\mathbf{R}})$ tal que $u(-\infty) = 0$ y $u(\infty) = 1$. Como $\|u\|_{\infty} = V_1(u) = 1$, donde $V_1(u)$ es la variación total de u , entonces $u \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. Por ejemplo, podemos tomar $u(x) = \tanh x$.

Proposición 3.1 *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces cada función $a \in SAP_{p,w}$ puede ser representada de forma única de la siguiente manera:*

$$a = (1 - u)a_l + ua_r + a_0 \quad (3.2)$$

donde $a_l, a_r \in AP_{p,w}$, $a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $a_0(\infty) = 0$. Los mapeos $a \mapsto a_l$ y $a \mapsto a_r$ son homomorfismos de álgebras de Banach (continuos) de $SAP_{p,w}$ sobre $AP_{p,w}$.

Demostración. Si $a \in AP_{p,w}$, $\psi \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $\psi(\infty) = 0$, entonces $a\psi \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $(a\psi)(\infty) = 0$. En efecto, podemos aproximar ψ en $M_{p,w}$ por funciones en $V_1(\mathbf{R})$ continuas que se anulan en ∞ . Además, tales funciones en $V_1(\mathbf{R})$ las podemos aproximar en la norma de $V_1(\mathbf{R})$ por funciones continuas $\psi_n \in V_1(\mathbf{R})$ que toman valor cero en vecindades de ∞ . De aquí, $\|\psi - \psi_n\|_{M_{p,w}} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y $a\psi_n \in C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$, lo cual implica en vista de la estimación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a\psi - a\psi_n\|_{M_{p,w}} \leq \|a\|_{M_{p,w}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi - \psi_n\|_{M_{p,w}} = 0 \quad (3.3)$$

que $a\psi \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $(a\psi)(\infty) = 0$.

Si $a \in AP_{p,w}$, entonces $a = (1-u)a + ua$ es una representación de a en la forma (3.2). Para $f \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, la función $f_0 = f - (1-u)f(-\infty) - uf(+\infty)$ pertenece a $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $f_0(\infty) = 0$. Por lo tanto,

$$f = (1-u)f(-\infty) + uf(+\infty) + f_0$$

es una representación de f en la forma deseada. Sean $a_l, a_r, b_l, b_r \in AP_{p,w}$ y $a_0, b_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ con $a_0(\infty) = 0$ y $b_0(\infty) = 0$. Tenemos que

$$((1-u)a_l + ua_r + a_0)((1-u)b_l + ub_r + b_0) = (1-u)^2 a_l b_l + u^2 a_r b_r + c_0 \quad (3.4)$$

con alguna $c_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $c_0(\infty) = 0$. Como $(1-u)^2 - (1-u)$ y $u^2 - u$ están en $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y se anulan en infinito, se sigue que (3.4) es de la forma

$$(1-u)a_l b_l + ua_r b_r + d_0 \quad (3.5)$$

con $d_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $d_0(\infty) = 0$. Por lo tanto, $SAP_{p,w}$ es la cerradura en $M_{p,w}$ del conjunto

$$\left\{ (1-u)a_l + ua_r + a_0 : a_l, a_r \in AP_{p,w}, a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}), a_0(\infty) = 0 \right\}, \quad (3.6)$$

que en realidad es un álgebra. Sólo resta probar que el conjunto (3.6) es cerrado. De aquí, habremos acabado la demostración si probamos que si a es de la forma (3.2), entonces

$$\|a_l\|_{M_{p,w}} \leq \kappa_p \|a\|_{M_{p,w}}, \quad \|a_r\|_{M_{p,w}} \leq \kappa_p \|a\|_{M_{p,w}} \quad (3.7)$$

para alguna constante $\kappa_p < \infty$ independiente de a .

Verificaremos la segunda desigualdad en (3.7). Sea $a = (1-u)a_l + ua_r + a_0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a_l y a_r son polinomios casi periódicos y que $a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ tiene soporte compacto. Mas aún, también podemos suponer que existe un punto $x_0 > 0$ tal que $u(x) = 0$ para todo $x < -x_0$ y $u(x) = 1$ para todo $x > x_0$. Por el Lema 2.16, existe una sucesión $h_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_r - (a_r)_{h_n}\|_{\infty} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|a'_r - (a'_r)_{h_n}\|_{\infty} = 0 \quad (3.8)$$

donde $(a_r)_{h_n}(x) := a_r(x + h_n)$. Probaremos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{h_n} W^0(a) e_{-h_n} I) = W^0(a_r) \quad \text{en el espacio } L^p(\mathbf{R}, w). \quad (3.9)$$

Tomando en cuenta la igualdad

$$e_{h_n} W^0(a) e_{-h_n} I = W^0(a_{h_n}) \quad (3.10)$$

donde $a_{h_n}(x) := a(x + h_n)$, tenemos que probar que

$$\|W^0(a_{h_n} - a_r)f\|_{p,w} \rightarrow 0 \quad \text{para cada } f \in L^p(\mathbf{R}, w). \quad (3.11)$$

Por el Lema 2.23, el conjunto \mathcal{Y} de todas las $f \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ para las cuales $\mathcal{F}f$ tiene soporte compacto es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$. Como los operadores $W^0(a_{h_n} - a_r)$ son uniformemente acotados en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$, es suficiente demostrar (3.11) para $f \in \mathcal{Y}$.

Fijemos $f \in \mathcal{Y}$. Sea χ la función característica de un intervalo acotado $J \subset \mathbf{R}$ que contiene $\text{supp } \mathcal{F}f$. Entonces

$$\|W^0(a_{h_n} - a_r)f\|_{p,w} = \|\mathcal{F}^{-1}(a_{h_n} - a_r)\chi\mathcal{F}f\|_{p,w}.$$

Para h_n suficientemente grande y $x \in J$, tenemos

$$\begin{aligned} (a_{h_n}(x) - a_r(x))\chi(x) &= (1 - u(x + h_n))a_l(x + h_n)\chi(x) \\ &\quad + u(x + h_n)a_r(x + h_n)\chi(x) - a_r(x)\chi(x) + a_0(x + h_n)\chi(x) \\ &= (a_r(x + h_n) - a_r(x))\chi(x) =: b_n(x)\chi(x), \end{aligned}$$

de aquí

$$\|\mathcal{F}^{-1}(a_{h_n} - a_r)\chi\mathcal{F}f\|_{p,w} = \|\mathcal{F}^{-1}(b_n\chi)\mathcal{F}f\|_{p,w} \leq \|W^0(b_n\chi)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \|f\|_{p,w}.$$

Por la desigualdad de Stechkin,

$$\|W^0(b_n\chi)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \leq \|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} (\|b_n\chi\|_\infty + V_1(b_n\chi)). \quad (3.12)$$

Como $\|b_n\chi\|_\infty = \|b_n\|_\infty$ y

$$V_1(b_n\chi) \leq 2\|b_n\|_\infty + \|b_n'\|_\infty |\text{supp } \chi|,$$

deducimos de (3.8) que el lado derecho de (3.12) tiende a cero cuando $h_n \rightarrow \infty$. Esto completa la prueba de (3.11) y por lo tanto la de (3.9).

Aplicando ahora el teorema de Banach-Steinhaus, deducimos de (3.9) que

$$\|W^0(a_r)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|e_{h_n} W^0(a) e_{-h_n} I\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \leq \|W^0(a)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}.$$

Por lo tanto, $\|a_r\|_{M_{p,w}} \leq \|a\|_{M_{p,w}}$. Análogamente, obtenemos la primera desigualdad en (3.7).

De (3.7) se deduce que la representación (3.2) es única. Combinando (3.7), (3.4) y (3.5) se puede ver que los mapeos $a \mapsto a_l$ y $a \mapsto a_r$ son homomorfismos de álgebras de Banach (continuos) de $SAP_{p,w}$ sobre $AP_{p,w}$. ■

3.2. Aplicaciones del teorema de Bochner-Phillips

Para $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, sea $\mathcal{D}_{p,w}$ la cerradura en $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))$ del conjunto

$$\mathcal{D}_{p,w}^0 = \left\{ \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda : d_\lambda \in L^\infty(\mathbf{R}), R_0 \subset \mathbf{R} \text{ es un conjunto finito} \right\} \subset \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w)).$$

Lema 3.2 Dado $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, para cada $h \in \mathbf{R}$ sea $N_h : \mathcal{D}_{p,w}^0 \rightarrow L^\infty(\mathbf{R})$ definido por $B = \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda \mapsto d_h$, donde $d_h = 0$ si $h \notin R_0$. Entonces N_h se extiende a un operador lineal acotado suprayectivo $N_h : \mathcal{D}_{p,w} \rightarrow L^\infty(\mathbf{R})$ con norma $\|v_{-h}\|_\infty$.

Demostración. Primero probaremos que N_h es acotado en $\mathcal{D}_{p,w}^0$ en el caso $w = 1$. Ya que $N_h(B) = N_0(BU_{-h})$ es suficiente demostrar el lema para $h = 0$. Fijemos un conjunto finito $R_0 \subset \mathbf{R}$ y un operador $B = \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda \in \mathcal{D}_{p,1}^0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in R_0$ y $\|d_0\|_\infty = \sup \operatorname{ess}_{x \in \mathbf{R}} |d_0(x)| > 0$. Fijemos $\varepsilon \in (0, \|d_0\|_\infty)$. Entonces existe un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ tal que para cada vecindad $V_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x_0 el conjunto $I_\delta := \{x \in V_\delta(x_0) : |d_0(x)| \geq \|d_0\|_\infty - \varepsilon\}$ tiene medida de Lebesgue positiva. Ahora fijemos $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in R_0 \setminus \{0\}$,

$$(x_0 - \delta + \lambda, x_0 + \delta + \lambda) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \emptyset,$$

y sea $I := I_\delta$. De aquí $(I + \lambda) \cap I = \emptyset$ para todo $\lambda \in R_0 \setminus \{0\}$, $|I| = \operatorname{mes} I > 0$ y $|d_0(x)| \geq \|d_0\|_\infty - \varepsilon > 0$ para todo $x \in I$. Definiendo $\tilde{d}_0(x) := |d_0(x)|/d_0(x)$ para cada $x \in I$, deducimos que la función característica de I , χ_I satisface las relaciones

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} (B\chi_I)(x) \chi_I(x) \tilde{d}_0(x) dx &= \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda(x) \chi_I(x - \lambda) \right) \chi_I(x) \tilde{d}_0(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} d_0(x) \chi_I(x) \tilde{d}_0(x) dx = \int_I |d_0(x)| dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tomando $\varphi := \chi_I$ y $\bar{\psi} := \chi_I \tilde{d}_0$, deducimos de la igualdad

$$\|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = \sup_{0 \neq \varphi \in L^p(\mathbf{R})} \sup_{0 \neq \psi \in L^q(\mathbf{R})} \frac{\left| \int_{\mathbf{R}} (B\varphi)(x) \overline{\psi(x)} dx \right|}{\|\varphi\|_p \|\psi\|_q},$$

donde $1/p + 1/q = 1$, y de las relaciones (3.13) que

$$\|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} \geq \frac{\left| \int_{\mathbf{R}} (B\chi_I)(x) \chi_I(x) \tilde{d}_0(x) dx \right|}{\|\chi_I\|_p \|\chi_I\|_q} = \frac{\int_I |d_0(x)| dx}{|I|} \geq \|d_0\|_\infty - \varepsilon,$$

lo que implica que $\|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} \geq \|d_0\|_\infty$. Consecuentemente, $\|N_0(B)\|_\infty \leq \|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))}$ pues $N_0(B) = d_0$. Como $N_h(B) = N_0(BU_{-h})$ y $\|U_\lambda\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = 1$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, deducimos que

$$\|N_h(B)\|_\infty \leq \|BU_{-h}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = \|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))}.$$

Si $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ es arbitrario, junto con el operador $B = \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda \in \mathcal{D}_{p,w}^0$ consideremos el operador $wBw^{-1}I = \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda v_{-\lambda}^{-1} U_\lambda \in \mathcal{D}_{p,1}^0 \subset \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$. Por la parte ya probada, tenemos

$$\|d_h v_{-h}^{-1}\|_\infty \leq \|wBw^{-1}I\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = \|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))},$$

lo que implica que

$$\|N_h(B)\|_\infty = \|d_h\|_\infty \leq \|v_{-h}\|_\infty \|d_h v_{-h}^{-1}\|_\infty \leq \|v_{-h}\|_\infty \|B\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}.$$

De aquí, para cada $h \in \mathbf{R}$, el operador N_h se extiende por continuidad a todo $\mathcal{D}_{p,w}$, y

$$\|N_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D}_{p,w}, L^\infty(\mathbf{R}))} \leq \|v_{-h}\|_\infty. \quad (3.14)$$

Por otra parte, si $B_0 = v_{-h}U_h$, entonces

$$\|B_0\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} = \|v_{-h}v_{-h}^{-1}U_h\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = 1,$$

y por lo tanto

$$\|N_h(B_0)\|_\infty = \|v_{-h}\|_\infty = \|v_{-h}\|_\infty \|B_0\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}. \quad (3.15)$$

Finalmente, de (3.14) y (3.15) se sigue que $\|N_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D}_{p,w},L^\infty(\mathbf{R}))} = \|v_{-h}\|_\infty$. ■

Para $1 < p < \infty$, y $w \in A_p^0$, sea \mathcal{V}^W el conjunto de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))$ que pueden ser escritos en la forma

$$A = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} a_\lambda U_{-\lambda}, \quad a_\lambda \in L^\infty(\mathbf{R}) \quad \text{y} \quad \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \|a_\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|U_{-\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} < \infty, \quad (3.16)$$

donde $a_\lambda \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable de $\lambda \in \mathbf{R}$.

Obviamente \mathcal{V}^W es un álgebra de Banach con la norma

$$\|A\|_W := \sum_{\lambda} \|a_\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|U_{-\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}. \quad (3.17)$$

Sea \mathbf{R}_B la compactificación de Bohr de \mathbf{R} .

Siguiendo la demostración de [14, Teorema 19.10] basada en el teorema de Bochner-Phillips [8] (también ver [14, Teorema 9.5]), obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3 *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces el álgebra \mathcal{V}^W es inversamente cerrada en $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))$, i. e. si un operador en \mathcal{V}^W es invertible en $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))$, entonces el operador inverso también está en \mathcal{V}^W .*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{V}^W$ el operador dado por (3.16) y supongamos que A es invertible en $E := \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))$. Sean $C(\mathbf{R}_B, E)$ el conjunto de las funciones continuas de \mathbf{R}_B en E y $W(\mathbf{R}_B, E)$ el conjunto de todas las funciones en $C(\mathbf{R}_B, E)$ que tienen serie de Fourier absolutamente convergente (ver [14, sección 9.3]).

Definamos $a : \mathbf{R}_B \rightarrow E$, por $a(\chi) = \sum_{\lambda} \chi(\lambda) a_\lambda U_{-\lambda}$. De (3.16) se tiene que $a \in W(\mathbf{R}_B, E)$. Sea $e_h(\lambda) := e^{i\lambda h}$. Claramente

$$e_h^{-1} U_{-\lambda} e_h I = e^{i\lambda h} U_{-\lambda}. \quad (3.18)$$

Además los operadores $a_\lambda I$ conmutan con cada $e_h I$, i. e.,

$$e_h a_\lambda I = a_\lambda e_h I, \quad h \in \mathbf{R}. \quad (3.19)$$

Usando (3.18) y (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned} a(e_h) &= \sum_{\lambda} e_h(\lambda) a_\lambda U_{-\lambda} = \sum_{\lambda} a_\lambda e_h(\lambda) U_{-\lambda} = \sum_{\lambda} a_\lambda e_h^{-1} U_{-\lambda} e_h I \\ &= e_h^{-1} \left(\sum_{\lambda} a_\lambda U_{-\lambda} \right) e_h I = e_h^{-1} A e_h I. \end{aligned}$$

De aquí

$$\|a^{-1}(e_h)\|_E = \|e_h^{-1} A^{-1} e_h I\|_E = \|A^{-1}\|_E$$

para todo $h \in \mathbf{R}$, y como \mathbf{R} es denso en \mathbf{R}_B , podemos concluir que a es invertible en $C(\mathbf{R}_B, E)$.

El teorema de Bochner-Phillips implica que

$$a^{-1} \in W(\mathbf{R}_B, E), \quad a^{-1}(\chi) = \sum_{\lambda} \chi(\lambda)c_{\lambda}, \quad c_{\lambda} \in E, \quad \sum_{\lambda} \|c_{\lambda}\| < \infty$$

y $c_{\lambda} \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable de $\lambda \in \mathbf{R}$. En particular

$$A^{-1} = a^{-1}(e_0) = \sum_{\lambda} e_0(\lambda)c_{\lambda} = \sum_{\lambda} c_{\lambda}.$$

Sólo falta demostrar que existen $d_{\lambda} \in L^{\infty}(\mathbf{R})$ tales que $c_{\lambda} = d_{\lambda}U_{-\lambda}$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$. De (3.18) y (3.19),

$$e_h^{-1}a(e_s)e_h I = \sum_{\lambda} e_h^{-1}e^{i\lambda s}a_{\lambda}U_{-\lambda}e_h I = \sum_{\lambda} e^{i\lambda s}a_{\lambda}e_h^{-1}U_{-\lambda}e_h I = \sum_{\lambda} e^{i\lambda s}a_{\lambda}e^{i\lambda h}U_{-\lambda} = a(e_{s+h}),$$

de donde $e_h^{-1}a^{-1}(e_s)e_h I = a^{-1}(e_{s+h})$. Como $a^{-1}(e_{\nu}) = \sum_{\lambda} e^{i\lambda \nu}c_{\lambda}$, obtenemos

$$e_h^{-1}\left(\sum_{\lambda} e^{i\lambda s}c_{\lambda}\right)e_h I = \sum_{\lambda} e^{i\lambda s}e^{i\lambda h}c_{\lambda},$$

y comparando los coeficientes de $e^{i\lambda s}$ se tiene que $e_h^{-1}c_{\lambda}e_h I = e^{i\lambda h}c_{\lambda}$. Por lo tanto

$$e_h^{-1}c_{\lambda}e_h U_{\lambda} = e^{i\lambda h}c_{\lambda}U_{\lambda}.$$

Y por (3.18), $e_h U_{\lambda} = e^{i\lambda h}U_{\lambda}e_h$, lo que implica que $e_h^{-1}c_{\lambda}U_{\lambda}e_h = c_{\lambda}U_{\lambda}$. Consecuentemente $d_{\lambda} = c_{\lambda}U_{\lambda}$ conmuta con cada $e_h I$, $h \in \mathbf{R}$. De aquí (ver [54]) $d_{\lambda} \in L^{\infty}(\mathbf{R})$. Entonces

$$A^{-1} = \sum_{\lambda} c_{\lambda} = \sum_{\lambda} d_{\lambda}U_{-\lambda}.$$

Por lo tanto $A^{-1} \in \mathcal{V}^W$. ■

Necesitamos también el subálgebra de Banach \mathcal{U}^W de \mathcal{V}^W que consiste de los operadores $A = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} a_{\lambda}U_{\lambda} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))$ con coeficientes constantes $a_{\lambda} \in \mathbf{C}$, donde $a_{\lambda} \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable $\lambda \in \mathbf{R}$ y (3.17) toma la forma

$$\|A\|_W := \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} |a_{\lambda}| \|U_{\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}. \quad (3.20)$$

Teorema 3.4 *Si $1 < p < \infty$, y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces el álgebra \mathcal{U}^W es inversamente cerrada en $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{U}^W$ y supongamos que A es invertible en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$. Ya que $\mathcal{U}^W \subset \mathcal{V}^W$, el Teorema 3.3 implica que $A^{-1} \in \mathcal{V}^W$ y por lo tanto

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} d_{\lambda}U_{\lambda}, \quad \text{con } d_{\lambda} \in L^{\infty}(\mathbf{R}), \quad (3.21)$$

$$\|A^{-1}\|_W := \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \|d_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\mathbf{R})} \|U_{\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} < \infty.$$

Por otra parte, cada operador $A \in \mathcal{U}^W$ conmuta con cada operador U_h ($h \in \mathbf{R}$), y si A es invertible, entonces su operador inverso A^{-1} también conmuta con todos los operadores U_h . Consecuentemente, para el operador (3.21) y cada $h \in \mathbf{R}$, obtenemos

$$A^{-1} = U_h A^{-1} U_h^{-1} = U_h \left(\sum_{\lambda} d_{\lambda} U_{\lambda} \right) U_h^{-1} = \sum_{\lambda} d_{\lambda}(x-h) U_{\lambda},$$

de donde,

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda}(x) U_{\lambda} = \sum_{\lambda} d_{\lambda}(x-h) U_{\lambda}.$$

Por el Lema 3.2, concluimos que $d_{\lambda}(x) = d_{\lambda}(x-h)$ para todo $x, h \in \mathbf{R}$ y todo λ , lo que implica que todos las d_{λ} son funciones constantes en \mathbf{C} . Por lo tanto $A^{-1} \in \mathcal{U}^W$. ■

Proposición 3.5 *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces las álgebras $AP_{p,w}$ y $SAP_{p,w}$ son inversamente cerradas en AP y SAP , respectivamente, y de aquí son inversamente cerradas en $L^{\infty}(\mathbf{R})$.*

Demostración. Para $AP_{p,w}$, es consecuencia inmediata del Teorema 3.4 y (2.20). Usaremos este resultado para probar que $SAP_{p,w}$ es inversamente cerrado en SAP . Por la Proposición 3.1 cada $a \in SAP_{p,w}$ es de la forma (3.2). Supongamos que

$$a = (1-u)a_l + ua_r + a_0 \in GSAP.$$

De nuevo por la Proposición 3.1, para $p=2$, se sigue que $a_l, a_r \in GAP$, y como $a_l, a_r \in AP_{p,w}$, concluimos que $a_l, a_r \in GAP_{p,w}$. Definamos $b \in SAP_{p,w}$ por $b := (1-u)a_l^{-1} + ua_r^{-1}$. Claramente, b es acotada lejos de cero fuera de algún intervalo compacto $[-x_0, x_0]$. Elijamos $b_0 \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ tal que $\text{supp } b \subset [-x_0, x_0]$ y $b+b_0 \in GL^{\infty}(\mathbf{R})$. Como $b_0 \in C_{p,w}(\mathbf{R})$ tenemos que $b+b_0 \in SAP_{p,w}$. Sea $c := a(b+b_0)$. Obviamente $c \in SAP_{p,w}$. Como $c_l = c_r = 1$, vemos que en realidad $c \in C_{p,w}(\mathbf{R})$. De aquí $c^{-1} = (b+b_0)^{-1}a^{-1} \in C_{p,w}(\mathbf{R})$, lo que implica que $a^{-1} = c^{-1}(b+b_0) \in SAP_{p,w}$. ■

Corolario 3.6 *Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Si $a \in G[SAP_{p,w}]$, entonces $a_l, a_r \in G[AP_{p,w}]$.*

3.3. Invertibilidad de símbolos de operadores de Wiener-Hopf

Teorema 3.7 *Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Si $a \in SAP_{p,w}$ y $W(a)$ es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ entonces $a \in GSAP_{p,w}$.*

La demostración de este teorema está contenida en el capítulo 4 sección 4.2 en el caso matricial (ver el Teorema 4.7).

3.4. Invertibilidad de representaciones casi periódicas

Sean \mathcal{A} y \mathcal{E} las subálgebras cerradas más pequeñas de $B(L^p(\mathbf{R}, w))$ que contienen los operadores $\chi_{\pm}I$ y los conjuntos $\{W^0(a) : a \in AP_{p,w}\}$ y $\{W^0(a) : a \in SAP_{p,w}\}$, respectivamente.

Teorema 3.8 *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces los mapeos definidos sobre los generadores del álgebra \mathcal{E} por*

$$\begin{aligned} \mu_r : \chi_{\pm}I &\rightarrow \chi_{\pm}I, \quad \mu_r : W^0(a) \rightarrow W^0(a_r) \quad (a \in SAP_{p,w}), \\ \mu_l : \chi_{\pm}I &\rightarrow \chi_{\pm}I, \quad \mu_l : W^0(a) \rightarrow W^0(a_l) \quad (a \in SAP_{p,w}), \end{aligned}$$

se extienden continuamente a homomorfismos de álgebras de Banach de \mathcal{E} sobre \mathcal{A} de forma tal que

$$\|\mu_r(A)\| \leq \|A\|_{ess}, \quad \|\mu_l(A)\| \leq \|A\|_{ess} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{E},$$

donde $\|A\|_{ess} := \inf \left\{ \|A + K\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} : K \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}, w)) \right\}$.

Demostración. Se probará el teorema sólo para μ_r ; la prueba para μ_l es análoga. Por analogía con [14, Lema 10.1], podemos ver que si $h_n \rightarrow +\infty$, entonces $e_{-h_n}I$ converge débilmente a cero en $L^p(\mathbf{R}, w)$. En efecto, si $f \in L^p(\mathbf{R}, w)$ y $g \in L^q(\mathbf{R}, w^{-1})$, entonces

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-ith_n} f(t) \overline{g(t)} dt = (f\overline{g})^\wedge(-h_n),$$

como $f\overline{g} \in L^1(\mathbf{R})$, y por lo tanto $(f\overline{g})^\wedge \in C_0(\dot{\mathbf{R}})$, se sigue que $(f\overline{g})^\wedge(-h_n) \rightarrow 0$.

Para cada operador compacto $K \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))$, la convergencia débil de $e_{-h_n}I$ a cero en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$ implica que

$$e_{h_n} K e_{-h_n} I \rightarrow 0 \text{ fuertemente.} \quad (3.22)$$

Sea $A = \sum_j \prod_k A_{jk}$, donde la suma y el producto son finitos y A_{jk} son de la forma $\chi_{\pm} I$ o de la forma

$$W^0(a_{jk}) = W^0((1-u)a_{jk}^l + ua_{jk}^r + a_{jk}^0) \quad (3.23)$$

donde a_{jk}^l, a_{jk}^r son polinomios casi periódicos y $a_{jk}^0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ tienen soporte compacto en \mathbf{R} . Más aún, podemos suponer que existe un punto $x_0 > 0$ tal que $u(x) = 0$ para cada $x < -x_0$ y $u(x) = 1$ para cada $x > x_0$. Definamos

$$\mu_r(A) := \sum_j \prod_k \mu_r(A_{jk}) \quad (3.24)$$

con $\mu_r(\chi_{\pm} I) = \chi_{\pm} I$ y $\mu_r(W^0(a_{jk})) = W^0(a_{jk}^r)$. El teorema se seguirá si probamos que

$$\|\mu_r(A)\| \leq \|A + K\| \text{ para cada } K \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}, w)). \quad (3.25)$$

Por el Lema 2.16, existe una sucesión $h_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\|(a_{jk}^r)_{h_n} - a_{jk}^r\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad \|((a_{jk}^r)')_{h_n} - (a_{jk}^r)'\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

donde la prima denota la derivada y $(a_{jk}^r)_h(x) = a_{jk}^r(x+h)$. Haciendo uso de (3.26), deducimos de la prueba de la Proposición 3.1 (ver (3.9)) que

$$e_{h_n} W^0(a_{jk}) e_{-h_n} I \rightarrow W^0(a_{jk}^r) = \mu_r(W^0(a_{jk})) \text{ fuertemente.} \quad (3.27)$$

Tomando en cuenta (3.24), (3.9) y el hecho de que

$$e_{h_n} \chi_{\pm} e_{-h_n} I = \chi_{\pm} I \rightarrow \chi_{\pm} I = \mu_r(\chi_{\pm} I),$$

concluimos que

$$e_{h_n} A e_{-h_n} I \rightarrow \mu_r(A) \text{ fuertemente.}$$

Esto y (3.22) implican que para cada $K \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}, w))$,

$$e_{h_n} (A + K) e_{-h_n} I \rightarrow \mu_r(A) \text{ fuertemente.}$$

Claramente, de esto último se tiene (3.25). \blacksquare

Corolario 3.9 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Si $A \in \mathcal{E}$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}, w)$ entonces $\mu_l(A)$ y $\mu_r(A)$ son invertibles en $L^p(\mathbf{R}, w)$.

La demostración de este corolario está contenida en el capítulo 4 (ver Corolario 4.9).
El Corolario 3.9 implica la siguiente afirmación.

Corolario 3.10 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Si $a \in SAP_{p,w}$ y $W(a)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, entonces $W(a_l)$ y $W(a_r)$ son invertibles en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.

Corolario 3.11 Para $a \in AP_{p,w}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$;
- (b) $W(a)$ es invertible en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.

3.5. El lema de Sarason y sus aplicaciones

Dado $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, sea $APW_{p,w}$ el subálgebra de Banach de $M_{p,w}$ que está compuesta por las series $a = \sum_{\lambda} a_{\lambda} e_{\lambda}$ con coeficientes $a_{\lambda} \in \mathbf{C}$ tal que los operadores $W^0(a)$ pertenecen al álgebra $\mathcal{U}^W \subset \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))$. Entonces las funciones $a \in APW_{p,w}$ tienen la norma

$$\|a\|_W := \|W^0(a)\|_W := \sum_{\lambda} |a_{\lambda}| \|U_{\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))},$$

donde la norma $\|U_{\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} = \|v_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\mathbf{R})}$ realmente depende de p y w porque la función $v_{\lambda}(x) = \frac{w(x+\lambda)}{w(x)}$ está definida para pesos $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Notemos que las álgebras $APW_{p,w}$ y \mathcal{U}^W son conmutativas.

Sea $AP_{p,w}^+$ (resp. $AP_{p,w}^-$) la cerradura en $M_{p,w}$ del conjunto de todos los polinomios casi periódicos $\sum_j a_j e_{\lambda_j}$ con $\lambda_j \geq 0$ (resp. $\lambda_j \leq 0$). Junto con las subálgebras de Banach $AP_{p,w}^{\pm}$ de $M_{p,w}$ consideremos las subálgebras de Banach $APW_{p,w}^{\pm} := APW_{p,w} \cap AP_{p,w}^{\pm}$ de $APW_{p,w}$. Claramente,

$$AP^0 \subset APW_{p,w} \subset AP_{p,w} \subset AP, \quad APW_{p,w}^{\pm} \subset AP_{p,w}^{\pm} \subset AP^{\pm}.$$

Ahora obtenemos el siguiente análogo del lema de Sarason (ver [67] y [14, Lema 3.5]).

Lema 3.12 Si $h \in AP_{p,w}^{\pm}$ y $M(h) = 0$, entonces $hv \in D_{p,w,\pm}$ para cada $v \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. En particular, $e_{\lambda} v \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\pm}^{\infty}$ si $\pm\lambda > 0$.

Demostración. Consideremos el caso en que $h \in AP_{p,w}^+$. Como $D_{p,w,\pm} = \text{alg}\{C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}), H_{p,w,\pm}^{\infty}\}$ es un subálgebra cerrada de $M_{p,w}$ y $AP_{p,w}^+ = \text{alg}_{M_{p,w}}\{e_{\lambda} : \lambda \geq 0\}$, podemos suponer que $h = e_{\alpha}$, con $\alpha > 0$. La función

$$\varphi(z) = \pi \frac{\sin z}{z} \frac{1}{\pi^2 - z^2}$$

es analítica en \mathbf{C} , y existe una constante $M < \infty$ tal que

$$|\varphi(z)| \leq M \frac{e^{|\text{Im } z|}}{1 + |z|^3} \text{ para toda } z \in \mathbf{C}.$$

Definamos

$$\Phi(z) := \int_0^z \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (3.28)$$

Entonces Φ también es analítica en \mathbf{C} . Si $\text{Im } z \geq 0$, tomando la integral (3.28) a lo largo del segmento de línea $[0, z]$ tenemos

$$|e^{iz}\Phi(z)| \leq e^{-\text{Im } z} \int_0^z M \frac{e^{|\text{Im } z|}}{1 + |\zeta|^3} |d\zeta| \leq N < \infty,$$

lo que prueba que $e^{iz}\Phi(z)$ es una función en $H^\infty(\mathbf{C}_+)$. Sea $\sigma = \Phi|_{\mathbf{R}}$ la restricción de Φ a \mathbf{R} . Tenemos

$$\begin{aligned} \sigma(+\infty) &= \int_0^\infty \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{\pi^2 - x^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^\infty \sin x \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-\pi} - \frac{1}{x+\pi} \right) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{2 \sin x}{x} + \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} + \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

y $\sigma(-\infty) = -\sigma(+\infty) = -1$. Además la variación total $V_1(\sigma)$ puede ser estimada por

$$V_1(\sigma) \leq \int_{-\infty}^\infty |\sigma'(x)| dx = \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + |x|^3} < \infty,$$

y la desigualdad de Stechkin implica que $\sigma \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. Consecuentemente, cada función $v \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ puede ser escrita en la forma

$$v(x) = \frac{v(-\infty) + v(+\infty)}{2} + \frac{v(+\infty) - v(-\infty)}{2} \sigma(\alpha x) + v_0(x), \quad (3.29)$$

donde $v_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $v_0(\infty) = 0$. Claramente, podemos aproximar v_0 en $M_{p,w}$ por funciones continuas en $V_1(\mathbf{R})$ que se anulan en ∞ . Además, tales funciones en $V_1(\mathbf{R})$ las podemos aproximar en la norma de $V_1(\mathbf{R})$ por funciones continuas $\psi_n \in V_1(\mathbf{R})$ que toman valor cero en vecindades de ∞ . De aquí, $\|v_0 - \psi_n\|_{M_{p,w}} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $e_\alpha \psi_n \in C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$ para todo n y ya que $e_\alpha \in M_{p,w}$ para $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_\alpha v_0 - e_\alpha \psi_n\|_{M_{p,w}} \leq \|e_\alpha\|_{M_{p,w}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_0 - \psi_n\|_{M_{p,w}} = 0,$$

lo cual implica que $e_\alpha v_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$. Además, como $\sigma \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ y $e_\alpha \in M_{p,w}$, deducimos que $e^{i\alpha x} \sigma(\alpha x)$ es una función en $H_{p,w,+}^\infty = H_+^\infty \cap M_{p,w}$. Finalmente, ya que $e_\alpha v_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ and $e^{i\alpha x} \sigma(\alpha x)$ está en $H_+^\infty \cap M_{p,w}$, de (3.29) se sigue que $e_\alpha v$ es una función en $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,+}^\infty$. Esto implica que $hv \in D_{p,w,+}$. ■

Teorema 3.13 Sean $a, b \in GSAP_{p,w}$ y supongamos que las representaciones casi periódicas a_l, b_l, a_r, b_r están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_l &= \varphi_l^- b_l \varphi_l^+ \text{ con } \varphi_l^\pm \in GAP_{p,w}^\pm, \\ a_r &= \varphi_r^- b_r \varphi_r^+ \text{ con } \varphi_r^\pm \in GAP_{p,w}^\pm, \\ M(\varphi_l^-) &= M(\varphi_r^-), M(\varphi_l^+) = M(\varphi_r^+). \end{aligned}$$

Entonces existen funciones

$$f_{\pm} \in GSAP_{p,w} \cap GD_{p,w,\pm}$$

tales que $a = f_- b f_+$.

La demostración de este resultado se da en el capítulo 4 en el caso matricial (ver el Teorema 4.12).

3.6. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos casi periódicos

El siguiente teorema es el $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ análogo de un resultado de Gohberg/Feldman y Coburn/Douglas (ver [14, Teorema 2.28]).

Teorema 3.14 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $a \in AP_{p,w} \setminus \{0\}$.

- a) Si $a \notin GAP_{p,w}$, entonces $W(a)$ no es semi-Fredholm.
- b) Si $a \in GAP_{p,w}$ y $\kappa(a) > 0$, entonces $W(a)$ es propiamente n -normal e invertible por la izquierda.
- c) Si $a \in GAP_{p,w}$ y $\kappa(a) < 0$, entonces $W(a)$ es propiamente d -normal e invertible por la derecha.
- d) Si $a \in GAP_{p,w}$ y $\kappa(a) = 0$, entonces $W(a)$ es invertible.

Demostración. Supongamos que $W(a)$ es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Por el Teorema 3.7, $a \in GSAP_{p,w}$ y del Corolario 3.6 se sigue que $a \in GAP_{p,w}$. Lo que prueba a).

Ahora supongamos que $a \in GAP_{p,w}$. Por el teorema de Bohr, existen $\kappa(a) \in \mathbf{R}$, y $b \in AP$ tales que $a(x) = e^{i\kappa(a)x} e^{b(x)}$. Como $\ln(ae^{-i\kappa(a)x})$ es una función localmente analítica de $ae^{-i\kappa(a)x} \in GAP_{p,w}$, deducimos de [28, §13] que en realidad $b \in AP_{p,w}$. Sea $p = \sum_j r_j e_{\lambda_j}$ un polinomio casi periódico tal que $b = c + p$ y

$$\|e^c - 1\|_{M_{p,w}} \leq e^{\|c\|_{M_{p,w}}} - 1 < 1. \quad (3.30)$$

Escribamos $p = p_- + p_+$, donde $\Omega(p_-) \subset (-\infty, 0)$ y $\Omega(p_+) \subset [0, \infty)$, en otras palabras p_- contiene los términos de p que tienen $\lambda_j < 0$ y p_+ los que tienen $\lambda_j \geq 0$. Tenemos entonces que

$$a(x) = e^{p_-(x)} e^{c(x)} e^{i\kappa(a)x} e^{p_+(x)}.$$

Donde $e^{p_{\pm}} \in GH_{p,w,\pm}^{\infty}$ y $e^{i\kappa(a)x} \in H_{p,w,\pm}^{\infty}$ si $\pm\kappa(a) \geq 0$. Por lo tanto, por la Proposición 2.27,

$$\begin{aligned} W(a) &= W(e^{p_-})W(e^c)W(e^{i\kappa(a)x})W(e^{p_+}) \quad \text{si } \kappa(a) \geq 0, \\ W(a) &= W(e^{p_-})W(e^{i\kappa(a)x})W(e^c)W(e^{p_+}) \quad \text{si } \kappa(a) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $[W(e^{p_{\pm}})]^{-1} = W(e^{-p_{\pm}})$, y el operador $W(e^c)$ es invertible debido a (3.30). De aquí, por (3.31), las propiedades requeridas de $W(a)$ coinciden con aquellas de $W(e^{i\kappa(a)x})$, lo que implica las partes a)–d) como en [14, Teorema 2.28]. ■

3.7. Invertibilidad de representaciones casi periódicas y factorización canónica

Dados $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, consideramos las álgebras de Banach conmutativas $APW_{p,w}^\pm \subset APW_{p,w}$ definidas en la sección 3.5. Claramente, $APW_{p,w}^\pm \subset H_{p,w,\pm}^\infty$.

Teorema 3.15 *Si $p \in (1, \infty)$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $a \in APW_{p,w}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$;*
- (b) *el operador $W(a)$ es invertible en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$;*
- (c) *la función a tiene factorización canónica derecha $APW_{p,w}$, esto es,*

$$a = a_- a_+ \quad \text{con} \quad a_\pm \in GAPW_{p,w}^\pm. \quad (3.32)$$

Demostración. La implicación (a) \Rightarrow (b) se sigue del Corolario 3.11.

(b) \Rightarrow (c). Si $W(a)$ es invertible en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, entonces $W(a)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, y por el Teorema 3.7, $a \in GAP_{p,w}$. Por otra parte, debido al Teorema 3.4, la invertibilidad de $a \in APW_{p,w}$ en el álgebra $AP_{p,w}$ es equivalente a la invertibilidad de a en el álgebra $APW_{p,w}$ que es similar al álgebra $\mathcal{U}^W = \mathcal{F}^{-1}(APW_{p,w})\mathcal{F}$. Del Teorema 2.10 y [28, §13] deducimos que

$$a(x) = e^{i\kappa(a)x} e^{b(x)} \quad (x \in \mathbf{R}),$$

donde $\kappa(a) \in \mathbf{R}$ es el índice casi periódico de a y $b \in APW_{p,w}$. De aquí,

$$a(x) = a_-(x) e^{i\kappa(a)x} a_+(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \quad (3.33)$$

donde $a_\pm \in APW_{p,w}^\pm$ están dados por

$$a_-(x) = e^{(\tilde{Q}_0 b)(x)}, \quad a_+(x) = e^{(\tilde{P} b)(x)},$$

y para $b = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} b_\lambda e_\lambda \in APW_{p,w}$,

$$\tilde{P}b = \sum_{\lambda \geq 0} b_\lambda e_\lambda, \quad \tilde{Q}_0 b = \sum_{\lambda < 0} b_\lambda e_\lambda.$$

Entonces $a_\pm \in GAPW_{p,w}^\pm$. Por lo tanto los operadores $W(a_\pm)$ son invertibles en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ y sus inversos tienen la forma $(W(a_\pm))^{-1} = W(a_\pm^{-1})$.

Como $GAPW_{p,w} \subset GAP_{p,w}$ y el operador $W(a)$ es invertible en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, el Teorema 3.14 implica que $\kappa(a) = 0$. De aquí, (3.33) toma la forma (3.32), esto es, a tiene una factorización canónica derecha $APW_{p,w}$.

(c) \Rightarrow (a). Como $W(a) = W(a_-)W(a_+)$ y los operadores $W(a_\pm)$ son invertibles en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ de acuerdo con (3.32), se sigue que $W(a)$ es invertible en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ y por lo tanto Fredholm. ■

Si $\|v_\lambda\|_\infty \geq 1$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces

$$GAPW_{p,w} \subset GAPW, \quad GAPW_{p,w}^\pm \subset GAPW^\pm \quad (3.34)$$

en vista de las relaciones

$$\sum_\lambda |a_\lambda| \leq \sum_\lambda |a_\lambda| \|v_\lambda\|_\infty \quad (3.35)$$

y $\|v_\lambda\|_\infty \geq 1$.

Corolario 3.16 Si $\|v_\lambda\|_\infty \geq 1$, $a \in APW_{p,w}$ y $W(a)$ es invertible en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ para algún $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces $W(a)$ es invertible en $L^p(\mathbf{R}_+)$ para todo $p \in (1, \infty)$, y a tiene una factorización canónica derecha APW , esto es,

$$a = a_- a_+ \quad \text{con} \quad a_\pm \in GAPW^\pm. \quad (3.36)$$

Demostración. Como $GAPW_{p,w}^\pm \subset GAPW^\pm$, concluimos que (3.32) es una factorización canónica derecha APW de a , lo que implica que los operadores $W(a_\pm)$ y por lo tanto también $W(a)$ son invertibles en todos los espacios $L^p(\mathbf{R}_+)$ ($1 < p < \infty$) con los mismos inversos que en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. ■

Observación 3.17 De acuerdo con la demostración del Teorema 3.15, podemos ver que la invertibilidad del operador de Wiener-Hopf $W(a)$ con símbolo $a \in APW_{p,w}$ en algún espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ ($1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$) implica la invertibilidad de $W(a)$ en todos los espacios $L^r(\mathbf{R}_+, w)$ con el mismo w y tales $r \in (1, \infty)$ para los que $w \in A_r(\mathbf{R})$. Más aún, por (3.36) y (3.35), los operadores $W(a_\pm)$ y $W(a)$ son invertibles en todos los espacios $L^r(\mathbf{R}, \omega)$ siempre que $\omega \in A_r^0(\mathbf{R})$ y $\|\omega((\cdot) + \lambda)/\omega\|_\infty \leq \|v_\lambda\|_\infty$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

3.8. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-casi periódicos particulares

Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Las demostraciones de los siguientes lemas siguen parcialmente las demostraciones de los Lemas 3.6–3.8 en [14].

Lema 3.18 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ y

$$b(x) := \alpha[1 - u(x)]e^{i\lambda x} + \beta u(x)e^{i\mu x} + b_0(x)$$

con $b_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $b_0(\infty) = 0$. Sea

$$c(x) := \alpha\chi_-(x)e^{i\lambda x} + \beta\chi_+e^{i\mu x}. \quad (3.37)$$

Si $b \in GSAP_{p,w}$ y $0 \notin \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$, entonces $W(b)$ y $W(c)$ son débilmente Φ -equivalentes, en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$.

Demostración. Es claro que la función $p := b^{-1}(c - b)$ pertenece a $PC_{p,w}$, se anula en infinito y es continua en $\dot{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$. Como $c := b(1 + p)$, se deduce del Corolario 2.30 que

$$W(c) = W(b)W(1 + p) + K \quad (3.38)$$

para algún operador compacto K . Ya que $0 \notin \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$, la función $1 + p = b^{-1}c \in PC_{p,w}$ es continua y no cero en $\dot{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$, de lo cual deducimos que

$$\begin{aligned} 0 &\notin \mathcal{H}(1 + p(0 - 0), 1 + p(0 + 0); \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)) \\ &= \frac{1}{b(0)} \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)). \end{aligned}$$

De aquí, el operador $W(1 + p)$ es Fredholm debido al Teorema 2.24. Esto junto con (3.38) y los Teoremas 2.2 y 2.3 demuestran que $W(c)$ y $W(b)$ son débilmente Φ -equivalentes. ■

Lema 3.19 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, y supongamos que $\max\{\lambda, \mu\} > 0$. Si c está dado por (3.37), entonces $\text{Ker } W(c) = \{0\}$ y el complemento algebraico de $\text{Im } W(c)$ en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ es de dimensión infinita.

Demostración. Supongamos que $\mu > 0$. Sean $f_+, g_+ \in L^p(\mathbf{R}_+, w)$ y supongamos que $W(c)f_+ = g_+$. Esto es equivalente a la igualdad $\chi_+ \mathcal{F}^{-1} c \mathcal{F} f_+ = g_+$ y por lo tanto

$$\alpha \chi_+ \mathcal{F}^{-1} e_\lambda \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \chi_- \mathcal{F} f_+ + \beta \chi_+ \mathcal{F}^{-1} e_\mu \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \chi_+ \mathcal{F} f_+ = g_+.$$

Esta última igualdad puede escribirse en la forma

$$\alpha \chi_+ U_\lambda P f_+ + \beta \chi_+ U_\mu Q f_+ = g_+. \quad (3.39)$$

Como $Q = I - P$, (3.39) se cumple si y sólo si

$$\alpha \chi_+ U_\lambda P f_+ - \beta \chi_+ U_\mu P f_+ = g_+ - \beta \chi_+ U_\mu f_+. \quad (3.40)$$

Si $0 < x < \mu$, entonces $\beta \chi_+(x)(U_\mu f_+)(x) = \beta f_+(x - \mu) = 0$, y de aquí (3.40) implica que

$$\alpha(P f_+)(x - \lambda) - \beta(P f_+)(x - \mu) = g_+(x) \text{ para } x \in (0, \mu). \quad (3.41)$$

Ahora supongamos que $f_+ \in \text{Ker } W(c)$, es decir, que $g_+ = 0$. Como $P f_+ \in H_+^p(\mathbf{R}, w)$ y $H_+^p(\mathbf{R}, w)$ es invariante bajo translaciones, el lado izquierdo de (3.41) es una función en $H_+^p(\mathbf{R}, w)$. Como esta función admite una extensión analítica en el semi-plano superior y se anula en $(0, \mu)$, debe anularse casi en todas partes de \mathbf{R} , esto debido al teorema de Luzin-Privalov (ver [61, p. 292] o [59, Corolario 6.14]). Por lo tanto $\alpha U_\lambda P f_+ = \beta U_\mu P f_+$. Insertando esto en (3.39) (con $g_+ = 0$) obtenemos

$$0 = \beta \chi_+ U_\mu P f_+ + \beta \chi_+ U_\mu Q f_+ = \beta \chi_+ U_\mu f_+,$$

y se sigue que $f_+(x - \mu) = 0$ para cada $x > 0$, lo que implica que $f_+ = 0$. Esto demuestra que $\text{Ker } W(c) = \{0\}$.

Ahora definamos $g_+ := \chi_{(0, \epsilon)}$ donde $\epsilon \in (0, \mu)$. El lado izquierdo de (3.41) está otra vez en $H_+^p(\mathbf{R}, w)$, y de aquí $\chi_{(0, \epsilon)}$ debe ser la restricción a $(0, \mu)$ de una función en $H_+^p(\mathbf{R}, w)$. Como $0 < \epsilon < \mu$, esto contradice el teorema de Luzin-Privalov. De aquí $\chi_{(0, \epsilon)} \notin \text{Im } W(c)$. Como las funciones $\chi_{(0, \epsilon)}$ ($\epsilon \in (0, \mu)$) son linealmente independientes, resulta que el complemento algebraico de $W(c)$ es de dimensión infinita. ■

Lema 3.20 Sea

$$b(x) := [1 - u(x)] \mathbf{d}(a_l) e^{i\kappa(a_l)x} + u(x) \mathbf{d}(a_r) e^{i\kappa(a_r)x} + b_0(x),$$

con $b_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, $b_0(\infty) = 0$ y $b \in GSAP_{p,w}$. Si $\kappa(a_l) = 0$ y $\kappa(a_r) > 0$ o si $\kappa(a_l) > 0$ y $\kappa(a_r) = 0$ entonces $W(b)$ es propiamente n -normal.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $\kappa(a_l) = 0$ y $\kappa(a_r) > 0$. Como $b \in GSAP_{p,w}$, del Corolario 4.6 se sigue que $\mathbf{d}(a_l) \mathbf{d}(a_r) \neq 0$. Sean

$$s_1 := \frac{1}{\mathbf{d}(a_l)} (1 - u) + \frac{4}{\mathbf{d}(a_r)} u e_{-\mu}, \quad \mu := \kappa(a_r)$$

y elijamos $s_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, $s_0(\infty) = 0$ tal que $s := s_1 + s_0 \in GSAP_{p,w}$. Aplicando el Lema 3.12 concluimos que $ue_{\pm\mu} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\pm}^\infty$. De aquí por la Proposición 2.27 y el Corolario 2.29 obtenemos

$$\begin{aligned} W(s)W(b) &= [W(1-u)]^2 + W\left(\frac{\mathbf{d}(a_r)}{\mathbf{d}(a_l)}(1-u)ue_\mu\right) + W\left(\frac{4\mathbf{d}(a_r)}{\mathbf{d}(a_l)}(1-u)ue_{-\mu}\right) \\ &+ W(4u^2) + W(s_1b_0) + W(s_0b) + K, \end{aligned}$$

donde K es un operador compacto. Es claro que

$$\delta_0 := \frac{\mathbf{d}(a_r)}{\mathbf{d}(a_l)}(1-u)ue_\mu + \frac{4\mathbf{d}(a_r)}{\mathbf{d}(a_l)}(1-u)ue_{-\mu} + s_1b_0 + s_0b \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}), \quad \delta_0(\infty) = 0$$

y tenemos que

$$W(s)W(b) = [W(1-u)]^2 + W(4u^2 + \delta_0) + K. \quad (3.42)$$

El operador $A := [W(1-u)]^2 + W(4u^2 + \delta_0)$ está en $\text{alg}_{p,w}W(PC)$ y podemos aplicar el Teorema 2.25 a este operador. Tenemos

$$(\Gamma A^\pi)(x, t) = ((\Gamma W^\pi(1-u))(x, t))^2 + (\Gamma W^\pi(4u^2 + \delta_0))(x, t).$$

Para $x \in \mathbf{R}$, esto es

$$(1-u(x))^2 + 4u^2(x) + \delta_0(x) = s(x)b(x) \neq 0,$$

mientras que para $x = \infty$ y $t \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$ tenemos

$$\begin{aligned} &((1-u(+\infty))(1-t) + (1-u(-\infty))t)^2 + 4u^2(+\infty)(1-t) + 4u^2(-\infty)t \\ &= t^2 + 4(1-t) = (t-2)^2, \end{aligned}$$

y como $2 \notin \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$ se sigue del Teorema 2.25 que A es Fredholm.

De (3.42) deducimos que $W(b)$ es Fredholm por la izquierda. Supongamos que $W(b)$ es Fredholm. El Corolario 3.9 implica que $W(b_r)$ es invertible en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Por otra parte, como $\kappa(a_r) > 0$ el Teorema 3.14 implica que $W(b_r)$ es propiamente n -normal e invertible por la izquierda, lo cual contradice la invertibilidad de $W(b_r)$. Por lo tanto $W(b)$ no puede ser Fredholm. Esto implica que $W(b)$ es propiamente n -normal. \blacksquare

Teorema 3.21 *Sea $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Si $a \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \setminus \{0\}$, y $W(a)$ es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, entonces $W(a)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.*

Demostración. Por [57] el peso $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ es equivalente al peso continuo (2.21), y por lo tanto $\nu_0^\pm(p, w) = 1/p$, entonces deducimos del Teorema 2.24 que el espectro esencial de $W(a)$ está dado por

$$a_{p,w}^\#(\dot{\mathbf{R}}) = a(\mathbf{R}) \cup \mathcal{A}(a(+\infty), a(-\infty); 1/p).$$

Si $W(a)$ es propiamente n -normal (resp. propiamente d -normal) en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, entonces perturbando a ligeramente se puede encontrar una función $b \in PC_{p,w}$ tal que $0 \notin b_{p,w}^\#(\dot{\mathbf{R}})$ y $\|b-a\|_{M_{p,w}}$ sea tan pequeña como se quiera. Ya que $0 \notin b_{p,w}^\#(\dot{\mathbf{R}})$, el Teorema 2.24 implica que $W(b)$ es Fredholm. Por otra parte, del Teorema 2.1 se sigue que $W(b)$ sigue siendo propiamente n -normal (resp. propiamente d -normal) si $\|b-a\|_{M_{p,w}}$ es suficientemente pequeña. Por lo tanto llegamos a una contradicción, y de aquí $W(a)$ es Fredholm. \blacksquare

3.9. Teoría de semi-Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-casi periódicos en los espacios $L^p(\mathbf{R}_+, w)$

En esta sección obtenemos un análogo del teorema de Duduchava-Saginashvili para los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ con pesos de Muckenhoupt $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ (ver [14, Teorema 19.15]).

Teorema 3.22 Sean $a \in SAP_{p,w} \setminus \{0\}$, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$.

- a) Si $a \notin GSAP$, entonces $W(a)$ no es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- b) Si $a \in GSAP$ y $\kappa(a_l)\kappa(a_r) < 0$, entonces $W(a)$ no es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- c) Si $a \in GSAP$, $\kappa(a_l)\kappa(a_r) \geq 0$ y $\kappa(a_l) + \kappa(a_r) > 0$, entonces $W(a)$ es propiamente n -normal.
- d) Si $a \in GSAP$, $\kappa(a_l)\kappa(a_r) \geq 0$ y $\kappa(a_l) + \kappa(a_r) < 0$, entonces $W(a)$ es propiamente d -normal.
- e) Si $a \in GSAP$, $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$ y $0 \notin \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$, entonces $W(a)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- f) Si $a \in GSAP$, $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$ y $0 \in \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$, entonces $W(a)$ no es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.

Demostración. Si $W(a)$ es semi-Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, por el Teorema 3.7 se tiene que $a \in GSAP_{p,w}$. Lo que implica que $a \in GSAP$. Esto demuestra a).

Por la Proposición 3.5, la invertibilidad en SAP de funciones en $SAP_{p,w}$ es equivalente a la invertibilidad en $SAP_{p,w}$.

Ahora supongamos que $a \in GSAP_{p,w}$. Por la Proposición 3.1, a puede ser escrita en la forma

$$a = (1 - u)a_l + ua_r + a_0$$

con $a_l, a_r \in GAP_{p,w}$, $a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $a_0(\infty) = 0$.

Del Teorema 2.10, la Definición 2.11 y [28, §13] tenemos que

$$a_l = e^{i\kappa(a_l)x} \mathbf{d}(a_l) e^{\psi_l(x)}, \quad a_r = e^{i\kappa(a_r)x} \mathbf{d}(a_r) e^{\psi_r(x)}, \quad (3.43)$$

con $\mathbf{d}(a_l)\mathbf{d}(a_r) \neq 0$, $\psi_l, \psi_r \in AP_{p,w}$ y $M(\psi_l) = M(\psi_r) = 0$. Sea

$$b(x) := (1 - u(x))\mathbf{d}(a_l)e^{i\kappa(a_l)x} + u(x)\mathbf{d}(a_r)e^{i\kappa(a_r)x} + b_0(x), \quad (3.44)$$

donde $b_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ se escoge de forma tal que $b_0(\infty) = 0$ y $b \in GSAP_{p,w}$. Ahora se mostrará que $W(a)$ es débilmente Φ -equivalente a $W(b)$. Supongamos que $W(a)$ es propiamente n -normal en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Por el Teorema 2.1, existe $\epsilon > 0$ tal que $W(v)$ es propiamente n -normal siempre que $\|a - v\|_{M_{p,w}} < \epsilon$. Elijamos polinomios $p_l^\pm, p_r^\pm \in AP_{p,w}^\pm$ tales que $M(p_l^\pm) = M(p_r^\pm) = 0$ y

$$\|\psi_l - p_l^- - p_l^+\|_{M_{p,w}} < \delta, \quad \|\psi_r - p_r^- - p_r^+\|_{M_{p,w}} < \delta.$$

Sea

$$v(x) := (1 - u(x))\mathbf{d}(a_l)e^{p_l^-(x)} e^{i\kappa(a_l)x} e^{p_l^+(x)} + u(x)\mathbf{d}(a_r)e^{p_r^-(x)} e^{i\kappa(a_r)x} e^{p_r^+(x)} + a_0(x).$$

Si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $\|a - v\|_{M_{p,w}} < \epsilon$. De aquí $W(v)$ es propiamente n -normal y por el Teorema 3.7, v y a son invertibles en $SAP_{p,w}$. El Teorema 3.13 implica que existen funciones $f_{\pm} \in GSAP_{p,w} \cap G[D_{p,w,\pm}]$ tales que $v = f_- b f_+$. Del Lema 2.31 se deduce que $W(b)$ es propiamente n -normal. Análogamente se puede demostrar que $W(b)$ es propiamente d -normal (resp. Fredholm) si $W(a)$ es propiamente d -normal (resp. Fredholm).

Inversamente, supongamos que $W(b)$ es propiamente n -normal. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $W(v)$ es propiamente n -normal si

$$v(x) := (1 - u(x))\mathbf{d}(a_l)e^{i\kappa(a_l)x}e^{c_l(x)} + u(x)\mathbf{d}(a_r)e^{i\kappa(a_r)x}e^{c_r(x)} + b_0(x)$$

con $c_l, c_r \in AP_{p,w}$, $\|c_l\|_{M_{p,w}} < \epsilon$, $\|c_r\|_{M_{p,w}} < \epsilon$, $b_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $b_0(\infty) = 0$. Usando el Lema 2.31 y el Teorema 3.13 obtenemos que $W(\tilde{v})$ es propiamente n -normal siempre que

$$\tilde{v}(x) := (1 - u(x))\mathbf{d}(a_l)e^{p_l^-(x)}e^{i\kappa(a_l)x}e^{c_l(x)}e^{p_l^+(x)} + u(x)\mathbf{d}(a_r)e^{p_r^-(x)}e^{i\kappa(a_r)x}e^{c_r(x)}e^{p_r^+(x)} + \tilde{v}_0(x)$$

donde $c_l, c_r \in AP_{p,w}$, $\|c_l\|_{M_{p,w}} < \epsilon$, $\|c_r\|_{M_{p,w}} < \epsilon$, $p_l^{\pm}, p_r^{\pm} \in AP_{p,w}^{\pm}$ son polinomios tales que $M(p_l^{\pm}) = M(p_r^{\pm}) = 0$, y $\tilde{v}_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ es elegido de forma tal que $\tilde{v}_0(\infty) = 0$ y $\tilde{v} \in GSAP_{p,w}$. Pero dada $a \in GSAP_{p,w}$ con representaciones casi periódicas (3.43), podemos elegir $\tilde{v}_0 = a_0$ y encontrar $p_l^{\pm}, p_r^{\pm} \in AP_{p,w}^{\pm}$ tales que $M(p_l^{\pm}) = M(p_r^{\pm}) = 0$ y

$$\psi_l = c_l + p_l^- + p_l^+, \quad \psi_r = c_r + p_r^- + p_r^+,$$

con $c_l, c_r \in AP_{p,w}$, $\|c_l\|_{M_{p,w}} < \epsilon$, $\|c_r\|_{M_{p,w}} < \epsilon$. De aquí, $W(a)$ es propiamente n -normal. Se puede mostrar análogamente que si $W(b)$ es propiamente d -normal (resp. Fredholm), entonces $W(a)$ es propiamente d -normal (resp. Fredholm). Esto completa la prueba de que $W(a)$ y $W(b)$ son débilmente Φ -equivalentes. Por lo tanto, $W(a)$ es semi-Fredholm si y sólo si $W(b)$ lo es. Si $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$, entonces $b \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ y los Teoremas 2.24 y 3.21 dan las partes e) y f).

Como $b \in GSAP_{p,w}$, deducimos de (3.44) que existe un $\tilde{b}_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ tal que $\tilde{b}_0(\infty) = 0$ y

$$b^{-1}(x) := (1 - u(x))(\mathbf{d}(a_l))^{-1}e^{-i\kappa(a_l)x} + u(x)(\mathbf{d}(a_r))^{-1}e^{-i\kappa(a_r)x} + \tilde{b}_0(x). \quad (3.45)$$

Si $\kappa(a_l) > 0$ y $\kappa(a_r) > 0$, se deduce de (3.44), (3.45) y el Lema 3.12 que $b^{\pm 1} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\pm}^{\infty}$. Entonces el Teorema 2.28 (a) implica que $W(b^{-1})$ es un regularizador izquierdo de $W(b)$, y por lo tanto $W(b)$ es Fredholm o propiamente n -normal. El Corolario 3.10 y el Teorema 3.14 b) demuestran que $W(b)$ no puede ser Fredholm. De aquí, $W(b)$ es propiamente n -normal. Si $\kappa(a_l) = 0$ y $\kappa(a_r) > 0$ o bien $\kappa(a_l) > 0$ y $\kappa(a_r) = 0$, se deduce del Lema 3.20 que $W(b)$ es propiamente n -normal, lo que completa la demostración del inciso c). El inciso d) se sigue del inciso c) después de considerar adjuntas.

Ahora probaremos la parte b). Escribamos (3.44) en la forma

$$b(x) := \alpha(1 - u(x))e^{i\lambda x} + \beta u(x)e^{i\mu x} + b_0(x) \quad (3.46)$$

donde $\alpha = \mathbf{d}(a_l)$, $\beta = \mathbf{d}(a_r)$, $\lambda = \kappa(a_l)$ y $\mu = \kappa(a_r)$. Sean $\lambda > 0$ y $\mu < 0$. Supongamos que

$$0 \notin \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_{\infty}^-(p, w), \nu_{\infty}^+(p, w)). \quad (3.47)$$

Entonces el Lema 3.18 demuestra que $W(b)$ es débilmente Φ -equivalente a $W(c)$ donde

$$c(x) := \alpha\chi_-(x)e^{i\lambda x} + \beta\chi_+e^{i\mu x}.$$

Como $\max\{\mu, \lambda\} > 0$, el Lema 3.19 implica que el operador $W(c)$ tiene núcleo trivial en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Ahora supongamos que $W(b)$ es d -normal en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Entonces $W(c)$ también es d -normal en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, y como $W(c)$ tiene núcleo trivial, se sigue que $W(c)$ es Fredholm. De aquí $W(b)$ también es Fredholm, pero esto es imposible debido al Corolario 3.10 y al Teorema 3.14(b). Si $W(b)$ es n -normal en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, entonces $W(\bar{b})$ es d -normal en $L^q(\mathbf{R}_+, w^{-1})$. Repitiendo los argumentos previos con \bar{c} , q y w^{-1} en lugar de c , p y w , llegamos otra vez a una contradicción. Consecuentemente, $W(b)$ no puede ser semi-Fredholm si se cumple (3.47).

Ahora supongamos que

$$0 \in \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)) \quad (3.48)$$

y consideremos b dado por (3.46) con $\lambda > 0$, y $\mu < 0$. Como $a \in GSAP_{p,w}$, los números $\alpha = \mathbf{d}(a_l)$ y $\beta = \mathbf{d}(a_r)$ no son cero. Supongamos que $W(b)$ es d -normal. Consideremos el operador $W(d)$, con símbolo $d \in GSAP_{p,w}$ dado por

$$d(x) := \alpha_0(1 - u(x))e^{-i\varepsilon x} + \beta_0 u(x)e^{-i\varepsilon x} + d_0(x),$$

donde $0 < \varepsilon < \lambda$ y $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $d_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $d_0(\infty) = 0$. Como

$$d^{-1}(x) := \alpha_0^{-1}(1 - u(x))e^{i\varepsilon x} + \beta_0^{-1}u(x)e^{i\varepsilon x} + \tilde{d}_0(x)$$

donde $\tilde{d}_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $\tilde{d}_0(\infty) = 0$, deducimos del Lema 3.12 que $d^{\pm 1} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,\mp}^\infty$. De aquí, por el inciso d), $W(d)$ es propiamente d -normal. Además, $W(d)W(b) = W(bd) + K$ donde K es un operador compacto, por lo que $W(bd)$ también es propiamente d -normal. Claramente

$$b(x)d(x) = \alpha\alpha_0(1 - u(x))e^{i(\lambda-\varepsilon)x} + \beta\beta_0 u(x)e^{i(\mu-\varepsilon)x} + q_0(x)$$

donde $q_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, $q_0(\infty) = 0$, y $bd \in GSAP_{p,w}$. Se puede escoger α_0 y β_0 tal que

$$0 \notin \mathcal{H}(\alpha\alpha_0, \beta\beta_0; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)). \quad (3.49)$$

En efecto, si $0 \in \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$, sea $\gamma := \text{diam } \mathcal{H}(\alpha, \beta; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$ y elijamos α_0 y β_0 tal que $|\alpha\alpha_0| > 2\gamma$ y $\beta\beta_0 = \alpha\alpha_0 + \beta - \alpha$. En este caso

$$\text{diam } \mathcal{H}(\alpha\alpha_0, \beta\beta_0; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)) = \gamma. \quad (3.50)$$

Ya que $|\alpha\alpha_0| > 2\gamma$ y (3.50) se cumple, todos los puntos $z \in \mathcal{H}(\alpha\alpha_0, \beta\beta_0; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$ satisfacen la condición $|z| > \gamma$. Por eso (3.49) tiene lugar.

Entonces como (3.49) se cumple, el Lema 3.18 implica que $W(bd)$ es débilmente Φ -equivalente a $W(c)$, donde

$$c(x) = \alpha\alpha_0\chi_-(x)e^{i(\lambda-\varepsilon)x} + \beta\beta_0\chi_+e^{i(\mu-\varepsilon)x}.$$

y $\lambda - \varepsilon > 0$, $\mu - \varepsilon < 0$. Por lo tanto $W(c)$ es propiamente d -normal junto con $W(bd)$. Pero esto es imposible porque, por el inciso (b) ya probado, $W(c)$ no puede ser semi-Fredholm. Considerando los operadores adjuntos concluimos que $W(b)$ tampoco puede ser n -normal en el caso que (3.48) se cumpla. Por lo tanto, $W(b)$ no puede ser semi-Fredholm. Esto completa la demostración del inciso (b). ■

De acuerdo con [14, Definición 3.13], el *índice de Cauchy* de una función $a \in GSAP$ con $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$ está definido por la fórmula

$$\text{ind } a := \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} ((\arg a)(x) - (\arg a)(-x)) dx \quad (3.51)$$

donde el límite existe, es finito, es independiente de la elección particular de la rama continua de $\arg a$, y posee la propiedad logarítmica: para cada $f_1, f_2 \in GSAP$ con representaciones casi periódicas que tienen mociones medias cero,

$$\text{ind}(f_1 f_2) = \text{ind} f_1 + \text{ind} f_2. \quad (3.52)$$

Teorema 3.23 *Si $a \in GSAP_{p,w}$, $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$ y*

$$0 \notin \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)), \quad (3.53)$$

entonces el operador $W(a)$ es Fredholm e

$$\text{Ind} W(a) = -\text{ind} a + \nu_0^0(p, w) - \left\{ \nu_0^0(p, w) + \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\mathbf{d}(a_l)}{\mathbf{d}(a_r)} \right\}, \quad (3.54)$$

donde $\nu_0^0(p, w) := (\nu_0^-(p, w) + \nu_0^+(p, w))/2$.

Demostración. Tenemos que $a = (1-u)a_l + ua_r + a_0$, donde $a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, $a_0(\infty) = 0$, $a_l = \mathbf{d}(a_l)e^{\psi_l}$, $a_r = \mathbf{d}(a_r)e^{\psi_r}$, $\psi_l, \psi_r \in AP_{p,w}$ y $M(\psi_l) = M(\psi_r) = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u \in C(\overline{\mathbf{R}})$ es real valuada y monótona. Consideremos

$$b = ae^{-(1-u)\psi_l - u\psi_r} = [(1-u)\mathbf{d}(a_l)e^{\psi_l} + u\mathbf{d}(a_r)e^{\psi_r} + a_0]e^{-(1-u)\psi_l - u\psi_r}.$$

Claramente $b(-\infty) = \mathbf{d}(a_l)$, $b(+\infty) = \mathbf{d}(a_r)$. De aquí $b \in GC_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ y $0 \notin b_{p,w}^\#(\dot{\mathbf{R}})$. Para $\mu \in [0, 1]$, sea

$$f_\mu := be^{\mu[(1-u)\psi_l + u\psi_r]}.$$

Obviamente $f_1 = a$, $f_0 = b$. Como $(f_\mu)_l = \mathbf{d}(a_l)e^{\mu\psi_l}$ y $(f_\mu)_r = \mathbf{d}(a_r)e^{\mu\psi_r}$, tenemos que $\mathbf{d}((f_\mu)_l) = \mathbf{d}(a_l)$ y $\mathbf{d}((f_\mu)_r) = \mathbf{d}(a_r)$. Esto demuestra que $f_\mu \in GSAP_{p,w}$ y

$$0 \notin \mathcal{H}(\mathbf{d}((f_\mu)_r), \mathbf{d}((f_\mu)_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)).$$

El Teorema 3.22 e) implica que $W(f_\mu)$ es Fredholm para cada $\mu \in [0, 1]$. Como el mapeo $[0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$, $\mu \rightarrow W(f_\mu)$ es continuo de acuerdo con la estimación

$$\|e^{\mu\varphi} - e^{\nu\varphi}\| \leq e^{\|\varphi\|} (e^{|\mu-\nu|\|\varphi\|} - 1) \quad (\mu, \nu \in [0, 1]),$$

y como el índice de operadores es estable con respecto a pequeñas perturbaciones, obtenemos

$$\text{Ind} W(a) = \text{Ind} W(f_1) = \text{Ind} W(f_0) = \text{Ind} W(b). \quad (3.55)$$

Por otra parte, el Teorema 2.24 implica que

$$\text{Ind} W(b) = -\text{ind} b + \nu_0^0(p, w) - \left\{ \nu_0^0(p, w) + \frac{1}{2\pi} \arg \frac{b(-\infty)}{b(+\infty)} \right\}. \quad (3.56)$$

Por la definición del índice de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\text{ind } b &= \text{ind } a - \text{ind}(e^{(1-u)\psi_l + u\psi_r}) \\
&= \text{ind } a - \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} [(1-u(x))\text{Im } \psi_l(x) + u(x)\text{Im } \psi_r(x) \\
&\quad - (1-u(-x))\text{Im } \psi_l(-x) - u(-x)\text{Im } \psi_r(-x)] dx \\
&= \text{ind } a - \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} [u(x)\text{Im } \psi_r(x) - (1-u(-x))\text{Im } \psi_l(-x)] dx \\
&= \text{ind } a - \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} [\text{Im } \psi_r(x) - \text{Im } \psi_l(-x)] dx \\
&= \text{ind } a - \frac{1}{2\pi} [M(\text{Im } \psi_r) - M(\text{Im } \psi_l)] = \text{ind } a.
\end{aligned}$$

Como $b(-\infty) = \mathbf{d}(a_l)$, $b(+\infty) = \mathbf{d}(a_r)$, obtenemos de (3.55) y (3.56) que el $\text{Ind } W(a)$ se calcula por la fórmula (3.54). ■

Observación 3.24 En las fórmulas (3.53) y (3.54) (ver también el Teorema 3.22) tenemos que

$$\nu_0^\pm(p, w) = \nu_0^0(p, w) = \frac{1}{p}$$

porque de acuerdo con los artículos [57] y [58] el peso w se puede sustituir por un peso equivalente que es continuo en \mathbf{R} .

Observación 3.25 Realmente, en el Teorema 3.22, sólo usamos la igualdad $\nu_0^\pm(p, w) = \frac{1}{p}$ para la demostración del inciso f) cuando aplicamos el Teorema 3.21 que fue probado utilizando esa igualdad.

3.10. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-periódicos en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$

Para los operadores de Wiener-Hopf con símbolos semi-periódicos, en contraste con el caso de símbolos semi-casi periódicos, podemos considerar pesos de Muckenhoupt para los cuales $0 < \nu_0^-(p, w) \leq \nu_0^+(p, w) < 1$.

Dado $\mu > 0$, consideremos el siguiente subconjunto de los pesos de Muckenhoupt:

$$A_p^\mu(\mathbf{R}) := \left\{ w \in A_p(\mathbf{R}) : w(\cdot + \lambda)/w(\cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}) \text{ para todo } \lambda = n\mu, n \in \mathbf{Z} \right\}. \quad (3.57)$$

Sea $\omega \in A_p([0, \mu/2])$ y sea w_1 la extensión simétrica de ω a $[-\mu/2, 0]$. Si w es la extensión periódica de w_1 a \mathbf{R} , entonces $w \in A_p(\mathbf{R})$ de acuerdo con [9, Sección 2.4], y w es una función periódica de período μ . Por lo tanto $w \in A_p^\mu(\mathbf{R})$.

Sea P^μ el conjunto de polinomios μ -periódicos de la forma $\sum_{n=n_0}^{n_1} c_n e^{2\pi i n x / \mu}$, con $c_n \in \mathbf{C}$. Entonces $P_{p,w}^\mu := \text{clos}_{M_{p,w}} P^\mu$ es un subálgebra de Banach de $M_{p,w}$. Definimos $SP_{p,w}^\mu$ como el subálgebra cerrada más pequeña de $M_{p,w}$ que contiene $P_{p,w}^\mu$ y $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$.

Teorema 3.26 *Sea $1 < p < \infty$, $w \in A_p^\mu(\mathbf{R})$, y $a \in SP_{p,w}^\mu \setminus \{0\}$. Entonces el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si $a \in GSP_{p,w}^\mu$, $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$ y $0 \notin \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$. Si $W(a)$ es Fredholm, entonces su índice se calcula por (3.54).*

Demostración. Supongamos que $a \in GSP_{p,w}^\mu$. Por la Proposición 3.1 a puede ser escrita en la forma (3.2) con $a_l, a_r \in GP_{p,w}^\mu$, $a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $a_0(\infty) = 0$. El Teorema 2.10 implica que

$$a_l = e^{i\kappa(a_l)x} \mathbf{d}(a_l) e^{\psi_l(x)}, \quad a_r = e^{i\kappa(a_r)x} \mathbf{d}(a_r) e^{\psi_r(x)}, \quad (3.58)$$

con $\mathbf{d}(a_l)\mathbf{d}(a_r) \neq 0$, $\psi_l, \psi_r \in AP_{p,w}$ y $M(\psi_l) = M(\psi_r) = 0$. Substituyendo las funciones $a_l, a_r \in GP_{p,w}^\mu$ por las funciones $\tilde{a}_l, \tilde{a}_r \in GC(\mathbf{T})$ tales que

$$\tilde{a}_l(e^{2\pi ix/\mu}) = a_l(x), \quad \tilde{a}_r(e^{2\pi ix/\mu}) = a_r(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

deducimos que $\kappa(a_l), \kappa(a_r) \in (2\pi/\mu)\mathbf{Z}$. Entonces, siguiendo la demostración del Teorema 3.14, deducimos que en realidad $\psi_l, \psi_r \in P_{p,w}^\mu$. Además, como en la prueba del Teorema 3.22, uno puede demostrar que $W(a)$ es débilmente Φ -equivalente a $W(b)$, donde b está dado por (3.44) y $b_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ se escoge de forma tal que $b_0(\infty) = 0$ y $b \in GSP_{p,w}^\mu$.

Si $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$, entonces $b \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, y de aquí $b \in GC_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. Como

$$\mathcal{H}(b(+\infty), b(-\infty); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)) = \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)),$$

el Teorema 2.24 implica que si $0 \notin \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$, entonces el operador $W(b)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. De aquí, por la Φ -equivalencia débil de $W(a)$ y $W(b)$, el operador $W(a)$ también es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.

Inversamente, supongamos que $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Uno puede mostrar como en la Proposición 3.5 que las álgebras de Banach $P_{p,w}^\mu$ y $SP_{p,w}^\mu$ son inversamente cerradas en AP y SAP , respectivamente. Si $a \notin GP_{p,w}^\mu$, entonces $a \notin GSAP$, y el Teorema 3.22(a) implica que $W(a)$ no es semi-Fredholm, lo que es una contradicción. Por lo tanto $a \in GSP_{p,w}^\mu$. Si $\kappa(a_l) \neq 0$ o $\kappa(a_r) \neq 0$, entonces, tomando en cuenta la Observación 3.25 y aplicando los incisos b), c) y d) del Teorema 3.22, llegamos de nuevo a una contradicción. Esto implica que $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = 0$. Como $W(a)$ es débilmente Φ -equivalente a $W(b)$ donde $b := (1-u)\mathbf{d}(a_l) + u\mathbf{d}(a_r) + b_0 \in GC_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, y por lo tanto el operador $W(b)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, deducimos del Teorema 2.24 que $0 \notin \mathcal{H}(\mathbf{d}(a_r), \mathbf{d}(a_l); \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$. Más aún, $\text{Ind } W(a) = \text{Ind } W(b)$ donde $\text{Ind } W(b)$ se calcula por (3.56) debido al Teorema 2.26. Finalmente, (3.56) implica (3.54) porque $\text{ind } b = \text{ind } a$ (ver la demostración del Teorema 3.23). ■

4. Operadores de Wiener-Hopf en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}, w)$

4.1. Representación e invertibilidad de símbolos matriciales semi-casi periódicos

Sea u una función real monótona creciente en $C(\overline{\mathbf{R}})$ tal que $u(-\infty) = 0$, $u(\infty) = 1$. Como $\|u\|_\infty = V_1(u) = 1$ entonces $u \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ por el Teorema 2.20.

Proposición 4.1 *Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$. Entonces cada función $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ puede ser representada de forma única de la siguiente manera:*

$$a = (1-u)a_l + ua_r + a_0 \quad (4.1)$$

donde $a_l, a_r \in [AP_{p,w}]_{N \times N}$, $a_0 \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y $a_0(\infty) = 0$. Los mapeos $a \mapsto a_l$ y $a \mapsto a_r$ son homomorfismos de álgebras de Banach de $[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ sobre $[AP_{p,w}]_{N \times N}$.

Demostración. Sea $a = (a_{jk})_{j,k=1}^N \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$. Por la Proposición 3.1 cada a_{jk} puede ser escrita de forma única como $a_{jk} = (1-u)a_{ljk} + ua_{rjk} + a_{0jk}$, donde $a_{ljk}, a_{rjk} \in AP_{p,w}$, $a_{0jk} \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, $a_{0jk}(\infty) = 0$, para $j, k = 1, \dots, N$. Sean $a_l = (a_{ljk})_{j,k=1}^N$, $a_r = (a_{rjk})_{j,k=1}^N$, y $a_0 = (a_{0jk})_{j,k=1}^N$. Entonces $a_l, a_r \in [AP_{p,w}]_{N \times N}$, $a_0 \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, $a_0(\infty) = 0$ y $a = (1-u)a_l + ua_r + a_0$.

Sea $\phi : SAP_{p,w} \rightarrow AP_{p,w}$ el homomorfismo de la Proposición 3.1 definido por $\phi(a) = a_l$ y definamos $\Phi : [SAP_{p,w}]_{N \times N} \rightarrow [AP_{p,w}]_{N \times N}$ por $\Phi(a) = a_l$. Notemos que $\Phi(a)_{ij} = \phi(a_{ij})$. Se tiene que

$$\Phi(ab)_{ij} = \phi((ab)_{ij}) = \phi\left(\sum_{k=1}^N a_{ik}b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^N \phi(a_{ik})\phi(b_{kj}) = \sum_{k=1}^N \Phi(a)_{ik}\Phi(b)_{kj} = (\Phi(a)\Phi(b))_{ij}.$$

Por lo tanto Φ también es un homomorfismo. \blacksquare

Para $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, sea $\mathcal{D}_{p,w,N}$ la cerradura en $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))$ del conjunto

$$\mathcal{D}_{p,w,N}^0 := \left\{ \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda : d_\lambda \in L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R}), R_0 \subset \mathbf{R} \text{ es un conjunto finito} \right\} \subset \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w)).$$

Usamos la norma $\|d\|_{L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})} := \|dI\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))}$ para funciones matriciales $d \in L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$.

Lema 4.2 *Dados $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, para cada $h \in \mathbf{R}$, definimos*

$$N_h : \mathcal{D}_{p,w,N}^0 \rightarrow L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R}), \quad B = \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda \mapsto d_h,$$

donde $d_h = 0_{N \times N}$ si $h \notin R_0$. Entonces N_h se extiende a un operador lineal acotado suprayectivo $N_h : \mathcal{D}_{p,w,N} \rightarrow L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$.

Demostración. Para una función matricial $d = (d_{ij})_{i,j=1}^N \in L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$ y una función vectorial $f = (f_k)_{k=1}^N \in L_N^p(\mathbf{R}, w)$, aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \|df\|_{L_N^p(\mathbf{R}, w)}^p &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{j=1}^N d_{ij}(x)f_j(x) \right|^p w^p(x) dx \\ &\leq N \max_{i,j=1,\dots,N} \|d_{ij}\|_\infty^p \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{j=1}^N |f_j(x)| \right)^p w^p(x) dx \\ &\leq N \max_{i,j=1,\dots,N} \|d_{ij}\|_\infty^p \int_{\mathbf{R}} N^{p/q} \sum_{j=1}^N |f_j(x)|^p w^p(x) dx \\ &= N^p \max_{i,j=1,\dots,N} \|d_{ij}\|_\infty^p \|f\|_{L_N^p(\mathbf{R}, w)}^p, \end{aligned}$$

de lo cual

$$\|d\|_{L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})} = \|dI\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} \leq N \max_{i,j=1,\dots,N} \|d_{ij}\|_\infty. \quad (4.2)$$

Sea $h \in \mathbf{R}$ y $B = \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda U_\lambda \in \mathcal{D}_{p,w,N}^0$, donde $d_\lambda = (d_\lambda^{(ij)})_{i,j=1}^N \in L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$. Se sigue de (4.2) y el Lema 3.2 que

$$\begin{aligned} \|N_h(B)\|_{L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})} &= \|d_h\|_{L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})} \leq N \max_{i,j=1,\dots,N} \|d_h^{(ij)}\|_\infty \\ &= N \max_{i,j=1,\dots,N} \left\| N_h \left(\sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda^{(ij)} U_\lambda \right) \right\|_\infty \\ &\leq N \|v_{-h}\|_\infty \max_{i,j=1,\dots,N} \left\| \sum_{\lambda \in R_0} d_\lambda^{(ij)} U_\lambda \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} \\ &\leq N \|v_{-h}\|_\infty \|B\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $N_h : \mathcal{D}_{p,w,N} \rightarrow L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$ es acotado y $\|N_h\| \leq N \|v_{-h}\|_\infty$. \blacksquare

Para $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, sea $\mathcal{V}_{N \times N}^W$ el conjunto de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))$ que pueden ser escritos en la forma

$$A = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} a_\lambda U_{-\lambda}, \quad a_\lambda \in L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R}) \text{ y } \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \|a_\lambda\|_{L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})} \|U_{-\lambda}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))} < \infty, \quad (4.3)$$

donde $a_\lambda \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable de $\lambda \in \mathbf{R}$.

Obviamente $\mathcal{V}_{N \times N}^W$ es un álgebra de Banach con la norma

$$\|A\|_W := \sum_{\lambda} \|a_\lambda\|_{L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})} \|U_{-\lambda}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))}. \quad (4.4)$$

Utilizando el teorema de Bochner-Phillips y el Lema 4.2 en lugar del Lema 3.2, análogamente al caso escalar se demuestran los siguientes dos teoremas.

Teorema 4.3 *Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, entonces el álgebra $\mathcal{V}_{N \times N}^W$ es inversamente cerrada en $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))$, i. e., si un operador en $\mathcal{V}_{N \times N}^W$ es invertible en $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))$, entonces el operador inverso también está en $\mathcal{V}_{N \times N}^W$.*

Necesitamos también el subálgebra de Banach $\mathcal{U}_{N \times N}^W$ de $\mathcal{V}_{N \times N}^W$ que consiste de los operadores $A = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} a_\lambda U_\lambda \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))$ con coeficientes matriciales constantes $a_\lambda \in \mathbf{C}^{N \times N}$, donde $a_\lambda \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable $\lambda \in \mathbf{R}$ y (4.4) toma la forma

$$\|A\|_W := \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \|a_\lambda\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} \|U_\lambda\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}, \quad (4.5)$$

con $\|a_\lambda\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} := \|a_\lambda I\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))}$.

Teorema 4.4 *Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, entonces el álgebra $\mathcal{U}_{N \times N}^W$ es inversamente cerrada en $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R},w))$.*

Proposición 4.5 *Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, entonces las álgebras $[AP_{p,w}]_{N \times N}$ y $[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ son inversamente cerradas en $AP_{N \times N}$ y $SAP_{N \times N}$ respectivamente, y de aquí son inversamente cerradas en $L_{N \times N}^\infty(\mathbf{R})$.*

Demostración. Sea $a \in [AP_{p,w}]_{N \times N}$. Si $a \in GAP_{N \times N}$, entonces $\det a \in GAP$. De la Proposición 3.5, se sigue que $\det a \in G[AP_{p,w}]$. Por lo tanto $a \in G[AP_{p,w}]_{N \times N}$. Para $[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ la demostración es análoga. \blacksquare

Las Proposiciones 4.5 y 4.1 implican directamente lo siguiente.

Corolario 4.6 Sea $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$. Si $a \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$, entonces $a_l, a_r \in G[AP_{p,w}]_{N \times N}$.

4.2. Invertibilidad de símbolos matriciales para operadores de Wiener-Hopf semi-Fredholm

Teorema 4.7 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$. Si $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ y $W(a)$ es semi-Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ entonces $a \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$.

Demostración. Por la Proposición 4.5, es suficiente demostrar que $a \in G[SAP]_{N \times N}$. Supongamos que $a \notin G[SAP]_{N \times N}$. Entonces

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |\det a(x)| = 0. \quad (4.6)$$

Primero probaremos que cualquier $[M_{p,w}]_{N \times N}$ vecindad de a contiene un $b \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ tal que $\det b(x) = 0$ para cada x en algún intervalo abierto de \mathbf{R} .

Dado $\delta > 0$, podemos encontrar $\tilde{a} \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ tal que $\|a - \tilde{a}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} < \delta$ y $\det \tilde{a}(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbf{R}$. Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la restricción de \tilde{a} a una vecindad cerrada γ_{x_0} de x_0 está en $[C(\gamma_{x_0}) \cap V_1(\gamma_{x_0})]_{N \times N}$. Para $\varepsilon > 0$, sea φ_ε una función $\varphi_\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi_\varepsilon|_{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)} = 1$, $\varphi_\varepsilon|_{\mathbf{R} \setminus [x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon]} = 0$ y φ_ε es continua y monótona en cada lado de x_0 . Entonces $\tilde{a}\varphi_\varepsilon \in [C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})]_{N \times N}$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Sea $b := \tilde{a} + \varphi_\varepsilon(\tilde{a}(x_0) - \tilde{a})$. Entonces $b \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$. Si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, entonces $b(x) = \tilde{a}(x_0)$ y de aquí $\det b(x) = 0$. Tenemos

$$b(x) - \tilde{a}(x) = \varphi_\varepsilon(x)(\tilde{a}(x_0) - \tilde{a}(x)) =: \varphi_\varepsilon(x)(c_{jk}(x))_{j,k=1}^N$$

donde $\varphi_\varepsilon c_{jk} \in C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$ para todo $j, k = 1, 2, \dots, N$. Aplicando las relaciones

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|c_{jk}|_{(x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon)}\|_\infty &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_1(c_{jk}|_{(x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon)}) = 0, \\ V_1(\varphi_\varepsilon c_{jk}) &\leq V_1(\varphi_\varepsilon) \|c_{jk}|_{(x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon)}\|_\infty + \|\varphi_\varepsilon\|_\infty V_1(c_{jk}|_{(x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon)}), \end{aligned}$$

deducimos que $\|\varphi_\varepsilon c_{jk}\|_\infty \rightarrow 0$ y $V_1(\varphi_\varepsilon c_{jk}) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. De aquí, por la desigualdad de Stechkin (2.15), $\|\varphi_\varepsilon c_{jk}\|_{M_{p,w}} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, eligiendo $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeños, concluimos de la estimación

$$\|b - a\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} = \|(\tilde{a} - a) + (b - \tilde{a})\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \leq \delta + N \max_{j,k} \|\varphi_\varepsilon c_{jk}\|_{M_{p,w}}$$

que $\|b - a\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}}$ es tan pequeño como se quiera.

Como $\det \tilde{a}(x_0) = 0$, existe una matriz distinta de cero $d \in \mathbf{C}^{N \times N}$ tal que $\tilde{a}(x_0)d = 0$. Como $d\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ se sigue del Teorema 2.28 (a) que el operador $W(bd\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}) - W(b)W(d\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}) \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+, w))$ es compacto. Si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ entonces

$$b(x)d\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = a_2(x_0)d\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = 0,$$

y si $x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ se tiene que

$$b(x)d\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = b(x)d0 = 0.$$

Por lo tanto $bd\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \equiv 0$ y $W(b)W(d\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})$ debe ser compacto.

Ahora supongamos que $W(a)$ es n -normal, entonces $W(b)$ también es n -normal.

Por el Lema 2.4 existen un operador compacto K y $\eta > 0$ tales que

$$\|W(b)f\| + \|Kf\| \geq \eta\|f\|, \quad \forall f \in L_N^p(\mathbf{R}_+, w).$$

Reemplazando f por $W(d\varphi_{\varepsilon/2})g$ se tiene

$$\|W(b)W(d\varphi_{\varepsilon/2})g\| + \|KW(d\varphi_{\varepsilon/2})g\| \geq \eta\|W(d\varphi_{\varepsilon/2})g\|, \quad \forall g \in L_N^p(\mathbf{R}_+, w). \quad (4.7)$$

Sea $\{g_n\}$ una sucesión acotada en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. Como los operadores

$$W(b)W(d\varphi_{\varepsilon/2}) \quad \text{y} \quad KW(d\varphi_{\varepsilon/2})$$

son compactos, entonces existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ tal que

$$\{W(b)W(d\varphi_{\varepsilon/2})g_{n_k}\} \quad \text{y} \quad \{KW(d\varphi_{\varepsilon/2})g_{n_k}\}$$

son convergentes. De (4.7) se sigue que $\{W(d\varphi_{\varepsilon/2})g_{n_k}\}$ también es convergente, y de aquí el operador $W(d\varphi_{\varepsilon/2})$ es compacto, pero esto es una contradicción ya que ningún operador de Wiener-Hopf distinto de cero es compacto. Por lo tanto $W(a)$ no puede ser n -normal.

Considerando adjuntas se demuestra que $W(a)$ no es d -normal. \blacksquare

4.3. Invertibilidad de representaciones casi periódicas en el caso matricial

Sean \mathcal{A} y \mathcal{E} las subálgebras cerradas más pequeñas de $B(L_N^p(\mathbf{R}, w))$ que contienen los operadores $\chi_{\pm}I$ y los conjuntos $\{W^0(a) : a \in [AP_{p,w}]_{N \times N}\}$ y $\{W^0(a) : a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}\}$, respectivamente.

Teorema 4.8 *Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$, entonces los mapeos definidos sobre los generadores del álgebra \mathcal{E} por*

$$\begin{aligned} \mu_r : \chi_{\pm}I &\rightarrow \chi_{\pm}I, \quad \mu_r : W^0(a) \rightarrow W^0(a_r) \quad (a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}), \\ \mu_l : \chi_{\pm}I &\rightarrow \chi_{\pm}I, \quad \mu_l : W^0(a) \rightarrow W^0(a_l) \quad (a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}), \end{aligned}$$

se extienden continuamente a homomorfismos de álgebras de Banach de \mathcal{E} sobre \mathcal{A} de forma tal que

$$\|\mu_r(A)\| \leq \|A\|_{ess}, \quad \|\mu_l(A)\| \leq \|A\|_{ess}$$

para todo $A \in \mathcal{E}$.

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 3.8. \blacksquare

Por analogía con [14, Corolario 18.11] se prueba el siguiente

Corolario 4.9 *Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$. Si $A \in \mathcal{E}$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}, w)$ entonces $\mu_l(A)$ y $\mu_r(A)$ son invertibles en $L_N^p(\mathbf{R}, w)$.*

Demostración. Sean $m := \text{Ind } A$ y $A_0 := AW(d)$, donde

$$d(x) := \text{diag}\left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^m, 1, \dots, 1\right).$$

Ya que el $\text{Ind } (W(d)) = -m$, se sigue que $\text{Ind } A_0 = 0$. Consecuentemente $A_0 = V + K$, donde V es invertible y K es compacto (ver [35, Vol. 1 p. 167]). Como $A_0 \in \mathcal{E}$ y $K \in \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, se tiene que V también está en \mathcal{E} . De la prueba del Teorema 3.8 sabemos que existe una sucesión $h_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\mu_r(A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{-h_n} V e_{h_n} I, \quad (\mu_r(A_0))^* = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{-h_n} V^* e_{h_n} I,$$

donde $(\mu_r(A_0))^*$ y V^* son los operadores adjuntos actuando sobre $L_N^q(\mathbf{R}, w^{-1})$. Los operadores $e_{-h_n} V e_{h_n} I$ y $e_{-h_n} V^* e_{h_n} I$ son invertibles y las normas de sus inversos son uniformemente acotados.

$$\begin{aligned} \|(e_{-h_n} V e_{h_n} I)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} &= \|e_{-h_n} V^{-1} e_{h_n} I\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} = \|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))}, \\ \|(e_{-h_n} V^* e_{h_n} I)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^q(\mathbf{R}, w^{-1}))} &= \|e_{-h_n} (V^*)^{-1} e_{h_n} I\|_{\mathcal{B}(L_N^q(\mathbf{R}, w^{-1}))} = \|(V^*)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^q(\mathbf{R}, w^{-1}))} \\ &= \|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, para toda $f \in L_N^p(\mathbf{R}, w)$ y toda $g \in L_N^q(\mathbf{R}, w)$, obtenemos

$$\|f\|_{p,w} \leq \|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} \|e_{-h_n} V e_{h_n} I f\|_{p,w}, \quad \|g\|_{q,w^{-1}} \leq \|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} \|e_{-h_n} V^* e_{h_n} I g\|_{q,w^{-1}}$$

de donde

$$\|f\|_{p,w} \leq \|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} \|\mu_r(A_0) f\|_{p,w}, \quad \|g\|_{q,w^{-1}} \leq \|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))} \|(\mu_r(A_0))^* g\|_{q,w^{-1}}$$

Estas dos desigualdades implican que $\mu_r(A_0)$ es invertible. Y como

$$\mu_r(A_0) = \mu_r(A) \mu_r(W(d)) = \mu_r(A) W(d(+\infty)) = \mu_r(A)$$

llegamos a la conclusión de que $\mu_r(A)$ es invertible. La demostración para $\mu_l(A)$ es análoga. \blacksquare

Corolario 4.10 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $N \in \mathbf{N}$. Si $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ y $W(a)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, entonces $W(a_l)$ y $W(a_r)$ son invertibles en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$.

Corolario 4.11 Para $a \in [AP_{p,w}]_{N \times N}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) $W(a)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$;
- b) $W(a)$ es invertible en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$.

4.4. Reducción de los símbolos matriciales semi-casi periódicos a los símbolos matriciales continuos en $\overline{\mathbf{R}}$

Aplicando el Lema 3.12 obtenemos el siguiente $M_{p,w}$ análogo de [14, Teorema 10.9], que nos permitirá reducir el estudio de operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ al estudio de tales operadores con símbolos en $[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$.

Teorema 4.12 Sean $a, b \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ y supongamos que las representaciones casi periódicas a_l, b_l, a_r, b_r están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_l &= \varphi_l^- b_l \varphi_l^+ \text{ con } \varphi_l^\pm \in G[AP_{p,w}^\pm]_{N \times N}, \\ a_r &= \varphi_r^- b_r \varphi_r^+ \text{ con } \varphi_r^\pm \in G[AP_{p,w}^\pm]_{N \times N}, \\ M(\varphi_l^-) &= M(\varphi_r^-), M(\varphi_l^+) = M(\varphi_r^+). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Entonces $a = f_- b f_+$ con funciones matriciales

$$f_\pm \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}.$$

Demostración. Sea $c_0 := M(\varphi_l^+) = M(\varphi_r^+)$ y elijamos polinomios matriciales casi periódicos

$$\psi_l^+(x) = c_0 + \sum r_j e^{i\lambda_j x}, \quad \psi_r^+(x) = c_0 + \sum s_j e^{i\lambda_j x}$$

tal que $\lambda_j > 0$ para toda j , y

$$\begin{aligned} \|\psi_l^+ - \varphi_l^+\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &< q / \|(\psi_l^+)^{-1}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}}, \\ \|\psi_r^+ - \varphi_r^+\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &< q / \|(\psi_r^+)^{-1}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

para alguna $q \in (0, 4^{-1} \|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}^{-1})$. Sea $I := I_N$ la matriz identidad y definamos

$$v := I + (\psi_r^+(\varphi_r^+)^{-1} - I)u + (\psi_l^+(\varphi_l^+)^{-1} - I)(1 - u),$$

donde $u \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ es una función real fija monotonamente creciente en \mathbf{R} tal que $0 \leq u \leq 1$, $u(-\infty) = 0$ y $u(\infty) = 1$. Como $M(\psi_r^+(\varphi_r^+)^{-1} - I) = M(\psi_r^+)(M(\varphi_r^+))^{-1} - I = 0$, se deduce del Lema 3.12 que

$$(\psi_r^+(\varphi_r^+)^{-1} - I)u \in [D_{p,w,+}]_{N \times N}.$$

Análogamente

$$(\psi_l^+(\varphi_l^+)^{-1} - I)(1 - u) \in [D_{p,w,+}]_{N \times N},$$

y por lo tanto, $v \in [SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [D_{p,w,+}]_{N \times N}$. De (4.9) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\psi_r^+(\varphi_r^+)^{-1} - I\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &\leq \|\psi_l^+ - \varphi_l^+\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \|(\varphi_r^+)^{-1}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} < q, \\ \|\psi_r^+(\varphi_r^+)^{-1} - I\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &\leq \|\psi_l^+ - \varphi_l^+\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \|(\varphi_r^+)^{-1}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} < q, \end{aligned}$$

de donde

$$\|v - I\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \leq q \|u\|_{M_{p,w}} + q \|1 - u\|_{M_{p,w}} \leq 4q \|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} < 1 \quad (4.10)$$

(notemos que $\|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \geq 1$ porque $S^2 = I$). Esto demuestra que

$$v \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}. \quad (4.11)$$

En lo que sigue, definimos $e^{-\infty} := 0$. Sea

$$\omega(x) := c_0 + \sum_j p_j(x) e^{i\lambda_j x} \quad (4.12)$$

donde

$$p_j(x) = \begin{cases} s_j e^{-\lambda_j/x}, & \text{para } x \geq 0, \\ r_j e^{\lambda_j/x}, & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Notemos que $p_j(0-0) = p_j(0+0) = p_j(0) = 0$ y $p_j(-\infty) = r_j$, $p_j(+\infty) = s_j$. Por lo tanto, por la desigualdad de Stechkin, $p_j \in [V_1(\mathbf{R})]_{N \times N} \subset [C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$. Y otra vez por el Lema 3.12,

$$\omega \in [SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [D_{p,w,+}]_{N \times N}. \quad (4.14)$$

De (4.9) se deduce que ψ_l^+ y ψ_r^+ son invertibles en $[AP_{p,w}^+]_{N \times N}$. Como ψ_l^+ y ψ_r^+ son polinomios matriciales casi periódicos, entonces también son invertibles en $[APW_{p,w}^+]_{N \times N}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\psi_l^+(x))^{-1} &= c_0^{-1} + \sum \tilde{r}_j e^{i\tilde{\lambda}_j x}, \quad \tilde{\lambda}_j > 0, \quad \sum \|\tilde{r}_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} < \infty, \\ (\psi_r^+(x))^{-1} &= c_0^{-1} + \sum \tilde{s}_j e^{i\tilde{\lambda}_j x}, \quad \tilde{\lambda}_j > 0, \quad \sum \|\tilde{s}_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} < \infty. \end{aligned}$$

Sea

$$\tilde{\omega}(x) := c_0^{-1} + \sum_j \tilde{p}_j(x) e^{i\tilde{\lambda}_j x}, \quad (4.15)$$

donde

$$\tilde{p}_j(x) = \begin{cases} \tilde{s}_j e^{-\tilde{\lambda}_j/x}, & \text{para } x \geq 0, \\ \tilde{r}_j e^{\tilde{\lambda}_j/x}, & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Aplicando la desigualdad de Stechkin, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &\leq \left(\|\tilde{s}_j\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} \|e^{-\tilde{\lambda}_j/(\cdot)} \chi_+\|_{M_{p,w}} + \|\tilde{r}_j\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} \|e^{\tilde{\lambda}_j/(\cdot)} \chi_-\|_{M_{p,w}} \right) \\ &\leq 2\|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} (\|\tilde{s}_j\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} + \|\tilde{r}_j\|_{\mathbf{C}^{N \times N}}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &\leq \|c_0^{-1}\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} + \sum_j \|\tilde{p}_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \|v_{\tilde{\lambda}_j}\|_{\infty} \leq \|c_0^{-1}\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} \\ &+ 2\|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} \sum_j (\|\tilde{s}_j\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} + \|\tilde{r}_j\|_{\mathbf{C}^{N \times N}}) \|v_{\tilde{\lambda}_j}\|_{\infty} < \infty. \end{aligned} \quad (4.18)$$

De aquí, como antes, vemos que

$$\tilde{\omega} \in [SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [D_{p,w,+}]_{N \times N}. \quad (4.19)$$

Si $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \omega(x) &= c_0 + \sum s_j e^{-\lambda_j/x} e^{i\lambda_j x} = c_0 + \sum s_j e^{i\lambda_j(x+i/x)} = \psi_r^+(x+i/x), \\ \tilde{\omega}(x) &= c_0^{-1} + \sum \tilde{s}_j e^{-\tilde{\lambda}_j/x} e^{i\tilde{\lambda}_j x} = c_0^{-1} + \sum \tilde{s}_j e^{i\tilde{\lambda}_j(x+i/x)} = [\psi_r^+(x+i/x)]^{-1}. \end{aligned}$$

Análogamente, para $x < 0$,

$$\omega(x) = \psi_l^+(x-i/x), \quad \tilde{\omega}(x) = [\psi_l^+(x-i/x)]^{-1}.$$

Consecuentemente, $\omega\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\omega = I$ en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. De (4.14) y (4.19) tenemos que

$$\omega \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}. \quad (4.20)$$

Combinando (4.11) y (4.20) se tiene que

$$g^+ := v^{-1}\omega \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}. \quad (4.21)$$

Claramente,

$$(g^+)_l = v_l^{-1}\omega_l = (I + (\psi_l^+(\varphi_l^+)^{-1} - I))^{-1}\psi_l^+ = \varphi_l^+, \quad (4.22)$$

$$(g^+)_r = v_r^{-1}\omega_r = (I + (\psi_r^+(\varphi_r^+)^{-1} - I))^{-1}\psi_r^+ = \varphi_r^+. \quad (4.23)$$

Análogamente podemos construir

$$g^- \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,-}]_{N \times N} \quad (4.24)$$

tal que

$$(g^-)_l = \varphi_l^-, \quad (g^-)_r = \varphi_r^-. \quad (4.25)$$

Sea $h := g^-bg^+$. Aseguramos que el teorema es verdadero para $f_- = g^-$ y $f_+ = g^+h^{-1}a$. Primero que todo, tenemos

$$f_-bf_+ = g^-bg^+(g^-bg^+)^{-1}a = a. \quad (4.26)$$

Por (4.24)

$$f_- \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,-}]_{N \times N}. \quad (4.27)$$

Como $g^-, b, g^+ \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$, se sigue que $h \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ y por lo tanto

$$f_+ \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}. \quad (4.28)$$

De (4.22), (4.23) y (4.25) tenemos que

$$\begin{aligned} h_l &= (g^-)_l b_l (g^+)_l = \varphi_l^- b_l \varphi_l^+ = a_l, \\ h_r &= (g^-)_r b_r (g^+)_r = \varphi_r^- b_r \varphi_r^+ = a_r, \end{aligned}$$

de aquí $a - h \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y $(a - h)(\infty) = 0$. Esto implica que

$$h^{-1}a = I + h^{-1}(a - h) \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}, \quad a^{-1}h = I - a^{-1}(a - h) \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$$

lo que demuestra que

$$f_+ = g^+h^{-1}a \in G[D_{p,w,-}]_{N \times N}. \quad (4.29)$$

Finalmente, (4.26), (4.27), (4.28) y (4.29) completan la demostración. \blacksquare

Teorema 4.13 *Sea $a \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ y supongamos que las representaciones casi periódicas a_l, a_r satisfacen las relaciones (4.8) con algunos $b_l, b_r \in G\mathbf{C}^{N \times N}$ y*

$$M(\varphi_l^-) = M(\varphi_r^-) = I, \quad M(\varphi_l^+) = M(\varphi_r^+) = I. \quad (4.30)$$

Entonces existen funciones matriciales $b \in G[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ tal que $b(-\infty) = b_l$, $b(+\infty) = b_r$ y $a = g^-bg^+$ con ciertas funciones matriciales

$$g^\pm \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N},$$

que son homotópicas a la matriz identidad I , respectivamente, en los conjuntos abiertos

$$G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}.$$

Demostración. En la demostración del Teorema 4.12 construimos dos funciones matriciales

$$g^\pm \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$$

tales que la función matricial $b := (g^-)^{-1}a(g^+)^{-1}$ pertenece a $G[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ debido a (4.8). Sólo resta probar que las funciones matriciales g^\pm son homotópicas a la matriz identidad I en los conjuntos abiertos $G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$, respectivamente. Vamos a probar esto para g^+ (para g^- la demostración es análoga).

Fijemos $\theta \in [0, 1]$. Como $v_\theta := v(1 - \theta) + \theta I \in [SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [D_{p,w,+}]_{N \times N}$ y

$$\|(v(1 - \theta) + \theta I) - I\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} = |1 - \theta| \|v - I\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \leq 1$$

debido a (4.10), deducimos que $v_\theta \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}$. Por otra parte, modificando (4.12) y (4.15), definimos las funciones matriciales

$$\begin{aligned} \omega_\theta(x) &:= I + \sum_j p_j(x) e^{i\lambda_j x} e^{-\lambda_j \theta / (1 - \theta)}, \\ \tilde{\omega}_\theta(x) &:= I + \sum_j \tilde{p}_j(x) e^{i\tilde{\lambda}_j x} e^{-\tilde{\lambda}_j \theta / (1 - \theta)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde $p_j, \tilde{p}_j \in [C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$. De aquí, por el Lema 3.12, las funciones matriciales

$$x \mapsto p_j(x) e^{i\lambda_j x} e^{-\lambda_j \theta / (1 - \theta)}, \quad x \mapsto \tilde{p}_j(x) e^{i\tilde{\lambda}_j x} e^{-\tilde{\lambda}_j \theta / (1 - \theta)}$$

pertenecen a $[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,+}^\infty]_{N \times N}$ para cada j y cada $\theta \in [0, 1]$. Como en ω_θ j , en contraste con $\tilde{\omega}_\theta$, corre a través de un conjunto finito, concluimos que

$$\omega_\theta \in [SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,w,+}^\infty]_{N \times N}.$$

Análogamente, $\tilde{\omega}_\theta \in [SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap [D_{p,w,+}]_{N \times N}$ porque debido a (4.31) y (4.18),

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}_\theta\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} &\leq 1 + \sum_j \|\tilde{p}_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \|v_{\tilde{\lambda}_j}^-\|_\infty e^{-\tilde{\lambda}_j \theta / (1 - \theta)} \\ &\leq 1 + \sum_j \|\tilde{p}_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \|v_{\tilde{\lambda}_j}^-\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \omega_\theta(x) &= \psi_r^+(x + i/x + i\theta/(1 - \theta)), \quad \tilde{\omega}_\theta(x) = [\psi_r^+(x + i/x + i\theta/(1 - \theta))]^{-1} \text{ si } x > 0, \\ \omega_\theta(x) &= \psi_l^+(x - i/x + i\theta/(1 - \theta)), \quad \tilde{\omega}_\theta(x) = [\psi_l^+(x - i/x + i\theta/(1 - \theta))]^{-1} \text{ si } x < 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\omega_\theta \tilde{\omega}_\theta = \tilde{\omega}_\theta \omega_\theta = I$ en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, concluimos que

$$\omega_\theta \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N} \quad \text{para todo } \theta \in [0, 1].$$

Con g^+ dado por (4.21) asociamos la familia de funciones matriciales

$$g_\theta^+ := v_\theta^{-1} \omega_\theta \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N} \quad (\theta \in [0, 1]).$$

Obviamente, $\theta \mapsto v_\theta^{-1}$ es una función $[M_{p,w}]_{N \times N}$ -valuada continua en $[0, 1]$, y por eso v^{-1} es homotópica a I en $G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}$. Ya que para todo $\lambda > 0$ las funciones $\theta \mapsto e^{-\lambda \theta / (1 - \theta)}$ son homeomorfismos de $[0, 1]$ sobre si mismo y como la suma en ω_θ dada por (4.31) es finita, deducimos de la estimación

$$\|\omega_\theta - \omega_{\theta_0}\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \leq 1 + \sum_j \|p_j\|_{[M_{p,w}]_{N \times N}} \|v_{\lambda_j}\|_\infty |e^{-\lambda_j \theta / (1 - \theta)} - e^{-\lambda_j \theta_0 / (1 - \theta_0)}|,$$

que $\theta \mapsto \omega_\theta$ también es una función $[M_{p,w}]_{N \times N}$ -valuada continua en $[0, 1]$. Por lo tanto, ω también es homotópica a I en $G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}$. De aquí, g_θ^+ es una homotopía de g^+ a I en $G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,+}]_{N \times N}$. ■

4.5. Teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos: AP asíntotas factorizables

Definición 4.14 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$. Se dice que una función matricial $a \in G[AP_{p,w}]_{N \times N}$ admite una factorización derecha $AP_{p,w}$ si puede ser representada en la forma

$$a(x) = a^-(x)d(x)a^+(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}, \quad (4.32)$$

$$a^\pm \in G[AP_{p,w}^\pm]_{N \times N}, \quad d = \text{diag}\{e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_N}\}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbf{R}. \quad (4.33)$$

Sea $\kappa(a) := (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Una factorización derecha $AP_{p,w}$ con $\kappa(a) = (0, \dots, 0)$ es llamada factorización derecha canónica $AP_{p,w}$.

En esta sección construiremos la teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf $W(a) \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+, w))$ con símbolos $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ bajo la condición de que las representaciones casi periódicas de a_l y a_r de a admiten factorizaciones derechas $AP_{p,w}$.

Como cada factorización derecha $AP_{p,w}$ es una factorización derecha AP , inferimos de [14, Proposición 8.4] que si $a \in G[AP_{p,w}]_{N \times N}$ admite una factorización derecha canónica $AP_{p,w}$, entonces la *media geométrica* $\mathbf{d}(a) = M(a^-)M(a^+) \in \mathbf{C}^{N \times N}$ es independiente de la elección particular de la factorización derecha canónica $AP_{p,w}$ de a .

Lema 4.15 Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, $N \in \mathbf{N}$, y la función matricial $a \in G[AP_{p,w}]_{N \times N}$ admite una factorización derecha $AP_{p,w}$ (4.32)–(4.33), entonces el operador de Wiener-Hopf $W(a)$ es invertible (resp. invertible por la izquierda, invertible por la derecha) en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si $\lambda_j = 0$ (resp. $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_j \leq 0$) para todo $j = 1, 2, \dots, N$.

Demostración. Como $AP_{p,w}^\pm \subset H_{p,w,\pm}^\infty$, deducimos de la Proposición 2.27 que el operador $W(a)$ es invertible (invertible por la izquierda, invertible por la derecha) en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si el operador $W(d)$ también lo es. Resta aplicar el Teorema 3.14 a cada operador $W(e_{\lambda_j})$. ■

Teorema 4.16 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, $N \in \mathbf{N}$, $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$, y supongamos que a_l y a_r tienen factorizaciones derechas $AP_{p,w}$. Entonces el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si

$$a \in GSAP_{N \times N}, \quad \kappa(a_l) = \kappa(a_r) = (0, \dots, 0), \quad (4.34)$$

y alguna de las dos siguientes condiciones equivalentes se satisface:

$$(i) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \notin \mathbf{Z} \quad \text{para todos los valores propios } \xi_j \text{ de la matriz } \mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l);$$

$$(ii) \quad \text{sp}(\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)) \cap \{re^{2\pi i/q} : r \in [0, \infty)\} = \emptyset.$$

Si $W(a)$ es Fredholm, entonces

$$\text{Ind } W(a) = -\text{ind}(\det a) + \frac{N}{p} - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\}. \quad (4.35)$$

Demostración. Si $W(a)$ es Fredholm, entonces $a \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ en virtud del Teorema 4.7, y los operadores $W(a_l)$, $W(a_r)$ son invertibles debido al Corolario 4.10. Por el Lema 4.15, $\kappa(a_l) = \kappa(a_r) = (0, \dots, 0)$. Esto demuestra la necesidad de (4.34).

Ahora supongamos que (4.34) se cumple. Sean $a_l = a_l^- a_l^+$ y $a_r = a_r^- a_r^+$ las factorizaciones canónicas derechas $AP_{p,w}$. Por analogía con [14, Teorema 10.11], podemos escribir

$$a_l = \varphi_l^- b_l \varphi_l^+, \quad a_r = \varphi_r^- b_r \varphi_r^+, \quad (4.36)$$

donde $b_l := \mathbf{d}(a_l) \in GC^{N \times N}$, $b_r := \mathbf{d}(a_r) \in GC^{N \times N}$ y

$$\begin{aligned} \varphi_l^- &= a_l^- M^{-1}(a_l^-), & \varphi_l^+ &= M^{-1}(a_l^+) a_l^+, \\ \varphi_r^- &= a_r^- M^{-1}(a_r^-), & \varphi_r^+ &= M^{-1}(a_r^+) a_r^+. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Obviamente, $\varphi_l^\pm, \varphi_r^\pm \in G[AP_{p,w}^\pm]_{N \times N}$ y (4.30) se cumple. El Teorema 4.13 implica que existen funciones matriciales $b \in G[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y

$$g^\pm \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N} \quad (4.38)$$

tales que $a = g^- b g^+$, $b(-\infty) = b_l = \mathbf{d}(a_l)$, $b(+\infty) = b_r = \mathbf{d}(a_r)$ y las funciones matriciales g^\pm son homotópicas a la matriz identidad I_N en los conjuntos abiertos $G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$. Por lo tanto, por el Lema 2.31, los operadores $W(a)$ y $W(b)$ son débilmente Φ -equivalentes y, en el caso de que sean Fredholm,

$$\text{Ind } W(a) = \text{Ind } W(g^-) + \text{Ind } W(b) + \text{Ind } W(g^+). \quad (4.39)$$

De acuerdo con la Observación 3.24, cada peso $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ puede ser remplazado por un peso equivalente continuo que esté en $A_p^0(\mathbf{R})$, y entonces podemos tomar $\nu_0^\pm(p, w) = \nu_0^0(p, w) = 1/p$. De aquí, como $b \in G[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, del Teorema 2.26 se sigue que la condición (i) (equivalentemente, (ii)) es necesaria y suficiente para que $W(b)$ sea Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. Como $W(a)$ y $W(b)$ son débilmente Φ -equivalentes bajo la condición (4.34), deducimos que las condiciones (4.34) y (i) (equivalentemente, (4.34) y (ii)) son necesarias y suficientes para que $W(a)$ sea Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$.

Por el Teorema 2.26 y la Observación 3.24,

$$\text{Ind } W(b) = -\text{ind}(\det b) + \frac{N}{p} - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\}, \quad (4.40)$$

donde ξ_j son los valores propios de la matriz $b^{-1}(+\infty)b(-\infty) = \mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)$.

De acuerdo con la demostración del Teorema 4.12, las funciones matriciales (4.38) tienen la forma $g^\pm = (1-u)g_l^\pm + u g_r^\pm + \widehat{g}_0^\pm$ donde $g_l^\pm, g_r^\pm \in G[AP_{p,w}^\pm]_{N \times N}$, $M(g_l^\pm) = M(g_r^\pm) = I_N$, $\widehat{g}_0^\pm \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y $\widehat{g}_0^\pm(\infty) = 0$. De aquí,

$$\det g^\pm = (1-u) \det g_l^\pm + u \det g_r^\pm + \widehat{g}_0^\pm \in GSAP_{p,w} \cap GD_{p,w,\pm}$$

donde $\det g_l^\pm, \det g_r^\pm \in GAP_{p,w}^\pm$, $\widehat{g}_0^\pm \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, $\widehat{g}_0^\pm(\infty) = 0$, y

$$M(\det g_l^\pm) = \det M(g_l^\pm) = 1, \quad M(\det g_r^\pm) = \det M(g_r^\pm) = 1.$$

Entonces, deducimos que $\det g_l^\pm = e^{\psi_l^\pm}$, $\det g_r^\pm = e^{\psi_r^\pm}$ con $\psi_l^\pm, \psi_r^\pm \in AP_{p,w}$ y $M(\psi_l^\pm) = M(\psi_r^\pm) = 0$. Por la demostración del Teorema 3.23, $\text{ind}(\det g^\pm) = \text{ind} c_\pm$ donde

$$\begin{aligned} c_\pm &:= (\det g^\pm) e^{-(1-u)\psi_l^\pm - u\psi_r^\pm} \\ &= [(1-u)e^{\psi_l^\pm} + ue^{\psi_r^\pm} + \widehat{g}_0^\pm] e^{-(1-u)\psi_l^\pm - u\psi_r^\pm} \in GC_{p,w}(\dot{\mathbf{R}}). \end{aligned}$$

De aquí, $\text{ind}(\det g^\pm)$ es un número entero junto con $\text{ind} c_\pm$. Análogamente, se puede ver que $\text{ind}(\det g_\theta^\pm)$ son enteros para todas las funciones matriciales en las familias de homotopía g_θ^\pm ($\theta \in [0, 1]$) construidas en la prueba del Teorema 4.13 y tal que $g_0^\pm = g^\pm$, $g_1^\pm = I_N$. Entonces, debido a la estabilidad del índice de Cauchy (3.51), obtenemos

$$\text{ind}(\det g^\pm) = \text{ind}(\det g_0^\pm) = \text{ind}(\det g_1^\pm) = \text{ind}(\det I_N) = 0. \quad (4.41)$$

Por la propiedad logarítmica (3.52) del índice de Cauchy (3.51) y por (4.41), deducimos de la igualdad $\det a = \det g^- \cdot \det b \cdot \det g^+$ que

$$\text{ind}(\det a) = \text{ind}(\det g^-) + \text{ind}(\det b) + \text{ind}(\det g^+) = \text{ind}(\det b). \quad (4.42)$$

Como las familias continuas $W(g_\theta^\pm)$ son homotopías de los operadores $W(g^\pm)$ al operador identidad I en el conjunto de operadores Fredholm, inferimos de (4.41) que

$$\text{Ind} W(g^\pm) = \text{Ind} I = 0. \quad (4.43)$$

Finalmente, las igualdades (4.39)–(4.40) y (4.42)–(4.43) implican (4.35). \blacksquare

4.6. Un criterio de invertibilidad para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales casi periódicos: pesos de Muckenhoupt especiales.

En esta sección consideraremos los pesos $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ que satisfacen la condición

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in [t, t+1]} \text{ess} \left| \ln w(x) - \ln w(y) \right| = 0. \quad (4.44)$$

El Ejemplo 2.22 y [9] nos dan una muestra abundante de tales pesos. Por [57], cualquier peso $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ es equivalente al peso $\omega \in C(\mathbf{R})$ dado por (2.21). Además, (2.21) implica que

$$\left| \ln \omega(x) - \ln \omega(y) \right| \leq \int_{-1/2}^{1/2} \left| \ln(\omega(x+t)) - \ln(\omega(y+t)) \right| dt,$$

de lo que se sigue debido a (4.44) que ω también satisface (4.44). De aquí, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w \in C(\mathbf{R}) \cap A_p^0(\mathbf{R})$. Entonces, para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, deducimos de (4.44) que

$$v_\lambda(x) = \frac{w(x+\lambda)}{w(x)} \in C(\dot{\mathbf{R}}) \quad \text{y} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v_\lambda(x) = 1. \quad (4.45)$$

Como $\|v_\lambda\|_\infty \geq 1$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ debido a (4.45), concluimos que

$$G[APW_{p,w}]_{N \times N} \subset GAPW_{N \times N}, \quad G[APW_{p,w}^\pm]_{N \times N} \subset GAPW_{N \times N}^\pm$$

para todo $N \in \mathbf{N}$ en vista de la relación

$$\sum_\lambda \|a_\lambda\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} \leq \sum_\lambda \|a_\lambda\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} \|v_\lambda\|_\infty.$$

Teorema 4.17 Sean $1 < p < \infty$, $N \in \mathbf{N}$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y supongamos que la condición (4.44) se cumple. Si $a \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$, entonces el operador $W(a)$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si a admite una factorización canónica derecha APW .

Demostración.

Necesidad. Sea $a = \sum_{\lambda} a_{\lambda} e_{\lambda} \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$. Ya que el operador $W(a)$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si el operador $A = \chi_+ W^0(a) + \chi_- I$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}, w)$, y como el operador

$$A = (\chi_+ a_0 + \chi_-)I + \sum_{\lambda \neq 0} \chi_+ a_{\lambda} U_{\lambda} \in \mathcal{V}_{N \times N}^W,$$

deducimos del Teorema 4.3 que el operador inverso A^{-1} también pertenece a $\mathcal{V}_{N \times N}^W$. Entonces, en vista de (4.4) y la estimación $\|U_{\lambda}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} = \|v_{\lambda}\|_{\infty} \geq 1$, los operadores mutuamente inversos A y A^{-1} también son acotados en el espacio $L_N^p(\mathbf{R})$. De aquí, el operador $W(a)$ con símbolo $a \in [APW_{p,w}]_{N \times N} \subset [APW]_{N \times N}$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$. De [14, Corolario 19.11], deducimos que la función matricial a admite una factorización canónica derecha APW , $a = a_- a_+$ con $a_{\pm} \in GAPW_{N \times N}^{\pm}$.

Suficiencia. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w \in C(\mathbf{R}) \cap A_p^0(\mathbf{R})$, lo cual implica (4.45). Como $a \in APW_{N \times N}$ y a admite una factorización canónica derecha APW , deducimos de [14, Corolario 19.11] que el operador $W(a)$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$. Definamos $\chi_h(x) := \chi_+(x - h)$ para todo $x, h \in \mathbf{R}$. Obviamente, para cada $h > 0$ el operador $\chi_h W(a) \chi_h I$ es invertible en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$ y

$$\sup_{h > 0} \|(\chi_h W(a) \chi_h I)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+))} < \infty.$$

De aquí, para cada $h > 0$ el operador $\chi_h w^{-1} W(a) w \chi_h I$ es invertible en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ y

$$\sup_{h > 0} \|(\chi_h w^{-1} W(a) w \chi_h I)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w))} < \infty. \quad (4.46)$$

Como $a = \sum_{\lambda} a_{\lambda} e_{\lambda} \in [APW_{p,w}]_{N \times N} \subset APW_{N \times N}$ y ya que

$$w^{-1} W(a) w I = \sum_{\lambda} a_{\lambda} v_{-\lambda} U_{\lambda},$$

de (4.45) se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|\chi_h w^{-1} W(a) w \chi_h I - \chi_h W(a) \chi_h I\|_{\mathcal{B}(\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w))} = 0. \quad (4.47)$$

Como los operadores $\chi_h w^{-1} W(a) w \chi_h I$ son invertibles en los espacios $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, deducimos de (4.46) y (4.47) que para $h > 0$ suficientemente grande, el operador $\chi_h W(a) \chi_h I$ es invertible en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. De aquí, en vista de $W(a) = U_{-h} \chi_h W(a) \chi_h U_h$, el operador $W(a)$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. ■

Observación 4.18 Si $a \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$ y $W(a)$ es invertible en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ para algún $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces, por la prueba de la necesidad del Teorema 4.17, el operador $W(a)$ es invertible con los mismos inversos en todos los espacios $L_N^r(\mathbf{R}, \omega)$ siempre que $r \in (1, \infty)$, $\omega \in A_r^0(\mathbf{R})$ y $\|\omega((\cdot) + \lambda)/\omega\|_{\infty} \leq \|v_{\lambda}\|_{\infty}$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

4.7. Una aplicación de los operadores pseudodiferenciales

Dada una función $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, sea $C_b(\mathbf{R}) := C(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ y

$$cm_x(a) := \text{máx} \{|a(x+h) - a(x)| : h \in [-1, 1]\}$$

una oscilación local de a en el punto $x \in \mathbf{R}$. De acuerdo con [20, p. 122], una función $a \in C_b(\mathbf{R})$ es llamada *lentamente oscilatoria en ∞* si

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} cm_x(a) = 0.$$

Sea $CM(\mathbf{R})$ el C^* -álgebra de todas las funciones $f \in C_b(\mathbf{R})$ que son lentamente oscilatorias en ∞ . De acuerdo con [41, Observación 6.4], introducimos también el C^* -álgebra

$$CM(\mathbf{R}^2) := \left\{ f \in C_b(\mathbf{R}^2) : \lim_{x,y \rightarrow +\infty} cm_{(x,y)}(f) = \lim_{x,y \rightarrow -\infty} cm_{(x,y)}(f) = 0 \right\} \quad (4.48)$$

donde

$$cm_{(x,y)}(f) := \text{máx} \left\{ |f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y)| : h_1, h_2 \in [-1, 1] \right\}. \quad (4.49)$$

Análogamente, para $b(x, y, \mu) \in C_b(\mathbf{R}^2, V(\mathbf{R}))$, definimos

$$cm_{(x,y)}^C(b) := \text{máx} \left\{ \|b(x+h_1, y+h_2, \cdot) - b(x, y, \cdot)\|_\infty : h_1, h_2 \in [-1, 1] \right\}.$$

Sea \mathcal{E}_2^C el C^* -álgebra de todas las funciones $b \in C_b(\mathbf{R}^2, V(\mathbf{R}))$ tales que la función $V(\mathbf{R})$ -valuada $(x, y) \mapsto b(x, y, \cdot)$ es uniformemente continua en \mathbf{R}^2 ,

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup_{x,y \in \mathbf{R}} \|b(x, y, \cdot) - b^h(x, y, \cdot)\|_V = 0$$

donde $b^h(x, y, \mu) := b(x, y, \mu + h)$ para toda $(x, y, \mu) \in \mathbf{R}^3$, y

$$\lim_{x,y \rightarrow -\infty} cm_{(x,y)}^C(b) = \lim_{x,y \rightarrow +\infty} cm_{(x,y)}^C(b) = 0.$$

En vista de [40, Teorema 3.1], el operador pseudodiferencial $a(x, D)$ con un símbolo $a(x, \mu) \in C_b(\mathbf{R}, V(\mathbf{R}))$ definido para funciones $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ por la integral iterada

$$[a(x, D)f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} d\mu \int_{\mathbf{R}} a(x, \mu) e^{i(x-y)\mu} f(y) dy, \quad \text{para } x \in \mathbf{R},$$

se extiende a un operador lineal acotado en cada espacio de Lebesgue $L^p(\mathbf{R})$, $p \in (1, \infty)$.

Por [41, Teorema 4.1], si $\partial_\mu^j \partial_y^k b(x, y, \mu) \in C_b(\mathbf{R}^2, V(\mathbf{R}))$ para todo $k, j \in 0, 1, 2$, entonces, el operador pseudodiferencial B definido para funciones en $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ por la integral iterada

$$(Bf)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} d\mu \int_{\mathbf{R}} b(x, y, \mu) e^{i(x-y)\mu} f(y) dy, \quad \text{para } x \in \mathbf{R}, \quad (4.50)$$

se extiende a un operador lineal acotado en cada espacio de Lebesgue $L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$.

Dado un peso $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ que satisface (4.44), y repitiendo el procedimiento (2.21) de [57], podemos construir un peso equivalente $\omega \in A_p^0(\mathbf{R})$, n veces continuamente diferenciable y que satisface (4.44), donde n es un número en \mathbf{N} . Más aún, por (2.21) y (4.44),

$$(\ln \omega)'(x) = \ln w(x + 1/2) - \ln w(x - 1/2) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

De aquí, si $w \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^n(\mathbf{R})$ para un $n \in \mathbf{Z}_+$ donde $\mathbf{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$, entonces $(\ln \omega)' \in C^n(\dot{\mathbf{R}})$ y $(\ln \omega)^{(j+1)}(\infty) = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^3(\mathbf{R})$, $(\ln w)' \in C^2(\dot{\mathbf{R}})$ y $(\ln w)'(\infty) = 0$.

Por analogía con [70, Lema 1.1], obtenemos lo siguiente.

Lema 4.19 *Sean $p \in (1, \infty)$, $w = e^v \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$, $v' \in C(\dot{\mathbf{R}})$, $v'(\infty) = 0$. Entonces para cada $\eta > 0$ las funciones 1 y $\gamma(x) := \tanh(\eta x)$ pertenecen al álgebra de Banach $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, y la cerradura en $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ del álgebra generada por estas dos funciones coincide con $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$.*

Demostración. Obviamente, las funciones 1 y γ están en $C(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R}) \subset C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. Para probar la segunda parte del lema, observemos que $\gamma : x \mapsto \tanh(\eta x)$ es un homeomorfismo de $\overline{\mathbf{R}}$ sobre $[-1, 1]$. Consideremos el operador

$$Q_\gamma : C[-1, 1] \rightarrow C(\overline{\mathbf{R}}), \quad f \mapsto f \circ \gamma.$$

Claramente, Q_γ es un isomorfismo isométrico, que también preserva la variación total debido a la monotonicidad de γ . Sea $C^1[-1, 1]$ el espacio de las funciones que son continuamente diferenciables una vez en $[-1, 1]$, y sea $B_{p,w}$ la cerradura en $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ del álgebra generada por 1 y γ .

Primero mostraremos que $Q_\gamma(C^1[-1, 1]) \subset B_{p,w}$. En efecto, sea $f \in Q_\gamma(C^1[-1, 1])$, $\varphi = Q_\gamma^{-1}f$. Aproximando φ por una sucesión de polinomios φ_m en la norma de $C^1[-1, 1]$, vemos que φ_m también se aproxima a φ en la norma de $V[-1, 1]$. De aquí, la sucesión $f_m = Q_\gamma \varphi_m$ se aproxima a f por ambas normas de $C(\overline{\mathbf{R}})$ y $V_1(\mathbf{R})$. Entonces, por la desigualdad de Stechkin, f_m es una sucesión de Cauchy en $M_{p,w}$. Como $f_m \in B_{p,w}$, concluimos que $f \in B_{p,w}$ como queríamos.

Ahora mostremos que $C(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R}) \subset B_{p,w}$. Fijemos $f \in C(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$. Por la prueba de [70, Lema 1.1], existe una sucesión de funciones $f_m \in Q_\gamma(C^1[-1, 1])$ que se aproxima a f en la norma de $C(\overline{\mathbf{R}})$ y es uniformemente acotada en la norma de $V_1(\mathbf{R})$. Por la parte ya probada, $f_m \in B_{r,\omega}$ para todo $r \in (1, \infty)$, $\omega \in A_r^0(\mathbf{R})$. Es claro que $f \in M_{r,\omega}$ para tales r y ω . Por otra parte, f_m también converge a f en la norma de M_2 .

Si $w \in A_p(\mathbf{R})$, entonces $w^{1+\delta} \in A_{p(1+\varepsilon)}(\mathbf{R})$ siempre que $|\varepsilon|$ y $|\delta|$ sean suficientemente pequeños (ver, por ejemplo, [27, Capítulo 6, Corolario 6.10] o [9, Teorema 2.31]). Además, si $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, entonces $w^{1+\delta} \in A_{p(1+\varepsilon)}^0(\mathbf{R})$ para $|\varepsilon|$ y $|\delta|$ pequeños. Claramente, si $p \neq 2$, entonces existen $|\varepsilon| > 0$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeños tales que

$$1 - 2\varepsilon(p(1+\varepsilon) - 2)^{-1} = (1+\delta)^{-1}$$

donde $\varepsilon > 0$ si $p \in (2, \infty)$ y $\varepsilon < 0$ si $p \in (1, 2)$. Tomando $r := p(1+\varepsilon)$, $\omega = w^{1+\delta}$ y $t := (1+\delta)^{-1} \in (0, 1)$, obtenemos

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{r}, \quad w = 1^{1-t} \omega^t. \quad (4.51)$$

Si $p = 2$ y $w \neq 1$, obtenemos otra vez (4.51) para $r := p$ y $t := (1+\delta)^{-1} \in (0, 1)$. Por el teorema de interpolación de Stein-Weiss [74], deducimos de (4.51) que

$$\|W^0(f_m - f)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \leq \|W^0(f_m - f)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}))}^{1-t} \|W^0(f_m - f)\|_{\mathcal{B}(L^r(\mathbf{R}, \omega))}^t,$$

lo que implica, en vista de la uniformidad acotada de $\|f_m - f\|_{M_{r,w}}$ con respecto a m que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{M_{p,w}} = 0$. Entonces, $f = \lim f_m$ pertenece a $B_{p,w}$ junto con todos las f_m . Por lo tanto, $C(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R}) \subset B_{p,w}$, y de aquí $B_{p,w} = C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. ■

Lema 4.20 Sea $p \in (1, \infty)$, $w = e^v \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$, $v' \in C(\dot{\mathbf{R}})$, y $v'(\infty) = 0$. Si $u(\mu) = \tanh(\eta\mu)$ para $\mu \in \mathbf{R}$ donde $0 < \eta < (\pi/2)\|v'\|_\infty^{-1}$, entonces el operador

$$wW^0(u)w^{-1}I - W^0(u) \quad (4.52)$$

es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$.

Demostración. Por la desigualdad de Stechkin, $u \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, y por lo tanto el operador de convolución $W^0(u) = \mathcal{F}^{-1}u\mathcal{F}$ es acotado en el espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$. Sea

$$v(x) := \ln w(x), \quad m_v(x, y) := \frac{v(x) - v(y)}{x - y}. \quad (4.53)$$

Ya que w satisface (4.44), sin pérdida de generalidad supongamos que $w \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^3(\mathbf{R})$ y $(\ln w)' \in C^2(\dot{\mathbf{R}}) \subset SO(\mathbf{R})$. Entonces por [41, Lema 8.1] las funciones $(x, y) \mapsto \partial_y^j m_v(x, y)$ pertenecen a $SO(\mathbf{R}^2)$ para todo $j = 0, 1, 2$, donde $SO(\mathbf{R}^2)$ está dado por (4.48)–(4.49).

Ya que $u(-\mu) = -u(\mu)$ y $wW^0(u)w^{-1}I \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$, para $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned} (wW^0(u)w^{-1}f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} d\mu \int_{\mathbf{R}} e^{v(x)-v(y)} u(\mu) e^{-i(x-y)\mu} f(y) dy \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} d\mu \int_{\mathbf{R}} u(\mu) e^{i(x-y)[\mu - im_v(x,y)]} f(y) dy \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} d\mu \int_{\mathbf{R}} u[\mu + im_v(x, y)] e^{i(x-y)\mu} f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Como $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $v' \in SO(\mathbf{R})$, deducimos que $|m_v(x, y)| \leq \|v'\|_\infty$ para todo $x, y \in \mathbf{R}$, y de aquí $|\eta m_v(x, y)| < \pi/2$, lo que implica que la función

$$b(x, y, \mu) := u[\mu + im_v(x, y)] = \tanh[\eta(\mu + im_v(x, y))] \quad (4.55)$$

está bien definida. Como la función $u(z)$ es analítica en la banda $\{z \in \mathbf{C} : 2\eta|\operatorname{Im} z| < \pi\}$, representando operadores pseudodiferenciales via integrales oscilatorias (ver, por ejemplo, [63], [41]), podemos reemplazar $\mathbf{R} - im_v(x, y)$ en (4.54) por \mathbf{R} por analogía con [63, Teorema 4.5.3]. Se ve fácilmente que

$$\partial_\mu^j \partial_y^k b(x, y, \mu) \in \mathcal{E}_2^C \subset C_b(\mathbf{R}^2, V(\mathbf{R})) \quad (k = 0, 1, 2).$$

De aquí, por (4.54), (4.55) y [41, Teorema 4.1], obtenemos

$$wW^0(u)w^{-1}I = -B, \quad (4.56)$$

donde el operador pseudodiferencial $B \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))$ está dado por (4.50). Ya que $m_v(x, x) = v'(x)$, deducimos de (4.55) que

$$\tilde{u}(x, \mu) := b(x, x, \mu) = u[\mu + iv'(x)] = \tanh[\eta(\mu + iv'(x))],$$

donde la función $\tanh[\eta(\mu + iv'(x))]$ es acotada ya que $2\eta\|v'\|_\infty < \pi$. Consecuentemente, de [41, Lema 3.4 y Teorema 4.4] se sigue que el operador $B - \tilde{u}(x, D)$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$. Esto junto con (4.56) demuestra que el operador $wW^0(u)w^{-1}I + \tilde{u}(x, D)$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$.

Como $\tilde{u}(x, \mu) \in C(\overline{\mathbf{R}}, V(\mathbf{R}))$ y $\tilde{u}(x, \mu) - u(\mu) = 0$ para todo $(x, \mu) \in \partial(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, deducimos de [40, Corolario 4.3] que el operador $\tilde{u}(x, D) + W^0(u)$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$. De aquí, el operador (4.52) también es compacto en $L^p(\mathbf{R})$. ■

Corolario 4.21 *Si $p \in (1, \infty)$, $w = e^v \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$, $v' \in C(\dot{\mathbf{R}})$, y $v'(\infty) = 0$, entonces el álgebra de Banach $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ se encaja continuamente en el álgebra de Banach $C_p(\overline{\mathbf{R}})$, y para cada $f \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$,*

$$\|f\|_{M_p} \leq \|f\|_{M_{p,w}}. \quad (4.57)$$

Demostración. Fijemos $\eta \in (0, (\pi/2)\|v'\|_\infty^{-1})$ y tomemos $\gamma(x) = \tanh(\eta x)$. Sea $g_n := P_n \circ \gamma$. Obviamente, las funciones γ y g_n ($n \in \mathbf{N}$) pertenecen a $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \cap C_p(\overline{\mathbf{R}})$. Por el Lema 4.20, el operador $wW^0(\gamma)w^{-1}I - W^0(\gamma)$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$. De aquí, para cada polinomio algebraico P_n , el operador $wW^0(P_n \circ \gamma)w^{-1}I - W^0(P_n \circ \gamma)$ también es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{M_p} &= \|W^0(g_n)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} = \inf_{K \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}))} \|W^0(g_n) + K\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} \\ &= \inf_{K \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}))} \|wW^0(g_n)w^{-1}I + K\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} \leq \|wW^0(g_n)w^{-1}I\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}))} \\ &= \|W^0(g_n)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))} = \|g_n\|_{M_{p,w}}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por el Lema 4.19, cada función $f \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ puede ser aproximada en la norma de $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ por las funciones g_n . De aquí deducimos de (4.58) que la sucesión $\{g_n\}$ también converge en la norma de $C_p(\overline{\mathbf{R}})$, y la función límite coincide con f . Por lo tanto, el espacio $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ se encaja continuamente en $C_p(\overline{\mathbf{R}})$, y (4.57) se cumple para toda $f \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. ■

Aproximando las funciones en $u \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ por las funciones $g_n = P_n \circ \gamma$ en vista del Lema 4.19 y el Corolario 4.21, deducimos del Lema 4.20 el siguiente corolario.

Corolario 4.22 *Si $p \in (1, \infty)$, $w = e^v \in A_p^0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$, $v' \in C(\dot{\mathbf{R}})$, y $v'(\infty) = 0$, entonces para cada $u \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ el operador (4.52) es compacto en el espacio $L^p(\mathbf{R})$.*

4.8. Teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales semi-casi periódicos: pesos de Muckenhoupt especiales.

Lema 4.23 *Sea $1 < p < \infty$, $N \in \mathbf{N}$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, y supongamos que (4.44) se cumple. Si $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$, $a_l, a_r \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$ y el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$, entonces el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, y el $\text{Ind } W(a)$ en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+)$ y $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ es el mismo.*

Demostración. Como $APW_{p,w} \subset APW$ y $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \subset C(\overline{\mathbf{R}})$, concluimos que $a \in SAP_{N \times N}$ y $a_l, a_r \in APW_{N \times N}$. Entonces el operador $W(a)$ es acotado en ambos espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+)$ y

$L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. Ya que el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$, deducimos de la relación

$$\chi_h W(a) \chi_h I = \chi_h W^0(a) \chi_h I = U_h \chi_+ W^0(a) \chi_+ U_{-h} = U_h W(a) U_{-h} \quad (4.59)$$

que los operadores $\chi_h W(a) \chi_h I = U_h W(a) U_h^{-1}$ son Fredholm en los espacios $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$ para todo $h > 0$, y sus regularizadores

$$(\chi_h W(a) \chi_h I)^{(-1)} := U_h [W(a)]^{(-1)} U_h^{-1}$$

satisfacen la condición

$$\sup_{h>0} \|(\chi_h W(a) \chi_h I)^{(-1)}\|_{\mathcal{B}(\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+))} \leq \| [W(a)]^{(-1)} \|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} < \infty. \quad (4.60)$$

Por el Corolario 4.22, el operador

$$\begin{aligned} w W^0(a) w^{-1} I &= (w W^0(a_l) w^{-1}) (w W^0(u_-) w^{-1}) I \\ &+ (w W^0(a_r) w^{-1}) (w W^0(u_+) w^{-1}) I + w W^0(a_0) w^{-1} I \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R})) \end{aligned}$$

puede ser reescrito en la forma

$$w W^0(a) w^{-1} I = (w W^0(a_l) w^{-1}) W^0(u_-) + (w W^0(a_r) w^{-1}) W^0(u_+) + W^0(a_0) + K \quad (4.61)$$

donde K es un operador compacto en $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}))$. De (4.44) y (4.47), obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \| \chi_h W^0(a_l) I - \chi_h w W^0(a_l) w^{-1} I \|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}))} &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \| \chi_h W^0(a_r) I - \chi_h w W^0(a_r) w^{-1} I \|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}))} &= 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Tomando en cuenta (4.61) y (4.62), deducimos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \| \chi_h W^0(a) \chi_h I - \chi_h w W^0(a) w^{-1} \chi_h I \|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}))} = 0. \quad (4.63)$$

De aquí, de acuerdo con (4.63) y (4.60), concluimos que para $h > 0$ suficientemente grande el operador $\chi_h w W(a) w^{-1} \chi_h I = \chi_h w W^0(a) w^{-1} \chi_h I$ es Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$ al igual que el operador $\chi_h W(a) \chi_h I$, e

$$\text{Ind}(\chi_h w W(a) w^{-1} \chi_h I) = \text{Ind}(\chi_h W(a) \chi_h I). \quad (4.64)$$

Esto implica que el operador $\chi_h W(a) \chi_h I$ es Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, y el $\text{Ind}(\chi_h W(a) \chi_h I)$ es el mismo en los espacios $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ y $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$. Finalmente, de la relación

$$W(a) = U_{-h}(\chi_h W(a) \chi_h I) U_h$$

se sigue que el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, e

$$\text{Ind} W(a) = \text{Ind}(\chi_h W(a) \chi_h I). \quad (4.65)$$

Por lo tanto, de (4.65), el $\text{Ind} W(a)$ es el mismo en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+)$ y $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. ■

Teorema 4.24 Sean $1 < p < \infty$, $N \in \mathbf{N}$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$, y supongamos que (4.44) se cumple. Si $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ y $a_l, a_r \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$, entonces el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

- (i) $a \in GSAP_{N \times N}$,
- (ii) a_l y a_r admiten factorizaciones canónicas derechas APW,
- (iii) $\frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j(\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)) \notin \mathbf{Z}$

para todos los valores propios $\xi_j = \xi_j(\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l))$ de la matriz $\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)$.

Si $W(a)$ es Fredholm, entonces $\text{Ind } W(a)$ se calcula por la fórmula (4.35).

Demostración. Necesidad. Sea

$$a = a_l u_- + a_r u_+ + a_0, \quad (4.66)$$

donde $a_l, a_r \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$, $u_{\pm} = 2^{-1}[1 \pm \tanh x] \in [C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, $a_0 \in [C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, y $a_0(\infty) = 0$.

Si $W(a)$ es Fredholm, entonces $a \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N}$ por el Teorema 4.7, y $W(a_l)$, $W(a_r)$ son invertibles en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ debido al Corolario 4.10. De aquí a_l y a_r admiten factorizaciones canónicas derechas APW en vista del Teorema 4.17. Esto prueba la necesidad de (i) y (ii).

Ahora supongamos que (i) y (ii) se cumplen. Sean $a_l = a_l^- a_l^+$ y $a_r = a_r^- a_r^+$ factorizaciones canónicas derechas APW de a_l y a_r , respectivamente. Podemos escribir

$$\begin{aligned} a_l &= a_l^- M^{-1}(a_l^-) \mathbf{d}(a_l) M^{-1}(a_l^+) a_l^+, \\ a_r &= a_r^- M^{-1}(a_r^-) \mathbf{d}(a_r) M^{-1}(a_r^+) a_r^+. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Claramente, para cada $\varepsilon > 0$ existen polinomios matriciales casi periódicos $\tilde{a}_l^{\pm}, \tilde{a}_r^{\pm} \in GAPW_{N \times N}^{\pm}$ tales que, para $\tilde{a}_l := \tilde{a}_l^- \mathbf{d}(a_l) \tilde{a}_l^+$ y $\tilde{a}_r := \tilde{a}_r^- \mathbf{d}(a_r) \tilde{a}_r^+$,

$$\|W(a_l) - W(\tilde{a}_l)\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} < \varepsilon, \quad \|W(a_r) - W(\tilde{a}_r)\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} < \varepsilon, \quad (4.68)$$

$$M(\tilde{a}_l^-) = M(\tilde{a}_l^+) = M(\tilde{a}_r^-) = M(\tilde{a}_r^+) = I. \quad (4.69)$$

Como el operador $W(a) = \chi_+ W^0(a) \chi_+ I$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, deducimos que para cada $h > 0$ el operador

$$\chi_h W(a) \chi_h I = \chi_h W^0(a) \chi_h I = U_h \chi_+ W^0(a) \chi_+ U_{-h} = U_h W(a) U_{-h}$$

es Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. De aquí, para cada $h > 0$, el operador $\chi_h w W(a) w^{-1} \chi_h I$ es Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$. Por (4.44) y (4.47),

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \|\chi_h [W(a_l) - w W(a_l) w^{-1} I]\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \|\chi_h [W(a_r) - w W(a_r) w^{-1} I]\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} &= 0, \end{aligned} \quad (4.70)$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \|\chi_h [W(\tilde{a}_l) - w W(\tilde{a}_l) w^{-1} I]\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \|\chi_h [W(\tilde{a}_r) - w W(\tilde{a}_r) w^{-1} I]\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} &= 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

De aquí deducimos de (4.68), (4.70) y (4.71) que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $h > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\chi_h[wW(a_l - \tilde{a}_l)w^{-1}I]\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} &< 2\varepsilon, \\ \|\chi_h[wW(a_r - \tilde{a}_r)w^{-1}I]\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} &< 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Junto con la función matricial $a \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$ dada por (4.66), introducimos la función matricial $\tilde{a} := \tilde{a}_l u_- + \tilde{a}_r u_+ + a_0 \in [SAP_{p,w}]_{N \times N}$. Por (4.72),

$$\|\chi_h[wW(a)w^{-1} - wW(\tilde{a})w^{-1}]\chi_h I\|_{\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+))} < 2\varepsilon \max \|u_{\pm}\|_{M_{p,w}}. \quad (4.73)$$

Como el operador $\chi_h wW(a)w^{-1}\chi_h I$ es Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ en (4.73) suficientemente pequeño tal que el operador $\chi_h wW(\tilde{a})w^{-1}\chi_h I$ también sea Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+)$. De aquí el operador $\chi_h W(\tilde{a})\chi_h I$ es Fredholm en el espacio $\chi_h L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$, lo cual, en vista de $\chi_h W(\tilde{a})\chi_h I = U_h W(\tilde{a})U_h^{-1}$ implica que el operador $W(\tilde{a})$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. Pero las funciones matriciales \tilde{a}_l, \tilde{a}_r admiten factorizaciones canónicas derechas APW con factores $\tilde{a}_l^{\pm}, \tilde{a}_r^{\pm} \in GAPW_{N \times N}^{\pm}$ que son polinomios matriciales casi periódicos. Entonces $\tilde{a}_l^{\pm}, \tilde{a}_r^{\pm} \in [APW_{p,w}^{\pm}]_{N \times N}$. Además, como $\tilde{a}_l, \tilde{a}_r \in [APW_{p,w}]_{N \times N} \cap G[APW]_{N \times N}$, deducimos de la Proposición 4.5 que $\tilde{a}_l, \tilde{a}_r \in G[APW_{p,w}]_{N \times N}$. Consecuentemente, de las relaciones

$$\begin{aligned} (\tilde{a}_l^-)^{-1} &= \mathbf{d}(a_l)\tilde{a}_l^+ \tilde{a}_l^{-1}, & (\tilde{a}_l^+)^{-1} &= \tilde{a}_l^{-1} \tilde{a}_l^- \mathbf{d}(a_l), \\ (\tilde{a}_r^-)^{-1} &= \mathbf{d}(a_r)\tilde{a}_r^+ \tilde{a}_r^{-1}, & (\tilde{a}_r^+)^{-1} &= \tilde{a}_r^{-1} \tilde{a}_r^- \mathbf{d}(a_r) \end{aligned}$$

tenemos que $(\tilde{a}_l^{\pm})^{-1}, (\tilde{a}_r^{\pm})^{-1} \in [APW_{p,w}^{\pm}]_{N \times N}$. Por lo tanto, $\tilde{a}_l^{\pm}, \tilde{a}_r^{\pm} \in G[APW_{p,w}^{\pm}]_{N \times N}$.

De aquí, sin pérdida de generalidad podemos suponer que las funciones matriciales originales $a_l, a_r \in [APW_{p,w}]_{N \times N}$ admiten factorizaciones canónicas derechas APW con factores $a_l^{\pm}, a_r^{\pm} \in G[APW_{p,w}^{\pm}]_{N \times N}$. Sean

$$\begin{aligned} \varphi_l^- &= a_l^- M^{-1}(a_l^-), & \varphi_l^+ &= M^{-1}(a_l^+) a_l^+, \\ \varphi_r^- &= a_r^- M^{-1}(a_r^-), & \varphi_r^+ &= M^{-1}(a_r^+) a_r^+. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Por (4.67) y (4.74),

$$a_l = \varphi_l^- \mathbf{d}(a_l) \varphi_l^+, \quad a_r = \varphi_r^- \mathbf{d}(a_r) \varphi_r^+.$$

Como $\varphi_l^{\pm}, \varphi_r^{\pm} \in G[APW_{p,w}^{\pm}]_{N \times N} \subset G[AP_{p,w}^{\pm}]_{N \times N}$ y

$$M(\varphi_l^-) = M(\varphi_r^-) = M(\varphi_l^+) = M(\varphi_r^+) = I, \quad (4.75)$$

deducimos del Teorema 4.13 que existen funciones matriciales $b \in G[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y

$$g_{\pm} \in G[SAP_{p,w}]_{N \times N} \cap G[D_{p,w,\pm}]_{N \times N}$$

tales que $a = g_- b g_+$ y $b(-\infty) = \mathbf{d}(a_l)$, $b(+\infty) = \mathbf{d}(a_r)$. Entonces, por el Lema 2.31, el operador $W(b)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ lo mismo que $W(a)$. Finalmente, como $b \in G[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, deducimos del Teorema 2.26 que la condición (iii) también se cumple.

Suficiencia. Como $APW_{p,w} \subset APW$ y $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \subset C(\overline{\mathbf{R}})$, concluimos que $a \in SAP_{N \times N}$ y $a_l, a_r \in APW_{N \times N}$. Entonces, si se cumplen las condiciones (i)–(iii), de [14, Corolario 19.17] se sigue que el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$. Entonces, por el Lema 4.23, el operador $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$.

Índice. Por el Lema 4.23, el $\text{Ind } W(a)$ es el mismo en los espacios $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ y $L_N^p(\mathbf{R}_+)$. De aquí, deducimos de [14, Teorema 19.6] que el $\text{Ind } W(a)$ en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ es calculado por la fórmula (4.35). ■

4.9. Operadores de convolución con símbolos semi-casi periódicos sobre la unión finita de intervalos

En [4, Lema 2.3] fue probada la siguiente afirmación abstracta.

Lema 4.25 Sean V_m ($m = 1, 2, \dots, N$) operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach X , invertibles por la izquierda con inversos izquierdos acotados V_m^{-1} , y sean χ_m ($m = 1, 2, \dots, N$) las proyecciones acotadas definidas por

$$\chi_m = V_1 V_2 \cdots V_{m-1} (I - V_m V_m^{-1}) V_m^{-1} \cdots V_2^{-1} V_1^{-1}. \quad (4.76)$$

Entonces, para cualesquiera operadores acotados W_m ($m = 1, 2, \dots, N$) se tiene

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ W_1 V_1 & W_2 V_1 V_2 & \cdots & W_N V_1 V_2 \cdots V_N & W_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & V_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N^{-1} & 0 \\ \chi_1 & \chi_2 V_1 & \cdots & \chi_N V_1 V_2 \cdots V_{N-1} & V_1 V_2 \cdots V_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & V_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N^{-1} & 0 \\ W_1 & W_2 V_1 & \cdots & W_N V_1 V_2 \cdots V_{N-1} & V_1 V_2 \cdots V_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.77)$$

donde

$$W_0 = \sum_{m=1}^N W_m \chi_m + \left(I - \sum_{m=1}^N \chi_m \right)$$

y

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & V_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N^{-1} & 0 \\ \chi_1 & \chi_2 V_1 & \cdots & \chi_N V_1 V_2 \cdots V_{N-1} & V_1 V_2 \cdots V_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 & \chi_1 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 & V_1^{-1} \chi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N & V_N^{-1} \cdots V_2^{-1} V_1^{-1} \chi_N \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & V_N^{-1} \cdots V_2^{-1} V_1^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Sea $J = \bigcup_{m=1}^N J_m$, donde J_m son intervalos de \mathbf{R} que pueden tener sólo extremos en común. Consideremos el operador del tipo de convolución

$$W_J : L^p(J, w) \rightarrow L^p(J, w), \quad f \mapsto r_J \left(\sum_{m=1}^N k_m * (\chi_{J_m} f) \right) \quad (4.79)$$

donde k_m son distribuciones tales que $K_m = \mathcal{F}k_m \in L_\infty(\mathbf{R})$, r_J es el operador de restricción sobre J , y $f \in L^p(J, w)$ es extendida por cero a $\mathbf{R} \setminus J$. Supongamos ahora que J_m , $m = 1, 2, \dots, N$, son los intervalos $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, \dots , $[a_{N-1}, a_N]$, respectivamente, donde $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N < \infty$.

Es obvio que el operador $W_J : L^p(J, w) \rightarrow L^p(J, w)$ es equivalente al operador

$$\widetilde{W}_J := \chi_+ \sum_{m=1}^N \mathcal{F}^{-1} K_m \mathcal{F} \chi_{J_m} + (I - \chi_J) : L^p(\mathbf{R}_+, w) \rightarrow L^p(\mathbf{R}_+, w), \quad (4.80)$$

donde $\chi_+ = \chi_{\mathbf{R}_+}$.

Para $m = 1, 2, \dots, N$, haciendo

$$\begin{aligned} V_m^\pm &:= \chi_+ \mathcal{F}^{-1} e_{\pm \gamma_m} \mathcal{F} : L^p(\mathbf{R}_+, w) \rightarrow L^p(\mathbf{R}_+, w), \\ W_m^\pm &:= \chi_+ \mathcal{F}^{-1} K_m \mathcal{F} : L^p(\mathbf{R}_+, w) \rightarrow L^p(\mathbf{R}_+, w), \end{aligned} \quad (4.81)$$

donde γ_m están dados por $\gamma_m = a_m - a_{m-1}$ ($m = 1, 2, \dots, N$), concluimos del Lema 4.25 que los operadores

$$\widetilde{W}_J = \sum_{m=1}^N W_m \chi_m + \left(I - \sum_{m=1}^N \chi_m \right), \quad (4.82)$$

donde $\chi_m = \chi_{J_m}$ ($m = 1, 2, \dots, N$), y

$$W_G = \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & V_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_N^{-1} & 0 \\ W_1 & W_2 V_1 & \dots & W_N V_1 V_2 \dots V_{N-1} & V_1 V_2 \dots V_N \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

son equivalentes, y además (4.76) se cumple. Por otro lado,

$$W_G := \chi_+ \mathcal{F}^{-1} G \mathcal{F} : L_n^p(\mathbf{R}_+, w) \rightarrow L_n^p(\mathbf{R}_+, w) \quad (4.84)$$

donde $n = N + 1$,

$$G = \begin{bmatrix} e_{-\gamma_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_{-\gamma_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{-\gamma_N} & 0 \\ K_1 & K_2 e_{\varepsilon_1} & \dots & K_N e_{\varepsilon_{N-1}} & e_{\varepsilon_N} \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

$$\gamma_m = a_m - a_{m-1}, \quad \varepsilon_m = \gamma_1 + \dots + \gamma_m \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (4.86)$$

y e_γ ($\gamma \in \mathbf{R}$) es la función dada por $e_\gamma(\xi) = e^{i\gamma\xi}$, $\xi \in \mathbf{R}$. Entonces, por analogía con [4, Corolario 2.4], obtenemos el siguiente resultado del Lema 4.25.

Corolario 4.26 *Los operadores (4.79), (4.80) y (4.84) son equivalentes. En particular \widetilde{W}_J es invertible si y sólo si W_G lo es, y*

$$\widetilde{W}_J^{-1} = (\chi_1, \chi_2 V_1, \dots, \chi_N V_1 V_2 \dots V_{N-1}, V_1 V_2 \dots V_N) W_G^{-1} (0, 0, \dots, 0, I)^T. \quad (4.87)$$

Del Corolario 4.26 y el Teorema 4.16 se deduce el siguiente teorema.

Teorema 4.27 *Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $K_1, \dots, K_N \in SAP_{p,w}$. Sea $G \in [SAP_{p,w}]_{n \times n}$ la función matricial dada por (4.85) y supongamos que sus representaciones casi periódicas G_l y G_r tienen factorizaciones derechas $AP_{p,w}$. Entonces el operador de convolución $W_J : L^p(J, w) \rightarrow L^p(J, w)$ definido por (4.79) es Fredholm si y sólo si*

$$G \in GSAP_{n \times n}, \quad \kappa(G_l) = \kappa(G_r) = (0, \dots, 0) \quad (4.88)$$

y alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisface

(i) $\frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \notin \mathbf{Z}$ para todos los valores propios ξ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) de la matriz $\mathbf{d}^{-1}(G_r)\mathbf{d}(G_l)$;

(ii) $\text{sp}(\mathbf{d}^{-1}(G_r)\mathbf{d}(G_l)) \cap \{re^{2\pi i/q} : r \in [0, \infty]\} = \emptyset$.

Si W_J es Fredholm, entonces

$$\text{Ind } W_J = \text{Ind } W_G = -\text{ind}(\det G) + \frac{n}{p} - \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\}. \quad (4.89)$$

5. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales en $[\mathbf{SO}_{p,w}, \mathbf{C}_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$

5.1. Operadores de convolución desde el punto de vista de operadores pseudodiferenciales

Denotemos por K la distribución cuya transformada de Fourier es a . Supongamos que $a \in C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ y

$$A_\gamma := \|D^\gamma a\|_{L^\infty(\mathbf{R})} < \infty \quad (\gamma = 0, 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

donde $(Da)(\lambda) = \lambda a'(\lambda)$ para $\lambda \in \mathbf{R}$.

Más adelante necesitaremos la siguiente descomposición diádica (ver, [73, Capítulo VI, Subsección 4.1]). Sea η una función C^∞ con soporte compacto y tal que $\eta(\lambda) = 1$ para $|\lambda| \leq 1$, $\eta(\lambda) = 0$ para $|\lambda| \geq 2$, y η es monótona para $1 \leq |\lambda| \leq 2$. Sea $\delta(\lambda) = \eta(\lambda) - \eta(2\lambda)$. Entonces tenemos la siguiente “partición de la unidad”:

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(2^{-j}\lambda) \quad \text{para cada } \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad (5.2)$$

donde $\delta(2^{-j}\lambda)$ tiene soporte en los conjuntos $2^{j-1} \leq |\lambda| \leq 2^{j+1}$, y para cada $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ hay a lo más dos términos distintos de cero en (5.2). La serie (5.2) converge puntualmente.

Para cada $j \in \mathbf{Z}$, sea

$$K_j(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} a_j(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda, \quad a_j(\lambda) := a(\lambda) \delta(2^{-j}\lambda). \quad (5.3)$$

Seguendo [73, p. 244] probamos la siguiente afirmación.

Lema 5.1 *Si $a \in C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ y*

$$\tilde{A}_\gamma := \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} (|\lambda|^\gamma |(d_\lambda^\gamma a)(\lambda)|) < \infty \quad (\gamma = 0, 1, 2, 3), \quad (5.4)$$

entonces para cada $\alpha = 0, 1$ y cada $\gamma = 0, 1, 2, 3$,

$$|(d_x^\alpha K_j)(x)| \leq A_{\gamma, \alpha} \cdot |x|^{-\gamma} \cdot 2^{j(1+\alpha-\gamma)} \quad (5.5)$$

donde las cotas $A_{\gamma, \alpha}$ son independientes de $j \in \mathbf{Z}$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
(-ix)^\gamma (d_x^\alpha K_j)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} a_j(\lambda) (-ix)^\gamma \partial_x^\alpha \{e^{i\lambda x}\} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} a_j(\lambda) (i\lambda)^\alpha (-ix)^\gamma e^{i\lambda x} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} a_j(\lambda) (i\lambda)^\alpha (-1)^\gamma \partial_\lambda^\gamma \{e^{i\lambda x}\} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} d_\lambda^\gamma \{a_j(\lambda) (i\lambda)^\alpha\} e^{i\lambda x} d\lambda,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde la última igualdad es obtenida por integración por partes.

Si $\alpha = 0$, entonces, por la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned}
d_\lambda^\gamma \{a_j(\lambda)\} &= d_\lambda^\gamma \{a(\lambda) \delta(2^{-j}\lambda)\} \\
&= \sum_{\beta=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\beta} (d_\lambda^\beta a)(\lambda) 2^{-j(\gamma-\beta)} (d_\lambda^{\gamma-\beta} \delta)(2^{-j}\lambda).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

De aquí, tomando en cuenta (5.4) y la estimación por abajo $|\lambda| \geq 2^{j-1}$ del soporte de $\delta(2^{-j}\lambda)$, inferimos de (5.7) que

$$\begin{aligned}
|d_\lambda^\gamma \{a_j(\lambda)\}| &\leq \sum_{\beta=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \tilde{A}_\beta 2^{(j-1)(-\beta)} 2^{-j(\gamma-\beta)} \|d_\lambda^{\gamma-\beta} \delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \\
&= \left(\sum_{\beta=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \tilde{A}_\beta 2^\beta \|d_\lambda^{\gamma-\beta} \delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \right) 2^{-j\gamma} =: \tilde{A}_{\gamma,0} \cdot 2^{-j\gamma}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Ya que el integrando en (5.6) tiene soporte en el intervalo $|\lambda| \leq 2^{j+1}$ de longitud $4 \cdot 2^j$, deducimos de (5.6) y (5.8) que

$$|x|^\gamma |K_j(x)| \leq \frac{4}{2\pi} \tilde{A}_{\gamma,0} 2^{j(1-\gamma)} =: A_{\gamma,0} \cdot 2^{j(1-\gamma)}, \tag{5.9}$$

lo que da (5.5) en el caso $\alpha = 0$.

Si $\alpha = 1$, entonces por analogía obtenemos

$$\begin{aligned}
d_\lambda^\gamma \{a_j(\lambda) i\lambda\} &= d_\lambda^\gamma \{a(\lambda) \delta(2^{-j}\lambda) i\lambda\} \\
&= \sum_{\beta=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\beta} (d_\lambda^\beta a)(\lambda) \left[2^{-j(\gamma-\beta)} (d_\lambda^{\gamma-\beta} \delta)(2^{-j}\lambda) i\lambda + (\gamma - \beta) 2^{-j(\gamma-\beta-1)} (d_\lambda^{\gamma-\beta-1} \delta)(2^{-j}\lambda) i \right],
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
&|d_\lambda^\gamma \{a_j(\lambda) i\lambda\}| \\
&\leq \sum_{\beta=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \tilde{A}_\beta 2^{(j-1)(-\beta)} \left[2^{-j(\gamma-\beta)} \|d_\lambda^{\gamma-\beta} \delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} 2^{j+1} + (\gamma - \beta) 2^{-j(\gamma-\beta-1)} \|d_\lambda^{\gamma-\beta-1} \delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \right] \\
&= \left(\sum_{\beta=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \tilde{A}_\beta 2^\beta \left[2 \|d_\lambda^{\gamma-\beta} \delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + (\gamma - \beta) \|d_\lambda^{\gamma-\beta-1} \delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \right] \right) 2^{j(1-\gamma)} \\
&=: \tilde{A}_{\gamma,1} \cdot 2^{j(1-\gamma)}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Finalmente, por (5.6) y (5.10),

$$|x|^\gamma |K'_j(x)| \leq \frac{4}{2\pi} \tilde{A}_{\gamma,1} 2^{j(2-\gamma)} =: A_{\gamma,1} \cdot 2^{j(2-\gamma)}, \quad (5.11)$$

lo que es consistente con (5.5) para $\alpha = 1$. ■

Vemos de (5.8) a (5.11) que para cada $\alpha = 0, 1$ y $\gamma = 0, 1, 2, 3$

$$A_{\gamma,\alpha} \leq C_{\gamma,\alpha} \max\{\tilde{A}_\beta : \beta = 0, 1, \dots, \gamma\} \quad (5.12)$$

donde las constantes $C_{\gamma,\alpha}$ dependen sólo de γ y α . Tomando en cuenta las igualdades

$$D^0 a = a, \quad D^1 a = xa', \quad D^2 a = xa' + x^2 a'', \quad D^3 a = xa' + 3x^2 a'' + x^3 a''',$$

que implican las relaciones

$$x^2 a'' = D^2 a - D^1 a, \quad x^3 a''' = D^3 a - 3D^2 a + 2Da,$$

concluimos que

$$\frac{1}{5} \max\{A_0, A_1, A_2, A_3\} \leq \max\{\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3\} \leq 6 \max\{A_0, A_1, A_2, A_3\}. \quad (5.13)$$

Como un resultado, (5.12) y (5.13) implican las estimaciones

$$A_{\gamma,\alpha} \leq 6C_{\gamma,\alpha} \max\{A_0, A_1, A_2, A_3\} \quad (\alpha = 0, 1; \gamma = 0, 1, 2, 3). \quad (5.14)$$

Siguiendo la demostración de la Proposición 2(a) en [73, p. 245] obtenemos el siguiente resultado.

Lema 5.2 *Si $a \in C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ satisface (5.1), entonces la distribución K , cuya transformada de Fourier es a , coincide con una función $K(\cdot)$ diferenciable en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ tal que*

$$|(D_x^\alpha K)(x)| \leq A'_\alpha |x|^{-1} \quad \text{para cada } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad \text{y cada } \alpha = 0, 1, \quad (5.15)$$

donde las constantes A'_α son estimadas por

$$A'_\alpha \leq C'_\alpha \max\{A_0, A_1, A_2, A_3\} \quad (5.16)$$

y las constantes $C'_\alpha \in (0, \infty)$ dependen sólo de α .

Demostración. Aplicando la descomposición diádica (5.2), obtenemos

$$a(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a(\lambda) \delta(2^{-j}\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j(\lambda).$$

Como $\sum_{j=-n}^n a_j(\lambda)$ converge a $a(\lambda)$ uniformemente en compactos de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, se sigue que $\sum_{j=-n}^n K_j$ converge a K en el sentido de distribuciones. Será suficiente estimar $\sum_j |d_x^\alpha K_j(x)|$ para $x \neq 0$.

Usando (5.5) para $\gamma = 0$ y $\alpha = 0, 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{2^j \leq |x|^{-1}} |d_x^\alpha K_j(x)| &\leq A_{0,\alpha} \sum_{2^j \leq |x|^{-1}} 2^{j(1+\alpha)} \\ &= A_{0,\alpha} \frac{2^{j_0(x)(1+\alpha)}}{1 - 2^{-(1+\alpha)}} \leq \frac{A_{0,\alpha}}{1 - 2^{-(1+\alpha)}} |x|^{-1-\alpha} =: \tilde{A}'_\alpha |x|^{-1-\alpha}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde $j_0(x)$ es el máximo entero j que satisface la desigualdad $2^j \leq |x|^{-1}$. Similarmente, con $\gamma = 3$, para $\alpha = 0, 1$ uno obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{2^j > |x|^{-1}} |d_x^\alpha K_j(x)| &\leq A_{3,\alpha} |x|^{-3} \sum_{2^j > |x|^{-1}} 2^{j(1+\alpha-3)} \\ &= A_{3,\alpha} |x|^{-3} \frac{2^{j_1(x)(\alpha-2)}}{1 - 2^{\alpha-2}} \leq \frac{A_{3,\alpha}}{1 - 2^{\alpha-2}} |x|^{-3} |x|^{2-\alpha} =: \tilde{A}''_\alpha |x|^{-1-\alpha}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde $j_1(x)$ es el menor entero j que satisface la desigualdad $2^j > |x|^{-1}$. Consecuentemente, para $\alpha = 0, 1$,

$$|(D_x^\alpha K)(x)| \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha |(d_x^\alpha K_j)(x)| \leq (\tilde{A}'_\alpha + \tilde{A}''_\alpha) |x|^{-1} =: A'_\alpha |x|^{-1}$$

donde las constantes A'_α son estimadas por (5.16) debido a (5.17), (5.18) y (5.14). \blacksquare

Se sigue de (5.15) que $K(\cdot)$ es un núcleo clásico de Calderón-Zygmund cuyas constantes A'_α ($\alpha = 0, 1$) son estimadas por las constantes A_γ del símbolo a de acuerdo con (5.16). Por lo tanto,

$$|K(x)| \leq A'_0 |x|^{-1}, \quad |K'(x)| \leq A'_1 |x|^{-2} \quad \text{para cada } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (5.19)$$

Es bien sabido (ver, [25, p. 248]) que el operador clásico de Calderón-Zygmund dado por

$$(Tf)(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbf{R}} K(x-y)f(y)dy, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (5.20)$$

donde K es un núcleo de Calderón-Zygmund que satisface (5.19), es acotado en cada espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbf{R}, w)$ ($1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$). Queremos estimar $\|T\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}$ via $C := \max\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Para hacer esto necesitamos analizar una parte de resultados conocidos.

Primero que todo, siguiendo [1], vamos a considerar la estimación de $\|T\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}$ via $\|M\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}$ donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood,

$$(Mf)(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau)| d\tau, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (5.21)$$

donde el supremo es tomado sobre todos los intervalos $I \subset \mathbf{R}$ que contienen a x , $|I|$ es la longitud de I . Esta estimación se basa en el siguiente hecho.

Sea M^\sharp el operador maximal de C. Fefferman y E. Stein,

$$(M^\sharp f)(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - f_I| d\tau, \quad (5.22)$$

el supremo es tomado sobre todos los intervalos $I \subset \mathbf{R}$ que contienen a x ,

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(\tau) d\tau. \quad (5.23)$$

Para alguna $c \in \mathbf{C}$, aplicando (5.23) obtenemos

$$|f(\tau) - f_I| \leq |f(\tau) - c| + \left| c - \frac{1}{|I|} \int_I f(\tau) d\tau \right| \leq |f(\tau) - c| + \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - c| d\tau,$$

de donde

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - f_I| d\tau \leq \frac{2}{|I|} \int_I |f(\tau) - c| d\tau,$$

y entonces

$$\inf_{c \in \mathbf{C}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - c| d\tau \leq \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - f_I| d\tau \leq 2 \inf_{c \in \mathbf{C}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - c| d\tau.$$

Consecuentemente, por (5.22),

$$\sup_{I \ni x} \inf_{c \in \mathbf{C}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - c| d\tau \leq (M^\sharp f)(x) \leq 2 \sup_{I \ni x} \inf_{c \in \mathbf{C}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - c| d\tau. \quad (5.24)$$

Consideremos el s -operador maximal M_s^\sharp ($0 < s < 1$) dado por

$$M_s^\sharp(g) = (M^\sharp(|g|^s))^{1/s}. \quad (5.25)$$

Para cada intervalo $I := I(x_0, r) := (x_0 - r, x_0 + r)$, sea

$$(D_I K)(y) = \frac{1}{|I|^2} \iint_{I \times I} |K(z - y) - K(x - y)| dx dz. \quad (5.26)$$

De acuerdo con [1] suponemos que

(D) Existen constantes C_D, N tales que

$$\sup_{r > 0} \int_{|y - x_0| > Nr} (D_I K)(y) |f(y)| dy \leq C_D (Mf)(x_0) \quad (5.27)$$

para cada $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) := C_0^\infty(\mathbf{R})$ y cada $x_0 \in \mathbf{R}$.

De [1, Teorema 2.1] se infiere lo siguiente.

Teorema 5.3 *Sea T un operador de Calderón-Zygmund dado por (5.20) con núcleo K satisfaciendo (5.19) y (5.27). Si T es del tipo-débil $(1, 1)$, entonces, para cada $0 < s < 1$, existe $C = C_s \in (0, \infty)$ tal que*

$$[M_s^\sharp(Tf)](x_0) \leq C(Mf)(x_0), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad x_0 \in \mathbf{R}. \quad (5.28)$$

Demostración. Fijemos $I \ni x$. Tomando en cuenta (5.25) y (5.24), para probar (5.28), necesitamos probar que para cada $0 < s < 1$, cada intervalo $I = I(x_0, r)$ y para alguna constante compleja c_I , existe $C = C_s \in (0, \infty)$ tal que

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I ||Tf|^s - |c_I|^s| d\tau \right)^{1/s} \leq C(Mf)(x_0). \quad (5.29)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [M_s^\sharp(Tf)](x_0) &= [M^\sharp(|Tf|^s)]^{1/s}(x_0) \\ &\leq 2^{1/s} \sup_{I \ni x_0} \inf_{c \in \mathbf{C}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I ||(Tf)(\tau)|^s - c|^s d\tau \right)^{1/s} \\ &\leq 2^{1/s} \sup_{I \ni x_0} \left(\frac{1}{|I|} \int_I ||(Tf)(\tau)|^s - |c_I|^s| d\tau \right)^{1/s}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sea $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f \chi_{I(x_0, Nr)}$, y N es la misma constante de la condición (D). Elijamos $c_I := (Tf_2)_I = \frac{1}{|I|} \int_I (Tf_2)(\tau) d\tau$. Ahora, ya que $||a|^s - |b|^s| \leq |a - b|^s$ para $0 < s < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|I|} \int_I ||Tf|^s - |(Tf_2)_I|^s| d\tau \right)^{1/s} &\leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I |Tf - (Tf_2)_I|^s d\tau \right)^{1/s} \\ &\leq C_0 \left(\frac{1}{|I|} \int_I |Tf_1|^s d\tau \right)^{1/s} + C_0 \left(\frac{1}{|I|} \int_I |Tf_2 - (Tf_2)_I|^s d\tau \right)^{1/s} =: C_0(I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (5.31)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_1 + f_2|^s d\tau \right)^{1/s} \\ &\leq \left(\frac{1}{|I|} \int_{\{x \in I: |f_1(x)| \geq |f_2(x)|\}} 2^s |f_1(\tau)|^s d\tau + \frac{1}{|I|} \int_{\{x \in I: |f_2(x)| > |f_1(x)|\}} 2^s |f_2(\tau)|^s d\tau \right)^{1/s} \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_1|^s d\tau + \frac{1}{|I|} \int_I |f_2|^s d\tau \right)^{1/s} \\ &\leq 2^{1+1/s} \max \left\{ \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_1|^s d\tau \right)^{1/s}, \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_2|^s d\tau \right)^{1/s} \right\} \\ &\leq 2^{1+1/s} \left[\left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_1|^s d\tau \right)^{1/s} + \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_2|^s d\tau \right)^{1/s} \right]. \end{aligned}$$

Tomando aquí $f_1 = Tf_1$, $f_2 = Tf_2 - (Tf_2)_I$, $f_1 + f_2 = Tf - (Tf_2)_I$, y $C_0 = 2^{1+1/s}$, obtenemos (5.31).

Por las condiciones del teorema, el operador T es del tipo-débil $(1, 1)$, esto es, $T : L^1(\mathbf{R}) \rightarrow L^\sim(\mathbf{R})$ y existe una constante $C < \infty$ tal que

$$\|Tf\|_\sim \leq C \|f\|_{L^1(\mathbf{R})} \quad \text{para cada } f \in L^1(\mathbf{R}), \quad (5.32)$$

donde $L^\sim(\mathbf{R})$ es el espacio débil L^1 sobre \mathbf{R} definido como la colección de todas las funciones medibles $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ para las cuales

$$\|g\|_\sim := \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda |\{x \in \mathbf{R} : |g(x)| > \lambda\}| \right) < \infty$$

(aquí $|\Omega|$ significa la medida de Lebesgue de un conjunto medible $\Omega \subset \mathbf{R}$). Notemos que $\|\cdot\|_{\sim}$ no es una norma, el espacio $L^{\sim}(\mathbf{R})$ solamente es lineal. Consecuentemente, denotando por $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^{\sim})}$ a la constante C en (5.32) y aplicando [25, Lema 1.4] (también ver [9, (5.48), p. 161]), obtenemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\frac{1}{|I|} \int_I |Tf_1|^s d\tau \right)^{1/s} \leq \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} \frac{1}{|I|} \|Tf_1\|_{\sim} \\
&\leq \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} \|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^{\sim})} \frac{1}{|I|} \|f_1\|_{L^1(\mathbf{R})} \\
&= \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} \|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^{\sim})} \frac{|I(x_0, Nr)|}{|I(x_0, r)|} \frac{1}{|I(x_0, Nr)|} \int_{I(x_0, Nr)} |f(\tau)| d\tau \\
&\leq N \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} \|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^{\sim})} (Mf)(x_0) =: C_1(Mf)(x_0).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Más aún, la desigualdad de Jensen para la función concava $\varphi(x) = x^s$ ($0 < s < 1$), el teorema de Fubini y la condición (D) dan

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\frac{1}{|I|} \int_I |Tf_2 - (Tf_2)_I|^s dx \right)^{1/s} \leq \frac{1}{|I|} \int_I |Tf_2 - (Tf_2)_I| dx \quad (Jensen) \\
&= \frac{1}{|I|} \int_I \left| \int_{\mathbf{R} \setminus I(x_0, Nr)} K(x-y)f(y)dy - \frac{1}{|I|} \int_I \int_{\mathbf{R} \setminus I(x_0, Nr)} K(z-y)f(y)dydz \right| dx \\
&= \frac{1}{|I|} \int_I \left| \frac{1}{|I|} \int_I \int_{\mathbf{R} \setminus I(x_0, Nr)} K(x-y)f(y)dydz \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{|I|} \int_I \int_{\mathbf{R} \setminus I(x_0, Nr)} K(z-y)f(y)dydz \right| dx \\
&\leq \frac{1}{|I|^2} \int_I \int_I \int_{\mathbf{R} \setminus I(x_0, Nr)} |K(x-y) - K(z-y)| |f(y)| dydz dx \\
&= \int_{\mathbf{R} \setminus I(x_0, Nr)} \left(\frac{1}{|I|^2} \int_I \int_I |K(x-y) - K(z-y)| dz dx \right) |f(y)| dy \quad (Fubini) \\
&= \int_{|y-x_0| > Nr} (D_I K)(y) |f(y)| dy \leq C_D (Mf)(x_0) \quad (condición (D)).
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Finalmente, (5.30), (5.31) con $C_0 = 2^{1+1/s}$, (5.33) y (5.34) implican (5.28) con la constante

$$C := 2^{1+2/s} (C_1 + C_D) = 2^{1+2/s} \left[N \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} \|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^{\sim})} + C_D \right], \tag{5.35}$$

lo que completa la demostración. \blacksquare

Vamos a estimar la constante C_D en (5.27) con base en (5.19). Pongamos $N = 2$. Por el teorema del valor medio existe un punto ξ en el intervalo con extremos $z, x \in I(x_0, r)$ tal que

$$|K(z-y) - K(x-y)| = |K'(\xi-y)||z-x|.$$

Entonces, por (5.19), para $y \notin I(x_0, 2r)$

$$|K(z-y) - K(x-y)| \leq \frac{A'_1 |z-x|}{|\xi-y|^2} \leq \frac{A'_1 2r}{(|y-x_0| - r)^2}.$$

De aquí, para $I = I(x_0, r)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{|y-x_0|>2r} \left(\frac{1}{|I|^2} \iint_{I \times I} |K(z-y) - K(x-y)| dz dx \right) |f(y)| dy \\
& \leq \int_{|y-x_0|>2r} \frac{2A'_1 r}{(|y-x_0|-r)^2} |f(y)| dy \\
& = 2A'_1 r \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{n+1}r < |y-x_0| \leq 2^{n+2}r} \frac{|f(y)|}{(|y-x_0|-r)^2} dy \\
& \leq 2A'_1 r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{n+1}r-r)^2} \int_{I(x_0, 2^{n+2}r)} |f(y)| dy \\
& \leq 2A'_1 r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}r}{(2^n r)^2} \frac{1}{2^{n+3}r} \int_{I(x_0, 2^{n+2}r)} |f(y)| dy \\
& = 16A'_1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{|I(x_0, 2^{n+2}r)|} \int_{I(x_0, 2^{n+2}r)} |f(y)| dy \leq 32A'_1 (Mf)(x_0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en (5.27) podemos tomar $N = 2$ y

$$C_D := 32A'_1 \leq 32C'_1 \max\{A_0, A_1, A_2, A_3\} \quad (5.36)$$

(ver (5.16) para la última desigualdad).

Para estimar $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\infty)}$ necesitamos usar la descomposición de Calderon-Zygmund. Fijemos $\lambda > 0$. Aplicando el teorema de Besicovitch (ver, [9, Teorema 2.17]) a los conjuntos acotados

$$\left\{ x \in \mathbf{R} : \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{|I(x, \varepsilon)|} \int_{I(x, \varepsilon)} |f(\tau)| d\tau \geq |f(x)| > \lambda \right\} \cap [m, m+1] \quad (m \in \mathbf{Z})$$

cubiertos por los intervalos $I(x, \varepsilon)$ tales que

$$\frac{1}{|I(x, 2\varepsilon)|} \int_{I(x, 2\varepsilon)} |f(\tau)| d\tau \leq \lambda < \frac{1}{|I(x, \varepsilon)|} \int_{I(x, \varepsilon)} |f(\tau)| d\tau$$

obtenemos lo siguiente (cf. [19] y [9, Lema 5.4]).

Lema 5.4 *Si $f \in L^1(\mathbf{R})$, entonces para cada $\lambda > 0$ existe un conjunto a lo más contable (y posiblemente vacío) de intervalos $I(x_k, \varepsilon_k)$ centrados en puntos $x_k \in \mathbf{R}$ tal que*

$$(a) \quad \lambda < \frac{1}{|I(x_k, \varepsilon_k)|} \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} |f(\tau)| d\tau \leq 2\lambda \text{ para todo } k;$$

$$(b) \quad |f(x)| \leq \lambda \text{ para todo } x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_k I(x_k, \varepsilon_k);$$

$$(c) \quad \text{cada punto } x \in \mathbf{R} \text{ está contenido en a lo más } \theta_1 = 2 \text{ de los intervalos } I(x_k, \varepsilon_k).$$

Aplicando el Lema 5.4 uno puede construir la descomposición de Calderón-Zygmund (ver, [19] y [9, Teorema 5.5]) descrita por el siguiente teorema.

Teorema 5.5 Sean f, λ y $\{I(x_k, \varepsilon_k)\}$ como en el lema anterior. Entonces existen funciones g y $h_k \in L^1(\mathbf{R})$ tales que

$$f = g + \sum_k h_k, \quad (5.37)$$

$$|g(x)| \leq 4\lambda \text{ para casi toda } x \in \mathbf{R}, \quad \|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}; \quad (5.38)$$

$$h_k(x) = 0 \text{ para toda } x \in \mathbf{R} \setminus I(x_k, \varepsilon_k) \text{ y toda } k; \quad (5.39)$$

$$\int_{\mathbf{R}} h_k(\tau) d\tau = 0 \text{ para toda } k, \quad \sum_k \|h_k\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}. \quad (5.40)$$

Teorema 5.6 El operador T dado por (5.20) con K satisfaciendo (5.19) es del tipo-débil $(1, 1)$, esto es, existe una constante $C_{1,1} < \infty$ tal que para toda $f \in L^1(\mathbf{R})$,

$$\left| \{x \in \mathbf{R} : |(Tf)(x)| > \lambda\} \right| \leq \frac{C_{1,1}}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}. \quad (5.41)$$

Demostración. Como la convergencia en $L^1(\mathbf{R})$ implica la convergencia en medida, es suficiente probar (5.41) para todas las funciones $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Ya que $C_0^\infty(\mathbf{R})$ es denso en $L^1(\mathbf{R})$ y T es acotado en el espacio $L^2(\mathbf{R})$ porque $(Tf)(x) = (\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}f)(x)$ y $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, concluimos que el conjunto $\{x \in \mathbf{R} : |(Tf)(x)| > \lambda\}$ es medible para cada $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, y

$$\|T\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}))} = \|a\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = A_0. \quad (5.42)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\text{máx}\{A_\gamma : \gamma = 0, 1, 2, 3\} = 1. \quad (5.43)$$

Fijemos $\lambda > 0$ y sea $f = g + h$, $h = \sum_k h_k$ la descomposición de Calderón-Zygmund de f de acuerdo con el Teorema 5.5. Entonces $Tf = Tg + Th$ y de aquí

$$\left| \{x \in \mathbf{R} : |(Tf)(x)| > \lambda\} \right| \leq \left| \left\{ x \in \mathbf{R} : |(Tg)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x \in \mathbf{R} : |(Th)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|. \quad (5.44)$$

Como f tiene soporte compacto y los intervalos $I(x_k, \varepsilon_k)$ intersectan a este soporte, deducimos del Lema 5.4(a) que $|I(x_k, \varepsilon_k)| < \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$, y de aquí el conjunto $\mathbf{R}_\lambda := \bigcup_k I(x_k, \varepsilon_k)$ es acotado. Por construcción (ver la demostración de [9, Teorema 5.5]),

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_\lambda, \\ \sum_k \frac{\chi_k(x)}{|I(x_k, \varepsilon_k)|} \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} f(\tau) \eta_k(\tau) d\tau, & x \in \mathbf{R}_\lambda, \end{cases} \quad (5.45)$$

donde χ_k es la función característica de $I(x_k, \varepsilon_k)$ y

$$\eta_k(x) = \begin{cases} \frac{\chi_k(x)}{\sum_k \chi_k(x)} & \text{para } x \in \mathbf{R}_\lambda, \\ 0 & \text{para } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_\lambda. \end{cases}$$

Consecuentemente, por (5.45) y el Lema 5.4(c) g es una función medible y el conjunto $\text{supp } g \subset \text{supp } f \cup \mathbf{R}_\lambda$ también es acotado. Ya que $|g(x)| \leq 4\lambda$ para casi todo $x \in \mathbf{R}$ (ver (5.38)), deducimos que $g \in L^2(\mathbf{R})$. Más aún, como $\|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$ (otra vez por (5.38)), concluimos que

$$\|g\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq 4\lambda \|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq 4\lambda \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}, \quad (5.46)$$

de donde, por la desigualdad de Chebyshev (ver, [9, p. 145]) y por (5.46) y (5.42),

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in \mathbf{R} : |(Tg)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| &\leq \left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 \int_{\mathbf{R}} |(Tg)(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 \|T\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}))}^2 \|g\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq \frac{16}{\lambda} \|T\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}))}^2 \|f\|_{L^1(\mathbf{R})} = \frac{16}{\lambda} A_0^2 \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Sea $Y := \mathbf{R} \setminus \bigcup_k I(x_k, 2\varepsilon_k)$. De las propiedades (a) y (c) del Lema 5.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_k I(x_k, 2\varepsilon_k) \right| &\leq \sum_k |I(x_k, 2\varepsilon_k)| = 2 \sum_k |I(x_k, \varepsilon_k)| \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_k \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} |f(\tau)| d\tau = \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbf{R}} \sum_k \chi_k(\tau) |f(\tau)| d\tau \leq \frac{4}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in \mathbf{R} : |(Th)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| &\leq \left| \left\{ x \in Y : |(Th)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \bigcup_k I(x_k, 2\varepsilon_k) \right| \\ &\leq \left| \left\{ x \in Y : |(Th)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \frac{4}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Como $\text{supp } h_k \subset [x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k]$ por (5.39) y ya que $\int_{\mathbf{R}} h_k(\tau) d\tau = 0$ por (5.40), vemos que para casi toda $x \in Y$,

$$(Th_k)(x) = \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} K(x-y) h_k(y) dy = \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} \left[K(x-y) - K(x-x_k) \right] h_k(y) dy \quad (5.49)$$

donde, para alguna ξ en el intervalo con puntos extremos x_k y $y \in I(x_k, \varepsilon_k)$,

$$\left| K(x-y) - K(x-x_k) \right| \leq |K'(x-\xi)| |y-x_k|.$$

De aquí, por (5.19) y por la desigualdad $|x-x_k| - \varepsilon_k \geq \frac{1}{2}|x-x_k|$, obtenemos

$$\left| K(x-y) - K(x-x_k) \right| \leq A'_1 \frac{|y-x_k|}{|x-\xi|^2} \leq \frac{A'_1 \varepsilon_k}{(|x-x_k| - \varepsilon_k)^2} \leq \frac{4A'_1 \varepsilon_k}{|x-x_k|^2}. \quad (5.50)$$

Se sigue de (5.49) y (5.50) que

$$\begin{aligned} \int_Y |(Th_k)(x)| dx &\leq \int_Y \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} |K(x-y) - K(x-x_k)| |h_k(y)| dy dx \\ &\leq 4A'_1 \varepsilon_k \int_Y \frac{dx}{|x-x_k|^2} \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} |h_k(y)| dy \\ &\leq 4A'_1 \varepsilon_k \int_{|x-x_k| \geq 2\varepsilon_k} \frac{dx}{|x-x_k|^2} \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} |h_k(y)| dy \\ &= 4A'_1 \int_{I(x_k, \varepsilon_k)} |h_k(y)| dy = 4A'_1 \|h_k\|_{L^1(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Consecuentemente, por (5.51) y (5.40),

$$\int_Y |(Th)(x)| dx \leq \sum_k \int_Y |(Th_k)(x)| dx \leq 4A'_1 \sum_k \|h_k\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq 8A'_1 \|f\|_{L^1(\mathbf{R})},$$

lo que implica que

$$\left| \left\{ x \in Y : |(Th)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \int_Y |(Th)(x)| dx \leq \frac{16A'_1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}. \quad (5.52)$$

De (5.48) y (5.52) obtenemos

$$\left| \left\{ x \in \mathbf{R} : |(Th)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{16A'_1 + 4}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})},$$

que junto con (5.47) y (5.44) demuestra que (5.41) se cumple con

$$C_{1,1} := 16A_0^2 + 16A'_1 + 4.$$

Tomando en cuenta (5.43) y (5.16) obtenemos finalmente

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\sim)} \leq C_{1,1} \leq 20 + 16C'_1 = (20 + 16C'_1) \max\{A_\gamma : \gamma = 0, 1, 2, 3\}, \quad (5.53)$$

lo que completa la demostración. \blacksquare

La relación (5.35) con $N = 2$, C_D dada por (5.36) y $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1, L^\sim)}$ estimada por (5.53) implican lo siguiente.

Corolario 5.7 *Bajo las condiciones del Teorema 5.3, para cada $s \in (0, 1)$, cada $x_0 \in \mathbf{R}$, y cada $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,*

$$[M_s^\sharp(Tf)](x_0) \leq C_s(Mf)(x_0),$$

donde

$$C_s = 2^{1+1/s} \left[2 \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} (20 + 16C'_1) + 32C'_1 \right] \max\{A_\gamma : \gamma = 0, 1, 2, 3\}. \quad (5.54)$$

Por [38, p. 42], para cada $p \in (1, \infty)$, cada $w \in A_p(\mathbf{R})$ y cada $s \in (0, 1)$, existe una constante $C_{p,w} \in (0, \infty)$ tal que

$$\int_{\mathbf{R}} (Mf)^{p/s}(x) w^p(x) dx \leq C_{p,w,s} \int_{\mathbf{R}} (M^\sharp f)^{p/s}(x) w^p(x) dx \quad (f \in C_0^\infty(\mathbf{R})). \quad (5.55)$$

Una vez probado el Corolario 5.7, el teorema de diferenciación de Lebesgue, junto con (5.55), da como en [1],

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |(Tf)(x)|^p w^p(x) dx &\leq \int_{\mathbf{R}} \left[(M(|Tf|^s))(x) \right]^{p/s} w^p(x) dx \\ &\leq C_{p,w,s} \int_{\mathbf{R}} \left[(M^\sharp(|Tf|^s))(x) \right]^{p/s} w^p(x) dx = C_{p,w,s} \int_{\mathbf{R}} [M_s^\sharp(Tf)]^p(x) w^p(x) dx \\ &\leq C_{p,w,s} C_s^p \int_{\mathbf{R}} (Mf)^p(x) w^p(x) dx \leq C_{p,w,s} C_s^p \|M\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R},w))}^p \|f\|_{L^p(\mathbf{R},w)}^p. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Aquí tomamos en cuenta el acotamiento del operador maximal M en cada espacio $L^p(\mathbf{R}, w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$ (ver, p. ej. [27, Teorema 6.1]). Por lo tanto hemos probado lo siguiente.

Teorema 5.8 Si T es el operador de Calderón-Zygmund dado por (5.20) con núcleo K satisfaciendo (5.19), entonces T es acotado en cada espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbf{R}, w)$ con $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, y

$$\|T\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \leq \tilde{C}_{p,w} \max\{A_\gamma : \gamma = 0, 1, 2, 3\} \quad (5.57)$$

donde

$$\tilde{C}_{p,w} := C_{p,w,s}^{1/p} 2^{1+1/s} \left[2 \left(\frac{1}{1-s} \right)^{1/s} (20 + 16C'_1) + 32C'_1 \right] \|M\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}. \quad (5.58)$$

Corolario 5.9 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Si $T = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$ es un operador de convolución y $a \in C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ está equipado con la norma

$$\|a\|_{C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})} = \max\{\|D^\gamma a\|_{L^\infty(\mathbf{R})} : \gamma = 0, 1, 2, 3\},$$

entonces

$$\|T\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))} \leq \tilde{C}_{p,w} \|a\|_{C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})}.$$

5.2. Símbolos lentamente oscilatorios y multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbf{R}, w)$

Sea $\widetilde{SO}^3 := \{f \in C_b^3(\mathbf{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} (D^\gamma f)(x) = 0, \gamma = 1, 2, 3\}$. Consideremos el espacio

$$SO^3 := \widetilde{SO}^3 \cap SO \subset C^3(\mathbf{R} \setminus \{0\})$$

equipado con la norma

$$\|a\|_{SO^3} = \max\{\|D^\gamma a\|_{L^\infty(\mathbf{R})} : \gamma = 0, 1, 2, 3\} = \max\{A_\gamma : \gamma = 0, 1, 2, 3\}. \quad (5.59)$$

Del Corolario 5.9 se tiene inmediatamente el siguiente resultado

Corolario 5.10 Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$ y $a \in SO^3$, entonces $a \in M_{p,w}$ y

$$\|a\|_{M_{p,w}} \leq \tilde{C}_{p,w} \|a\|_{SO^3}.$$

Sea $w \in A_p(\mathbf{R})$. Si $1 < p < 2$ o $2 < p < \infty$, entonces

$$M_{p,w} \subset M_2 = L^\infty(\mathbf{R}). \quad (5.60)$$

Por el Corolario 5.10, $SO^3 \subset M_{p,w}$.

Para $p \in (1, \infty)$ definimos $SO_{p,w}$ como la cerradura de SO^3 en $M_{p,w}$. Si $1 < p < 2$ o $2 < p < \infty$, de (5.60) se sigue que

$$SO_{p,w} \subset SO.$$

Ahora estudiaremos el espacio de ideales maximales $\mathcal{M}(SO_{p,w})$ del álgebra de Banach $SO_{p,w} \subset M_{p,w}$. Se puede demostrar que SO^3 junto con la norma dada por (5.59) es un álgebra de Banach conmutativa.

Consideremos las tres siguientes álgebras de Banach conmutativas unitarias con la misma unidad que están homomórficamente incluidas una en la otra:

$$SO^3 \subset SO_{p,w} \subset SO.$$

Para estudiar la relación entre sus espacios de ideales maximales usamos el siguiente resultado (ver [70, Teorema 3.10]).

Teorema 5.11 Sean B_i ($i = 1, 2, 3$) álgebras de Banach conmutativas con la misma unidad que están homomórficamente incluídas una en la otra, $B_1 \subset B_2 \subset B_3$. Supongamos que B_1 es denso en B_2 y cada funcional lineal multiplicativo definido en B_1 se extiende a un funcional lineal multiplicativo en B_3 . Entonces cada funcional lineal multiplicativo en B_2 también se extiende a un funcional lineal multiplicativo en B_3 .

Lema 5.12 Cada funcional lineal multiplicativo definido en SO^3 se extiende a un funcional lineal multiplicativo en SO .

Demostración. Como $SO^3 \subset SO$, se sigue que $\mathcal{M}(SO) \subset \mathcal{M}(SO^3)$. En efecto, sean $\eta \in \mathcal{M}(SO)$ y $a \in SO^3$. Entonces $a \in SO$ y $\|\eta\|_\infty \leq \|a\|_{SO^3}$. De aquí

$$\eta(a) \leq \|\eta\|_{SO^*} \|a\|_\infty \leq \|\eta\|_{SO^*} \|a\|_{SO^3} = \|a\|_{SO^3},$$

y por lo tanto η es un funcional lineal multiplicativo (diferente de cero) en SO^3 .

Supongamos por el momento que $\xi \in \mathcal{M}(SO^3)$ no es extendible a un funcional lineal multiplicativo en SO , esto es, $\xi \in \mathcal{M}(SO^3) \setminus \mathcal{M}(SO)$. Claramente existe una función $a \in SO^3$ tal que $\eta(a) \neq 0$ para todo $\eta \in \mathcal{M}(SO)$ y $\xi(a) = 0$. Como $a \in SO$ y SO es un C^* -álgebra, se deduce que la función a es invertible en SO . Pero automáticamente la función inversa $1/a$ pertenece a SO^3 , esto es, SO^3 es inversamente cerrado en SO . Entonces por la teoría de Gelfand (ver, [65, Capítulo 11]) se sigue que $\xi(a) \neq 0$, y llegamos a una contradicción, esto completa la demostración. ■

Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Eligiendo

$$B_1 = SO^3, B_2 = SO_{p,w}, B_3 = SO$$

y tomando en cuenta que SO^3 es denso en $SO_{p,w}$ en la norma de $M_{p,w}$, se deduce del Teorema 5.11 y el Lema 5.12 que cada funcional lineal multiplicativo en $SO_{p,w}$ se extiende a un funcional lineal multiplicativo en SO , esto es $\mathcal{M}(SO_{p,w}) \subset \mathcal{M}(SO)$. Por otra parte, $\mathcal{M}(SO) \subset \mathcal{M}(SO_{p,w})$ porque $SO_{p,w} \subset SO$. Por lo tanto hemos probado lo siguiente.

Lema 5.13 Los espacios de ideales maximales de $SO_{p,w}$ y SO coinciden como conjuntos, esto es, $\mathcal{M}(SO_{p,w}) = \mathcal{M}(SO)$.

El Lema 5.13 y la teoría de Gelfand dan inmediatamente la siguiente afirmación.

Corolario 5.14 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. El álgebra de Banach $SO_{p,w}$ es inversamente cerrada en el C^* -álgebra SO .

Lema 5.15 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Si $b \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$, b se anula en infinito y $a \in SO_{p,w}$, entonces el producto ba pertenece a $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y $(ba)(\infty) = 0$. De aquí las álgebras de Banach $[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$ y $\widetilde{SO}_{p,w}$ coinciden, donde $\widetilde{SO}_{p,w}$ es la cerradura de \widetilde{SO}^3 en $M_{p,w}$.

Demostración. Tomando en cuenta que cada función $b \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ con $b(\infty) = 0$ puede aproximarse en $M_{p,w}$ por funciones $b_n \in C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$ con soporte compacto (ver sección 2.4) y que cada función $a \in SO_{p,w}$ puede aproximarse en $M_{p,w}$ por funciones $a_n \in SO^3$, inferimos que el producto ba de la función $b \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ que se anula en infinito y $a \in SO_{p,w}$ pertenece a

$C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y se anula en infinito porque todas las funciones $b_n a_n$ con soporte compacto pertenecen a $C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$.

Ya que cada función $c \in C(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$ puede aproximarse en $M_{p,w}$ por funciones continuas lineales a trozos (ver, [23, Lema 2.10]), es claro que la función c puede ser aproximada en $M_{p,w}$ por funciones tres veces continuamente diferenciables $c_n \in C^3(\overline{\mathbf{R}})$ cuyas derivadas c'_n tienen soporte compacto. De aquí, c_n pertenece a \widetilde{SO}^3 y por lo tanto a $c \in \widetilde{SO}_{p,w}$, donde $\widetilde{SO}_{p,w}$ es la cerradura de \widetilde{SO}^3 en $M_{p,w}$ y, consecuentemente, es un subálgebra de Banach de $M_{p,w}$. Como $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ es la cerradura de $C(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$ en $M_{p,w}$, concluimos que $C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \subset \widetilde{SO}_{p,w}$. Obviamente $SO_{p,w} \subset \widetilde{SO}_{p,w}$. Estas dos últimas inclusiones implican que $[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$ es un subálgebra de Banach de $\widetilde{SO}_{p,w}$.

Por otra parte, para cada función $a \in \widetilde{SO}_{p,w}$ existen funciones $a_{\pm} \in SO_{p,w}$ tales que la función $a - (a_+ u_+ + a_- u_-)$ con $u_{\pm}(x) = (1 \pm \tanh x)/2 \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ pertenece a $C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ y desaparece en ∞ . Entonces $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$. Por lo tanto $[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})] = \widetilde{SO}_{p,w}$. ■

Tomando en cuenta la demostración del Lema 5.15 tenemos lo siguiente.

Lema 5.16 *Sea $1 < p < \infty$. Cada función $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$ es de la forma*

$$a = a_+ u_+ + a_- u_- + a_0, \quad (5.61)$$

con $a_{\pm} \in SO_{p,w}$, $u_{\pm} \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, $a_0 \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})$ satisfaciendo las condiciones

$$u_+ + u_- = 1, \quad u_+(+\infty) = 1, \quad u_-(-\infty) = 1, \quad a_0(\infty) = 0.$$

Consideremos las inclusiones homomórficas de las álgebras de Banach conmutativas

$$[SO^3, C^3(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})] \subset [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})] \subset [SO, C(\overline{\mathbf{R}})],$$

donde $[SO^3, C^3(\overline{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})]$ es un álgebra de Banach con la norma

$$\|f\| = \max\{\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, V_1(f), \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, \gamma = 1, 2, 3\}.$$

Análogamente al Lema 5.13 y al Corolario 5.14 se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 5.17 *El álgebra de Banach $[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$ es inversamente cerrada en la C^* -álgebra de Banach $[SO, C(\overline{\mathbf{R}})]$ y*

$$\mathcal{M}([SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]) = \mathcal{M}([SO, C(\overline{\mathbf{R}})]).$$

5.3. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SO_{p,w}]_{N \times N}$

Consideremos $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Sean

$$A = \text{alg} \left\{ W(a) : a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})] \right\},$$

$$Z = \text{alg} \left\{ W(b) : b \in SO_{p,w} \right\}.$$

Definimos $A^\pi := (A + \mathcal{K})/\mathcal{K}$ y $Z^\pi := (Z + \mathcal{K})/\mathcal{K}$, es decir

$$\begin{aligned} A^\pi &= \text{alg} \left\{ W^\pi(a) : a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})] \right\}, \\ Z^\pi &= \text{alg} \left\{ W^\pi(b) : b \in SO_{p,w} \right\}, \end{aligned}$$

donde $W^\pi(a) := W(a) + \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$. Ahora demostraremos que Z^π es un álgebra central en A^π . Esto pasa si

$$W(a)W(b) - W(b)W(a) \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w)), \quad \forall a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})], \quad \forall b \in SO_{p,w}, \quad (5.62)$$

o equivalentemente si

$$\begin{aligned} \chi_+ W^0(a) \chi_+ W^0(b) \chi_+ I - \chi_+ W^0(b) \chi_+ W^0(a) \chi_+ I &\in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}, w)), \\ \forall a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})], \quad \forall b \in SO_{p,w}. \end{aligned}$$

Como $\chi_+ \in PC$ y $b \in SO_{p,w}$, de [2, Teorema 4.2]) tenemos que el operador $\chi_+ W^0(b) - W^0(b) \chi_+ I$ es compacto en todos los espacios $L^p(\mathbf{R})$ ($1 < p < \infty$). Ya que tal operador es acotado en todos los espacios $L^p(\mathbf{R}, w)$ con pesos $w \in A_p(\mathbf{R})$, por analogía con [48, Teorema 3.10] y [44, Teorema 3.2] inferimos que el operador $\chi_+ W^0(b) - W^0(b) \chi_+ I$ es compacto en todos los espacios $L^p(\mathbf{R}, w)$ ($1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$). Por lo tanto,

$$\chi_+ W^0(b) - W^0(b) \chi_+ I \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}, w)).$$

De aquí

$$\begin{aligned} \chi_+ W^0(b) \chi_+ W^0(a) \chi_+ I &= \chi_+ (\chi_+ W^0(b) + K_1) W^0(a) \chi_+ I = \chi_+^2 W^0(b) W^0(a) \chi_+ + K_2 \\ &= \chi_+^2 W^0(ba) \chi_+ + K_2 = \chi_+ W^0(ab) \chi_+ + K_2 \\ &= \chi_+ W^0(a) W^0(b) \chi_+^2 I + K_2 = \chi_+ W^0(a) (\chi_+ W^0(b) + K_1) \chi_+ I + K_2 \\ &= \chi_+ W^0(a) \chi_+ W^0(b) \chi_+ I + K_2 + K_3, \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde K_1 , K_2 y $K_3 \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}, w))$. Por lo tanto Z^π es un álgebra central en A^π .

Proposición 5.18 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, $b \in [SO_{p,w}]_{N \times N}$ y $N \in \mathbf{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) $W(b)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- 2) b es invertible en $[SO_{p,w}]_{N \times N}$.
- 3) $\inf_{x \in \mathbf{R}} |\det b(x)| > 0$.
- 4) $\det b(\xi) \neq 0$, para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO_{p,w}) = \mathcal{M}(SO)$.

Demostración. El caso $N > 1$ se puede reducir al caso $N = 1$ como sigue. Por (5.62) y la propiedad

$$W(c)W(b) - w(cb) \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$$

para todo $c, b \in SO_{p,w}$ tenemos que

$$\det W(a) = W(\det a) + K,$$

donde $a \in [SO_{p,w}]_{N \times N}$ y $K \in \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$. Como las entradas del operador matricial $W(a)$ conmutan salvo operadores compactos en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, tenemos que $W(a)$ es Fredholm en $L^p_N(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si $W(\det a) = \det W(a) + K$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ (ver [15, Teorema 1.14]).

Consideremos el caso $N = 1$. La equivalencia entre 2) y 3) se sigue del hecho que $SO_{p,w}$ es inversamente cerrado en $L^\infty(\mathbf{R})$. De la teoría de Gelfand se tiene la equivalencia entre 2) y 4). Probaremos que 1) implica 3) y 2) implica 1).

Supongamos que

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |b(x)| = 0. \quad (5.64)$$

Nuestro primer objetivo es probar que cualquier $M_{p,w}$ vecindad de b contiene un $c \in SO_{p,w}$ tal que $c(x) = 0$ para todo x en algún intervalo de \mathbf{R} .

Si $W(b)$ es Fredholm, del Teorema 2.1 tenemos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $W(\tilde{b}_n)$ es Fredholm siempre que $\|\tilde{b}_n - b\|_{M_{p,w}} < \epsilon$. Escojamos $b_n \in SO^3$ tal que $\|b - b_n\|_{M_{p,w}} < \frac{\epsilon}{2}$. Como $|b_n(x)| \leq |b(x)| + |\tilde{b}_n(x) - b(x)|$, entonces

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |b_n(x)| \leq \inf_{x \in \mathbf{R}} |b(x)| + \|\tilde{b}_n - b\|_{C_b(\mathbf{R})} = \|\tilde{b}_n - b\|_{C_b(\mathbf{R})} \leq \|b_n - b\|_{M_{p,w}} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (5.65)$$

Entonces, por la continuidad de b_n existe un $x_0 \in \mathbf{R}$ tal que

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |b_n(x)| \leq |b_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (5.66)$$

Si tomamos $\tilde{b}_n = b_n - b_n(x_0)$, entonces $W(\tilde{b}_n)$ es Fredholm porque

$$\|\tilde{b}_n - b\|_{M_{p,w}} \leq \|b_n - b\|_{M_{p,w}} + |b_n(x_0)| < \epsilon.$$

Además $\tilde{b}_n = 0$ en el punto $x_0 \in \mathbf{R}$ y $\tilde{b}_n \in SO^3$.

En consecuencia, sin perder generalidad podemos suponer que $b \in SO^3$, el operador $W(b)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ y $b(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbf{R}$.

Ahora construimos la función

$$b_\epsilon(x) = \begin{cases} b(x), & \text{si } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ b(x_0 - \delta), & \text{si } x \leq x_0 - \delta, \\ b(x_0 + \delta), & \text{si } x \geq x_0 + \delta, \end{cases} \quad (5.67)$$

con δ suficientemente pequeño tal que $\|b_\epsilon\|_{C_b(\mathbf{R})} = \|b|_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]}\|_{C_b(\mathbf{R})} < \epsilon$. Tal δ existe porque $b(x_0) = 0$ y b es continua.

Por otra parte,

$$V_1(b_\epsilon) = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |b'(x)| dx. \quad (5.68)$$

Como b' es acotada podemos elegir δ suficientemente pequeño tal que $V_1(b_\epsilon) < \epsilon$. La desigualdad de Stechkin implica que $\|b_\epsilon\|_{M_{p,w}}$ es tan pequeña como se quiera.

Definimos la función $c \in SO_{p,w}$, por

$$c(x) := (b - b_\epsilon)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ b(x) - b(x_0 - \delta), & \text{si } x \leq x_0 - \delta, \\ b(x) - b(x_0 + \delta), & \text{si } x \geq x_0 + \delta, \end{cases} \quad (5.69)$$

esta función tiene las propiedades deseadas. Ya que $W(b)$ es Fredholm y la norma $\|c\|_{M_{p,w}}$ es suficientemente pequeña, entonces tenemos que $W(c)$ es Fredholm.

Por otro lado, repitiendo los argumentos de la demostración del Teorema 4.7, se puede probar que $W(c)$ no puede ser Fredholm si (5.69) se cumple. Por lo tanto 1) implica 3).

Ahora supongamos que b es invertible en $SO_{p,w}$. Entonces

$$\chi_+ W^0(b) \chi_+ W^0(b^{-1}) \chi_+ I = \chi_+^2 W^0(b) W^0(b^{-1}) \chi_+ I + K = \chi_+ I + K,$$

donde K es algún operador compacto. Esto implica que $W(b) + \mathcal{K}$ es invertible en $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+, w)) / \mathcal{K}$ y por lo tanto $W(b)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Entonces 2) implica 1). ■

5.4. Estudio local de la propiedad de Fredholm

Consideremos $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO) = \mathcal{M}(SO_{p,w})$, sea

$$I_\xi^\pi := \left\{ W^\pi(b) : b \in SO_{p,w}, \xi(b) = 0 \right\} \quad (5.70)$$

el ideal maximal contenido en Z^π . Sea J_ξ^π el ideal bilateral cerrado de A^π más pequeño que contiene a I_ξ^π . Definimos

$$A_\xi^\pi := A^\pi / J_\xi^\pi \text{ y } W_\xi^\pi(a) := W^\pi(a) + J_\xi^\pi. \quad (5.71)$$

Como sabemos, que $W(a)$ sea Fredholm y tenga regularizadores en A es equivalente a que $W^\pi(a)$ sea invertible en A^π . Por el principio local de Allan-Douglas (ver, p. ej. [15, Teorema 1.35]), se tiene que $W^\pi(a)$ es invertible en A^π si y sólo si $W_\xi^\pi(a)$ es invertible en A_ξ^π para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO)$. Ahora estudiaremos la invertibilidad de $W_\xi^\pi(a)$, con $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$.

Lema 5.19 Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R})$. Supongamos que $\xi \in \mathbf{R}$ y $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$. Entonces $W_\xi^\pi(a)$ es invertible en A_ξ^π si y sólo si $a(\xi) \neq 0$.

Demostración. Para $\xi \in \mathbf{R}$, probaremos que

$$W_\xi^\pi(a) = W^\pi(a(\xi)) + J_\xi^\pi = [a(\xi)I]^\pi + J_\xi^\pi. \quad (5.72)$$

Como $W(a(\xi)) = \chi_+ \mathcal{F}^{-1} a(\xi) \mathcal{F} = a(\xi)I$, tenemos que $W^\pi(a(\xi)) = [a(\xi)I]^\pi$. Sólo resta probar que $W^\pi(a) - W^\pi(a(\xi)) = W^\pi(a - a(\xi)) \in J_\xi^\pi$.

Si $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$, entonces $a - a(\xi) \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$ y por lo tanto $W^\pi(a - a(\xi)) \in A^\pi$. Además $\tilde{a}(x) := a(x) - a(\xi) = 0$, si $x = \xi$. Notemos que

$$J_\xi^\pi = \text{Clos}_{A^\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n B_i A_i : B_i \in I_\xi^\pi, A_i \in A^\pi, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}. \quad (5.73)$$

Podemos representar \tilde{a} en la forma

$$\tilde{a} = a_+u_+ + a_-u_- + a_0, \quad (5.74)$$

donde $a_\pm \in SO_{p,w}$, $a_0 \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, $a_0(\infty) = 0$ y $u_\pm(x) = \frac{1 \pm \tanh x}{2}$. Notemos que $u_\pm \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, $u_+(+\infty) = 1$, $u_+(-\infty) = 0$ y $u_- = 1 - u_+$.

Tenemos que

$$\tilde{a} = [a_+ - a_+(\xi)]u_+ + [a_- - a_-(\xi)]u_- + a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0. \quad (5.75)$$

De aquí,

$$\begin{aligned} a_+(\xi)u_+(x) + a_-(\xi)u_-(x) + a_0(x) &= 0 \text{ en } x = \xi, \text{ y} \\ a_+(\xi)u_+(x) + a_-(\xi)u_-(x) + a_0(x) &= \begin{cases} a_+(\xi), & x = +\infty, \\ a_-(\xi), & x = -\infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Buscamos b_\pm tales que

$$b_+u_+ + b_-u_- = a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0,$$

con $b_\pm \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \cap SO_{p,w}$ y

$$b_\pm(x) = \begin{cases} a_\pm(\xi) + a_0(x), & x \in (d, +\infty], \\ 0, & x = \xi, \\ a_\pm(\xi) + a_0(x), & x \in [-\infty, -d), \end{cases} \quad (5.77)$$

para algún $d > 0$ tal que $\xi \in (-d, d)$.

Elijamos $b_+ \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \cap SO_{p,w}$ que cumpla la propiedad (5.77). Definimos

$$b_-(x) := \begin{cases} \frac{[a_+(\xi) + a_0(x) - b_+(x)]u_+(x) + [a_-(\xi) + a_0(x)]u_-(x)}{u_-(x)}, & x \in [-\infty, +\infty), \\ a_-(\xi), & x = +\infty. \end{cases}$$

Entonces $b_- \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}) \cap SO_{p,w}$ y $b_-(\xi) = 0$. Si definimos $\tilde{a}_\pm := a_\pm - a_\pm(\xi) + b_\pm$, tenemos que

$$\tilde{a} = \tilde{a}_+u_+ + \tilde{a}_-u_-, \quad \tilde{a}_\pm \in SO_{p,w} \text{ y } \tilde{a}_\pm(\xi) = 0.$$

Entonces

$$W^\pi(a - a(\xi)) = W^\pi(\tilde{a}) = W^\pi(\tilde{a}_+)W^\pi(u_+) + W^\pi(\tilde{a}_-)W^\pi(u_-) \in J_\xi^\pi,$$

ya que $W^\pi(\tilde{a}_\pm) \in I_\xi^\pi$ y $W^\pi(u_\pm) \in A^\pi$. ■

Sea $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. Si $a = a_+u_+ + a_-u_- + a_0$ es como en (5.74) tenemos que

$$W^\pi(a - a_+(\xi)u_+ - a_-(\xi)u_-) = W^\pi(a_+ - a_+(\xi))W^\pi(u_+) + W^\pi(a_- - a_-(\xi))W^\pi(u_-) + W^\pi(a_0).$$

Como $W^\pi(a_\pm - a_\pm(\xi)) \in I_\xi^\pi$, $W^\pi(a_0) \in I_\xi^\pi$ y $W^\pi(u_\pm) \in A^\pi$, entonces

$$W^\pi(a - a_+(\xi)u_+ - a_-(\xi)u_-) \in J_\xi^\pi.$$

Por lo tanto

$$W_\xi^\pi(a) = W^\pi(a) + J_\xi^\pi = W^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-) + J_\xi^\pi = W_\xi^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-).$$

Lema 5.20 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ y $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$. Las primeras dos condiciones son equivalentes e implican la tercera condición:

- 1) Existe $a_0 \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, $a_0(\pm\infty) = 0$ tal que el operador $W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- 2) $a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\frac{\pi(x+i\nu)}{2}]}{2} + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\frac{\pi(x+i\nu)}{2}]}{2} \neq 0$, $\forall x \in \overline{\mathbf{R}}$ y $\forall \nu \in [\nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)]$.
- 3) $W_\xi^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-)$ es invertible en A_ξ^π .

Demostración. Probaremos que 1) implica 2). Si $W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ es Fredholm para algún $a_0 \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ con $a_0(\pm\infty) = 0$, entonces el Teorema 2.25 implica la afirmación 2) porque

$$\left\{ \frac{1 + \coth[\frac{\pi(x+i\nu)}{2}]}{2} : x \in \overline{\mathbf{R}}, \nu \in [\nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)] \right\} = \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)).$$

Viceversa, si 2) se cumple, entonces existe una función $a_0 \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ tal que la función $a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0$ es separada del cero. En este caso el Teorema 2.24 implica que el operador $W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$, es decir, la afirmación 1) se cumple.

Supongamos que el operador $W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$. Entonces, ya que de acuerdo al Teorema 2.25 el álgebra $\text{alg}\{W^\pi(b) : b \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})\}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin B^π tenemos que $W^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ es invertible en A^π , pero por el principio local de Allan-Douglas esto es equivalente a que $W_\eta^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ sea invertible en A_η^π , $\forall \eta \in \mathcal{M}(SO)$. En particular $W_\xi^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-)$ es invertible en A_ξ^π , ya que $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ y $W^\pi(a_0) \in J_\xi^\pi$. ■

Si el peso $w \in A_p(\mathbf{R})$ es de la forma $w(x) = |x|^\alpha$, donde $-1/p < \alpha < 1/q$, entonces se puede reforzar el Lema 5.20 y obtener un criterio de Fredholm para el operador $W(a)$ con $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$. Sean $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$,

$$\mathcal{B} := \text{alg}\left\{W(a), K : a \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}}), K \in \mathcal{K}\right\}, \mathcal{B}^\pi := \mathcal{B}/\mathcal{K}.$$

Lema 5.21 Sean $1 < p < \infty$, $-1/p < \alpha < 1/q$, $w(x) = |x|^\alpha$, $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ y $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) Existe $a_0 \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, $a_0(\pm\infty) = 0$ tal que el operador $W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.
- 2) $W_\xi^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-)$ es invertible en A_ξ^π .
- 3) $a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\frac{\pi(x+i(1/p+\alpha))}{2}]}{2} + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\frac{\pi(x+i(1/p+\alpha))}{2}]}{2} \neq 0$, $\forall x \in \overline{\mathbf{R}}$.

Demostración. Ya que $\nu_0^\pm(p, w) = 1/p + \alpha$, de acuerdo con el Lema 5.20 sólo falta probar que 2) implica 3). Ahora probaremos esto. Supongamos que $W_\xi^\pi(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-)$ es invertible en A_ξ^π pero la condición 3) no se cumple.

Primero probaremos que $a_{\pm}(\xi) \neq 0$. Sean $J^{\pi} \in J_{\xi}^{\pi}$, $j_0 \in J^{\pi}$ y $k_0 \in \mathcal{K}$, calculemos el operador límite para el operador $W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-) + j_0 + k_0$ y la sucesión $h_n \rightarrow +\infty$ (o $h_n \rightarrow -\infty$). De (3.22) sabemos que

$$\text{s-lim}_{h_n \rightarrow +\infty} e^{ixh_n} k_0 e^{-ixh_n} I = 0, \quad (5.78)$$

para cualquier sucesión $h_n \rightarrow +\infty$ (o $h_n \rightarrow -\infty$). De (5.73) es claro que podemos escribir

$$J_{\xi}^{\pi} = \text{Clos}_{A^{\pi}} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\prod_j^n W^{\pi}(a_{ij}) \right) W^{\pi}(b_i) : a_{ij} \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})], b_i \in SO_{p,w}, b_i(\xi) = 0 \right\}. \quad (5.79)$$

De acuerdo con (5.79) y la Proposición 2.36, existe una sucesión $h_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{h_n \rightarrow +\infty} b_k(h_n) = b_k(\xi), \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

y por lo tanto

$$\text{s-lim}_{h_n \rightarrow +\infty} e^{ixh_n} j_0 e^{-ixh_n} I = 0. \quad (5.80)$$

Por otra parte

$$\text{s-lim}_{h_n \rightarrow +\infty} e^{ixh_n} W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-) e^{-ixh_n} I = a_+(\xi)I. \quad (5.81)$$

Combinando (5.78), (5.80) y (5.81) tenemos que

$$\text{s-lim}_{h_n \rightarrow +\infty} e^{ixh_n} (W(a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_-) + j_0 + k_0) e^{-ixh_n} I = a_+(\xi)I. \quad (5.82)$$

Por analogía con el [14, Corolario 18.11] tenemos que $a_+(\xi) \neq 0$. En la misma manera demostramos que $a_-(\xi) \neq 0$.

Si la condición 3) no se cumple, entonces existe un $x_0 \in \mathbf{R}$ tal que

$$a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\pi(x_0 + i(1/p + \alpha))]}{2} + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\pi(x_0 + i(1/p + \alpha))]}{2} = 0.$$

Para la función $\tilde{a} := a_+(\xi)u_+ + a_-(\xi)u_- + a_0 \in GC_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$ definamos

$$\sigma_{\tilde{a}}(t, x) = \begin{cases} \tilde{a}(t), & \text{si } t \in \mathbf{R}, x = \infty, \\ a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\pi(x + i(1/p + \alpha))]}{2} + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\pi(x + i(1/p + \alpha))]}{2}, & \text{si } t = \infty, x \in \overline{\mathbf{R}}. \end{cases} \quad (5.83)$$

Ya que la función a es continua en \mathbf{R} , es claro que la función $\sigma_{\tilde{a}}(t, x)$ se puede identificar con el símbolo $(\Gamma W^{\pi}(\tilde{a}))(t, \mu)$ del operador $W(\tilde{a})$ definido para $(t, \mu) \in \mathcal{N}_{p,|x|^{\alpha}}$, donde $\mathcal{N}_{p,|x|^{\alpha}}$ fue introducido en el Teorema 2.25. En efecto, si denotamos

$$\frac{1 + \coth[\pi(x + i(1/p + \alpha))]}{2} = \mu(x) \text{ para } x \in \overline{\mathbf{R}},$$

entonces $\mu(x)$ corre todo $\mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, |x|^{\alpha}), \nu_0^+(p, |x|^{\alpha}))$ con $\nu_0^{\pm}(p, |x|^{\alpha}) = 1/p + \alpha$. Sea $\tilde{\mathcal{N}} = (\mathbf{R} \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \overline{\mathbf{R}})$. Entonces $\sigma_{\tilde{a}}(\tilde{\mathcal{N}}) = (\Gamma W^{\pi}(\tilde{a}))(\mathcal{N}_{p,|x|^{\alpha}})$.

Si $W_\xi^\pi(\tilde{a})$ es invertible en A_ξ^π , entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $[W(\tilde{a}) + B]_\xi^\pi$ es invertible en A_ξ^π , para todos los $B \in \mathcal{B}$ con $\|B\| < \epsilon$. Además, se puede escoger $B \in \mathcal{B}$ con $\|B\| < \epsilon$ tal que su símbolo en el álgebra \mathcal{B} de acuerdo con el Teorema 2.25 tiene las propiedades:

$$B(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \mathbf{R}, x = \infty, \\ 0, & \text{si } t = \infty, |x - x_0| > \epsilon^{-1}, \\ -a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\pi(x+i(1/p+\alpha))]}{2}, & \\ a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\pi(x+i(1/p+\alpha))]}{2}, & \text{si } t = \infty, |x - x_0| < \epsilon, \end{cases} \quad (5.84)$$

para $\epsilon \in (0, 1)$ suficientemente pequeños y $B(\infty, \cdot) \in C_p(\overline{\mathbf{R}})$. Por (5.83) y (5.84) el símbolo del operador $W(\tilde{a}) + B$ es igual a cero para todos los puntos (∞, x) con $|x - x_0| < \epsilon$.

Si $[W(\tilde{a}) + B]_\xi^\pi$ es invertible en A_ξ^π , entonces existe $D \in A$ tal que

$$([W(\tilde{a}) + B]^\pi + J_\xi^\pi)(D^\pi + J_\xi^\pi) = I^\pi + J_\xi^\pi,$$

donde $I^\pi + J_\xi^\pi$ es la identidad en A_ξ^π . Por otra parte, ya que el símbolo del operador $W(\tilde{a}) + B$ es igual a cero para todos los puntos (∞, x) con $|x - x_0| < \epsilon$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ con símbolo

$$C(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \mathbf{R}, x = \infty, \\ 0, & \text{si } t = \infty, |x - x_0| \geq \epsilon, \\ \psi(x), & \text{si } t = \infty, |x - x_0| < \epsilon, \end{cases} \quad (5.85)$$

donde $\psi(x) \neq 0$ para todos los $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ y $C(\infty, \cdot) \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$. De (5.84) y (5.85) se sigue que $C^\pi[W(\tilde{a}) + B]^\pi = 0$. Entonces

$$I_0 := (C^\pi + J_\xi^\pi)([W(\tilde{a}) + B]^\pi + J_\xi^\pi)(D^\pi + J_\xi^\pi) = 0$$

Por otra parte $I_0 := (C^\pi + J_\xi^\pi)(I^\pi + J_\xi^\pi) = C^\pi + J_\xi^\pi$. De aquí, $J_\xi^\pi = C^\pi + J_\xi^\pi$. Esto implica que $C^\pi \in J_\xi^\pi$, pero esto nos lleva a una contradicción.

En efecto, introduzcamos los operadores isométricos de desplazamiento

$$V_k \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, |x|^\alpha)), \quad (V_k f)(x) = k^{1/p+\alpha} f(kx), \quad x \in \mathbf{R},$$

donde $k > 0$. Sus restricciones al espacio $L^p(\mathbf{R}_+, |x|^\alpha)$ también los denotamos por V_k . Sea $a \in SO_{p,|x|^\alpha}$. Es claro que

$$V_k W(a) V_k^{-1} = W(a_k), \quad a_k(x) := a(x/k), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (5.86)$$

Por otro lado de acuerdo con [2, Corolario 3.3] dado $\xi \in M(SO)$ y para cada $a \in SO_{p,w} \subset SO$ existe una sucesión de números $k_n \in (0, 1)$ tales que $k_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(x/k_n) = a(\xi) := \xi(a) \quad \text{para cada } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (5.87)$$

Por analogía con el Lema 2.23 se puede obtener que el conjunto \mathcal{Y}_0 de todas las funciones $\psi \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R}, w)$ para las cuales $\mathcal{F}\psi$ tiene soporte compacto en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ es denso en $L^p(\mathbf{R}, w)$. Por lo tanto, si $a \in SO_{p,|x|^\alpha}$ y $a(\xi) = 0$ para algún $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, entonces de (5.86) y (5.87) se sigue que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} V_{k_n} W(a) V_{k_n}^{-1} = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W(a_{k_n}) = 0. \quad (5.88)$$

Entonces para cada $j_0 \in \mathcal{B}^\pi$ con $j_0^\pi \in J_\xi^\pi$ inferimos de (5.88) que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} V_{k_n} j_0 V_{k_n}^{-1} = 0. \quad (5.89)$$

Por otro lado para cada $u \in C_{p,|x|^\alpha}(\overline{\mathbf{R}})$ tenemos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} V_{k_n} W(u) V_{k_n}^{-1} = W(u(-\infty)\chi_- + u(+\infty)\chi_+), \quad (5.90)$$

donde χ_\pm son las funciones características de los semiejes \mathbf{R}_\pm . Entonces, por el Teorema 2.25

$$[\Gamma W^\pi(u)](\infty, x) = (1 - \mu(x))u(+\infty) + \mu(x)u(-\infty) = [\Gamma W^\pi(u(-\infty)\chi_- + u(+\infty)\chi_+)](\infty, x),$$

es decir, los símbolos del operador $W(u)$ y su límite fuerte $W(u(-\infty)\chi_- + u(+\infty)\chi_+)$ coinciden en el conjunto $\{\infty\} \times \overline{\mathbf{R}}$ (aquí usamos la identificación de los símbolos explicada arriba). Por lo tanto, para el operador $C \in \mathcal{B}$ con símbolo (5.85) existe su límite fuerte

$$C_0 := \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} V_{k_n} C V_{k_n}^{-1} \in \mathcal{B},$$

y $[\Gamma(C_0)^\pi](\infty, x) = C(\infty, x)$. Ya que $C(\infty, x) \neq 0$ para $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, entonces el operador $C_0 \neq 0$. De acuerdo con (5.89) esto significa que $C^\pi \notin J_\xi^\pi$. ■

Es claro que los Lemas 5.19–5.21 son válidos en el caso matricial con las modificaciones evidentes.

5.5. Teoría de Fredholm

Los Lemas 5.19 y 5.20 en su forma matricial y el principio local de Allan-Douglas para el álgebra A^π inmediatamente implican el siguiente resultado.

Teorema 5.22 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, $N \in \mathbf{N}$ y $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$. El operador de Wiener-Hopf $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si $a \in G[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y

$$\det \left[a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\pi(x + i\nu)]}{2} + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\pi(x + i\nu)]}{2} \right] \neq 0$$

para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, cada $x \in \mathbf{R}$ y cada $\nu \in [\nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)]$.

Sea $\Lambda = \Lambda(Z)$ el subálgebra de Banach de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+, w))$, definido por,

$$\Lambda := \left\{ A \in \mathcal{B} : W(cI_N)A - AW(cI_N) \in \mathcal{K}, \forall c \in SO_{p,w} \right\},$$

donde I_N es la matriz identidad de $N \times N$. El álgebra de Banach $\Lambda^\pi = \Lambda/\mathcal{K}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}^\pi = \mathcal{B}/\mathcal{K}$. Entonces el operador $W(a)$ con símbolo $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si $W^\pi(a)$ es invertible en $\Lambda^\pi = \Lambda/\mathcal{K}$.

Sean $\xi \in \mathcal{M}(SO)$ y \tilde{J}_ξ^π el ideal bilateral cerrado en Λ^π más pequeño que contiene a I_ξ^π definido por (5.70). Por el principio local de Allan-Douglas para el álgebra Λ^π , el operador $W(a)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si $\tilde{W}_\xi^\pi(a) = W^\pi(a) + \tilde{J}_\xi^\pi$ son invertibles en $\Lambda_\xi^\pi = \Lambda^\pi/\tilde{J}_\xi^\pi$ para todos los $\xi \in \mathcal{M}(SO)$.

Por otro lado, si $w(x) = |x|^\alpha \in A_p(\mathbf{R})$, entonces los Lemas 5.19, 5.21 y el principio local de Allan-Douglas para el álgebra A^π implican el siguiente criterio de Fredholm.

Teorema 5.23 Sean $1 < p < \infty$, $-1/p < \alpha < 1/q$, $w(x) = |x|^\alpha$ y $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, donde $N \in \mathbf{N}$. El operador de Wiener-Hopf $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ y tiene regularizadores en el álgebra A si y sólo si $a \in G[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y

$$\det \left[a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\pi(x + i(1/p + \alpha))]}{2} + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\pi(x + i(1/p + \alpha))]}{2} \right] \neq 0 \quad (5.91)$$

para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ y cada $x \in \overline{\mathbf{R}}$.

Demostración. *Suficiencia.* Esta se sigue del Teorema 5.22.

Necesidad. Sea $W(a)$ con $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ un operador Fredholm. Si $\xi \in \mathbf{R}$, entonces $\widetilde{W}_\xi^\pi(a) = W^\pi(a(\xi)) + \widetilde{J}_\xi^\pi$ y por lo tanto $\widetilde{W}_\xi^\pi(a)$ es invertible en Λ_ξ^π si y sólo si $\det a(\xi) \neq 0$. Por otro lado, si $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, entonces por analogía con (5.90) los operadores límite tienen la forma

$$W(a_-(\xi)\chi_- + a_+(\xi)\chi_+) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} V_{k_n} W(a) V_{k_n}^{-1}$$

y son invertibles por analogía con [14, Corolario 18.11], lo que implica (5.91) de acuerdo con el Teorema 2.25 en su forma matricial. Finalmente $a \in G[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ si $\det a(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbf{R}$ y (5.91) se cumple. ■

Sea $\mathcal{A} = \text{alg} \{W(c) : c \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}\} \subset \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+, w))$. A cada función matricial $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ le asociamos una sucesión $a_r \in [C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$, $r \in (0, \infty)$, dada por

$$a_r(x) = \begin{cases} a(-r), & \text{si } x < -r, \\ a(x), & \text{si } |x| \leq r, \\ a(r), & \text{si } x > r. \end{cases} \quad (5.92)$$

Queremos calcular el $\text{Ind } W(a)$ en términos de los $\text{Ind } W(a_r)$.

Lema 5.24 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R}_+)$ y $N \geq 1$. Sea a una función matricial par en $[SO_{p,w}]_{N \times N}$. Entonces el operador de Wiener-Hopf $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ si y sólo si $a \in G[SO_{p,w}]_{N \times N}$. En el caso que $W(a)$ sea Fredholm $\text{Ind } W(a) = 0$.

Demostración. Sea $A := \chi_+ \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F} \chi_+ I + \chi_- I$ y definamos $\tilde{w} \in A_p(\mathbf{R})$ por

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & \text{si } x \in \mathbf{R}_+, \\ w(-x), & \text{si } x \in \mathbf{R}_-. \end{cases}$$

Como $W(a) \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+, w))$, tenemos que $A \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, \tilde{w}))$.

Sea $B : L_N^p(\mathbf{R}, \tilde{w}) \rightarrow L_{2N}^p(\mathbf{R}_+, w)$ definido por

$$Bf = \begin{pmatrix} f|_{\mathbf{R}_+} \\ Vf|_{\mathbf{R}_+} \end{pmatrix},$$

donde $(Vf)(x) = f(-x)$, para $x \in \mathbf{R}$. Notemos que

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} W(a) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Entonces $W(a)$ es Fredholm si y sólo si A lo es, y en el caso en el que sean Fredholm

$$\text{Ind } W(a) = \text{Ind } A. \quad (5.93)$$

Sea

$$\tilde{A} := VAV^{-1} = V(\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I + \chi_-I)V^{-1} = \chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I + \chi_+I.$$

Se sabe que A y \tilde{A} son Fredholm si lo son simultaneamente y en este caso

$$\text{Ind } A = \text{Ind } \tilde{A}. \quad (5.94)$$

Además

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= (\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I + \chi_-I)(\chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I + \chi_+I) \\ &= \chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I + \chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I \\ &= \chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I + \chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I + (\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I + \chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I) \\ &\quad - (\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I + \chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I) \\ &= \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F} - (\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I + \chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I). \end{aligned} \quad (5.95)$$

De acuerdo con [2, Teorema 4.2], los operadores $\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I$ y $\chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I$ son compactos en todos los espacios $L_N^p(\mathbf{R})$ ($1 < p < \infty$). Ya que tales operadores son acotados en todos los espacios $L_N^p(\mathbf{R}, w)$ con pesos $w \in A_p(\mathbf{R})$, por analogía con [48, Teorema 3.10] y [44, Teorema 3.2] deducimos que los operadores $\chi_+\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_-I$ y $\chi_-\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}\chi_+I$ son compactos en todos los espacios $L_N^p(\mathbf{R}, w)$ ($1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$). De esto y el hecho de que $\text{Ind}(\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}) = 0$, se sigue de (5.95), que $W(a)$ es Fredholm si y sólo si $a \in G[SO_{p,w}]_{N \times N}$, y $\text{Ind}(A\tilde{A}) = 0$. De (5.94) y (5.95) tenemos que

$$2\text{Ind } A = \text{Ind}(A\tilde{A}) = 0.$$

Esto y (5.93) completan la demostración. \blacksquare

Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{L}_\nu := \left\{ \mu = 2^{-1}(1 + \coth[\pi(x + i\nu)]) : x \in \overline{\mathbf{R}} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{\nu_1, \nu_2} := \bigcup_{\nu \in [\nu_1, \nu_2]} \mathcal{L}_\nu \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_{p,w} := \mathcal{H}_{\nu_0^-(p,w), \nu_0^+(p,w)}.$$

Notemos que la igualdad

$$1 - \frac{1 + \coth[\pi(x + i\nu)]}{2} = \frac{1 + \coth[\pi(-x + i(1 - \nu))]}{2}$$

implica que

$$1 - \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)) = \mathcal{H}(0, 1; 1 - \nu_0^+(p, w), 1 - \nu_0^-(p, w)).$$

Por lo tanto para cada $\nu \in (0, 1)$ tenemos que

$$1 - \mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_{1-\nu}, \quad (5.96)$$

donde el arco $\mathcal{L}_{1-\nu}$ se recorre en la dirección contraria: desde 1 hasta 0.

A cada $\theta \in (-\pi, \pi)$ le asociamos $p(\theta) = 2\pi/(\pi - \theta)$ y el homeomorfismo $\varphi_\theta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_{1/p(\theta)}$ dado por

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\theta t)}{\sin \theta} e^{i\theta(t-1)} = \frac{e^{2i\theta t} - 1}{e^{2i\theta} - 1} & \text{si } \theta \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ t & \text{si } \theta = 0. \end{cases} \quad (5.97)$$

Teorema 5.25 Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbf{R})$, $N \geq 1$ y $a \in [SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$. Si las condiciones del Teorema 5.22 se cumplen, entonces el operador de Wiener-Hopf $W(a)$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ y para todos los r suficientemente grandes, los operadores de Wiener-Hopf $W(a_r)$ con símbolos

$$a_r(x) = \begin{cases} a(x) & \text{si } |x| \leq r, \\ a(\pm r) & \text{si } \pm x > r, \end{cases} \quad (5.98)$$

son Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ e

$$\text{Ind } W(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Ind } W(a_r). \quad (5.99)$$

Demostración. Del Teorema 5.22 tenemos que

$$\inf_{t \in \mathbf{R}} |\det a(t)| > 0, \quad (5.100)$$

$$\det [a_{\xi,+}(1 - \mu) + a_{\xi,-}\mu] \neq 0 \text{ para cada } (\xi, \mu) \in \mathcal{M}_\infty(SO) \times \mathcal{H}_{p,w}, \quad (5.101)$$

donde $a_{\xi,\pm} := a_\pm(\xi)$. De la condición (5.100) se tiene que la función matricial par

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{si } x \geq 0, \\ a(-x) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

pertenece a $G[SO_{p,w}]_{N \times N}$. De aquí, por el Lema 5.24, el operador $W(\tilde{a})$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$ e

$$\text{Ind } W(\tilde{a}) = 0. \quad (5.102)$$

Sea $b := \tilde{a}^{-1}a$. Por (5.100) y (5.101), $b \in G[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y

$$\det [I_N(1 - \mu) + b_{\xi,-}\mu] \neq 0 \text{ para cada } (\xi, \mu) \in \mathcal{M}_\infty(SO) \times \mathcal{H}_{p,w}, \quad (5.103)$$

donde $b_{\xi,-} = a_{\xi,+}^{-1}a_{\xi,-}$ e I_N es la matriz identidad de $N \times N$. Por lo tanto, el Teorema 5.22 implica que el operador $W(b)$ es Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+, w)$. Más aún, de (5.102) y la igualdad $W(a) = W(\tilde{a})W(b) + K$, donde K es un operador compacto, se sigue que

$$\text{Ind } W(a) = \text{Ind } W(b). \quad (5.104)$$

Como el conjunto

$$\bigcup_{(\xi, \mu) \in \mathcal{M}_\infty(SO) \times \mathcal{H}_{p,w}} \det [I_N(1 - \mu) + b_{\xi,-}\mu]$$

es compacto en $\mathbf{C}^{N \times N}$, de (5.103) existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$\det [I_N(1 - \mu) + (b_{\xi,-} + c)\mu] \neq 0 \quad (5.105)$$

para todo $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, todo $\mu \in \mathcal{H}_{p,w}$ y cada matriz $c \in \mathbf{C}^{N \times N}$ con $\|c\|_{\mathbf{C}^{N \times N}} < \epsilon$. Además, de (5.105) y la Proposición 2.36 existe un $x_0 < 0$ tal que

$$\det[I_N(1 - \mu) + b(x)\mu] \neq 0 \text{ para todo } x \leq x_0 \text{ y todo } \mu \in \mathcal{H}_{p,w}. \quad (5.106)$$

Sea $\varphi := \varphi_{-\pi+2\pi\nu_0^0(p,w)}$, donde $\nu_0^0(p,w) = 2^{-1}(\nu_0^-(p,w) + \nu_0^+(p,w))$ y φ_θ está definido por (5.97). Entonces φ es un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre $\mathcal{L}_{1-\nu_0^0(p,w)}$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Para cada $z \in [0, 1]$ introducimos la función matricial continua

$$b^{(z)}(x) := \begin{cases} I_N\varphi(z) + b(x)(1 - \varphi(z)) & \text{si } x < x_0 - 1, \\ I_N\varphi(z|x - x_0|) + b(x)(1 - \varphi(z|x - x_0|)) & \text{si } x \in [x_0 - 1, x_0], \\ b(x) & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (5.107)$$

donde $b(x) = I_N$ para $x \geq 0$. Es evidente que las funciones matriciales $b^{(z)}$ pertenecen a $[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ para cada $z \in [0, 1]$. Además, $b^{(z)} \in G[SO_{p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ para todos $z \in [0, 1]$ de acuerdo con (5.106) y (5.96). Probaremos que la función $z \mapsto W(b^{(z)})$ es continua del $[0, 1]$ en $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}_+, w))$. En efecto, para todos $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tenemos que

$$W(b^{(z_1)}) - W(b^{(z_2)}) = W((I_N - b)\eta_{z_1, z_2}), \quad (5.108)$$

donde

$$\eta_{z_1, z_2}(x) = (\varphi(z_1) - \varphi(z_2))\chi_{(-\infty, x_0-1)}(x) + (\varphi(z_1|x - x_0|) - \varphi(z_2|x - x_0|))\chi_{[x_0-1, x_0]}(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

y χ_γ es la función característica del conjunto γ . Si $\varphi = \varphi_0$, entonces de (5.97) se sigue que

$$\|\eta_{z_1, z_2}\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = |z_1 - z_2|, \quad V_1(\eta_{z_1, z_2}) = |z_1 - z_2|,$$

y por la desigualdad de Stechkin (2.15),

$$\|\eta_{z_1, z_2}\|_{M_{p,w}} \leq 2\|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}|z_1 - z_2|. \quad (5.109)$$

Si $\varphi = \varphi_\theta$ donde $\theta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, entonces

$$\begin{aligned} \|\eta_{z_1, z_2}\|_{L^\infty(\mathbf{R})} &= \max_{t \in [0, 1]} |\varphi(z_1 t) - \varphi(z_2 t)| = \max_{t \in [0, 1]} \left| \frac{e^{2i\theta z_1 t} - e^{2i\theta z_2 t}}{e^{2i\theta} - 1} \right| \leq 2\theta|z_1 - z_2|/|e^{2i\theta} - 1|, \\ V_1(\eta_{z_1, z_2}) &= \int_0^1 |z_1\varphi'(z_1 t) - z_2\varphi'(z_2 t)| dt \leq \frac{1}{|e^{2i\theta} - 1|} \int_0^1 |2\theta z_1 e^{2i\theta z_1 t} - 2\theta z_2 e^{2i\theta z_2 t}| dt \\ &\leq \frac{2\theta}{|e^{2i\theta} - 1|} \int_0^1 (1 + 2\theta t)|z_1 - z_2| dt = \frac{2\theta(1 + \theta)}{|e^{2i\theta} - 1|}|z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\|\eta_{z_1, z_2}\|_{M_{p,w}} \leq 2C\|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}, w))}|z_1 - z_2|, \quad (5.110)$$

donde C es una constante positiva y finita. Finalmente, (5.108)–(5.110) implican la continuidad de la función $z \mapsto W(b^{(z)})$. Ya que la función $b^{(1)} \in C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})$, por la estabilidad de índices de operadores con respecto a las perturbaciones pequeñas (ver el Teorema 2.1) tenemos que

$$\text{Ind } W(b) = \text{Ind } W(b^{(0)}) = \text{Ind } W(b^{(1)}) = -\frac{1}{2\pi} \{\arg \det b^{(1)}(x)\}_{x \in \overline{\mathbf{R}}}. \quad (5.111)$$

Por otra parte, sustituyendo las funciones \tilde{a} , b y $b^{(z)}$ por las funciones

$$\tilde{a}_r(x) := \begin{cases} a_r(x) & \text{si } x \geq 0, \\ a_r(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad b_r(x) := \tilde{a}_r^{-1}(x)a_r(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

y

$$b_r^{(z)}(x) := \begin{cases} I_N \varphi(z) + b_r(x)(1 - \varphi(z)) & \text{si } x < x_0 - 1, \\ I_N \varphi(z|x - x_0|) + b_r(x)(1 - \varphi(z|x - x_0|)) & \text{si } x \in [x_0 - 1, x_0], \\ b_r(x) & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (5.112)$$

respectivamente, donde la función a_r está definida por (5.98) y las funciones $b_r^{(z)}$ son invertibles en $[C_{p,w}(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ para cada $z \in [0, 1]$, repitiendo los razonamientos anteriores tenemos que para cada r suficiente grande,

$$\text{Ind } W(a_r) = \text{Ind } W(b_r) = \text{Ind } W(b_r^{(0)}) = \text{Ind } W(b_r^{(1)}) = -\frac{1}{2\pi} \{ \arg \det b_r^{(1)}(x) \}_{x \in \overline{\mathbf{R}}}. \quad (5.113)$$

Pero, si $r > 0$ es suficiente grande, entonces las funciones matriciales $b^{(1)}$ y $b_r^{(1)}$ coinciden. Por eso para tales r las fórmulas (5.104), (5.111) y (5.113) implican que

$$\text{Ind } W(a) = \text{Ind } W(b^{(1)}) = \text{Ind } W(b_r^{(1)}) = \text{Ind } W(a_r),$$

lo que completa la demostración del teorema. \blacksquare

6. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos generados por matrices semi-casi periódicas y lentamente oscilatorias

6.1. El ideal \mathcal{K} y el álgebra $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$

Consideremos los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) := \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Como es sabido (ver, p. ej. [75, Capítulo 5]), las funciones

$$\psi_n(x) := \sqrt{2} L_n(2x) e^{-x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.1)$$

forman una base ortogonal en $L^2(\mathbf{R}_+)$. Por [15, p. 487] y [31, Capítulo I, §8.3],

$$\psi_n = W^n((x - i)/(x + i)) \psi_0 \quad \text{para toda } n \in \mathbf{N}. \quad (6.2)$$

Claramente, $\psi_n \in L^p(\mathbf{R}_+, w)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, todo $p \in (1, \infty)$ y todo $w \in A_p(\mathbf{R}_+)$.

Por analogía con [47, p. 404], se puede probar lo siguiente.

Lema 6.1 *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R}_+)$, entonces el espacio generado por el sistema $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots\}$ dado por (6.1) es denso en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+, w)$.*

Dados $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbf{R}_+)$, denotamos por $\text{alg}_{p,w}W(C(\dot{\mathbf{R}}))$ al subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$ que contiene al conjunto $\{W(c) : c \in C_{p,w}(\dot{\mathbf{R}})\}$.

Tomando en cuenta (6.2), aplicando el Lema 6.1 y literalmente repitiendo la prueba de [15, p.487] para $L^p(\mathbf{R}_+, w)$ en lugar de $L^p(\mathbf{R}_+)$, obtenemos lo siguiente.

Lema 6.2 *Para $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\mathbf{R}_+)$, el álgebra de Banach $\text{alg}_{p,w}W(C(\dot{\mathbf{R}}))$ contiene al ideal $\mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$ de todos los operadores compactos en $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+, w))$.*

Sean $1 < p < \infty$, $w \in A_p^0(\mathbf{R})$ y $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ el subálgebra de $\mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))$ generada por los operadores $(\text{sgn } x)I$ y $W^0(a)$ donde $a \in [SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}$. Consideremos los operadores límite de la forma $s\text{-lim}_{h_n \rightarrow \pm\infty} (e_{-h_n} A e_{h_n} I)$ para operadores

$$A \in \text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N})).$$

Lema 6.3 *El ideal $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L_N^p(\mathbf{R}, w))$ tiene las siguientes propiedades:*

- i) $\mathcal{K} \subset \text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$;
- ii) para cada $K \in \mathcal{K}$ y cada sucesión real-valuada h que tiende a ∞ (respectivamente, a $+\infty$, $-\infty$) el operador límite K_h existe y es el operador cero.

La parte i) se sigue del Lema 6.2 y ii) se sigue de (3.22).

Se sabe de la sección 2.7 que los operadores límite del operador $(\text{sgn } x)I \in \mathcal{B}(L_N^p(\mathbf{R}, w))$ coinciden con $(\text{sgn } x)I$ y que los operadores límite de los operadores de convolución $W^0(a)$ con $a \in [SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}$ son los operadores de convolución $W^0(a_{\xi, \pm})$ donde $a_{\xi, \pm} = \nu_{\xi, \pm} a \in [AP_{p,w}]_{N \times N}$, $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ y $\nu_{\xi, \pm}$ están dados por (2.43) Introduzcamos los mapeos

$$\mu_{\xi, \pm} : A \mapsto A_{\xi, \pm}, \text{ con } \xi \in \mathcal{M}_\infty(SO),$$

definidos en los generadores del álgebra de Banach $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ por las igualdades

$$\mu_{\xi, \pm}((\text{sgn } x)I) = (\text{sgn } x)I, \tag{6.3}$$

$$\mu_{\xi, \pm}(W^0(a)) = W^0(a_{\xi, \pm}) \text{ para } a \in [SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}, \text{ con } a_{\xi, \pm} \in [AP_{p,w}]_{N \times N}. \tag{6.4}$$

Por lo tanto $\mu_{\xi, \pm}$ mapea los generadores de $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ sobre sus operadores límite que son los generadores de $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([AP_{p,w}]_{N \times N}))$.

Lema 6.4 *Para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los mapeos $\mu_{\xi, \pm} : A \mapsto A_{\xi, \pm}$, definidos por (6.3) y (6.4), se extienden a homomorfismos de álgebras de Banach de $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ sobre $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([AP_{p,w}]_{N \times N}))$.*

Más aún, para cada $A \in \text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$,

$$\|A_{\xi, \pm}\| \leq \|A\|_{ess}, \tag{6.5}$$

donde $\|A\|_{ess} = \inf \{\|A + K\| : K \in \mathcal{K}\}$.

Demostración. Primero, consideremos operadores de la forma

$$A = \sum_i \prod_j A_{ij} \quad (6.6)$$

donde $A_{ij} \in \{(\operatorname{sgn} x)I, W^0(a)\}$, $a \in [SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}$, i y j pertenecen a conjuntos finitos, y los productos son ordenados. Como $\mu_{\xi, \pm}(A_{ij})$ son los operadores límite de los operadores A_{ij} , de la Proposición 2.32 se sigue que

$$\mu_{\xi, \pm}(A) = \sum_i \prod_j \mu_{\xi, \pm}(A_{ij}).$$

Más aún, para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, existe una sucesión $h_n \rightarrow \pm\infty$ cuando $n \rightarrow \pm\infty$, tal que (ver (2.47)),

$$\mu_{\xi, \pm}(A) = \operatorname{s-lim}_{n \rightarrow \pm\infty} (e_{-h_n} A e_{h_n} I).$$

Aplicando el Lema 6.3, obtenemos

$$\mu_{\xi, \pm}(A) = \operatorname{s-lim}_{n \rightarrow \pm\infty} (e_{-h_n} (A + K) e_{h_n} I), \quad \forall K \in \mathcal{K}.$$

Entonces la Proposición 2.32(a) implica que

$$\|\mu_{\xi, \pm}(A)\| \leq \inf_{K \in \mathcal{K}} \|A + K\| = \|A\|_{ess}. \quad (6.7)$$

El conjunto de operadores de la forma (6.6) es denso en $\operatorname{alg}(\operatorname{sgn} x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ y de aquí, en vista de (6.7), los homomorfismos $\mu_{\xi, \pm}$ se extienden por continuidad a toda el álgebra. Poniendo $A_{\xi, \pm} := \mu_{\xi, \pm}(A)$ para cada $A \in \operatorname{alg}(\operatorname{sgn} x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$, obtenemos (6.5). ■

Teorema 6.5 *Sea $A \in \operatorname{alg}(\operatorname{sgn} x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ un operador Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}, w)$ y sea $A_{\xi, \pm} = \mu_{\xi, \pm}(A)$, para $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, donde $\mu_{\xi, \pm}$ son los homomorfismos definidos en el Lema 6.4. Entonces $\{A_{\xi, \pm}\}_{\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)}$ es una familia de operadores que están en $\operatorname{alg}(\operatorname{sgn} x, W^0([AP_{p,w}]_{N \times N}))$ y son invertibles en $L_N^p(\mathbf{R}, w)$.*

Demostración. Usando otro tipo de operadores límite por analogía con la demostración del Corolario 4.9, hacemos lo siguiente. Sea A un operador Fredholm de índice m y consideremos el operador

$$A' = AW^0(d) \quad (6.8)$$

donde

$$d(x) = \operatorname{diag} \left[\left(\frac{x-i}{x+i} \right)^m, 1, \dots, 1 \right].$$

El operador $W^0(d)$ es Fredholm y tiene índice $-m$. Entonces el operador A' es Fredholm de índice cero, y de aquí puede ser representado por

$$A' = U + K \quad (6.9)$$

donde U es un operador invertible y $K \in \mathcal{K}$ (ver, p. ej. [35, Vol. 1 p. 167]).

Aplicando las técnicas de operadores límite a (6.8) y (6.9) mostramos que $A_{\xi,\pm}$ son operadores invertibles para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO_{p,w})$. Como los operadores A , $W^0(d)$ y A' pertenecen a $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ y $\mu_{\xi,\pm}(W^0(d)) = I$, deducimos de la Proposición 2.32(b) y (6.8) que

$$\mu_{\xi,\pm}(A) = \mu_{\xi,\pm}(A)\mu_{\xi,\pm}(W^0(d)) = \mu_{\xi,\pm}(A'). \quad (6.10)$$

Por otra parte, por el Lema 6.3, $K \in \text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ y $\mu_{\xi,\pm}(K) = 0$. De aquí $U \in \text{alg}(\text{sgn } x, W^0([SO_{p,w}, SAP_{p,w}]_{N \times N}))$ y por (6.9) y (6.10),

$$A_{\xi,\pm} = \mu_{\xi,\pm}(A) = \mu_{\xi,\pm}(A') = \mu_{\xi,\pm}(U).$$

Los operadores $U_{\xi,\pm} = \mu_{\xi,\pm}(U)$ son invertibles. En efecto, por el Lema 6.4, existe una sucesión $h_\pm = \{h_n^\pm\} \rightarrow \pm\infty$ tal que

$$U_{\xi,\pm} = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{-h_n^\pm} U e_{h_n^\pm} I), \quad (U_{\xi,\pm})^* = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{-h_n^\pm} U^* e_{h_n^\pm} I).$$

Como $(e_{h_n^\pm} I)^{-1} = (e_{-h_n^\pm} I)$ y el operador U es invertible, los operadores $e_{-h_n^\pm} U e_{h_n^\pm} I$ y $e_{-h_n^\pm} U^* e_{h_n^\pm} I$ también son invertibles. Más aún,

$$\|(e_{-h_n^\pm} U e_{h_n^\pm})^{-1}\| = \|(e_{-h_n^\pm} U^* e_{h_n^\pm})^{-1}\| = \|U^{-1}\|.$$

Por lo tanto, de [31, Capítulo 3, Lema 1.1], los límites fuertes $U_{\xi,\pm}$ son operadores invertibles, y de aquí los operadores $A_{\xi,\pm} = U_{\xi,\pm}$ que pertenecen al álgebra de Banach $\text{alg}(\text{sgn } x, W^0([AP_{p,w}]_{N \times N}))$ son invertibles en $L_N^p(\mathbf{R}, w)$ para todo $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. ■

6.2. Media geométrica para funciones matriciales en $[AP_p]_{N \times N}$

Por analogía con [14, Teorema 18.12] obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.6 Sean $1 < p < \infty$, $N \in \mathbf{N}$ y

$$\mathcal{G} := \left\{ a \in [AP_p]_{N \times N} : W(a) \text{ es invertible en } L_N^p(\mathbf{R}_+) \right\}.$$

Si $a \in \mathcal{G}$ y $\{a_n\} \subset AP_{N \times N}^0$ es una sucesión de polinomios matriciales casi periódicos que converge a la matriz a en la norma $\|\cdot\|_{[M_p]_{N \times N}}$, entonces los polinomios matriciales a_n tienen factorización canónica APW para todos los n suficientemente grandes y el límite

$$\mathbf{d}(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(a_n) \quad (6.11)$$

existe y es una matriz en $GC^{N \times N}$. El mapeo

$$\mathcal{G} \rightarrow GC^{N \times N}, \quad a \mapsto \mathbf{d}(a) \quad (6.12)$$

es continuo.

Demostración. Sea a_n una sucesión de polinomios matriciales casi periódicos que converge a a en la norma $\|\cdot\|_{[M_p]_{N \times N}}$. Como $W(a)$ es invertible, entonces los operadores $W(a_n)$ son invertibles para toda n suficientemente grande y $\|(W(a_n))^{-1} - (W(a))^{-1}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $W(a_n)$ es invertible para toda n . Por [14, Corolario 19.11] los a_n tienen factorización canónica derecha APW , $a_n = a_n^- a_n^+$.

Sea $\chi(x) = \tanh(\pi x)$. Por [14, Lema 19.13],

$$\chi(a_n^\pm)^{-1} = \chi M^{-1}(a_n^\pm) + f_n^\pm, \quad (6.13)$$

donde $f_n^\pm \in [C_p(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,\pm}^\infty]_{N \times N}$.

De [14, Sección 2.5] se tiene que $\chi_- W^0(f) \chi_+ I = 0$ en $L^2(\mathbf{R})$, para $f \in H_{p,+}^\infty \subset H_+^\infty$ ($1 < p < \infty$). Extendiendo por continuidad $\chi_- W^0(f) \chi_+ I$ de $L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R})$ a $L^p(\mathbf{R})$, tenemos que $\chi_- W^0(f) \chi_+ I = 0$ en $L^p(\mathbf{R})$, si $f \in H_{p,+}^\infty$. Análogamente $\chi_+ W^0(f) \chi_- I = 0$ en $L^p(\mathbf{R})$, si $f \in H_{p,-}^\infty$.

Ahora consideremos $f \in C_p(\dot{\mathbf{R}})$. Entonces existe una sucesión de funciones $f_n \in C(\dot{\mathbf{R}}) \cap V_1(\mathbf{R})$ que converge a f en M_p . Por el teorema de Stechkin, los operadores $\chi_- W^0(f_n) \chi_+ I$ y $\chi_+ W^0(f_n) \chi_- I$ son acotados en $L^p(\mathbf{R})$. De aquí, los operadores

$$\begin{aligned} \chi_- W^0(f) \chi_+ I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_- W^0(f_n) \chi_+ I, \\ \chi_+ W^0(f) \chi_- I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_+ W^0(f_n) \chi_- I \end{aligned}$$

son acotados en $L^p(\mathbf{R})$. Como los operadores $\chi_\mp W^0(f) \chi_\pm I$ son compactos en $L^2(\mathbf{R})$ (ver, p.ej. [14, Teorema 2.18]), por analogía con [48, Teorema 3.10] y [44, Teorema 3.2] tenemos que los operadores $\chi_\mp W^0(f) \chi_\pm I$ son compactos en cada espacio $L^p(\mathbf{R})$ ($1 < p < \infty$). Por lo tanto, los operadores $\chi_- W^0(f) \chi_+ I$ y $\chi_+ W^0(f) \chi_- I$ son compactos para $f \in [C_p(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,+}^\infty]_{N \times N}$ y $f \in [C_p(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,-}^\infty]_{N \times N}$ respectivamente, y tenemos

$$\begin{aligned} &\chi_- W^0(\chi) W^{-1}(a_n) W^0(\chi) \chi_- I \\ &= \chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0([a_n^+]^{-1}) \chi_+ W^0([a_n^-]^{-1}) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I \\ &= \chi_- W^0(\chi) W^0([a_n^+]^{-1}) \chi_+ W^0([a_n^-]^{-1}) W^0(\chi) \chi_- I \\ &= \chi_- W^0(\chi [a_n^+]^{-1}) \chi_+ W^0(\chi [a_n^-]^{-1}) \chi_- I \\ &\simeq \chi_- W^0(\chi M^{-1}(a_n^+)) \chi_+ W^0(\chi M^{-1}(a_n^-)) \chi_- I \\ &= M^{-1}(a_n^+) M^{-1}(a_n^-) \chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I \\ &= \mathbf{d}^{-1}(a_n) \chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I, \end{aligned}$$

donde $A \simeq B$ significa que $A - B$ es compacto. De aquí,

$$[\mathbf{d}^{-1}(a_n) - \mathbf{d}^{-1}(a_m)] \chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I \simeq \chi_- W^0(\chi) [W^{-1}(a_n) - W^{-1}(a_m)] W^0(\chi) \chi_- I,$$

y tomando en cuenta la jk -ésima entrada en cada lado de esta fórmula, obtenemos

$$\begin{aligned} &|(\mathbf{d}^{-1}(a_n) - \mathbf{d}^{-1}(a_m))_{jk}| \|\chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I\|_{ess} \\ &= \|\chi_- W^0(\chi) [W^{-1}(a_n) - W^{-1}(a_m)] W^0(\chi) \chi_- I\|_{ess} \\ &\leq \|W^0(\chi)\|^2 \|W^{-1}(a_n) - W^{-1}(a_m)\|. \end{aligned}$$

Siguiendo [14, sección 17.3] calculamos $\text{Sym } H$, para $H = \chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I$. Tenemos que $\text{Sym } H = \text{Sym } (\chi_- I) \text{Sym } W^0(\chi) \text{Sym } (\chi_+ I) \text{Sym } W^0(\chi) \text{Sym } (\chi_- I)$. En $(0, \infty, \mu)$ tenemos

$$\begin{aligned} (\text{Sym } H)(0, \infty, \mu) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\mu & 2\rho \\ 2\rho & 2\mu - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\mu & 2\rho \\ 2\rho & 2\mu - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\rho & 2\mu - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\rho^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\mu(1 - \mu) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\rho = \sqrt{\mu(1-\mu)}$ y $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; 1/p)$.

Así que $\text{Sym } H$ no es idénticamente cero, se deduce de [14, Teorema 17.12(b)] que el operador $\chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I$ no es compacto. De aquí $c_0 := \|\chi_- W^0(\chi) \chi_+ W^0(\chi) \chi_- I\|_{ess} > 0$ y se sigue que

$$|(\mathbf{d}^{-1}(a_n) - \mathbf{d}^{-1}(a_m))_{jk}| \leq c_0^{-1} \|W^0(\chi)\|^2 \|W^{-1}(a_n) - W^{-1}(a_m)\|. \quad (6.14)$$

Por lo tanto $b := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}^{-1}(a_n)$ existe. Para probar que $b \in GC^{N \times N}$ es suficiente verificar que existe un $M \in (0, \infty)$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(\mathbf{d}(a_n))_{jk}| \leq M \quad \text{para todos } j, k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.15)$$

En efecto, (6.15) implica que $|\det \mathbf{d}(a_n)| \leq N!M^N$, y por eso

$$|\det b| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\det \mathbf{d}^{-1}(a_n)| \geq 1/(N!M^N) > 0.$$

Ahora pasemos a la demostración de (6.15). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a_n^\pm son polinomios casi periódicos. Fijemos $n \in \mathbf{N}$. Para cada n existe un número $\alpha = \alpha_n > 0$ tal que

$$\Omega(a_n^-) \cap (-\alpha, 0) = \emptyset, \quad \Omega(a_n^+) \cap (0, \alpha) = \emptyset. \quad (6.16)$$

Sean $\chi_0 = \chi_{[0, \alpha]}$ y $\chi_1 = \chi_{[\alpha, +\infty)}$. Ya que el operador $W(a_n)$ es invertible en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$, es evidente que el operador $\chi_1 W(a_n) \chi_1 I$ es invertible en el espacio $L_N^p([\alpha, +\infty))$. Consideremos el operador

$$B_n = \chi_0 W(a_n) \chi_0 I - \chi_0 W(a_n) \chi_1 (\chi_1 W(a_n) \chi_1 I)^{-1} \chi_1 W(a_n) \chi_0 I. \quad (6.17)$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|W(a_n) - W(a)\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(W(a_n))^{-1} - (W(a))^{-1}\| = 0,$$

es claro que existe $M \in (0, \infty)$ tal que

$$\|B_n\| \leq \|W(a_n)\| + \|W(a_n)\|^2 \|(W(a_n))^{-1}\| \leq M < \infty. \quad (6.18)$$

Ya que $\chi_1 W(a_n) \chi_1 I = \chi_1 W^0(a_n^-) \chi_1 W^0(a_n^+) \chi_1 I$, tenemos que

$$(\chi_1 W(a_n) \chi_1 I)^{-1} = (\chi_1 W^0((a_n^+)^{-1}) \chi_1 W^0((a_n^-)^{-1}) \chi_1 I).$$

Por otra parte, $\chi_0 W(a_n) \chi_0 I = \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_+ W^0(a_n^+) \chi_0 I$. Por consiguiente, de (6.17) se sigue que

$$\begin{aligned} B_n &= \chi_0 W^0(a_n) \chi_0 I - \chi_0 W^0(a_n^- a_n^+) \chi_1 W^0((a_n^+)^{-1}) \chi_1 W^0((a_n^-)^{-1}) \chi_1 W^0(a_n^- a_n^+) \chi_0 I \\ &= \chi_0 W^0(a_n) \chi_0 I - \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_1 W^0(a_n^+) \chi_1 W^0((a_n^+)^{-1}) \chi_1 W^0((a_n^-)^{-1}) \chi_1 W^0(a_n^-) \chi_1 W^0(a_n^+) \chi_0 I \\ &= \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_+ W^0(a_n^+) \chi_0 I - \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_1 W^0(a_n^+) \chi_0 I \\ &= \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_0 W^0(a_n^+) \chi_0 I. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Por otra parte, el Lema 19.13 en [14] también implica que

$$a_n^\pm = M(a_n^\pm) + g_n^\pm, \quad (6.20)$$

donde los polinomios casi periódicos $g_n^\pm \in [APW^\pm]_{N \times N}$ y

$$\Omega(g_n^-) \subset (-\infty, -\alpha], \quad \Omega(g_n^+) \subset [\alpha, +\infty).$$

Por eso, si $g_n^\pm = \sum_{\pm\lambda \geq \alpha} e_\lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_0 I &= \chi_{[0, \alpha]} \sum_{\lambda \leq -\alpha} \chi_{[\lambda, \lambda + \alpha]} U_\lambda = 0, \\ \chi_0 W^0(a_n^+) \chi_0 I &= \chi_{[0, \alpha]} \sum_{\lambda \geq \alpha} \chi_{[\lambda, \lambda + \alpha]} U_\lambda = 0, \end{aligned}$$

donde $U_\lambda = W^0(e_\lambda)$ y $(U_\lambda f)(x) = f(x - \lambda)$ para $x \in \mathbf{R}$. Tomando en cuenta esta propiedad, de (6.18) deducimos que

$$\begin{aligned} B_n &= \chi_0 W^0(a_n^-) \chi_0 W(a_n^+) \chi_0 I \\ &= \chi_0 W^0(M(a_n^-) + g_n^-) \chi_0 W(M(a_n^+) + g_n^+) \chi_0 I \\ &= \chi_0 W^0(M(a_n^-)) \chi_0 W(M(a_n^+)) \chi_0 I \\ &= \chi_0 M(a_n^-) \chi_0 M(a_n^+) \chi_0 I = \mathbf{d}(a_n) \chi_0 I. \end{aligned} \tag{6.21}$$

De (6.21) y (6.18) se sigue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(\mathbf{d}(a_n))_{jk}| \leq \|B_n\| \leq M < \infty.$$

Ahora probaremos la continuidad del mapeo (6.12). Fijemos $a \in \mathcal{G}$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $b \in \mathcal{G}$ y $\|(W(a))^{-1} - (W(b))^{-1}\| < \epsilon$ siempre que $b \in [AP_p]_{N \times N}$ y $\|b - a\|_{M_p} < \delta$. Fijemos un b que cumple esto y elijamos a_n y b_n en $AP_{N \times N}^0$ tal que $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$ en la norma $\|\cdot\|_{M_p}$. De la misma forma que probamos (6.14) obtenemos

$$\|\mathbf{d}^{-1}(a_n) - \mathbf{d}^{-1}(b_n)\| \leq C \|(W(a_n))^{-1} - (W(b_n))^{-1}\|,$$

para alguna constante $C < \infty$, y (6.11) nos permite pasar al límite cuando $n \rightarrow \infty$ para obtener

$$\|\mathbf{d}^{-1}(a) - \mathbf{d}^{-1}(b)\| \leq C \|(W(a))^{-1} - (W(b))^{-1}\| < C\epsilon.$$

Esto muestra que el mapeo $a \mapsto \mathbf{d}^{-1}(a)$ es continuo, lo que implica que el mapeo $a \mapsto \mathbf{d}(a)$ también es continuo. ■

6.3. Operadores de Wiener-Hopf con símbolos en SAP_p

A partir de esta sección consideraremos operadores de Wiener-Hopf en los espacios de Lebesgue $L_N^p(\mathbf{R}_+)$ sin pesos, es decir, con $w = 1$.

Lema 6.7 *Si $1 < p < \infty$ y el operador de Wiener-Hopf $W(a)$ con símbolo $a \in [SAP_p]_{N \times N}$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$, entonces cada uno de sus regularizadores $(W(a))^{(-1)}$ pertenece al álgebra de Banach $\text{alg } W([SAP_p]_{N \times N})$.*

Demostración. Aproximemos los operadores $W(a)$ por los operadores de Wiener-Hopf $W(a_k)$ con símbolos $a_k \in [SAP_p W]_{N \times N}$, donde $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a - a_k\|_{[M_p]_{N \times N}} = 0$ y el álgebra

no cerrada $[SAP_p W]_{N \times N}$ consta de todas las funciones matriciales en $[SAP_p]_{N \times N}$ con representaciones casi periódicas en $[APW]_{N \times N} \subset AP_p \subset M_p$. Tenemos que los operadores $W(a_k)$ son Fredholm en $L_N^p(\mathbf{R}_+)$ para k suficientemente grande. Por [14, Corolario 19.11], los operadores $W((a_k)_\pm)$, cuyos símbolos $(a_k)_\pm \in [APW]_{N \times N}$ son las representaciones casi periódicas de a_k en $\pm\infty$, son invertibles en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$, y además las funciones matriciales $(a_k)_\pm$ admiten factorizaciones canónicas APW que pueden escribirse en la forma

$$(a_k)_\pm = (a_k)_\pm^- \mathbf{d}((a_k)_\pm) (a_k)_\pm^+,$$

donde $M((a_k)_\pm^-) = M((a_k)_\pm^+) = I_N$ e I_N es la matriz identidad de $N \times N$.

Tomando en cuenta que $(a_k)_\pm^- \in G[APW^-]_{N \times N}$ y $(a_k)_\pm^+ \in G[APW^+]_{N \times N}$, siguiendo la demostración del Teorema 4.12, podemos construir funciones matriciales

$$f_k^\pm \in G[SAP_p]_{N \times N} \cap G[C_p(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,\pm}^\infty]_{N \times N} \quad (6.22)$$

tales que

$$(f_k^-)_\pm = (a_k)_\pm^-, \quad (f_k^+)_\pm = (a_k)_\pm^+.$$

Las funciones matriciales $b_k = (f_k^-)^{-1} a_k (f_k^+)^{-1}$ pertenecen a $[C_p(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$ y $b_k(\pm\infty) = \mathbf{d}((a_k)_\pm)$. Como las matrices a_k son invertibles en $[SAP_p]_{N \times N}$, deducimos que las funciones matriciales b_k son invertibles en $[C_p(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N}$. Más aún, en virtud de (6.22) y [14, Teorema 19.12],

$$W(a_k) = W(f_k^-)W(b_k)W(f_k^+) + K_k,$$

donde $W(f_k^\pm)$ son operadores Fredholm y K_k son operadores compactos en $L_N^p(\mathbf{R}_+)$. Por lo tanto, los operadores $W(b_k)$ son Fredholm al igual que los operadores $W(a_k)$.

Del Teorema 2.25 tenemos que los regularizadores $(W(b_k))^{(-1)}$ de $W(b_k)$ pertenecen al álgebra de Banach $\text{alg } W([C_p(\overline{\mathbf{R}})]_{N \times N})$. Por otra parte, debido a (6.22) los regularizadores $(W(f_k^\pm))^{(-1)}$ de $W(f_k^\pm)$ pertenecen al álgebra de Banach $\text{alg } W([SAP_p]_{N \times N})$. De aquí, los regularizadores

$$(W(a_k))^{(-1)} = (W(f_k^+))^{(-1)} (W(b_k))^{(-1)} (W(f_k^-))^{(-1)}$$

de los operadores $W(a_k)$ pertenecen al álgebra de Banach $\text{alg } W([SAP_p]_{N \times N})$. \blacksquare

Sea $N = 1$. Consideremos las siguientes subálgebras de Banach de $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+))$:

$$\mathcal{D} := \text{alg } \left\{ W(c) : c \in [SO_p, SAP_p] \right\}, \quad \mathcal{Z} := \text{alg } \left\{ W(c) : c \in SO_p \right\}.$$

Definamos $\Lambda = \Lambda(\mathcal{Z})$ como el subálgebra de Banach de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+))$, que consta de todos los operadores de tipo local con respecto a \mathcal{Z} , es decir,

$$\Lambda := \left\{ A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+)) : W(c)A - AW(c) \text{ es compacto en } L^p(\mathbf{R}_+), \forall c \in SO_p \right\}.$$

El álgebra de Banach $\Lambda^\pi = \Lambda/\mathcal{K}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}^\pi = \mathcal{B}/\mathcal{K}$, contiene al álgebra de Banach \mathcal{D}^π (ver [2, Teorema 4.2]), y \mathcal{Z}^π es un subálgebra central de Λ^π . Por lo tanto cada regularizador $A^{(-1)}$ de un operador Fredholm $A \in \Lambda$ pertenece al álgebra de Banach Λ .

Para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO)$, sea \tilde{J}_ξ^π el ideal bilateral cerrado más pequeño de Λ^π generado por el ideal bilateral I_ξ^π del álgebra \mathcal{Z}^π y sea Λ_ξ^π el álgebra cociente $\Lambda^\pi/\tilde{J}_\xi^\pi$.

Dado $\xi \in \mathcal{M}(SO)$, sea \widehat{J}_ξ^π el ideal bilateral cerrado más pequeño de \mathcal{D}^π que contiene al ideal maximal $I_\xi^\pi \subset \mathcal{Z}^\pi$. Claramente, $\widehat{J}_\xi^\pi \subset \widetilde{J}_\xi^\pi$. Sea $\mathcal{D}_\xi^\pi = \mathcal{D}^\pi / \widehat{J}_\xi^\pi$.

De acuerdo con el Teorema 2.25 a cada operador de Wiener-Hopf $W(a) \in \mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}_+))$ con símbolo $a \in C_p(\overline{\mathbf{R}})$ se le puede poner en correspondencia la función

$$\sigma_a(t, x) = \begin{cases} a(t), & \text{si } t \in \overline{\mathbf{R}}, x = \infty, \\ a_+(\xi) \frac{1 - \coth[\frac{\pi(x+i/p)]}{2}] + a_-(\xi) \frac{1 + \coth[\frac{\pi(x+i/p)]}{2}]}{2}, & \text{si } t = \infty, x \in \overline{\mathbf{R}}, \end{cases} \quad (6.23)$$

donde las funciones $t \mapsto a(t, \infty)$ y $x \mapsto a(\infty, x)$ pertenecen a $C_p(\overline{\mathbf{R}})$. El álgebra generada por tales funciones la denotamos por \mathfrak{B}_p . Es evidente que \mathfrak{B}_p es un álgebra de Banach con respecto a la norma

$$\|\sigma_a\| = \text{máx} \left\{ \|a(\cdot, \infty)\|_{C_p(\overline{\mathbf{R}})}, \|a(\infty, \cdot)\|_{C_p(\overline{\mathbf{R}})} \right\}.$$

De [70] y [16] se sigue que las álgebras de Banach $\text{alg } W^\pi(C_p(\overline{\mathbf{R}})) := \text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}})) / \mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+))$ y \mathfrak{B}_p son isomorfas. Por lo tanto a las funciones en \mathfrak{B}_p se les llama símbolos de los operadores $A \in \text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))$.

Teorema 6.8 Sean $a \in SAP_p$, $a_\pm \in AP_p$ sus representaciones casi periódicas en $\pm\infty$ y $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. Si los operadores de Wiener-Hopf $W(a_\pm)$ son invertibles en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$, entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- i) La clase lateral $\widetilde{W}_\xi^\pi(a) = W^\pi(a) + \widetilde{J}_\xi^\pi$ es invertible en el álgebra cociente Λ_ξ^π .
- ii) La clase lateral $W_\xi^\pi(a) = W^\pi(a) + \widehat{J}_\xi^\pi$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{D}_ξ^π .
- iii) Para cada $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{d}(a_+)P_+(x) + \mathbf{d}(a_-)P_-(x) \neq 0, \quad (6.24)$$

$$\text{donde } P_\pm(x) = \frac{1 \mp \coth[\frac{\pi(x+i/p)]}{2}}{2}.$$

Demostración.

iii) \Rightarrow ii). Si los operadores de Wiener-Hopf $W(a_\pm)$ son invertibles en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$, entonces las funciones casi periódicas a_\pm son invertibles en AP_p y $\mathbf{d}(a_\pm) \neq 0$ (ver, p. ej. el Teorema 3.14 y el Teorema 6.6 en el caso $N = 1$). De aquí, existe una función $b_0 \in C_p(\dot{\mathbf{R}})$ con $b_0(\infty) = 0$ tal que la función $a + b_0$ pertenece a $GSAP_p$. Por [14, Teorema 19.15], el operador de Wiener-Hopf $W(a + b_0)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$. Además, en virtud del Lema 6.7, cada regularizador $(W(a + b_0))^{(-1)}$ del operador $W(a + b_0)$ pertenece al álgebra de Banach $W(SAP_p)$ y por lo tanto la clase lateral $W^\pi(a + b_0) = W(a + b_0) + \mathcal{K}$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{D}^π . Entonces la clase lateral $W_\xi^\pi(a + b_0) = W^\pi(a + b_0) + \widehat{J}_\xi^\pi$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{D}_ξ^π . Sólo resta observar que $W_\xi^\pi(a + b_0) = W_\xi^\pi(a)$.

ii) \Rightarrow i). Es evidente.

i) \Rightarrow iii). Primero supongamos que $a_\pm \in APW$. Entonces la invertibilidad de los operadores $W(a_\pm)$ en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$ implica, debido al Teorema 8.11 en [14] (ver también el Corolario 3.16), que las funciones casi periódicas a_\pm admiten factorización canónica APW que podemos escribir en la forma $a_\pm = a_\pm^- \mathbf{d}(a_\pm) a_\pm^+$, donde $M(a_\pm^-) = M(a_\pm^+) = 1$.

Como $a_\pm^- \in GAPW^-$ y $a_\pm^+ \in GAPW^+$, análogamente a la demostración del Lema 6.7 existen funciones

$$f^\pm \in GSAP_p \cap G(C_p(\dot{\mathbf{R}}) + H_{p,\pm}^\infty)$$

tales que

$$(f^-)_{\pm} = a_{\pm}^-, \quad (f^+)_{\pm} = a_{\pm}^+, \quad a = f^- b f^+$$

donde $b \in C_p(\overline{\mathbf{R}})$ y $b(\pm\infty) = \mathbf{d}(a_{\pm})$. Por lo tanto

$$W(a) = W(f^-)W(b)W(f^+) + K,$$

donde los operadores $W(f^{\pm})$ son Fredholm, sus regularizadores tienen la forma $W((f^{\pm})^{-1})$, y $K \in \mathcal{K}$. De aquí

$$\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(a) = \widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(f^-)\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(b)\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(f^+),$$

donde las clases $\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(f^{\pm})$ son invertibles y $(\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(f^{\pm}))^{-1} = \widetilde{W}_{\xi}^{\pi}((f^{\pm})^{-1})$. Por lo tanto la clase lateral $\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(a) = W^{\pi}(a) + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}$ es invertible en el álgebra cociente Λ_{ξ}^{π} si y sólo si la clase lateral $\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(b) = W^{\pi}(b) + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}$ también es invertible en Λ_{ξ}^{π} .

Supongamos que la clase lateral $\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(b)$ es invertible en Λ_{ξ}^{π} pero (6.24) no se cumple, es decir, la función

$$\widetilde{b}(\infty, x) := \mathbf{d}(a_+)P_+(x) + \mathbf{d}(a_-)P_-(x)$$

se anula en algún punto $x_0 \in \mathbf{R}$. Como $\widetilde{b}(\infty, \cdot) \in C_p(\overline{\mathbf{R}})$, para cada $\tilde{\epsilon} > 0$ existe una función $\tilde{c} \in \mathfrak{B}_p$ con norma $\|\tilde{c}\|_{\mathfrak{B}_p} < \tilde{\epsilon}$ y un número $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{c}(t, \infty) = 0, \quad \forall t \in \overline{\mathbf{R}}, \quad \tilde{c}(\infty, x) = \widetilde{b}(\infty, x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (6.25)$$

De aquí, como las álgebras de Banach $\text{alg } W^{\pi}(C_p(\overline{\mathbf{R}})) := \text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))/\mathcal{K}(L^p(\mathbf{R}_+))$ y \mathfrak{B}_p son isomorfas, concluimos que para cada $\epsilon > 0$ existe un operador $A \in \text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))$ con símbolo $\tilde{c} \in \mathfrak{B}_p$ tal que $\|A^{\pi}\| < \epsilon$.

Por otra parte, como la clase lateral $\widetilde{W}_{\xi}^{\pi}(b) = \widetilde{W}^{\pi}(b) + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}$ es invertible en el álgebra cociente Λ_{ξ}^{π} , existe un $\epsilon > 0$ tal que la clase lateral $\widetilde{W}^{\pi}(b) - A^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}$ es invertible en Λ_{ξ}^{π} para cada $A^{\pi} \in \Lambda^{\pi}$ con $\|A^{\pi}\| < \epsilon$. Eligiendo este $\epsilon > 0$ y un operador $A \in \text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))$ con símbolo $\tilde{c} \in \mathfrak{B}_p$ que satisface (6.25), concluimos que la clase lateral $W^{\pi}(b) - A^{\pi}$ pertenece a $\text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))/\mathcal{K}$, su símbolo $\tilde{g} = \widetilde{b} - \tilde{c} \in \mathfrak{B}_p$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t, \infty) &= b(t) \quad \text{para } t \in \overline{\mathbf{R}} \\ \tilde{g}(\infty, x) &= \widetilde{b}(\infty, x) - \tilde{c}(\infty, x) \quad \text{para } x \in \overline{\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

y la clase lateral $\widetilde{W}^{\pi}(b) - A^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}$ es invertible en Λ_{ξ}^{π} . Por (6.25) y (6.26), $\tilde{g}(\infty, x) = 0$ para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Entonces existe una función $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{B}_p$ tal que $\tilde{\gamma}(\infty, x_0) \neq 0$, $\tilde{\gamma}(t, \infty) = 0$ para toda $t \in \overline{\mathbf{R}}$, y $\tilde{\gamma}(\infty, x) = 0$ para toda $x \in \overline{\mathbf{R}} \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Sea A_0 el operador en $\text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))$ con símbolo $\tilde{\gamma}$. Como $\tilde{\gamma}\tilde{g} = 0$ idénticamente en $(\overline{\mathbf{R}} \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \overline{\mathbf{R}})$, entonces $A_0^{\pi}(W^{\pi}(b) - A^{\pi}) = 0$. De aquí,

$$(A_0^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi})(W^{\pi}(b) - A^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}) = \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}. \quad (6.27)$$

Por otra parte, en vista de la invertibilidad de la clase lateral $W^{\pi}(b) - A^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}$ en Λ_{ξ}^{π} , existe un operador $B \in \Lambda$ tal que

$$(W^{\pi}(b) - A^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi})(B^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}) = I^{\pi} + \widetilde{J}_{\xi}^{\pi}. \quad (6.28)$$

De (6.27) y (6.28), obtenemos

$$\tilde{J}_\xi^\pi = (A_0^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi)(W^\pi(b) - A^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi)(B^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi) = A_0^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi,$$

lo que implica que $A_0^\pi \in \tilde{J}_\xi^\pi$. Pero $A_0 \in \text{alg } W(C_p(\overline{\mathbf{R}}))$ y su símbolo $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{B}_p$ no es cero en el punto (∞, x_0) . Entonces por analogía con la demostración del Lema 5.21 llegamos a una contradicción. Por lo tanto (6.24) se cumple, lo que prueba $i) \Rightarrow iii)$ cuando $a_\pm \in APW$.

Ahora supongamos que $a_\pm \in AP_p$. Ya que la invertibilidad de los operadores $W(a_\pm)$ en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$ y la invertibilidad de la clase $\tilde{W}_\xi^\pi(a) = W^\pi(a) + \tilde{J}_\xi^\pi$ en el álgebra cociente Λ_ξ^π son estables con respecto a pequeñas perturbaciones de un símbolo $a \in SAP_p$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{M_p}$, podemos encontrar una función $\hat{a} \in SAP_p W$ tal que la clase $\tilde{W}_\xi^\pi(\hat{a})$ es invertible en el álgebra cociente Λ_ξ^π , los operadores $W(\hat{a}_\pm)$ con representaciones casi periódicas $\hat{a}_\pm \in APW$ de \hat{a} en $\pm\infty$ son invertibles en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$, y $\mathbf{d}(\hat{a}_\pm) = \mathbf{d}(a_\pm)$. Se sigue del caso $a_\pm \in APW$, que (6.24) se cumple para toda $x \in \mathbf{R}$. ■

6.4. Criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos en $[SO_p, SAP_p]$

Teorema 6.9 *Sea $1 < p < \infty$. Si el operador de Wiener-Hopf $W(g)$ con símbolo $g \in D = [SO_p, SAP_p]$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$, entonces cada uno de sus regularizadores $(W(g))^{(-1)}$ pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{D} = \text{alg } W([SO_p, SAP_p])$.*

Demostración. Supongamos que el operador de Wiener-Hopf $W(g)$ con símbolo $g \in D$ es Fredholm en el espacio $L_N^p(\mathbf{R}_+)$. Como $W(g)$ es del tipo local con respecto a \mathcal{Z} , cada uno de sus regularizadores $(W(g))^{(-1)}$ pertenece al álgebra de Banach $\Lambda = \Lambda(\mathcal{Z})$. Aplicando el principio local de Allan-Douglas al álgebra de Banach Λ^π concluimos que las clases laterales $\tilde{W}_\xi^\pi(g) = W^\pi(g) + \tilde{J}_\xi^\pi$ son invertibles en Λ_ξ^π para todo $\xi \in \mathcal{M}(SO)$. Solo resta probar que la invertibilidad de la clase lateral $\tilde{W}_\xi^\pi(g) = W^\pi(g) + \tilde{J}_\xi^\pi$ en Λ_ξ^π implica la invertibilidad de la clase lateral $W_\xi^\pi(g) = W^\pi(g) + \hat{J}_\xi^\pi$ en el álgebra cociente $\mathcal{D}_\xi^\pi = \mathcal{D}^\pi / \hat{J}_\xi^\pi$ para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO)$. Aplicando entonces el principio local de Allan-Douglas al álgebra de Banach \mathcal{D}^π deduciremos la invertibilidad de la clase lateral $W^\pi(g)$ en \mathcal{D}^π de la invertibilidad de las clases laterales $W_\xi^\pi(g)$ en \mathcal{D}_ξ^π para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO)$, lo que completaría la demostración.

Estudiemos la invertibilidad de $\tilde{W}_\xi^\pi(g)$ en Λ_ξ^π para $\xi \in \mathcal{M}(SO)$, donde es conocido que $\mathcal{M}(SO) = \mathbf{R} \cup \mathcal{M}_\infty(SO)$.

Primero, sea $\xi \in \mathbf{R}$. Como la función matricial $g \in D$, es continua en \mathbf{R} , obtenemos

$$\tilde{W}_\xi^\pi(g) = \tilde{W}_\xi^\pi(g(\xi)) = W^\pi(g(\xi)) + \tilde{J}_\xi^\pi.$$

Por lo tanto, la invertibilidad de la clase lateral $\tilde{W}_\xi^\pi(g)$ en el álgebra cociente Λ_ξ^π es equivalente a la condición $g(\xi) \neq 0$, lo que implica la invertibilidad de la clase lateral

$$W_\xi^\pi(g) = W_\xi^\pi(g(\xi)) = W^\pi(g(\xi)) + \hat{J}_\xi^\pi \tag{6.29}$$

en el álgebra cociente \mathcal{D}_ξ^π .

Ahora supongamos que $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. Por (2.39), existe una función matricial $g_\xi \in SAP_p$, con representaciones casi periódicas $g_{\xi,\pm} \in AP_p$ únicamente determinadas tal que

$$\beta_\xi(g) = g_\xi|_{\mathcal{M}_\infty(SAP_p)}.$$

Como $\beta_\xi(g_\xi) = g_\xi|_{\mathcal{M}_\infty(SAP_p)}$, obtenemos $\beta_\xi(g - g_\xi) = 0$ y por lo tanto, de (2.41), $\nu_{\xi,\pm}(g - g_\xi) = 0$. Entonces de (2.43) se sigue que la clase lateral $W^\pi(g - g_\xi)$ pertenece a los ideales \widehat{J}_ξ^π y \widetilde{J}_ξ^π . Consecuentemente,

$$W_\xi^\pi(g) = W_\xi^\pi(g_\xi), \quad \widetilde{W}_\xi^\pi(g) = \widetilde{W}_\xi^\pi(g_\xi). \quad (6.30)$$

Como la clase lateral $\widetilde{W}_\xi^\pi(g)$ es invertible en Λ_ξ^π , también la clase $\widetilde{W}_\xi^\pi(g_\xi)$ es invertible en Λ_ξ^π debido a (6.30). Tomando en cuenta el hecho que si $W(g)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+)$ implica que $W(g_{\xi,\pm})$ son operadores invertibles debido al Teorema 6.5, se sigue de la implicación $i) \Rightarrow ii)$ del Teorema 6.8 que la clase lateral $W_\xi^\pi(g_\xi)$ es invertible en \mathcal{D}_ξ^π . Esto y (6.30) muestran que la clase lateral $W_\xi^\pi(g)$ también es invertible en \mathcal{D}_ξ^π .

Por lo tanto, para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO)$ las clases laterales $W_\xi^\pi(g)$ son invertibles en \mathcal{D}_ξ^π , lo que completa la demostración. \blacksquare

Teorema 6.10 Sean $1 < p < \infty$ y $g \in D = [SO_p, SAP_p]$. El operador de Wiener-Hopf $W(g)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- i)* $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$;
- ii)* para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los operadores $W(g_{\xi,\pm})$ con símbolos casi periódicos $g_{\xi,\pm} = \nu_{\xi,\pm}(g)$ son invertibles en el espacio $L^p(\mathbf{R}_+)$;
- iii)* para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, el valor $\eta_\xi := \mathbf{d}^{-1}(g_{\xi,+})\mathbf{d}(g_{\xi,-})$ satisface la condición

$$\left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \eta_\xi \right\} \neq 0. \quad (6.31)$$

Demostración. Supongamos que las condiciones *i)*, *ii)* y *iii)* se cumplen. Sea $g \in D$. Por el principio local de Allan-Douglas, el operador $W(g)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+)$ si la clase lateral $W_\xi^\pi(g)$ es invertible en \mathcal{D}_ξ^π , para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO)$. Así que vamos a estudiar la invertibilidad de $W_\xi^\pi(g)$ con $\xi \in \mathcal{M}(SO) = \mathbf{R} \cup \mathcal{M}_\infty(SO)$.

Primero, sea $\xi \in \mathbf{R}$. Como la función g es continua en \mathbf{R} , tenemos (6.29). Por lo tanto, la invertibilidad de la clase lateral anterior en el álgebra local \mathcal{D}_ξ^π es equivalente a la condición *i)* del teorema.

Ahora supongamos que $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. Por (2.39), para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$ existe una función $g_\xi \in SAP_p$, no única, con representaciones casi periódicas $g_{\xi,\pm} \in AP_p$ únicamente determinadas tal que $\beta_\xi(g - g_\xi) = 0$. Por lo tanto, de acuerdo con (6.30), $W_\xi^\pi(g) = W_\xi^\pi(g_\xi)$. Por (3.2),

$$g_\xi = g_{\xi,+}u_+ + g_{\xi,-}u_- + g_{\xi,0}, \quad (6.32)$$

donde las funciones $u_\pm \in C_p(\overline{\mathbf{R}})$ están dadas por $u_\pm(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \tanh x)$ y

$$g_{\xi,\pm} \in AP_p, \quad g_{\xi,0} \in C_p(\dot{\mathbf{R}}), \quad g_{\xi,0}(\infty) = 0.$$

Claramente, siempre podemos seleccionar $g_{\xi,0}$ tal que $g_\xi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Más aún, por las condiciones *ii)* y *iii)* del teorema, los operadores $W(g_{\xi,\pm})$ son invertibles en $L^p(\mathbf{R}_+)$ y el valor $\eta_\xi = \mathbf{d}^{-1}(g_{\xi,+})\mathbf{d}(g_{\xi,-})$ satisface (6.31). Entonces, del Teorema 19.15 en [14] se sigue que el operador $W(g_\xi)$ es Fredholm. Ya que, en virtud del Lema 6.7, cada regularizador $(W(g_\xi))^{(-1)}$ de $W(g_\xi)$ pertenece al álgebra de Banach $\text{alg } W(SAP_p) \subset \mathcal{D}$, deducimos que la clase lateral $W_\xi^\pi(g_\xi)$ es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{D}_\xi^\pi = \mathcal{D}^\pi / \widehat{J}_\xi^\pi$ para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. Esto implica

la invertibilidad de $W_\xi^\pi(g) = W_\xi^\pi(g_\xi)$ para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. De aquí, por el principio local de Allan-Douglas, el operador $W(g)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+)$.

Inversamente, si el operador $W(g)$ es Fredholm en $L^p(\mathbf{R}_+)$, entonces del Lema 6.4 y el Teorema 6.5, se sigue que para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los operadores $W(g_{\xi,\pm})$ son invertibles en $L^p(\mathbf{R}_+)$. Esto da la condición *ii*) para cada $p \in (1, \infty)$ e implica la invertibilidad en AP_p de las funciones $g_{\xi,\pm}$. Es bien sabido (p. ej. es suficiente aplicar el principio local de Allan-Douglas para $x \in \mathbf{R}$) que el hecho que $W(g)$ sea Fredholm implica *i*). Además, por el Teorema 6.9, cada regularizador del operador $W(g)$ pertenece al álgebra de Banach \mathcal{D} , esto es, la clase lateral $W^\pi(g)$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{D}^π . Fijemos $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$. Construyendo una función invertible $g_\xi \in SAP_p$ de las funciones invertibles $g_{\xi,\pm} \in AP_p$ dadas y tomando en cuenta el hecho que en vista de la invertibilidad de la clase lateral $W^\pi(g)$ en \mathcal{D}^π , la clase lateral $W_\xi^\pi(g_\xi) = W_\xi^\pi(g)$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{D}_ξ^π , deducimos del Teorema 6.8 que

$$\mathbf{d}(g_{\xi,+}) \frac{1 - \coth[\pi(x + i/p)]}{2} + \mathbf{d}(g_{\xi,-}) \frac{1 + \coth[\pi(x + i/p)]}{2} \neq 0 \quad (6.33)$$

para cada $x \in \mathbf{R}$. Sólo resta observar que (6.33) es equivalente a la condición *iii*) del teorema. ■

6.5. Propiedad de Fredholm y factorización AP generalizada

Recordemos que AP^0 es el conjunto de los polinomios casi periódicos en \mathbf{R} . El *espacio de Besicovitch* B^2 es definido como la completación de AP^0 con respecto a la norma

$$\|f\|_{B^2} := \left(\sum_{\lambda} |f_\lambda|^2 \right)^{1/2} = (M(|f|^2))^{1/2}$$

donde $f = \sum_{\lambda} f_\lambda e_\lambda \in AP^0$. Hemos visto que AP puede ser identificado con $C(\mathbf{R}_B)$. También se puede probar que B^2 puede ser identificado con $L^2(\mathbf{R}_B, d\mu)$, donde $\mathbf{R}_B = (\mathbf{R}_d^*)^*$ es la compactificación de Bohr de \mathbf{R} y μ es la medida de Haar normalizada en \mathbf{R}_B . Como $\mu(\mathbf{R}_B) = 1$ es finita, tenemos que $AP \subset B^2$. Más aún, AP es un subconjunto denso de B^2 .

La desigualdad de Cauchy-Schwarz muestra que el valor principal

$$M(f) := \int_{\mathbf{R}_B} f(\xi) d\mu(\xi)$$

existe y es finita para cada $f \in B^2$. El conjunto

$$\Omega(f) := \{\lambda \in \mathbf{R} : M(fe_{-\lambda}) \neq 0\}$$

es llamado el espectro de Bohr-Fourier de f y puede mostrarse que es a lo más numerable y

$$\|f\|_{B^2}^2 = \sum_{\lambda \in \Omega(f)} |M(fe_{-\lambda})|^2$$

para cada $f \in B^2$.

Sea $l^2(\mathbf{R})$ la colección de todas las funciones $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ para las cuales el conjunto $\{\lambda \in \mathbf{C} : f(\lambda) \neq 0\}$ es a lo más numerable y

$$\|f\|_{l^2(\mathbf{R})}^2 := \sum |f(\lambda)|^2 < \infty.$$

El mapeo $\mathcal{F}_B : l^2(\mathbf{R}) \rightarrow B^2$ que manda una función $f \in l^2(\mathbf{R})$ con soporte finito a la función

$$(\mathcal{F}_B f)(x) = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} f(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad x \in \mathbf{R},$$

puede ser extendido por continuidad a todo $l^2(\mathbf{R})$. Nos referimos a el como la transformada de Bohr-Fourier. La inversa de la transformada de Bohr-Fourier actúa por la regla

$$\mathcal{F}_B^{-1} : B^2 \rightarrow l^2(\mathbf{R}), \quad (\mathcal{F}_B^{-1} f)(\lambda) = M(fe_{-\lambda}), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Definimos $\tilde{P} := \mathcal{F}_B \chi_+ \mathcal{F}_B^{-1}$ y $\tilde{Q} := \mathcal{F}_B \chi_- \mathcal{F}_B^{-1}$. Estas son dos proyecciones en el espacio de Besicovitch B^2 .

Definición 6.11 Una factorización AP derecha generalizada de una función matricial a en $GAP_{N \times N}$ es una representación

$$a = a_- d a_+ \tag{6.34}$$

donde $d = \text{diag}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_N})$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbf{R}$ y

$$a_- \in G[B_-^2]_{N \times N}, \quad a_+ \in G[B_+^2]_{N \times N}, \quad a_- \tilde{P} a_-^{-1} I \in \mathcal{B}(B_N^2).$$

Llamamos a los números λ_j , los AP índices derechos. De [14, Teorema 21.2], los AP índices derechos existen y están bien definidos para cada función matricial en $GAP_{N \times N}$ que admite una factorización AP derecha generalizada.

Una factorización AP derecha generalizada será llamada factorización AP canónica derecha generalizada si los AP índices derechos son todos cero. En [14] podemos encontrar el siguiente teorema.

Teorema 6.12 Sea $a \in AP_{N \times N}$. Entonces a tiene factorización AP canónica derecha generalizada si y sólo si el operador $W(a)$ es invertible en $L_N^2(\mathbf{R}_+)$.

Sean $P : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow H_+^2$ la proyección dada por (2.13) y H_+^2 el espacio de Hardy de funciones analíticas en el semiplano $\{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$ (aquí, como siempre, identificamos $PL^2(\mathbf{R})$ y H_+^2). Ya que los operadores de Wiener-Hopf $W(a) \in \mathcal{B}(L_N^2(\mathbf{R}_+))$ y de Toeplitz $T(a) = PaP \in \mathcal{B}(H_N^2)$ son débilmente Φ -equivalentes de acuerdo con (2.12), del Teorema 11 en [6] obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.13 Sea $g \in [SO, SAP]_{N \times N}$, y $n \geq 1$. El operador $W(g)$ es Fredholm en $L_N^2(\mathbf{R}_+)$ si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen:

- i) $\det g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$;
- ii) para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, las funciones matriciales casi periódicas $g_{\xi, \pm} = \nu_{\xi, \pm}(g)$ admiten factorizaciones AP canónicas generalizadas;
- iii) para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los valores propios η_j^ξ (con $j = 1, \dots, N$) de la matriz $\mathbf{d}^{-1}(g_{\xi, +})\mathbf{d}(g_{\xi, -})$ están en $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Para el caso escalar $N = 1$, el Teorema 6.13 se puede simplificar. Si $a \in GAP$, entonces el número $\kappa(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{-1} \arg a(x)]$, donde $\arg a$ es cualquier rama continua del argumento, es la moción media de a . Si $\kappa(a) = 0$, entonces la media geométrica de a puede ser calculada por $\mathbf{d}(a) = \exp M(\log a)$, donde $\log a \in AP$ es alguna función para la cual $a = \exp(\log a)$ y $M(\log a)$ es el valor principal de Bohr de $\log a$.

Teorema 6.14 Sean $1 < p < \infty$ y $g \in [SO, SAP]$. El operador $W(g)$ es Fredholm en $L^2(\mathbf{R}_+)$ si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

- i) $\inf\{|g(x)| : x \in \mathbf{R}\} \neq 0$;
- ii) para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, las funciones casi periódicas $g_{\xi, \pm} = \nu_{\xi, \pm}(g)$ tienen moción media cero;
- iii) para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, $\mathbf{d}^{-1}(g_{\xi, +})\mathbf{d}(g_{\xi, -}) \notin (-\infty, 0]$.

Demostración. Por la condición i), $g_{\xi, \pm} \in GAP$. Como la invertibilidad de los operadores $W(g_{\xi, \pm})$ en ese caso es equivalente a la condición ii) (ver, por ejemplo [14, Teorema 2.28]), inmediatamente se deduce el teorema del Teorema 6.10. ■

6.6. Operadores de convolución con símbolos en $[SO, SAP]$ sobre la unión finita de intervalos

Sea $J = \bigcup_{m=1}^N J_m$, donde J_m son intervalos de \mathbf{R} que pueden tener sólo extremos en común. Consideremos el operador del tipo de convolución

$$W : L^2(J) \rightarrow L^2(J), \quad f \mapsto r_J \left(\sum_{m=1}^N k_m * (\chi_{J_m} f) \right) \quad (6.35)$$

donde k_m son distribuciones tales que $g_m = \mathcal{F}k_m \in L_\infty(\mathbf{R})$, r_J es el operador de restricción sobre J , y $f \in L^2(J)$ es extendida por cero a $\mathbf{R} \setminus J$. Supongamos ahora que J_m , $m = 1, 2, \dots, N$, son los intervalos $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, \dots , $[a_{N-1}, a_N]$, respectivamente, donde $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N < \infty$.

Para $g_1, \dots, g_N \in [SO, SAP]$ definamos $g \in [SO, SAP]_{n \times n}$, con $n = N + 1$, por

$$g = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\gamma_N} & 0 \\ g_1 & g_2 e_{\varepsilon_1} & \dots & g_N e_{\varepsilon_{N-1}} & e_{\varepsilon_N} \end{bmatrix},$$

$$\gamma_m = a_m - a_{m-1}, \quad \varepsilon_m = \gamma_1 + \dots + \gamma_m \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

y e_γ ($\gamma \in \mathbf{R}$) es la función dada por $e_\gamma(\xi) = e^{i\gamma\xi}$, $\xi \in \mathbf{R}$.

Del Corolario 4.26 y el Teorema 6.13 se deduce el siguiente teorema.

Teorema 6.15 Sean $g_1, \dots, g_N \in [SO, SAP]$. El operador de convolución W_J definido por (6.35) es Fredholm si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- i) $\det g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$;

ii) para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los operadores $W(g_{\xi,\pm})$ con los símbolos casi periódicos $g_{\xi,\pm} = \nu_{\xi,\pm}(g)$ son invertibles en el espacio $L_n^2(\mathbf{R}_+)$;

iii) para cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO)$, los valores propios η_j^ξ (con $j = 1, \dots, n$) de la matriz $\mathbf{d}^{-1}(g_{\xi,+})\mathbf{d}(g_{\xi,-})$ satisfacen la condición

$$\left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arg \eta_j^\xi \right\} \neq 0.$$

Referencias

- [1] J. Alvarez, C. Pérez: Estimates with A_∞ weights for various singular integral operators. *Boll. Un. Mat. Ital.* (7) 8-A (1994), 123–133.
- [2] M. A. Bastos, A. Bravo, Yu. I. Karlovich: Convolution type operators with symbols generated by slowly oscillating and piecewise continuous matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications* **147** (2004), 151–174.
- [3] M. A. Bastos, A. Bravo, Yu. I. Karlovich: Symbol calculus and Fredholmness for a Banach algebra of convolution type operators with slowly oscillating and piecewise continuous data. *Math. Nachrichten* **269–270**, (2004), 11–38.
- [4] M. A. Bastos, Yu. I. Karlovich, A. F. dos Santos: The invertibility of convolution type operators on a union of intervals and the corona theorem. *Integral Equations and Operator Theory* **42** (2002), 22–56.
- [5] M. A. Bastos, Yu. I. Karlovich, A. F. dos Santos: Oscillatory Riemann-Hilbert problems and the corona theorem. *J. Functional Analysis* **197** (2003), 347–397.
- [6] M. A. Bastos, Yu. I. Karlovich, B. Silbermann: Toeplitz operators with symbols generated by slowly oscillating and semi-almost periodic matrix functions. *Proc. London Math. Soc.* **89** (2004), 697–737.
- [7] M. A. Bastos, A. F. dos Santos, R. V. Duduchava: Finite interval convolution operators on the Bessel potential spaces H_p^s . *Math. Nachrichten* **173** (1995), 49–63.
- [8] S. Bochner, R. S. Phillips: Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings. *Ann. of Math.* **43** (1942), 409–418.
- [9] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich: *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*. Progress in Mathematics **154**, Birkhäuser, Basel 1997.
- [10] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, V. S. Rabinovich: Mellin pseudodifferential operators with slowly varying symbols and singular integrals on Carleson curves with Muckenhoupt weights. *Manuscripta Mathematica* **95** (1998), 363–376.
- [11] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, V. S. Rabinovich: The method of limit operators for one-dimensional integrals with slowly oscillating data. *J. Operator Theory* **43** (2000), 171–198.

- [12] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: Toeplitz operators with semi-almost periodic symbols on spaces with Muckenhoupt weight. *Integral Equations and Operator Theory* **18** (1994), 261–276.
- [13] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: Toeplitz operators with semi-almost periodic matrix symbols on Hardy spaces. *Acta Applicandae Mathematica* **65** (2001), No. 1–3, 115–136.
- [14] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 2002.
- [15] A. Böttcher, B. Silbermann: *Analysis of Toeplitz Operators*. 2da ed. Springer, Berlin, 2006.
- [16] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky: Wiener-Hopf integral operators with PC symbols on spaces with Muckenhoupt weight. *Revista Matemática Iberoamericana* **9** (1993), 257–279.
- [17] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky: Pseudodifferential operators with heavy spectrum. *Integral Equations and Operator Theory* **19** (1994), 251–269.
- [18] L. Coburn, R. G. Douglas: Translation operators on the half-line. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **62** (1969), 1010–1013.
- [19] R. R. Coifman, G. Weiss: *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*. Lecture Notes Math., Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [20] H. O. Cordes: *Elliptic Pseudo-Differential Operators - An Abstract Theory*. Lect. Notes. in Math. **756**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [21] R. V. Duduchava: Wiener-Hopf integral operators with discontinuous symbols. *Soviet Math. Dokl.* **14** (1973), 1001–1005.
- [22] R. V. Duduchava: Integral operators of convolution type with discontinuous coefficients. *Math. Nachr.* **79** (1977), 75–98 [Ruso].
- [23] R. V. Duduchava: *Integral equations with fixed singularities*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979.
- [24] R. V. Duduchava, A. I. Saginashvili: Convolution integral equations on a half-line with semi-almost-periodic presymbols. *Differential Equations* **17** (1981), 207–216.
- [25] E. M. Dynkin: *Methods of the theory of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory*. (Commutative Harmonic Analysis I: General Surveys, Classical Results. Eds. V. P. Khavin, N. K. Nikol'skiy. Encyclopedia of Mathematical Sciences 15, Springer, Berlin, 1991; original en Ruso, VINITI, Moscow, 1987).
- [26] M. P. Ganin: On a Fredholm integral equation whose kernel depends on the difference of the arguments. *Izv. Vys. Uchebn. Zaved. Matematika* **2/1963** (1963), 31–43 [Ruso].
- [27] J. B. Garnett: *Bounded Analytic Functions*. Academic Press, New York 1981.
- [28] I.M. Gelfand, D.A. Raikov, G.E. Shilov: *Commutative Normed Rings*. Fizmatgiz, Moscow, 1960 (Ruso). Traducción en Inglés.: Chelsea, NY, 1964.

- [29] I. Gohberg, I. A. Feldman: Wiener-Hopf integro-difference equations. *Soviet Math. Dokl.* **9** (1968), 1312–1316.
- [30] I. Gohberg, I. A. Feldman: Integro-difference Wiener-Hopf equations. *Acta Sci. Math. Szeged* **30** (1969), 199–224 [Ruso].
- [31] I. Gohberg, I. A. Feldman: *Convolution Equations and Projection Methods for Their Solutions*. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1974.
- [32] I. Gohberg, M. G. Krein: Systems of integral equations on a half line with kernel depending on the difference of arguments. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **14** (1960), 217–286.
- [33] I. Gohberg, N. Krupnik: Systems of singular integral equations in weighted L^p spaces. *Soviet Math. Dokl.* **10** (1969), 688–691.
- [34] I. Gohberg, N. Krupnik: Singular integral operators with piecewise continuous coefficients and their symbols. *Math. USSR-Izv.* **5** (1971), 955–979.
- [35] I. Gohberg, N. Krupnik: *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations*, Vols. 1 and 2. Birkhäuser, Basel 1992. Original en Ruso: Shtiintsa, Kishinev, 1973).
- [36] L. Hörmander: Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Math.* **104** (1960), 93–140.
- [37] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden: Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227–251.
- [38] J.-L. Journé, *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderón*. Lect. Notes in Math. **994** Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [39] Yu. I. Karlovich: On the Haseman problem. *Demonstratio Mathematica* **26** (1993), No. 3–4, 581–595.
- [40] Yu. I. Karlovich: An algebra of pseudodifferential operators with slowly oscillating symbols. *Proc. London Math. Soc. (3)* **92** (2006), 713–761.
- [41] Yu. I. Karlovich: Pseudodifferential operators with compound slowly oscillating symbols. *Operator Theory: Advances and Applications* **171** (2006), 189–224.
- [42] Yu. I. Karlovich, J. Loreto Hernández: Wiener-Hopf operators with semi-almost periodic matrix symbols on weighted Lebesgue spaces. *Integral Equations and Operator Theory* **62** (2008), 85–128.
- [43] Yu. I. Karlovich, J. Loreto Hernández: Wiener-Hopf operators with slowly oscillating matrix symbols on weighted Lebesgue spaces. *Integral Equations and Operator Theory*.
- [44] Yu. I. Karlovich, E. Ramírez de Arellano: Singular integral operators with fixed singularities on weighted Lebesgue spaces. *Integral Equations and Operator Theory* **48**, 2004, No. 3, 331–363.

- [45] Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: Factorization of almost periodic matrix-valued functions and the Noether theory for certain classes of equations of convolution type. *Math. USSR Izvestiya* **34** (1990), No. 2, 281–316.
- [46] Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: (Semi)-Fredholmness of convolution operators on the spaces of Bessel potentials. *Operator Theory: Advances and Applications* **71** (1994), 122–152.
- [47] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: *Elements of Function Theory and Functional Analysis*. Nauka, Moscow, 1972 [Ruso].
- [48] M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko, E. I. Pustynnik, P. E. Sobolevskii: *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*. Nauka, Moscow, 1966. Traducción Ingles: I. P. Noordhoff, Leyden 1976.
- [49] M. G. Krein: Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **22** (1962), 163–288.
- [50] S. G. Krein: *Linear Equations in Banach Spaces*. Birkhäuser, Boston 1982. Original en Ruso: GITTL, Moscow 1956.
- [51] B. V. Lange, V. S. Rabinovich: Pseudo-differential operators on \mathbb{R}^n and limit operators. *Math. USSR Sbornik* **57** (1987). No. 1, 183–194.
- [52] B. Ja. Levin: *Distribution of Zeros of Entire Functions*. AMS, Providence, RI, 1980.
- [53] E. Meister, K. Rottbrand, F.-O. Speck: Wiener-Hopf equations for waves scattered by a system of parallel Sommerfeld half-planes. *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **14** (1991), 525–538.
- [54] M. A. Naimark: *Normed Algebras*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands 1972.
- [55] V. Yu. Novokshenov: Equations in convolutions on a finite interval and factorization of elliptic matrices. *Math. Notes* **27** (1980), 449–455.
- [56] B. V. Pal'cev: A generalization of the Wiener-Hopf method for convolution equations on a finite interval with symbols having powerlike asymptotics at infinity *Math. USSR-Sb.* **16** (1982), 289–328.
- [57] V. Petkova: Symbole d'un multiplicateur sur $L^2_\omega(\mathbb{R})$. *Bull. Sci. Math.* **128** (2004), 391–415.
- [58] V. Petkova: Wiener-Hopf operators on $L^2_\omega(\mathbb{R}^+)$. *Arch. Math.* **84** (2005), 311–324.
- [59] Ch. Pommerenke: *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Springer, Berlin, 1992.
- [60] S. C. Power: Fredholm Toeplitz operators and slow oscillation. *Can. J. Math.* **32** (1980), 1058–1071.
- [61] I. I. Privalov: *Boundary Properties of Analytic Functions*. GITTL, Moscow, 1950 (Ruso).

- [62] S. Prössdorf: *Some Classes of Singular Equations*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1978.
- [63] V. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann: *Limit Operators and Their Applications in Operator Theory*, Birkhäuser, Basel. 2004.
- [64] S. Roch, B. Silbermann: *Algebras of Convolution Operators and Their Image in the Calkin Algebra*. Report R-Math-05/90, Akad. Wiss. DDR, Karl Weierstrass Institut f. Mathematik, Berlin 1990.
- [65] W. Rudin: *Functional Analysis*. Second ed., McGraw-Hill Inc., New York 1991.
- [66] L. A. Sakhnovich: *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1996.
- [67] D. Sarason: Approximation of piecewise continuous functions by quotients of bounded analytic functions. *Canad. J. Math.* **24** (1972), 642–657.
- [68] D. Sarason: Toeplitz operators with semi-almost periodic symbols. *Duke Math. J.* **44** (1977), 357–364.
- [69] R. Schneider: Integral equations with piecewise continuous coefficients in L^p spaces with weight. *J. Integral Equations* **9** (1985), 135–152.
- [70] I.B. Simonenko, Chin Ngok Min: *Local Method in the Theory of One-Dimensional Singular Integral Equations with Piecewise Continuous Coefficients. Noetherity*. University Press, Rostov on Don, 1986 [Ruso].
- [71] S. B. Stechkin: On bilinear forms. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **71** (1950), 237–240 [Ruso].
- [72] E. M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [73] E. M. Stein: *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [74] E. M. Stein, G. Weiss: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.
- [75] G. Szego: *Orthogonal Polynomials*. 4ta ed., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975.
- [76] M. E. Taylor: *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1981.
- [77] H. Widom: Wiener-Hopf integral equations. In: *The legacy of Norbert Wiener: A Centennial Symposium (Cambridge, MA 1994)*, pp. 391–405, Proc. Sympos. Pure Math. **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1997.
- [78] N. Wiener, E. Hopf: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl.* **30/32** (1931), 696–706.