



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA  
COMPUTACIÓN

VIGILANCIA EN GALERÍAS DE ARTE  
CURVILÍNEAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

JAVIER CANO VILA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE URRUTIA GALICIA

Ciudad Universitaria

Septiembre 2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mi abuelita Chía.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mis padres Pilar y Ricardo, por ser mis padres, y a mis abuelos Quino y Meche por que además de ser mis abuelos, son mis segundos padres.

Después quiero agradecer a Jorge, por que además de haberme brindado el placer de trabajar con el, además de haber aceptado dirigir esta tesis (cosas que evidentemente agradezco un montón), sobre todo le agradezco por haber abierto ese portal interdimensional que me permitió transportarme al maravilloso universo de las Matemáticas, universo del cual no planeo salir.

También quiero agradecer a Dolores, a Crevel y a Hernán por haber revisado detalladamente y con mucha paciencia esta tesis en busca de posibles errores de ortografía, gramática o coherencia, corrigiéndome donde fuera necesario; es claro que también agradezco su confianza y el trato amigable.

Por supuesto se agradece el apoyo moral incondicional de Sara y Nancy, por que desde siempre han estado *virtualmente* allí; a pesar del tiempo, la distancia y lo demás.

Además agradezco a la Flota Barbárica S.A de C.V. (Sociedad Alcohólica de Copa Variable) y a Hokum, por los cotorreos, por los buenos momentos, y también por los malos, ¿por qué no?

Claro que a mis compañeros de la Maestría: Mayra, Rosa, Lourdes, Joel y al tocayo, por compartir mucho o poco de su tiempo durante este viaje al que llamado estudios de maestría.

También agradezco a todo aquel que ya sea directa o indirectamente contribuyó en algo al desarrollo de esta tesis y que no haya mencionado ya.

Finalmente, y no por eso menos importante, a ti por tomarte el tiempo de leer este trabajo, espero te sea de utilidad. A todos **¡Muchas gracias!**

# Índice general

Agradecimientos	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría de gráficas</b>	<b>5</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	5
2.1.1. Grado de un vértice . . . . .	7
2.1.2. Caminos y ciclos . . . . .	8
2.2. Subgráficas . . . . .	9
2.3. Conexidad . . . . .	10
2.4. Tipos especiales de gráficas . . . . .	12
2.5. Emparejamientos . . . . .	16
2.5.1. Emparejamientos perfectos . . . . .	16
2.6. Coloraciones en vértices . . . . .	19
2.7. Planaridad . . . . .	19
2.7.1. Gráfica dual . . . . .	21
2.7.2. Gráficas geométricas . . . . .	22
<b>3. Galerías de arte e iluminación</b>	<b>23</b>
3.1. Terminología básica . . . . .	24
3.2. Variantes del problema . . . . .	25
3.2.1. Tipos de guardias . . . . .	25
3.2.2. Tipos de galerías . . . . .	26

---

3.3.	Algunos resultados . . . . .	27
3.3.1.	Galerías de arte tradicionales . . . . .	27
3.3.2.	Galerías ortogonales . . . . .	29
3.3.3.	Galerías con huecos . . . . .	30
3.3.4.	Iluminando familias de convexos . . . . .	33
3.3.5.	Iluminación con reflectores . . . . .	36
3.3.6.	Iluminación con módems . . . . .	40
3.3.7.	El jardín de esculturas . . . . .	42
<b>4.</b>	<b>Cuadrangulaciones</b>	<b>47</b>
4.1.	Cuadrangulando polígonos . . . . .	48
<b>5.</b>	<b>Galerías de arte curvilíneas</b>	<b>57</b>
5.1.	Introducción . . . . .	57
5.2.	Resultados anteriores . . . . .	59
5.2.1.	Puntos guardia en galerías arista-cóncavas . . . . .	59
5.2.2.	Guardias móviles en galerías arista-convexas . . . . .	62
5.3.	El polígono rectilíneo subyacente . . . . .	63
5.4.	Vértices guardia . . . . .	66
5.5.	Puntos guardia . . . . .	68
5.6.	Galerías pseudo-ortogonales . . . . .	74
	<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Supongamos que somos dueños de una galería de arte y que ésta contiene varias obras las cuales están valuadas en muchos millones de pesos, por lo que deseamos tener la seguridad de que nadie nos va a robar nuestras preciadas obras. Así que necesitamos contratar guardias que vigilen nuestra galería, sin embargo, después de haber adquirido dicha colección nuestro presupuesto se ha vuelto muy pequeño, y ya que los guardias cobran un salario nada despreciable, no podemos contratar muchos. Así que necesitamos la menor cantidad de guardias de forma que cualquier obra en nuestra galería esté vigilada por al menos un guardia.

Este problema es uno de los más antiguos y más estudiados en geometría computacional al cual se le conoce como: *El Problema de la Galería de Arte*. En la interpretación geométrica tradicional del problema, se representa a la galería como un polígono simple  $P$  y a los guardias como puntos en el interior de  $P$ . El problema consiste entonces en encontrar un conjunto de guardias  $G$ , de tal forma que cualquier punto  $p \in P$  sea visto por algún guardia  $g \in G$ . Decimos que  $g$  ve a  $p$  si el segmento  $[g, p]$  está contenido en  $P$ .

El primer resultado para este problema se remonta a la década de los setenta, cuando V. Chvátal [15] probó el famoso *Teorema de la Galería de Arte de Chvátal* el cual se enuncia a continuación:

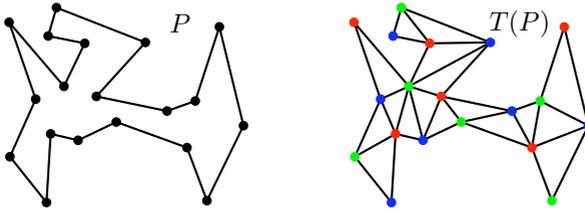


Figura 1.1: Un polígono  $P$  y una triangulación de  $P$  coloreada.

**Teorema 1.**  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un polígono simple  $P$  con  $n$  vértices

*Demostración.* Se sabe que podemos dividir el interior de  $P$  en triángulos con interiores ajenos cuyos vértices sean vértices de  $P$  y sus lados sean diagonales o aristas de  $P$ . Pintemos los vértices de  $P$  usando 3 colores, de tal forma que para cada par de vértices adyacentes en esta división tengan distinto color. Entonces por cada triángulo tendremos un vértice de cada color, como se muestra en la figura 1.1. Vemos que esta coloración define tres subconjuntos de los vértices de  $P$ . Es fácil ver que el subconjunto más pequeño tendrá a lo más  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  elementos, y colocando un guardia en cada uno de éstos  $P$  queda vigilado. Además siempre se puede construir un polígono con  $n$  lados que necesite este número de guardias para ser vigilado como el que se muestra en la figura 1.2.  $\square$

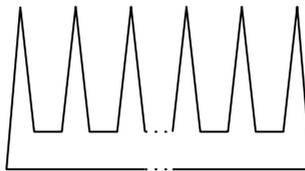


Figura 1.2: Polígono que necesita al menos  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias.

---

La demostración anterior fue dada por S. Fisk [34] la cual es menos compleja que la que dio originalmente Chvátal. Usando el algoritmo de Chazelle [12] que en tiempo lineal triangula un polígono simple, la prueba de Fisk induce de forma natural un algoritmo lineal que encuentra un conjunto de a lo más  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias, los cuales vigilan a  $P$ .

Tiempo después, Lee y Lin [46] probaron que el problema de encontrar el mínimo número de guardias que vigilen un polígono simple  $P$  dado, con la restricción de que los guardias se encuentren únicamente en los vértices es NP-duro. Más tarde Aggarwal [1] extendió el resultado de Lee y Lin permitiendo que los guardias sean colocados en cualquier parte del interior de  $P$ .

Estos resultados dieron pie a una gran cantidad de variantes al problema de la galería de arte, surgiendo así muchos resultados publicados en varios artículos. En particular, existen tres compendios dedicados a este problema y sus variantes [51, 55, 63].

El estudio de problemas relacionado con galerías de arte resulta ser de gran importancia, dado que se tiene una gran variedad de aplicaciones en distintas áreas de la computación, entre las cuales destacan: la robótica [45, 65], la planeación de movimiento [48, 50], el reconocimiento de patrones y la visión computacional [5, 57, 60, 66], la graficación por computadora [13, 49], el diseño asistido por computadora [11, 26], y las redes inalámbricas [27].

Recientemente Karavelas y Tsigaridas [42] propusieron una variante del problema en la cual las paredes de la galería  $P$  son arcos de curvas. Esta variante presenta distintos casos al imponer ciertas restricciones en la forma de las curvas. Sorprendentemente, para los casos en que todas las curvas o son convexas o cóncavas con respecto al interior de  $P$ , el número de guardias siempre suficientes para vigilar  $P$  es una función lineal del número de sus vértices.

En [42], Karavelas y Tsigaridas dan una cota justa cuando las paredes de  $P$  son cóncavas y en el caso cuando son convexas dan una cota holgada. Posteriormente, junto con Cs. D. Tóth [44], demuestran que la cota dada cuando las paredes de  $P$  son convexas es justa si se restringe a que los guardias estén sólo en los vértices de  $P$ ; sin embargo dejan abierta la cota

para cuando se relaja dicha restricción.

El resultado principal de la tesis es una mejora a la cota dada por Kavelas y Tsigaridas cuando se permite que los guardias estén en cualquier parte del interior de  $P$ . Este es un resultado interesante por si solo, dado que es la primera variante del problema de la Galería de Arte en la cual se conocen cotas distintas para puntos y vértices guardia.

Para el resultado principal de la tesis es necesario cuadrangular un polígono simple, esto es, dividir su interior en cuadriláteros con interiores ajenos, cuyos vértices serán vértices de  $P$  o puntos en el interior de  $P$ . Dado que no siempre es posible realizar esto de forma que todos los vértices de los cuadriláteros sean solamente vértices del polígono, como en las triangulaciones, en ocasiones es necesario añadir nuevos puntos denominados como *puntos Steiner*. Por esto, en el capítulo 4 se presenta un algoritmo que permite cuadrangular cualquier polígono simple con un número par de vértices usando una cantidad de puntos Steiner acotada por una función lineal del número de sus vértices. Además se demuestra que esta cota es justa, cerrando un problema abierto por Toussaint [53].

El resto de la tesis se encuentra organizado como sigue: en el capítulo 2 se darán definiciones básicas de teoría de gráficas que serán usadas a lo largo de la tesis; en el capítulo 3 se da una breve reseña de distintos resultados en algunas variantes del problema de la galería de arte; el capítulo 4 se presenta un algoritmo que nos permite cuadrangular cualquier polígono simple con un número par de vértices agregando pocos puntos Steiner; finalmente en el capítulo 5 se presentan resultados conocidos en galerías curvilíneas, al final del capítulo se presenta el resultado principal de la tesis.

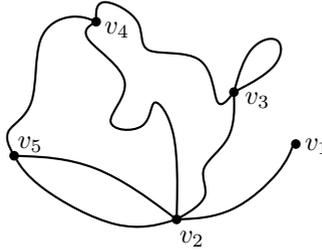
# Capítulo 2

## Teoría de gráficas

Muchas situaciones del mundo real pueden ser descritas a partir de un diagrama que consiste en un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen ciertos pares de estos puntos. Por ejemplo, los puntos pueden representar personas y las líneas parejas de amigos; o los puntos podrían representar estaciones de comunicación y las líneas los enlaces de comunicación entre ellos. Hay que notar que cómo se dibujen los puntos y las líneas es irrelevante, pues lo que se busca representar es cuales pares son unidos por una línea y cuales no. El tratar de abstraer matemáticamente este tipo de situaciones da pie al concepto de gráfica.

### 2.1. Definiciones básicas

Una *gráfica*  $G$  es una tupla  $(V, E)$  que consiste de un conjunto  $V$  de *vértices* y un conjunto  $E$ , ajeno de  $V$ , de *aristas*, junto con una *función de incidencia*  $\psi_G$  que asocia cada arista con un par de vértices de  $G$ . Si tenemos una arista  $e$  y un par de vértices  $u, v$ , tales que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , entonces se dice que  $e$  *une* a los vértices  $u$  y  $v$ , y que  $u$  y  $v$  son los extremos de  $e$ . Por simplicidad, usaremos  $uv$  para referirnos a una arista que une el par de vértices  $\{u, v\}$ .

Figura 2.1: Gráfica  $G$ .**Ejemplo 1.**

$$G = (V, E)$$

donde

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

y  $\psi_G$  se define por:

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2, \psi_G(e_2) = v_2v_3, \psi_G(e_3) = v_3v_3, \psi_G(e_4) = v_3v_4,$$

$$\psi_G(e_5) = v_2v_4, \psi_G(e_6) = v_4v_5, \psi_G(e_7) = v_2v_5, \psi_G(e_8) = v_5v_2.$$

Las gráficas reciben este nombre dado que pueden ser representadas gráficamente, y por medio de esta representación se pueden comprender fácilmente varias de sus propiedades. Cada vértice puede ser representado como un punto, y cada arista como una línea que conecta a los puntos que representan sus extremos. En la Figura 2.1 se muestra una forma en la que se podría dibujar la gráfica  $G$  del primer ejemplo.

No hay una forma única de dibujar una gráfica por que la posición relativa de los puntos que representan los vértices y la forma de las líneas que representan a las aristas no tienen ninguna relevancia. El diagrama de

una gráfica sólo sirve para representar las relaciones de *incidencia* entre sus vértices y aristas, aunque muchas veces nos referiremos a él como la gráfica misma y así también a las líneas del diagrama como sus aristas y a los puntos como sus vértices.

Se dice que los extremos de una arista son *incidentes* en la arista, así como la arista es incidente en sus extremos. Dos vértices incidentes en la misma arista decimos que son *adyacentes*, así como dos aristas incidentes en un mismo vértice. Dos vértices adyacentes también son llamados *vecinos*.

Cuando los extremos de una arista es solamente un vértice, diremos que la arista es un *lazo*. Cuando una arista no es un lazo, se le llama un *enlace*. Cuando dos enlaces distintos tienen los mismos extremos les llamaremos *aristas paralelas*.

Una gráfica es *simple* si no contiene lazos ni aristas paralelas. A partir de la siguiente sección y a lo largo de la tesis sólo se usarán gráficas simples por lo que al decir gráfica se refiere a una gráfica simple.

Se dice que dos gráficas  $G = (V_G, E_G)$  y  $H = (V_H, E_H)$  son *idénticas* si  $V_G = V_H$ ,  $E_G = E_H$  y  $\psi_G = \psi_H$ . Claramente dos gráficas idénticas pueden ser dibujadas de la misma forma. Existen gráficas que pueden ser representadas con el mismo diagrama y sin embargo no ser idénticas, tales gráficas son llamadas *isomorfas*. Formalmente,  $G$  y  $H$  son isomorfas si y sólo si existen las biyecciones  $\theta : V_G \rightarrow V_H$  y  $\phi : E_G \rightarrow E_H$ , tales que para  $\psi_G(e) = uv$  se tiene que:  $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ . Tal par  $(\theta, \phi)$ , es llamado un *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$ .

### 2.1.1. Grado de un vértice

El *grado* de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$  es denotado con  $d_G(v)$  y es el número de aristas en las que es incidente  $v$ , un lazo es considerado una doble incidencia. También denotamos el grado *máximo* y *mínimo* entre los grados de todos los vértices de una gráfica  $G$  por  $\Delta(G)$  y  $\delta(G)$  respectivamente. Cuando no haya lugar a confusión usaremos  $d(v)$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$  para simplificar.

**Teorema 2.** Dada una gráfica  $G = (V, E)$ :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

*Demostración.* Por definición cada lazo aporta dos al grado del vértice que tiene en sus extremo y las demás aristas aportan uno en cada uno de sus extremos, de esta forma vemos que cada aristas contribuye en 2 a la suma de los grados.  $\square$

**Corolario 1.** La cantidad de vértices con grado impar en una gráfica  $G$  cualquiera siempre es par.

*Demostración.* Sean  $V_1 \subset V$  los vértices de grado impar en  $G$  y  $V_2 \subset V$  los de grado par, tenemos que:

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

Claramente  $\sum_{v \in V_2} d(v)$  es par y por el teorema 2,  $\sum_{v \in V} d(v)$  es par, por tanto  $\sum_{v \in V_1} d(v)$  debe serlo también, lo cual sólo es posible si  $|V_1|$  es par.  $\square$

### 2.1.2. Caminos y ciclos

Un *camino* es una gráfica tal que sus vértices pueden ser ordenados en una secuencia lineal de tal forma que un par de vértices son adyacentes solamente si son consecutivos en la secuencia. Claramente en este tipo de gráficas cada vértice puede tener a lo más dos vecinos.

De igual forma se le llama *ciclo* a una gráfica tal que los vértices pueden ser ordenados en una secuencia cíclica de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en tal secuencia.

La *longitud* de un camino o un ciclo es definida como el número de aristas que lo forman. El camino de longitud  $k$  es llamado *k-camino*, así como el ciclo de longitud  $k$  es llamado *k-ciclo*. Un *k-ciclo* también es referido con el nombre del polígono con  $k$  lados.



Figura 2.2: (a) Camino de longitud 4. (b) Un pentágono, ciclo de longitud 5.

## 2.2. Subgráficas

Dadas dos gráficas  $G = (V_G, E_G)$  y  $H = (V_H, E_H)$ , se dice que  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  si,  $V_H \subseteq V_G$ ,  $E_H \subseteq E_G$  y se tiene que para una arista  $e \in E_H$ ,  $\psi_H(e) = \psi_G(e)$ . Si  $H$  es subgráfica de  $G$  entonces se dice que  $G$  es una *supergráfica* de  $H$ . Se dice que  $H$  es una *subgráfica generadora* de  $G$  si y sólo si  $V_H = V_G$ .

Consideremos la gráfica  $G = (V, E)$  y sea  $V'$  un subconjunto no vacío de  $V$ . La gráfica  $G'$  con conjunto de vértices  $V'$  y conjunto de aristas  $E' = \{uv \in E | u, v \in V'\}$ , es una subgráfica de  $G$  *inducida* por  $V'$  y será denotada por  $G[V']$ .

La gráfica generadora de  $G$  con aristas  $E \setminus E'$  será denotada con  $G - E'$ , así como la supergráfica con conjunto de aristas  $E \cup E'$  será denotada por  $G + E$ .

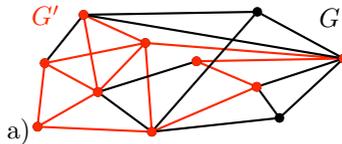


Figura 2.3: (a) Gráfica  $G$  y  $G'$  una subgráfica de  $G$ .



Figura 2.4: Unión de dos subgráficas de  $G$ .

Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  dos subgráficas de  $G$ . Decimos que  $G_1$  y  $G_2$  son *ajenas* si no tienen vértices en común. Si no tienen aristas en común se dice que son *ajenas por aristas* o por brevedad *arista-ajenas*. La *unión*  $G_1 \cup G_2$  de  $G_1$  y  $G_2$ , es la gráfica con conjunto de vértices  $V_1 \cup V_2$  y aristas  $E_1 \cup E_2$ . De manera similar se define a la *intersección*, con la condición de que  $G_1$  y  $G_2$  no pueden ser ajenas.

Si  $P$  es un camino y  $P$  es una subgráfica de  $G$ , entonces se dice que  $P$  es un camino en  $G$ . Sean  $u, v$  los extremos de un camino  $P$  en  $G$ , entonces puede decirse que  $P$  es un  $(u, v)$ -camino en  $G$ . De igual forma si una subgráfica  $C$  de  $G$  es un ciclo, se dice que  $C$  es un ciclo en  $G$ .

Sea  $P$  un  $(u, v)$ -camino en  $G$  y  $Q$  un  $(v, w)$ -camino en  $G$ , ajeno por aristas de  $P$ , y  $P \cap Q = \{v\}$ . La concatenación de  $P$  y  $Q$ ,  $PQ$ , es el  $(u, w)$ -camino resultante de  $P \cup Q$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$ . Definimos a  $d_G(u, v)$ , la distancia entre  $u$  y  $v$  en  $G$ , como la longitud del  $(u, v)$ -camino más corto en  $G$ . Si no existe tal camino  $d_G(u, v) = \infty$ . Por brevedad, al tratar con una única gráfica, nos referiremos a la distancia entre dos vértices como  $d(u, v)$ .

### 2.3. Conexidad

Dada una gráfica  $G = (V, E)$ , se dice que dos vértices  $u$  y  $v$  están conectados en  $G$  si y sólo si existe algún  $(u, v)$ -camino en  $G$ . La conexidad entre vértices define una relación de equivalencia en  $V$ , esto es, existe una división  $V_1, \dots, V_\omega$  de  $V$  tal que dos vértices  $u$  y  $v$  están conectados si y sólo si pertenecen al mismo subconjunto  $V_i$ . A las gráficas induci-

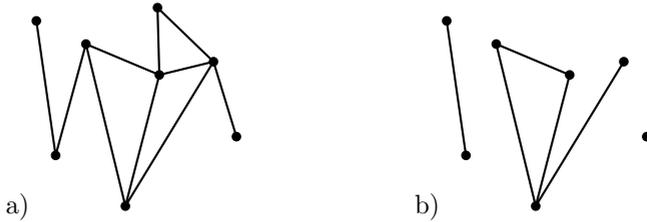


Figura 2.5: (a) Una gráfica conexa. (b) Una gráfica disconexa.

das  $G[V_1], \dots, G[V_\omega]$ , también llamadas *componentes conexas* de  $G$ . Si  $G$  tiene una única componente conexa, se dice que  $G$  es *conexa*, de otra forma se dice que es *disconexa*. El número de componentes conexas de  $G$  será denotado como  $\omega(G)$  y como  $\omega$  por simplicidad.

Dada una gráfica  $G = (V, E)$ , se dice que un vértice  $v \in V$  es un *vértice de corte* si y sólo si  $\omega(G) < \omega(G - v)$ , esto es, si al eliminar  $v$  junto con la aristas que inciden en él, el número de componentes conexas aumenta. De igual forma se dice que una arista  $e \in E$  es una *arista de corte* o *punte* si y sólo si  $\omega(G) < \omega(G - e)$ .

Dada una gráfica conexa  $G = (V, E)$ , un *corte por vértices* o *conjunto de corte* de  $G$ , es un subconjunto  $V' \subset V$ , tal que  $G - V'$  es disconexa. De igual forma un *corte por aristas* de  $G$  se define como un subconjunto

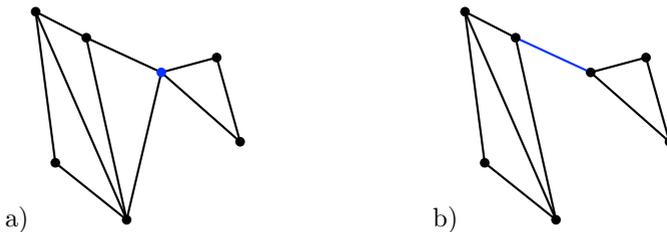


Figura 2.6: (a) Un vértice de corte. (b) Una arista de corte.

$E' \subset E$  de  $E$ , tal que  $G - E'$  es desconexa.

Dado  $V'$  un conjunto de corte de cardinalidad mínima de  $G$ , se dice que  $G$  es  $k$ -conexa para  $k = |V'|$ . De igual forma,  $G$  es  $k$ -conexa por aristas, si  $E'$  es un corte por aristas de cardinalidad mínima con  $k = |E'|$ .

## 2.4. Tipos especiales de gráficas

Existen diferentes tipos de gráficas que juegan papeles muy importantes en la teoría de gráficas, a continuación se mencionan algunas que serán usadas a lo largo de la tesis.

Una gráfica  $G = (V, E)$  se dice que es *completa*, si para cada par de vértices  $u, v \in V$  se tiene que  $uv \in E$ . Salvo isomorfismo, existe una única gráfica completa con  $n$  vértices, la gráfica completa con  $n$  vértices es denotada como  $K_n$ . En la Figura 2.7 se muestra la gráfica completa con cinco vértices.

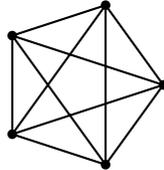


Figura 2.7:  $K_5$ .

Una gráfica  $G = (V, E)$  es una *gráfica bipartita* si y sólo si,  $V$  puede ser dividido en dos conjuntos ajenos  $X, Y$ , tales que para cualquier par de vértices  $u, v \in X$  o  $u, v \in Y$ , se tiene que  $uv \notin E$ . A la división  $(X, Y)$  se le llama bipartición.

**Teorema 3.** *Una gráfica es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Sea  $G = (V, E)$  una gráfica bipartita y  $(X, Y)$  su bipartición, y  $C = v_0v_1, \dots, v_kv_0$  un ciclo en  $G$ .

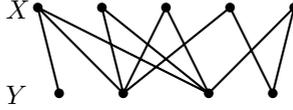


Figura 2.8: Gráfica bipartita.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $v_0 \in X$ , debido a que  $v_0v_1 \in E$  y dado que  $G$  es bipartita, entonces  $v_1 \in Y$ . En general tenemos que  $v_{2i} \in X$  y  $v_{2i+1} \in Y$ . Dado que  $v_kv_0 \in E$  tenemos que  $v_k \in Y$ , por tanto  $k = 2i + 1$  para algún valor de  $i$  y se sigue que  $C$  tiene longitud par.

Para demostrar la otra implicación basta con probarlo para gráficas conexas. Sea entonces  $G$  una gráfica conexa sin ciclos de longitud impar, para algún  $u \in V$  arbitrario, definimos la división  $(X, Y)$  como sigue:

$$X = \{x \in V \text{ tal que } d(x, u) \text{ es par}\}$$

$$Y = \{y \in V \text{ tal que } d(y, u) \text{ es impar}\}$$

Ahora veamos que  $(X, Y)$  es una bipartición de  $V$ . Sean  $v$  y  $w$  dos vértices de  $X$ ,  $P$  un  $(u, v)$ -camino de longitud mínima y  $Q$  un  $(u, w)$ -camino de longitud mínima. Sea  $u'$  el último vértice común en  $P$  y  $Q$ . Sea  $P'$  un  $(v, u')$ -camino de longitud mínima y  $Q'$  un  $(u', w)$ -camino de longitud mínima. Vemos que las longitudes de  $P'$  y  $Q'$  deben tener la misma paridad, por tanto al concatenar  $P'Q'$  obtenemos un camino de longitud par. Entonces tenemos que  $vw \in E$  implica que  $P'Q' \cup \{vw\}$  es un ciclo impar en  $G$ , contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto  $(X, Y)$  es una bipartición de  $V$ .  $\square$

Dada una gráfica  $G$  se dice que  $G$  es un *árbol* si y sólo si  $G$  es conexa y no tiene ciclos. Los siguientes teoremas enuncian algunas propiedades de los árboles.

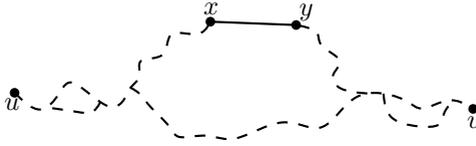


Figura 2.9: Ilustración de la prueba del teorema 4.

**Teorema 4.** *Sea  $G = (V, E)$  un árbol, entonces para cualesquiera 2 vértices  $u, v \in V$ , existe un único camino que los une.*

*Demostración.* Dado que todo árbol es conexo, existe al menos un  $(u, v)$ -camino. Supongamos que existe más de un  $(u, v)$ -camino y sean  $P_1$  y  $P_2$  dos de estos caminos. Dado que  $P_1 \neq P_2$  existe al menos una arista  $xy \in P_1$  tal que  $xy \notin P_2$ , Figura 2.9. Claramente  $(P_1 \cup P_2) - xy$  es conexa, por lo que existe un  $(x, y)$ -camino, sea  $P$  tal camino, entonces  $P \cup \{xy\}$  forma un ciclo, contradiciendo la hipótesis de que  $G$  es un árbol.  $\square$

**Teorema 5.** *Si  $G = (V, E)$  es un árbol, entonces  $|E| = |V| - 1$ .*

*Demostración.* Por inducción en  $|V|$ . Supongamos que  $|V| = 1$ , claramente  $|E| = 0 = |V| - 1$ .

Supongamos que el teorema es cierto para todo árbol con menos de  $|V|$  vértices con  $|V| \geq 2$ . Tomemos la arista  $uv \in E$ , por el teorema anterior  $G - uv$  es disconexa dado que no existe otro  $(u, v)$ -camino, y  $\omega(G - uv) = 2$ , sean  $H_1 = (V_1, E_1)$  y  $H_2 = (V_2, E_2)$  tales componentes. Vemos que las dos son acíclicas y por tanto árboles con menos de  $|V|$  vértices. Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que:

$$|E_i| = |V_i| - 1 \text{ para } i = 1, 2$$

y además sabemos que:

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 \text{ y } |V| = |V_1| + |V_2|$$

por lo tanto:

$$|E| = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = |V| - 1.$$

□

**Teorema 6.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a)  $G$  es conexa con  $|E| = |V| - 1$ .

b)  $G$  es acíclica con  $|E| = |V| - 1$ .

c)  $G$  es un árbol.

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b): Supongamos que  $G$  no es acíclica. Entonces  $G$  tiene un ciclo, y éste contiene  $k$  vértices  $v_1, \dots, v_k$ , sea  $G_k = (V_k, E_k)$  la subgráfica de  $G$  que forma tal ciclo. Es claro que  $G_k$  tiene exactamente  $k$  aristas. Si  $k < |V|$ , debido a que  $G$  es conexa existe un vértice  $u \in V$  adyacente a algún  $v_i \in V_k$ . Sea  $G_{k+1}$  la subgráfica de  $G$  con vértices  $V_{k+1} = V_k \cup \{u\}$  y aristas  $E_{k+1} = E_k \cup \{v_i u\}$ , claramente  $G_{k+1}$  tiene  $k + 1$  aristas. De esta forma podemos proseguir hasta obtener  $G_{|V|}$ , con  $|E_{|V|}| = |V|$ . Dado que  $G_{|V|}$  es una subgráfica de  $G$  tenemos que  $|E| \geq |V|$  contradiciendo la hipótesis de que  $|E| = |V| - 1$ . Por lo tanto  $G$  es acíclica.

b)  $\Rightarrow$  c): Falta probar que  $G$  es conexa. Supongamos que  $G$  no es conexa, entonces  $\omega > 1$ . Sean  $H_i = (V_i, E_i)$ , con  $i = 1, \dots, \omega$ , las componentes conexas de  $G$ , dado que  $G$  es acíclica cualquier  $H_i$  es un árbol, por lo que  $|E_i| = |V_i| - 1$ . Es claro que  $|E| = \sum_{i=1}^{\omega} |E_i|$  y  $|V| = \sum_{i=1}^{\omega} |V_i|$ , por esto se tiene que:  $|E| = \sum_{i=1}^{\omega} (|V_i| - 1) = |V| - \omega$  contradiciendo la hipótesis de que  $|E| = |V| - 1$ , por lo que  $G$  es conexa. Al ser  $G$  conexa y acíclica entonces es un árbol.

c)  $\Rightarrow$  a): Al ser  $G$  un árbol,  $G$  es conexa y por el teorema anterior tiene exactamente  $|V| - 1$  aristas.

□

## 2.5. Emparejamientos

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica. Decimos que  $M \subset E$  es un *emparejamiento* de  $G$  si y sólo si para cualquier par de elementos de  $M$ , se tiene que no son adyacentes en  $G$ . Se dice que los extremos de cada arista en  $M$  son *emparejados* por  $M$ . Figura 2.10.

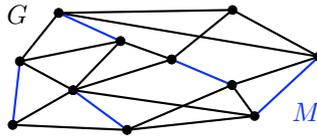


Figura 2.10:  $M$  un emparejamiento de  $G$ .

### 2.5.1. Emparejamientos perfectos

Consideremos la gráfica  $G = (V, E)$  y  $M$  un emparejamiento de ésta. Decimos que  $M$  es un *emparejamiento perfecto* de  $G$  si y sólo si todo vértice de  $G$  está emparejado con otro por  $M$ . Es fácil ver que cualquier gráfica completa con un número par de vértices tiene un emparejamiento perfecto.

En 1947 Tutte [62] presentó una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga un emparejamiento perfecto, la prueba presentada en esta tesis fue dada por Lovász [47].

Diremos que una componente conexa de una gráfica  $G$  es *par* o *impar* si tiene un número par o impar de vértices, respectivamente. Denotaremos al número de componentes impares de una gráfica  $G$  por  $o(G)$ .

**Teorema 7** (Tutte). *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica.  $G$  tiene un emparejamiento perfecto si y sólo si:*

$$o(G - S) \leq |S| \text{ para todo } S \subset V.$$

*Demostración.* Supongamos que  $G$  tiene un emparejamiento perfecto  $M$ . Sean  $G_1, \dots, G_n$  las componentes impares de  $G - S$ . Dado que cada  $G_i$  tiene un número impar de vértices, debe existir para cada  $i = 1, \dots, n$  un  $v_i$ , el cual necesariamente es emparejado con algún elemento  $u_i$  de  $S$  en  $M$ . Dado que  $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq S$ , implica que:

$$o(G - S) = n = |\{u_1, \dots, u_n\}| \leq |S|.$$

Para probar la otra implicación, supongamos que  $G$  cumple con que para todo  $S \subset V$  se tiene que  $o(G - S) \leq |S|$  y que  $G$  no tiene ningún emparejamiento perfecto. Por la condición anterior,  $G$  debe tener un número par de vértices ya que al tomar  $S = \emptyset$  el número de componentes impares tendrá que ser cero.

Debido a que  $G$  no tiene emparejamientos perfectos, entonces  $G$  es una subgráfica generadora de  $G^* = (V^*, E^*)$ , una gráfica maximal sin emparejamientos perfectos. Una gráfica maximal sin emparejamientos perfectos es una gráfica tal que al agregarle cualquier otra arista, se convierte en una gráfica con algún emparejamiento perfecto. Entonces  $G - S$  también es una subgráfica generadora de  $G^* - S$ , por lo que  $o(G^* - S) \leq o(G - S)$ , por lo que se tiene:

$$o(G^* - S) \leq |S| \text{ para todo } S \subset V^*.$$

Sea  $U$  el subconjunto de todos los vértices de  $V^*$  tales que tienen grado  $|V^*| - 1$ . Claramente  $U \neq V^*$ , ya que de otra forma  $G^*$  tendría un emparejamiento perfecto. Mostraremos que las subgráficas inducidas por las componentes conexas de  $G^* - U$  son gráficas completas. Supongamos que no es cierto, es decir que existe alguna componente de  $G^* - U$  que no es completa. Entonces no es difícil probar que en dicha componente existen los vértices  $x, y$  y  $z$  tales que  $xy \in E^*$ ,  $yz \in E^*$  pero  $xz \notin E^*$ . Además, debido a que  $y \notin U$ , existe un vértice  $w \in G^* - U$  tal que  $yw \notin E^*$ . Figura 2.11.

Al ser  $G^*$  una gráfica maximal sin emparejamientos perfectos, tenemos que para cualquier  $e \notin E^*$ ,  $G^* + e$  tiene un emparejamiento perfecto. Sean  $M_1$  y  $M_2$  emparejamientos perfectos en  $G^* + xz$  y  $G^* + yw$ , respectivamente. Sea  $H$  la subgráfica de  $G^* + \{xz, yw\}$ , inducida por la diferencia

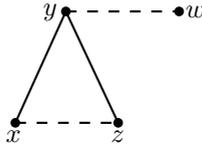


Figura 2.11:

simétrica de  $M_1$  y  $M_2$ . Claramente cada vértice de  $H$  tiene grado dos por lo que  $H$  está formada por ciclos ajenos, los cuales necesariamente tienen un número par de vértices, ya que en ellos alternan aristas de  $M_1$  con las de  $M_2$ . Distinguimos los siguientes casos:

**Caso 1.**  $xz$  y  $yw$  están en distintas componentes de  $H$ , Figura 2.12a. Sea  $C$  el ciclo en  $H$  donde se encuentra  $yw$ , entonces, las aristas de  $M_1$  en  $C$  y las aristas de  $M_2$  que no están en  $C$  forman un emparejamiento perfecto en  $G^*$  contradiciendo la definición de  $G^*$ .

**Caso 2.**  $xz$  y  $yw$  están en la misma componente  $C$  de  $H$ , Figura 2.12b. Por la simetría entre  $x$  y  $z$ , podemos suponer que  $x, y, w$  y  $z$  ocurren en ese orden en  $C$ . Entonces las aristas de  $M_1$  en la sección  $yw \dots z$  de  $C$ , junto a la arista  $yz$  y las aristas de  $M_2$  que no están en la sección  $yw \dots z$  de  $C$  forman un emparejamiento perfecto en  $G^*$  contradiciendo la definición de  $G^*$ .

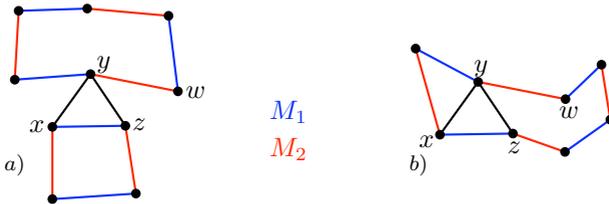


Figura 2.12: a) Ilustración del caso 1. b) Ilustración del caso 2.

Dado que ambos casos nos llevan a una contradicción, se tiene que las componentes conexas de  $G^* - U$  inducen gráficas completas. Debido a que  $G^*$  cumple con la condición del teorema, sabemos que  $G^* - U$  tiene a lo más  $|U|$  componentes impares.

Sin embargo observemos que las componentes pares de  $G^* - U$  tienen un emparejamiento perfecto, y además se puede emparejar algún vértice de cada componente impar con alguno de  $U$ . Es claro que el resto de  $U$  es una gráfica completa con un número par de vértices, por lo que tiene un emparejamiento perfecto. Esto implica que  $G^*$  tiene un emparejamiento perfecto lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $G$  necesariamente tiene un emparejamiento perfecto.  $\square$

## 2.6. Coloraciones en vértices

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica, decimos que una  $k$ -coloración de los vértices de  $G$  es una función  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Una coloración induce una división de los vértices de  $G$  en conjuntos ajenos de la forma  $C_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$ . éstos conjuntos son llamados las *clases cromáticas* inducidas por  $c$ . Se dice que una  $k$ -coloración  $c$  de  $G$  es *buena* si para cualesquiera dos vértices  $u, v$  adyacentes en  $G$ , se tiene que  $c(u) \neq c(v)$ .

## 2.7. Planaridad

Se dice que una gráfica es *plana* si puede ser dibujada en el plano de tal forma que las líneas que representan sus aristas no se intersequen entre ellas, excepto en sus extremos.

Claramente una gráfica plana al ser dibujada en el plano lo divide en diferentes regiones conexas, a la cerradura de cada una de estas regiones se les llama las *caras* de la gráfica, teniendo siempre una cara no acotada llamada *cara exterior*. El resto de caras son llamadas *caras interiores*.

Sea  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  el conjunto de caras de  $G$ , decimos que dos caras  $f_i, f_j$  son adyacentes si comparten una arista  $e$  en su frontera. Diremos que  $e$  es incidente en  $f_i$  y  $f_j$ , de igual forma se dice que  $f_i$  y  $f_j$  son

incidentes en  $e$ . Cuando  $e$  es una arista de corte ésta incide en una sola cara (de hecho, la cara exterior), ya que de otra forma una de las caras será acotada, por lo que sería un ciclo o un lazo en  $G$ , por lo que  $e$  no podría ser de corte.

Euler enunció el siguiente teorema, el cual define una relación entre el número de aristas, vértices y caras de una gráfica plana, este es conocido como la *fórmula de Euler*.

**Teorema 8.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica conexa dibujada en el plano definiendo el conjunto de caras  $F$ , entonces:*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $|F|$ . Supongamos que  $|F| = 1$ , entonces  $G$  tiene una única cara, la cual tendrá que ser su cara exterior, esto implica que  $G$  no tiene ciclos, por lo que al ser también conexa  $G$  es un árbol, entonces sabemos que:

$$|E| = |V| - 1.$$

Lo cual cumple con el teorema.

Ahora supongamos que el teorema es válido para toda gráfica plana conexa con menos de  $n \geq 2$  caras, sea  $G$  una gráfica con  $n$  caras, y sea  $e$  una arista que no sea de corte en  $G$ . Es claro que  $e$  incide en al menos una cara interior de  $G$ . Consideremos la gráfica  $G - e$ , es fácil ver que las dos caras en las que incide  $e$  se convierte en una sola. Entonces  $G - e$  es conexa con  $n - 1$  caras y satisface la hipótesis de inducción. Claramente  $G - e$  es una subgráfica generadora de  $G$ , y su número de aristas es  $|E| - 1$ , de modo que:

$$|V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = 2.$$

Por lo que obtenemos:

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

El teorema se sigue por el principio de inducción. □

Denotemos al número de aristas incidentes en una cara  $f$ , de una gráfica plana  $G$  como  $d(f)$ , las aristas de corte cuentan como dos incidencias. Entonces el siguiente resultado se sigue directamente de la fórmula de Euler:

**Corolario 2.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica plana con  $|V| \geq 3$  y  $F$  el conjunto de sus caras  $F$ , entonces:*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

*Demostración.* Primeramente, no es difícil probar que:

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2|E|$$

Ya que cada arista es incidente en dos caras, a menos que sea de corte, en cuyo caso cuenta como dos incidencias. Tampoco es difícil notar que si  $|V| \geq 3$ , entonces para cualquier  $f \in F$  se tiene que  $d(f) \geq 3$ , por lo que:

$$\sum_{f \in F} d(f) \geq 3|F|$$

$$2|E| \geq 3|F|$$

De la fórmula de Euler se tiene que:

$$|V| - |E| + \frac{2|E|}{3} \geq 2$$

Que es lo mismo que:

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

□

### 2.7.1. Gráfica dual

Sea  $G$  una gráfica plana, podemos definir a otra gráfica  $G^*$  a partir de  $G$  como sigue: por cada cara  $f$  de  $G$  tendremos un vértice  $f^*$  en  $G^*$ , y por

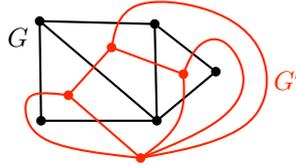


Figura 2.13: Una gráfica plana  $G$  con su gráfica dual  $G'$ .

cada arista  $e$  de  $G$ , consideramos las caras  $f$  y  $g$ , incidentes en  $e$ , entonces  $G^*$  tendrá la arista  $e^*$  que conecta a los vértices  $f^*$  y  $g^*$ . Decimos que  $G^*$  es la gráfica dual de  $G$ , y podemos ver que  $G^*$  es también una gráfica plana, pues puede ser dibujada colocando cada vértice  $f^*$  en el interior de la cara  $f$ , y dibujando la arista  $e^*$  de forma que cruce sólo en un punto a  $e$  sin que cruce ninguna otra arista de  $G$ . Esta forma de dibujarla se puede ver de forma clara en la Figura 2.13.

### 2.7.2. Gráficas geométricas

Una *gráfica geométrica* es una gráfica dibujada en el plano de tal forma que sus vértices son puntos y una arista  $uv$  es el segmento  $[u, v]$ . A lo largo de la tesis por gráfica geométrica nos referiremos a una gráfica geométrica plana.

## Capítulo 3

# Galerías de arte e iluminación

En Agosto de 1976, durante una conferencia en Stanford, V. Klee hizo la siguiente pregunta: *¿Cuántos guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono con  $n$  vértices?* Poco tiempo después V. Chvátal da respuesta a esta pregunta con el que se ha conocido como el *Teorema de Galería de Arte de Chvátal*, el cual se presenta en la introducción de esta tesis.

Ahora supongamos que tenemos una habitación la cual queremos que esté bien iluminada, esto es, que cada parte de la habitación tenga suficiente luz, pero no queremos gastar mucho comprando focos. Geométricamente podemos representar la habitación como un polígono  $P$  y a los focos como puntos en el interior de  $P$ . Decimos que un punto  $p$  de  $P$  está iluminado si y sólo si existe un foco  $f$  tal que el segmento que une a  $p$  con  $f$  está totalmente contenido en  $P$ . Vemos entonces que el problema de encontrar el menor número de focos que iluminen a  $P$  es equivalente al problema de la galería de arte.

A lo anterior se debe que a los problemas de galerías de arte se les refiera también como problemas de iluminación. Entonces usaremos in-

distintamente los términos vigilar e iluminar, así como guardias y focos, dado que son equivalentes.

A partir de la publicación del teorema de Chvátal comenzó a surgir una gran cantidad de trabajo de investigación relacionado con iluminación y galerías de arte. En 1987, aparece el libro *Art Gallery Theorems and Algorithms* de J. O'Rourke [51], el primer libro dedicado completamente al estudio de este tipo de problemas. Con la publicación de este libro comienzan a ser estudiadas una gran cantidad de variantes al problema original. Posteriormente aparecen los compendios por T. Shermer [55] y J. Urrutia [63], los cuales contienen una gran colección de resultados sobre variantes del problema de la galería de arte.

En este capítulo se presentan algunas de las variantes principales y resultados recientes en el área.

### 3.1. Terminología básica

Un polígono  $P$  es una secuencia ordenada de  $n$  puntos en el plano  $v_1, \dots, v_n$ , para  $n \geq 3$ , llamados los vértices de  $P$ , junto con el conjunto de segmentos de línea que unen  $v_i$  con  $v_{i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , y  $v_n$  con  $v_1$ , llamado el conjunto de aristas de  $P$ . Se dice que  $P$  es simple si y sólo si cualquier par de aristas no consecutivas no se intersecan. Un polígono simple divide al plano en dos regiones, una no acotada, llamada el *exterior* y una acotada, el *interior*. Una *diagonal* de  $P$  es un segmento contenido en el interior de  $P$  que conecta dos vértices de  $P$  no consecutivos. Por simplicidad, al decir polígono nos referiremos a un polígono simple junto con su interior.

Dados dos puntos  $p$  y  $q$  dentro de un polígono  $P$ , decimos que  $q$  es *visible* desde  $p$  si y sólo si el segmento que une a  $p$  y  $q$  está totalmente contenido en  $P$ . Decimos que un subconjunto finito de puntos  $G$ , contenidos en  $P$  *vigila* o *ilumina* a  $P$  si y sólo si cualquier punto  $p$  de  $P$  es visible desde algún punto  $g$  de  $G$ . De igual forma diremos que  $g$  vigila o ilumina a  $p$ , si  $p$  es visible desde  $g$ .

Una triangulación  $T(P)$  de un polígono  $P$ , es una división del interior de  $P$  en triángulos con interiores ajenos, de tal forma que las aristas de

estos triángulos solamente pueden ser aristas o diagonales de  $P$ . Es fácil ver que una triangulación  $T(P)$  de  $P$  está compuesta por exactamente  $n - 2$  triángulos, donde  $n$  es el número de los vértices de  $P$ .

## 3.2. Variantes del problema

Las principales variantes del problema surgen al imponer ciertas restricciones en cuanto a la ubicación de los guardias y la forma de la galería.

A continuación se presentan las principales restricciones que dan pie a algunas de las variantes más estudiadas del problema de la galería de arte.

### 3.2.1. Tipos de guardias

Existe una gran cantidad de restricciones que pueden ser impuestas a los guardias usados para vigilar la galería. En algunos casos es deseable que los guardias estén colocados en los vértices del polígono  $P$  que representa nuestra galería. En otros casos se permite ubicar a los guardias en cualquier lugar de  $P$ , así como permitir que éstos se muevan sobre las diagonales de  $P$ . A continuación se mencionan los principales tipos de guardias o fuentes de luz más conocidos.

- **Puntos guardia.** Estos guardias pueden estar colocados en cualquier punto contenido en  $P$ .
- **Vértices guardia.** En este caso sólo se permitirá colocar guardias en los vértices de  $P$ .
- **Aristas guardia.** Toussaint introdujo este tipo de guardias en 1981. Su motivación original era permitir que los guardias se movieran sobre las aristas de  $P$ . Un punto se considera vigilado si es visible desde algún punto de la ruta de algún guardia.
- **Guardias móviles.** O'Rourke [52] introduce esta variante permitiendo que los guardias se muevan sobre diagonales de  $P$ .

- **Vértices y puntos reflectores.** Al igual que los guardias, distinguimos entre los que se colocan en cualquier parte  $P$  y los que sólo pueden estar en los vértices de  $P$ . Los reflectores fueron introducidos por J. Urrutia en 1990 en un taller de iluminación en Barbados. La motivación de este tipo de guardias se debe a que muchos dispositivos de vigilancia tienen un rango de visión delimitado.
- **Módems.** Este tipo de guardias fue propuesto por Urrutia en [4]. La motivación surge del hecho de que la intensidad con la que se recibe la señal de un módem inalámbrico se ve seriamente afectada por el número de paredes que esta tiene que atravesar. Se dice que un módem  $m$  ilumina a un punto  $p$ , si el segmento que los une interseca a lo más un número acotado de objetos.

### 3.2.2. Tipos de galerías

Así como se pueden imponer restricciones en los guardias, al imponerlas sobre la forma de las galerías surge una gran cantidad de variantes interesantes, como son:

- **Galerías tradicionales.** En esta variante la galería está formada por un conjunto de habitaciones rectangulares dentro de un edificio rectangular.
- **Galerías ortogonales.** En este tipo de galerías se restringe a que las aristas sean paralelas a alguno de los ejes coordenados. Esta variante tiene sentido dado que la mayoría de las galerías reales están en construcciones ortogonales.
- **Galerías con huecos.** Para esta variante, se permite que la galería contenga otros polígonos, llamados huecos, cuyo interior no se considera parte del interior de la galería.
- **Galerías curvilíneas.** Karavelas y Tsigaridas [42] proponen una variante en la que se permite que las aristas de la galería sean arcos de curvas en lugar de segmentos de recta. Este tipo de galerías serán estudiadas con mayor detalle en el capítulo 5.

- **Jardín de esculturas.** En [27] Eppstein, Goodrich y Stichtava presentan otra variante inspirada también en redes inalámbricas. El problema consiste en colocar transmisores que emitan una clave única, de modo que a partir de una fórmula booleana monótona, formada a partir de las claves emitidas, se pueda probar si un punto está dentro o fuera de la galería. Ya que los lados del polígono no bloquean la señal de los transmisores, podemos pensar en una galería sin paredes o como un jardín de esculturas.

### 3.3. Algunos resultados

En esta sección se presenta un conjunto de resultados interesantes relacionados con la iluminación, mostrando la relevancia del tema dentro de la geometría combinatoria y computacional.

#### 3.3.1. Galerías de arte tradicionales

En la interpretación clásica del problema de la galería de arte, la galería es representada como un polígono simple. Sin embargo en el mundo real, las *galerías de arte tradicionales* suelen ser edificios rectangulares subdivididos en habitaciones también rectangulares, y podemos suponer que cualquier par de habitaciones adyacentes tienen una puerta en común (figura 3.1).

Entonces, ¿con cuántos guardias podemos vigilar una galería tradicional con  $n$  habitaciones? Observemos que cualquier guardia colocado en la puerta de dos habitaciones es capaz de vigilar ambas habitaciones y dado que un guardia no puede estar en tres habitaciones simultáneamente, entonces hacen falta al menos  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias para poder vigilar tal galería. El siguiente teorema [21] nos dice que esta cota es justa.

**Teorema 9.** *Cualquier galería de arte tradicional con  $n$  habitaciones puede ser vigilada exactamente por  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias.*

*Demostración.* Sea  $T$  una galería de arte tradicional con  $n$  habitaciones  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Podemos construir a  $G_T$ , la gráfica dual de  $T$  de la siguien-

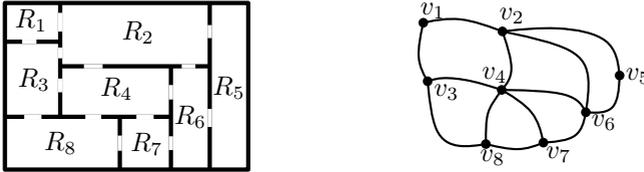


Figura 3.1: Una galería de arte tradicional y su gráfica dual.

te manera: a cada habitación  $R_i$  le asignamos un vértice  $v_i$ , y haremos a dos vértices adyacentes sólo si corresponden a habitaciones adyacentes. Ver figura 3.1.

Basta probar que cuando  $G_T$  tiene un número par de vértices, cumple con la condición del Teorema 7 (Tutte), por lo que  $G_T$  tendría un emparejamiento perfecto cuyas aristas representarían las puertas en la que serían colocados los guardias, por lo que con  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias  $T$  sería vigilada. Para el caso en que  $G_T$  tenga un número impar de vértices bastará subdividir cualquier habitación en dos.

Notemos que la frontera exterior de la unión de las habitaciones representadas por los vértices de cualquier subgráfica conexa de  $G_T$ , es un polígono ortogonal. Sea  $S$  un subconjunto de los vértices de  $G_T$  y sea  $k$  el número de componentes conexas de  $G_T - S$ . Es claro que cualquier componente conexa  $C_i$  de  $G_T - S$ , representa un polígono ortogonal  $P_i$ . Figura 3.2.

Dado que cada  $P_i$  tiene al menos 4 esquinas, el número de esquinas generadas por las componentes de  $G_T - S$  es al menos  $4k$ . Cada vez que agregamos un rectángulo representado por algún vértice en  $S$ , desaparecen a lo más 4 esquinas, véase figura 3.2. Al haber agregado todos los rectángulos de  $S$  desaparecen todas las esquinas, excepto las 4 de la frontera más al exterior. De esto se sigue que necesariamente  $k \leq |S| + 1$ . Es fácil verificar que para el caso en que  $k = |S| + 1$ , al menos una componente es par, de otra forma  $G_T$  tendría un número impar de vértices. Por lo que se tiene que  $o(G_T - S) \leq |S|$  para cualquier subconjunto  $S$  de los

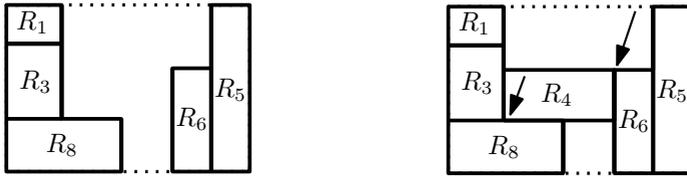


Figura 3.2: Las esquinas que desaparecen al agregar a  $R_4$ .

vértices de  $G_T$ , lo cual es justo la condición del teorema de Tutte, por lo que  $G_T$  tiene un emparejamiento perfecto. □

### 3.3.2. Galerías ortogonales

Decimos que un polígono  $P$  es ortogonal, si cualquier arista de  $P$  es paralela a alguno de los ejes coordenados, y además el ángulo entre dos aristas siempre es  $\frac{\pi}{2}$  o  $\frac{3\pi}{2}$ . Dado que los edificios del mundo real suelen ser “ortogonales”, uno podría pensar que este tipo de polígonos tienen especial interés ya que se ven como un mejor modelo para aplicaciones potenciales, además desde el punto de vista matemático, su estructura inherente nos permite obtener resultados muy interesantes. El primer resultado obtenido con respecto a este tipo de galerías fue dado por Kahn, Klawe y Keitman [41]:

**Teorema 10.** *Cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices siempre puede ser vigilado usando a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vértices guardia. En ocasiones  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vértices guardia son necesarios.*

Para probar este teorema Kahn, Klawe y Kleitman se basan en una técnica similar a la usada por Fisk. La idea principal de su prueba consiste en obtener una cuadrangulación convexa de  $P$ , la cual induce una gráfica 4-coloreable, y tomando la clase cromática más pequeña obtenemos esta cota.

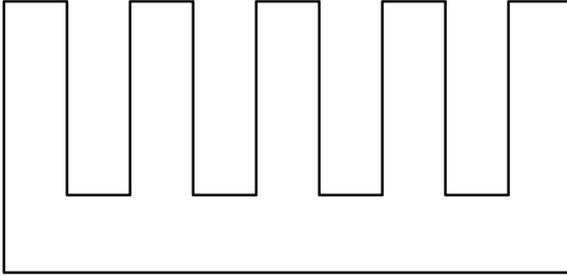


Figura 3.3: Un polígono que requiere  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias.

Esta prueba promovió el estudio de descomponer polígonos ortogonales en cuadriláteros convexos. Sack [54] dio un algoritmo que obtiene dicha división en tiempo  $O(n)$ . En el siguiente capítulo se presentan algunos resultados sobre cuadrangulaciones de polígonos simples en general.

Edelsbrunner, O'Rourke y Welzl [25] presentaron un algoritmo que en tiempo  $O(n)$  obtiene un conjunto de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  puntos guardia que vigilan un polígono ortogonal dado; su algoritmo se basa en una descomposición del polígono en subpolígonos con forma de L.

### 3.3.3. Galerías con huecos

Dado un polígono  $P$  y un conjunto de  $m$  polígonos ajenos  $P_1, \dots, P_m$  contenidos en el interior de  $P$ , el conjunto  $P - \{P_1 \cup \dots \cup P_m\}$  es llamado un *polígono con huecos*. En este caso decimos que  $P$  tiene  $m$  huecos.

El siguiente resultado, dado por O'Rourke [51], fue el primero respecto a polígonos con huecos:

**Teorema 11.** *Cualquier polígono con  $n$  vértices y  $h$  huecos siempre puede ser vigilado con a lo más  $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$  vértices guardia.*

La prueba procede eliminando los huecos uno por uno, cortando a  $P$  sobre una diagonal que una dos vértices de  $P$ , uno de los cuales es vértice de un hueco, y el otro pertenece a la cara exterior.

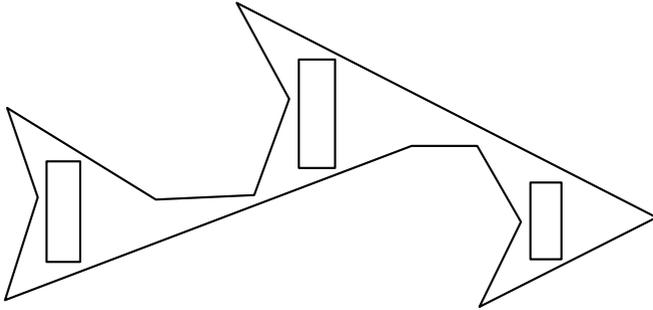


Figura 3.4: Un polígono con  $n$  vértices y  $h$  huecos que requiere  $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$  guardias para ser vigilado.

Se cree que esta cota no es justa, de hecho Shermer conjetura que  $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes para vigilar un polígono con  $n$  vértices y  $h$  huecos. Shermer prueba su conjetura para  $h = 1$ , para valores mayores que 1 la conjetura sigue abierta. Para puntos guardia Bjorling-Sachs y Souvaine [7] e independientemente Hoffmann, Kaufman y Kriegel [39] probaron:

**Teorema 12.**  $\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$  puntos guardia son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier polígono con  $n$  vértices y  $h$  huecos.

Bjorling-Sachs y Souvaine [8] presentan un algoritmo de tiempo  $O(n^2)$  que encuentra la posición de tales guardias. La idea principal del resultado de Bjorling-Sachs y Souvaine consiste en remover un *canal* de cuatro lados, tal que un vértice nuevo es agregado por cada canal y además existe un triángulo  $T$  en el polígono resultante tal que cualquier vértice de  $T$  vigila el interior del canal. Este triángulo es forzado a aparecer en una triangulación del polígono resultante, de modo que usando la prueba de Fisk para el teorema de Chvátal su resultado se sigue.

En 1982, O'Rourke [51] también demostró que cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  huecos siempre puede ser vigilado usando  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$

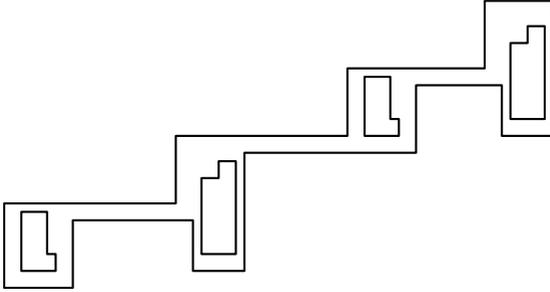


Figura 3.5: Polígono ortogonal con 44 vértices y 4 huecos que requiere 12 vértices guardia.

guardias, y conjeturó que  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  puntos guardia son siempre suficientes. Agarwal [1] verificó esta conjetura para  $h = 1, 2$ , permaneciendo abierta hasta 1990, cuando F. Hoffmann [38] demostró:

**Teorema 13.**  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  puntos guardia son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  huecos.

Para vértices guardia la cota superior se mantiene en  $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$  guardias, sin embargo, el ejemplo mostrado en la figura 3.5 llevó a Shermer a conjeturar que  $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$  vértices guardia siempre bastan para vigilar un polígono ortogonal con  $n$  vértices y  $h$  huecos [51]. Para valores grandes de  $h$ , Hoffman y Kreigel [40] probaron:

**Teorema 14.**  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes para vigilar un polígono ortogonal con huecos.

La idea principal detrás de su prueba es el siguiente resultado, el cual es interesante por sí mismo:

**Teorema 15.** Cualquier gráfica bipartita plana puede ser completada a una gráfica plana maximal que sea 3-coloreable en vértices.

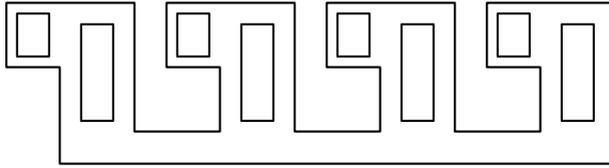


Figura 3.6: Polígono con  $n$  vértices que requiere  $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$  vértices guardia.

Para probar el teorema 14 comienzan dividiendo el interior de  $P$  en cuadriláteros convexos y después obtienen una triangulación de la gráfica resultante de tal forma que los vértices tengan grado par. Después usan el hecho de que cualquier gráfica plana, tal que todos sus vértices tienen grado par es 3-coloreable. Este resultado induce un algoritmo de tiempo  $O(n^2)$ .

Para la cota inferior, Hoffman muestra una familia de polígonos ortogonales con huecos que requieren  $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$  vértices guardia, ver figura 3.6. Hoffman conjetura que  $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes.

### 3.3.4. Iluminando familias de convexos

Es un resultado conocido en matemáticas que la frontera de cualquier conjunto convexo compacto en el plano puede ser iluminada utilizando tres luces. El siguiente problema fue propuesto inicialmente por F. Tóth [32]. Sea  $F = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  una familia de  $n$  conjuntos convexos compactos en el plano. ¿Cuántas luces colocadas en el complemento de  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ , son suficientes para iluminar completamente las fronteras de los elementos de  $F$ ?

F. Tóth da respuesta a esta pregunta con el siguiente resultado:

**Teorema 16** ([32]). *Para cualquier familia  $F = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  de  $n$  conjuntos convexos compactos en el plano,  $4n - 7$  luces colocadas en el complemento de  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  son siempre suficientes y algunas veces necesarias para iluminar las fronteras de los elementos de  $F$ .*

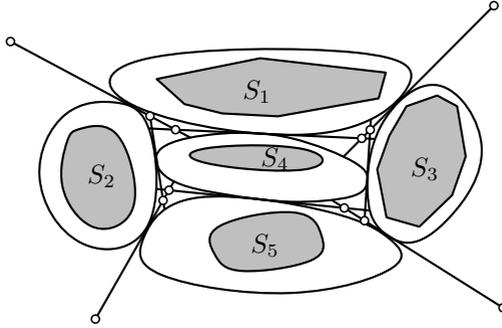


Figura 3.7: Ilustración de la prueba del Teorema 16.

*Demostración.* Construyamos la familia  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  de  $n$  conjuntos estrictamente convexos tales que:

1.  $S_i$  está totalmente contenido en  $T_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Los conjuntos  $T_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , tienen interiores ajenos.
3. El número de tangencias entre los elementos de  $T$  es máximo.

Supongamos que  $T_i$  es tangente a  $T_{s(j)}$ , para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Sean  $l_{i,s(j)}$  las líneas tangentes a  $T_i$  en los puntos en los que  $T_i$  es tangente a  $T_{s(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Para cada  $i$ , los conjuntos  $T_{s(1)}, T_{s(2)}, \dots, T_{s(m)}$  definen una región poligonal  $P_i$ . Se distinguen los siguientes casos:

1.  $P_i$  es acotada. En este caso, colocamos un foco en cada vértice de  $P_i$ .
2.  $P_i$  es no acotada. Para este caso colocamos un foco en cada vértice de  $P_i$ , y uno más en cada uno de los dos rayos de  $P_i$ , lo suficientemente alejado de  $S_i$ .

No es difícil ver que estas luces iluminan  $S_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  y que por cada línea  $l_{i,s(j)}$  tenemos exactamente dos luces. Véase la figura 3.7.

Construyamos la gráfica  $G$  con vértices  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ , tal que  $T_i$  y  $T_j$  serán adyacentes si son tangentes. Es claro que  $G$  es una gráfica plana, por lo que el número de aristas es a lo más  $3n - 6$ . Claramente existe una correspondencia uno a uno entre las aristas de  $G$  y las tangentes generadas por  $T$ , entonces el número de focos usados hasta ahora es a lo más  $2(3n - 6)$ .

Sea  $H$  el complemento de la unión de  $T_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $H$  consistirá de una cara no acotada, y una cantidad de caras acotadas. Es fácil ver que el número de luces necesarias para iluminar  $S_1, S_2, \dots, S_n$  se maximiza cuando todas las caras de  $H$ , incluyendo la exterior, son acotadas por tres elementos de  $T$ . Se mostrará sólo este caso, ya que da una buena idea del resto de la prueba. Observemos que cada cara de  $H$  tendrá tres luces. Notemos que al quitar una de estas luces en cada cara interior, el resto de las luces siguen iluminando a los elementos de  $F$ , figura 3.7. Entonces es fácil ver que quedan  $4n - 7$  luces, con lo que se demuestra el teorema.  $\square$

El resultado anterior fue probado también por Zaks y Urrutia en 1989 [67]. Fejes Tóth también demostró [32] que  $2n - 2$  focos son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar una familia de  $n$  círculos ajenos en el plano, este resultado también fue obtenido por Coullard [16] y Czyzowicz [19]. En [18] Czyzowicz, Rivera-Campo y Urrutia demuestran que una familia de triángulos en el plano siempre puede ser vigilada con a lo más  $\lfloor \frac{4n+4}{3} \rfloor$  guardias. También demuestran lo siguiente:

**Teorema 17.**  *$n + 1$  guardias son siempre suficientes y  $n - 1$  en ocasiones necesarios, para vigilar cualquier familia de  $n$  triángulos homotéticos.*

El ejemplo mostrado en [18] puede ser modificado para obtener una cota inferior de  $n$  guardias en lugar de  $n - 1$ .

En [35] García-López estudia el problema de iluminar el espacio libre generado por una familia de polígonos ajenos, esto es, iluminar el complemento de la unión de los elementos de la familia. Usando el teorema 12 se puede establecer de forma sencilla el siguiente resultado:

**Teorema 18.** *El espacio libre generado por cualquier familia de  $h$  polígonos ajenos, con  $n$  vértices en total, siempre puede ser iluminando usando*

a lo más  $\lfloor \frac{n+h+3}{3} \rfloor$  puntos guardia. Existen familias de polígonos que requieren  $\lfloor \frac{n+h-1}{3} \rfloor$  guardias.

Otro problema interesante es iluminar el plano bajo la presencia de obstáculos representados como segmentos de línea, o iluminar los propios segmentos. O'Rourke [51] demostró lo siguiente:

**Teorema 19.**  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar el plano bajo la presencia de  $n \geq 5$  obstáculos representados como segmentos ajenos.

El problema de iluminar segmentos resulta una variante interesante, permitiendo que un punto en un segmento sea iluminado por un guardia en cualquiera de los lados del segmento. El primer resultado en esta dirección fue obtenido por Czyzowicz, Rivera-Campo y Urrutia [17]. Ellos probaron que  $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$  guardias son suficientes para iluminar un conjunto de  $n$  segmentos en el plano. Posteriormente Czyzowicz, Rivera-Campo, Urrutia y Zaks [20] redujeron la cota superior a  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$  guardias. Recientemente Cs.D. Tóth mejoró dicha cota [58], enunciando el siguiente resultado:

**Teorema 20.** Para cualquier familia  $L$  de  $n$  segmentos ajenos en el plano, siempre es posible encontrar  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  guardias que iluminen a los elementos de  $L$ .

Este resultado lo obtiene extendiendo los segmentos en sus extremos uno a uno hasta el infinito o hasta que toquen algún otro segmento o alguna extensión. Posteriormente se descompone la gráfica dual de la división obtenida en caminos de longitud 2 o 3.

### 3.3.5. Iluminación con reflectores

En los problemas anteriores asumimos que los focos emiten la luz en todas direcciones. Ahora presentamos un problema en el que las fuentes de luz iluminan solamente una zona angular de tamaño fijo. A estas fuentes de luz le llamaremos *reflectores*. Entonces diremos que un reflector  $f_i$  es una fuente de luz colocada en un punto  $p$  del plano, llamado su ápice;  $f_i$

ilumina dentro de una zona angular de tamaño  $\alpha_i$ , y dicha zona puede ser rotada sobre su ápice.

Este problema es motivado por el hecho de que en la actualidad la mayoría de los dispositivos de vigilancia tienen un rango de visión limitado, el cual puede ser representado como una zona angular.

Presentamos el siguiente resultado de Urrutia [63] relacionado con el uso de reflectores:

**Teorema 21.** *Sean  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  tres ángulos tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , y sea  $P$  un polígono convexo. Entonces siempre podemos colocar tres reflectores de tamaño a lo más  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ , con ápices en los vértices de  $P$ , de modo que  $P$  quede iluminado y no coloquemos más de un reflector sobre cada vértice de  $P$ .*

*Demostración.* Si  $P$  es un triángulo, nuestro resultado es cierto. Sea  $P$  un polígono convexo con al menos cuatro vértices, y supongamos que  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ . Observemos primero que  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$  y que como  $P$  tiene al menos cuatro vértices, uno de sus ángulos internos en alguno de sus vértices es mayor o igual que  $\frac{\pi}{2}$ . Sea  $T$  un triángulo cuyos ángulos interiores sean  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  tal que:

1. El vértice de  $T$  de tamaño  $\alpha_2$  esté colocado sobre un vértice  $v$  de  $P$  con ángulo interior mayor o igual a  $\alpha_2$ .
2. Los otros dos vértices de  $T$  están colocados sobre dos puntos  $x, y$  en la frontera de  $P$ .

Supongamos que tanto  $x$  como  $y$  pertenecen a aristas diferentes de  $P$ , digamos  $e_1$  y  $e_3$ ; ver figura 3.8.

Coloquemos un reflector  $f_2$  de apertura  $\alpha_2$  sobre  $v$  de forma que ilumine a  $T$ . Sea  $C$  el círculo determinado por los vértices de  $T$ . Es fácil ver que al menos uno de los extremos de  $e_1$  y  $e_3$  no está contenido en el interior de  $C$ . Sean  $u$  y  $w$  estos vértices. Se distinguen dos casos:

1.  $u \neq w$ . Coloquemos un reflector  $f_1$  sobre  $u$  iluminando la zona angular determinada por  $v, u, x$  y otro  $f_3$  sobre  $w$  iluminando la zona angular determinada por  $v, w, y$ . Como  $f_1$  y  $f_2$  no están en el

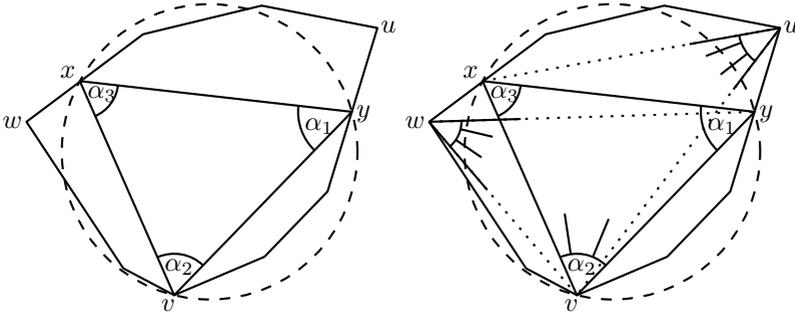


Figura 3.8: El caso en que  $x$  y  $y$  están en aristas diferentes de  $P$ .

interior de  $C$ , los tamaños de las zonas angulares de  $f_1$  y  $f_3$  son a lo más  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  respectivamente.

- $u = w$ . Sea  $T'$  el triángulo determinado por el segmento que une a  $x$  con  $y$ , y las tangentes a  $C$  en estos puntos. El ángulo generado en el vértice  $z$  de  $T'$  que no está sobre  $C$  es  $\pi - 2\alpha_2$ . Notemos que  $z$  pertenece al interior del triángulo determinado por  $x, y$  y  $u$ , por lo que el ángulo de dicho triángulo en  $u$  es menor que  $\pi - 2\alpha_2$ . Como  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ ,  $\pi - 2\alpha_2 \leq (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) = \alpha_3$ . Por tanto colocando un reflector de tamaño a lo más  $\alpha_3$  en  $u$  iluminamos  $P$ .

□

Otro problema interesante relacionado con reflectores es el conocido como *el problema de iluminación de estrados*, planteado por J. Urrutia en [63]. El problema consiste en que tenemos un estrado, el cual queremos iluminar por medio de un conjunto de reflectores. Formalmente, representamos al estrado como un segmento de recta  $L$ . Tenemos una colección finita de  $n$  reflectores  $f_1, \dots, f_n$  que iluminan en una zona angular de tamaño  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  respectivamente, más aún, los ápices de los reflectores estarán fijos. La pregunta a responder es la siguiente: ¿Será posible rotar

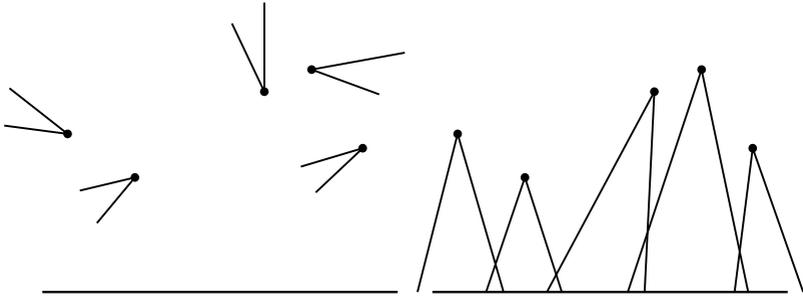


Figura 3.9: El problema de iluminación de estrados.

$f_1, \dots, f_n$  de tal manera que el segmento de línea  $L$  quede iluminado? Ver figura 3.9.

El problema de iluminación de estrados se vuelve interesante dado que la intuición indica que debería tener una solución simple, sin embargo, en [37] H. Ito, H. Uehara y M. Yokoyama, prueban que el problema de iluminación de estrados es NP-completo.

En [22] Czyzowicz, Rivera-Campo y Urrutia presentan una variante del problema de iluminación de estrados, la cual se enuncia como sigue. Sea  $l$  un segmento de recta sobre el eje  $x$  y  $P_n$  un conjunto de  $n$  puntos con coordenada  $y$  positiva. Se busca encontrar un conjunto de reflectores  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ , tales que sus ápices se encuentren en alguno de los puntos de  $P_n$ , de tal manera que  $F$  ilumine  $l$  y que además  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m$  se minimice. A este problema se le conoce como el de iluminación óptima de estrados. Ellos presentan un algoritmo que lo resuelve en tiempo  $O(n \log n)$ .

Existen varios problemas de iluminación usando reflectores que consisten, por ejemplo, iluminar completamente el plano [9], iluminar polígonos ortogonales [2, 30], o iluminar usando solamente reflectores con ángulo de iluminación  $\alpha$  dado, a estos se les conoce como  $\alpha$ -reflectores [28, 56, 59]. En [64] se presenta una reseña de distintos problemas y resultados de iluminación con reflectores.

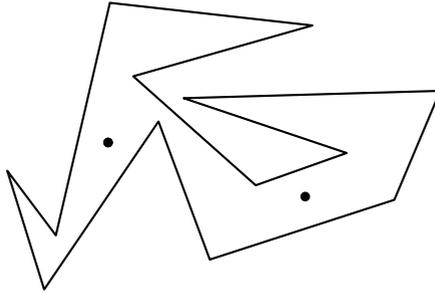


Figura 3.10: Un polígono vigilado por dos 2-módems. Un único 2-módem no es suficiente.

### 3.3.6. Iluminación con módems

En [4] J. Urrutia presenta una nueva variante del problema de la galería de arte, inspirada en los módems inalámbricos. Nos preguntamos lo siguiente: *¿cómo se deben colocar ciertos módems inalámbricos de modo que cualquier lap top en el interior de un edificio reciba la señal de alguno de estos módems?* El principal factor que determina si la señal que recibe nuestra lap top es buena o no, depende principalmente del número de paredes que nos separan del módem inalámbrico.

Expresamos el problema de forma matemática como sigue: sea  $k \leq 0$  un entero, y  $P$  un polígono con  $n$  vértices. Decimos que un  $k$ -módem  $\mathcal{M} \in P$ , representado por un punto en el plano, cubre un punto  $p \in P$  si el segmento que une a  $p$  con  $\mathcal{M}$  interseca la frontera de  $P$  a lo más  $k$  veces. Diremos que  $k$  es la *potencia* del módem. En la figura 3.10 se muestra un polígono que puede ser iluminado por un par de 2-módems.

El primer resultado relacionado a este problema, que presentamos a continuación, involucra polígonos monótonos [4]. éstos son polígonos con la propiedad de que cualquier recta perpendicular al eje de las  $x$  interseca a la frontera del polígono a lo más dos veces.

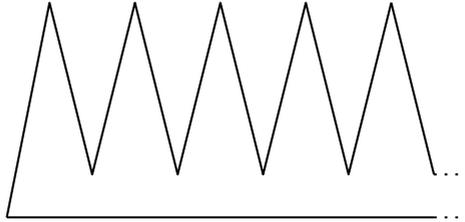


Figura 3.11: Un polígono monótono que requiere  $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$   $k$ -módems para ser iluminado.

**Teorema 22.** *Cualquier polígono monótono con  $n$  vértices puede ser iluminado usando a lo más  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $k$ -módems. Además existen polígonos monótonos que requieren al menos  $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$   $k$ -módems para ser iluminados.*

En la figura 3.11 se muestra un polígono monótono que prueba la cota inferior. La prueba de suficiencia se basa en dos lemas, de los cuales el primero nos dice que siempre podemos partir a un polígono monótono en dos más pequeños y monótonos, los cuales pueden ser iluminados independientemente. El segundo nos dice que cualquier polígono monótono con  $2(k+2)$  lados siempre puede ser iluminado usando un  $k$ -módem.

Así también demuestran [4] que para  $k = 1, 2, 3$ , cualquier polígono monótono puede ser iluminado usando  $\lceil \frac{n}{k+4} \rceil$   $k$ -módems. Por último ellos demuestran el siguiente teorema:

**Teorema 23.** *Cualquier polígono ortogonal monótono con  $n$  vértices puede ser iluminado usando  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems.*

El problema para polígonos en general resulta difícil, por lo que se ha considerado encontrar aproximaciones para este problema [6]. Sin embargo esta dificultad dio pie a otra variante interesante propuesta por Urrutia [31] en la cual se permite el uso de pocos módems de alta potencia, esto es, ¿cuánta potencia necesita un módem para iluminar un polígono  $P$  con  $n$  vértices?

En [31] usando un resultado previo de Fulek, Holmsen y Pach [33] prueban:

**Teorema 24.** *Cualquier polígono simple con  $n$  vértices siempre puede ser iluminado usando un módem de potencia  $\lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$ .*

Para polígonos ortogonales demuestran que un módem con potencia  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  siempre es suficiente para iluminarlos. Considerando los problemas que buscan iluminar el plano en presencia de obstáculos, demuestran que se puede iluminar el plano en presencia de  $m$  segmentos horizontales y  $n$  verticales usando un módem con potencia  $\lceil \frac{m}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

En [3] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, F. Hurtado, P. Ramos y J. Urrutia definen un polígono  $k$ -convexo como aquel para el cual se da que cualquier recta lo interseca en a lo más  $k$  componentes conexas. Claramente el estudio de los polígonos  $k$  convexos está muy relacionado con el estudio de los  $k$ -módems.

### 3.3.7. El jardín de esculturas

En [27] Eppstein, Goodrich y Stichtava presentan otra variante del problema clásico de la galería de arte, esta inspirada también en las redes inalámbricas. La variante propuesta por ellos puede ser expresada geoméricamente como sigue: sea  $P$  un polígono *virtual* con  $n$  vértices; un número  $g$  de transmisores son colocados en el plano, cada uno de los cuales transmite una única clave dentro de un rango angular fijo. Decimos que  $P$  es *virtual* en el sentido que este bloquea las transmisiones. El objetivo es colocar y orientar a los transmisores de tal forma que cualquier punto en el plano pueda determinar si está dentro o no de  $P$  a partir de una fórmula booleana monótona (una que sólo use operaciones AND y OR) compuesta de las claves transmitidas. En otras palabras, queremos *describir* el polígono por medio de una fórmula booleana y los transmisores.

Por ejemplo, el pentágono mostrado en la figura 3.12a es descrito por la fórmula  $A \cdot B \cdot C$ , en cuanto que el polígono de la figura 3.12b, es descrito por la fórmula  $A \cdot B \cdot F + D \cdot C \cdot E + D \cdot C \cdot F$ .

El problema consiste en minimizar  $g$ , el número de transmisores, o “guardias” en analogía a las galerías de arte. Podríamos hablar entonces

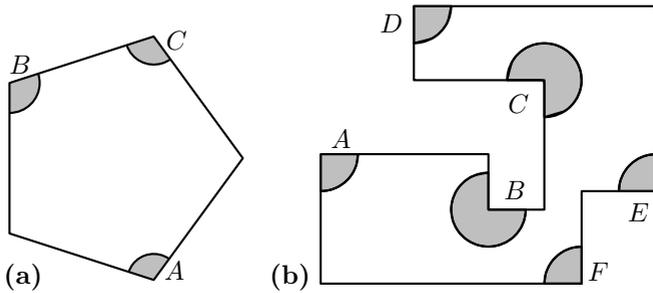


Figura 3.12: El jardín de esculturas.

de un *jardín de esculturas*, por no hablar de una galería de arte sin paredes. Este tipo de problemas también están relacionados fuertemente con problemas de localización inalámbrica.

Para ilustrar mejor esta variante, supongamos que somos dueños de un café donde brindamos acceso de Internet inalámbrico a nuestros clientes. Sin embargo, la red suele estar lenta gracias a los vecinos que se “cuelgan” a nuestra red y no consumen. Por lo anterior resulta deseable tener una forma en la que podríamos asegurarnos que sólo tengan acceso a Internet dispositivos que estén dentro de nuestro establecimiento. Entonces podríamos colocar estos transmisores que envíen cierta clave, de modo que un dispositivo pueda probar que está dentro de nuestro local por medio de la combinación adecuada de esas claves.

Para este problema distinguimos dos clases de guardias, los guardias *naturales* y los guardias *generales*. Los guardias naturales son aquellos que sólo pueden ser colocados en la frontera de  $P$ , y además, si el guardia está en un vértice, su rango de transmisión será exactamente el ángulo interior del vértice donde está colocado; en caso de no estar sobre un vértice, su rango de transmisión será  $\pi$ . Para los guardias generales no hay restricción alguna en cuanto al ángulo de transmisión ni donde son colocados. Si se restringe a que estos estén en los vértices se les conoce como vértices guardia generales, y guardias generales en caso contrario

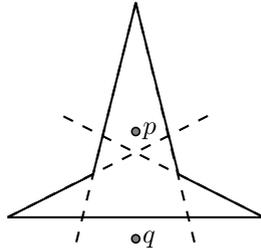


Figura 3.13: Un pentágono que no puede ser vigilado usando guardias vértice naturales.

Como se muestra en la figura 3.13 existen polígonos que no pueden ser vigilados en este sentido, usando solamente guardias naturales colocados en los vértices, puesto que  $p$  y  $q$  tendrían exactamente las mismas llaves, sin embargo  $q$  no está en el pentágono.

Resolviendo otro problema, Dobkin, Guibas, Hershberger y Snoeyink [24] demuestran que  $n$  guardias naturales colocados sobre las aristas de  $P$  son suficientes para vigilar a  $P$ . Haciendo una observación simple sobre el trabajo de [24], T. Crist, M. Hoffman, Y. Okamoto y T. Uno prueban en [14] lo siguiente:

**Teorema 25.** *Todo polígono simple con  $n \geq 4$  aristas puede ser vigilado usando a lo más  $n - 2$  guardias naturales. Esta cota es justa.*

En cuanto a vértices guardia generales, en [27] se prueba el siguiente resultado:

**Teorema 26.** *Todo polígono simple con  $n$  vértices puede ser vigilado usando a lo más  $n - 2$  vértices guardia generales.*

Cabe mencionar que para el resultado de [27] cualquier dispositivo dentro del polígono solamente necesita recibir las claves de un número constante de guardias, de esta forma se ahorra memoria en los dispositivos sensores. Incluso se demuestra que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  vértices guardia generales

son siempre necesarios para vigilar cualquier polígono simple con  $n$  lados. Posteriormente O'Rourke presenta en [23] una familia de polígonos que requieren  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1$  vértices guardia generales para ser vigilado.

Finalmente para guardias generales, se tiene el siguiente resultado mostrado en [14]:

**Teorema 27.** *Cualquier polígono simple con  $n$  vértices puede ser vigilado usando a lo más  $\lfloor \frac{4n-2}{5} \rfloor$  guardias generales. Existen familias de polígonos que requieren al menos  $\lceil \frac{3n-4}{5} \rceil$  guardias de este tipo para ser vigilados.*

Dejando como problema abierto el ajustar la cotas para guardias generales.



## Capítulo 4

# Cuadrangulaciones

Sea  $P$  un polígono simple con un número  $n$ , par, de vértices. Decimos que  $P$  es cuadrangulable, si podemos encontrar  $\frac{n-4}{2}$  diagonales ajenas que unen parejas de vértices de  $P$  y que lo dividen en  $\frac{n-4}{2} + 1$  cuadriláteros (no necesariamente convexos) con interiores ajenos. Es fácil encontrar para cualquier  $n \geq 6$ , polígonos con  $n$  vértices que que no son cuadrangulables, véase la figura 4.1.

En este capítulo se mostrará que siempre podemos agregar algunos puntos en el interior de  $P$ , llamados puntos Steiner, de manera que exista una cuadrangulación de  $P$  tal que los vértices de dichos cuadriláteros sean

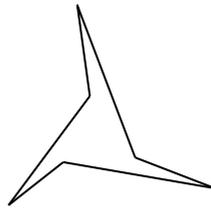


Figura 4.1: Hexágono que no admite cuadrangulaciones.

vértices de  $P$  o puntos Steiner. Para esto se presenta un algoritmo que nos permite cuadrangular cualquier polígono simple, agregando pocos puntos Steiner. A continuación caracterizaremos a los polígonos que admiten una cuadrangulación, resultado que será útil a lo largo del capítulo.

**Lema 1** ([10]). *Sea  $P$  un polígono con  $n$  vértices. Si  $P$  admite una cuadrangulación entonces  $n$  es par.*

*Demostración.* Demostramos el lema con un argumento de conteo muy simple, sea  $Q(P)$  la gráfica geométrica correspondiente a una cuadrangulación. Sean  $e$  y  $f$  el número de aristas de  $Q(P)$  y el número de caras acotadas respectivamente.

A partir de la gráfica dual de  $Q(P)$ , dado que cada cara acotada es un cuadrilátero, se puede concluir fácilmente que:

$$4f + n = 2e$$

$$n = 2(e - 2f)$$

por lo que  $n$  necesariamente será par. □

## 4.1. Cuadrangulando polígonos

Sea  $P$  un polígono simple con un número par de vértices. Previamente S. Ramaswami, P. Ramos y G. Toussaint [53], presentaron un algoritmo en el cual, a partir de una triangulación de  $P$  dada, se obtiene una cuadrangulación de  $P$  usando a lo más  $\frac{n-2}{4}$  puntos Steiner colocados en el interior de  $P$ . Tal algoritmo se basa en un complejo análisis de casos. A continuación se presenta un algoritmo más simple que obtiene el mismo resultado sin depender de ninguna triangulación previa. Posteriormente se muestra una familia de polígonos que no pueden ser cuadrangulados usando menos de  $\frac{n-2}{4}$  puntos Steiner, cerrando un problema abierto por G. Toussaint [53].

Al tener  $P$  un número par de vértices, es posible colorear sus vértices usando dos colores, digamos rojo y azul, de tal forma que para cada

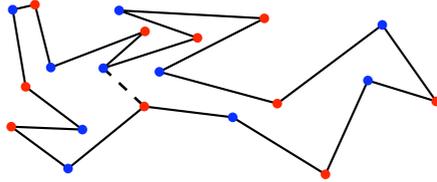


Figura 4.2: Una diagonal bicromática de  $P$ .

arista de  $P$  sus extremos tengan colores distintos. Podemos distinguir entre dos tipos de diagonales de  $P$ , las que tienen extremos con el mismo color, a las que llamaremos monocromáticas, y las que tienen extremos con distinto color, a las que llamaremos bicromáticas. Dada una diagonal monocromática, diremos que esta diagonal es del color de sus extremos.

Observemos que si  $P$  admite una diagonal bicromática, ésta partiría a  $P$  en dos subpolígonos más pequeños con un número par de vértices cada uno, figura 4.2.

Podemos entonces repetir esta operación para cada uno de los subpolígonos obtenidos, esto hasta que ninguno de estos subpolígonos admita diagonales bicromáticas. El resultado de esta operación es una división de  $P$  en subpolígonos  $P_1, \dots, P_k$ , tales que todos tienen un número par de vértices, y éstos son vértices de  $P$ . Claramente los lados de estos subpolígonos son diagonales bicromáticas o lados de  $P$ , por lo que cualquier par de vértices adyacentes de estos subpolígonos tendrán colores distintos.

Vemos que si todo  $P_i$  tiene  $n_i = 4$  vértices, entonces hemos obtenido una cuadrangulación de  $P$  sin haber añadido puntos Steiner.

Supongamos que después de dividir a  $P$  obtuvimos algún  $P_i$  con  $n_i > 4$ . Por construcción sabemos que  $P_i$  no tiene diagonales bicromáticas. En la figura 4.4 se muestra un polígono que no tiene diagonales bicromáticas. En los lemas siguientes tomaremos las consideraciones anteriores.

**Lema 2.** *Todas las diagonales de  $P_i$  tienen el mismo color.*

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que  $P_i$  tiene una diagonal roja  $r$  y otra azul  $b$ . Tenemos dos casos, el primero en el que  $b$  y  $r$  son



Para el siguiente lema, supongamos que  $P_i$  tiene algunas diagonales azules.

**Lema 3.** Sean  $u$  y  $v$  dos vértices con color azul en  $P_i$ , adyacentes a un mismo vértice rojo  $w$ . Entonces  $uw$  es una diagonal de  $P_i$ .

*Demostración.* Supongamos que  $u$  y  $v$  no son visibles en  $P_i$ , entonces existen aristas de  $P_i$  intersecando el segmento de recta que conecta a  $u$  con  $v$ . Sea  $v'$  el vértice de  $P_i$  contenido en el interior del triángulo que forman los vértices  $u, v$  y  $w$ , más alejado del segmento de recta que une a  $u$  y  $v$ , es claro que existe la diagonal  $v'w$ . Esta diagonal sólo puede ser o bicromática o roja, lo cual resulta una contradicción ya que  $P_i$  no tiene diagonales bicromáticas y por el lema anterior  $P_i$  sólo podría tener diagonales azules.  $\square$

Ahora podemos proceder con nuestro algoritmo, para esto supongamos que  $P_i$  solamente tiene diagonales azules. Sea  $P'_i$  la región acotada por las diagonales de  $P_i$ , tales que sus extremos son adyacentes a un vértice rojo común en  $P_i$ . Claramente  $P'_i$  es un polígono simple con exactamente  $\frac{n_i}{2}$  vértices.

Así podemos obtener una triangulación  $T(P'_i)$  de  $P'_i$ , y coloreamos sus vértices usando tres colores, tal como en la prueba de Fisk [34]. Sea entonces  $u$  algún vértice de la clase cromática más pequeña, agreguemos un punto Steiner  $u'$  lo suficientemente cerca de  $u$ , de forma que  $u'$  vea a todos los vértices adyacentes a  $u$  en  $T(P'_i)$ . Uniendo a  $u'$  con  $u$  y los vértices de  $T(P'_i)$  adyacentes a  $u$ , obtenemos una división de  $P_i$  en triángulos con

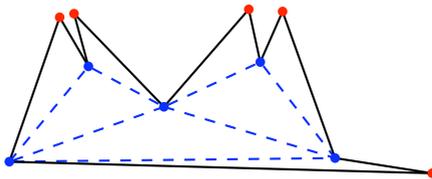


Figura 4.4: Un polígono sin diagonales bicromáticas.

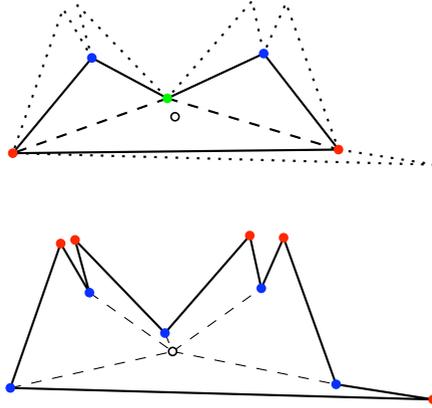


Figura 4.5: Cuadrangulando un polígono sin diagonales bicromáticas.

interiores ajenos, cuyos vértices son vértices de  $P_i$  o algún punto Steiner. Se puede verificar fácilmente que las diagonales de  $T(P'_i)$  y los lados de  $P'_i$  forman un emparejamiento de los triángulos de dicha subdivisión. Entonces eliminando las diagonales de  $T(P'_i)$  y los lados de  $P'_i$  tendremos a  $P_i$  cuadrangulado, esto sin haber usado más de  $\frac{n_i}{6}$  puntos Steiner. En la figura 4.5 se muestra este procedimiento.

Al repetir para cada  $P_i$  con  $n_i > 4$  la operación anterior,  $P_i$  quedará cuadrangulado. Dado que los vértices de cada diagonal bicromática de  $P$  aparecen en dos subpolígonos  $P_i$  y  $P_j$ , es claro que  $\sum_{i=1}^k n_i = n + 2(k - 1)$ . Nótese entonces que la suma  $\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{6}$  se maximiza cuando todo  $n_i = 6$ . Haciendo cuentas podemos concluir que el número de puntos Steiner agregados en el peor de los casos es  $\frac{n-2}{4}$ .

Cabe notar que una cuadrangulación con un número mínimo de puntos Steiner no tendrá diagonales monocromáticas. Esto es fácil de ver ya que cualquier diagonal monocromática de  $P$  lo parte en dos subpolígonos con un número impar de vértices cada uno, los cuales no podrían ser cuadrangulados sin agregar puntos steiner en su frontera, de modo que

por cualquier diagonal monocromática tendríamos que agregar un punto Steiner.

Observemos el hexágono presentado en la figura 4.6a, notemos que no es posible agregar diagonales bicromáticas, por lo que necesariamente se debe agregar un punto Steiner como se muestra en la figura 4.6b para poder cuadrangularlo. Claramente el número de puntos Steiner necesarios es  $\frac{n-2}{4}$ .

Ahora tomemos dos de estos hexágonos y vamos a pegarlos como se muestra en la figura 4.7. Este polígono sigue siendo simple y con diez vértices. Al agregar una diagonal bicromática lo partimos en dos de estos hexágonos, necesitando forzosamente dos puntos Steiner para cuadrangularlo, de nuevo la cuenta da  $\frac{n-2}{4}$ . Por inducción, a partir de dos polígonos  $P_1$  y  $P_2$  construidos de esta forma y cada uno con  $n_1$  y  $n_2$  vértices, tal que  $n_1 + n_2 = n + 2$ , podemos pegarlos y obtener un polígono de  $n$  vértices, el cual necesitará  $\frac{n_1-2+n_2-2}{4}$  puntos Steiner para ser cuadrangulado, lo cual resulta  $\frac{n-2}{4}$ .

Esto se resume en lo siguiente:

**Teorema 28.** *Dado  $P$  un polígono simple con un número par de vértices,  $P$  siempre puede ser cuadrangulado agregando a lo más  $\frac{n-2}{4}$  puntos Steiner en su interior. Esta cota es justa.*

Cuando tenemos un polígono  $P$  con un número impar de vértices sabemos por el lema 1 que  $P$  no puede ser cuadrangulado. Sin embargo siempre podemos agregar un vértice sobre la frontera de  $P$ , obteniendo



Figura 4.6: Un hexágono sin diagonales bicromáticas.

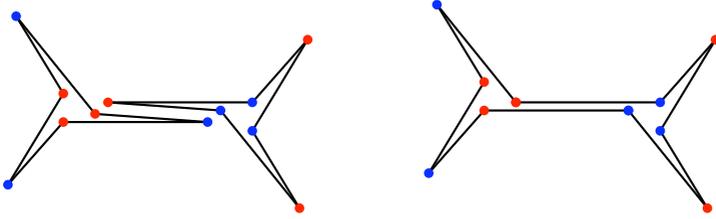


Figura 4.7: Construcción de la cota inferior.

un nuevo polígono con un número par de vértices, al cual podemos cuadrangular. De esto podemos concluir que agregando a lo más  $\frac{n-1}{4}$  puntos Steiner colocados en el interior de  $P$  y uno más en la frontera podemos cuadrangular a  $P$  cuando  $n$  es impar.

Para el resultado principal de la tesis hace falta probar que  $\frac{n-1}{4} - 1$  puntos Steiner en el interior de  $P$  y uno más en su exterior son siempre suficientes para cuadrangular a  $P$ . Nos referiremos como  $v'$  a este punto colocado en su exterior. Como ya se mencionó, el número de puntos Steiner agregados por nuestro algoritmo se maximiza cuando el número de hexágonos en la subdivisión obtenida a partir de las diagonales bicromáticas es máximo. Veremos que escogiendo con cuidado a  $v'$  podremos forzar que nuestra subdivisión no pueda tener más de  $\frac{n-5}{4}$  hexágonos.

Se sabe que al triangular  $P$  quedarán al menos dos orejas, esto es, dos triángulos de la triangulación tales que tienen como lados a dos lados de  $P$ , eliminando una oreja obtenemos un polígono  $P'$  con un número par de vértices, por lo que podremos cuadrangularlo con nuestro algoritmo agregando a lo más  $\frac{n-3}{4}$  puntos Steiner. Regresando la oreja, y colocando a  $v'$  en alguno de los lados exteriores de ella habremos cuadrangulado a  $P$ . Sin embargo, para nuestro resultado principal necesitamos agregar no más de  $\frac{n-3}{4}$  puntos Steiner.

Sea  $S(P')$  una subdivisión de  $P'$  obtenida por nuestro algoritmo antes de agregar los puntos Steiner. Claramente la gráfica dual de  $S(P')$  debe ser un árbol, y para que se hayan usado  $\frac{n-3}{4}$  puntos Steiner, forzosamente

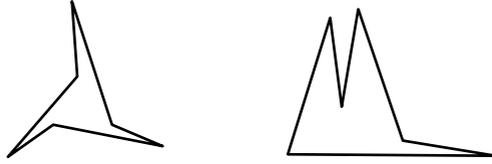


Figura 4.8: Hexágonos sin diagonales bicromáticas.

$S(P')$  es una división de  $P'$  en hexágonos, por lo que una hoja de éste árbol corresponderá a un hexágono tal que cinco de sus lados también son lados de  $P$ . Sea  $h$  este hexágono, claramente  $h$  no tiene diagonales bicromáticas, por tanto  $h$  se verá similar a alguno de los dos hexágonos mostrados en la figura 4.8.

Entonces podremos agregar a  $v'$  cerca de alguno de los lados de  $h$  de forma que obtenemos un heptágono, el cual puede ser dividido en dos cuadriláteros y un triángulo  $T$ , figura 4.9.

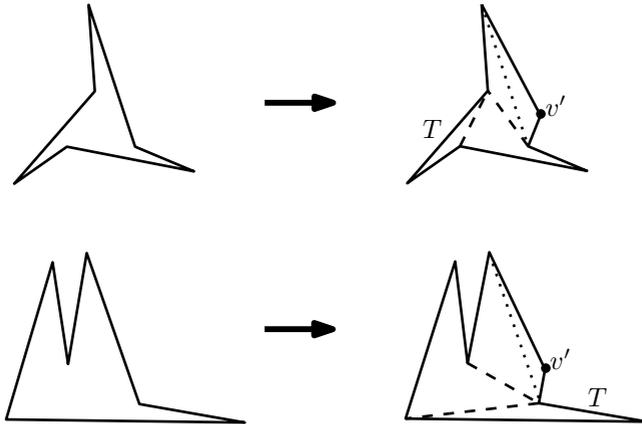


Figura 4.9: Forma de colocar a  $v'$ .

Es fácil ver que no importa cerca de que arista se coloque a  $v'$ , por lo que podemos forzar que los vértices de  $T$  sean sólo vértices de  $P$  y además a que uno de sus lados sea la diagonal bicromática que separa a  $h$  del resto de  $P$ . Si eliminamos los dos cuadriláteros obtenidos de esa forma y regresamos la oreja de  $P$  que eliminamos al inicio, obtenemos un polígono  $P''$  con  $n - 3$  vértices. Usando el algoritmo presentado, cuadrangulamos a  $P''$  usando a lo más  $\frac{n-5}{4}$  puntos Steiner colocados en su interior. Al regresar los dos cuadriláteros que eliminamos de  $h$  tendremos a  $P$  cuadrangulado. De modo que podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 29.** *Sea  $P$  un polígono simple con  $n \geq 4$  vértices. Entonces si  $n$  es par,  $\frac{n-2}{4}$  puntos Steiner escogidos en el interior de  $P$  son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para cuadrangular a  $P$ . Cuando  $n$  es impar,  $\frac{n-5}{4}$  puntos Steiner escogidos en el interior de  $P$ , y uno más sobre cualquier arista del mismo, son siempre suficientes para cuadrangular a  $P$ .*

# Capítulo 5

## Galerías de arte curvilíneas

Recientemente M. Karavelas y E. Tsigaridas [42] propusieron una nueva variante del problema de la Galería de Arte, en la cual se permite que las paredes de la galería sean arcos de curvas. Sorprendentemente cuando se restringe a que las curvas sean todas cóncavas o convexas el número de guardias necesarios y suficientes para vigilarlas resulta ser una función lineal del número de vértices.

### 5.1. Introducción

Sea  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, y  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$  un conjunto de  $n$  arcos de curvas simples que no se intersecan por pares excepto, posiblemente, en sus extremos, donde los extremos de  $a_i$  son exactamente  $v_i$  y  $v_{i+1}$  (en suma módulo  $n$ ). La región cerrada y acotada por la unión de los elementos de  $A$  la llamaremos un *polígono curvilíneo*, cuyo conjunto de aristas y vértices son, respectivamente,  $A$  y  $V$ .

Sea  $a$  una curva que une dos puntos  $v$  y  $v'$ . Decimos que  $a$  es un *arco*

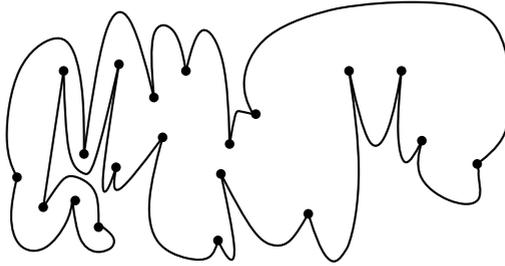


Figura 5.1: Un polígono arista-convexo  $P$ .

*convexo* si y sólo si la unión de  $a$  con el segmento de recta que une a  $v$  y  $v'$  es una curva simple que acota a una región convexa del plano, sea  $C_a$  dicha región.

Sea  $P$  un polígono curvilíneo, y  $a_i$  una arista de  $P$ . Diremos que  $a_i$  es *convexa* con respecto a  $P$  si y sólo si  $a_i$  es un arco convexo, y para cualquier punto  $p$  de  $a_i$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que cualquier punto en el interior de  $C_{a_i}$  a distancia menor o igual a  $\varepsilon$  de  $p$  está en  $P$ . Si  $a_i$  es un arco convexo pero no es una arista convexa con respecto a  $P$ , diremos que  $a_i$  es *cóncava*. A partir de ahora asumiremos que todas las aristas de  $P$  son convexas, o que todas son cóncavas. En el primer caso,  $P$  será un *polígono arista-convexo*, en el segundo será un *polígono arista-cóncavo*, ver la figura 5.1. A lo largo del capítulo usaremos indistintamente el término polígono y galería.

Para el caso general en el que el polígono no es ni arista-convexo, ni arista cóncavo, el número de guardias necesarios para vigilarlo puede ser no acotado. Dicho caso se ilustra en la figura 5.2. Sin embargo, para los polígonos arista-convexos y arista-cóncavos, el número de guardias siempre suficientes y a veces necesarios resulta estar acotado por una función lineal del número de vértices de  $P$ .

Karavelas y Tsigaridas [42] prueban que  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes para vigilar cualquier galería arista-convexa con  $n$  vértices, además, prueban que  $2n - 4$  puntos guardia son siempre suficien-

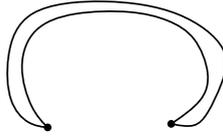


Figura 5.2: Una galería curvilínea que requiere un número no acotado de guardias.

tes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier galería arista-cóncava con  $n$  vértices. Posteriormente junto a Cs. D. Tóth [44] muestran una familia de polígonos arista-convexos que requieren al menos  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia para ser vigilados. Para puntos guardia,  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias siguen siendo siempre suficientes, sin embargo, no se conoce ningún ejemplo donde se necesiten más de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia.

El resultado principal de esta tesis mejora la cota superior para puntos guardia en galerías arista-convexas. Además se presenta una prueba para la cota de vértices guardia en polígonos arista-convexos, la cual resulta más sencilla a la dada en [42]. En la siguiente sección se presentan algunos resultados anteriores sobre galerías curvilíneas, posteriormente, en la sección 5.3 se define el *polígono rectilíneo subyacente* de un polígono arista-convexo, el cuál será útil para los resultados de la tesis que se presentan en este capítulo.

## 5.2. Resultados anteriores

### 5.2.1. Puntos guardia en galerías arista-cóncavas

Sea  $P$  un polígono arista-cóncavo. Existen polígonos arista-cóncavos, como el que se muestra en la figura 5.4, los cuales no pueden ser vigilados colocando guardias únicamente en los vértices. Sin embargo, siempre podremos encontrar un conjunto de guardias colocados en el interior de  $P$  que lo vigilan y además el tamaño de dicho conjunto esté acotado por

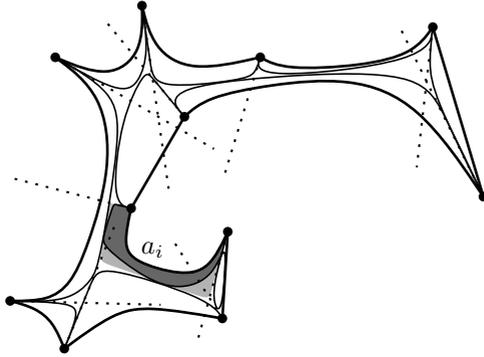


Figura 5.3: Ilustración de la prueba de suficiencia.

una función lineal del número de vértices de  $P$ . Entonces probaremos lo siguiente:

**Teorema 30.** *Sea  $P$  una galería arista-cóncava con  $n$  vértices. Entonces  $2n - 4$  guardias colocados en el interior de  $P$  son siempre suficientes y algunas veces necesarios para vigilar a  $P$ .*

*Demostración.* La prueba se basa en la dada por Fejes Tóth en [32] y presentada en el capítulo 3 de esta tesis. Sea  $t_i(v_j)$  la tangente a  $a_i$  en el punto  $v_j$ , para  $j = i, i + 1$ , y sea  $b_{i+1}$  el rayo que biseca a  $t_i(v_{i+1})$  y  $t_{i+1}(v_{i+1})$ , y que apunta al interior de  $P$ .

Construimos un conjunto de aristas convexas  $\kappa = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n\}$  contenidas completamente en  $P$ , tales que:

1. los extremos de  $\kappa_i$  son exactamente  $v_i$  y  $v_{i+1}$ ,
2.  $b_i$  (respectivamente  $b_{i+1}$ ) es tangente a  $\kappa_i$  en  $v_i$  (respectivamente  $v_{i+1}$ ),
3. sea  $S_i$  la región convexa acotada por  $\kappa_i$  y el segmento que une a  $v_i$  con  $v_{i+1}$ , entonces  $C_{a_i} \subseteq S_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ,

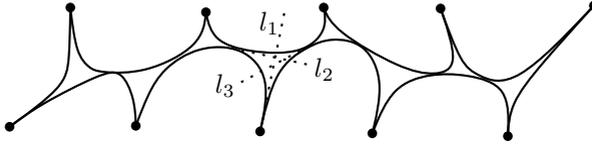


Figura 5.4: Ilustración de la cota inferior.

4. las aristas  $\kappa_i$  no se intersecan excepto en sus extremos, y
5. el número de tangencias entre los elementos de  $\mathcal{K}$  es máximo.

Sea  $Q$  el polígono arista-cóncavo acotado por  $\mathcal{K}$ .

Supongamos que  $\kappa_i$  y  $\kappa_{\sigma(j)}$  son tangentes, para  $i = 1, \dots, m$ , y sea  $\ell_{i,\sigma(j)}$  la tangente común entre  $\kappa_i$  y  $\kappa_{\sigma(j)}$ . Sea  $s_{i,\sigma(j)}$  el segmento que conecta los puntos de intersección de  $\ell_{i,\sigma(j)}$  con  $\ell_{i,\sigma(j-1)}$  y  $\ell_{i,\sigma(j+1)}$ . Sea  $\Pi_i$  la región poligonal definida por los segmentos  $s_{i,\sigma(j)}$  y el segmento que une los extremos de  $\kappa_i$ . Podemos ver que colocando guardias en los vértices de  $\Pi_i$  vigilamos a  $P$  y  $Q$ , sea  $G_Q$  el conjunto de guardias obtenido de esta forma. Construimos una gráfica  $\Gamma$  que tenga como conjunto de vértices a  $\mathcal{K}$ . Dos vértices  $\kappa_i$  y  $\kappa_j$  serán adyacentes si y sólo si  $\kappa_i$  y  $\kappa_j$ . Dado que las tangencias son máximas,  $\Gamma$  es una gráfica plana combinatoriamente equivalente a una triangulación de un polígono simple de  $n$  lados, de modo que  $\Gamma$  tiene  $n - 2$  caras. Vemos que cada una de las caras contiene tres guardias de  $G_Q$ . De hecho, por cada una de estas caras bastan 2 guardias de  $G_Q$  para vigilar a  $Q$  y a  $P$ . De esta forma podemos encontrar un conjunto de guardias de tamaño  $2(n - 2)$ . Ver figura 5.3.

En la figura 5.4 se presenta un polígono que requiere  $2n - 4$  guardias para ser vigilado, ya que cada una de las regiones pseudotriangulares requiere dos guardias para ser vigilado. Necesitamos un punto en cada una de las líneas  $l_1, l_2$  y  $l_3$  para poder vigilar las regiones cercanas a las esquinas del pseudotriángulo. Por eso necesitamos dos guardias por cada pseudotriángulo, los cuales son exactamente  $n - 2$ .

□

### 5.2.2. Guardias móviles en galerías arista-convexas

Como se menciona en el capítulo 3, en [52] O'Rourke presentó una variante del problema de la galería de arte en la cual se permite que los guardias se muevan sobre una arista (arista guardia) o sobre una diagonal (diagonal guardia) de la galería. Decimos que un conjunto de guardias móviles se compone por aristas guardia y diagonales guardia. Diremos que la galería es vigilada por un conjunto de guardias móviles  $G$ , si para cualquier punto  $p$  en el interior de la galería existe al menos un punto contenido en  $G$  que vea a  $p$ .

En [43] Karavelas y Tsigaridas presentan esta variante sobre polígonos arista-convexos. Sea  $P$  un polígono con  $n \geq 3$  vértices y  $T(P)$  alguna triangulación de  $P$ . Un conjunto  $2$ -dominante por aristas de  $T(P)$  es un subconjunto  $D$  de las aristas de  $T(P)$ , con la propiedad que cada triángulo en  $T(P)$  tiene al menos dos vértices extremos de alguna arista en  $D$ .

En [43] se dan cotas para el número de aristas guardia y guardias móviles suficientes para vigilar una galería arista-convexa  $P$ . Para esto primero obtienen, a partir de  $P$ , una gráfica  $T(P)$  isomorfa a una triangulación de un polígono de  $n$  vértices, forzando a que se encuentren ciertas aristas de modo que éstas puedan ser mapeadas a aristas o diagonales de  $P$ . De modo que el problema se reduce a encontrar un conjunto  $2$ -dominante por aristas de  $T(P)$ .

Para obtener las cotas primero se demuestra lo siguiente:

**Lema 4.** *Sea  $\lambda$  un entero mayor o igual a dos. Sea  $P$  un polígono con  $n \geq 2\lambda$  vértices y sea  $T(P)$  una triangulación de  $P$ . Existe una diagonal que divide a  $P$  en dos partes, una de las cuales tiene  $k$  aristas de  $P$ , para  $\lambda \leq k \leq 2(\lambda - 1)$ .*

*Demostración.* Tomamos a  $d$  una diagonal de  $T(P)$  que separe un número mínimo de aristas de  $P$  de modo que estas sean al menos  $\lambda$ . Sea  $k \geq \lambda$  este número mínimo, y etiquetemos los vértices de  $P$  como  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ , tal que los extremos de  $d$  sean  $v_0$  y  $v_k$ . Sea  $v_t$ , con  $0 < t < k$ , el vértice tal que junto con  $d$  forma un triángulo de  $T(P)$ . Dado que  $k$  es mínimo tenemos que  $t \leq \lambda - 1$  y  $k - t \leq \lambda - 1$ , por lo tanto  $\lambda \leq k \leq 2(\lambda - 1)$ .  $\square$

Posteriormente prueban el siguiente lema, del cual no se presentará la prueba ya que no es tan difícil de ver, sin embargo implica un tedioso análisis de casos.

**Lema 5.** *Cualquier triangulación  $T(P)$  de un polígono  $P$  con  $n$  vértices,  $3 \leq n \leq 7$ , puede ser 2-dominada por  $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$  aristas de  $T(P)$ .*

Usando los dos lemas anteriores con  $\lambda = 3$  y por medio de contracciones de aristas obtienen el siguiente resultado por inducción:

**Teorema 31.** *Cualquier triangulación  $T(P)$  de un polígono  $P$  con  $n \geq 3$  vértices puede ser 2-dominada por  $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$  aristas de  $T(P)$ .*

En [43] presentan un algoritmo de tiempo  $O(n \log n)$  que calcula este conjunto 2-dominante.

Permitiendo únicamente aristas guardia se puede utilizar el lema 4 con  $\lambda = 5$  para así obtener el siguiente resultado:

**Teorema 32.** *Sea  $P$  un polígono con  $n \geq 3$  vértices y  $T(P)$  una triangulación de  $P$ . Se puede encontrar un conjunto de  $\lfloor \frac{2n+1}{5} \rfloor$  aristas de  $P$  que formen un conjunto 2-dominante de  $T(P)$ .*

En [43] se presenta un algoritmo de tiempo  $O(n^2)$  que obtiene tal conjunto.

### 5.3. El polígono rectilíneo subyacente

Sea  $P$  un polígono arista-convexo, definimos a  $\bar{P}$ , el polígono rectilíneo subyacente de  $P$ , como sigue: sean  $\bar{V} = V$  los vértices de  $\bar{P}$  y definimos a  $\bar{E}$ , las aristas de  $\bar{P}$ , como sigue: sea  $E_i$  el conjunto de aristas de la poligonal definida por el camino más corto contenido en  $P$  entre  $v_i$  y  $v_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ , como se muestra en la figura 5.5, entonces  $\bar{E} = \cup_{i=0}^{n-1} E_i$ .

Como se puede ver en la figura 5.5,  $\bar{P}$  es una gráfica geométrica plana conexa la cual tendrá componentes en forma de polígonos cuyo interior está contenido en  $P$  y trayectorias que las conectan. A estas componentes

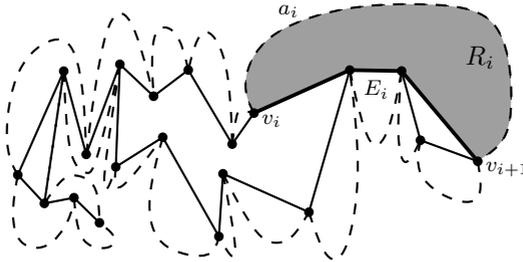


Figura 5.5: El polígono rectilíneo subyacente de  $P$ .

les llamaremos las componentes poligonales de  $\bar{P}$ . No es difícil ver que cada arista de  $\bar{P}$  está en a lo más una componente poligonal de  $\bar{P}$ .

Sea  $a_i$  una arista de  $P$ . La habitación  $R_i$  de  $a_i$  es la región cerrada acotada por la unión de  $a_i$  y  $E_i$ , ver la figura 5.6. Decimos que un punto  $p \in P$  ve a un segmento de recta  $\ell$  si para todo punto  $q \in \ell$  el segmento de recta que une a  $p$  con  $q$  está contenido en  $P$ . Diremos que un punto  $g$  ve a un conjunto  $S \subset P$  si para todo elemento  $s \in S$  el segmento de recta que une a  $g$  con  $s$  está contenido en  $P$ . El siguiente resultado será de gran utilidad.

**Lema 6.** *Para cualquier punto  $p$  en una habitación  $R_i$ , existe una arista  $e$  de  $\bar{E}_i$ , tal que  $p$  ve a  $e$ .*

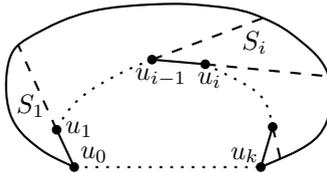


Figura 5.6: Ilustración de la prueba del Lema 6.

*Demostración.* Si  $E_i$  contiene únicamente una arista es claro que  $p$  ve a esa arista. Supongamos entonces que  $E_i$  contiene varias aristas de  $\bar{P}$ , digamos  $e_1, e_2, \dots, e_k$  tales que  $e_1$  contenga a  $v_i$  y  $e_k$  a  $v_{i+1}$ .

Reetiquetemos los vértices de  $E_i$  como sigue:  $v_i = u_0, u_1, \dots, u_k = v_{i+1}$ . Ahora extendemos cada  $e_j$ , a partir de  $u_j$  hasta que toque a  $a_i$ , para  $j = 1, \dots, k - 1$ . Esto define una división de  $R_i$  en regiones convexas  $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$  tal que  $e_j$  está totalmente contenida en la frontera de  $S_j$ , figura 5.6. Claramente  $p$  estará en alguna  $S_j$ , y por lo tanto  $p$  ve a  $e_j$ .  $\square$

Sea  $S$  el conjunto de las componentes poligonales de  $\bar{P}$ . Definimos a  $\Gamma(\bar{P})$  como la gráfica con conjunto de vértices  $S$ , y dos elementos  $s_i$  y  $s_j$  de  $S$  serán adyacentes si y sólo si para cualquier vértice de  $s_i$ , existe un camino en  $\bar{P}$  que lo conecta con alguno de  $s_j$ , y dicho camino no contiene aristas de otro elemento de  $S$  diferente de  $s_i$  y  $s_j$ . El siguiente lema enuncia una propiedad útil de  $\bar{P}$ .

**Lema 7.**  $\Gamma(\bar{P})$  es un árbol.

*Demostración.* Comencemos duplicando cada vértice de corte  $v$  en  $\bar{P}$  con otro  $v'$  a distancia  $\varepsilon$  de  $v$ , como se muestra en la figura 5.7, obteniendo un nuevo polígono  $\bar{P}'$  cuyo interior es conexo y además está contenido en  $P$ .

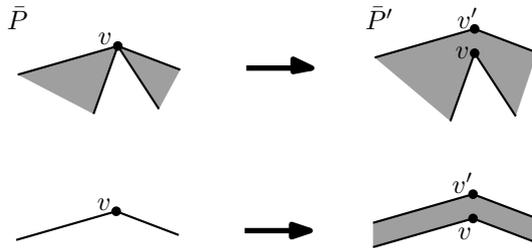


Figura 5.7: Ilustración de como obtener a  $\bar{P}'$  a partir de  $\bar{P}$  en la prueba del lema 7. La región sombreada corresponde a los interiores de  $\bar{P}'$  y  $\bar{P}$ .

Ahora supongamos que  $\Gamma(\bar{P})$  tiene un ciclo  $C$ . Vemos que los elementos de  $C$  junto con las trayectorias que los conectan forman un hueco en  $\bar{P}'$ , lo cual implicaría que  $P$  tiene un hueco, contradiciendo el hecho de que  $P$  es simple. De esto se sigue que  $\Gamma(\bar{P})$  debe ser un árbol.  $\square$

## 5.4. Vértices guardia

A continuación damos una prueba directa del resultado de Karavelas, Tóth y Tsigaridas [44].

**Teorema 33.** *Sea  $P$  un polígono arista-convexo con  $n$  vértices, entonces  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes y algunas veces necesarios para vigilar  $P$ .*

*Demostración.* Para la parte de suficiencia sea  $T(\bar{P})$  una *triangulación* de  $\bar{P}$ , obtenida al triangular las componentes poligonales de  $\bar{P}$ . Del lema 7 podemos deducir que los vértices de  $T(\bar{P})$  pueden ser 3-coloreados de forma que cualquier par de vértices adyacentes en  $T(\bar{P})$  tengan colores distintos, ver la figura 5.8. Se sigue del lema 6 y de la prueba de Fisk [34], que cualesquiera dos clases cromáticas de esta 3-coloración de  $T(\bar{P})$  vigilan  $P$ , por lo que tomando las dos clases más pequeñas obtenemos un conjunto de a lo más  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias que vigilan a  $P$ .

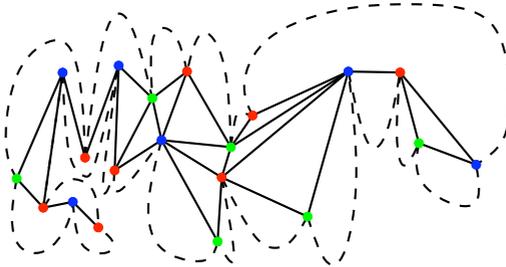


Figura 5.8: Triangulación y 3-coloración de  $\bar{P}$ .

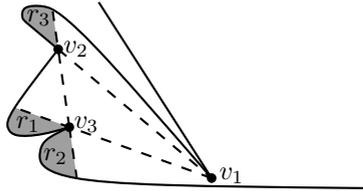


Figura 5.9: Bloque básico para la construcción de la cota inferior.

Por razones de completez se muestra una familia de polígonos arista-convexos con  $n = 3m$  vértices tales que cualquier conjunto de guardias colocados en vértices de los mismos, tiene al menos  $\frac{2n}{3}$  elementos. Nuestra construcción es muy similar a la presentada en [44]. Sean  $v_1, v_2, v_3$  y  $r_1, r_2, r_3$  los vértices y regiones mostradas en la figura 5.9.

Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  el interior de la región  $r_i$  no es vigilada por  $v_i$ . Por lo que es claro que un guardia colocado en cualquiera de  $v_1, \dots, v_3$  no basta para vigilar las habitaciones de estas aristas. Es fácil ver que el ángulo entre  $l_1$  y  $l_2$  puede ser tan cercano a  $\pi$  como queramos, conservando la propiedad anterior, por lo que al tomar cualquier polígono convexo y colocando en cada vértice una curva como la mostrada anteriormente, obtenemos un polígono arista-convexo como el mostrado en la figura 5.10, demostrando así la parte de necesidad.  $\square$



Figura 5.10: Una parte de un polígono que necesita  $\frac{2n}{3}$  guardias en los vértices para ser vigilado.

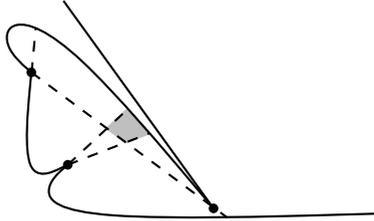


Figura 5.11: Sólo un punto basta para vigilar este bloque.

## 5.5. Puntos guardia

Cuando eliminamos la restricción de que los guardias estén sólo en los vértices de un polígono arista-convexo, el número de guardias necesarios para vigilar la familia mostrada en la sección anterior se reduce. Como se puede ver en la figura 5.11, cualquier punto en la región sombreada, vigila esta parte de la galería de modo que  $\frac{n}{3} + 1$  guardias son suficientes para vigilar una galería como la que se muestra en la figura 5.10.

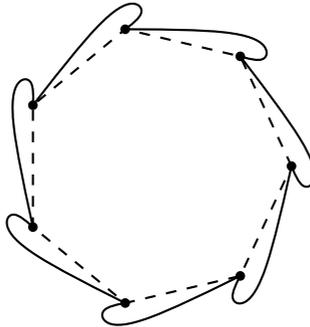


Figura 5.12: Un polígono arista-convexo que necesita  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia para ser vigilado.

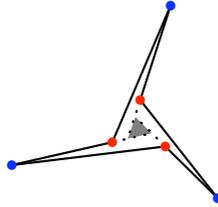


Figura 5.13:

Hasta ahora no conocemos ningún ejemplo de polígonos arista-convexos que requieran más de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia para ser vigilados. En la figura 5.12 se muestra un polígono que requiere  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia para ser vigilado. En esta sección probamos que cualquier polígono arista-convexo puede ser vigilado usando  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  guardias.

Por el lema 6 sabemos que si los vértices y aristas de  $\bar{P}$  forman una gráfica bipartita, entonces al colorear los vértices de  $\bar{P}$  con dos colores de tal forma que vértices adyacentes reciban colores distintos, los vértices de cualquier clase cromática en esta coloración, siempre bastan para vigilar las habitaciones de  $P$ , ya que tendremos un guardia en todas las aristas de  $\bar{P}$ . Sin embargo, podría ser que el interior de  $\bar{P}$  no esté vigilado, esto lo podemos ver de la siguiente manera: supongamos que  $\bar{P}$  tiene la forma del hexágono mostrado en la figura 5.13, vemos que la clase cromática roja vigila completamente a  $P$ , sin embargo, la azul podría dejar la región sombreada sin vigilar. Consideremos el polígono de la figura 5.14, es fácil ver que ninguna de las dos clases cromáticas lo vigilan.

Observemos que si las componentes poligonales de  $\bar{P}$  fueran cuadrangulares, al bicolorar los vértices de la gráfica bipartita inducida por dicha cuadrangulación, los vértices de cualquier clase cromática vigilarían las habitaciones de  $P$  y el interior de  $\bar{P}$ , esto por que con dos guardias colocados en dos vértices de un cuadrilátero son suficientes para iluminarlo, sin importar en qué vértices sean colocados. En tal caso,  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  guardias bastan para vigilar  $P$ .

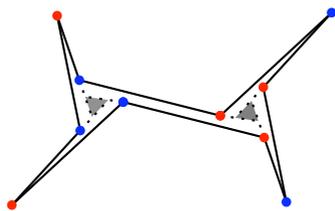


Figura 5.14:

Supongamos que  $\bar{P}$  contiene sólo una componente poligonal y que esta no es un triángulo. Por el teorema 29 podemos obtener una cuadrangulación del interior de  $\bar{P}$  agregando a lo más  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner. Dicha cuadrangulación induce una gráfica bipartita con a lo más  $\lfloor \frac{5n}{4} \rfloor$  vértices, la cual puede ser 2-coloreada. Por la observación hecha en el párrafo anterior cualquier clase cromática de dicha coloración vigila a  $P$ . Tomando la clase cromática más pequeña, obtenemos un conjunto con a lo más  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia (ya que algunos pueden ser puntos Steiner) que vigilan  $P$ .

En general,  $\bar{P}$  puede tener varias componentes poligonales. Es fácil ver que cualesquiera dos componentes poligonales de  $\bar{P}$  comparten a lo más un vértice. De esto no es difícil mostrar que si  $\bar{P}$  contiene más de una componente poligonal y ninguna es un triángulo, entonces podemos cuadrangular todas las componentes poligonales de  $\bar{P}$  agregando a lo más  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner. Por tanto podemos encontrar un conjunto de a lo más  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia que vigilan  $P$ .

La suposición de que no haya triángulos en  $\bar{P}$  se debe a que cuadrangular cada triángulo de  $\bar{P}$  nos forzaría a agregar más de  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner para poder cuadrangular a  $\bar{P}$ . Por otra parte, dejar los triángulos como tales y cuadrangular el resto de las componentes poligonales de  $\bar{P}$  no induce una gráfica bipartita. Ahora veremos que los triángulos pueden ser vigilados sin incrementar el número de guardias requeridos.

Supongamos entonces que  $\bar{P}$  tiene un sólo triángulo  $T$ . Reconocemos los siguientes casos:

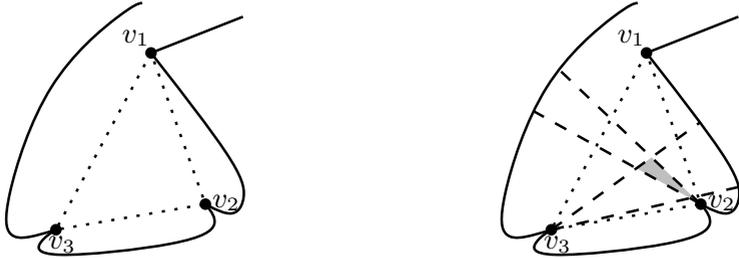


Figura 5.15: Ilustración del caso 1.

1.  $T$  tiene un único vértice con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ .
2.  $T$  tiene más de un vértice con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ .

Para el primer caso es fácil ver que los vértices de  $T$  deben ser consecutivos en  $P$ , por lo que sin pérdida de generalidad podemos decir que son  $v_1, v_2, v_3$ , y que  $v_1$  es el vértice de grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ , ver la figura 5.15. Sea  $v_4$  el segundo vértice de  $a_3$ . Es fácil ver que en este caso siempre podemos escoger un punto  $p$ , como se muestra en la figura 5.15 que vigila a  $T$ , las habitaciones de  $a_1$  y  $a_2$ , así como parte de la habitación de  $a_3$ . Ahora podemos substituir  $a_3$  por un nuevo arco convexo que contenga la parte no iluminada de la habitación de  $a_3$  y que una a  $v_1$  con  $v_4$ , obteniendo un polígono arista-convexo con  $n - 2$  vértices. De esta forma, podemos eliminar todos los triángulos de  $\bar{P}$  con dos vértices de grado dos.

Antes de trabajar el segundo caso hagamos la siguiente observación que será de utilidad. Sea  $v_i$  un vértice de grado mayor o igual a 3. Claramente  $v_i$  está en los extremos de  $E_i$  y  $E_{i-1}$ , al tener grado mayor a 2,  $v_i$  incide al menos en tres aristas distintas,  $e_1, e_2$  y  $e_3$  de  $\bar{P}$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $e_1 \in E_i$  y  $e_2 \in E_{i-1}$ . Por tanto  $v_i$  debe aparecer en una componente poligonal de  $\bar{P}$ . Claramente  $e_1$  y  $e_2$  no están en la misma componente poligonal, de lo contrario  $v_i$  necesariamente tendría grado 2. Es fácil ver que  $e_3 \in E_j$ , para alguna  $j \neq i, j \neq i - 1$ , de esto se sigue la siguiente observación:

**Observación 1.** *Todo vértice  $v_i$  de  $P$ , con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ , necesariamente incide en dos aristas de una  $E_j$ , además al menos una de esas aristas pertenece a una componente poligonal de  $\bar{P}$ .*

Supongamos ahora que  $T$  tiene más de un vértice con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ . Sean  $u, v$  y  $w$ , los vértices de  $T$ , y digamos que  $u$  y  $v$  tienen grado mayor a 2. Sea  $\bar{P}'$  la subgráfica de  $\bar{P}$  obtenida al remover la arista  $uv$  de  $\bar{P}$ . Dado que  $\bar{P}'$  ya no contiene triángulos, podemos obtener una cuadrangulación  $Q(\bar{P}')$  de  $\bar{P}'$ , agregando a lo más  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner. Sea  $C$  una 2-coloración de  $Q(\bar{P}')$  tal que vértices adyacentes tengan distintos colores. Falta probar que cualquiera de las clases cromáticas de  $C$  vigila a  $P$ .

Es claro que  $u$  y  $v$  pertenecerán a la misma clase cromática en  $C$ , digamos la clase azul, y  $w$  a la otra, digamos la roja. Claramente el interior de  $\bar{P}$  es vigilado por cualquiera de las dos clases cromáticas. Por el lema 6 sabemos que la clase azul vigila todas las habitaciones de  $P$  ya que tendremos al menos un guardia por cada arista de  $\bar{P}$ , sin embargo, no es directo que la clase roja vigile también las habitaciones de  $P$ .

Notemos que la arista  $uw$  necesariamente pertenece a alguna  $E_i$ . Distinguiamos los siguientes subcasos.

**Caso 2.1.**  $|E_i| = 1$ . En este caso  $u$  y  $v$  son los extremos de  $a_i$ , y por la Observación 1 existen dos cadenas  $E_j$  y  $E_s$  tales que  $uw \in E_j$  y  $vw \in E_s$ . Dado que  $E_j$  y  $E_s$  son cadenas convexas,  $w$  vigila completamente la habitación de  $a_i$ , que era la única habitación que no podíamos garantizar que era vigilada por la clase cromática roja. figura 5.16a.

**Caso 2.2.**  $|E_i| > 1$ , y  $u$  o  $v$  está en algún extremo de  $E_i$ , figura 5.16b. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $u$  es el extremo de  $E_i$ , nuevamente tenemos que la arista  $uw$  pertenece a una cadena  $E_j$ , donde  $u$  no está en ningún extremo de  $E_j$ .

Extendamos la arista  $vw$  desde  $v$  hasta que toque a  $a_i$ , sea  $v'$  el punto donde la toca, definamos el arco  $a'_i$  como la unión del segmento de  $a_i$  que conecta a  $v'$  con  $u$  y el segmento de recta que une a  $v'$  con  $v$ . Análogamente, sea  $a''_i$  el arco obtenido al unir el segmento de  $a_i$  que conecta a  $v'$  con el otro extremo de  $a_i$  y el segmento de recta que une a  $v'$  con  $v$ .

Entonces podemos dividir  $P$  en dos polígonos arista-convexos  $P_1$  y  $P_2$ ,

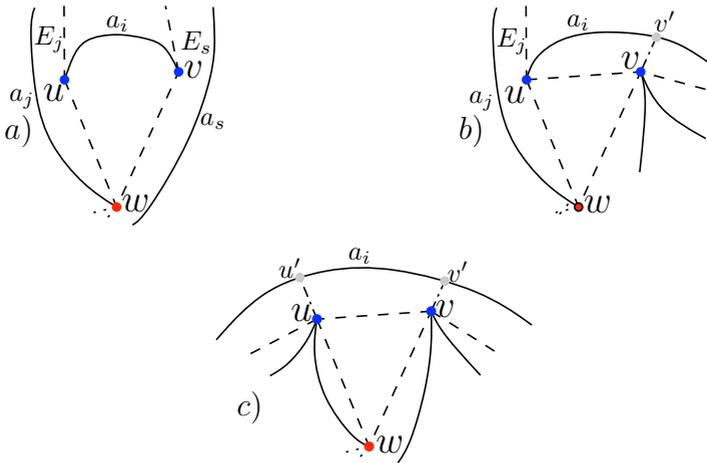


Figura 5.16: Ilustración del caso 2.

con la característica de que sus conjuntos de vértices son subconjuntos propios de los vértices de  $P$ , y sólo comparten el vértice  $v$ . No es difícil probar que  $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 = \bar{P}$ .

Supongamos que  $P_1$  es el polígono que contiene a  $w$ , entonces cualquier clase cromática de  $C$  vigila completamente a  $P_2$ , y a todo  $P_1$  a excepción posiblemente de la habitación de  $a'_i$ . Sin embargo, por la observación 1, y la forma en que se construyó  $a'_i$ , el punto  $w$  vigila completamente tal habitación, por lo que cualquier clase cromática vigila también a  $P_1$ , y por tanto a  $P$ .

**Caso 2.3.**  $|E_i| > 1$ , y ni  $u$  ni  $v$  están en algún extremo de  $E_i$ , figura 5.16c. Observamos que al extender las aristas  $uw$  y  $vw$  en  $u$  y  $v$ , respectivamente, hasta que toquen a  $a_i$ , dividimos  $P$  en tres polígonos arista-convexos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  de manera similar al caso anterior. Nuevamente  $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 \cup \bar{P}_3 = \bar{P}$ , por lo que si  $P_1$  es el polígono que contiene a  $w$ , entonces  $P_2$  y  $P_3$  no contienen triángulos, por lo que cualquier clase



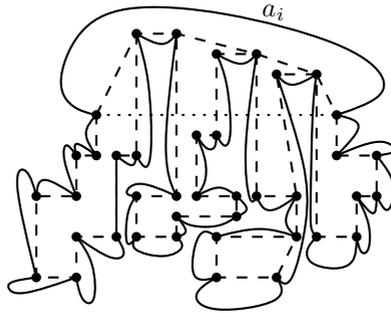


Figura 5.18: Galería pseudo-ortogonal  $P$  con una arista  $a_i$  para la cual  $|E_i| > 1$ .

de la sección anterior podemos notar que  $\frac{n}{2}$  guardias son suficientes para vigilar a  $P$ . En la figura 5.17 se presenta una galería pseudo-ortogonal que requiere  $\frac{n}{2}$  guardias para poder ser vigilada.

Sin embargo, cuando se da que para al menos una arista  $a_i$  de  $P$ , tenemos que  $|E_i| > 1$  (figura 5.18), entonces  $\bar{P}$  no será un polígono ortogonal por lo que no se podría aplicar la observación anterior, sin embargo veremos que  $P$  puede seguir siendo vigilado sin colocar más de  $\frac{n}{2}$  guardias.

Supongamos que  $P$  tiene una única arista  $a_i$  tal que  $|E_i| > 1$ , además, sin pérdida de generalidad supongamos que la recta inducida por  $v_i$  y  $v_{i+1}$  es horizontal y que  $a_i$  está sobre esta recta. Observemos que cualquier componente poligonal  $s_i$  de  $\bar{P}$  se verá como un polígono ortogonal al cual alguna arista  $e$  de  $E_j$  le “corta” una esquina. Sean  $v$  y  $u$  los extremos de  $e$ , y  $e'$  y  $e''$  las aristas de  $s_i$  diferentes a  $e$ , incidentes en  $v$  y  $u$ , respectivamente. Distinguiamos dos casos.

**Caso 1.**  $e'$  y  $e''$  no son paralelas. Para este caso podemos completar a  $s_i$  a un polígono ortogonal  $s'_i$  como el que se muestra en la figura 5.19. Obtenemos una cuadrangulación  $Q(s'_i)$  con cuadriláteros convexos de  $s'_i$ , y obtenemos una buena 2-coloración de sus vértices. Es claro que cualquier clase cromática, aun quitando a  $v'$ , ilumina el interior del polígono

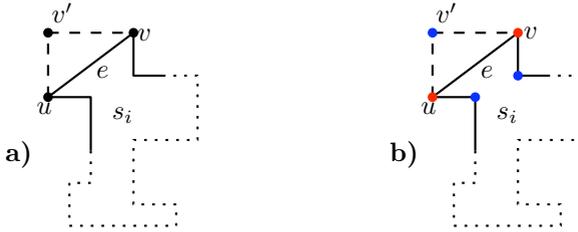


Figura 5.19: Ilustración del caso 1.

ortogonal y las habitaciones de este.

Consideremos a  $R(e)$  como la región ilustrada en la figura 5.20. Vemos que la clase cromática de los extremos de  $e$  vigila a  $R(e)$  ya que  $R(e)$  es convexa. Digamos que  $v'$  tiene color azul, consideremos los cuadriláteros de  $Q(s'_i)$  que tengan a  $v'$  en uno de sus vértices y ordenemos de forma radial los otros vértices de color azul y tomemos a  $u$  y  $w$ , el primero y el último de estos. Como se muestra en la figura 5.21. Es fácil ver que  $u$  y  $w$  iluminan la parte de  $R(e)$  que no está contenida en  $s'_i$ , por tanto, cualquiera de las dos clases cromáticas vigila esta parte de  $P$ .

**Caso 2.**  $e$  y  $e'$  son paralelas. Como en el caso anterior podemos completar a  $s_i$  a un polígono ortogonal  $s'_i$  como se muestra en la figura 5.22,

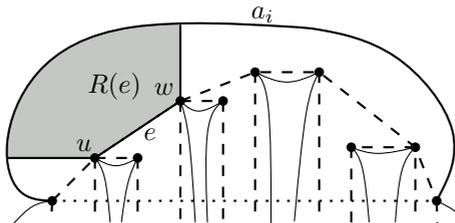


Figura 5.20:

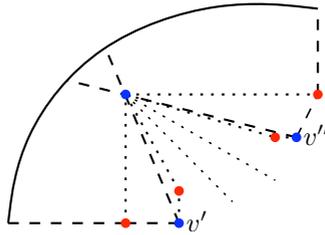


Figura 5.21:

notemos que  $v$  no será un vértice de  $s'_i$ . Cuadrangulamos con cuadriláteros convexos a  $s'_i$ , y obtenemos una buena 2-coloración de sus vértices. De nueva cuenta cualquier clase cromática, aun quitando a  $v'$ , ilumina el interior de  $s'_i$  y las habitaciones de este. Asignamos a  $v$  el color que tenía  $v'$ , de forma que  $e$  tendrá los extremos de distinto color, por lo que el pedazo de  $R_j$  que ve  $e$  estará iluminado por cualquier clase cromática.

Cuando tenemos más de una  $a_i$  con  $|E_i| > 1$ , las componentes poligonales de  $\bar{P}$  serán polígonos esencialmente ortogonales, con algunas esquinas “cortadas” por aristas de alguna  $E_i$ . Podemos realizar el procedimiento descrito en los casos anteriores en las esquinas que cumplan con las condiciones de dichos casos. Los casos diferentes se ven como los

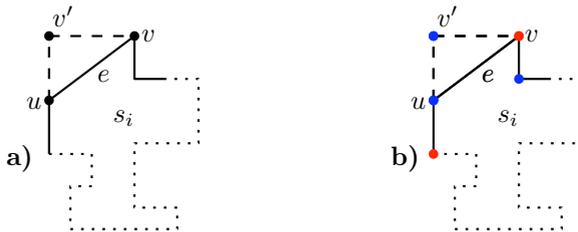


Figura 5.22: Ilustración del caso 2.

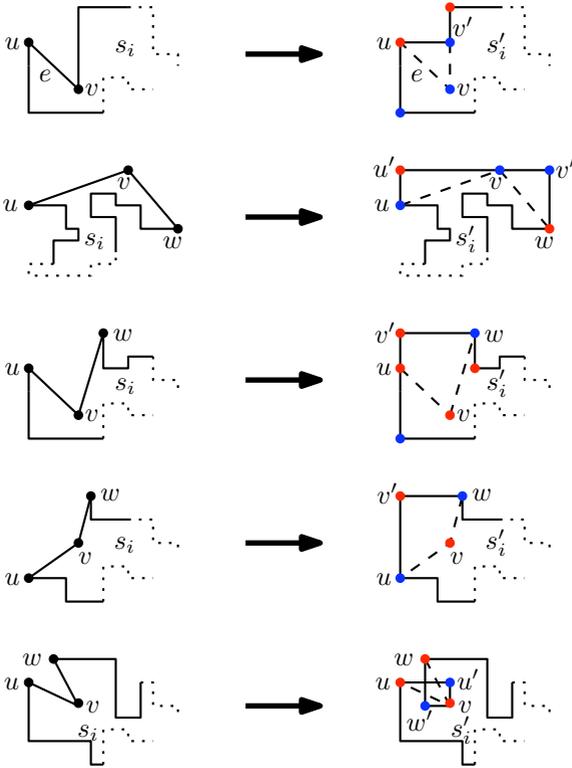


Figura 5.23: Diferentes tipos de esquinas y como darles solución.

mostrados en la figura 5.23 y estos pueden ser resueltos haciendo observaciones similares a las hechas en los casos anteriores, como se muestra en la figura 5.23.

De este modo obtenemos una 2-coloración, no necesariamente buena, de los vértices de  $P$ , tal que cada clase cromática vigila a  $P$  y la más pequeña tiene no más de  $\frac{n}{2}$  elementos.

De lo anterior, junto con el polígono mostrado al inicio de esta sección en la figura 5.17, podemos concluir el siguiente teorema:

**Teorema 35.** *Cualquier galería pseudo-ortogonal  $P$  con  $n$  vértices siempre puede ser vigilada con a lo más  $\frac{n}{2}$  vértices guardia. Existen galerías pseudo-ortogonales que necesitan esta cantidad de guardias para ser vigiladas.*



# Bibliografía

- [1] A. Aggarwal. *The art gallery problem: Its variations, applications, and algorithmic aspects*. Tesis Doctoral, Dept. of Comp. Sci., Johns Hopkins University, Baltimore, MD, 1984.
- [2] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. C. Shermer y J. Urrutia. *Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlights*. International Journal of Computational Geometry and Applications, 8(1):25-38, 1998.
- [3] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, F. Hurtado, P. Ramos y J. Urrutia. *Two Convex Polygons*. In Proc. 25th European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09, to appear, Brussels, Belgium, 2009.
- [4] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, J. Urrutia y B. Vogtenhuber. *Modern Illumination of Monotone Polygons*. In Proc. 25th European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09, Brussels, Belgium, 2009.
- [5] D. Avis y H. El Gindy. *A combinatorial approach to polygon similarity*, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-2:148-150, 1983.
- [6] A.L. Bajuelos, S. Canales, G. Hernández y A.M. Martins. *Aproximando la iluminación por modems* Actas de los XIII Encuentros de Geometría Computacional, Zaragoza, España 2009.

- 
- [7] I. Bjorling-Sachs y D. Souvaine, *A tight bound for guarding polygons with holes*, Rutgers University, Reporte Técnico LCSR-TR-165, 1991.
- [8] I. Bjorling-Sachs y D. Souvaine, *An efficient algorithm for guard placement in polygons with holes*, *Discrete Comput. Geom.* 13, 77-109, 1995.
- [9] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine y J. Urrutia *The floodlight illumination problem*, En Proc. 5th Canad. Conf. Comput. Geom., 399-398, 1993.
- [10] P. Bose and G. Toussaint. *Characterizing and efficiently computing quadrangulations of planar point sets*, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14, pp. 763-785, 1997.
- [11] W. Bronsvoort. *Boundary evaluation and direct display of CSG models*. *Computer-Aided Design*, 20:416-419, 1988
- [12] B. Chazelle. *Triangulating a simple polygon in linear time*. *Discrete Comput. Geom.*, 6(5):485-524, 1991.
- [13] B. Chazelle y J. Incerpi. *Triangulation and shape-complexity*. *ACM Trans. Graph.*, 3(2):135-152,1984.
- [14] T. Christ, M. Hoffmann, Y. Okamoto y T. Uno. *Improved Bounds for Wireless Localization*. SWAT 2008, LNCS 5124, 77-89, Springer-Verlag 2008.
- [15] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, *J. Combin. Theory Ser B* 18, 39-41, 1975.
- [16] C. Coullard, B. Gamble, W. Lenhart, W. Pulleyblank y G. Toussaint, *On illuminating a set of disks*, Manuscript 1989.
- [17] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo y J. Urrutia, *Galleries, light matchings and visibility graphs*, WADS 1989, Ottawa, F. Dehne, J-R Sack and N. Santoro, eds. LNCS 382, 316-324, 1989.

- [18] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo y J. Urrutia, *Illuminating rectangles and triangles in the plane*, J. Combin. Theory Ser. B, 601-611, 1993.
- [19] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia y J. Zaks, *Illuminating lines and circles in the plane*, University of Ottawa, Computer Science Department TR-89-49, 1989.
- [20] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia y J. Zaks, *On illuminating line segments in the plane*, Discrete Math. 137, 147-153, 1995.
- [21] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia y J. Zaks, *Guarding rectangular art galleries*, Discrete Math. 50, 149-157, 1994.
- [22] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo y J. Urrutia, *Optimal floodlight illumination of stages*, Proc. 5th Canadian Conference on Computational Geometry, 393-398, 1993.
- [23] M. Damian, R. Flatland, J. O'Rourke y S. Ramaswani. *A New Lower Bound on Guard Placement for Wireless Localization*. En: 17th Annual Fall Workshop on Computational Geometry, 2007.
- [24] D.P. Dobkin, L. Guibas, J. Hershberger y J. Snoeyink, *An Efficient Algorithm for Finding the CSG Representation of a Simple Polygon*. Algorithmica 10, 1-23, 1993.
- [25] H. Edelsbrunner, J. O'Rourke y E. Welzl, *Stationing guards in rectilinear art galleries*, Comput. Vision, Graphics and Image Pcess. 27, 167-176, 1984.
- [26] M. Eo y C. Kyung, *Hybrid show testing scheme for ray tracing*. Computer-Aided Design, 21:38-48, 1989.
- [27] D. Eppstein, M. T. Godrich y N. Sitchinava. *Guard placement for efficient point-in-polygon proofs*. En Proc. 23rd Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., pages 27-36, 2007.
- [28] V. Estivill-Castro, J. O'Rourke, J. Urrutia y D. Xu, *Illumination of polygons with vertex floodlights*. Inform. Process. Lett. 56(1), 62-73, 1995.

- [29] V. Estivill-Castro y J. Urrutia, *Optimal floodlight illumination of orthogonal polygons*, Proc. Sixth Canadian Conference on Computational Geometry, 118-121, 1991.
- [30] V. Estivill-Castro y J. Urrutia. *Two-floodlight illumination of convex polygons*. En Proc. 4th Workshop Algorithms Data Struct., pages 62-73, 1995.
- [31] R. Fabila-Monroy, A. Ruiz Vargas y J. Urrutia. *On Modern Illumination Problems* En Actas de los XIII Encuentros de Geometría Computacional, Zaragoza, España 2009.
- [32] L. Fejes Tóth, *Illumination of convex disks*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 29, 355-360, 1977.
- [33] R. Fulek, A. Holmsen y J. Pach, *Intersecting convex sets by rays*, En: Proceedings 24th annual Symposium on Computational Geometry, ACM Press, 385-391, 2008.
- [34] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combin. Theory Ser B 24, 374, 1978.
- [35] J. García-López, *Problemas algorítmico-combinatorios de visibilidad*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1995.
- [36] M.A. Heredia, y J. Urrutia, *On convex quadrangulations of point sets on the plane*. Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, LNCS 4381, Proc. CJCDCGT 2005, pp. 38-46, 2007.
- [37] H. Ito, H. Uehara y M. Yokoyama, *NP-completeness of stage illumination problems'*, En: Proc. Japan Conference Discrete Computational Geometry, pp. 88-92, 1998.
- [38] F. Hoffman, *On the rectilinear art gallery problem*, Proc. ICALP, Lecture Notes in Comput. Sci. 90, Springer-Verlag, 717-728, 1990.
- [39] F. Hoffman, M. Kaufman y K. Kriegel, *The art gallery problem for polygons with holes*, Proc. 32nd Symposium of Foundations of computer Science, 39-48, 1991.

- 
- [40] F. Hoffman y K. Kriegel, *A graph coloring result and its consequences for the polygon guarding problems*, Technical Report B 93-08, Freie Universität Berlin, 1993.
- [41] J. Kahn, M. Klawe y D. Kleitman *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 4, 194-206, 1983.
- [42] M. I. Karavelas y E. P. Tsigaridas, *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Research Report 6132, INRIA, 2007.
- [43] M. I. Karavelas y E. P. Tsigaridas, *Guarding curvilinear art galleries with edge or mobile guards via 2-dominance of triangulation graphs*, [arXiv:0802.1361v1](https://arxiv.org/abs/0802.1361v1) [cs.CG], 2008.
- [44] M. I. Karavelas, Cs. D. Tóth y E. P. Tsigaridas *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Computational Geometry: Theory and Applications, por aparecer.
- [45] R. Kuc y M. Siegel, *Efficient representation of reflecting structures for a sonar navigation model*. En Proc. 1987 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pages 1916-1923, 1987.
- [46] D. T. Lee y A. Lin. *Computational complexity of art gallery problems*. IEEE Trans. Inform. Theory, 32(2):276-282, 1986.
- [47] L. Lovász. *Three Short Proofs in Graph Theory*. J. Combinatorial Theory, B, 19, 111-113, 1975.
- [48] T. Lozano-Pérez y M. A. Wesley. *An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles*. Commun. ACM, 22(10):560-570, 1979.
- [49] M. McKenna. *Worst-case optimal hidden-surface removal*. ACM Trans. Graphs., 6:19-28, 1987.
- [50] J. S. B. Mitchell. *An algorithmic approach to some problems in terrain navigation*. En D. Kapur y J. Mundy, editors, Geometric Reasoning. MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

- 
- [51] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. The International Series of Monographs on Computer Science. Oxford University Press, New York, NY, 1987.
- [52] J. O'Rourke. *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvátal's Theorem*. *Geometriae Dedicata* 14, 273-283, 1983.
- [53] S. Ramaswami, P. Ramos y G. Toussaint. *Converting triangulations to quadrangulations.*, *Computational Geometry: Theory And Applications*, vol. 9, pp 257-276, 1998.
- [54] J.R. Sack *Rectilinear Computational Geomtry*, Carleton University, TR-SCS-54-1984.
- [55] T. C. Shermer. *Recent results in art galleries*. *Proc. IEEE*, 80(9):1384-1399, 1992.
- [56] B. Speckmann y Cs.D. Tóth *Allocating vertex  $\pi$ -guards in simple polygons via pseudo-triangulations*. *Discrete Comput. Geom.* 33 (2), 345-364, 2005.
- [57] J. Stenstrom y C. Connolly. *Building wire frames for multiple range views*. En *Proc. 1986 IEEE Conf. Robotics and Automation*, pages 615-650, 1986.
- [58] Cs.D. Tóth, *Illuminating disjoint line segments in the plane*, *Discrete Comput. Geom.* 30 (3), 489-505, 2003.
- [59] Cs. D. Tóth. *Illuminating polygons with vertex  $\pi$ -floodlights*. En *Proceedings, Part I, of the International Conference on Computational Science (ICCS)*, volume 2073 of LNCS, pages 772-784, San Francisco, CA. Springer Verlag, May 2001.
- [60] G. T. Toussaint. *Pattern recognition and geometrical complexity*. En *Proc. 5th IEEE Internat. Conf. Pattern Recognition.*, pages 1324-1347, 1980.

- 
- [61] G. Toussaint. *Quadrangulations of planar sets*. In Proceedings of the 4th International Workshop on Algorithms and Data Structures, pages 218-227. Springer-Verlag, 1995.
- [62] W. T. Tutte. *The Factorization of a Planar Graph*, J. London Math. Soc. 22, 107-111, 1947.
- [63] J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, In J.-R. Sack and J. Urrutia editors, *Handbook of Computational Geometry*, pages 973-1027. North-Holland, 2000.
- [64] J. Urrutia *Iluminando polígonos con reflectores*. Actas VI Encuentro de Geometría Computacional, Barcelona, 59-73, 1995.
- [65] S. Xie, T. Calvert and B. Bhattacharya. *Planning views for the incremental construction of body models*. En Proc. Int. Conf. Pattern Recognition, pages 154-157, 1986.
- [66] M. Yachida. *3-D data acquisition by multiple views*. En Robotics Research: Third Int. Symp., pages 11-18, 1986.
- [67] J. Urrutia y J. Zaks. *Illuminating Convex Sets*, University of Ottawa TR-89-31, 1989.