



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA
DE LA COMPUTACIÓN

“ALGUNOS PROBLEMAS ALGORÍTMICOS Y COMBINATORIOS
SOBRE ISLAS DE PUNTOS EN EL PLANO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTORA EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A

DOLORES LARA CUEVAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA.

México, D.F.

Agosto de 2011.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Esta vez,
va para mi.*

¡gracias!

Esta página no podría tener otro comienzo más que el infinito agradecimiento a Jorge. Jorge ha sido mi tutor durante 6 años, tiempo en el que he aprendido de él tantas y tan invaluable lecciones, no solo académicas sino personales, que no pueden ser expresadas en esta página sin caer en lo anecdótico. Es preciso pues evitar la tentación, y mencionar simplemente que aunque el tiempo debe ser acotado, tratándose del Doctor Jorge Urrutia, las lecciones no pueden serlo.

Deseo agradecer también al Doctor José M. Díaz, por formar parte de mi comité tutorial y ser uno de mis coautores. Pero principalmente quiero agradecerle por tan amablemente recibirme en varias ocasiones en la Universidad de Sevilla para trabajar con él. Sin duda alguna esas visitas han sido parte muy importante en mi formación.

Gracias también al Doctor Sergio Rajsbaum por formar parte de mi comité tutotal, y por sus comentarios respecto a mi trabajo de tesis.

Así mismo agradezco al Dr. Francisco Hernández, al Dr. Criel Merino y al Dr. Juan José Montellano, por los valiosos comentarios que me han hecho respecto a mi tesis y a mi trabajo doctoral en general.

Este trabajo doctoral no hubiera sido posible sin la beca que me brindó el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Igualmente importante ha sido el apoyo que el personal administrativo del Posgrado en Ciencia y Computación me ha brindado para realizar solicitudes y trámites. Gracias especialmente a Lulú, Diana y Cecilia.

Muy importante para mi formación han sido las estancias de investigación que he realizado. Agradezco al Doctor Carlos Seara por recibirme en la Universitat Politècnica de Catalunya, por el apoyo que me brindó durante mi estadía ahí, por el trabajo que realizamos juntos y que está contenido en esta tesis, pero sobre todo por el apoyo que recibí de él durante el EUROCG'10. Así mismo agradezco a la Dra. Inmaculada Ventura y al Dr. Pablo Pérez, coautores también y con quienes he trabajado durante mi estancia en Sevilla.

Deseo agradecer al Doctor Clemens Huemer, quien me recibió en la Universitat Politècnica de Catalunya, por todas las atenciones que tuvo conmigo y las importantes lecciones que he aprendido de él. Le agradezco especialmente por todo el trabajo realizado durante esa visita, del cual ha surgido un capítulo de esta tesis y mi primer artículo aceptado en revista.

Agradezco de manera especial al Doctor Ruy Fabila por el trabajo que hemos realizado juntos -del cual se comprende gran parte de ésta tesis- y por el apoyo persistente y oportuno que me ha brindado en los últimos meses del doctorado. Me atrevo a decir que sin su intervención mi doctorado, y en general mi vida académica, hubiera tomado un rumbo muy distinto y no necesariamente mejor. Ruy, profunda y constantemente gracias.

Gracias a todos los estudiantes de Jorge, por todas las ideas que hemos compartido durante talleres, estancias de investigación, y horas en la oficina. Gracias especialmente por la convivencia que hemos tenido durante todos estos años, la cual ha hecho el doctorado mucho más divertido. De manera individual quiero agradecer a Crevel Bautista y a Marcelino Ramírez -quien aunque no es estudiante de Jorge forma ya parte del grupo-. Les agradezco especialmente por el apoyo personal y la amistad que me han brindado. A Crevel quiero además agradecer las discusiones, durante horas y horas, de las ideas que se encuentran en esta tesis.

A mi familia, por todo su amor, apoyo y respecto. Especialmente a mamá, papá y a Rosi por soportar mis ausencias; y a Carlos y David por regalarme horas tan divertidas.

Gracias a Christian Rubio, quien sin darse cuenta ha sido el principal catalizador para terminar mi doctorado. Pero sobre todo, por enseñarme a escuchar. Christ: *Dacing at the discto at the end of the world, take me to the disco...*

Prólogo

Al inicio de este trabajo doctoral, mi área de estudio eran los problemas algorítmicos sobre conjuntos de puntos en el plano. Primero quise cubrir los puntos: cubrir con círculos fué mi primer intento; después quise separarlos: separarlos con rectas, o con polígonos convexos; y al final decidí emparejarlos. Estudié puntos sin colores, puntos con dos colores, y puntos con muchos colores; puntos estáticos, puntos que se mueven, y conjuntos donde aparecen ambas clases. Busqué siempre solucionar problemas algorítmicos que generalmente, además de los puntos, involucraban otros objetos geométricos.

En esa búsqueda de soluciones algorítmicas, me di cuenta que sabía muy poco respecto a los conjuntos de puntos. ¿Cómo son? ¿Qué propiedades sabemos que cumplen? ¿Qué podemos esperar de ellos? Etcétera. Decidí entonces buscar propiedades combinatorias que me ayudaran a resolver mis problemas algorítmicos. Primero quité el movimiento pero agregué colores. Al hacerlo, me di cuenta que un conjunto de puntos con dos colores es suficientemente complicado, así que decidí explorar un conjunto sin colores buscando ciertas propiedades de convexidad. Al final, reduje aún más la propiedad de convexidad y estudié el conjunto desde otro punto de vista: el conteo.

Muchos de los resultados logrados no aparecen en este documento, ya sea porque alguien más los había logrado anteriormente, porque se lograron en colaboración con otros estudiantes de doctorado, o porque al final el resultado no parecía tan importante. Pero sin duda alguna han sido todos importantes en mi formación. Es así pues que en esta tesis se presentan: un problema algorítmico, dos problemas combinatorios y un problema en donde se estudian ambos aspectos; todos sobre colecciones de puntos en el plano.

Introducción	XIII
1. Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas	1
1.1. El problema	2
1.2. Trabajo relacionado	4
1.3. NP-difícil	6
1.4. Algoritmo para valores pequeños de k	11
1.4.1. Arreglo de curvas	11
1.4.2. Algoritmo	14
1.4.3. Complejidad	17
1.5. Conclusiones	18
2. Discrepancia bicromática usando islas	21
2.1. Propiedades básicas	23
2.2. Puntos en posición convexa	25
2.2.1. Intervalo de peso máximo en secuencias circulares	27
2.2.2. Cálculo de la discrepancia de un conjunto de puntos en posición convexa	29
2.3. Particiones con una recta	30
2.3.1. Complejidad	33
2.4. Conclusiones	34

3. Gráfica geométrica tipo Johnson	35
3.1. Puntos en la recta real	37
3.1.1. Puntos alineados	37
3.1.2. Puntos casi alineados	40
3.2. Puntos en posición general	43
3.3. Diámetro	47
3.3.1. Cota superior	47
3.3.2. Cota inferior	49
3.4. Conclusiones	52
4. Una propiedad combinatoria en los órdenes angulares de conjuntos de puntos en el plano	53
4.1. Demostraciones	55
Referencias	61

Índice de figuras

1.	(a) Un conjunto no convexo y (b) un conjunto convexo. . . .	XIV
2.	(a) Un conjunto de puntos S , (b) $Conv(S)$ y (c) $CH(S)$	XIV
3.	Cualquier conjunto de 5 puntos determinan un cuadrilátero convexo.	XV
4.	Algunos triángulos vacíos determinados por un conjunto de 10 puntos en posición convexa.	XVI
5.	Un subconjunto de 3 puntos que es una 3-isla, y un subconjunto de 3 puntos que no es una 3-isla.	XVII
6.	Las dos posibles formas de una 4-isla.	XVII
7.	Las tres posibles formas de una 5-isla.	XVII
8.	Una cubierta con círculos para un conjunto de puntos. . . .	XIX
1.1.	La solución a nuestro problema para el caso de sensores estáticos está dada por el diagrama de Voronoi. Los puntos denotan las antenas, y las cruces los sensores. Los círculos denotan los radios de transmisión óptimos de cada antena.	4
1.2.	Ilustración de la gráfica $K_{n,2\rho}$	6
1.3.	Construcción del conjunto Q en la reducción del problema de los ρ -pares proveedores al Problema 3.	8
1.4.	Construcción del conjunto S	8
1.5.	Trayectorias de los puntos en S	9
1.6.	Ilustración de un arreglo de curvas.	11
1.7.	Ilustración de un arreglo de curvas \mathcal{A}_j y sus puntos críticos. .	13
1.8.	La curva está abajo del punto (t, r)	13

1.9.	Ilustración de la Definición 1.4.1.	16
2.1.	(a) Un conjunto bicoloreado de $2n$ puntos en posición convexa. (b) Una isla roja de tamaño n	22
2.2.	Una cadena convexa alternante.	26
2.3.	Un intervalo de tamaño tres y un intervalo de tamaño cinco, en una secuencia circular.	27
2.4.	(a) Un conjunto que cumple la propiedad <i>ii</i> y con $\mathcal{D}_2(S) = 2$. (b) Un conjunto que no cumple con la propiedad <i>iii</i> y sin embargo tiene $\mathcal{D}_2(S) = 1$. (c) Un conjunto que no cumple con la propiedad <i>iv</i> y que tiene $\mathcal{D}_2(S) = 1$	31
2.5.	Construcción del conjunto utilizado en la prueba del Teorema 2.3.2, cuando $d = 5$	34
3.1.	(a) La gráfica de Johnson para $n = 4$ y $k = 2$. (b) La gráfica de Johnson generalizada para $n = 5$, $k = 2$ y $l = 0$	36
3.2.	Un subconjunto de 5 puntos que es una 5-isla, y un subconjunto de 5 puntos que no es una 5-isla.	36
3.3.	Tres triángulos vacíos que comparten una arista.	37
3.4.	Dos 6-islas distintas en un conjunto de 12 puntos.	38
3.5.	Tres 6-intervalos que se intersecan en 2 elementos.	38
3.6.	Algunos intervalos y sus etiquetas para un conjunto con $n = 16$, $k = 6$, y $l = 2$	39
3.7.	La gráfica $IJ(S, 6, 2)$ para $n = 12$	39
3.8.	Dos posibles islas en S'	40
3.9.	La gráfica de islas $IJ(S', 6, 2)$ para 13 puntos.	41
3.10.	La gráfica $IJ(S', 6, 2)$ con $n = 15$. Las aristas punteadas ilustran el camino usado en el Teorema 3.1.2.	42
3.11.	La etiquetación del conjunto de puntos P	44
3.12.	Una 4-isla proyectable y una 4-isla no proyectable.	44
3.13.	I es un intervalo medio ($k=10$, $l=3$).	46
3.14.	I es un intervalo final ($k=10$, $l=3$).	47
3.15.	Un conjunto de Horton con 16 puntos.	50
3.16.	La profundidad de los elementos de H_0	51
4.1.	El polígono estrellado del conjunto $S - p$. q_i es convexo y q_{i-1} es cóncavo.	54
4.2.	El camino poligonal P' de un punto extremo p de S	58
4.3.	Los dos polígonos estrellados P para dos puntos interiores	58

Introducción

Los resultados presentados en este trabajo doctoral se encuentran en la intersección de dos áreas íntimamente relacionadas: la Geometría Computacional y la Geometría Combinatoria.

En la Geometría Computacional se estudian, desde el punto de vista algorítmico, problemas que involucran objetos geométricos. Así pues, se buscan algoritmos eficientes que encuentren una configuración geométrica que cumpla las propiedades deseadas. Además, se estudia en esta área la complejidad algorítmica intrínseca de los problemas geométricos. Por otra parte, en la Geometría Combinatoria se estudian problemas que involucran combinaciones y arreglos de objetos geométricos, y propiedades discretas respecto a los mismos. A continuación presentamos algunos problemas clásicos en ambas áreas, los cuales están de alguna forma relacionados con los resultados de esta tesis. Presentaremos también los problemas estudiados en este documento.

Debido a que, para la mayoría de los términos que utilizamos en esta tesis no existen traducciones estándar del inglés al español, siempre que se presenta en el texto una traducción, se escribe en paréntesis el término original en inglés. Sin embargo, mencionamos aquí que a pesar de que el término que se utiliza comúnmente para traducir *NP-hard* es *NP-duro*, nosotros hemos decidido traducir este término como *NP-difícil*, ya que nos parece que refleja de manera más adecuada el significado.

A lo largo de este documento, trabajaremos siempre con conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^2 , y denotaremos por S a uno de esos conjuntos. Decimos que S está en *posición general* si no existen tres puntos en S que estén en una misma recta. En esta tesis consideraremos siempre conjuntos de puntos en posición general.

Un subconjunto \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 es convexo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathcal{C}$, el segmento xy está totalmente contenido en \mathcal{C} ; esto se ilustra en

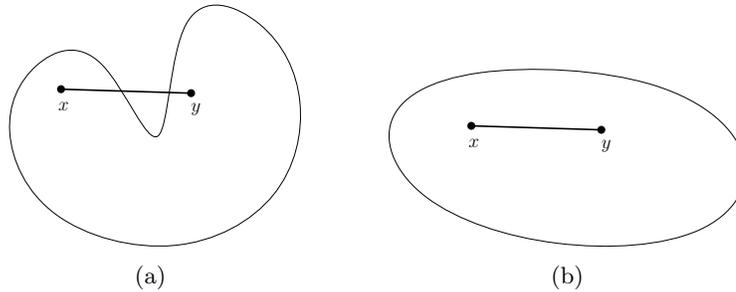


Figura 1: (a) Un conjunto no convexo y (b) un conjunto convexo.

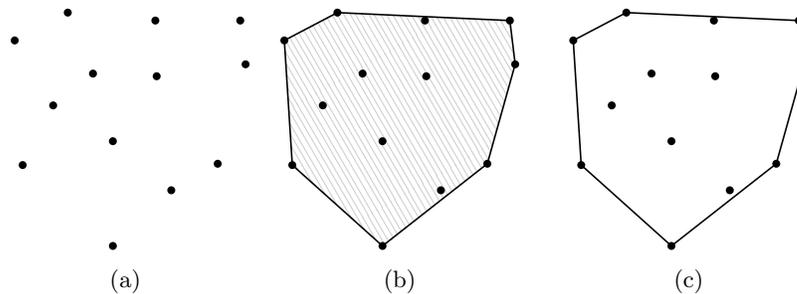


Figura 2: (a) Un conjunto de puntos S , (b) $Conv(S)$ y (c) $CH(S)$.

la Figura 1. La *cerradura convexa* o *cierre convexo* de $S \subseteq \mathbb{R}^2$, denotado por $Conv(S)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 que contienen a S . La frontera de $Conv(S)$ se denota como $CH(S)$ y es generalmente conocida como *casco convexo*. En Geometría Computacional, es común utilizar ambos términos, cierre convexo y casco convexo, indistintamente. Decimos que un conjunto de puntos $S \in \mathbb{R}^2$ está en *posición convexa* si $CH(S) \cap S = S$. Todos estos conceptos se ilustran en la Figura 2.

Sin duda alguna, uno de los problemas que más atrae la atención a los investigadores en el área de Geometría Combinatoria, es el Problema de Erdős-Szekeres sobre conjuntos en posición convexa:

Problema 1. *Para cualquier entero $n \geq 3$, determinar el entero positivo más pequeño $N(n)$, tal que cualquier conjunto de al menos $N(n)$ puntos en posición general contenga n puntos en posición convexa.*

Una primera versión de este problema fue propuesto por Esther Klein. Originalmente Klein demostró que cualquier conjunto de 5 puntos en el plano en posición general, contiene un subconjunto de 4 puntos en posición convexa. Esto se ilustra en la Figura 3. Hay dos preguntas particulares relaciona-

das con este problema: (1) ¿Existe siempre el número $N(n)$? y (2) Si $N(n)$ existe, determinar su valor como una función de n . En el artículo [32], Erdős y Szekeres demostraron la existencia de $N(n)$. Sin embargo, hasta la fecha los únicos valores conocidos para $N(n)$ son: $N(3) = 3$, $N(4) = 5$, $N(5) = 9$ y $N(6) = 17$. El caso $n = 3$ es trivial y el caso $n = 4$ fue demostrado por Klein. El artículo original de Erdős y Szekeres [32] menciona que E. Makai demostró que $N(5) = 9$. Sin embargo, la primer demostración publicada de este resultado es de Kalbfleisch *et al.* [52]. En 2006, Szekeres y Peters publican un artículo [64] en el que dan una prueba computacional para el caso $n = 6$.

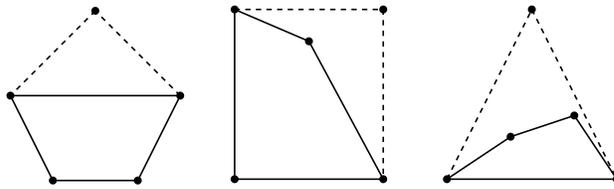


Figura 3: Cualquier conjunto de 5 puntos determinan un cuadrilátero convexo.

Tiempo después, Erdős propuso un problema similar, pero respecto a polígonos convexos vacíos. Dado S , se dice que un polígono convexo cuyos vértices pertenecen a S está *vacío* si su interior no contiene ningún punto de S . Los tres cuadriláteros que se muestran en la Figura 3 están vacíos. El enunciado del problema es el siguiente:

Problema 2. *Para cualquier entero positivo $n \geq 3$, determinar el entero positivo más pequeño $H(n)$, si es que existe, tal que cualquier conjunto con al menos $H(n)$ puntos en posición general, contiene n puntos que son los vértices de un polígono convexo vacío.*

Trivialmente se tiene que $H(3) = 3$; $H(4) = 5$ se sigue de la demostración de Klein. $H(5) = 10$ fue demostrado por Harborth [47], y Horton demostró en [50] que para ninguna $n \geq 7$ existe $H(n)$. El valor exacto de $H(6)$ no ha sido determinado, sin embargo Gerken en [42] e independientemente Nicolás en [62] demostraron que $H(6)$ es finito. Por una parte Gerken demostró que $H(6) \leq N(9)$, y Nicolás demostró que $H(6) \leq N(25)$.

Una variante más al Problema 1 fue propuesta en [33] por Erdős y Guy: ¿Cuál es el mínimo número de polígonos convexos con k vértices determinado por cualquier conjunto de n puntos en el plano? La solución trivial para el caso $k = 3$ es $\binom{n}{3}$. Si además se requiere que los triángulos estén vacíos, la misma cota se tiene cuando el conjunto de puntos está en posición convexa;

véase la Figura 4. La primera cota inferior para el caso en el que los puntos no están en posición convexa, y se requiere que los triángulos estén vacíos, fue dada por Katchalski y Meir en [54]. Sin embargo, para el caso $k = 4$ el número no es fácil de determinar; de hecho este problema está íntimamente relacionado con el problema del *número de cruce*, el cual es un conocido y difícil problema en el área de la Geometría Discreta. Para más detalles se puede consultar [14, 33].

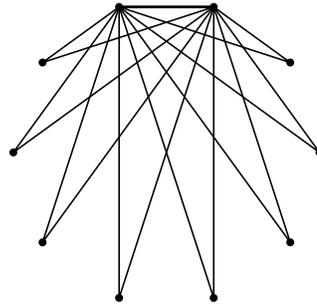


Figura 4: Algunos triángulos vacíos determinados por un conjunto de 10 puntos en posición convexa.

Una variante más del problema se obtiene cuando los puntos del conjunto dado pertenecen a diferentes clases, llamadas usualmente *colores*. Se dice que un polígono convexo vacío es *monocromático*, si todos sus vértices tienen el mismo color. Esta variante coloreada del problema de Erdős-Szekeres, fue introducida por Devillers *et al.* en [25]. Entre los resultados presentados en dicho artículo, se encuentra uno en donde se demuestra que cualquier conjunto bicolorado de n puntos, determina al menos $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2$ triángulos vacíos monocromáticos con interiores disjuntos.

Tres de los problemas presentados en esta tesis, estudian propiedades combinatorias sobre conjuntos de puntos, utilizando un concepto que nosotros llamamos *isla*. Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general. Llamamos a un subconjunto I de S una *isla* si $\text{Conv}(I) \cap S = I$. Si I contiene k elementos, entonces la llamamos k -*isla*. La Figura 5 ilustra este concepto. Nótese que una k -isla es un conjunto de $l \leq k$ puntos en posición convexa. En particular, una 3-isla es un triángulo vacío; una 4-isla es un cuadrilátero convexo o un triángulo con un punto al interior; una 5-isla es un pentágono convexo vacío, o un cuadrilátero convexo con un punto al interior, o un triángulo con dos puntos al interior; etcétera. Esto se ilustra en las Figuras 6 y 7.

Utilizando esta definición surge de manera inmediata la siguiente pre-

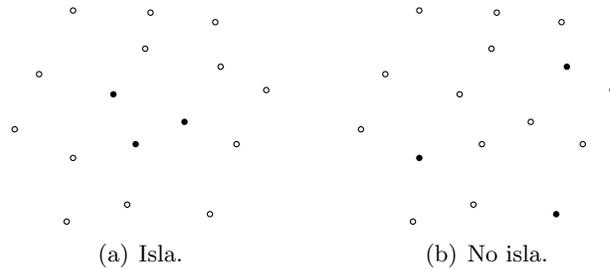


Figura 5: Un subconjunto de 3 puntos que es una 3-isla, y un subconjunto de 3 puntos que no es una 3-isla.

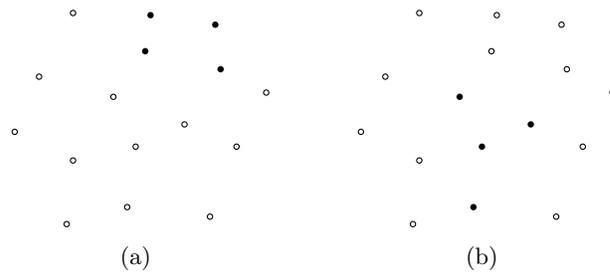


Figura 6: Las dos posibles formas de una 4-isla.

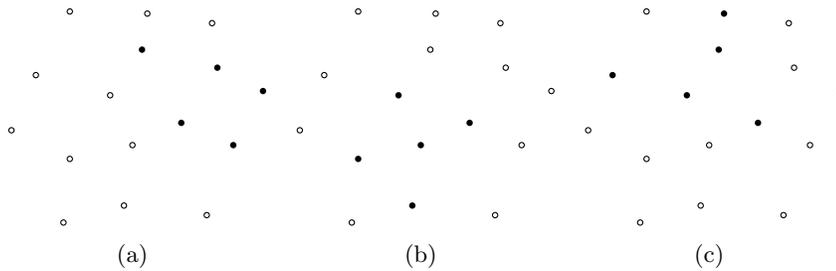


Figura 7: Las tres posibles formas de una 5-isla.

gunta: Dada k ¿cuál es el mínimo número de k -islas que hay en un conjunto de n puntos en posición general no convexa? Nótese que si $k = 3$ esta pregunta es equivalente al problema de contar los triángulos vacíos. Sin embargo si $k > 3$, hasta donde el autor tiene conocimiento, el problema no ha sido estudiado. En el Capítulo 3 nos acercamos a esta pregunta, al definir una gráfica cuyo conjunto de vértices son las k -islas de un conjunto de puntos. Existen varias preguntas en Geometría Combinatoria que tienen una estre-

cha relación con algunas de las propiedades de la gráfica que definimos. Todo esto se detalla en el capítulo mencionado.

Como se menciono antes, si $k = 4$, una k -isla tiene dos formas combinatoriamente distintas: un triángulo con un punto al interior, o bien un cuadrilátero convexo. En el Capítulo 4 estudiamos un problema relacionado con esta última forma de una 4-isla. En particular estudiamos un problema relacionado con el número de cuadriláteros convexos en un conjunto de puntos.

Dado $S = R \cup B$, un conjunto de puntos bicoloreado, decimos que una isla I de S es monocromática si I contiene sólo puntos de R o sólo puntos de B . Uno podría replantear la pregunta del párrafo anterior con islas monocromáticas. Sin embargo, en esta tesis estudiaremos un problema respecto a islas coloreadas desde un enfoque distinto. Dada una isla I con puntos rojos y azules, decimos que I está balanceada si $|I \cap R| = |I \cap B|$. En el Capítulo 2, estudiamos un problema relacionado con islas balanceadas. Dado S , sean S_1, \dots, S_l islas de S no necesariamente del mismo tamaño, y tales que $\bigcup_{i=1}^l S_i = S$ y $\bigcap_{i=1}^l S_i = \emptyset$. Decimos que $\Pi = \{S_1, \dots, S_l\}$ es una *partición convexa* de S . Intuitivamente, se puede decir que en el Capítulo 2 estudiamos el problema de encontrar una partición Π que contenga islas balanceadas. En este capítulo se estudia el problema desde el punto de vista combinatorio y desde el punto de vista algorítmico. Es decir, que este problema se encuentra en el área de la Geometría Combinatoria, y de la Geometría Computacional.

Un problema clásico en Geometría Computacional, es la versión geométrica del *problema del conjunto cubierta* (*set cover problem*). Este problema se define como sigue: Dado un conjunto X y una familia \mathcal{F} de subconjuntos de X , se desea encontrar una subfamilia de \mathcal{F} tal que la unión de todos los elementos en la subfamilia contiene a X , y la cardinalidad de la subfamilia es mínima. Si se asocian pesos con los elementos de \mathcal{F} , entonces se desea encontrar la subfamilia de menor peso. El peso de una subfamilia es la suma de los pesos de sus elementos. Ambas variantes de este problema se han estudiado bastante, véase por ejemplo [35, 57]. Karp demostró en [53] que este problema es NP-completo. Jhonson en [51] dió un algoritmo de aproximación para dicho problema con factor logarítmico. Este resultado fue extendido por Chvátal para la versión con pesos [20].

En la variante geométrica, el conjunto X es una colección de puntos en algún espacio geométrico, y \mathcal{F} es una familia de subconjuntos de X inducidos por la intersección de X con algún objeto geométrico. Por ejemplo, X puede ser una colección de puntos en el plano, y \mathcal{F} la familia de subconjuntos inducida por la intersección de X con una colección de círculos. La Figura 8 ilustra una cubierta con círculos para un conjunto de puntos.

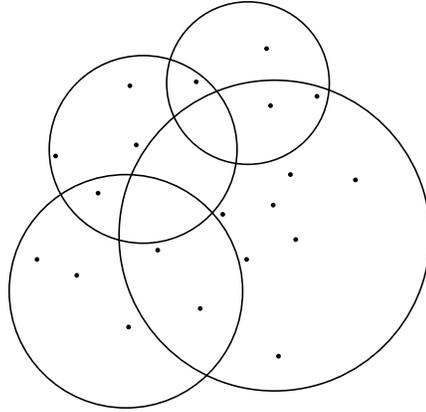


Figura 8: Una cubierta con círculos para un conjunto de puntos.

Existen tantas variantes de este problema, como objetos geométricos con los que se desee cubrir. Por ejemplo, si se desea cubrir con círculos se puede estudiar el problema en el que los círculos son de radio fijo. En [49] Hochbaum *et al.* demostraron que dicho problema es NP-completo. En ese mismo artículo, se demuestra que cuando el objeto geométrico con el que se desea cubrir es un cuadrado de tamaño dado, el problema es también NP-completo. En [15] Brönnimann *et al.* y en [37] Franceschetti *et al.*, dan algoritmos de aproximación para varios problemas de cubrimiento.

Otras variantes surgen al estudiar el problema considerando que el conjunto de puntos es bicoloreado. Es decir, considerando el conjunto $S = R \cup B$. Un problema bastante estudiado es el de *clasificar* los elementos de cierta clase, digamos B . En este caso se desea encontrar una cubierta para los puntos en B , que no contenga puntos de R . Si por ejemplo, se desea encontrar una cubierta con círculos de radio arbitrario, entonces el parámetro a optimizar es la distancia entre los centros de los círculos y los puntos; véase por ejemplo [16], donde se demuestra que este problema es NP-difícil. Se puede cubrir utilizando otros objetos geométricos, por ejemplo triángulos. En [3] Agarwal *et al.* demuestran que es NP-difícil encontrar una cubierta para B que utilice la menor cantidad de triángulos disjuntos. Por otra parte, en [10] Bautista *et al.* demuestran que el problema de encontrar una cubierta para B que utilice la menor cantidad posible de polígonos convexos, es también NP-difícil.

Recientemente han surgido nuevas variantes, en las cuales se estudia un conjunto de puntos móviles. Es decir, el conjunto de puntos que se desea cubrir, cambia de manera continua con respecto al tiempo. En el Capítulo 1

estudiamos una variante del problema de encontrar una cubierta con círculos para un conjunto de puntos móviles; ahí mismo presentamos algunos resultados relacionados.

Contribución de esta tesis

Como resultado de esta tesis doctoral han surgido las siguientes publicaciones en revistas:

1. R. Fabila-Monroy, C. Huemer, D. Lara. *A combinatorial property on angular orders of plane point sets*, Information Processing Letters, 111 (2011), pp. 591 – 594.
2. C. Bautista-Santiago, J. M. Díaz-Báñez, D. Lara, P. Pérez-Lantero, J. Urrutia, I. Ventura. *Computing optimal islands*, Operations Research Letters, 39 (2011), pp. 246 – 251.
3. C. Bautista-Santiago, J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, D. Lara, J. Urrutia. *Covering moving points with anchored circles*, European Journal of Operational Research. Aceptado. EJOR-D-10-02139.
4. S. Bereg, J. Díaz-Báñez, D. Lara, P. Pérez-Lantero, C. Seara, J. Urrutia. *On the coarseness of bichromatic point sets*, Computational Geometry Theory and Applications. Enviado.

Surgieron además de las siguientes publicaciones en congresos:

1. C. Bautista-Santiago, J. Cano, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, H. González-Aguilar, D. Lara, E. Sarmiento, J. Urrutia. *On the Diameter of a Geometric Johnson Type Graph*, Proceedings of the 26th European Workshop in Computational Geometry, 2010, pp. 61–64.
2. S. Bereg, J. M. Díaz-Báñez, D. Lara, P. Pérez-Lantero, C. Seara, J. Urrutia. *Bichromatic discrepancy via convex partitions*, Actas de los XIII Encuentros de Geometría Computacional, 2009, pp. 243–249.
3. C. Bautista-Santiago, J. Cano-Vila, J. M. Díaz-Báñez, H. González-Aguilar, D. Lara, J. Urrutia. *L-corredor k-cromático*, Actas de los XIII Encuentros de Geometría Computacional, 2009, pp. 243–249.

4. C. Bautista-Santiago, J. M. Díaz-Báñez, D. Lara, P. Pérez-Lanero, J. Urrutia, I. Ventura. *Computing maximal islands*, Proceedings of the 25th European Workshop in Computational Geometry, 2009, pp. 333–336.
5. C. Bautista-Santiago, J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, D. Lara, J. Urrutia. *Covering moving points with anchored circles*, Proceedings of the XVII EURO Working Group on Locational Analysis, 2008, pp.61

CAPÍTULO 1

Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

Un *sensor* es un dispositivo capaz de realizar mediciones en el ambiente donde se encuentra. Por ejemplo, medir la temperatura, la humedad, el nivel del suelo, etcétera. Recientes desarrollos en la tecnología, han permitido la creación de sensores que tienen la capacidad de moverse [24, 56]. Estos avances generan problemas algorítmicos muy interesantes; en este capítulo estudiamos uno de estos.

Sea S un conjunto de sensores *móviles* y sea Q un conjunto de antenas, cada una de las cuales tiene una posición fija. Una antena $q_j \in Q$ emite una y sólo una vez una señal en el tiempo t_j , y lo hace con un radio de transmisión r_j . La señal emitida por la antena es recibida por cualquier sensor que esté a distancia euclidiana menor o igual que r_j de q_j . Entonces, un sensor recibirá la señal de una antena si en el momento en el que ésta emite su señal, el sensor está dentro del radio de transmisión de la antena.

Supongamos que entre mayor es el radio de transmisión de una antena, mayor es su costo. Deseamos elegir y activar un subconjunto de a lo más k antenas de Q , y decidir el instante de activación y el rango de transmisión de cada una, de tal manera que garanticemos que cada sensor recibe la señal de al menos una antena, y que el costo del conjunto de antenas sea el mínimo posible.

Este problema está estrechamente relacionado con el problema de la localización de servicios (*facility location*). La localización de servicios, es un problema estudiado en el área de investigación de operaciones, que ha

2 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

sido también estudiado en el área de Geometría Computacional. El propósito en este tipo de problemas es el de encontrar los *mejores* lugares para situar un conjunto de *servicios* (p.ej. hospitales, supermercados, cines, etc.), de tal manera que en estos se atienda a un conjunto de *clientes* y se minimice el costo determinado por cierta función. La función de costo es generalmente la distancia euclidiana entre un cliente y un servicio.

En el área de la Geometría Computacional, este tipo de problemas son modelados principalmente como el problema del *k-centro*: Dado un conjunto P de puntos (*clientes*) en un espacio métrico \mathbb{X} , un *k-centro* de P es un conjunto de k puntos (*servicios*) en \mathbb{X} , de tal forma que la distancia máxima entre un cliente y su servicio más cercano sea lo menor posible. Si \mathbb{X} es el espacio euclidiano, el problema se conoce como *problema del k-centro euclidiano*. Si además se requiere que el conjunto de servicios sea un subconjunto de P , entonces el problema se conoce como *problema del k-centro euclidiano discreto*. Un *k-centro aproximado* es un conjunto de puntos en el cual la distancia máxima entre un servicio y su cliente más cercano es a lo más un factor ε más grande que la distancia asociada al *k-centro* exacto. Existen diversos resultados respecto al problema del *k-centro* y a todas sus variantes, presentamos una revisión de algunos en la Sección 1.2.

El desarrollo de redes en las cuales los clientes se mueven conforme transcurre el tiempo, como las redes celulares o las redes de internet inalámbricas, ha dado origen a diversas variantes del problema del *k-centro* en ambientes móviles. En dichos escenarios, los clientes son modelados como puntos que se mueven de manera continua, y el propósito es *mantener* un conjunto de k servicios que sirvan a los clientes, de manera que la distancia máxima se minimice en todo momento. Los servicios se modelan ya sea como puntos móviles o estáticos.

El escenario en el que los clientes y los servicios se mueven, ha sido estudiado en versiones tanto exactas como aproximadas. Presentamos algunos de estos resultados en la Sección 1.2. Sorprendentemente, el escenario en el que el conjunto de k servicios está dado y son puntos estáticos, ha sido muy poco estudiado. El problema que estudiaremos en este capítulo puede ser visto como una variante del problema del *k-centro euclidiano discreto* para clientes móviles y servicios fijos. En la siguiente sección definimos el problema formalmente.

1.1. El problema

A continuación se define formalmente el problema.

Sea $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto de n puntos en el plano, tales que cada p_i se mueve con una trayectoria fija $\hat{p}_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\hat{p}_i(t) = p_i + v_i t$ con $v_i \in \mathbb{R}^2$. Es decir, $\hat{p}_i(t)$ es la posición del punto p_i al tiempo t . Entonces S es una colección de puntos que se mueven linealmente y todos con velocidad constante.

Por otra parte, sea $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ un conjunto de puntos en el plano, tal que cada q_j , $1 \leq j \leq k$, tiene asociado un instante de tiempo $t_j \in [0, T]$ y una distancia $r_j \in \mathbb{R}^+$. Llamamos a r_j el *radio de transmisión* de q_j . Sea $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, la distancia euclidiana entre el punto q_j y el punto p_i en el instante de tiempo $t \in [0, T]$; es decir, si $\hat{p}_i(t) = (p_i^x(t), p_i^y(t))$ y $q_j = (q_j^x, q_j^y)$ entonces:

$$d(q_j, p_i(t)) = \sqrt{(q_j^x - p_i^x(t))^2 + (q_j^y - p_i^y(t))^2}.$$

Decimos que q_j cubre a p_i si $d(q_j, p_i(t_j)) \leq r_j$. El problema que estudiamos en este capítulo es el siguiente:

Problema 3. *Dados S y Q , asignar a cada $q_j \in Q$ un instante de tiempo $t_j \in [0, T]$ y un radio de transmisión $r_j \geq 0$, de tal forma que todo punto en S sea cubierto por al menos un punto en Q , en un intervalo de tiempo menor o igual a T , y que el máximo de $\{r_1, \dots, r_k\}$ sea mínimo. Llamamos al conjunto de parejas $\{(t_1, r_1), \dots, (t_k, r_k)\}$ una cubierta de S .*

A primera vista, uno podría pensar que este problema es un caso particular del problema del k -centro euclidiano discreto. Sin embargo, es importante aclarar que contrario al problema del k -centro, en el nuestro el conjunto de k servidores está dado, así que el objetivo no es encontrar dónde colocarlos. Además, el hecho de que las antenas transmiten el mensaje sólo una vez y que este sea efímero, hace nuestro problema completamente distinto a cualquier variante móvil del problema del k -centro. Nótese además que, si los sensores estuvieran estáticos, la solución a nuestro problema se encontraría calculando el diagrama de Voronoi de las k antenas; véase la Figura 1.1. Así mismo si los sensores fueran móviles pero la comunicación entre estos y las antenas tuviera que conservarse en todo momento, la solución estaría dada calculando el diagrama de Voronoi de la antenas y cambiando la antena asociada con un sensor cuando este cambie de una celda de Voronoi a otra.

Es importante mencionar que las estructuras de datos cinéticas (KDS, *kinetic data structures*) [45], no pueden ser adaptadas para usarse en nuestro modelo. Hasta donde sabemos, las KDS se utilizan en problemas en los que

4 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

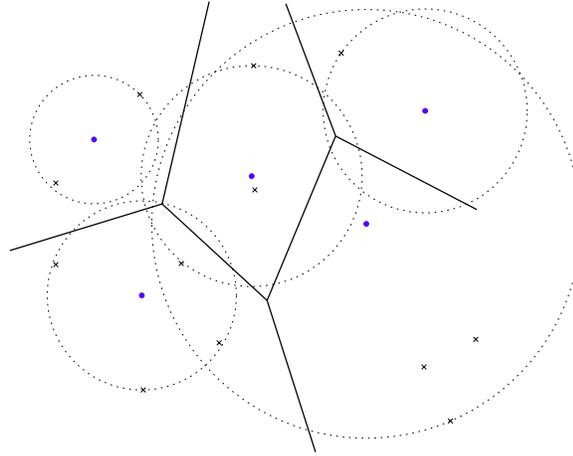


Figura 1.1: La solución a nuestro problema para el caso de sensores estáticos está dada por el diagrama de Voronoi. Los puntos denotan las antenas, y las cruces los sensores. Los círculos denotan los radios de transmisión óptimos de cada antena.

el objetivo es mantener en el tiempo cierta estructura geométrica, lo cual no es nuestro objetivo en este capítulo. En las siguientes secciones demostramos que el Problema 3 es NP-difícil, y que no existe ningún algoritmo polinomial que genere una ε aproximación, para ninguna constante ε . Presentamos un algoritmo que para valores pequeños de k , nos permite resolver el problema en tiempo polinomial, y que puede generalizarse para resolver otras variantes del problema. Estos algoritmos son eficientes para valores pequeños de k .

1.2. Trabajo relacionado

El problema del k -centro euclidiano es NP-completo [61]. También es NP-completo aproximarlo por un factor menor a 1,82 [34], sin embargo existen muchos algoritmos para aproximarlos con un factor de 2, el primero de estos aparece en [44]. Por otra parte, el problema del k -centro euclidiano discreto es también NP-completo [36], pero es $1 + \varepsilon$ aproximable, para cualquier $\varepsilon > 0$ (véase por ejemplo [13]). Si k es de orden constante respecto a n , es fácil observar que una solución puede encontrarse en tiempo polinomial si se consideran los $O(n^k)$ subconjuntos de tamaño k de P (el conjunto de servicios). De acuerdo a la revisión de la literatura que hemos realizado, la única mejora que se ha hecho es para el caso $k = 2$. Para este caso existe un algoritmo con complejidad de $O(n \log^2 n \log^2 \log n)$ [17].

Algunos casos particulares de los problemas k -centro euclidiano y k -

centro euclidiano discreto han sido estudiados en sus versiones cinéticas. El problema del k -centro cinético es el siguiente. Sea $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto de n clientes móviles, cuyo movimiento se especifica por funciones continuas y diferenciables a pedazos $\{\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n\}$, donde $\hat{p}_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Sea $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ un conjunto de k servicios móviles, cuyo movimiento es especificado por funciones continuas y diferenciables a pedazos $\{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k\}$, donde $\hat{f}_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. F es una ε -aproximación del k -centro cinético de S si para cualquier instante dado $t \in [0, T]$, los servicios con posiciones $\{\hat{f}_1(t), \dots, \hat{f}_k(t)\}$, son una ε -aproximación del k -centro para los clientes con posiciones $\{\hat{p}_1(t), \dots, \hat{p}_n(t)\}$. Cuando $\varepsilon = 1$, entonces el k -centro es *exacto*.

En [2] se da una estructura de datos cinética para mantener una ε -aproximación del 1-centro euclidiano discreto en \mathbb{R}^2 . Dicha estructura procesa $O(1/\varepsilon^{5/2})$ eventos y utiliza en total $O((n/\sqrt{\varepsilon}) \log n)$ tiempo en procesarlos. Otra variante del k -centro euclidiano discreto, es aquella en la que la distancia máxima posible entre un servicio y un cliente es dada, y el objetivo es elegir un conjunto de servicios de tal forma que k sea mínima y que todos los clientes sean cubiertos. En [39] se da un algoritmo aleatorio para aproximar dicha variante del k -centro. Dicho algoritmo elige y mantiene como centros un subconjunto de puntos, de tal forma que el número de centros elegidos es una aproximación constante del mínimo posible. Esto se hace utilizando una KDS, la cual, conforme los puntos se mueven, actualiza los centros de la forma adecuada. En [46] se presenta un algoritmo que calcula un k -centro estático, de tal forma que en cualquier instante de tiempo este centro estático es competitivo con el k -centro cinético exacto para ese instante. Es decir, si el movimiento de los puntos son funciones de grado μ , en la solución óptima el número de centros es k y r es el radio óptimo, entonces este esquema garantiza una $2^{\mu+1}$ -aproximación del radio, al elegir $k^{\mu+1}$ centros del conjunto antes de que los puntos empiecen a moverse. El primer artículo en presentar una aproximación constante del k -centro cinético es [40], en este artículo se da un algoritmo que produce una 8-aproximación del k -centro cinético euclidiano discreto. Por otra parte, los autores de [12] estudian el problema del 1-centro euclidiano cinético, en sus versiones exacta y aproximada, para el caso en que la velocidad de los centros es acotada. Ellos demuestran que la velocidad del 1-centro euclidiano cinético puede ser arbitrariamente grande. En [30] presentan aproximaciones del 2-centro cinético euclidiano, que tienen velocidades acotadas.

6 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

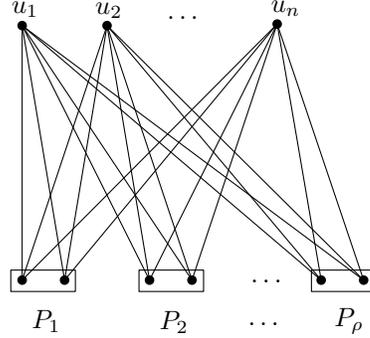


Figura 1.2: Ilustración de la gráfica $K_{n,2\rho}$

1.3. NP-difícil

En esta sección demostramos que el Problema 3 es NP-difícil y no aproximable. Para demostrar esto reducimos el problema de los ρ -pares proveedores (ρ -pair supplier) al nuestro. La siguiente gráfica se utilizará en la definición del problema:

Sea $K_{n,2\rho} = (U \cup V, E)$ una gráfica bipartita completa con pesos en las aristas, donde $U \cap V = \emptyset$ y $|U| = n$, $|V| = 2\rho$. Además $V = P_1 \cup \dots \cup P_\rho$ tales que $\bigcap_{1 \leq i \leq \rho} P_i = \emptyset$ y $|P_i| = 2$, $1 \leq i \leq \rho$; véase la Figura 1.2. Denotamos por $\omega_{i,j} \geq 1$ al peso de la arista no dirigida (v_i, u_j) .

El problema de los ρ -pares proveedores es el siguiente:

Problema 4. Sea $C \subset V$, tal que $|C \cap P_i| = 1$ para toda $1 \leq i \leq \rho$, y sea $G[U \cup C]$ la subgráfica de $K_{n,2\rho}$ inducida por el conjunto de vértices $U \cup C$. Para cada vértice $u_i \in U$, sea e_i la arista de $G[U \cup C]$ incidente a u_i con menor peso de entre las ρ aristas de $G[U \cup C]$ incidentes a u_i . El problema de los ρ -pares proveedores consiste en elegir C de tal forma que el peso de la arista más pesada del conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ sea minimizada. Llamamos a el peso máximo del conjunto de aristas $\{e_1, \dots, e_n\}$ el peso de C .

En el artículo [48] se demuestra que el problema de los ρ -pares proveedores es NP-completo, y no ε -aproximable, para ninguna constante ε . Utilizando este hecho demostramos:

Teorema 1.3.1. *El Problema 3 es NP-difícil. Además, no existe ningún algoritmo polinomial que genere una ε -aproximación del mismo, para ninguna constante ε , al menos que $P = NP$.*

Demostración. El problema de decisión asociado con el Problema 3 es el

siguiente: Dado $\omega > 0$ ¿existe una cubierta de S cuyo radio de transmisión máximo sea mayor o igual a ω ?

Claramente dicho problema de decisión está en NP, puesto que basta con elegir al azar un tiempo de activación y un radio para cada antena, y verificar en tiempo polinomial si esto es una cubierta de S .

Transformamos el Problema 3 al problema de los ρ -pares proveedores. Sea $K_{n,2\rho} = (U \cup V, E)$ una gráfica bipartita completa que forma una instancia arbitraria del problema de los ρ -pares proveedores. Mostraremos ahora cómo construir un conjunto S y un conjunto Q , tal que S tiene una cubierta con radio de transmisión máximo menor o igual que ω , si y sólo si $K_{n,2\rho}$ tiene una cubierta con peso máximo menor o igual que ω .

La idea de la reducción es encajar la gráfica $K_{n,2\rho}$ en el plano, colocar antenas en los vértices y un sensor por cada arista; los alcances de las antenas son los pesos de las aristas. Presentamos los detalles de dicha construcción a continuación.

Primero describimos la construcción del conjunto Q a partir de los vértices de $K_{n,2\rho}$; el radio de transmisión y el tiempo de envío del mensaje para cada antena, se asignarán más adelante. Sea ω_{max} el peso más grande asociado con una arista de $K_{n,2\rho}$. Por cada vértice $v_i \in V$, $1 \leq i \leq 2\rho$, generamos un punto $q_i \in Q$ con las siguientes coordenadas:

$$q_i = \begin{cases} (i \times (-3\omega_{max}), 0), & \text{si } i \text{ es impar;} \\ (i \times (-3\omega_{max}), 2\omega_{max}), & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases}$$

Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 1.3.

Por otra parte, por cada vértice $u_j \in U$, $1 \leq j \leq n$, generamos un punto en Q con coordenadas $q_{2\rho+j} = (j \times (-3\omega_{max}), y)$, donde y es un real cuyo valor especificaremos más adelante; la Figura 1.3 muestra una ilustración al respecto. El conjunto Q , entonces, consiste de $2\rho + n$ puntos distintos, los cuales etiquetamos como $\{q_1, \dots, q_{2\rho}, q_{2\rho+1}, \dots, q_{2\rho+n}\}$. En cada punto del subconjunto de Q formado por los puntos $\{q_1, \dots, q_{2\rho}\}$ colocamos una antena. Por otra parte, en cada punto del subconjunto $\{q_{2\rho+1}, \dots, q_{2\rho+n}\}$ colocamos $2\rho - 1$ antenas. Por lo que en total la cantidad de antenas es $2\rho + (2\rho - 1)n$, pero la cantidad de puntos en Q (i.e. las posiciones de las antenas) es $2\rho + n$.

Ahora describimos la construcción del conjunto S a partir de las aristas de $K_{n,2\rho}$. Primero construimos las posiciones iniciales y después la trayectoria y velocidad de cada sensor. Sea $\omega_{i,j}$ el peso de la arista (v_i, u_j) , $v_i \in V, u_j \in U$. Por cada arista $(v_i, u_j) \in E$, $0 \leq i \leq 2\rho$, $1 \leq j \leq n$, generamos un punto $p_{ij} \in S$, de tal forma que $d(q_i, p_{ij}(0)) = \omega_{i,j}$, esto se ilustra en la Figura 1.4. Nótese que hasta ahora $|S| = 2\rho n$.

8 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

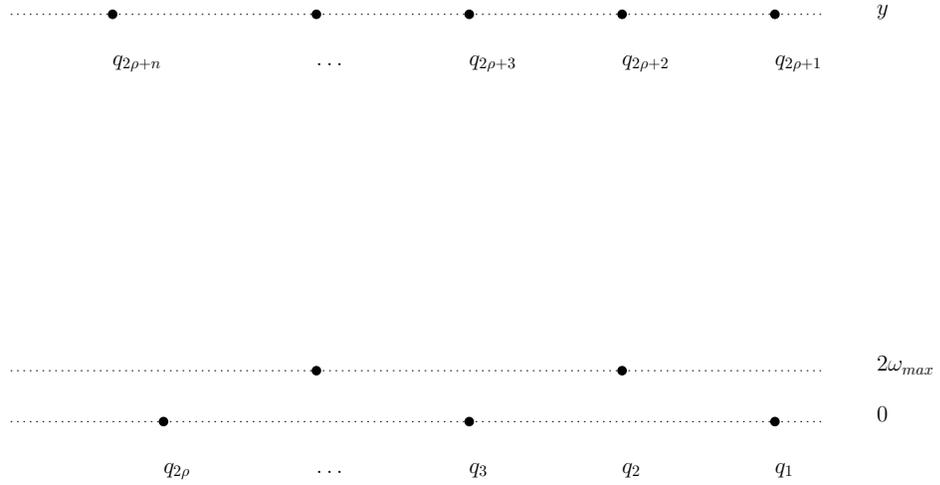


Figura 1.3: Construcción del conjunto Q en la reducción del problema de los ρ -pares proveedores al Problema 3.

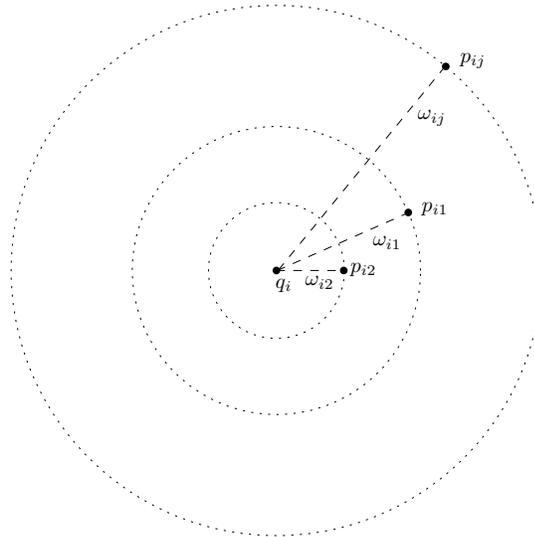
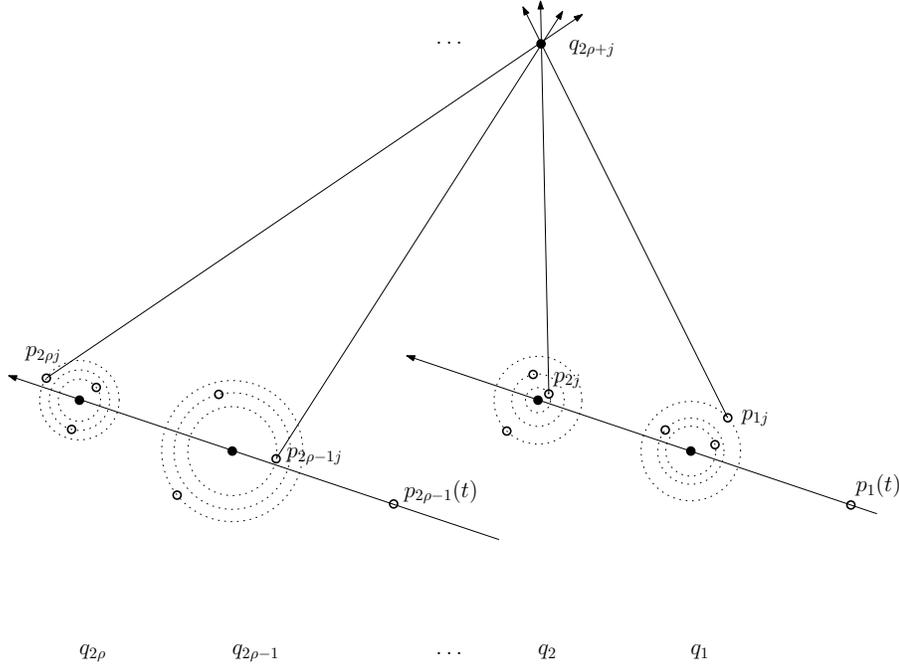


Figura 1.4: Construcción del conjunto S .

Figura 1.5: Trayectorias de los puntos en S .

A continuación asignamos trayectoria y velocidad a cada punto en S , recuérdese que p_{ij} es la posición inicial del sensor $\hat{p}_{ij}(t)$. La función de movimiento \hat{p}_{ij} de cada punto describe una recta dirigida que pasa por los puntos $(p_{ij}, q_{2\rho+j})$, y de tal forma que el punto se mueve con velocidad constante. Es decir que para un valor fijo de j , $1 \leq j \leq n$, hay exactamente 2ρ puntos de S , $\{p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{2\rho j}\}$, cuya trayectoria pasa por el punto $q_{2\rho+j}$. Esta construcción se ilustra en la Figura 1.5. El valor y utilizado en las coordenadas de los puntos en Q , puede elegirse de tal manera que para todo p_{ij} y $t \in [0, T]$ suceda que la distancia entre $\hat{p}_{ij}(t)$ y cualquier q_k , $k \neq \{i, 2\rho+j\}$, sea siempre mayor que ω_{max} . La velocidad de p_{ij} puede elegirse de tal forma que para cada instante de tiempo, exista a lo más un punto del conjunto $\{p_{1j}, \dots, p_{2\rho j}\}$ que esté a distancia menor o igual que ω_{max} de $q_{2\rho+j}$.

Generamos, además, para cada pareja de puntos $(q_i, q_{i+1}) \in Q$, con $i \in \{1, 3, 5, \dots, 2\rho - 1\}$, un punto $p_i \in S$ cuya trayectoria es la recta dirigida (q_i, q_{i+1}) . La posición inicial y la velocidad se eligen de tal manera que cuando dichos puntos lleguen a q_i , todos los puntos p_{ij} hayan llegado a su punto respectivo $q_{2\rho+j}$. Esto se ilustra en la Figura 1.5. Nótese que $|S| = 2\rho n + \rho$.

10 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

Ahora mostramos cómo obtener la solución al problema de los ρ -pares proveedores, teniendo la solución a nuestro problema. Primero asignamos tiempos y alcances para cada antena, de tal manera que dada una solución con peso ω del problema de los ρ -pares proveedores, podamos generar una cubierta para S con radio de transmisión ω . Sea $K_{n,2\rho}$ una instancia del problema de los ρ -pares proveedores, y sea $C \subseteq V$ una solución a este con peso ω . Considérese la subgráfica de $K_{n,2\rho}$ inducida por $U \cup C$, nótese que en dicha gráfica hay exactamente n aristas incidentes en cada $v_i \in C$ y recordemos que $|C| = \rho$. Decimos que un vértice $v_i \in C$ sirve a un vértice $u_j \in U$ si y sólo si no existe otro vértice $v_k \in C$ de tal forma que $\omega_{k,j} < \omega_{i,j}$. Considérese el conjunto de aristas entre v_i y los u_j que éste sirve. Denotamos por ω_{v_i} al peso más grande de dichas aristas. Sea $\omega = \max\{\omega_{v_i}, 1 \leq i \leq \rho\}$. Cada antena colocada en alguno de los puntos en Q correspondientes al conjunto C , es activada con radio igual a ω_{v_i} en el primer instante de tiempo en el que algún punto en S esté dentro de su radio de transmisión. Por construcción, al menos n puntos móviles son cubiertos por dicho conjunto de antenas; puesto que $\bigcup_{v_i \in C} v_i$ sirve a U . Por lo tanto, una vez activadas dichas antenas, hay a lo más $|S| - n = 2\rho n + \rho - n = (2\rho - 1)n + \rho$ sensores sin cubrir, de los cuales a lo más $(2\rho - 1)n$ son del tipo p_{ij} , es decir cuya trayectoria pasa por puntos del subconjunto $\{q_{2\rho+1}, \dots, q_{2\rho+n}\}$. Por lo tanto, las antenas colocadas en puntos de dicho subconjunto se activan con radio de transmisión 0 y en el instante de tiempo en el que algún sensor esté dentro de su radio de transmisión. Haciendo esto hemos cubierto todos los sensores con posiciones iniciales del tipo p_{ij} , por lo que resta cubrir los sensores: $\{p_1, p_3, \dots, p_{2\rho-1}\}$. Estos sensores son cubiertos por las antenas correspondientes al conjunto $U \setminus C$, utilizando radio 0 y activándose en el primer instante de tiempo en el que algún sensor esté dentro de su radio de transmisión. Por lo tanto, hemos construido una cubierta de S con radio máximo ω .

Supongamos ahora que tenemos una cubierta de S con radio máximo ω , es claro que C es el conjunto correspondiente a las antenas colocadas en puntos del subconjunto $\{q_1, \dots, q_{2\rho}\}$, que cubren sensores del tipo p_{ij} ; por lo tanto C tiene peso máximo ω . Por otra parte, $|C \cap P_i| = 1$, para toda $1 \leq i \leq \rho$, pues de lo contrario existirían al menos dos antenas q_i, q_{i+1} , $1 \leq i \leq 2\rho$, cubriendo sensores del tipo p_{ij} , por lo que el sensor p_i quedaría descubierto. Por lo tanto, una cubierta de S con radio máximo ω genera una solución al problema de los ρ -pares proveedores con peso máximo ω .

Es claro que que las posiciones de las antenas, las posiciones iniciales de los sensores y sus trayectorias pueden calcularse en tiempo polinomial. Por lo que la reducción se hace en tiempo polinomial. Con esto se obtiene

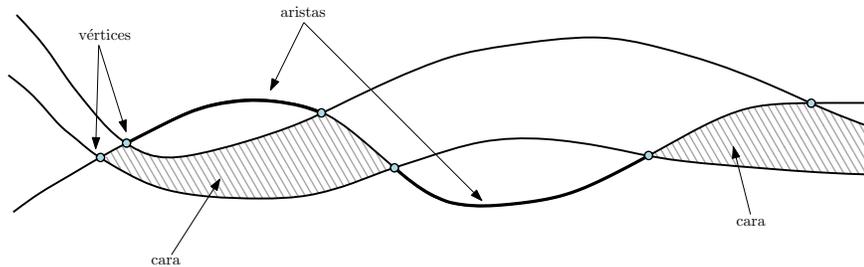


Figura 1.6: Ilustración de un arreglo de curvas.

el resultado deseado. ■

1.4. Algoritmo para valores pequeños de k

En esta sección presentamos un método que nos permite resolver el Problema 3 de manera eficiente, para valores constantes de k . La función a optimizar en la definición de nuestro problema es el radio máximo de transmisión necesario, sin embargo el método que presentaremos nos permite optimizar otras funciones, por ejemplo, la suma de los radios de transmisión.

Primero presentamos una descripción detallada de las estructuras que se utilizarán en el algoritmo, después describimos cómo construirlas y finalmente presentamos el algoritmo y hacemos un análisis de su complejidad.

1.4.1. Arreglo de curvas

Intuitivamente, el mejor instante para que una antena envíe el mensaje, es cuando los sensores están más cercanos. Utilizando esta simple idea como base, construimos un arreglo de curvas que nos permitirá encontrar la solución al problema. Es importante reiterar que nuestro algoritmo es eficiente únicamente para valores pequeños de k , es decir cuando k es constante con respecto a n .

El *arreglo* de una colección finita Γ de curvas en \mathbb{R}^2 , denotado como $\mathcal{A}(\Gamma)$, es la descomposición del plano, inducida por Γ , en componentes conexas maximales de dimensión 2, 1 y 0; llamadas *caras*, *aristas* y *vértices*, respectivamente. La Figura 1.6 ilustra estos conceptos. Una definición más amplia puede encontrarse en [31].

Recordemos que el conjunto de sensores es modelado por un conjunto $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ de n puntos en el plano, tal que cada p_i se mueve con una trayectoria fija $\hat{p}_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\hat{p}_i(t) = p_i + v_i t$ con $v_i \in \mathbb{R}^2$. Es decir,

12 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

$\hat{p}_i(t)$ es la posición del punto p_i al tiempo t . Por otra parte, denotamos por $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ al conjunto de antenas. Cada q_j , $1 \leq j \leq k$, tiene asociado un instante de tiempo $t_j \in [0, T]$, en el que envía un mensaje con radio de transmisión $r_j \in \mathbb{R}^+$.

Sea $d_{j,i}(t)$ la distancia euclidiana elevada al cuadrado, entre el punto q_j y el punto p_i en el instante de tiempo t . Es decir, si $p_i(t) = (p_i^x(t), p_i^y(t))$ y $q_j = (q_j^x, q_j^y)$, entonces:

$$d_{j,i}(t) = (q_j^x - p_i^x(t))^2 + (q_j^y - p_i^y(t))^2.$$

Nótese que la definición de cubrimiento presentada en la Sección 1.1, es equivalente a decir que q_j cubre a p_i si $d_{j,i}(t_j) \leq r_j$. Esta definición es la que usaremos de ahora en adelante, pues haciendo esto se simplifica la presentación de los resultados.

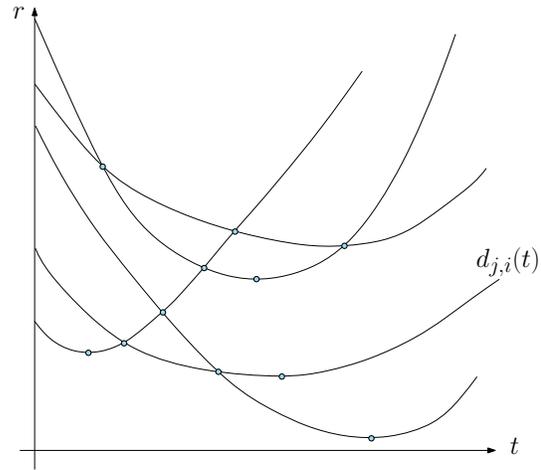
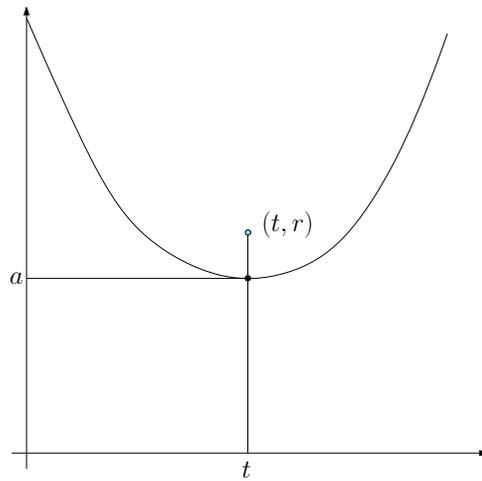
Antes de continuar introducimos alguna notación. Denotaremos por la triplete (q_j, t_j, r_j) a la antena situada en q_j y que es activada en el instante t_j con radio r_j , y al conjunto de sensores que esta cubre como $\mathcal{S}(q_j, t_j, r_j)$.

Para un valor fijo de j , sea \mathcal{A}_j el arreglo de curvas definido por las funciones $d_{j,i}(t)$, $1 \leq i \leq n$. Una ilustración de dicho arreglo se muestra en la Figura 1.7. Es importante observar que un punto (t, r^2) en el arreglo \mathcal{A}_j corresponde a activar la antena q_j en el instante de tiempo t y con radio de transmisión r^2 . Análogamente, (q_j, t, r) corresponde a un único punto en el arreglo \mathcal{A}_j . Para simplificar la presentación de ahora en adelante escribiremos (t, r) para referirnos al punto (t, r^2) en el arreglo de curvas.

Dado un punto (t, r) en \mathcal{A}_j , sea (t, a) el punto de intersección entre la recta vertical que pasa por t y $d_{j,i}$, para alguna $1 \leq i \leq n$. Decimos que $d_{j,i}$ está *abajo* de (t, r) si $a \leq r$. Esto se ilustra en la Figura 1.8. La siguiente observación es clave en nuestros resultados:

Observación 1. *Dado (t, r) un punto en el arreglo de curvas \mathcal{A}_j , un sensor p_i está en $\mathcal{S}(q_j, t, r)$, si y sólo si la curva $d_{j,i}$ está abajo de (t, r) .*

Sea f una cara en el arreglo \mathcal{A}_j . Decimos que una arista e de f pertenece a la *frontera inferior* de f si y sólo si no hay otras aristas de f abajo de e . De ahora en adelante, cuando nos refiramos a una cara del arreglo, consideraremos que esta está compuesta de su interior y su frontera inferior. De este modo, cualesquiera dos puntos en la misma cara corresponden a antenas que cubren a exactamente los mismos sensores. Por otra parte, llamaremos a un punto (t, r) en el arreglo un *punto crítico* si (t, r) es el punto mínimo de alguna $d_{j,i}$ o bien es la intersección de dos curvas. Esto se ilustra en la

Figura 1.7: Ilustración de un arreglo de curvas \mathcal{A}_j y sus puntos críticos.Figura 1.8: La curva está abajo del punto (t, r) .

14 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

Figura 1.7. El siguiente lema nos da la pauta para discretizar el espacio de búsqueda de las cubiertas de S .

Lema 1.4.1. *Sea (t', r') un punto crítico de \mathcal{A}_j y sea $r' \leq r$. El conjunto de sensores cubierto por una antena situada en q_j y activada en el instante t con radio r , es el mismo al cubierto por una antena situada en q_j y activada en el instante t' con radio r' ; es decir*

$$\mathcal{S}(q_j, t, r) = \mathcal{S}(q_j, t', r').$$

Demostración. Es suficiente con observar que cualesquiera dos puntos en la misma cara cubren exactamente el mismo conjunto de sensores. Además, si no existe un punto crítico (t', r') tal que $r' \leq r$, entonces (t, r) es un punto crítico. ■

Nótese que si generamos todos los arreglos $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ y elegimos un punto en cada uno de ellos, estaremos generando una posible cubierta de S . Esta idea es la que utilizaremos para generar todas las cubiertas de S y elegir la óptima. Los detalles se presentan en la siguiente sección.

1.4.2. Algoritmo

La idea general del algoritmo es la siguiente: Construir el arreglo de curvas correspondiente a cada $q_j, 1 \leq j \leq k$, elegir de manera adecuada un punto crítico en cada uno de los arreglos, de tal manera que una vez que los primeros $k - 1$ puntos hayan sido elegidos, el k -ésimo punto quede directamente determinado. Primero mostramos un método que genera todas las cubiertas distintas de S , es decir, que genera todas las posibles combinaciones de $k - 1$ puntos críticos, uno por arreglo de curvas. Después presentaremos un resultado que realiza la búsqueda sin usar todas las combinaciones.

Sea $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k\}$ el conjunto de todos los arreglos de curvas $\mathcal{A}_j = \{d_{j,i} | 1 \leq i \leq n\}$, y sea

$$\{(t_j, r_j) \in \mathbb{R}^2 | (t_j, r_j) \text{ es un punto en el arreglo } \mathcal{A}_j, 1 \leq j \leq k\},$$

es decir, el conjunto contiene exactamente un punto de cada arreglo. Sin pérdida de generalidad supongamos que $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$.

Observación 2. *El conjunto $\{(t_j, r_j) | (t_j, r_j) \in \mathcal{A}_j, 1 \leq j \leq k\}$ corresponde a una cubierta de S si y sólo si $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}(q_j, t_j, r_j) = S$. Además, si dicho conjunto es una cubierta de S , entonces $S \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{S}(q_j, t_j, r_j) = \mathcal{S}(q_k, t_k, r_k)$.*

La observación anterior implica que, una vez que los primeros $k-1$ puntos han sido elegidos, el k -ésimo punto debe corresponder a activar una antena de tal forma que esta cubra todos los sensores no cubiertos por las primeras $k-1$ antenas. Siguiendo esta idea y suponiendo que los primeros $k-1$ puntos han sido elegidos, describimos cómo seleccionar el punto adecuado en el k -ésimo arreglo; la manera de elegir adecuadamente los primeros $k-1$ puntos será descrita después.

Elegir el k -ésimo punto

Como implicación de la Observación 2, se tiene que si (t_k, r_k) pertenece a una cubierta de S , entonces (t_k, r_k) está en la *envolvente superior* del subarreglo de \mathcal{A}_k que consiste de las curvas correspondientes a los sensores no cubiertos por alguna antena (q_j, t_j, r_j) , $1 \leq j \leq k-1$. Por lo tanto, es suficiente con generar dicho subarreglo y elegir cualquier punto en su envolvente superior, sin embargo como deseamos optimizar el radio máximo, elegimos el punto con menor altura.

Una manera natural de proceder, sería actualizando dinámicamente la envolvente superior de \mathcal{A}_k para cada conjunto distinto de los primeros $k-1$ puntos, de tal forma que generemos los puntos del subarreglo que nos interesa. Sin embargo, como se demostrará en la Sección 1.4.3 dicha envolvente puede tener cambios de orden lineal por inserción de cada curva. A continuación presentamos una estructura que nos permite elegir el k -ésimo punto de manera eficiente.

Sean f y f' dos caras *vecinas* en \mathcal{A}_k , es decir que comparten una arista en el arreglo. La siguiente gráfica es la base de la estructura que nos permite generar el punto deseado:

Definición 1.4.1. *Sea G una gráfica dirigida con etiquetas en sus aristas. El conjunto de vértices de G contiene un elemento por cada cara de \mathcal{A}_k , incluida la cara exterior. Existe una arista, con etiqueta i , del vértice correspondiente a f hacia el vértice correspondiente a f' si y sólo si para toda pareja $(t, r) \in f$ y $(t', r') \in f'$, sucede que $\mathcal{S}(q_k, t', r') = \mathcal{S}(q_k, t, r) \setminus p_i$.*

Es decir, existe una arista con etiqueta i entre f y f' si cualquier instante de activación y radio definidos por un punto en f , produce que la antena colocada en q_k cubra al sensor p_i , y sin embargo con ningún instante de activación y radio definido por un punto en f' pueda dicha antena cubrir a p_i . Esta gráfica se ilustra en la Figura 1.9. El vértice correspondiente a la cara exterior representa el hecho de no activar la antena, o activarla con radio cero y en cualquier instante.

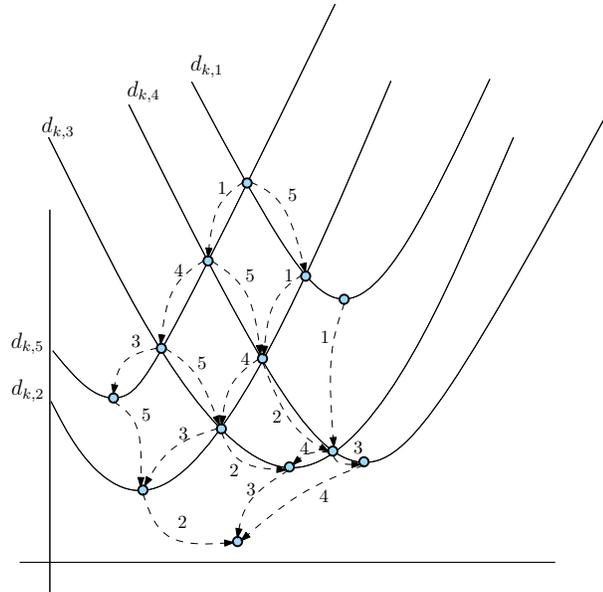


Figura 1.9: Ilustración de la Definición 1.4.1.

Elegir el k -ésimo punto se reduce a, comenzando por el vértice de G correspondiente a la cara acotada por la envolvente superior, seguir una arista de G con etiqueta i si el sensor p_i ya fue cubierto. Para saber si un sensor ya fue cubierto, mantendremos un arreglo A de tamaño n , en $A[i]$ guardamos el número de veces que el sensor p_i ha sido cubierto por las primeras $k - 1$ antenas. Eventualmente, entonces, llegaremos a un vértice de G que ya no podremos seguir. Supongamos que ese vértice corresponde a una cara f de \mathcal{A}_k . El punto deseado es el punto mínimo de la frontera inferior de f .

Describimos ahora cómo generar todos los posibles conjuntos de los primeros $k - 1$ puntos.

Primeros $k - 1$ puntos

Consideremos el arreglo de curvas A_j y sea \mathcal{D}_j su gráfica dual, es decir, la gráfica que contiene un vértice por cada cara del arreglo, dos de los cuales son adyacentes si corresponden a caras vecinas. Todos los vértices de esta gráfica pueden ser visitados utilizando el algoritmo de búsqueda a profundidad (*Depth First Search*), cada vez que visitemos un nuevo vértice v en \mathcal{D}_j , consideramos el punto mínimo (t, r) en \mathcal{A}_j de la cara correspondiente a v .

Es decir que estaremos considerando activar la antena colocada en q_j en el instante t con radio r .

Para generar todas las posibles combinaciones de $k - 1$ puntos, procedemos recursivamente como sigue. Correr DFS en \mathcal{D}_1 , deteniéndose en cada vértice para visitar recursivamente las caras de los arreglos $\mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_{k-1}$. Es decir, al correr DFS en \mathcal{D}_2 , cada vez que se avance a un nuevo vértice, corremos DFS en \mathcal{D}_3 , etc. En cada paso actualizamos el arreglo \mathbf{A} , es decir, si el sensor p_i es cubierto, entonces incrementamos el valor en $\mathbf{A}[i]$.

Es importante destacar que al generar los conjuntos de esta manera, dos conjuntos consecutivos difieren únicamente en un punto. Este punto corresponde a una antena que cubre un sensor más o un sensor menos que el punto previo. Debido a esto el arreglo \mathbf{A} se actualiza en tiempo constante.

1.4.3. Complejidad

Analizamos ahora la complejidad de construir los arreglos de curvas utilizados en nuestro algoritmo, y de generar la solución.

Puesto que dos funciones distintas $d_{j,i_1}(t)$ y $d_{j,i_2}(t)$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, se intersectan a lo más dos veces, cada arreglo \mathcal{A}_j , $1 \leq j \leq k$, y su gráfica dual, pueden construirse en $O(n^2)$ tiempo [5]. Por la misma razón, hay $O(n^2)$ puntos críticos en cada arreglo. Por lo tanto, hay $O(n^2)$ instantes de activación y radios distintos para cada una de las k antenas; entonces hay $O(n^{2k})$ cubiertas distintas de S . Sin embargo, para nuestros fines es suficiente con generar $O(n^{2(k-1)})$ de estas, puesto que hemos supuesto el k -ésimo disco está determinado por los primeros $k - 1$. Por otra parte, recorrer cada gráfica dual \mathcal{D}_j tiene complejidad $O(n^2)$ tiempo, puesto que \mathcal{D}_j es plana [21]. Por lo tanto toma $O(n^{2(k-1)})$ tiempo en total recorrer los primeros $k - 1$ arreglos.

Obtener el k -ésimo disco tiene complejidad lineal, esto debido a que lo único que tenemos que hacer es recorrer la gráfica G correspondiente al arreglo \mathcal{A}_k , y en dicha gráfica a lo más n aristas son visitadas puesto que en una trayectoria dirigida no hay dos de ellas que tengan la misma etiqueta. Por otra parte, como se mencionó anteriormente, actualizar el arreglo \mathbf{A} toma únicamente de tiempo constante por operación. Por lo tanto, generar el k -ésimo disco requiere de $O(n)$ tiempo.

Lo anterior implica el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1. *Encontrar una cubierta de S con radio mínimo, puede hacerse en $O(n^{2k-1})$ tiempo y $O(n^{2(k-1)})$ espacio.*

■

Como se mencionó en la Sección 1.4.2, para generar el k -ésimo disco

18 Envío de mensajes a sensores móviles a través de antenas fijas

en lugar de utilizar la estructura introducida, uno podría optar por actualizar dinámicamente la envolvente superior del arreglo \mathcal{A}_k . Existe una estructura de datos dinámica capaz de mantener la envolvente superior de un arreglo de líneas [63]. Dicha estructura mantiene la envolvente superior de un arreglo bajo inserciones y eliminaciones, con un costo de $O(\log^2(n))$ por operación. Sin embargo, el caso de funciones cuadráticas es distinto, puesto que una estructura dinámica que mantuviera la envolvente superior de dicho arreglo, podría requerir de tiempo lineal por actualización. Considérese, por ejemplo, la siguiente situación: sea $p(x)$ un polinomio de grado dos, cuyo primer coeficiente es mayor que uno. Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, m números reales, para toda i tal que $1 \leq i \leq m$ definimos $q_i(x) = p(x) - (x - x_i)^2$. Nótese que $q_i(x)$ es un polinomio de grado dos y que $p(x) - q_i(x) = (x - x_i)^2$. Por lo tanto, las gráficas de $p(x)$ y $q_i(x)$ se intersectan únicamente en $(x, p(x))$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que la envolvente superior del arreglo $\{p(x), q_1(x) + \varepsilon, \dots, q_m(x)\}$, al considerarse de izquierda a derecha, consiste de $p(x), q_1(x), p(x), \dots, p(x), q_m(x), p(x)$. Nótese que $p(x)$ interseca la envolvente superior del arreglo $\{q_1(x), \dots, q_m(x)\}$ un número lineal de veces. Por lo tanto, el cambio después de una inserción o eliminación en la envolvente superior de los polinomios de grado dos puede ser lineal. Debido a esto, parece más adecuado utilizar la estructura que describimos, puesto que es fácil de implementar y el costo de encontrar el k -ésimo disco es también lineal.

1.5. Conclusiones

En este capítulo estudiamos la complejidad de una variante a un problema de cubrimiento; en la cual los puntos a cubrir se mueven a velocidad constante y sobre líneas rectas. Presentamos un algoritmo que nos permite enumerar todas las cubiertas combinatoriamente distintas, para una variedad de funciones a optimizar. Demostramos que si la función a optimizar es el máximo de los radios, el problema es NP-difícil, por lo que presentamos un algoritmo que nos permite resolver el problema de forma eficiente cuando k es constante.

A pesar de que los resultados en este capítulo son para puntos en el plano, no es complicado darse cuenta que las mismas técnicas pueden utilizarse para resolver el problema en cualquier dimensión. Nótese que en el caso general en el que los puntos están en \mathbb{R}^d , las distancias son también funciones cuadráticas, por lo tanto los arreglos de curvas pueden construirse del mismo modo. Una vez que los arreglos han sido construidos, los resultados se siguen

igual que como han sido presentados.

Es importante mencionar también, que si se permite a las antenas moverse sobre líneas rectas y a velocidad constante, las distancias siguen siendo funciones cuadráticas, por lo que los algoritmos presentados sirven también para resolver este caso.

Sin embargo, la complejidad del problema cambia si en lugar de movimiento rectilíneo, se permite movimiento algebraico de grado m . En dicho caso, la posición de cualquier sensor en el instante t está dada por $p_i(t) = (p_i^x(t), p_i^y(t))$, donde $p_i^x(t)$ y $p_i^y(t)$ son polinomios de grado a lo más m . Podría pensarse en utilizar la técnica presentada y construir los arreglos de curvas inducidos por las distancias. Las distancias serían funciones dadas por polinomios de grado a lo más $2m$; dos de las cuales se intersectan a lo más $2m$ veces. Los arreglos de curvas tendrían complejidad $O(mn^2)$. El análisis de la complejidad del algoritmo permanece igual, simplemente tendríamos que reemplazar cada n^2 por mn^2 . Sería interesante estudiar si puede encontrarse un algoritmo de menor complejidad.

CAPÍTULO 2

Discrepancia bicromática usando islas

Sea R un conjunto de r puntos *rojos* y B un conjunto de b puntos *azules* en el plano. En este capítulo presentamos un nuevo concepto para medir qué tan *mezclados* están los elementos de $S = R \cup B$. Intuitivamente hablando, un conjunto de puntos está bien mezclado si a primera vista los elementos de R y de B aparentan estar uniformemente distribuidos en cualquier región convexa del plano. Desafortunadamente, la experiencia dicta que cuando uno trata de dar una definición formal de conjuntos de puntos bien mezclados, usualmente se cae en numerosos errores y contraejemplos para cualquier intento que se haga.

Para la línea real, podemos argumentar que la coloración que mejor mezcla R y B , es aquella en la que los colores de los elementos de S alternan. Este ejemplo sugiere lo que aparenta ser un buen parámetro de estudio. Decimos que un conjunto bicoloreado de puntos en la línea real ℓ está bien mezclado, si en cualquier intervalo I de ℓ , la diferencia absoluta entre el número de puntos rojos y el número de puntos azules en I es a lo más uno. Esto, de hecho, resuelve el problema de determinar si un conjunto de puntos en la línea real está bien mezclado.

Consideremos la generalización natural de la definición anterior. Sea $S = R \cup B$ un conjunto de puntos en posición general en el plano. Un subconjunto I de S es una *isla* si $\text{Conv}(I) \cap S = I$, donde $\text{Conv}(I)$ denota el cierre convexo de I . La *discrepancia* de una isla de S , $\nabla(I)$, es la diferencia absoluta entre el número de puntos rojos menos el número de puntos azules

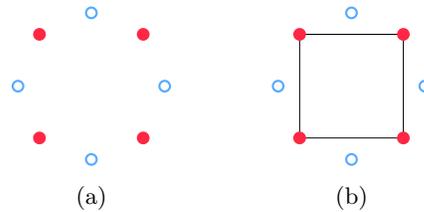


Figura 2.1: (a) Un conjunto bicolorado de $2n$ puntos en posición convexa. (b) Una isla roja de tamaño n .

de I ; es decir $\nabla(I) = ||I \cap R| - |I \cap B||$. Decimos que una isla tiene *discrepancia* k si $\nabla(I) = k$. Deseamos, por lo tanto, definir a los conjuntos de puntos bien mezclados como aquellos en los que la discrepancia de sus islas está acotada por una constante. Consideramos ahora un conjunto de puntos en posición convexa.

Sea S el conjunto de $2n$ puntos igualmente distribuidos sobre una circunferencia, y coloreados de tal forma que los colores de los elementos de S alternan al recorrer el círculo en el sentido de la manecillas del reloj; véase la Figura 2.1(a). A primera vista, S está bien mezclado, sin embargo contiene islas monocromáticas de tamaño n , tal como se muestra en la Figura 2.1(b).

De lo discutido en los párrafos anteriores, es claro que debemos ser cuidadosos al definir un parámetro que indique cuando un conjunto de puntos está bien mezclado. En este capítulo presentamos un parámetro razonable para detectar conjuntos de puntos bien mezclados, llamamos a dicho parámetro la *discrepancia de S* . Intuitivamente hablando, un conjunto de puntos bicolorado S está mal mezclado si se puede dividir en bloques convexos grandes con discrepancia grande. Se formaliza la definición de discrepancia de S en la Sección 2.1.

A pesar de que el concepto de discrepancia ha sido utilizado en diversas ocasiones en la literatura, en este capítulo presentamos la primer medida conocida para explorar el concepto de conjuntos bicolorados bien mezclados. Mencionamos ahora algunos trabajos en los que aparece el concepto de discrepancia.

Un parámetro conocido como *discrepancia combinatoria* de hipergráficas es estudiado en [4, 60]. Otro concepto de discrepancia es presentado en [60], en el cual se estudia el problema de encontrar la manera “más uniforme” de distribuir n puntos en el cuadrado unitario de acuerdo con cierto criterio. Dentro de la teoría conocida como *discrepancia geométrica* [18], se estudia el problema de *colorear* n puntos en el plano, de tal manera que se minimice la diferencia entre el número de puntos rojos y el número de puntos azules que

están dentro de cualquier disco en el plano. Por otra parte, en los artículos [27, 28, 10], se estudia el problema de encontrar el conjunto convexo Q , por ejemplo un triángulo, una banda, un polígono convexo, etcétera, tal que la discrepancia del subconjunto de S contenido en Q sea máxima.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 2.1 definimos formalmente el concepto de discrepancia y estudiamos algunas propiedades de la misma. Luego, en la Sección 2.2 estudiamos la discrepancia de los conjuntos de puntos en posición convexa. En la Sección 2.3 estudiamos la discrepancia de un conjunto de puntos cuando este es partido por una recta. Finalmente, en la Sección 3.4 concluimos el capítulo con algunos comentarios.

2.1. Propiedades básicas

Sea $X \subseteq S$, y sea $\nabla(X) = ||X \cap R| - |X \cap B||$ la *discrepancia bicromática* de X . Decimos que una partición $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ de S es *convexa* si los cierres convexos de sus elementos son disjuntos dos a dos. Esto es que para todo $1 \leq i < j \leq k$, sucede que $\text{Conv}(S_i) \cap \text{Conv}(S_j) = \emptyset$.

Definición 2.1.1. La discrepancia de S respecto a una partición convexa Π , $d_\Pi(S)$, es el mínimo $\nabla(S_i)$ sobre los elementos de Π . La discrepancia de S , $\mathcal{D}(S)$, se define como la máxima discrepancia $d_\Pi(S)$ sobre todas las posibles particiones convexas de S .

Si restringimos el estudio de la discrepancia de S al caso en el que las particiones convexas tienen cardinalidad k , obtenemos lo que llamaremos k -discrepancia de S , y la denotaremos como $\mathcal{D}_k(S)$. Cuando $k = 1$ entonces la partición tiene un sólo elemento, y por lo tanto $\mathcal{D}_k(S) = \nabla(S) = |r - b|$. Si $k = 2$ entonces podemos asociar las particiones convexas de S con aquellas inducidas por una línea recta. En tal situación llamaremos a la discrepancia *discrepancia lineal* de S . A continuación se discuten algunas propiedades de la discrepancia de S .

Denotamos por $\nabla'(X) = |X \cap R| - |X \cap B|$. Obsérvese que $\nabla(X) = |\nabla'(X)|$. Decimos que X es *m-rojo* si $\nabla'(X) > 0$, es decir, si hay mayoría de puntos rojos en X . Por otra parte, decimos que X es *m-azul* si $\nabla'(X) < 0$. Sea Π una partición de S , decimos que Π es *óptima* si $\mathcal{D}(S) = d_\Pi(S)$. Finalmente, denotamos como r_i y b_i al número de puntos rojos en S_i , y al número de puntos azules en S_i , respectivamente. Es decir $r_i = |S_i \cap R|$, $b_i = |S_i \cap B|$. Recuérdese que $r = |R|$ y $b = |B|$.

Las siguientes observaciones refieren propiedades básicas de la discrepancia de un conjunto de puntos.

Observación 3. $\mathcal{D}(S) \geq 1$. Además, si $\mathcal{D}(S) = 1$, entonces $|r - b| \leq 1$.

Demostración. Nótese que si Π es la partición de S que contiene exactamente un punto en cada subconjunto, entonces $d_{\Pi}(S) = 1$. Por definición, $\mathcal{D}(S)$ es el máximo de $d_{\Pi}(S)$ sobre todas las posibles particiones convexas; por lo tanto $\mathcal{D}(S) \geq 1$. Por otra parte, supóngase que $\mathcal{D}(S) = 1$ y que $|r - b| > 1$. La partición $\Pi = \{S\}$ tiene discrepancia mayor que uno, lo cual es una contradicción. ■

Observación 4. Si $r \geq 2b$ o $b \geq 2r$, entonces $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}_1(S) = |r - b|$.

Observación 5. Sea $k = |\Pi|$, entonces $d_{\Pi}(S) \leq \frac{r+b}{k}$.

Demostración. Es fácil notar que la cardinalidad máxima de cada elemento de Π es $\frac{r+b}{k}$; por lo tanto, la máxima discrepancia de cada elemento de Π es también $\frac{r+b}{k}$. ■

Observación 6. Si Π es una partición convexa óptima de menor cardinalidad y $S_i, S_j \in S$ son m -rojos (o m -azules), entonces $k \geq 3$. Además $\text{Conv}(S_i \cup S_j) \cap S_l \neq \emptyset$ para cada $l \neq i, j$.

Demostración. Supongamos que S_i, S_j son m -rojos y que $k < 3$, de hecho entonces $k = 2$. Como S_i y S_j son ambos m -rojos, entonces la partición $S_i \cup S_j$ tiene mayor discrepancia que la partición original, lo cual es una contradicción. Por otra parte, si no se cumple que $\text{Conv}(S_i \cup S_j) \cap S_l \neq \emptyset$ para cada $l \neq i, j$, entonces podemos unir S_i y S_j y generar una nueva partición convexa de menor cardinalidad y con mayor discrepancia, lo cual es también una contradicción. ■

Observación 7. Si R y B son linealmente separables, y si $b \leq r < 2b$ o $r \leq b < 2r$, entonces $\mathcal{D}(S) = \min\{r, b\}$.

Demostración. Supongamos que $b \leq r < 2b$ o $r \leq b < 2r$, y sea ℓ una recta que separa a B y R , la discrepancia de la partición inducida por ℓ es $\min\{r, b\}$, por lo que $\mathcal{D}(S) \geq \min\{r, b\}$. Supóngase que de hecho $\mathcal{D}(S) = d > \min\{r, b\}$, entonces existe una partición convexa de S en la que todos sus elementos tienen discrepancia mayor o igual a d , pero esto es imposible al menos que dicha partición sea la que induce una recta que separa a B y R . ■

El siguiente Lema relaciona el hecho de que una partición sea óptima con el que tenga elementos m -rojos o m -azules y viceversa.

Lema 2.1.1. Sea $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ una partición convexa de S . La discrepancia de $S = R \cup B$ satisface las siguientes propiedades:

- i. Si Π es una partición óptima y $k \geq 2$, entonces existen S_i y S_j tales que S_i es m-rojo y S_j es m-azul.
- ii. Si Π contiene un elemento m-rojo y un elemento m-azul, entonces $d_\Pi(S) \leq \min\{r, b\}$.

Demostración. Demostramos primero la propiedad i. Supongamos que todos los elementos S_i de Π son m-azules. La partición $\Pi' = \bigcup_{i=1, \dots, k} S_i = \{S\}$ tiene discrepancia $b - r = \sum_{i=1}^k (b_i - r_i) = \sum_{i=1}^k \nabla(S_i)$. Nótese que $\sum_{i=1}^k \nabla(S_i) > \min_{i=1, \dots, k} \nabla(S_i)$, puesto que $\sum_{i=1}^k (b_i - r_i) > \nabla(S_i), \forall i$. Por lo tanto, la discrepancia de la partición Π' es mayor que la de la partición Π , pero eso contradice la suposición de que Π es una partición óptima, por lo que no todos los elementos de Π son m-azules.

Supongamos ahora que Π contiene al menos un elemento m-rojo S_1 y al menos un elemento m-azul S_2 . Entonces $d_\Pi(S) \leq \nabla(S_1) = r_1 - b_1 \leq r_1 \leq r$, de igual forma $d_\Pi(S) \leq \nabla(S_2) = b_2 - r_2 \leq b_2 \leq b$. Por lo tanto $d_\Pi(S) \leq \min\{r, b\}$. ■

2.2. Puntos en posición convexa

En esta sección estudiamos la discrepancia de un conjunto de puntos en posición convexa S . En particular, demostramos un resultado respecto a la cardinalidad de una partición óptima de S . Este resultado a su vez, nos permite presentar un algoritmo óptimo para calcular la discrepancia del conjunto.

Si los elementos de S se pueden etiquetar como p_1, \dots, p_{r+b} en el sentido inverso de las manecillas del reloj, de tal manera que para toda i , $1 \leq i < r+b$, p_i y p_{i+1} no tengan el mismo color, entonces llamamos a S una *cadena convexa alternante*; véase la Figura 2.2.

Lema 2.2.1. Si S está en posición convexa, entonces $\mathcal{D}(S) = 1$ si y sólo si S es una cadena convexa alternante.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}(S) = 1$ y que S no es una cadena convexa alternante. Por la observación 3, $|r - b| \leq 1$. Si $r = b$ entonces como para alguna i se tiene que p_i y p_{i+1} tienen el mismo color, la partición $\Pi = \{\{p_i, p_{i+1}\}, S - \{p_i, p_{i+1}\}\}$ tiene discrepancia dos. Si $r \neq b$, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $r = b+1$. Como suponemos que S no

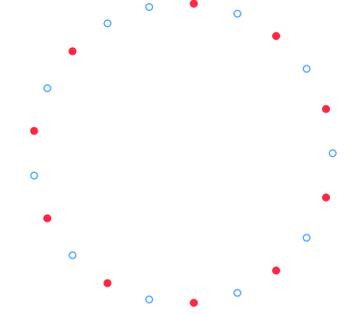


Figura 2.2: Una cadena convexa alternante.

es una cadena convexa alternante, entonces hay dos elementos, digamos p_i y p_{i+1} , que son azules. Si $S_1 = \{p_i, p_{i+1}\}$, tenemos que $\nabla(S_1) = 2$, $\nabla(S - S_1) = 3$, y la partición $\Pi = \{S_1, S - S_1\}$ es tal que $\mathcal{D}(S) \geq d_\Pi(S) = 2$. Se sigue por contradicción que S es una cadena convexa alternante.

Supongamos ahora que S es una cadena convexa alternante. Es fácil ver que en cualquier partición convexa $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ de S , hay al menos un S_i ($1 \leq i \leq k$) de tal forma que S_i es una cadena convexa alternante, y por lo tanto tiene discrepancia menor o igual a uno. Entonces $\nabla(S_i) \leq 1$, entonces $d_\Pi(S) \leq 1$, para toda partición convexa Π . Por lo tanto $\mathcal{D}(S) = 1$. ■

El siguiente resultado acota la cardinalidad mínima de una partición óptima para un conjunto de puntos en posición convexa.

Teorema 2.2.1. *Si S es un conjunto de puntos en posición convexa, entonces $\mathcal{D}(S) = \max_{k=1,2,3} \mathcal{D}_k(S)$.*

Demostración. Sea $d = \mathcal{D}(S)$, obsérvese que en particular $0 \leq \nabla(S) \leq d$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que hay más puntos rojos que azules en S , es decir $0 \leq \nabla'(S) \leq d$. Sea $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ una partición convexa de S con cardinalidad mínima y de tal manera que $d_\Pi = d$. Por definición, $\nabla(S_i) \geq d$ ($1 \leq i \leq k$). Supongamos que $k > 3$, entonces S tiene al menos dos elementos, digamos S_1 y S_2 , que contienen sólo elementos consecutivos a lo largo del cierre convexo de S .

Si alguno de S_1 o S_2 , digamos S_1 , es tal que $\nabla'(S) \leq -d$ entonces $\nabla'(S - S_1) = \nabla'(S) - \nabla'(S_1) \geq 0 + d = d$, y por lo tanto $\nabla(S - S_1) = |\nabla'(S - S_1)| \geq d$. Esto es una contradicción porque la partición convexa $\Pi' = \{S_1, S - S_1\}$ tiene cardinalidad 2 y $d_{\Pi'}(S) \geq d$. Supóngase entonces que $\nabla'(S_1) \geq d$ y $\nabla'(S_2) \geq d$. Obsérvese que $\nabla'(S - S_1 - S_2) = \nabla'(S) - \nabla'(S_1) - \nabla'(S_2) \leq d - d - d = -d$, y por lo tanto $\nabla(S - S_1 - S_2) = |\nabla'(S - S_1 - S_2)| \geq d$.

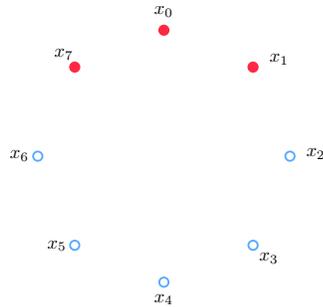


Figura 2.3: Un intervalo de tamaño tres y un intervalo de tamaño cinco, en una secuencia circular.

Esto es una contradicción puesto que la partición $\Pi'' = \{S_1, S_2, S - (S_1 \cup S_2)\}$ tiene cardinalidad 3 y $d_{\Pi''(S)} \geq d$. ■

Nuestro objetivo es presentar un algoritmo con complejidad $O(n \log n)$, para calcular la discrepancia de un conjunto de puntos en posición convexa. Antes de esto, mostramos como resolver dos problemas respecto a secuencias circulares, dichos resultados serán utilizados en el algoritmo.

2.2.1. Intervalo de peso máximo en secuencias circulares

Considérese un conjunto X de n puntos sobre un círculo, los cuales están etiquetados con números reales x_0, \dots, x_{n-1} , en el sentido de las manecillas del reloj. Llamaremos a X una secuencia circular. Un *intervalo* $[x_i, x_j]$ de X es el subconjunto que contiene a los puntos con etiquetas x_i, x_{i+1}, \dots, x_j , donde la suma se toma módulo n . Véase la Figura 2.3. Definimos el peso $\omega[x_i, x_j]$ del intervalo $[x_i, x_j]$, como $x_i + x_{i+1} + \dots + x_j$. En esta sección se da solución a los siguientes dos problemas:

Problema 5. *Encontrar el intervalo de X con mayor peso.*

Problema 6. *Encontrar dos intervalos disjuntos $[x_i, x_j]$ y $[x_k, x_l]$ de X , tales que el mínimo de sus pesos sea máximo. Es decir, deseamos maximizar $\min\{\omega[x_i, x_j], \omega[x_k, x_l]\}$.*

El Problema 5, es una variante del muy conocido problema de Bentley del intervalo de peso máximo [11]. El problema de Bentley es el siguiente. Sea $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ un subconjunto de \mathbb{R} . Un intervalo $[x_i, x_j]$ de X es aquel que contiene los elementos x_i, x_{i+1}, \dots, x_j , $i \leq j$. El problema de Bentley consiste en encontrar el intervalo de X de mayor peso. Obsérvese que en este

problema $i \leq j$, mientras que en el Problema 5 este no es necesariamente el caso. Se sabe que el problema de Bentley puede resolverse en tiempo lineal [11].

Nótese que la solución al Problema 5 tiene dos posibles formas, un intervalo $[x_i, x_j]$ tal que $i \leq j$, o bien un intervalo $[x_k, x_l]$ tal que $l \leq k$. Una solución del tipo uno puede encontrarse utilizando un algoritmo para solucionar el problema de Bentley. Por otra parte, si la solución es de tipo dos, entonces $[x_k, x_l]$ es la unión de dos intervalos disjuntos $[x_0, x_k]$ y $[x_l, x_{n-1}]$, que maximizan $\omega[x_0, x_k] + \omega[x_l, x_{n-1}]$. Este caso puede resolverse en tiempo lineal utilizando el resultado que aparece en [22]. Por lo tanto, el Problema 5 puede resolverse en tiempo $O(n)$.

A continuación mostramos como resolver el Problema 6 en tiempo $O(n \log n)$. En [19] los autores dan un algoritmo que soluciona el siguiente problema:

Problema 7. *Sea X una colección de números reales. Se desea preprocesar X en tiempo lineal de tal forma que para cualesquiera $i \leq j \leq k \leq l$, lo siguiente pueda resolverse en tiempo constante: encontrar el intervalo $[x_s, x_t]$ de peso máximo, tal que $i \leq s \leq j$ y $k \leq t \leq l$.*

Ahora mostramos el algoritmo deseado. Obérvase que si $i = j$ en el problema anterior, entonces $[x_s, x_t]$ es el intervalo de máximo peso contenido en $[x_i, x_l]$ y que empieza en x_i . Por otra parte, si $X' = \{x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots, x_{2n-1}\}$, donde $x_{n+i} = x_i$ para toda i , $0 \leq i \leq n-1$, entonces al preprocesar X' como en el problema anterior se considerarán intervalos circulares de X .

Denotemos por $I_1 = [x_i, x_j]$ y $I_2 = [x_k, x_l]$ a los intervalos que son una solución al Problema 6. Nótese que no puede ocurrir que $i > j$ y $k > l$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i \leq j < k$. Nótese que como I_1 y I_2 son disjuntos, entonces existe un índice t tal que $j \leq t < k$, y el intervalo de peso máximo contenido en $[x_i, x_t]$ es I_1 , por otra parte el intervalo de peso máximo contenido en $[x_{t+1}, x_{n-1}]$ es I_2 . El problema se resuelve entonces al encontrar los valores adecuados de i y de t .

Ahora mostramos como resolver el Problema 6 en $O(\log n)$ para un valor fijo de i . Para facilitar la presentación, supongamos que $i = 0$. Supongamos por ahora que t es dado, y después mostraremos como encontrarlo. Primero encontramos el intervalo de peso máximo $I_1(t)$ contenido en $[x_0, x_t]$. Utilizando los resultados de [19] este puede encontrarse en $O(1)$. De manera análoga, podemos encontrar el intervalo de peso máximo $I_2(t)$ contenido en $[x_{t+1}, x_{n-1}]$. Nótese que como $I_1(t)$ es un intervalo de peso máximo contenido en $[x_0, x_t]$, entonces no hay otro intervalo más pesado

contenido en $[x_0, x_{t'}]$, donde $t' < t$. Esto nos da la clave para buscar t : si $\omega(I_1(t)) < \omega(I_2(t))$, entonces podemos descartar todos los valores $t' < t$. Análogamente, si $\omega(I_1(t)) > \omega(I_2(t))$, podemos descartar todos los valores $t' > t$. Por lo que, para un valor fijo de i podemos encontrar t en un número logarítmico de pasos. Si repetimos este proceso para todos los posibles valores de i , $i = 0, \dots, n-1$, entonces el siguiente resultado se sigue:

Teorema 2.2.2. *Sea X una secuencia circular con n elementos. Existe un algoritmo para resolver el problema de encontrar dos intervalos $[x_i, x_j]$ y $[x_k, x_l]$ de X que maximicen el mínimo de sus pesos, cuya complejidad es $O(n \log n)$.*

2.2.2. Cálculo de la discrepancia de un conjunto de puntos en posición convexa

Sea S un conjunto de n puntos en posición convexa. En esta sección presentamos un algoritmo con complejidad $O(n \log n)$ que calcula la discrepancia de S y da la partición correspondiente.

Teorema 2.2.3. *La discrepancia de un conjunto S de n puntos en posición convexa, pueda calcularse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b \leq r$. El Teorema 2.2.1 implica que para calcular la discrepancia de S basta con elegir el máximo entre $\mathcal{D}_1(S)$, $\mathcal{D}_2(S)$, $\mathcal{D}_3(S)$. Por definición $\mathcal{D}_1(S) = |r - b|$. A continuación se muestra cómo calcular $\mathcal{D}_2(S)$ y $\mathcal{D}_3(S)$.

Asignamos pesos a los elementos de S , de tal forma que los puntos rojos tienen peso $+1$ y los puntos azules tienen peso -1 . Podemos por tanto considerar a S como una secuencia circular.

Por el Lema 2.1.1, si Π es una partición óptima, entonces contiene al menos un elemento m-rojo y un elemento m-azul. Sea $\Pi = \{S_1, S_2\}$, y supongamos que S_1 es m-azul y S_2 es m-rojo. Tenemos que $\nabla(S_2) = r_2 - b_2 = (r - r_1) - (b - b_1) = r - b + b_1 - r_1 = r - b + \nabla(S_1) \geq \nabla(S_1)$. Por lo que $\mathcal{D}_\Pi(S)$ es máximo si y sólo si $\nabla(S_1)$ es máximo, pero $\nabla(S_1)$ es máximo cuando S_1 es el intervalo de S con peso mínimo (es decir, S_2 tiene peso máximo). Por lo que el problema se reduce a una instancia del Problema 5, y se resuelve en tiempo lineal.

Por otra parte, si $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ es una partición óptima de S , es fácil notar que si S_i es m-azul (m-rojo), entonces S_{i+1} es m-rojo (m-azul), donde la suma se toma módulo 3. Por otra parte, la suposición de que $b \leq r$ implica que S_1 y S_3 son m-rojos, pues de otro modo la partición

óptima tendría tamaño a lo más dos. Por lo tanto, el problema de encontrar $\mathcal{D}_3(S)$ se reduce al de encontrar dos intervalos disjuntos de S , tales que el peso mínimo de dicha pareja sea máximo. Por el Teorema 2.2.2, esto puede resolverse en $O(n \log n)$. ■

2.3. Particiones con una recta

Recuérdese que si se estudia la discrepancia de un conjunto de puntos para un tamaño k de la partición, con k fijo, entonces llamamos a dicho parámetro k -discrepancia, y lo denotamos por $\mathcal{D}_k(S)$. Cuando $k = 2$ llamamos al parámetro *discrepancia lineal de S* . En esta sección caracterizamos a los conjuntos de puntos que tienen discrepancia lineal igual a uno, y damos un algoritmo óptimo para decidir si la discrepancia lineal de un conjunto es igual a una constante dada d . Antes de presentar los resultados introducimos la notación que se usará. Sean Π_ℓ^+ y Π_ℓ^- los semiplanos abiertos acotados por abajo y por arriba, respectivamente, por una recta no vertical ℓ . Sean $S_{\ell^+} = \{S \cap \Pi_\ell^+\}$, $S_{\ell^-} = \{S \cap \Pi_\ell^-\}$ y $\Pi_\ell = \{S_{\ell^+}, S_{\ell^-}\}$. La *discrepancia lineal de S* es $\mathcal{D}_2(S) = \max_\ell d_{\Pi_\ell}(S)$, donde las rectas ℓ no contienen puntos de S .

Proposición 2.3.1. *Sea $S = R \cup B$, tal que $r = b$ y $\mathcal{D}_2(S) = 1$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

- i. El cierre convexo de S es una cadena alternante.*
- ii. Cuando los puntos de S se proyectan a cualquier recta, forman una secuencia en la cual no hay tres puntos consecutivos con el mismo color.*
- iii. Para todo $p \in S$ en el cierre convexo de S , el orden angular de los elementos de $S - \{p\}$ con respecto a p , es una secuencia con colores alternantes.*
- iv. Para toda recta ℓ que pasa por dos puntos de S del mismo color, digamos rojos, se cumple que $||S_{\ell^+} \cap R| - |S_{\ell^-} \cap R|| = 1$ y $||S_{\ell^+} \cap B| - |S_{\ell^-} \cap B|| = 1$.*

Es necesario notar que la propiedad *ii* en la Proposición 2.3.1 no es suficiente para garantizar que $\mathcal{D}_2(S) = 1$, para un contraejemplo véase la Figura 2.4(a). Por otra parte, si $r \neq b$ las propiedades *iii* y *iv* en la misma proposición, no son necesariamente ciertas, véase la Figura 2.4(b) y 2.4(c). A continuación demostramos que si $r = b$, la propiedad *iv* es suficiente.

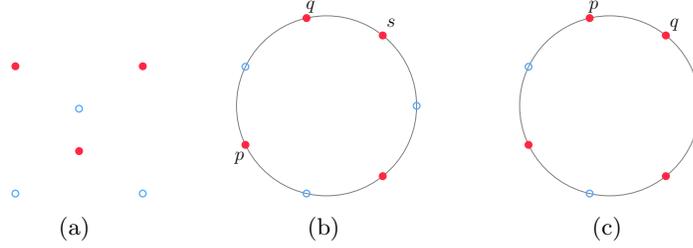


Figura 2.4: (a) Un conjunto que cumple la propiedad *ii* y con $\mathcal{D}_2(S) = 2$. (b) Un conjunto que no cumple con la propiedad *iii* y sin embargo tiene $\mathcal{D}_2(S) = 1$. (c) Un conjunto que no cumple con la propiedad *iv* y que tiene $\mathcal{D}_2(S) = 1$.

El siguiente resultado, demostrado en [23] será de utilidad.

Teorema 2.3.1. *Sean P y Q dos polígonos convexos disjuntos en el plano. Existe al menos una arista e de P o Q de tal forma que la recta ℓ_e que contiene a e separa el interior de P y el interior de Q .*

Lema 2.3.1. *Si $r = b$, las siguientes dos proposiciones son equivalentes: (a) $\mathcal{D}_2(S) = 1$; (b) para toda recta ℓ que pase por dos puntos de S del mismo color, $\nabla(S_{\ell^+}) = \nabla(S_{\ell^-}) = 1$.*

Demostración. Es fácil probar que (a) implica (b). Mostraremos ahora que (b) implica (a).

Supongamos que $\mathcal{D}_2(S) = d \geq 2$. Para demostrar la implicación basta con mostrar que bajo dicha suposición existe una recta ℓ que pasa por dos puntos de S del mismo color y tal que $\{\nabla(S_{\ell^-}), \nabla(S_{\ell^+})\} = \{d, d-2\}$.

Sea ℓ_0 una recta que no pasa por ningún punto de S y tal que $\mathcal{D}_2(S) = \mathcal{D}_{\Pi_{\ell_0}}(S) = d$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que ℓ_0 es horizontal. Como $r = b$, entonces $\mathcal{D}_2(S) = \mathcal{D}_{\Pi_{\ell_0}}(S) = \nabla(S_{\ell_0^+}) = \nabla(S)_{\ell_0^-} = d$, y $\nabla'(S_{\ell_0^+}) = -\nabla'(S_{\ell_0^-})$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\nabla'(S_{\ell_0^+}) > 0$ (es decir que $S_{\ell_0^+}$ es m-rojo y $S_{\ell_0^-}$ es m-azul).

Sean P y Q los polígonos inducidos por los cierres convexos de $S_{\ell_0^+}$ y $S_{\ell_0^-}$ respectivamente. Sea p un vértice de P tal que existe una recta ℓ' que pasa por p y que separa a P y a Q . Nótese que p debe ser rojo, de otro modo al trasladar ℓ' hacia arriba una pequeña distancia, se obtendría un partición Π' de S con discrepancia $d+1$. De manera similar, todo punto q en Q para el cual existe una recta que separa a P y a Q , debe ser azul.

Por el Teorema 2.3.1, existe una arista $e = (p, q)$ de P o de Q , tal que la recta ℓ_e que contiene a e separa a P y a Q . Si e es una arista de P , entonces usando la observación del párrafo anterior, podemos demostrar que p y q son

rojos. Por lo tanto, $\{\nabla(S_{\ell_e^+}), \nabla(S_{\ell_e^-})\} = \{d, d - 2\}$. Un argumento similar funciona cuando e es una arista de Q . \blacksquare

La siguiente proposición da cotas para la discrepancia lineal de S .

Proposición 2.3.2. $\max\{1, \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor\} \leq \mathcal{D}_2(S) \leq \max\{\lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor, \min\{r, b\}\}$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $r \geq b$. El *Teorema del Ham Sandwich* [58] implica que existe una recta ℓ que pasa por a lo más un punto rojo y a lo más un punto azul, y tal que $|S_{\ell^+} \cap R| = |S_{\ell^-} \cap R| = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ y $|S_{\ell^+} \cap B| = |S_{\ell^-} \cap B| = \lfloor \frac{b}{2} \rfloor$. Existen cuatro casos distintos, dependiendo de las paridades de r y de b . A continuación mostramos que el teorema es correcto para r y b pares, los tres casos restantes se demuestran de forma similar.

Si r y b son ambos pares, entonces $\nabla(S_{\ell^+}) = \nabla(S_{\ell^-}) = \frac{r-b}{2} = d_{\Pi_\ell}(S) \leq \mathcal{D}_2(S)$. Obsérvese que si $|r - b| \geq 2$ entonces $\frac{r-b}{2} \geq 1$. A continuación demostramos que si $|r - b| \leq 1$ entonces $\mathcal{D}_2(S) \geq 1$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $b \leq r \leq b + 1$. Si existe un punto azul p en $\text{Conv}(S)$, entonces sea ℓ una recta que separa a p de $S - \{p\}$, supongamos que $p \in S_{\ell^+}$. Tenemos $\nabla(S_{\ell^+}) = 1$, $\nabla(S_{\ell^-}) = r - b + 1 \geq 1$, y $\mathcal{D}_2(S) \geq d_{\Pi_\ell}(S) = 1$. Si no existe ningún punto azul en $\text{Conv}(S)$, entonces hay dos puntos rojos p y q , consecutivos en el cierre convexo de S . Sea ℓ una recta que separa a p y q de $S - \{p, q\}$ y supongamos que $p, q \in S_{\ell^+}$, entonces $\nabla(S_{\ell^+}) = 2$, $\nabla(S_{\ell^-}) = b - r + 2 \geq 1$ y $\mathcal{D}_2(S) \geq d_{\Pi_\ell}(S) = 1$. Esto prueba la cota inferior. A continuación mostramos que dicha cota es justa.

Sea X una cadena convexa alternante con b puntos rojos y b puntos azules, y sea Y un conjunto de $r - b$ puntos rojos. Colóquense los puntos de Y al interior del cierre convexo de X . Sea ℓ_e una recta para la cual $d_{\Pi_{\ell_e}}(X) = 0$, y que divide a Y en dos subconjuntos de cardinalidad $\lfloor \frac{|Y|}{2} \rfloor$ y $\lceil \frac{|Y|}{2} \rceil$, respectivamente. Sea $S = X \cup Y$, obsérvese que $d_{\Pi_{\ell_e}}(S) = \lfloor \frac{|Y|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$. Por otra parte, por el Lema 2.2.1, para cualquier recta ℓ se tiene que $d_{\Pi_\ell}(X) \in \{0, 1\}$. Si $d_{\Pi_\ell}(X) = 0$, entonces $d_{\Pi_\ell}(S) = d_{\Pi_\ell}(Y) \leq \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$. Si $d_{\Pi_\ell}(X) = 1$, entonces $d_{\Pi_\ell}(S) = \min\{|y - 1|, |(r - b) - y + 1|\}$, donde $y = |Y_{\ell^+}|$. Es fácil demostrar que $\min\{|y - 1|, |(r - b) - y + 1|\} \leq \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$. Por lo tanto $\mathcal{D}_2(S) = d_{\Pi_{\ell_e}}(S) = \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$.

Ahora demostramos la cota superior. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $b = \min\{r, b\}$. Para demostrar que se cumple la cota superior, debemos mostrar que $d_{\Pi_\ell} > b$ implica $d_{\Pi_\ell}(S) \leq \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$. Sea ℓ una recta para la cual $d_{\Pi_\ell} > b$. Entonces $\nabla'(S_{\ell^+}) > 0$ y $\nabla'(S_{\ell^-}) > 0$, pues de otra forma, si

por ejemplo $\nabla'(S_{l+}) < 0$ entonces $\nabla(S_{\ell+}) = |S_{l+} \cap B| - |S_{l-} \cap R| \leq |S_{l+} \cap B| \leq b$, lo cual contradice nuestra suposición. Por otra parte $\nabla'(S_{l+}) > 0$ y $\nabla'(S_{l-}) > 0$ implica que $d_{\Pi_\ell} \leq \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$. Supóngase lo contrario, es decir que $\nabla(S_{l+}) \geq \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor + 1$ y $\nabla(S_{l-}) = (r-b) - \nabla(S_{l+}) \geq \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor + 1$. Entonces $r-b \geq 2 \lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor + 2$, lo cual es una contradicción. Si $\lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor \leq b$, la cota superior es justa si tomamos conjuntos separables R y B . Si $\lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor > b$, hemos mostrado en el párrafo anterior cómo construir un conjunto con discrepancia lineal igual a $\lfloor \frac{r-b}{2} \rfloor$, por lo que la cota es justa. ■

2.3.1. Complejidad

En esta sección demostramos que, dado un entero d , el problema de decidir si $\mathcal{D}_2(S) = d$ es 3-suma difícil. La clase de problemas 3-suma difícil fueron definidos por Gajentaan y Overmars en [38]. Dicho en palabras sencillas, un problema está en la clase 3-suma difícil si existe un algoritmo para resolverlo en $O(n^2)$, pero no se logra demostrar si dicho problema puede o no resolverse en menos tiempo. Formalmente un problema está en la clase 3-suma difícil si este se puede reducir al siguiente problema:

Problema 8 (3-suma). *Dados tres conjuntos de enteros A, B, C tales que $|A| + |B| + |C| = n$, determinar si existen $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ tales que $a + b + c = 0$.*

Teorema 2.3.2. *Dado un entero $d \geq 1$, es 3-suma difícil decidir si $\mathcal{D}_2(S) = d$.*

Demostración. Reduciremos nuestro problema al problema de la 3-suma. La reducción que presentamos es similar a la utilizada en [38].

Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n enteros. Supongamos que X es una instancia del problema de la 3-suma, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_1 < \dots < x_j < 0 < x_{j+1} < \dots < x_n$ ($1 \leq j < n$). Sea $M = \max\{|x_1|, |x_n|\}$. Si $d = 1$, colóquese un punto azul en $(-2M, 0)$ y un punto rojo en $(2M, 0)$. Si $d > 2$, para cada $1 \leq i \leq d-2$, colóquese un punto rojo en $(-2M - i + 1, 0)$, y un punto azul en $(2M + i - 1, 0)$. Sea ε un número real positivo pequeño, tal que $\varepsilon < \frac{1}{6M^2}$. Para cada $1 \leq i \leq n$ colóquese un punto rojo p_i en $(x_i - \varepsilon, x_i^3)$, y un punto azul q_i en $(x_i + \varepsilon, x_i^3)$; véase la Figura 2.5. A continuación mostramos que existe una recta que separa tres parejas distintas (p_i, q_i) , (p_j, q_j) y (p_k, q_k) si y sólo si (x_i, x_i^3) , (x_j, x_j^3) y (x_k, x_k^3) son colineales (es decir, $x_i + x_j + x_k = 0$).

Es claro que $\mathcal{D}_2(S) \geq d$, puesto que $\mathcal{D}_2(S) = d$ para toda recta ℓ que separe a dos parejas distintas (p_i, q_i) y (p_j, q_j) . Si $\mathcal{D}_2(S) > d$, entonces

existe una recta que separa a más de dos parejas distintas, lo cual implica que existen tres elementos en X que suman cero. Por lo tanto, existen tres elementos en X que suman cero si y sólo si $\mathcal{D}_2(S) \neq d$. ■

Del teorema anterior se sigue inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 2.3.3. *Calcular la discrepancia lineal de un conjunto de n puntos en el plano es 3-suma difícil y puede hacerse en $O(n^2)$ tiempo.*

Demostración. La complejidad se sigue del Teorema 2.3.2, y $\mathcal{D}_2(S)$ puede calcularse utilizando el espacio dual. ■

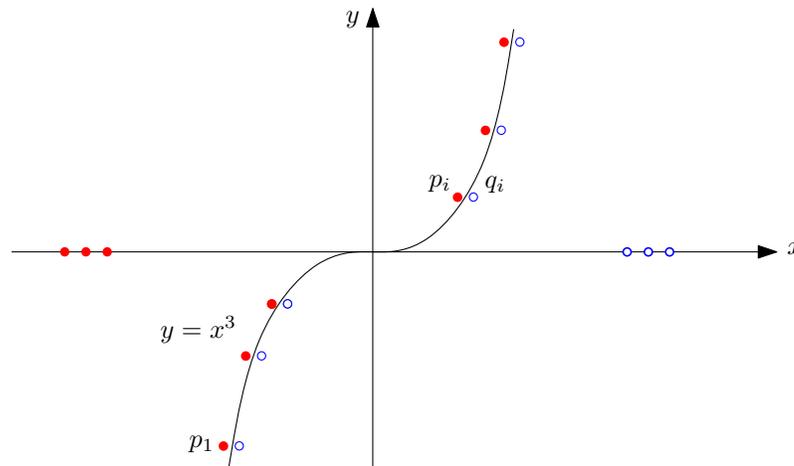


Figura 2.5: Construcción del conjunto utilizado en la prueba del Teorema 2.3.2, cuando $d = 5$.

2.4. Conclusiones

El problema de determinar la discrepancia de un conjunto de puntos en posición general parece ser desafiante. Hasta el momento de la redacción de este trabajo, no se ha podido ni siquiera caracterizar los conjuntos de puntos con discrepancia uno. Sin embargo, es fácil ver, por ejemplo, que siempre se pueden construir conjuntos con cualquier discrepancia.

CAPÍTULO 3

Gráfica geométrica tipo Johnson

Sean $l \leq k \leq n$ enteros positivos, y sea N el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. La *gráfica de Johnson* $J(n, k)$, es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a todos los posibles subconjuntos de N con k elementos (k -subconjunto), dos de los cuales son adyacentes si comparten exactamente $k - 1$ elementos. La Figura 3.1(a) muestra $J(4, 2)$. Por otra parte, la *gráfica de Johnson generalizada* $GJ(n, k, l)$ [43], se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los posibles k -subconjuntos de N , dos de los cuales son adyacentes si comparten exactamente l elementos; véase la Figura 3.1(b). En el caso particular en el que $l = 0$, la gráfica $GJ(n, k, l)$ se conoce como la *gráfica de Kneser*. En este capítulo definimos y estudiamos una versión geométrica de la gráfica de Johnson generalizada.

Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general. Llamamos a un subconjunto I de S una *isla* si $\text{Conv}(I) \cap S = I$, donde $\text{Conv}(I)$ denota el cierre convexo de I . Si I contiene k elementos, entonces la llamamos k -*isla*. Véase la Figura 3.2. En este capítulo estudiamos la siguiente gráfica:

Definición 3.0.1 (Gráfica de islas tipo Johnson generalizada). *Sea S un conjunto de n puntos en el plano, y sean $l \leq k \leq n$ enteros positivos. Definimos a la gráfica de islas tipo Johnson generalizada $IJ(S, k, l)$, como la gráfica cuyo conjunto de vértices consiste de todas las posibles k -islas de S , dos de las cuales son adyacentes si comparten exactamente l -elementos.*

Esta gráfica está íntimamente relacionada con algunos problemas estudiados en el área de la Geometría Combinatoria. Por ejemplo, considérese

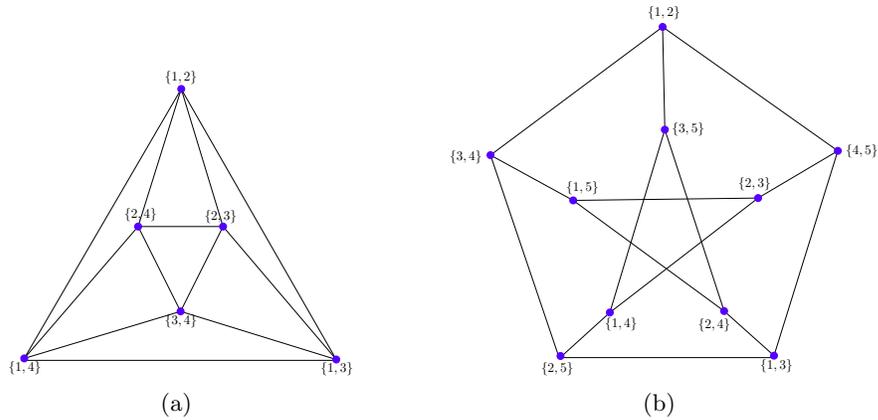


Figura 3.1: (a) La gráfica de Johnson para $n = 4$ y $k = 2$. (b) La gráfica de Johnson generalizada para $n = 5$, $k = 2$ y $l = 0$.

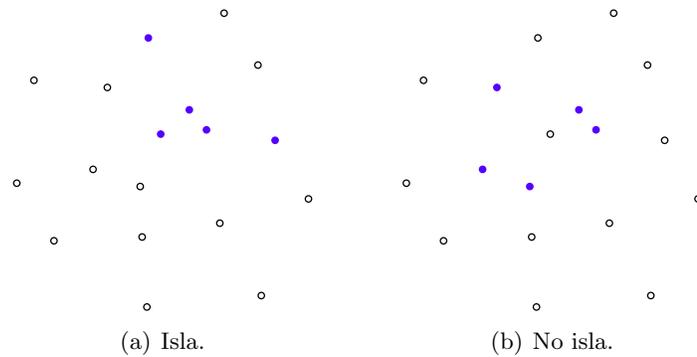


Figura 3.2: Un subconjunto de 5 puntos que es una 5-isla, y un subconjunto de 5 puntos que no es una 5-isla.

una 3-isla de S , nótese que los elementos de dicha isla son precisamente los vértices de un triángulo vacío. Por tanto, el número de vértices de $IJ(S, 3, l)$ es el número de triángulos vacíos de S . El problema de contar el mínimo número de triángulos vacíos en un conjunto de puntos es un problema bastante estudiado [9, 7, 29, 54, 65].

Otro problema estrechamente relacionado es el que se plantea en [8]: ¿cuál es el mínimo número de triángulos vacíos que tienen una arista en común? Véase la Figura 3.3. Este problema es equivalente al de determinar el número de clan de $IJ(S, 3, 2)$. Recuerdese que el número de clan de una gráfica es igual al número de vértices de una subgráfica completa maximal de ésta.

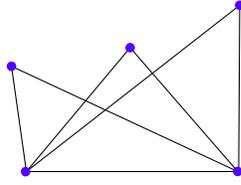


Figura 3.3: Tres triángulos vacíos que comparten una arista.

En general, la gráfica de islas $IJ(S, k, l)$ es una subgráfica inducida de la gráfica de Johnson generalizada $GJ(n, k, l)$, puesto que cada k -isla es un k -subconjunto, pero no cada k -subconjunto es una k -isla. Sin embargo, si S está en posición convexa, entonces $IJ(S, k, l)$ y $GJ(S, k, l)$ son isomorfas, ya que cada k -subconjunto de S es una k -isla.

Los resultados que presentamos en este capítulo comienzan el estudio de la gráfica de islas tipo Johnson generalizada. En particular demostramos que si n es suficientemente grande con respecto a k y l , entonces $IJ(S, k, l)$ es conexa, y que el diámetro de dicha gráfica es a lo más $O(\log n) + O\left(\frac{k}{k-l}\right) + O(k-l)$. Además, exhibimos un conjunto S de puntos para el cual $IJ(S, k, l)$ tiene diámetro mayor o igual a $\Omega\left(\frac{\log n - \log k}{\log(k-l)}\right)$.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 3.1 estudiamos la gráfica $IJ(S, k, l)$ para el caso particular en el que S es un conjunto de puntos en la recta real, y utilizando estos resultados analizamos el caso en el que todos los puntos de S , salvo uno, están alineados. Después, en la Sección 3.2 estudiamos $IJ(S, k, l)$ cuando los puntos en S están en posición general, y demostramos que la gráfica es conexa cuando n es suficientemente grande con respecto a k y l . En la Sección 3.3 presentamos resultados respecto al diámetro de la gráfica, y en la Sección 3.4 concluimos el capítulo con algunos comentarios finales.

3.1. Puntos en la recta real

Comenzamos el estudio de la gráfica de islas tipo Johnson generalizada, considerando el caso en el que el conjunto de puntos está en la recta real.

3.1.1. Puntos alineados

Sea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto de n puntos en la recta real, y sean $l \leq k \leq n$ enteros positivos. Un *intervalo* de S de cardi-

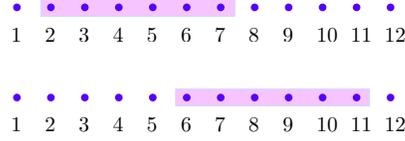


Figura 3.4: Dos 6-islas distintas en un conjunto de 12 puntos.

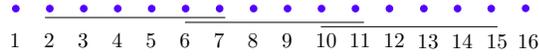


Figura 3.5: Tres 6-intervalos que se intersecan en 2 elementos.

alidad k (k -intervalo), es un subconjunto de k elementos consecutivos $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}\}$ de S . Nótese que, en este caso en el que los elementos de S están en la recta, un k -intervalo de S es precisamente una k -isla de S ; véase la Figura 3.4. Deseamos estudiar la gráfica $IJ(S, k, l)$.

Observemos primero que dos k -intervalos de S son adyacentes en $IJ(S, k, l)$ si se intersecan en exactamente l elementos; por lo tanto, si $l > 0$, cada k -intervalo de S es adyacente a lo más a dos k -intervalos: el que contiene sus primeros l elementos y el que contiene sus últimos l elementos. La Figura 3.5 ilustra esta observación. El caso en el que $l = 0$ es distinto, puesto que dos intervalos son adyacentes en $IJ(S, k, 0)$ si y sólo si no se intersecan; por lo que en este caso un intervalo puede ser adyacente a más de dos. Analizaremos el caso $l = 0$ al final de la sección, por lo que, al menos que se haga explícito, suponemos por ahora que $l > 0$.

De la observación hecha en el párrafo anterior, se sigue fácilmente que el grado máximo de cada vértice en $IJ(S, k, l)$ es dos. Nótese además que el primer y el último intervalo tienen siempre grado máximo uno, por lo que la gráfica es acíclica. Por lo tanto, $IJ(S, k, l)$ es una colección de caminos disjuntos. En los siguientes párrafos se describen dichos caminos.

Para $0 \leq r \leq k - l$, sea $A_{r,i}$ el intervalo de S con exactamente $i(k - l) + r$ puntos a su izquierda, $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-k-r}{k-l} \right\rfloor$. Es decir que $A_{r,i}$ consta de los puntos $\{x_{i(k-l)+r+1}, \dots, x_{i(k-l)+r+1+(k-1)}\}$, tal que $i(k-l) + r + 1 + (k-1) \leq n$; véase la Figura 3.6. No es difícil notar que en $IJ(S, k, l)$, $A_{r,i}$ es adyacente a $A_{r,i+1}$, siempre y cuando $(i+1)(k-l) + r + 1 + (k-1) \leq n$.

Dadas las observaciones anteriores, podemos ahora escribir explícitamente los caminos que conforman a $J(S, k, l)$. Para un entero rijo r , sea P_r la subgráfica de $IJ(S, k, l)$ inducida por el conjunto de intervalos $A_{r,i}$, $i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n-k-r}{k-l} \right\rfloor$. De todo lo anterior se sigue que cada P_r es un camino

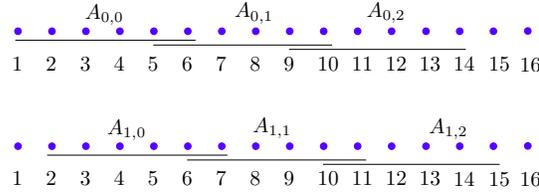


Figura 3.6: Algunos intervalos y sus etiquetas para un conjunto con $n = 16, k = 6, y l = 2$.

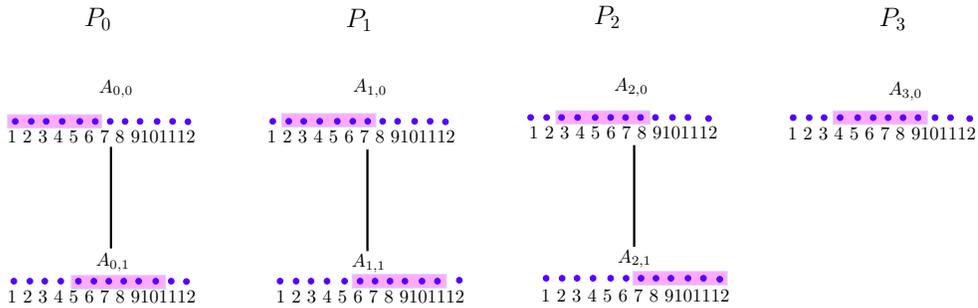


Figura 3.7: La gráfica $IJ(S, 6, 2)$ para $n = 12$.

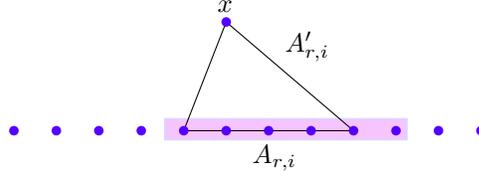
inducido de $IJ(S, k, l)$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado, el cual describe la estructura de $IJ(S, k, l)$.

Teorema 3.1.1. *Si $l > 0$, entonces para cada $r, 0 \leq r < k - l, P_r$ es un camino inducido de $IJ(S, k, l)$. Además el conjunto $\{P_r | 0 \leq r < k - l\}$ es una partición de $IJ(S, k, l)$ en caminos disjuntos.*

La Figura 3.7 ilustra la estructura de la gráfica $IJ(S, k, l)$ para el caso particular en el que $n = 12, k = 6$ y $l = 2$.

Como se mencionó antes, para el caso en el que $l = 0$ la estructura de la gráfica es distinta a la descrita en el Teorema 3.1.1. Si $l = 0$ entonces dos intervalos son adyacentes en $IJ(S, k, 0)$ si y sólo si no se intersecan. Considérese cualquier intervalo $\{x_i, \dots, x_{i+k-1}\}$ de S , claramente este intervalo es adyacente en $IJ(S, k, 0)$ a todos los intervalos de la forma $\{x_{i+j}, \dots, x_{i+j+k-1}\}$, tales que $j \geq k$. De esta observación se sigue fácilmente que si $n \geq 3k - 1$, entonces la gráfica es conexa y que su diámetro es a lo más 3.

Cabe mencionar que, salvo los casos en los que $l = 0$, o $n = k$, o $l = k - 1$, la gráfica $IJ(S, k, l)$ es disconexa cuando los puntos en S están en una recta. Extraordinariamente, al agregar sólo un punto fuera de la recta, la gráfica se vuelve conexa. Estudiamos este caso en la siguiente sección.

Figura 3.8: Dos posibles islas en S' .

3.1.2. Puntos casi alineados

Sea S un conjunto de $n-1$ puntos sobre una recta horizontal h . Definimos el conjunto S' como $S' := S \cup \{x\}$, donde x es un punto que no está en h . En los siguientes párrafos analizamos la estructura de $IJ(S', k, l)$.

Decimos que un punto en S está a la *izquierda* de una isla I de S' si este está a la izquierda de cada uno de los puntos de $I \cap h$. Para $0 \leq r < k-l$ hay dos k -islas que tienen exactamente $i(k-l) + r$ puntos a su izquierda: una contiene a x y la otra no lo contiene. Llamaremos a estas islas $A_{r,i}$ y $A'_{r,i}$ respectivamente; véase la Figura 3.8.

De la misma manera en que lo hicimos en la sección anterior, para un valor fijo de r , definimos P_r como la subgráfica de $IJ(S', k, l)$ inducida por todas las islas $A_{r,i}$. Y definimos como P'_r a la subgráfica de $IJ(S', k, l)$ inducida por todas las islas $A'_{r,i}$.

La estructura de $IJ(S', k, l)$ cuando $l < 2$ difiere a la estructura de esta cuando $l \geq 2$. En lo que sigue de esta sección supondremos que $l \geq 2$, y analizamos el caso restante al final de la misma.

Nótese que la subgráfica de $IJ(S', k, l)$ inducida por las islas $A_{r,i}$, es precisamente $IJ(S, k, l)$. Por otra parte, no es difícil notar que la subgráfica inducida por las islas $A'_{r,i}$ es isomorfa a $IJ(S, k-1, l-1)$. Por lo tanto, las islas $A_{r,i}$ y $A_{r,i+1}$ son adyacentes en $IJ(S', k, l)$, puesto que son adyacentes en $IJ(S, k, l)$. Por otra parte obsérvese que si $A_{r,i}$ y $A_{r,i+1}$ son adyacentes, entonces también lo son $A_{r,i}$ y $A'_{r,i+1}$, ya que $A_{r,i}$ y $A'_{r,i+1}$ se intersectan en exactamente l elementos. La Figura 3.9 muestra la gráfica $IJ(S', k, l)$ para $n = 3$.

De las observaciones anteriores obtenemos el siguiente Lema.

Lema 3.1.1. *Si $l \geq 2$, entonces en $IJ(S', k, l)$:*

- i. $A_{r,i}$ es adyacente a $A_{r,i+1}$ y a $A'_{r,i+1}$.
- ii. $A'_{r,i}$ es adyacente a $A'_{r,i+1}$, y a $A_{r-1,i+1}$ si $r \geq 1$, o a $A_{k-l-1,i}$ si $r = 0$.

Además, cada una de las aristas de $IJ(S', k, l)$ cae en uno de estos tipos de adyacencias.

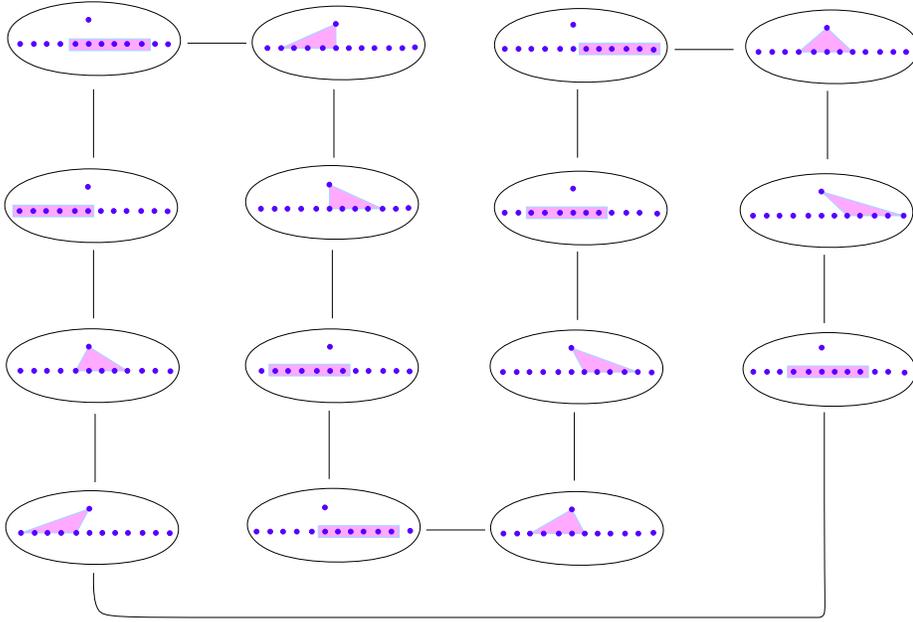


Figura 3.9: La gráfica de islas $IJ(S', 6, 2)$ para 13 puntos.

Una vez que hemos descrito la estructura de la gráfica, podemos analizar dos de sus propiedades: la conexidad y el diámetro. Enunciaremos primero una proposición que será de utilidad.

Proposición 3.1.1. *Si $n \geq 3k - 2l - 1$, las siguientes islas siempre existen en S :*

- Las islas $A_{r,0}$, con $0 \leq r < k - l$.
- Las islas $A_{r,1}$, con $0 \leq r < k - l - 1$.
- Las islas $A'_{r,0}$, con $0 \leq r < k - l$.
- Las islas $A'_{r,1}$, con $0 \leq r < k - l$.

Demostración. Basta con demostrar que si $n \geq 3k - 2l - 1$, las islas $A_{k-l-2,1}$ y $A'_{k-l-1,1}$ siempre existen. Recuérdese que la isla $A_{r,i}$ tiene $i(k-l) + r$ puntos a la izquierda, por lo que $A_{k-l-2,1}$ comienza en el punto $2(k-l) - 1$ y termina en $2(k-l) - 1 + k = 3k - 2l - 1$, por lo que siempre existe. Por otra parte, la isla $A'_{k-l-1,1}$ comienza en el punto $2(k-l) - 1$ y termina en el punto $2(k-l) - 1 + k - 1 = 3k - 2l - 2$, por lo cual siempre existe. ■

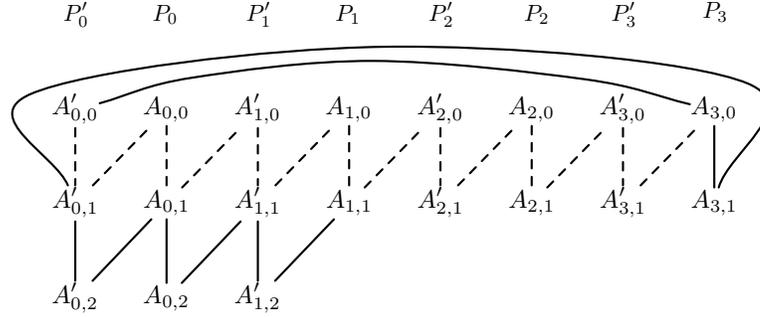


Figura 3.10: La gráfica $IJ(S', 6, 2)$ con $n = 15$. Las aristas punteadas ilustran el camino usado en el Teorema 3.1.2.

El siguiente resultado nos da condiciones para asegurar que la gráfica $IJ(S', k, l)$ es conexa.

Teorema 3.1.2. *Para $l \geq 2$, la gráfica $IJ(S', k, l)$ es conexa si y solo si $n \geq 3k - 2l - 1$ o $n = k$.*

Demostración. Primero supongamos que $n \geq 3k - 2l - 1$. Sea $\pi := A'_{0,0}A_{0,1}A_{0,0}A_{0,1} \cdots A'_{k-l-1,0}A'_{k-l-1,1}A_{k-l-1,0}$. Por el Lema 3.1.1, π existe y es un camino en $IJ(S', k, l)$, y además sabemos que también P_r y P'_r son caminos, $0 \leq r \leq k - l - 1$. Véase la Figura 3.10. Como para cada r , π contiene al menos un vértice de P_r y al menos un vértice de P'_r , se sigue que $IJ(S', k, l)$ es conexa.

Por otra parte si $n < 3k - 2l - 1$, entonces en S hay menos de $3k - 2l - 2$ puntos. Por lo tanto, existe una k -isla que contiene a x y tiene menos de $k - l$ puntos a su izquierda, y menos de $k - l$ puntos a su derecha. Esta isla es un vértice aislado en $IJ(S', k, l)$. Si $n = k$, este vértice es el único en la gráfica, por lo que esta es conexa. Pero si $n > k$, hay al menos dos k -islas, y por lo tanto la gráfica es disconexa. ■

Una vez que hemos demostrado que la gráfica es conexa, podemos dar un resultado respecto a su diámetro. La siguiente cota se sigue del Lema 3.1.1 y del Teorema 3.1.2.

Proposición 3.1.2. *Si $IJ(S', k, l)$ es conexa, entonces su diámetro es $\Theta\left(\frac{n-k}{k-l}\right)$.*

Demostración. Sea Q el conjunto de caminos $\{P'_r | 0 \leq r < k - l\} \cup \{P_r | 0 \leq r < k - l\}$. Nótese que cada vértice de $IJ(S', k, l)$ está en algún elemento

de Q . Tómense dos vértices u y v de $IJ(S', k, l)$. Supongamos que u está en $Q_u \in Q$, y que v está en $Q_v \in Q$. Por la Proposición 3.1.1, el camino $\pi := A'_{0,0}A'_{0,1}A_{0,0}A_{0,1} \cdots A'_{k-l-1,0}A'_{k-l-1,1}A_{k-l-1,0}$ existe en $IJ(S', k, l)$. Nótese que π une un vértice u' de Q_u con un vértice v' de Q_v . Por lo tanto el camino $uQ_uu'\pi v'Q_vv$ conecta u y v . Nótese que la longitud de este camino es $O\left(\frac{n-k}{k-l}\right) + O(k-l)$, puesto que cada camino en Q tiene longitud $O\left(\frac{n-k}{k-l}\right)$ y π tiene longitud $O(k-l)$.

Sea u el primer vértice de P_0 y sea v el último vértice de $P_{\lfloor \frac{k-l}{2} \rfloor}$. La distancia entre estos dos vértices es $\Omega\left(\frac{n-k}{k-l}\right) + \Omega(k-l)$. ■

Como se discutió en la sección anterior, si $|S| \geq 3k - 1$ la gráfica $IJ(S, k, 0)$ es conexa y su diámetro es a lo más 3; como además la subgráfica de $IJ(S, k, l)$ inducida por las islas $A'_{r,i}$ es isomorfa a $IJ(S, k-1, l-1)$, se sigue fácilmente que:

Proposición 3.1.3. *Si $n \geq 3k$, $IJ(S', k, 0)$ y $IJ(S', k, 1)$ son conexas y su diámetro es a lo más 4.*

En la siguiente sección, analizamos la estructura de la gráfica cuando el conjunto de puntos S está en posición general.

3.2. Puntos en posición general

En esta sección presentamos resultados respecto a la conexidad de la gráfica de islas tipo Johnson generalizada, para un conjunto de puntos en posición general.

Sea P un conjunto de n puntos en posición general en el plano. Supongamos que los elementos de P están etiquetados como $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$, de tal forma que p_0 es el elemento en P con mayor coordenada y , y que p_1, \dots, p_{n-1} están ordenados radialmente con respecto a p_0 , de izquierda a derecha; tal y como se observa en la Figura 3.11.

Sea $P_{i,j}$, $1 \leq i < j$, el subconjunto de P que contiene los elementos $p_l \in P$, tales que $i \leq l \leq j$. Obsérvese que $P_{i,j}$ es una isla de P , y que también lo es $P'_{i,j} = P_{i,j} \cup \{p_0\}$. Llamamos a una isla de cualquiera de estos tipos *proyectable*; véase la Figura 3.12. Nótese que no necesariamente todas las islas de P son proyectables.

Nuestro interés en las islas proyectables, está motivado por su cercana relación con las islas que aparecen en los conjuntos de puntos estudiados en la Sección 3.1.2. El siguiente lema describe dicha relación. Recuérdesse la

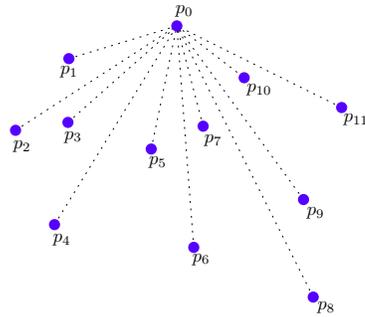


Figura 3.11: La etiquetación del conjunto de puntos P .

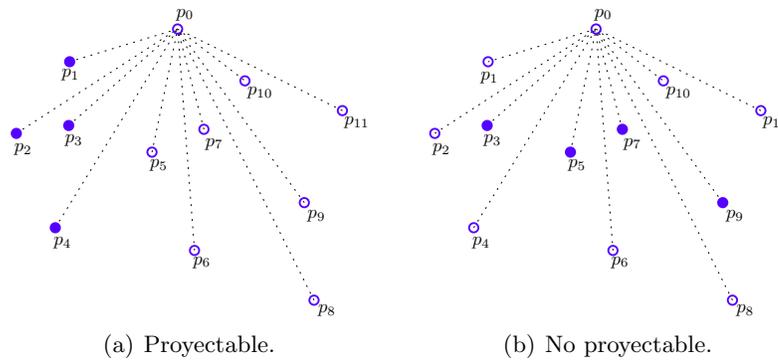


Figura 3.12: Una 4-isla proyectable y una 4-isla no proyectable.

definición de S' presentada en la sección anterior: sea S un conjunto de $n-1$ puntos sobre una recta horizontal h ; definimos $S' := S \cup \{x\}$, donde x es un punto que no está en h .

Lema 3.2.1. *La subgráfica de $IJ(P, k, l)$ inducida por las islas proyectables de P es isomorfa a $IJ(S', k, l)$.*

Como consecuencia del Lema 3.2.1 y del Teorema 3.1.2, si $n \geq 3k-2l-1$ o $n = k$, la subgráfica de $IJ(P, k, l)$ inducida por las islas proyectables de P es conexa. Por lo tanto, para demostrar que $IJ(P, k, l)$ es conexa, es suficiente con mostrar que siempre existe un camino que conecta a cualquier isla de P con una isla proyectable. En los siguientes párrafos se demuestra que dicho camino existe.

Sea A una isla de P tal que $|A \setminus \{p_0\}| \geq 2$. Nótese que p_0 no necesariamente pertenece a A , en tal caso $A \setminus \{p_0\} = A$. Definimos el *peso* de A como la diferencia entre el índice mayor y el menor de los puntos en $A \setminus \{p_0\}$. Nótese que una isla con peso $k-1$ es proyectable.

Lema 3.2.2. *Sea A una isla no proyectable de P . Si $n > (k-l)(k-l+1)+k$, entonces A es adyacente en $IJ(P, k, l)$ a una isla proyectable, o a una isla cuyo peso es menor que el peso de A por al menos $k-l$.*

Demostración. Sea A una k -isla de P . Sean p_{i_1}, \dots, p_{i_m} los elementos de A distintos de p_0 , considerados en el orden ya establecido anteriormente para P . Si A contiene a p_0 , entonces m es igual a $k-1$, de lo contrario m es igual a k . Considérense todos los intervalos maximales de $P \setminus \{p_0\}$ que contienen exactamente l elementos consecutivos de A :

$$[p_1, p_{i_{l+1}}) := \{p_j \in P \setminus \{p_0\} \mid 1 \leq j < i_{l+1}\} \quad (3.1)$$

$$(p_{i_{m-l}}, p_{i_{n-1}}] := \{p_j \in P \setminus \{p_0\} \mid i_{m-l} < j \leq n-1\} \quad (3.2)$$

y, para toda h tal que $1 \leq h \leq m-l-1$,

$$(p_{i_h}, p_{i_{h+l+1}}) := \{p_j \in P \setminus \{p_0\} \mid i_h < j < i_{h+l+1}\}. \quad (3.3)$$

Llamamos al intervalo a la izquierda de A (3.1) y al intervalo a su derecha (3.2) *intervalos finales*; al resto (3.3) los llamamos *intervalos medios*. A continuación demostramos que existe una isla adyacente a A en $IJ(P, k, l)$ con las propiedades deseadas, y contenida en uno de estos intervalos.

Nótese que hay a lo más $k-l+1$ intervalos, y que cada elemento de $P \setminus \{p_0\}$ está en al menos uno de ellos. Por lo tanto, como $n > (k-l)(k-l$

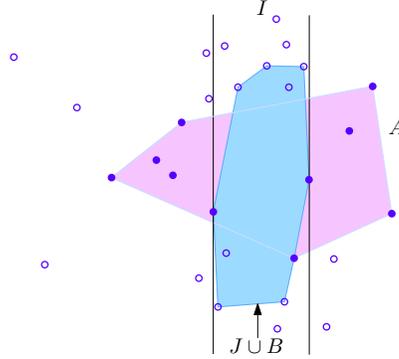


Figura 3.13: I es un intervalo medio ($k=10, l=3$).

$l + 1) + k$, uno de estos intervalos debe contener al menos $(k - l)$ puntos de $P \setminus A$. Llamamos a tal intervalo I . Exhibimos ahora la isla deseada.

Si I es un intervalo medio de P de la forma $(p_{i_h}, p_{i_{h+l+1}})$, entonces hacemos $J := \{p_{i_{h+1}}, p_{i_{h+2}}, \dots, p_{i_{h+l}}\}$ (si $l = 0$, entonces $J := \{\emptyset\}$). Sea B el conjunto de los $k - l$ puntos de $I \setminus A$ más cercanos a $\text{Conv}(J)$ (si $l = 0$, entonces B es cualquier k -isla en $I \setminus A$). La k -isla $J \cup B$ (véase la Figura 3.13) es adyacente a A en $IJ(P, k, l)$, y su peso es menor que el peso de A por al menos $k - l$.

Si I es un intervalo final, entonces sean p_S y p_E el primero y el último punto en $A \cap I$, respectivamente. Si $[p_S, p_E]$ contiene al menos $k - l$ elementos de $P \setminus A$, entonces procedemos como en el caso en el que I es un intervalo medio; véase la Figura 3.14(a). De no ser así, entonces hay $r < k - l$ puntos de $P \setminus A$ en I . En este punto hay dos posibles casos:

- i) Si I es el primer intervalo, entonces sea B el conjunto de los $k - l - r$ puntos anteriores a p_S en $P \cap A$.
- ii) Si I es el último intervalo, entonces sea B el conjunto de los $k - l - r$ puntos posteriores a p_E en $P \cap A$.

Nótese que en cualquiera de los dos casos $[p_S, p_E] \cup B$ es una isla proyectable adyacente a A ; véase la Figura 3.14(b). ■

Podemos ahora establecer el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1. *Si $n > (k - l)(k - l + 1) + k$, entonces $IJ(P, k, l)$ es conexa y su diámetro es $O(\frac{n}{k-l}) + O(k - l)$.*

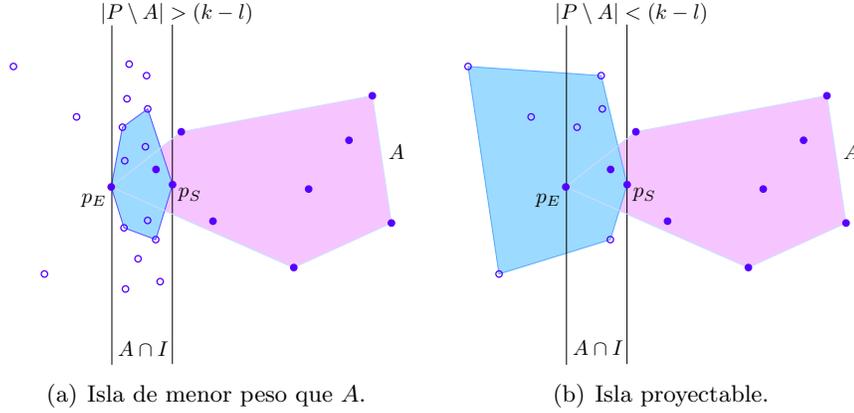


Figura 3.14: I es un intervalo final ($k=10$, $l=3$).

Demostración. Sean A y B k -islas. Aplicando sucesivamente el Lema 3.2.2 encontramos dos secuencias de islas adyacentes: $A := A_0, A_1, \dots, A_m$ y $B := B_0, B_1, \dots, B_{m'}$, en estas secuencias cada isla tiene peso menor a la anterior en por lo menos $k - l$, y la última isla es proyectable. Es decir, hemos encontrado un camino entre cada isla y una isla proyectable. Como el peso de la isla inicial es a lo más n , entonces estos caminos tienen longitud a lo más $O(\frac{n}{k-l})$.

Por el Lema 3.2.1, la subgráfica de islas proyectables contiene a $IJ(S', k, l)$ como subgráfica. Por otra parte, como consecuencia del Teorema 3.1.2 y la Proposición 3.1.2, $IJ(S', k, l)$ es conexa y tiene diámetro $O(\frac{n-k}{k-l}) + O(k-l)$.

Por lo tanto, la gráfica $IJ(P, k, l)$ es conexa y su diámetro es $O(\frac{n}{k-l}) + O(k-l)$. ■

3.3. Diámetro

En el Teorema 3.2.1 de la sección anterior, se estableció una cota superior para el diámetro de $IJ(P, k, l)$, en esta sección se mejora dicha cota y se presenta un conjunto de puntos que nos permite establecer una cota inferior.

3.3.1. Cota superior

En los siguientes párrafos presentamos un resultado que, para el caso en el que $l \leq k/2$, mejora la cota para el diámetro de $IJ(P, k, l)$ establecida en el Teorema 3.2.1. La estrategia a seguir es del tipo *divide y vencerás*.

Es decir, establecemos un lema que, dadas dos islas A y B , nos permite encontrar una isla adyacente a A y otra adyacente a B y descartar la mitad de los puntos de P .

Lema 3.3.1. *Sean A y B dos k -islas de P . Si $n > 2((k-l)(k-l+1)+k)$ y $l \leq k/2$, entonces existe un semiplano H tal que $(k-l)(k-l+1)+k \leq |H \cap P| \leq n/2$, y con la propiedad de que A y B , consideradas como vértices de $IJ(P, k, l)$, tienen cada una de ellas una isla vecina completamente contenida en H .*

Demostración. Sea ℓ una recta tal que en cada uno de los semiplanos que define hay $\lceil k/2 \rceil$ puntos de A y $\lceil k/2 \rceil$ puntos de B . Por el teorema *sandwich* [58] podemos asegurar que dicha recta siempre existe.

Sea \vec{v} un vector afín ortogonal a ℓ y sea H el semiplano tal que $H = \{x | x \cdot \vec{v} \leq 0\}$. Supongamos que $|H \cap P| \leq n/2$. Si por otra parte, $|H \cap P| < (k-l)(k-l+1)+k$, entonces movemos ℓ en dirección a \vec{v} hasta que $|H \cap P| \geq (k-l)(k-l+1)+k$. Nótese que en tal caso, H contendrá tantos puntos de A y B como lo hacía originalmente, y como estamos suponiendo que $n \geq 2((k-l)(k-l+1)+k)$, también contiene a lo más $n/2$ puntos de P .

Mostraremos ahora que siempre existe una isla adyacente a A con las propiedades deseadas; la isla adyacente a B se puede encontrar de manera similar.

Sea $P' := P \cap H$, ordénense sus elementos con respecto a su distancia a ℓ , de tal forma que $P' = \{p_1, \dots, p_m\}$. Sean p_{i_1}, \dots, p_{i_h} los elementos de $A \cap P'$ en dicho orden. Tal como se hizo en la demostración del Lema 3.2.2, consideramos intervalos maximales de P' que contienen exactamente l elementos consecutivos de A . Dado que H contiene al menos $k/2$ elementos de A y estamos suponiendo que $l \leq k/2$, podemos asegurar que hay al menos uno de estos intervalos. El resto de la demostración emplea los mismos argumentos que la demostración del Lema 3.2.2 para encontrar una isla adyacente a A contenida en uno de estos intervalos. ■

Usando el lema anterior obtenemos la siguiente cota superior para el diámetro de la gráfica de islas tipo Johnson generalizada.

Teorema 3.3.1. *Si $n \geq 2((k-l)(k-l+1)+k)$ y $l \leq k/2$, entonces el diámetro de $IJ(P, k, l)$ es $O(\log n) + O(\frac{k}{k-l}) + O(k-l)$.*

Demostración. Considérese el siguiente algoritmo.

Sean A y B dos k -islas de P . Comenzamos haciendo $A_0 := A, B_0 := B, P_0 := P, n_0 := n$ e $i = 0$.

Mientras $n_i \geq 2((k-l)(k-l+1)+k)$ aplicamos el Lema 3.3.1 a P_i, A_i y B_i . En cada paso obtenemos el semiplano H_i tal que $(k-l)(k-l+1)+k \leq |H_i \cap P_i| \leq n_i/2$, y que contiene a dos islas A_{i+1} y B_{i+1} que son adyacentes a A_i y B_i , respectivamente, en $IJ(P, k, l)$. Hacemos $P_{i+1} = H_i \cap P_i, n_{i+1} := |P_{i+1}|$ e $i := i + 1$, y continuamos la iteración. Nótese que este proceso lo podemos hacer a lo más $O(\log n)$ veces.

En la última iteración, obtenemos un conjunto P_j , tal que $(k-l)(k-l+1)+k \leq |P_j| < 2((k-l)(k-l+1)+k)$. Las islas A_j y B_j están contenidas en P_j , y están unidas por un camino de longitud $O(\log n)$ a A y a B respectivamente. En este punto, aplicamos el Teorema 3.2.1 para obtener un camino entre A_j y B_j de longitud a lo más $O(\frac{k}{k-l}) + O(k-l)$.

Concatenando los tres caminos obtenemos un camino de longitud a lo más $O(\log n) + O(\frac{k}{k-l}) + O(k-l)$ entre A y B en $IJ(P, k, l)$. ■

3.3.2. Cota inferior

Para dar una cota inferior en el diámetro de $IJ(P, k, l)$, usamos el conjunto de Horton [50]. Seguimos la descripción usada en [59] para presentarlo.

Dados dos conjuntos de puntos en el plano X y Y , decimos que X está *muy por encima* de Y si X está arriba de cada recta que contenga dos elementos de Y . Por otra parte, decimos que Y está *muy por debajo* de X si Y está abajo de cada recta que contenga dos puntos de X .

Sea H_0 un conjunto de n puntos en el plano, de tal manera que ningún par de sus puntos definen una recta vertical. Un elemento $p \in H_0$ es llamado *par* si el número de elementos de H_0 a la izquierda de la recta vertical que pasa por p es *impar*, de otro modo es llamado *impar*. Obsérvese que si se etiquetaran los elementos de H_0 como x_1, \dots, x_n respecto a su coordenada x , los elementos pares (respectivamente impares) de H_0 , son aquellos que tienen subíndice par (resp. impar).

Sea H_{00} el conjunto que contiene a los elementos pares de H_0 , y sea H_{01} el conjunto que contiene a los elementos impares de H_0 . Sea i una cadena de 0 's y 1 's, y sea H_i un conjunto de puntos que no contiene dos elementos en una recta vertical, definimos H_{i0} y H_{i1} de manera recursiva como los subconjuntos de H_i que contienen, respectivamente, a los elementos pares y a los elementos impares de H_i .

Entonces, H_{000} es el conjunto que contiene a los elementos pares de H_{00} , y H_{001} el que contiene a los elementos impares.

Definición 3.3.1. *Un conjunto finito de puntos H_0 , es un conjunto de Horton si cada recta vertical contiene a lo más un elemento de H_0 , y si $|H_0| \leq 1$ o se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Ambos H_{00} y H_{01} son conjuntos de Horton.*
- *H_{01} está muy por encima de H_{00} .*
- *H_{00} está muy por debajo de H_{01} .*

La Figura 3.15 muestra un conjunto de Horton.



Figura 3.15: Un conjunto de Horton con 16 puntos.

Ha sido demostrado en [50] que siempre existen los conjuntos de Horton de cualquier tamaño. Sea H_0 un conjunto de Horton con n puntos, y sea A una isla de H_0 . Es fácil ver que podemos asociar con A una única cadena binaria a , de tal manera que H_a contiene a A , pero ni H_{a0} ni H_{a1} la contienen.

Dada una isla A de H_0 definimos la *profundidad* de A , $\delta(A)$, como la longitud de la cadena de ceros más larga $s := 00\dots 0$, de tal forma que H_s contiene a A . Por ejemplo, supongamos que los elementos de H_0 están etiquetados como $\{x_1, \dots, x_n\}$, de acuerdo con el orden determinado por su coordenada x . Entonces, $\delta(x_1) = 1, \delta(x_2) = 2, \delta(x_3) = 1, \delta(x_4) = 3, \dots$; véase la Figura 3.16.

Nótese que la profundidad de una isla es la profundidad de su punto menos profundo.

Los siguientes dos lemas serán de utilidad para demostrar el resultado principal de la sección.

Lema 3.3.2. *Sean x_i y x_j dos puntos de H_0 , tales que x_i está a la izquierda de x_j ($i < j$), y sea x_k un punto con profundidad menor que*

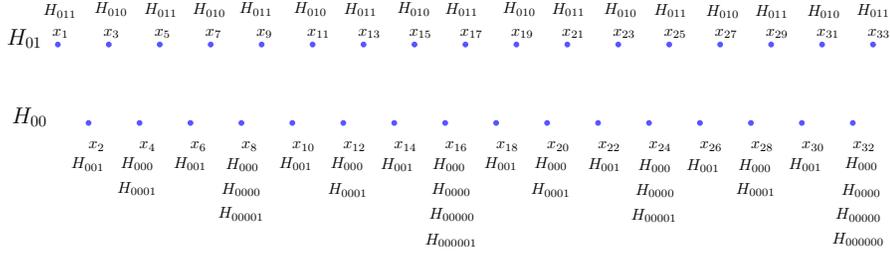


Figura 3.16: La profundidad de los elementos de H_0 .

$\delta(\{x_i, x_j\})$. Entonces la isla $A = H_0 \cap \text{Conv}(\{x_i, x_j, x_k\})$ tiene al menos $2^{\delta(\{x_i, x_j\}) - \delta(x_k) - 1} - 1$ puntos x_m con profundidad mayor que la profundidad de x_k , y tal que $i < m < j$.

Demostración. Sea $A := H_0 \cap \text{Conv}(\{x_i, x_j, x_k\})$. Procederemos por inducción sobre $r = \delta(\{x_i, x_j\}) - \delta(x_k)$.

Si $r = 1$, no hay nada que demostrar puesto que $2^{r-1} - 1 = 0$.

Supongamos entonces que $r > 1$. Sea H_a el conjunto asociado con A . Nótese que x_k está en H_{a1} mientras que x_i y x_j están ambas en H_{a0} ; de hecho, como estamos suponiendo que $r > 1$, entonces ambas están en H_{a00} . Considérese el conjunto H_{a0} , como este es un conjunto de Horton, A contiene al menos un punto en H_{a01} entre x_i y x_j . De entre todos esos puntos, elíjase el que tenga menor coordenada y , sea dicho punto x'_k . La profundidad de x'_k es mayor en uno que la profundidad de x_k . Por la hipótesis inductiva, la isla $H_0 \cap \text{Conv}(\{x_i, x_j, x'_k\})$ contiene un conjunto I con al menos $2^{r-2} - 1$ puntos. Estos puntos están por debajo de x'_k (entonces en H_{a00}), y entre x_i y x_j . Por lo tanto I está contenido en A .

Para cada punto en I , considérese el siguiente punto a su derecha, x_m , en H_{a0} . Este punto debe estar en H_{a01} . Por lo tanto, $\delta(x_k) < \delta(x_m)$ y $i < m < j$. Entonces hay $2^{r-2} - 1$ puntos adicionales en A . Nótese que el punto a la derecha de x_i en H_{a0} no ha sido contado. Por lo tanto, A tiene al menos $2^{r-2} - 1 + 2^{r-2} - 1 + 1 = 2^{r-1} - 1$ puntos con profundidad mayor que la profundidad de x_k , y que están entre x_i y x_j . ■

Lema 3.3.3. Si A y B son dos islas de H_0 adyacentes en $IJ(H_0, k, l)$ (con $l \geq 2$), entonces $|\delta(A) - \delta(B)| = O(\log(k - l))$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la profundidad de A es mayor que la profundidad de B . Sea C la isla $A \cap B$. Nótese que la profundidad de C es al menos la profundidad de A .

Si x_b es el punto menos profundo de B , entonces $\delta(x_b) = \delta(B)$, y dicho punto está por encima de C . Considérese una arista del cierre convexo de C , cuya recta soporte separa a C y x_b . Sean x_i y x_j los puntos finales de dicha arista. Entonces, por el Lema 3.3.2, la isla $H_0 \cap \text{Conv}(\{x_i, x_j, x_b\})$ contiene al menos $2^{\delta(\{x_i, x_j\}) - \delta(x_b) - 1} \geq 2^{\delta(A) - \delta(B) - 1}$ puntos, ninguno de los cuales está en C . Sin embargo, como estos puntos están en B , hay a lo más $k - l$ de ellos. Por lo tanto, $\delta(A) - \delta(B) = O(\log(k - l))$. ■

En el siguiente teorema se establece el resultado respecto al diámetro de $IJ(H_0, k, l)$.

Teorema 3.3.2. *El diámetro de $IJ(H_0, k, l)$, para $l \geq 2$, es $\Omega(\frac{\log(n) - \log(k)}{\log(k-l)})$.*

Demostración. Sea A la isla de H_0 con la mayor profundidad posible, la cual es $\lceil \log_2(n/k) \rceil$. Sea B una isla con profundidad 0. Nótese que en cualquier camino entre A y B en $IJ(H_0, k, l)$, la profundidad de dos elementos consecutivos difiere por $O(\log(k - l))$. Por lo tanto, cualquiera de esos caminos tiene longitud $\Omega(\frac{\log(n) - \log(k)}{\log(k-l)})$. ■

Cabe mencionar que el diámetro de la gráfica de Johnson generalizada puede ser muy distinto al de la gráfica de islas tipo Johnson generalizada. El diámetro de $GJ(n, k, l)$ es $O(\frac{l}{k-l})$ cuando n es suficientemente grande, mientras que el diámetro de $IJ(P, k, l)$ puede ser $\Omega(\frac{\log(n) - \log(k)}{\log(k-l)})$, como se demostró en el teorema anterior.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se presentaron resultados respecto al diámetro de la gráfica de islas tipo Johnson generalizada. Se presentó una cota inferior y una cota superior para el mismo en el caso en el que $l \leq k/2$. Las cotas sin embargo no son justas. Un problema abierto es cerrar la brecha entre dichas cotas.

Por otra parte, determinar una cota inferior y una cota superior para el diámetro de $IJ(P, k, l)$, en el caso en el que $l > k/2$, parece un problema desafiante. Creemos que el diámetro cambiará bastante cuando l sobre pasa los $k/2$. Por ejemplo, cuando $l = 0$, el diámetro de $IJ(P, k, l)$ es constante. Otro caso especial es $IJ(P, 2, 1)$, la cual tiene diámetro 2.

CAPÍTULO 4

Una propiedad combinatoria en los órdenes angulares de conjuntos de puntos en el plano

Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general, es decir, no hay tres puntos que estén en la misma recta. Al conectar los puntos en S con segmentos de recta, uno puede formar triángulos, polígonos simples, o poligonizaciones (polígonos simples que utilizan todos los puntos en S). Estas construcciones elementales generan problemas combinatorios sobre conjuntos de puntos, por ejemplo, determinar, de entre todos los conjuntos S de n puntos, el mínimo número de triángulos vacíos [9], el tamaño mínimo del polígono convexo más grande cuyos vértices son elementos de S (el teorema de Erdős-Szekeres) [32], o el máximo número posible de poligonizaciones[41]. Describir propiedades sobre conjuntos de puntos puede ayudar a generar nuevas ideas en este tipo de problemas.

En este capítulo estudiamos la siguiente propiedad combinatoria de conjuntos de puntos: sea S un conjunto de n puntos en posición general en el plano, y sea $p \in S$, considérese el conjunto $S - p$ en el orden angular respecto a p . Conéctense los puntos de $S - p$ en dicho orden. Si p es un punto interior de S , entonces obtenemos un polígono estrellado P con p en su núcleo. Si p es un punto extremo de S , entonces el conjunto ordenado $S - p$ genera un camino poligonal P' . Un ángulo $\angle q_{i-1}, q_i, q_{i+1}$ con ápice q_i definido por tres vértices consecutivos de P , o P' respectivamente, es *convexo con respecto a p* si los cuatro puntos p, q_{i-1}, q_i, q_{i+1} forman un cuadrilátero convexo. Decimos también que q_i es un *vértice convexo*. Esto se ilustra en la Figura 4.1.

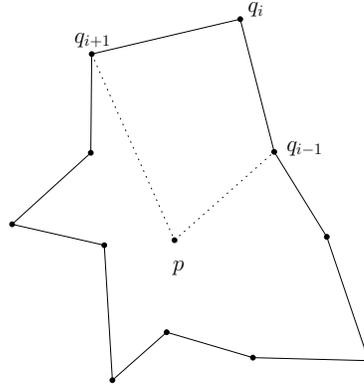


Figura 4.1: El polígono estrellado del conjunto $S - p$. q_i es convexo y q_{i-1} es cóncavo.

En un camino poligonal P' no consideramos el ángulo en el primero y el último vértice. Denotemos como $c_S(p)$ al número de ángulos convexos del polígono P , respectivamente del camino poligonal P' , obtenido por el orden angular alrededor de p de $S - p$. Tenemos que $0 \leq c_S(p) \leq n - 1$ puesto que si p es un punto extremo de S que únicamente ve una cadena cóncava, claramente $c_S(p) = 0$. Por otra parte, si p está adentro de un polígono convexo, con conjunto de vértices $S - p$, entonces todos los $n - 1$ ángulos consecutivos alrededor de p son convexos. Definimos $c(S) = \sum_{p \in S} c_S(p)$ y $c(n) = \min_S c(S)$, el mínimo se toma sobre todos los conjuntos de puntos S con n puntos en posición general en el plano. En este capítulo demostramos que $c(n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}} - O(n)$. En otras palabras, para cada conjunto S de n puntos en posición general, la suma del número de ángulos convexos alrededor de todos los puntos en S es mayor o igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}} - O(n)$. Esta cota es casi justa, puesto que existen conjuntos de puntos S para los cuales sucede que $c(S) \leq 2n^{\frac{3}{2}} - O(n)$.

Este resultado implica que cualquier conjunto de n puntos en posición general en el plano, admite una poligonización estrellada con al menos $\sqrt{\frac{n}{2}} - O(1)$ ángulos convexos. Es decir, que para cualquier conjunto de n puntos en posición general, podemos construir un polígono estrellado cuyo conjunto de vértices son los puntos del conjunto y que tiene al menos dicho número de ángulos convexos.

La definición de $c(S)$ está relacionada con el algoritmo que aparece en [26], el cual cuenta el número de triángulos vacíos en un conjunto de puntos S : sea $p \in S$, considérese el polígono estrellado de $S - p$ alrededor de p . Entonces, cada diagonal interior de dicho polígono genera un triángulo

vacío de S incidente en p . Para contar el número de triángulos vacíos de S es suficiente entonces con construir dicho polígono estrellado para cada $p \in S$, y contar el número de diagonales interiores. Cada triángulo vacío se cuenta exactamente tres veces.

La definición de $c(S)$ está también relacionada con la de *concauidad (reflexivity)* [1, 6] de un conjunto de puntos S , es decir, el mínimo número de vértices cóncavos en una poligonización de S . Nosotros nos enfocamos en poligonizaciones estrelladas.

Finalmente, es importante destacar que las poligonizaciones estrelladas tienen también aplicaciones importantes en el área de Geometría Computacional debido a que son simples y fáciles de triangular; véase por ejemplo [55]. En este sentido, es útil encontrar la poligonización más simple de un conjunto de puntos. Las poligonizaciones estrelladas con máximo número de ángulos convexos pueden estar entre las más simples.

4.1. Demostraciones

En esta sección presentamos dos resultados principales. El primero es una cota inferior respecto al número de ángulos convexos en órdenes angulares de conjuntos de puntos. El segundo es una cota en el número de ángulos convexos en poligonizaciones de conjuntos de puntos. Antes de presentar los resultados mencionados, debemos demostrar el siguiente Lema.

Lema 4.1.1. *Dado S un conjunto de n puntos en el plano en posición general, sea $S' \subset S$ y $p \in S'$. Entonces $c_{S'}(p) \geq k$ implica $c_S(p) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.*

Demostración. Denotemos con $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ al subconjunto ordenado de vértices convexos del orden angular de $S' - p$ alrededor de p . Si p es un punto extremo de S' , entonces incluimos también el primero y el último vértice q_0 y q_{k+1} de P' en Q . Para tres vértices consecutivos q_{i-1}, q_i, q_{i+1} de Q , sea $S_{q_i} \subset S - p$ el subconjunto ordenado de $S - p$ desde q_{i-1} hasta q_{i+1} . Ahora demostramos que S_{q_i} contiene al menos un vértice convexo alrededor de p en S , que es diferente a q_{i-1} y q_{i+1} . Supongamos que el ángulo en q_i en S_{q_i} no es convexo, y sean $s_1, s_2 \in S'$ el punto anterior y siguiente a q_i en el orden angular de $S' - p$ alrededor de p . Los dos rayos que emanan de p y pasan por s_1 y q_i , definen un cono s_1, p, q_i con ápice p . Considérese también el cono q_i, p, s_2 con ápice p . Entonces, al menos uno de los dos conos s_1, p, q_i o q_i, p, s_2 contiene un punto de S en su interior que está afuera del triángulo s_1, p, q_i o afuera del triángulo q_i, p, s_2 , respectivamente. Supongamos que S contiene un punto en el cono s_1, p, q_i afuera del triángulo s_1, p, q_i . De entre

todos estos puntos, considérese el punto z con mayor distancia a la recta s_1, q_i . Sea l_z la recta que pasa por z y que es paralela a la recta que pasa por s_1 y q_i . Todos los puntos de S_{q_i} que están dentro del cono s_1, p, q_i están en el lado de l_z que contiene a p . Entonces, el ángulo en z es convexo en S_{q_i} . De esto se sigue que S_{q_i} contiene al menos un ángulo convexo diferente de q_{i-1} y q_{i+1} . Si p es un punto extremo en S , podemos dividir los vértices de el camino poligonal P' de $S - p$ en $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ grupos $S_{q_{2i-1}}$, para $i = 1, \dots, \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Cada grupo contiene al menos un ángulo convexo. Si p es un punto interior de S , entonces tenemos los siguientes casos:

- i. Si p está afuera del cierre convexo de Q , entonces consideramos otra vez el camino poligonal como en el caso anterior.
- ii. Si p está adentro del cierre convexo de Q :
 - a) Si k es par, dividimos el conjunto de puntos S en $\frac{k}{2}$ grupos $S_{q_{2i-1}}$, cada uno de los cuales contiene un ángulo convexo.
 - b) Si k es impar, entonces consideramos el cono q_k, p, q_1 con ápice p :
 - 1) Si dicho cono contiene un ángulo convexo de $S - p$ alrededor de p en su interior, entonces dividimos el resto de los puntos en $\frac{k-1}{2}$ grupos $S_{q_{2i}}$, para $i = 1, \dots, \frac{k-1}{2}$, cada uno de los cuales contiene un ángulo convexo.
 - 2) Si el cono q_k, p, q_1 no contiene un ángulo convexo en su interior, entonces hay un ángulo convexo en el cono q_1, p, q_2 , o posiblemente el ángulo convexo es en q_1 , y podemos dividir el resto de los puntos en $\frac{k-1}{2}$ grupos.

En cada caso, esto da al menos $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ ángulos convexos. ■

El siguiente resultado presenta una cota inferior en el número de ángulos convexos en un conjunto de puntos; se demuestra además que la cota es casi justa.

Teorema 4.1.1. $\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}} - O(n) \leq c(n) \leq 2n^{\frac{3}{2}} - O(n)$.

Demostración. Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general. Si para cada punto p de S , $c_S(p) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$, entonces claramente $c(S) = \sum_{p \in S} c_S(p) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}$. Supongamos, entonces, que S contiene un punto p tal que $c_S(p) < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$. Denotemos por Q al subconjunto ordenado de vértices convexos de los puntos de $S - p$ en su orden angular alrededor de

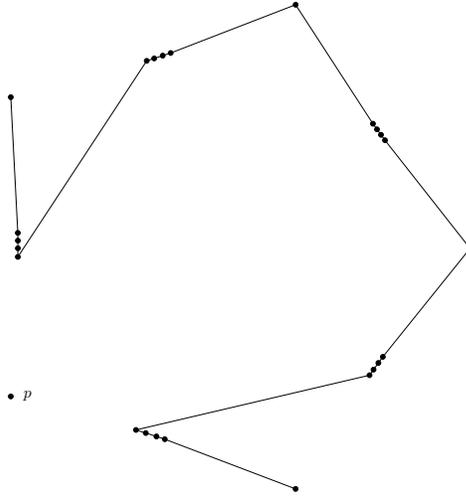
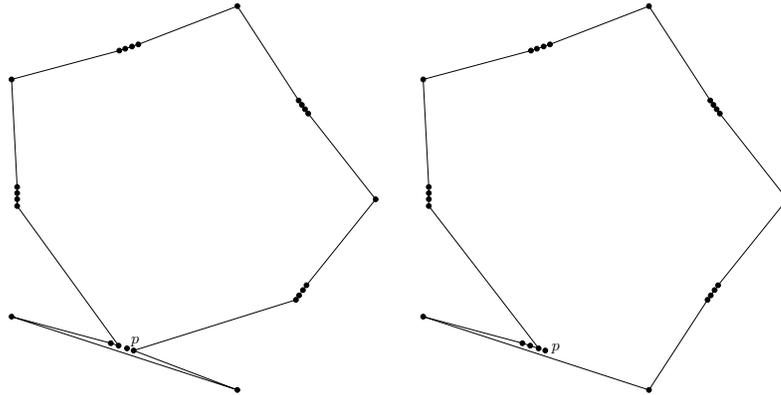
p . Q divide $S - p - Q$ en $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$ cadenas de vértices cóncavos. Incluimos también los dos puntos de Q que unen a una cadena cóncava con esa cadena. Puede darse el caso de que una cadena consista únicamente de dos vértices de Q . Nótese que $k = |Q| + 1$ si p es un punto extremo de S , y que de otro modo $k = |Q|$. Denotemos estas cadenas como R_1, \dots, R_k . Tenemos que $\sum_{j=1}^k |R_j| = n + |Q| + 1$. Cada conjunto R_j con $|R_j| > 2$ forma un polígono vacío convexo. Entonces, por cada punto q en $R_j, j = 1, \dots, k$, tenemos que $c_{R_j}(q) = |R_j| - 3$ o bien $c_{R_j}(q) = 0$ si $|R_j| = 2$. Por el Lema 4.1.1, cada punto de R_j ve al menos $\left\lceil \frac{|R_j| - 3}{2} \right\rceil$ ángulos convexos en S . Sumando sobre todos los puntos de $S - p$ obtenemos al menos $\sum_{j=1}^k |R_j| \left\lceil \frac{|R_j| - 3}{2} \right\rceil \geq \sum_{j=1}^k \frac{|R_j|^2}{2} - \frac{3|R_j|}{2}$ ángulos convexos en total. Cálculos elementales demuestran que esta suma se minimiza si las cardinalidades de todos los subconjuntos R_j son iguales, puesto que $\sum_{j=1}^k |R_j|$ es un número fijo. Por lo tanto suponemos que $|R_j| = \frac{n}{k} \pm O(1)$ para toda j .

De lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
c(S) &\geq \sum_{j=1}^k \frac{|R_j|^2}{2} - \sum_{j=1}^k \frac{3|R_j|}{2} \\
&\geq k \left(\frac{n^2}{2kn^2} - \frac{n}{k}O(1) + O(1) \right) - \frac{3}{2}(n + k - 1) \\
&\geq \frac{n^2}{2k} - O(n) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}} - O(n).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Las Figuras 4.2 y 4.3, muestran un conjunto S de n puntos con $c(S) \leq 2n^{\frac{3}{2}}$, también se muestran un polígono estrellado y un camino poligonal, respectivamente. En dicho caso $n = m^2$ con $m \in \mathbb{N}$. La misma construcción puede adaptarse también para otros valores de n . Hay \sqrt{n} puntos que forman un polígono regular. Por cada arista del polígono, se coloca una cadena de $\sqrt{n} - 1$ puntos adentro del polígono, muy cerca del punto medio de la arista de tal forma que estos puntos junto con los dos puntos finales de la arista correspondiente formen un polígono convexo.

Para contar $c(S)$ distinguimos tres casos: (1) si p es un punto extremo de S , véase la Figura 4.2; (2) si p es un punto interior de S que no es ni el primer ni el último punto de una cadena, véase la Figura 4.3(izquierda); o

Figura 4.2: El camino poligonal P' de un punto extremo p de S Figura 4.3: Los dos polígonos estrellados P para dos puntos interiores

(3) si p es un punto interior de S que es el primer o el último punto de una cadena, véase la Figura 4.3(derecha). Para cada punto p del tipo (1) tenemos $c_S(p) = 3\sqrt{n} - 5$. Como hay \sqrt{np} puntos del tipo (1), esto da $3n - 5\sqrt{n}$ ángulos convexos. Por cada punto p del tipo (2) tenemos $c_S(p) = 2\sqrt{n} - 2$. Además, por cada punto p del tipo (3) tenemos $c_S(p) = 2\sqrt{n} - 2$. S tiene $\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)$ puntos interiores, esto da $2n^{\frac{3}{2}} - 4n + 2\sqrt{n}$ ángulos convexos. Por lo que obtenemos $c(S) = \sum_{p \in S} c_S(p) = 2n^{\frac{3}{2}} - n - 3\sqrt{n}$. ■

El siguiente resultado se sigue del Teorema anterior:

Colorario 4.1.1. *Todo conjunto S de n puntos en el plano en posición general, admite una poligonización de S con al menos $\sqrt{\frac{n}{2}} - O(1)$ ángulos convexos.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.1, para al menos un punto $p \in S$, $c_S(p)$ es al menos $\sqrt{\frac{n}{2}} - O(1)$. Si p es un punto interior, reemplazamos una arista uv (donde, preferiblemente, u o v es un vértice cóncavo) del polígono estrellado $S - p$ por las aristas up y vp . Si p es un punto extremo, conectamos p al primer y último vértice del camino poligonal de $S - p$. En cada caso, se obtiene una poligonización estrellada. ■

Referencias

- [1] ACKERMAN, E., AICHHOLZER, O., AND KESZEGH, B. Improved upper bounds on the reflexivity of point sets. *Computational Geometry Theory and Applications* 42 (2009), 241–249.
- [2] AGARWAL, P., AND HAL-PELED, S. Maintaining approximate extent measures of moving points. In *Proceedings of the twelfth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (2001).
- [3] AGARWAL, P., AND SURI, S. Surface approximation and geometric partitions. *SIAM Journal on Computing* 27 (1998), 10161035.
- [4] AGARWAL, P. K., AND PACH, J. *Combinatorial Geometry*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.
- [5] AGARWAL, P. K., AND SHARIR, M. *Davenport-Schinzel Sequences and their geometric applications*. Cambridge University Press, 1995, ch. Algorithms for Arrangements, pp. 169–172.
- [6] ARKIN, E., FEKETE, S., HURTADO, F., MITCHELL, J., NOY, M., SACRISTAN, V., AND SETHIA, S. On the reflexivity of point sets. *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift* (2003), 139–156.
- [7] BÁRÁNY, I., AND FÜREDI, Z. Empty simplices in Euclidean space. *Canadian Mathematical Bulletin* 30 (1987), 436–445.

- [8] BÁRÁNY, I., AND KÁROLYI, G. Problems and results around the Erdős-Szekeres convex polygon theorem. *Discrete and computational geometry* (2000), 91–105.
- [9] BÁRÁNY, I., AND VALTR, P. Planar point sets with a small number of empty convex polygons. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 41* (2004), 243–266.
- [10] BAUTISTA, C., DÍAZ-BÁÑEZ, J., LARA, D., PÉREZ-LANTERO, P., URRUTIA, J., AND VENTURA, I. Computing optimal islands. *Operations Research Letters* (2011). por aparecer.
- [11] BENTLEY, J. Programming pearls: algorithm design techniques. *Commun. ACM 27*, 9 (1984), 865–873.
- [12] BEREG, S., BHATTACHARYA, B., KIRKPATRICK, D., AND SEGAL, M. Competitive algorithms for maintaining a mobile center. *Mobile Networks and Applications 11*, 2 (2006), 177–186.
- [13] BILÒ, V., CARAGIANNIS, I., KAKLAMANIS, C., AND KANELLOPOULOS, P. Geometric clustering to minimize the sum of cluster sizes. *Lecture Notes in Computer Science 3669* (2005), 460–471.
- [14] BRASS, P., MOSER, W., AND PACH, J. *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer, 2005, ch. Graph drawings and geometric graphs.
- [15] BRNNIMANN, H., AND GOODRICH, M. T. Almost optimal set covers in finite vc-dimension. *Discrete and Computational Geometry 14* (1995), 463–479.
- [16] CANNON, A. H., AND COWEN, L. J. Approximation algorithms for the class cover problem. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 40* (2004), 215–223.
- [17] CHAN, T. M. More planar two-center algorithms. *Computational Geometry 13*, 3 (1999), 189–198.
- [18] CHAZELLE, B. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press 44, 2004, ch. The Discrepancy Method in Computational Geometry, pp. 983–996.
- [19] CHEN, K. Y., AND CHAO, K. On the range maximum sum segment query problem. *Discrete Applied Mathematics 155*, 16 (2007), 2043–2052.

- [20] CHVÁTAL, V. A greedy heuristic for the set-covering problem. *Mathematics of Operations Research* 4 (1979), 233–235.
- [21] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., AND STEIN, C. *Introduction to Algorithms, Twenty-fifth printing*. MIT Press, McGraw-Hill, 2000, ch. Elementary Graph Algorithms, pp. 469–475.
- [22] CORTÉS, C., BÁÑEZ, J. M. D., PÉREZ-LANTERO, P., SEARA, C., URRUTIA, J., AND VENTURA, I. Bichromatic separability with two boxes: a general approach. *Journal of Algorithms* 64 (2009), 77–88.
- [23] CZYZOWICZ, J., RIVERA-CAMPO, E., URRUTIA, J., AND ZAKS, J. Separating convex sets in the plane. *Discrete and Computational Geometry* 7 (1992), 189–195.
- [24] DANTU, K., RAHIMI, M., SHAH, H., BABEL, S., DHARIWAL, A., AND SUKHATME, G. S. Robomote: enabling mobility in sensor networks. In *Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, 2005*. (2005), pp. 404–409.
- [25] DEVILLERS, O., HURTADO, F., KÁROLYI, G., AND SEARA, C. Chromatic variants of the Erdős-Szekeres theorem. *Computational Geometry: Theory and Applications* 26 (2003), 193–208.
- [26] DOBKIN, D., EDELSBRUNNER, H., AND OVERMARS, M. Searching for empty convex polygons. *Algorithmica* 5 (1990), 561–571.
- [27] DOBKIN, D., AND GUNOPULOS, D. Concept learning with geometric hypotheses. In *Proceedings of the eighth annual conference on Computational learning theory* (1995).
- [28] DOBKIN, D. P., GUNOPULOS, D., AND MASS, W. Computing the maximum bichromatic discrepancy, with applications to computer graphics and machine learning. *Journal of Computer and System Sciences* 52, 3 (1996), 453–470.
- [29] DUMITRESCU, A. Planar sets with few empty convex polygons. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 36 (2000), 93–109.
- [30] DUROCHER, S., AND KIRKPATRICK, D. Bounded-velocity approximation of mobile euclidean 2-centres. *International Journal of Computational Geometry and Applications* 18, 3 (2008), 161–183.

-
- [31] EDELSBRUNNER, H. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987, ch. Fundamental Concepts in Combinatorial Geometry.
- [32] ERDŐS, P., AND SZEKERES, G. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica* 2 (1935), 263–470.
- [33] ERDŐS, P., AND GUY, R. K. Crossing number problems. *The American Mathematical Monthly* 88 (1973), 52–58.
- [34] FEDER, T., AND GREENE, D. Optimal algorithms for approximate clustering. In *Proceedings of the 20th ACM Symposium on the Theory of Computing* (1988), pp. 434–444.
- [35] FEIGE, U. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *Journal of the ACM* 45 (1998), 634–652.
- [36] FOWLER, R. J., PATERSON, M. S., AND TANIMOTO, S. L. Optimal packing and covering in the plane are NP-complete. *Information Processing Letters* 12, 3 (1981), 133–137.
- [37] FRANCESCHETTI, M., COOK, M., AND BRUCK, J. A geometric theorem for approximate disk covering algorithms. Tech. rep., California Institute of Technology, 2001.
- [38] GAJENTAAN, A., AND OVERMARS, M. H. On a class of $O(n^2)$ problems in computational geometry. *Computational Geometry* 5 (1995), 165–185.
- [39] GAO, J., GUIBAS, L., HERSHBERGER, J., ZHANG, L., AND ZHU, A. Discrete mobile centers. In *Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry* (2001).
- [40] GAO, J., GUIBAS, L. J., AND NGUYEN, A. Deformable spanners and applications. *Computational Geometry* 35, 1-2 (2006), 2–19.
- [41] GARCA, A., NOY, M., AND TEJEL, J. Lower bounds on the number of crossingfree subgraphs of k_n . *Computational Geometry Theory and Applications* 16 (2000), 211–221.
- [42] GERKEN, T. Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete and Computational Geometry* 39 (2008), 239–272.
- [43] GODSIL, G., AND ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. Springer Verlag New York, 2001, ch. Graphs, pp. 9–.

-
- [44] GONZALEZ, T. Covering a set of points in multidimensional space. *Information Processing Letters* 40, 4 (1991), 181–188.
- [45] GUIBAS, L. Kinetic data structures. In *Handbook of Data Structures and Applications* (2004), CRC Press.
- [46] HAR-PELED, S. Clustering motion. *Discrete and Computational Geometry* 31, 4 (2004), 545–565.
- [47] HARBORTH, H., AND MÖLLER, M. The esther klein problem in the projective plane. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 15 (1994), 171–179.
- [48] HOCHBAUM, D., AND PATHRIA, A. Generalized p -center problems: complexity results and approximation algorithms. *European Journal of Operational Research* 100 (1997), 594–607.
- [49] HOCHBAUM, D. S., AND MAASS, W. Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI. *Journal of the ACM* 32 (1985), 130–136.
- [50] HORTON, J. D. Sets with no empty convex 7-gons. *Canadian Mathematical Bulletin* 26 (1983), 482–484.
- [51] JOHNSON, D. S. Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of Computer and System Sciences* 9 (1974), 256–278.
- [52] KALBFLEISCH, J. D., KALBFLEISCH, J. G., AND STANTON, R. A combinatorial problem on convex regions. In *Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (1970), pp. 180–188.
- [53] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations* (1972).
- [54] KATCHALSKI, M., AND MEIR, A. On empty triangles determined by points in the plane. *Acta Mathematica Hungarica* 51 (1988), 323–328.
- [55] KEIL, J. *Handbook of Computational Geometry*. Elsevier, 2000, ch. Polygon decomposition, pp. 491–518.
- [56] LIU, T., SADLER, C. M., ZHANG, P., AND MARTONOSI, M. Implementing software on resource-constrained mobile sensors: experiences with impala and zebranet. In *2nd International Conference on Mobile systems, applications, and services*. (2004).

-
- [57] LOVÁSZ, L. On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete Mathematics* 13 (1975), 383–390.
- [58] MATOUŠEK, J. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer, 2002, ch. Convexity, p. 18.
- [59] MATOUŠEK, J. *Lectures on Discrete Geometry*, vol. 212 of *Series: Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002.
- [60] MATOUŠEK, J. *Geometric Discrepancy: An Illustrated Guide*. Springer-Verlag, 1999.
- [61] MEGIDDO, N., AND SUPOWIT, K. J. On the complexity of some common geometric location problems. *SIAM Journal on Computing* 13, 1 (February 1984), 182–196.
- [62] NICOLÁS, C. M. The empty hexagon theorem. *Discrete and Computational Geometry* 38 (2007), 389397.
- [63] OVERMARS, M. H., AND VAN LEEUWEN, J. Maintenance of configurations in the plane. *Journal of Computer and System Sciences* (1981), 166–204.
- [64] SZEKERES, G., AND PETERS, L. Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem. *The ANZIAM Journal* 48 (2006), 151–164.
- [65] VALTR, P. On the minimum number of empty polygons in planar point sets. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 30 (1995), 155–163.