



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS TEÓRICOS Y EXPERIMENTALES  
DE LAS POMPAS DE JABÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

P R E S E N T A:

**J. JESÚS HARO FRAUSTO**

DIRECTOR DE TESIS: DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Aspectos Teóricos y Experimentales de las Pompas de Jabón

J. Jesús Haro Frausto

Agosto de 2011



# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
1.1 Estructura molecular de las películas de jabón . . . . .	5
1.2 Soluciones Jabonosas para Películas y Burbujas . . . . .	8
1.3 Tensión superficial . . . . .	9
1.4 Ecuación Laplace-Young. . . . .	12
<b>2 Antecedentes matemáticos para el estudio de las membranas de jabón</b>	<b>17</b>
2.1 Superficies parametrizadas . . . . .	17
2.2 Curvatura normal . . . . .	22
2.3 Curvatura media . . . . .	25
2.4 Curvatura de Gauss . . . . .	29
<b>3 Geometría de las pompas de jabón</b>	<b>37</b>
3.1 Curvatura media y superficies mínimas . . . . .	37
3.2 Relación entre superficies mínimas y pompas de jabón . . . . .	46
3.3 Parámetros isotermos . . . . .	49
3.4 Funciones armónicas y superficies mínimas . . . . .	52
3.5 Las representaciones Weierstrass-Enneper . . . . .	53
3.6 El mapeo de Gauss . . . . .	64
3.7 Proyección estereográfica y mapeo de Gauss . . . . .	66
<b>4 El problema de Plateau</b>	<b>71</b>
4.1 El funcional de área y la integral de Dirichlet . . . . .	72
<b>5 Membranas de jabón y sólidos platónicos</b>	<b>79</b>
5.1 Consideraciones previas para la construcción de los modelos . . . . .	79
5.2 Fórmula para una solución jabonosa . . . . .	80
5.3 Experimentación con los modelos y las leyes de Plateau a que obedecen . . . . .	80
5.4 Geometría de los modelos y geometría de la máquina Sherline . . . . .	94
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>



# Dedicatorias

Dedico este trabajo a la memoria de mis papás Sra. Juana Frausto de Haro y Sr. Eliseo Haro Sánchez, quienes con su ejemplo me enseñaron a trabajar intensamente para lograr un objetivo de manera honrada, y que sea fructífero en mi vida.

También lo dedico a mi esposa Rebeca y a mi hijo Daniel que me han apoyado siempre en todas mis iniciativas.



# Agradecimientos

Agradezco profundamente a la Dra. Lilia del Riego Senior el haberme mostrado la matemática como una forma de visualizar la existencia y al Dr. Manuel de Jesús Falconi Magaña, el haberme apoyado para estudiar esta maestría. Al Dr. Faustino Sánchez Garduño por su paciencia y su don de gente en su trato.

No menos importante ha sido el soporte que en todo momento me brindaron el M. I. Jesús Alvarado Llamas, director del DFM y a la Unión de Asociaciones, ambos de la UASLP.

Agradezco también al Dr. Pablo Barrera Sánchez por su guía, dirección y oportunidad para llevar acabo esta empresa. Por su actitud siempre cordial y en todo momento profesional.

Al M. en C. Guilmer González Flores, gracias Guilmer sin tu ayuda todo se hubiera desvanecido como una pompa de jabón.

Y SOBRE TODO, GRACIAS A LA HERMOSA UNAM.



# Prefacio

Mi interés por la matemática es meramente mi interés por la geometría y sus aplicaciones, desde luego que gozo con su belleza y elegancia. En este trabajo abordo el estudio de las membranas de jabón valiéndome mayormente de la geometría euclidiana, la geometría diferencial y la variable compleja. El capítulo 1 habla de las soluciones jabonosas y sus propiedades, que son las que permiten la formación de las membranas de jabón. En el capítulo 2 defino los conceptos de geometría diferencial que voy a utilizar en el desarrollo del trabajo. El capítulo 3 contiene el desarrollo del tema de las membranas de jabón (superficies mínimas) utilizando geometría diferencial y variable compleja. Este capítulo concluye con la representación Weierstrass-Enneper. Puesto que las membranas de jabón son superficies de área mínima, su relación con el problema de Plateau es evidente, y esto es lo que analizo en el capítulo 4. El capítulo 5 es una excursión por la geometría Euclideana clásica y habla sobre los sólidos platónicos y los tipos de membranas que pueden contener. Este capítulo tiene una significación especial para mí por el manejo de máquinas y materiales que requirió. El ver la geometría hecha realidad es una experiencia excitante.



# Capítulo 1

## Introducción

La belleza de las burbujas y las membranas de jabón ha tenido un atractivo para chicos y grandes desde siempre. El tratamiento científico de las superficies líquidas, el cual nos ha llevado a nuestro conocimiento actual de las pompas y las membranas de jabón, se dice que data del tiempo de Leonardo da Vinci; un hombre de arte y ciencia. Desde el siglo quince los investigadores han llevado a cabo estudios en dos distintos campos. En un campo están los investigadores físicos, químicos y biológicos quienes han estudiado las propiedades macroscópicas y moleculares con provecho mutuo. El otro campo incluye a los matemáticos, que han analizado los problemas que requieren la minimización del área de la superficie limitada por una frontera fija y problemas relacionados. Un ejemplo sencillo de uno de tales problemas es el de la superficie de área mínima limitada por un círculo de alambre. La solución de este problema, es bien conocido que es el disco delimitado por el alambre.

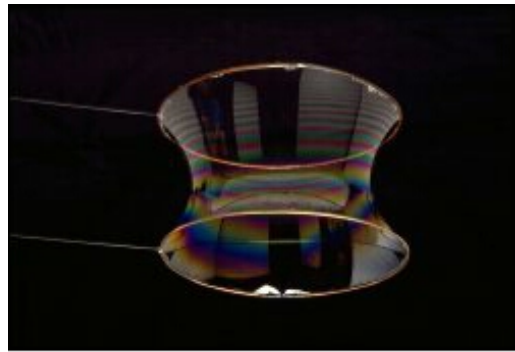
Históricamente, John Bernoulli y su estudiante Leonhard Euler fueron de los primeros en aplicar los métodos del cálculo en la solución de estos problemas, sentando los fundamentos de una nueva rama del cálculo, el Cálculo de Variaciones. En un trabajo publicado en 1744 Euler dedujo su bien conocida ecuación para la obtención de superficies de área mínima y otros problemas variacionales que requieren el examen de superficies varias [5]. La ecuación, en su forma unidimensional más simple, es

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

donde  $y = y(x)$ ,  $y_x = dy/dx$ , y  $f = f(x, y, y_x)$ .

La deducción de la Ecuación estuvo basada en un método geométrico-analítico. Euler aplicó exitosamente su ecuación al celebrado problema de la determinación del área de superficie mínima contenida por dos anillos coaxiales paralelos, colocados perpendiculares a su eje común. Se encontró que es una catenaria de revolución, o catenoide, con tal que los anillos estén suficientemente juntos [12].

Joseph Louis Lagrange fue atraído por el trabajo de Euler y lo reformuló utilizando métodos puramente analíticos. Desde entonces la ecuación (1.1) ha sido conocida como la ecuación Euler-Lagrange. La solución a la superficie de área mínima contenida por dos



Catenaria de revolución.

anillos coaxiales perdura como una de las pocas soluciones analíticas disponibles en este campo.

El importante concepto de tensión en la superficie de un fluido, conocido como tensión superficial fue introducido por J. A. von Segner en 1751 [5]. Ésta es la fuerza en la superficie de un fluido actuando sobre cada lado de una línea de longitud unitaria trazada sobre la superficie.

En el siglo diecinueve el físico belga Joseph Plateau demostró que se podían producir soluciones analógicas para los problemas de minimización sumergiendo modelos en un baño de solución jabonosa. Después de sacar el modelo del baño queda formada una membrana en el marco, limitada por sus aristas, con una superficie de área mínima [4]. Se encontró que todas las superficies mínimas tenían algunas propiedades geométricas comunes. Estos resultados experimentales han inspirado a grupos de matemáticos a buscar nuevos métodos analíticos que les permitan probar la existencia de las propiedades geométricas asociadas con las superficies de área mínima y resolver los problemas de esta naturaleza. Fueron estos experimentos los que renovaron el interés de los científicos matemáticos por investigar los problemas de superficie de área mínima. Aunque se hicieron sustanciales esfuerzos por obtener soluciones analíticas a estos problemas no fue sino hasta la década de 1930 que se realizaron progresos significativos debidos a los matemáticos Jesse Douglas y Tibor Radó.

El estudio de las películas y burbujas de jabón forma una parte importante de la ciencia de los fenómenos de superficie y consecuentemente se está llevando a cabo un gran programa de investigación en este campo en la industria y las universidades. En años recientes los bioquímicos han estado estudiando, con interés creciente, membranas biológicas presentes en animales y plantas celulares, los cuales están compuestos de lípido-moléculas que son semejantes en estructura y comportamiento a moléculas de jabón [9]. El estudio de películas de jabón puede proporcionar profundidad en cuanto a la función y propiedades de estas lípido- moléculas y lípido- membranas.

Recientemente han sido desarrolladas nuevas técnicas matemáticas de geometría diferencial. Éstas están siendo aplicadas con algún éxito al problema de Plateau; la determinación del área mínima limitada por una frontera.

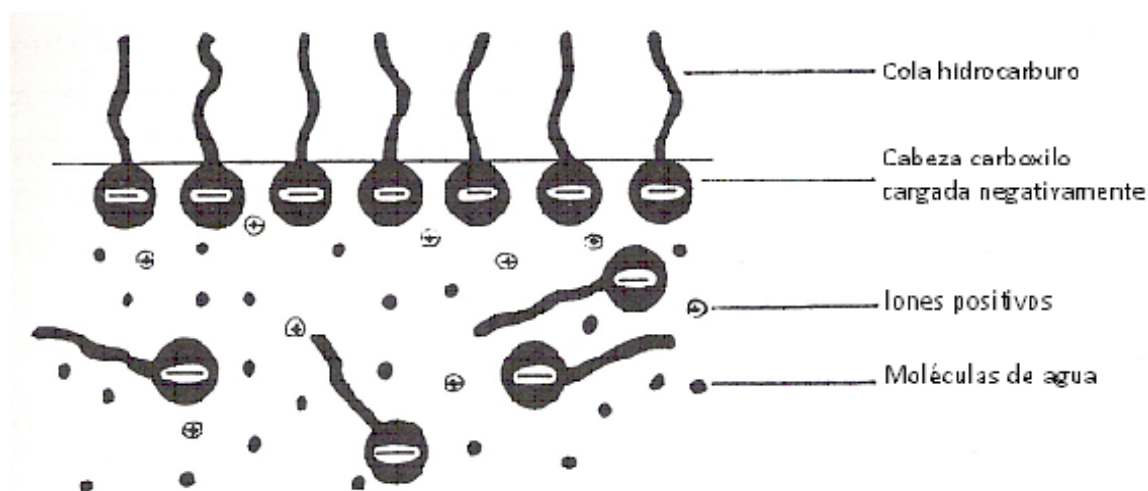


Figura 1.1: Estructura superficial de una solución jabonosa

## 1.1 Estructura molecular de las películas de jabón

Antes de entrar al estudio de las membranas de jabón propiamente dichas, necesitamos conocer algunas características de las soluciones jabonosas.

Las sustancias jabonosas tienen la notable propiedad de formar películas y burbujas estables. Esta propiedad es una consecuencia de la estructura superficial de la solución jabonosa y de la membrana de jabón. La estructura de un baño de solución jabonosa y una membrana de jabón consiste de una capa monomolecular de iones anfipáticos[5]. Estos son iones que tienen dos partes diferentes. A una parte le gusta estar rodeada de agua como resultado de la parte hidrofílica del ión y las moléculas de agua. La otra parte del ión es hidrofóbica, odia el agua, lo cual significa que a ésta la disgusta el ambiente acuoso que resulta de las magnitudes relativas de las fuerzas atractivas de las moléculas de agua entre sí y las fuerzas atractivas entre sí de las “colas” hidrocarburo comparadas con la atracción agua-“cola”.

El jabón ordinario es una sal sódica o un ácido graso. Tiene una “cabeza” carboxilo polar hidrofílica y una larga “cola” hidrofóbica consistente en una cadena de hidrocarburo. Las “cabezas” hidrofílicas de jabón que están adsorbidas en la superficie están rodeadas por moléculas de agua y iones. Sus “colas”, hidrofóbicas, están dirigidas hacia afuera de la superficie. Los iones anfipáticos en la superficie de la solución jabonosa o película pueden orientarse a sí mismos de manera que sus “cabezas” estén dentro del agua y sus “colas” fuera del agua (Fig.1.1) . El cuerpo del fluido en solución jabonosa o membrana contendrá también, en adición a las moléculas de agua y iones de metálicos, algunos iones anfipáticos. Un ejemplo de una molécula de jabón es el estearato de sodio,  $C_{17}H_{35}COO^-Na^+$ . La parte polar, hidrofílica, es el grupo  $COO^-$ , y la hidrofóbica, es la cadena de hidrocarburo  $C_{17}H_{35}$ . Los iones de sodio metálico positivos están dispersados a través del cuerpo del fluido en la solución jabonosa o película. Un ión anfipático surfactante típico ocupa un área de  $40 \text{ \AA}^2$  y

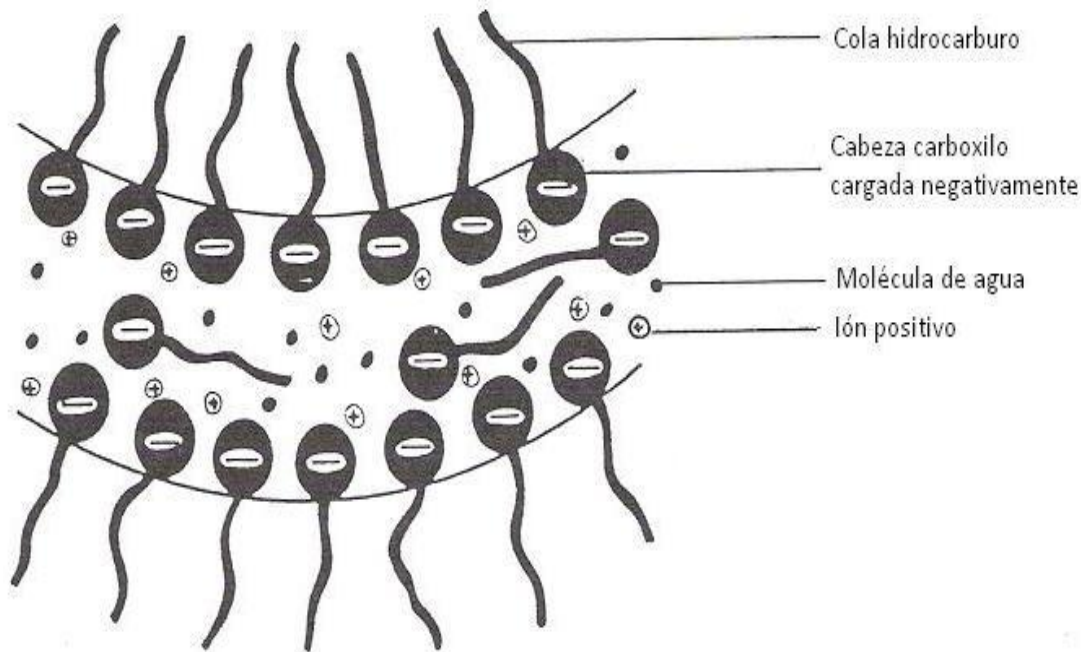


Figura 1.2: Estructura molecular de una membrana de jabón.

tiene una longitud de cerca de  $30 \text{ \AA}$ . La Fig. 1.2 muestra una película de jabón consistente en dos superficies de iones anfifáticos. Los iones de jabón anfifáticos son adsorbidos dentro de la superficie de la solución jabonosa como resultado de las interacciones hidrofóbicas cerca de la superficie de la solución jabonosa entre la cadena de hidrocarburo del ión y las moléculas de agua. Las cadenas de hidrocarburo emergen de la superficie líquida por un proceso en el cual las moléculas de agua empujan las cadenas de hidrocarburo fuera de la superficie por interacciones atractivas.

Algunos de los iones anfifáticos existirán en el cuerpo del fluido. Conforme incrementamos la concentración de estos iones, por la adición de moléculas de jabón, alcanzaremos una concentración crítica en la cual los iones en el cuerpo de fluido encontrarán esto energéticamente favorable para formar racimos. Los racimos de iones variarán en tamaño pero usualmente contienen al menos cincuenta iones. Estos grupos de iones contienen las “cabezas” hidrofílicas en el exterior del racimo y las “colas” hidrofóbicas dirigidas hacia el centro del racimo. De esta manera las “colas” hidrofóbicas son excluidas de la presencia de las moléculas de agua mientras que las “cabezas” hidrofílicas están en contacto con las moléculas de agua. Estos grupos de iones son conocidos como micelas (Fig. 1.3). Estos grupos de iones estarán altamente cargados y atraerán iones metálicos de carga opuesta. Consecuentemente la carga neta, resultante de la carga negativa en la micela y los iones metálicos positivos en la vecindad de la micela, será apreciablemente menor que la asociada con la suma de los iones anfifáticos individuales que abrazan la micela. La formación de micelas sólo ocurrirá si la concentración de la solución jabonosa alcanza un mínimo. Este valor mínimo es conocido

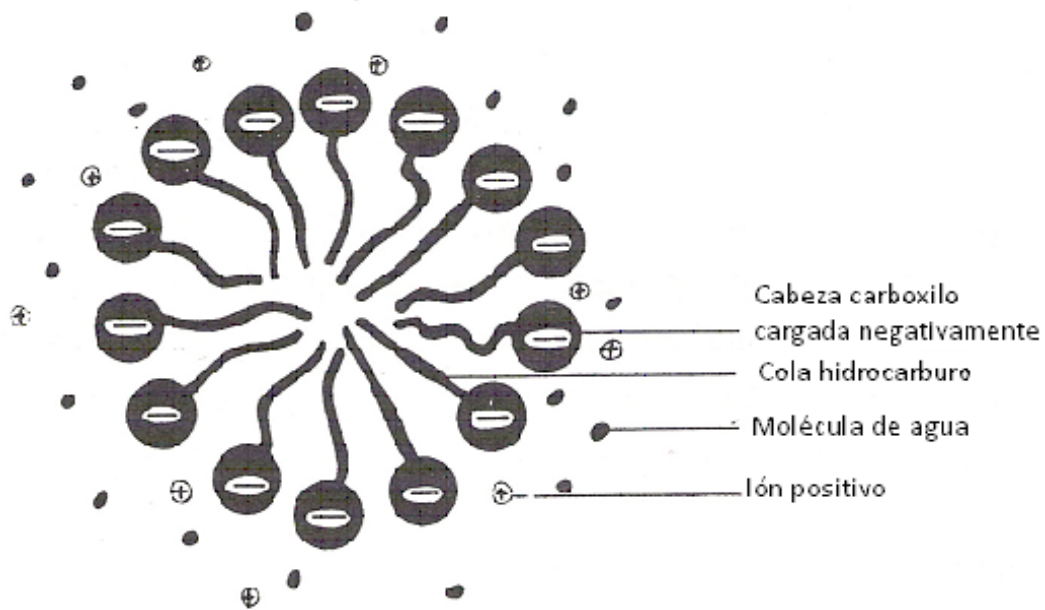


Figura 1.3: Una micela

como la concentración de micelación crítica, lo cual se abrevia como c.m.c. La densidad de los surfactantes en la superficie de una solución jabonosa varía apreciablemente con la concentración de la solución en el rango de cero a cerca de 0.1 c.m.c., pero permanece casi constante más allá de esa concentración. En este último rango la densidad de superficie es típicamente un ión anfifático por cada  $50 \text{ \AA}^2$ .

La tensión superficial de una solución jabonosa típicamente es de cerca de un tercio de la del agua, la cual tiene una tensión superficial de  $72.25 \text{ dinas por cm}$  a  $20^\circ\text{C}$ , y varía con la concentración,  $c$ , de la solución jabonosa. La Fig1.4. muestra la variación de la tensión superficial,  $\sigma$ , con la concentración,  $c$ . Ésta tiene el valor de  $c = 0$  para el agua destilada y decrece monótonamente hasta que alcanza su valor mínimo en la c.m.c. como está indicado en la Fig.1.4 .

La estabilidad de las membranas de jabón está determinada por los iones anfifáticos en la superficie. Si alteramos una película de jabón en su equilibrio de manera que el área de un elemento de película se incremente, la densidad superficial de los iones anfifáticos disminuirá. Esto es, el número de iones por unidad de área disminuirá y la superficie se comportará más como la superficie del agua. En consecuencia la tensión superficial del elemento superficial se incrementará porque la tensión superficial del agua es mayor que la de la solución jabonosa. Esta fuerza incrementada en la región restablecerá la superficie a su condición de equilibrio anterior.

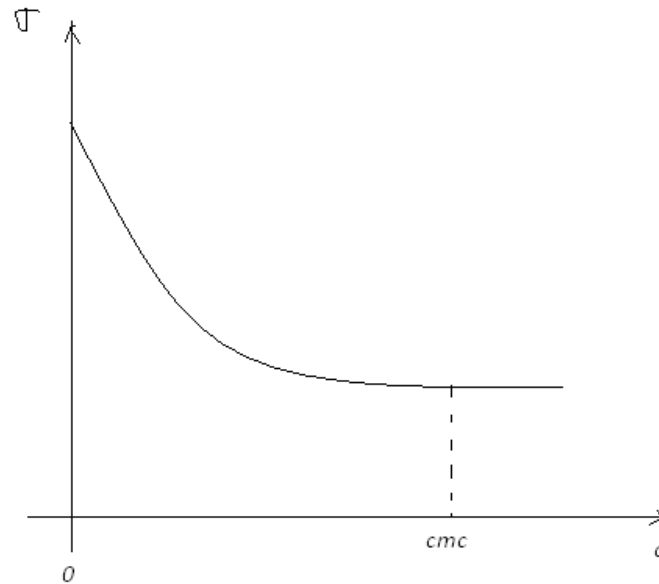


Figura 1.4: La variación de la tensión superficial,  $\sigma$ , con la concentración,  $c$ .

## 1.2 Soluciones Jabonosas para Películas y Burbujas

La duración de películas y burbujas de jabón puras es sensible a la presencia de impurezas, partículas de polvo, exceso de álcali cáustico o exceso de grasa. Consecuentemente es necesario que tengamos cuidado especial en la preparación de soluciones de jabón puras y la formación subsecuente de películas y burbujas. Esto, sin embargo, no es cierto para los detergentes sintéticos. Para estos últimos sólo debería utilizarse agua destilada para películas de jabón con larga duración.

La estabilidad y la duración de las membranas y las películas de jabón son afectadas por la evaporación del agua de la superficie, la humedad circundante, corrientes de aire, golpes y vibraciones[5]. También disminuye la vida de las burbujas de jabón el dióxido de carbono de la atmósfera. Estos factores pueden ser eliminados si controlamos el ambiente de la membrana o burbuja. Por ejemplo las películas y burbujas pueden ser producidas en un ambiente cerrado con una atmósfera que tenga una humedad saturada, para prevenir la evaporación, y estar libre de golpes, vibraciones, corrientes de aire y gases externos. Mediante la adición de glicerina a la solución podemos incrementar la duración de la película. Ésta tiene el efecto de reducir significativamente la evaporación y estabiliza la membrana. La película de jabón puro debería durar indefinidamente en un ambiente controlado. Esto no es cierto para todas las burbujas. Las burbujas contienen gas a una presión excesiva, por encima de la presión ambiental. Este gas saldrá a través de la burbuja una vez que la membrana haya adelgazado significativamente, con el resultado de que el radio de la burbuja disminuirá con el tiempo. El efecto es mayor para las burbujas más pequeñas las cuales contienen gas a mayor presión en exceso. Sir James Dewar produjo una burbuja con

un diámetro de 32 cm en un ambiente controlado la cual duró 108 d. Durante este período el diámetro disminuyó pocos centímetros debido al paso del gas a través de la membrana. Él produjo también un disco de película de jabón, de 19 cm de diámetro, el cual le duró cerca de tres años.

Desde el trabajo de Joseph Plateau muchos autores han producido recetas para películas y burbujas de jabón de larga duración. En el libro de J. J. Bikerman, y en los trabajos originales de Plateau, Boys, Dewar, Lawrence, etc., se puede encontrar un resumen de estas recetas[3]. Para propósitos de demostración es útil en ocasiones producir una solución jabonosa que formará películas y burbujas de jabón de larga duración al aire libre, sin precauciones especiales.

Podemos preparar una solución jabonosa conveniente usando agua más 1-2 por ciento de cualquier detergente líquido[5]. Dicha solución producirá burbujas de una duración aproximada de 15 s. Siempre debemos agitar fuertemente la solución antes de usarla y removerle las burbujas que estén en la superficie. Esta solución la podemos fabricar rápidamente en cantidades grandes o pequeñas. Si agregamos glicerina a la solución de jabón incrementamos la duración de las burbujas y películas de jabón. Esto incrementa de 15 segundos a minutos para soluciones con 5 por ciento de glicerina y se incrementa hasta horas para soluciones con 50 por ciento de glicerina. La solución siempre debe agitarse antes de usarse, si es posible con un agitador eléctrico. Si dichas membranas se producen en un ambiente cerrado pueden durar por días o semanas.

Existen muchos líquidos que son capaces de formar burbujas y películas los cuales no son jabones o detergentes sintéticos. Ellos no tienen una estructura molecular superficial que resulta de la adsorción de iones de jabón en la superficie de la solución. Ejemplos de tales líquidos son soluciones plásticas, vidrio líquido, y saponinas. Ellos producen membranas parecidas al hule. Una solución saponina, se parece mucho a una solución jabonosa y produce burbujas. Sin embargo la diferencia aparece cuando se extrae aire de la burbuja de saponina. Ésta no retiene su forma esférica y su piel se arrugará. Sin embargo, si se deja por algún tiempo retomarará su forma esférica.

### 1.3 Tensión superficial

Las moléculas cercanas a la superficie de un fluido puro tienen un ambiente diferente al de aquellas en el interior del fluido, como podemos ver en la (Fig. 1.5(a)). Una molécula en el interior del fluido experimentará fuerzas en todas direcciones debido a las moléculas que la rodean. La fuerza resultante sobre una tal molécula promediada, será cero. Las moléculas cercanas a la superficie experimentarán una fuerza más débil, de la región gaseosa encima de la superficie, si la región gaseosa fuera sustituida por fluido, ya que la densidad de la región gaseosa es mucho menor que la de el cuerpo del fluido. Consecuentemente tales moléculas experimentarán, en promedio, una fuerza que las jala hacia el cuerpo del fluido como indicamos en la Fig.1.5 (a). Esta fuerza tendrá el efecto de reducir el área de la superficie propiciando que la superficie cambie su forma, como en el caso de las gotas de agua que siempre toman la forma esférica. También tendrá el efecto de reducir la densidad

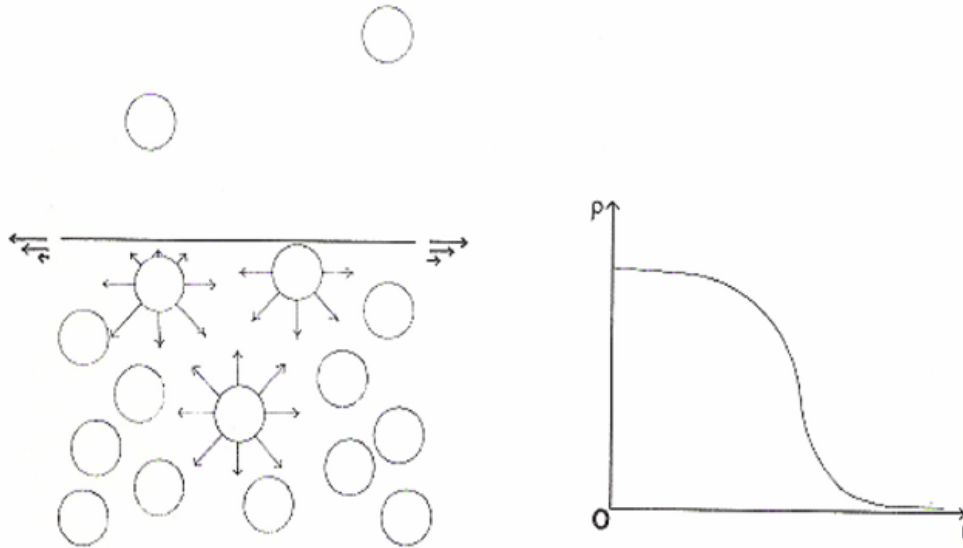


Figura 1.5: (a) Fuerzas actuando sobre las moléculas a diferentes profundidades. (b) Variación de la tensión superficial con la profundidad.

de el fluido en la región de la superficie. La Fig.1.5(b) nos muestra la variación en la densidad,  $\rho$ , de un fluido típico como una función de la distancia,  $r$ , medida perpendicular a la superficie desde la masa del fluido a la región gaseosa.

Una solución jabonosa consiste de moléculas de jabón y moléculas de agua. Cada molécula de jabón está formada a partir de la sal metálica de una gran cadena ácido-grasa molecular y se convierte en solución ionizada. Siendo el jabón estearato de sodio, los iones de sodio tienen una carga positiva y están dispersos a través de la solución. Los iones estearato, que están cargados negativamente, experimentan una fuerza promedio hacia la superficie. Algunos de ellos se acumularán en una capa; éstos son adsorbidos en la superficie. En esta superficie o surfactante, los iones tienen sus “cabezas” cargadas negativamente por debajo de la superficie con las “colas” hidrocarburo fuera de la superficie (Fig. 1.6). Esta es la configuración energéticamente favorable para los iones en la superficie. Las cadenas de hidrocarburo son empujadas hacia la superficie por las moléculas de agua. Algunos de los iones estearato permanecerán en el cuerpo del fluido.

Una consecuencia importante de la variación en el ambiente de las moléculas en la región de la superficie del fluido, en ambos, los fluidos puros y las superficies jabonosas, es la presencia de una fuerza de superficie macroscópica localizada dentro de un espesor de cerca de un átomo de la superficie. Para la mayoría de propósitos es justificable que consideremos ésta como una tensión superficial, ésta es una fuerza por unidad de longitud,  $\sigma$ , en una “membrana” de espesor despreciable en la superficie del fluido.

Una película de jabón consiste de dos de tales superficies separadas por una fina capa

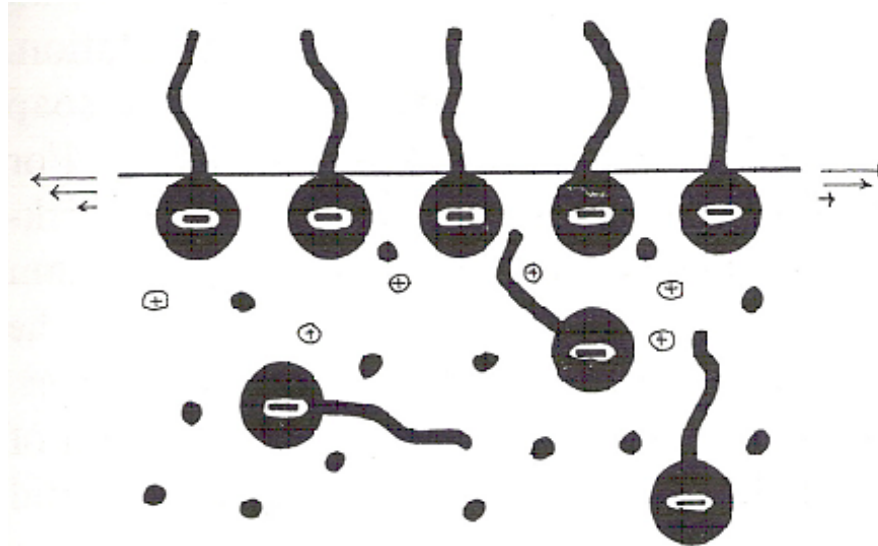


Figura 1.6: Iones negativos de jabón en la superficie de una solución.

de fluido que varía en espesor de  $2 \times 10^5 \text{ \AA}$  a  $50 \text{ \AA}$  ( $10 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$ ). Esto varía desde 50 veces la longitud de onda de la luz visible a distancias de pocos átomos. El grosor más grande ocurrirá inmediatamente después de la formación de la película. Una vez que la película se ha formado comienza a adelgazarse. Cada superficie está compuesta de iones de jabón los cuales están separados, ampliamente por moléculas de agua. El agua sobrante será expulsada de la película mediante varios procesos de drenado. El grosor de la película disminuirá hasta alcanzar un espesor final de equilibrio, suponiendo que la película no se rompe. Ambas superficies de la película tendrán una tensión superficial asociada a ellas.

Decimos que la superficie de un fluido se encuentra en un estado de tensión uniforme si dicha superficie satisface las condiciones siguientes:

- (a) La tensión superficial debe ser perpendicular a cualquier línea dibujada en la superficie y tiene la misma magnitud para todas las direcciones de la línea (Fig. 1.7).
- (b) La tensión superficial debe tener el mismo valor en todos los puntos de la superficie.

En el caso de una película de jabón, con dos superficies, es conveniente que introduzcamos el término tensión pelicular,  $\sigma_p$ , el cual es la fuerza por unidad de longitud de la película y es igual al doble de la tensión superficial.

Una pompa de jabón debe ser elástica. Está formada por una delgada capa de líquido que posee una superficie interna y una externa. Su elasticidad la podemos probar de muchas maneras. Quizás la manera más sencilla sea que atemos un hilo algo flojo a través de un aro e introduzcamos luego éste en agua jabonosa. Cuando sacamos el aro de la solución queda una película extendida sobre él en la cual se mueve el hilo con toda libertad. Pero si rompemos la película de un lado, el hilo es inmediatamente atraído por ella hacia el otro

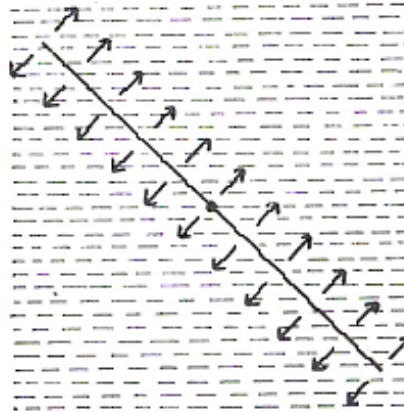


Figura 1.7: La tensión superficial es perpendicular a cualquier recta dibujada sobre la superficie.

tan lejos como es posible y ahora está tenso ( Fig. 1.8(c). Notaremos también que el hilo es parte de una circunferencia perfecta, porque esa curva hace que el espacio no ocupado por la película sea máximo, por consiguiente, el otro, donde se encuentra la película, sea mínimo.

Realicemos otro experimento con un hilo que es doble en una pequeña zona central. Si rompemos la película entre los hilos, éstos se separan inmediatamente y van a formar un círculo perfecto ( Fig. 1.8(b) ) porque ésta es la curva que hace máximo el espacio entre ellos y reduce por lo tanto a un mínimo el espacio exterior (que es el que ocupa la membrana de jabón). Advertiremos así mismo que, aunque el círculo no permitirá que se le deforme, puede moverse dentro del aro con entera libertad, porque tal movimiento no cambia para nada el espacio exterior a él. Por consiguiente, tenemos el siguiente

**Teorema 1.1** *Una membrana de jabón toma una forma tal que minimiza el área de su superficie.*

## 1.4 Ecuación Laplace-Young.

Consideremos la Fig.1.9

Si  $l$  es la longitud del alambre deslizante (Fig.1.9 ), puesto que la película tiene dos superficies, la longitud total a lo largo de la cual actúa la fuerza superficial es  $2l$ . La tensión superficial  $\sigma$  en la película es entonces  $\sigma = F/2l$ [16].

Otro punto de vista útil en relación con los efectos de superficie es el siguiente: supongamos que el alambre de la Fig. 1.9 es desplazado hacia la derecha una distancia  $dx$  mediante una fuerza  $F$ . El trabajo realizado es  $W = Fdx$ , y a consecuencia de este trabajo el área de la superficie ha aumentado en  $2l dx$  [16]. Por tanto el trabajo realizado por unidad de área al aumentar ésta es

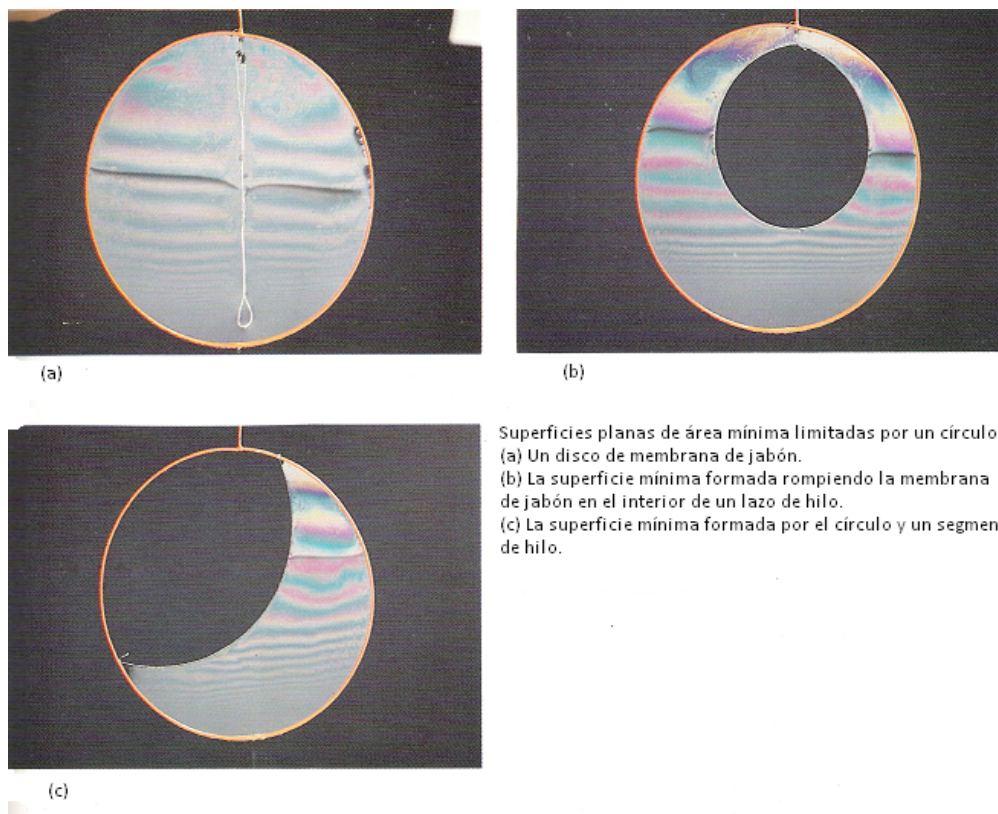


Figura 1.8: Elasticidad de una membrana de jabón.

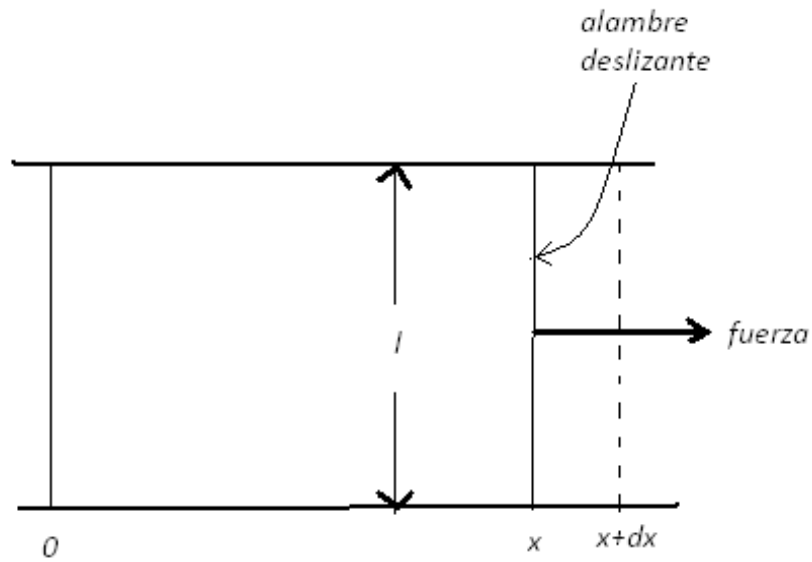


Figura 1.9: Membrana de jabón en un marco de alambre, con un lado deslizante.

$$\frac{\text{Trabajo}}{\text{incremento de área}} = \frac{W}{\delta A} = \frac{F dx}{2l dx} = \frac{F}{2l} = \sigma$$

de donde concluimos que

$$W = \sigma \delta A.$$

Apliquemos esto a la expansión de la membrana  $ABCD$  que bajo la acción de una presión  $\rho$ , es trasladada a la posición  $A'B'C'D'$ , como se aprecia en la Fig. 1.10. .

El trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= Fd \\ &= \rho A \delta u \\ &= \rho xy \delta u. \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\sigma \delta A = \rho xy \delta u. \tag{1.2}$$

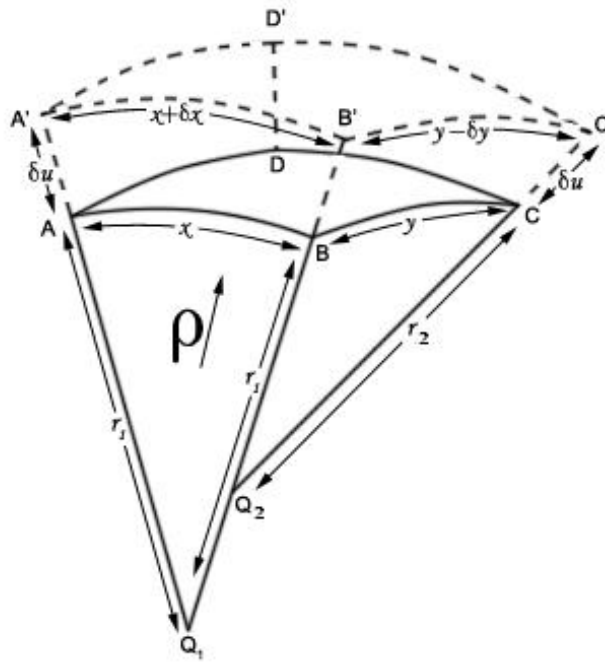


Figura 1.10: Expansión de una película de jabón .

Pero

$$\delta A = (x + \delta x) (y + \delta y) - xy.$$

De la Fig.1.10 tenemos

$$\frac{x + \delta x}{r_1 + \delta u} = \frac{x}{r_1} \quad \text{y} \quad \frac{y + \delta y}{r_2 + \delta u} = \frac{y}{r_2}.$$

De donde, despreciando los términos de segundo orden, nos queda

$$\delta A = xy \left(1 + \frac{\delta u}{r_1}\right) \left(1 + \frac{\delta u}{r_2}\right) - xy = xy \left(\frac{\delta u}{r_1} + \frac{\delta u}{r_2}\right).$$

Sustituyendo en la Ec1.2, obtenemos

$$\rho xy \delta u = \sigma xy \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

por lo tanto

$$\rho = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad (1.3)$$

que es la ecuación Laplace-Young.

En esta derivación tomamos dos direcciones perpendiculares en la superficie de la membrana, aproximadas las curvas frontera por círculos de radios  $r_1$  y  $r_2$ . Como la curvatura de un círculo es simplemente el recíproco de su radio, las curvaturas normales de estas curvas límite son  $1/r_1$  y  $1/r_2$ .

Si definimos la *curvatura media*  $H$  por la relación

$$2H = k_1 + k_2$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas normales de la membrana, entonces la ec.1.3 toma la forma

$$\rho = 2\sigma H$$

donde  $H$  es la curvatura media de la membrana.

## Capítulo 2

# Antecedentes matemáticos para el estudio de las membranas de jabón

### 2.1 Superficies parametrizadas

Con el fin de estudiar las membranas de jabón matemáticamente, necesitamos describirlas en términos matemáticos; y este es nuestro primer objetivo. Comencemos con un ejemplo familiar. Consideremos una esfera de radio  $R$  con ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . No debemos pensar que sólo por estar en  $\mathbb{R}^3$ , la esfera tiene tres dimensiones. La superficie de la Tierra es una esfera y sabemos exactamente dónde estamos sobre ella conociendo nuestra latitud y longitud. Una superficie que puede ser descrita con dos parámetros debe ser 2-dimensional. De manera semejante, si cortamos a lo largo un cilindro de papel de baño y lo desenrollamos hasta que quede plano sobre la mesa, vemos que realmente el cilindro es 2-dimensional. De aquí que, cuando queremos entender una superficie, requerimos dos parámetros (o coordenadas) para describirla. Veamos cómo se hace esto.

Sea  $D$  que denota un conjunto abierto en el plano  $\mathbb{R}^2$ . El conjunto abierto  $D$  será típicamente un disco abierto o un rectángulo abierto. Sea

$$\mathbf{x} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)),$$

que denota un mapeo de  $D$  en el 3-espacio. Este mapeo recibe el nombre de *parametrización* y las  $x^i(u, v)$  se llaman funciones componentes de la parametrización  $\mathbf{x}$ . Podemos hacer cálculo de una variable a la vez sobre  $\mathbf{x}$  por diferenciación parcial. Fijemos  $v = v_0$  y dejemos que  $u$  varíe.

Entonces,  $\mathbf{x}(u, v_0)$  depende de un sólo parámetro, y es, por lo tanto, una curva. Ésta es llamada una *curva  $u$ -paramétrica*. De manera semejante, si fijamos  $u = u_0$ , entonces la curva  $\mathbf{x}(u_0, v)$  es una *curva  $v$ -paramétrica*. Ambas curvas pasan por  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  en  $\mathbb{R}^3$ , y los vectores tangentes para las curvas  *$u$ -paramétricas* y  *$v$ -paramétricas* están dados por la diferenciación de las funciones componentes de  $\mathbf{x}$  con respecto de  $u$  y de  $v$  respectivamente. Escribimos

$$\mathbf{x}_u = \left( \frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u} \right) \quad y \quad \mathbf{x}_v = \left( \frac{\partial x^1}{\partial v}, \frac{\partial x^2}{\partial v}, \frac{\partial x^3}{\partial v} \right).$$

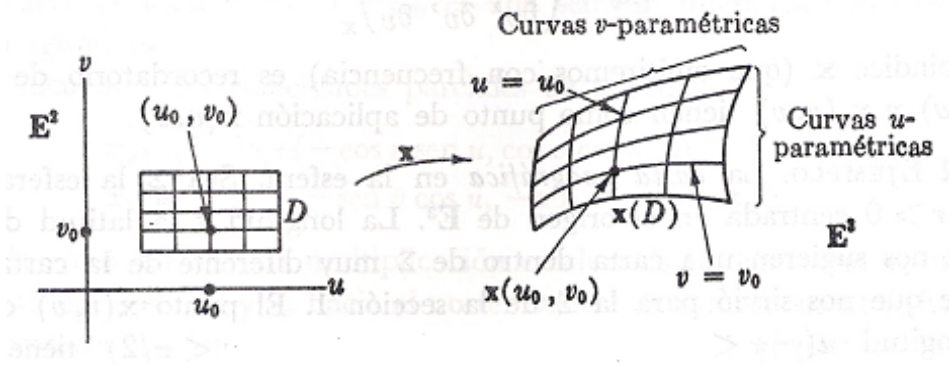


Figura 2.1: Parametrización de una superficie

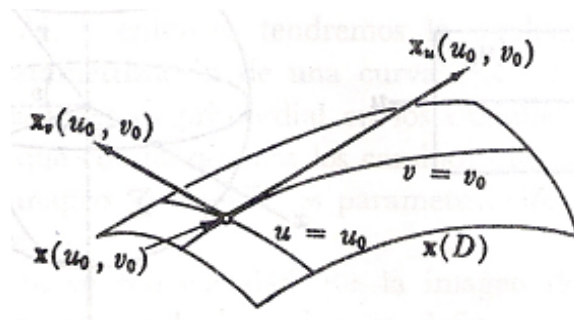


Figura 2.2: Vectores tangentes a una superficie.

Podemos evaluar estas derivadas parciales en  $(u_0, v_0)$  para obtener los vectores tangentes o vectores velocidad, de las curvas paramétricas en ese punto,  $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  y  $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ . Por supuesto, para obtener las coordenadas reales sobre una superficie, necesitamos dos propiedades: primero,  $\mathbf{x}$  debe ser uno a uno (aunque podemos debilitar ligeramente esta condición para admitir algunas auto-intersecciones de una superficie); segundo,  $\mathbf{x}$  nunca debe tener a  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  en la misma dirección porque esto destruye la 2-dimensionalidad. El siguiente lema proporciona una prueba sencilla para la segunda propiedad:

**Lema 2.1** *Los vectores tangentes  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son linealmente dependientes si y sólo si  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 0$ . (Recordemos que dos vectores son linealmente dependientes si uno es un múltiplo escalar del otro.)*

**Prueba.** Sabemos que  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$  se calcula por medio del determinante

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u^1 & x_u^2 & x_u^3 \\ x_v^1 & x_v^2 & x_v^3 \end{pmatrix}$$

Además,  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son linealmente dependientes exactamente cuando los dos últimos renglones del determinante son múltiplos uno del otro. Por la propiedad usual de los determinantes, esto sucede cuando el determinante ( y en consecuencia el producto cruz ) es cero. ■

**Lema 2.2** *Sea  $M$  una superficie. Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{x}(D) \subseteq M$  es una curva suave en  $\mathbb{R}^3$  la cual está contenida en la imagen de una parametrización  $\mathbf{x}$  sobre  $M$ , entonces para funciones suaves únicas  $u(t), v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)).$$

**Prueba.** Tomemos  $\mathbf{x}^{-1}\alpha(t) = (u(t), v(t))$ . Entonces

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}\alpha(t)) = \mathbf{x}(u(t), v(t)).$$

Con el fin de ver que  $u(t)$  y  $v(t)$  son únicas, supongamos que  $\alpha = \mathbf{x}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$  para otras dos funciones  $\bar{u}(t)$  y  $\bar{v}(t)$ . Nótese que podemos suponer que  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  están definidas sobre  $I$  reparametrizándolas. Entonces

$$(u(t), v(t)) = \mathbf{x}^{-1}\alpha(t) = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{x}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t)).$$

■

Entonces, para estudiar una curva sobre una superficie suave, podemos buscar las funciones de una variable  $u(t)$  y  $v(t)$ . Un vector  $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^3$  es *tangente a  $M$  en  $p \in M$*  si  $\mathbf{v}_p$  es el vector velocidad de alguna curva sobre  $M$ . Esto es, existe alguna  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}_p$ . Usualmente escribimos  $\mathbf{v}$  en lugar de  $\mathbf{v}_p$ . Entonces, el *plano tangente a  $M$  en  $p$*  está definido como

$$T_p(M) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ es tangente a } M \text{ en } p\}.$$

Los vectores tangentes  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  están en  $T_p(M)$  para  $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ . El siguiente resultado dice que *todo vector tangente consta de una (única) combinación lineal de  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$* . De aquí que,  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  forma una *base* para el espacio vectorial  $T_p(M)$ .

**Lema 2.3** *Un vector  $\mathbf{v}$  está en  $T_p(M)$  si y sólo si  $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{x}_u + \lambda_2\mathbf{x}_v$ , donde  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  son evaluadas en  $(u_0, v_0)$ .*

**Prueba.** Primero supongamos que  $\alpha$  es una curva con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Vimos anteriormente que  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , entonces la regla de la cadena da  $\alpha' = \mathbf{x}_u(du/dt) + \mathbf{x}_v(dv/dt)$ . Ahora,  $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(u(0), v(0))$ , por lo tanto  $u(0) = u_0$  y  $v(0) = v_0$  (ya que  $\mathbf{x}$  es uno a uno) y

$$\mathbf{v} = \alpha'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \frac{du}{dt}(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \frac{dv}{dt}(0).$$

En consecuencia,  $\lambda_1 = (du/dt)(0)$  y  $\lambda_2 = (dv/dt)(0)$ .

Ahora supongamos que  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{x}_u + \lambda_2 \mathbf{x}_v$  (donde  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  están evaluados en  $(u_0, v_0)$ ). Debemos encontrar una curva sobre  $M$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Definamos esta curva usando la parametrización  $\mathbf{x}$  dada por

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2).$$

Entonces  $\alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0) = p$  y

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \mathbf{x}_u(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2) \frac{d(u_0 + t\lambda_1)}{dt} \\ &\quad + \mathbf{x}_v(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2) \frac{d(v_0 + t\lambda_2)}{dt} \\ &= \mathbf{x}_u(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2) \lambda_1 + \mathbf{x}_v(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2) \lambda_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\alpha'(0) = \mathbf{x}_u \lambda_1 + \mathbf{x}_v \lambda_2$ . ■

### Ejemplo 2.1 Parametrización de superficies

(1) *Parametrización de Monge.* La gráfica de una función real de dos variables  $z = f(x, y)$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Para ver esto, definamos una parametrización por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

donde  $u$  y  $v$  están definidas en el dominio de  $f$ . Entonces  $\mathbf{x}_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$  y  $\mathbf{x}_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ . De ahora en adelante, cuando sea conveniente, denotaremos las derivadas parciales de las funciones por

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = f_v.$$

Notemos además que nunca se pierde la 2-dimensionalidad, ya que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} = (-f_u, -f_v, 1) \neq 0.$$

(2) *Coordenadas geográficas.* Sea  $\Sigma$  una esfera de radio  $r$  (centrada en  $(0, 0, 0)$  por conveniencia), como se observa en la Figura 2.3. Para un punto a una distancia  $r$  del origen, dibujemos una línea de  $(0, 0, 0)$  al punto. El parámetro  $v$  (es decir, la latitud), que

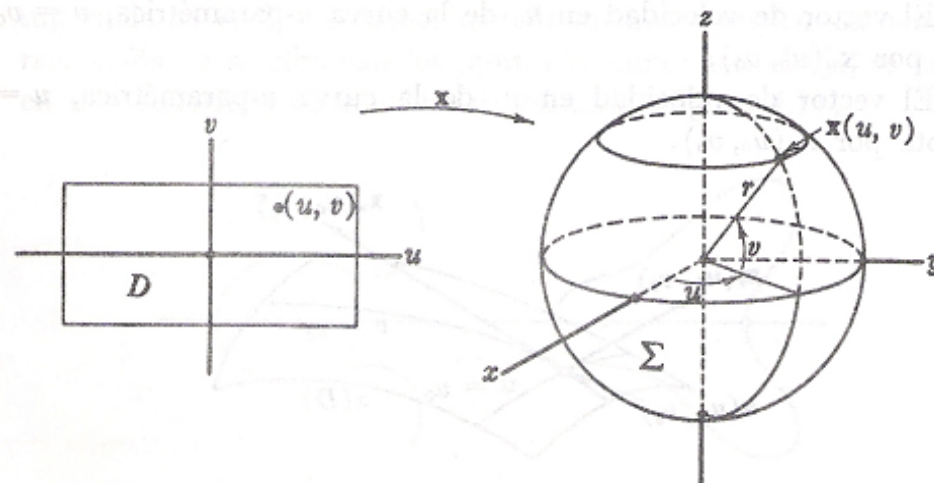


Figura 2.3: Coordenadas geográficas

tiene variación  $-\pi/2 < v < \pi/2$ , mide el ángulo (en radianes) de esta línea hasta el plano  $xy$ . Si la línea es proyectada sobre el plano  $xy$ , entonces  $u$  (la longitud con  $0 \leq u < 2\pi$ ) mide el ángulo de la proyección a la parte positiva del eje- $x$ .

Entonces, las coordenadas  $xyz$  del punto son

$$(r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v) = \mathbf{x}(u, v)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v). \end{aligned}$$

Más aún, calculamos su producto cruz como

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos v).$$

Nótese que  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = r^2 \cos v$ . También se puede usar la notación  $S^2(r)$  para la esfera de radio  $r$  centrada en el origen y simplemente  $S^2$  para la esfera de radio 1 centrada en el origen.

(3) *Superficies de revolución.* Supongamos que  $C$  es una curva en el plano  $xy$  y está parametrizada por  $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$ , como se observa en la Figura 2.4. Giremos esta curva perfil  $C$  alrededor del eje- $x$ . Las coordenadas de un punto típico  $P$  pueden encontrarse como sigue. La coordenada- $x$  es la de la curva misma ya que fue rotada alrededor del eje  $x$ . Si  $v$  denota el ángulo de rotación a partir del plano  $xy$ , entonces la coordenada  $y$  queda como  $y \cos v = h(u) \cos v$  y la coordenada- $z$  se incrementa hasta  $h(u) \sin v$ .

Por lo tanto, una parametrización puede estar definida por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v).$$

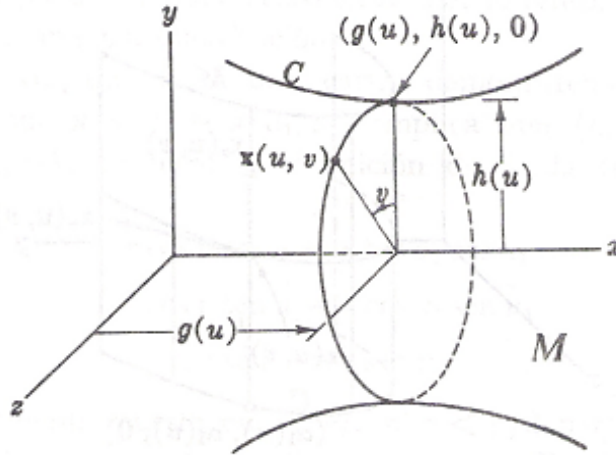


Figura 2.4: Superficie de revolución.

Si la giramos alrededor de ejes diferentes, entonces las coordenadas permutan. Por ejemplo, una curva parametrizada  $(h(u), 0, g(u))$  en el plano  $xz$  girada alrededor del eje  $z$  da una superficie de revolución  $(h(u) \cos v, h(u) \sin v, g(u))$ . En general,  $g(u)$  mide la distancia a lo largo del eje de revolución y  $h(u)$  la distancia al eje de revolución. La mejor situación es, por supuesto, cuando  $g(u) = u$ , porque entonces es fácil ver dónde estamos sobre la superficie en términos del parámetro  $u$ . Las curvas sobre la superficie las cuales son círculos formados por la revolución de un punto alrededor del eje se llaman *paralelos*. Las curvas que son exactamente iguales a la curva original (pero giradas) se llaman *meridianos*.

(4) *El helicoides*. Tomemos una hélice  $\alpha(v) = (a \cos v, a \sin v, bv)$  y dibujemos una línea a través de  $(0, 0, bv)$  y  $(a \cos v, a \sin v, bv)$ , como se observa en la Figura 2.5.

La superficie barrida por esta línea ascendente y rotatoria es un helicoides. La línea requerida está dada por  $(0, 0, bv) + u(a \cos v, a \sin v, o)$ . Por lo que una parametrización para el helicoides está dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, au \sin v, bv).$$

El helicoides es un ejemplo de una superficie reglada.

## 2.2 Curvatura normal

Como el producto cruz de dos vectores es normal a cada uno de ellos, siempre podemos encontrar un vector normal al plano tangente de una superficie  $M$  parametrizada por  $\mathbf{x}(u, v)$  definiendo

$$U = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}.$$

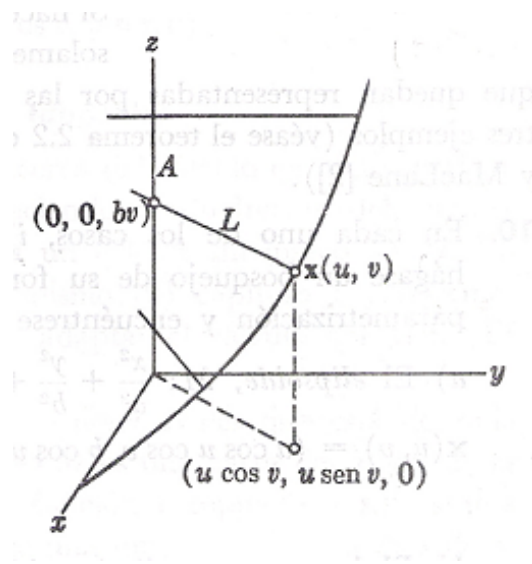


Figura 2.5: El helicoides.

La *curvatura normal en la dirección tangente*  $\mathbf{w}$  está definida como sigue. Tomemos el plano determinado por el vector unitario elegido  $\mathbf{w}$  y el vector unitario normal  $U$ , denotemos  $P = \text{Plano}(\mathbf{w}, U)$ , e intersectemos este plano con la superficie  $M$ . La intersección es una curva  $\alpha(s)$  (la cual podemos suponer tiene velocidad unitaria). Para curvas de velocidad unitaria, la curvatura de la curva es detectada por la aceleración de la curva (físicamente pensemos en la segunda ley de Newton), entonces la curvatura en la dirección normal debería de ser la proyección de la aceleración sobre la dirección normal. Véase la Figura 2.6.

Veamos algunos resultados.

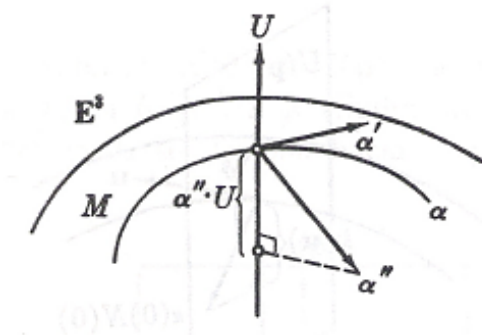


Figura 2.6: Curvatura normal.

**Definición 2.1** Para un vector tangente unitario  $\mathbf{w}$ , la curvatura normal en la dirección  $\mathbf{w}$  se define como

$$k(\mathbf{w}) = \alpha'' \cdot U,$$

donde las derivadas están tomadas a lo largo de la curva con respecto a  $s$ .

**Ejemplo 2.2** Un círculo de radio  $r$  tiene una curvatura  $1/r$  porque para una parametrización  $\alpha(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r))$ , calculamos  $\alpha''(s) = (1/r)(-\cos(s/r), -\sin(s/r))$  y las fórmulas de Frenet de la geometría de la curva nos dicen que, como  $\alpha$  es una curva de velocidad unitaria,  $\alpha'' = kN$ , donde  $N$  es la normal unitaria de  $\alpha$ . Comparando las fórmulas éstas muestran que la curvatura de  $\alpha$  es  $k = 1/r$ . Para una superficie  $M$  con normal  $U$ , si tomamos el plano  $P$  determinado por  $U$  y un vector tangente  $\mathbf{w}$  (en  $x_0$ ) y hacemos que  $\sigma$  denote la curva formada por  $P \cap M$ , entonces puede demostrarse que  $k(\mathbf{w}) = k_{\sigma(0)}$  (donde  $\sigma(0) = x_0$ ). Si entonces tomamos una parte suficientemente pequeña de  $\sigma$  cercana a  $x_0$ , podemos aproximar  $\sigma$  a  $x_0$  mediante un círculo de radio  $1/k_{\sigma(0)}$ . En consecuencia, la curvatura normal siempre puede ser vista como el recíproco del radio de algún pequeño círculo el cual se aproxima a la curvatura de  $M$  en una dirección particular. Esto justifica nuestra aproximación en la deducción de la ecuación de Laplace-Young.

**Lema 2.4** Si  $\alpha$  es una curva en  $M$ , entonces  $\alpha'' \cdot U = -\alpha' \cdot U'$ .

**Prueba.** Sabemos que  $\alpha'$  es un vector tangente y  $U$  es normal al plano tangente, entonces  $\alpha' \cdot U = 0$ . Diferenciando ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$(\alpha' \cdot U)' = 0$$

$$\alpha'' \cdot U + \alpha' \cdot U' = 0$$

$$\alpha'' \cdot U = -\alpha' \cdot U'.$$

■

**Nota 2.5** Nuevamente, las derivadas están tomadas a lo largo de la curva con respecto a  $s$ . Para tomar  $U'$ , nuevamente usamos la regla de la cadena para obtener

$$U' = U_u u' + U_v v' \text{ con } u' = \frac{du}{ds}, v' = \frac{dv}{ds}.$$

Interpretamos  $\alpha'' \cdot U$  como la componente de la aceleración debida al curvamiento de  $M$ . Por supuesto, suponemos que  $\alpha$  tiene velocidad unitaria de manera que la magnitud de  $\alpha'$  no afecta nuestras medidas. Por el Lema 2.4 y la Nota 2.5, tenemos

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{w}) &= -\alpha' \cdot U' \\
&= -(\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (U_u u' + U_v v') \\
&= -\mathbf{x}_u \cdot U_u u'^2 - (\mathbf{x}_v \cdot U_u + \mathbf{x}_u \cdot U_v) u' v' - \mathbf{x}_v \cdot U_v v'^2 \\
&= l u'^2 + 2m u' v' + n v'^2,
\end{aligned}$$

donde los coeficientes  $l$ ,  $m$  y  $n$  están dados por[1]

$$l = -\mathbf{x}_u \cdot U_u, \quad 2m = -(\mathbf{x}_v \cdot U_u + \mathbf{x}_u \cdot U_v), \quad n = -\mathbf{x}_v \cdot U_v. \quad (2.1)$$

Éstos son los coeficientes de la *segunda forma fundamental*. La *primera forma fundamental* sólo describe cómo la superficie distorsiona longitudes de sus medidas usuales en  $\mathbb{R}^3$ . Precisamente, si  $\alpha$  es una curva de velocidad unitaria con vector tangente  $\alpha'$ , entonces  $1 = |\alpha'|^2 = \alpha' \cdot \alpha'$  y tenemos

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha' \cdot \alpha' \\
&= (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \\
&= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u u'^2 + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) u' v' + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v v'^2 \\
&= E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2,
\end{aligned}$$

donde los coeficientes  $E$ ,  $F$  y  $G$  se llaman los coeficientes de la *métrica* y están dados por[1]

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$

Ahora tomemos dos vectores unitarios perpendiculares cualesquiera  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$  y encontremos la curvatura normal de cada uno (denotadas por  $k_1$  y  $k_2$ ) usando curvas respectivas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  con parámetros respectivos  $u_1(s)$ ,  $v_1(s)$  y  $u_2(s)$ ,  $v_2(s)$ . Entonces tenemos las ecuaciones (usando  $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \alpha'_1 \cdot \alpha'_2 = 0$  para la última)

$$k_1 + k_2 = l(u_1'^2 + u_2'^2) + 2m(u_1'v_1' + u_2'v_2') + n v_1'^2 + v_2'^2 \quad (2.2)$$

$$1 = E u_1'^2 + 2F u_1' v_1' + G v_1'^2, \quad (2.3)$$

$$1 = E u_2'^2 + 2F u_2' v_2' + G v_2'^2, \quad (2.4)$$

$$0 = E u_1' u_2' + F(u_1' v_2' + u_2' v_1') + G v_1' v_2'. \quad (2.5)$$

## 2.3 Curvatura media

Usando los resultados de la curvatura normal anteriores, podemos precisar el tipo de curvatura que juega un rol definitivo en el estudio matemático de las películas de jabón.

**Definición 2.2** Definimos la función curvatura media  $H$  por la relación

$$2H = k_1 + k_2,$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas normales asociadas a dos vectores tangentes perpendiculares cualesquiera.

Como está establecida, la curvatura media (o, *promedio*) podría no depender sólo del punto sobre  $M$ , sino de las direcciones particulares escogidas. Demostraremos que éste no es el caso desarrollando la fórmula de la curvatura en términos únicamente de los coeficientes  $E, F, G, l, m$ , y  $n$ . Haremos esto utilizando las ecuaciones (2.2)-(2.5) anteriores junto con algo de variable compleja.

Denotemos  $\sqrt{-1}$  por  $i$  (de manera que  $i^2 = -1$ ) y el campo de los números complejos por  $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Los números complejos se multiplican como polinomios[6]. Esto es, si  $z = x + iy$  y  $w = a + ib$ , entonces

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + iy)(a + ib) \\ &= xa + xcb + iya + iyib \\ &= xa - yb + i(xb + ya). \end{aligned}$$

El **complejo conjugado** de  $z = x + iy$  es  $\bar{z} = x - iy$ . El *módulo* de un número complejo  $z = x + iy$  es  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ . Entonces, con este poco de álgebra en mente, hagamos las siguientes definiciones:

$$p = u'_1 + iu'_2 \quad \text{y} \quad q = v'_1 + iv'_2.$$

Entonces podemos calcular

$$\begin{aligned} \bar{p} &= u'_1 - iu'_2 \\ \bar{q} &= v'_1 - iv'_2 \\ p\bar{q} &= u'_1v'_1 + u'_2v'_2 + i(u'_2v'_1 - u'_1v'_2), \\ \bar{p}q &= u'_1v'_1 + u'_2v'_2 - i(u'_2v'_1 - u'_1v'_2), \\ \frac{1}{2}(p\bar{q} + \bar{p}q) &= u'_1v'_1 + u'_2v'_2, \\ pq &= u'_1v'_1 - u'_2v'_2 + i(u'_2v'_1 + u'_1v'_2), \\ \bar{p}\bar{q} &= u'_1v'_1 - u'_2v'_2 - i(u'_2v'_1 + u'_1v'_2), \\ p^2 &= u_1'^2 - u_2'^2 + 2iu'_1u'_2, \\ q^2 &= v_1'^2 - v_2'^2 + 2iv'_1v'_2. \end{aligned}$$

De estos cálculos obtenemos, de (2.2)

$$2H = lp\bar{p} + m(p\bar{q} + \bar{p}q) + nq\bar{q}, \quad (2.6)$$

y, sumando (2.3) y (2.4),

$$2 = Ep\bar{p} + F((p\bar{q} + \bar{p}q) + Gq\bar{q}. \quad (2.7)$$

Más aún, tenemos

$$\begin{aligned}
 Ep^2 + 2Fpq + Gq^2 &= E(u_1'^2 - u_2'^2 + 2iu_1'u_2') + 2F(u_1'v_1' - u_2'v_2' \\
 &\quad + i(u_2'v_1' + u_1'v_2')) + G(v_1'^2 - v_2'^2 + 2iv_1'v_2') \\
 &= 2i(Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2') + Eu_1'^2 \\
 &\quad + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2 - (Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2) \\
 &= 0 + 1 - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

por (2.3)-(2.5) anteriores. Entonces, obtenemos la ecuación cuadrática

$$E\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2F\left(\frac{p}{q}\right) + G = 0$$

que tiene las soluciones

$$p = \left(-\frac{E}{F} + i\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E}\right)q, \quad \bar{p} = \left(-\frac{E}{F} - i\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E}\right)\bar{q}.$$

Tomando en cuenta estos valores, podemos ver que

$$p\bar{p} = \frac{G}{E}q\bar{q} \quad \text{y} \quad p\bar{q} + \bar{p}q = -\frac{2F}{E}q\bar{q}.$$

Ahora sustituyamos estas cantidades en (2.6) y (2.7) anteriores. Primero, de (2.7) obtenemos (después de sustituir las  $p\bar{a}'s$ )

$$2 = Gq\bar{q} - \frac{2F^2}{E} + Gq\bar{q} = \left(2G - \frac{2F^2}{E}\right)q\bar{q}.$$

lo cual da

$$q\bar{q} = \left(\frac{E}{EG - F^2}\right).$$

Ahora, sustituyendo esto en (2.6) para  $q\bar{q}$  después de sustituir  $p\bar{p}$  y  $p\bar{q} + \bar{p}q$  para obtener

$$\begin{aligned}
 2H &= \left(l\frac{G}{E} + m\frac{2F}{E} + n\right)q\bar{q} \\
 &= \left(\frac{Gl - 2Fm + En}{E}\right)\left(\frac{E}{EG - F^2}\right) \\
 &= \frac{En + Gl - 2Fm}{EG - F^2},
 \end{aligned}$$

por lo que la curvatura media está dada por

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}.$$

Notemos que esta fórmula *no depende* de los vectores originales  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$ , por eso se puede escoger cualquier par de vectores unitarios perpendiculares para calcular la curvatura media. En nuestra derivación de la ecuación de Laplace-Young, tomamos dos direcciones perpendiculares en la superficie de la membrana de jabón, aproximadas las curvas límite por círculos de radios  $R_1$  y  $R_2$  y expandidas hacia afuera a lo largo de una curva normal  $U$ . Como la curvatura de un círculo es simplemente el recíproco de su radio, las curvaturas normales de estas curvas límite son  $1/R_1$  y  $1/R_2$ . Por lo tanto, tenemos

**Corolario 2.6** *La ecuación Laplace-Young tiene la forma*

$$p = 2\sigma H,$$

donde  $H$  es la curvatura media de la película.

El Corolario 2.6 es una indicación de que la siguiente definición es muy importante para este trabajo.

**Definición 2.3** *Una superficie  $M$  parametrizada por  $\mathbf{x}(u, v)$  se dice que es una superficie mínima si, en cada punto,  $H = 0$ .*

Con vista a futuro, cuando consideremos una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  con coordenadas complejas, escribiremos  $z = u + iv$ ,  $\bar{z} = u - iv$  e introducimos la siguiente notación para derivación parcial compleja:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Una ventaja de esta notación es que proporciona una prueba fácil para que  $f$  sea holomórfica.

**Ejemplo 2.3** *Si  $f = \phi(u, v) + i\psi(u, v)$  es holomórfica, entonces*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + i \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \phi}{\partial v} + i \frac{\partial \psi}{\partial u} + i^2 \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \phi}{\partial v} + i \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \phi}{\partial v} + i \left( -\frac{\partial \phi}{\partial v} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 2.4 Curvatura de Gauss

Aunque primeramente nos hemos relacionado con la curvatura media, es importante darnos cuenta que existe otra ‘curvatura’ igualmente importante. Esta nueva curvatura es la *curvatura de Gauss* y se denota por  $K$ . Enseguida desarrollaremos una fórmula para la curvatura de Gauss. Comencemos usando un sencillo recurso el cual aparece una y otra vez en geometría. La normal unitaria  $U$  tiene la propiedad de que  $U \cdot U = 1$ , entonces derivemos ambos miembros de esta ecuación usando la *regla del producto* sobre la izquierda. Obtenemos

$$(U \cdot U)_u = U_u \cdot U + U \cdot U_u = 2U_u \cdot U = 0$$

ya que la derivada de una constante es cero. Similarmente, podemos tomar la  $v$ -parcial y tenemos  $U_v \cdot U = 0$ . Por supuesto, todos los vectores que son perpendiculares a la normal son vectores tangentes. Entonces, por el Lema 2.3, tenemos

$$U_u = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \quad y \quad U_v = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v. \quad (2.8)$$

Con el fin de determinar los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  en (2.8), podemos tomar productos punto con los vectores base  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$ . Por ejemplo, por (2.1),

$$-l = \mathbf{x}_u \cdot U_u = a\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = aE + bF.$$

De manera semejante, obtenemos la siguiente lista:

$$\begin{aligned} l &= -aE - bF, \\ m &= aF - bG, \\ &= -cE - dF, \\ n &= -cF - dG. \end{aligned}$$

(Para las dos ecuaciones intermedias, usamos  $\mathbf{x}_u \cdot U = 0$  y la regla del producto para obtener  $\mathbf{x}_{uv} \cdot U + \mathbf{x}_u \cdot U_v = 0$ . Similarmente,  $\mathbf{x}_{uv} \cdot U + \mathbf{x}_v \cdot U_u = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} 2m &= -(\mathbf{x}_v \cdot U_u + \mathbf{x}_u \cdot U_v) \\ &= -2\mathbf{x}_v \cdot U_u \\ &= -2\mathbf{x}_u \cdot U_v \end{aligned}$$

Podemos resolver ecuaciones simultáneas para obtener  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Por ejemplo, multiplicando la primera ecuación por  $-F$ , la segunda por  $E$  y sumándolas se produce  $-Fl + Em = -(Eg - F^2)b$ . Ahora,  $EG - F^2 = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2 \neq 0$ , por lo que se puede determinar  $b$ . Simi-

larmente, obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{Fm - lG}{EG - F^2}, \\ b &= \frac{Fl - Em}{EG - F^2}, \\ c &= \frac{FN - Gm}{EG - F^2}, \\ d &= \frac{Fm - En}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Si pensamos estos coeficientes como una matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix},$$

entonces, recordando que la *traza* de  $A$  y el *determinante* de  $A$  están dadas respectivamente por  $tr(A) = -a - d$  y  $\det(A) = ad - bc$ , tenemos

$$\begin{aligned} tr(A) &= \frac{En + Gl - 2Fm}{EG - F^2} = 2H, \\ \det(A) &= \frac{(EG - F^2)(ln - m^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{ln - m^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Esta descripción de la curvatura media nos permite escribir otra fórmula para ella que nos será muy útil después.

### Proposición 2.7 .

$$U_v \times \mathbf{x}_u - U_u \times \mathbf{x}_v = 2H \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v.$$

**Prueba.** Usando la notación de (2.8) para  $U_u$  y  $U_v$ , tenemos

$$\begin{aligned} U_v \times \mathbf{x}_u - U_u \times \mathbf{x}_v &= d\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u - a\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \\ &= (-a - d)\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \\ &= 2H \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

■

Regresando a la matriz  $A$ , vemos que la ecuación  $tr(A) = 2H$  da la curvatura media en términos de un invariante algebraico de  $A$ . Parece razonable entonces que otras cantidades algebraicas asociadas a  $A$  deberán también dar invariantes geométricos interesantes. En particular, la ecuación  $\det(A) = ad - bc$  debería tener alguna tal significancia.

**Definición 2.4** La curvatura de Gauss  $K$  se define como

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

La curvatura de Gauss, como la curvatura media, está calculada en términos de  $l, m, n$ , etc. a diferencia de la curvatura media, puede ser calculada de otra forma en términos únicamente de coeficientes métricos. Entonces, la curvatura de Gauss es realmente intrínseca a la superficie, mientras la curvatura media depende de cómo se localiza la curva en el espacio. Ahora damos la fórmula para  $K$ , la cual obvia el uso de  $U$  y muestra que  $K$  depende únicamente de  $E, F$ , y  $G$ . Aunque existe una fórmula más general, nos restringiremos al caso donde  $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ . Esto es, supondremos que las curvas  $-u$  y  $-v$  paramétricas siempre se encuentran en ángulo recto. En este caso establecemos el *Teorema Egregio* de Gauss:

**Teorema 2.8** La curvatura de Gauss [8] depende sólo de la métrica  $E, F = 0$ , y  $G$ :

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$

Aquí, hemos usado la notación

$$E_v = \frac{\partial}{\partial v} E = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) \quad \text{y} \quad G_u = \frac{\partial}{\partial u} G = \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v).$$

Por supuesto, nada de esto significa algo a menos que podamos calcular las curvaturas media y de Gauss. Hasta aquí, tenemos,  $l = -\mathbf{x}_u \cdot U_u$ , etc., y esto es algo tedioso de calcular. Podemos, sin embargo, usar nuevamente la regla del producto para hacer las cosas un poco más simples.

**Proposición 2.9** Los coeficientes de la segunda forma fundamental pueden ser calculados por

$$l = \mathbf{x}_{uu} \cdot U, \quad m = \mathbf{x}_{uv} \cdot U, \quad n = \mathbf{x}_{vv} \cdot U.$$

**Prueba.**  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  son vectores tangentes, entonces  $\mathbf{x}_u \cdot U = 0$  y  $\mathbf{x}_v \cdot U = 0$ . Derivando ambos miembros de estas ecuaciones con respecto de  $u$  y  $v$  y usando la regla del producto se obtiene

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot U + \mathbf{x}_u \cdot U_u = 0, \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot U + \mathbf{x}_u \cdot U_v = 0, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot U + \mathbf{x}_v \cdot U_v = 0.$$

Por las definiciones de  $l, m$ , y  $n$ , hemos terminado. Este resultado puede ser usado para, algo automáticamente, calcular las curvaturas media y de Gauss. ■

**Ejemplo 2.4** Sea la superficie  $M$  definida por una función de dos variables  $z = f(x, y)$  con la parametrización de Monge  $(u, v, f(u, v))$ . Entonces:

- (1)  $\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u)$  y  $\mathbf{x}_v = (0, 1, f_v)$ .  
(2)  $\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, f_{uu})$  y  $\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, f_{vv})$ .  
(3)  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-f_u, -f_v, 1)$  entonces  $U = (-f_u, -f_v, 1)/\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$ .  
(4)  $l = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$ ,  $m = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$ ,  $n = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$ .

(5) Usando la fórmula[1]  $H = (En + Gl - 2Fm)/2(EG - F^2)$ , tenemos que la condición  $H = 0$  nos lleva a la ecuación diferencial parcial

$$f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} = 0.$$

Ésta es conocida como *ecuación de superficie mínima*.

**Ejemplo 2.5** *Superficies de revolución.* Recordemos que las superficies de revolución tienen parametrizaciones de la forma  $\mathbf{x}(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v)$ . Además, tengamos en cuenta que  $g(u)$  es la distancia a lo largo del eje de revolución y  $h(u)$  es el radio de un paralelo. Tenemos  $\mathbf{x}_u = (g', h' \cos v, h' \sin v)$ ,  $\mathbf{x}_v = (0, -h \sin v, h \cos v)$  y  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (hh', -g'h \cos v, -g'h \sin v)$ . Entonces,

$$U = \frac{(h', -g' \cos v, -g' \sin v)}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}.$$

Además, las segundas derivadas parciales son  $\mathbf{x}_{uu} = (g'', h'' \cos v, h'' \sin v)$ ,  $\mathbf{x}_{uv} = (0, -h' \sin v, h' \cos v)$  y  $\mathbf{x}_{vv} = (0, -h \cos v, -h \sin v)$ . Por lo tanto,

$$E = g'^2 + h'^2, \quad F = 0, \quad G = h^2$$

$$l = \frac{(g''h' - h''g')}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}, \quad m = 0, \quad n = \frac{hg'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}.$$

La curvatura media está dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{h^2 \frac{(g''h' - h''g')}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} + (g'^2 + h'^2) \frac{hg'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}}{2(g'^2 + h'^2)h^2} \\ &= \frac{h(g''h' - h''g') + g'(g'^2 + h'^2)}{2h(g'^2 + h'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, la curvatura de Gauss queda como

$$K = \frac{g'(g''h' - h''g')}{h(g'^2 + h'^2)^2}.$$

**Nota 2.10** Si la curva original  $\alpha(t) = (g(t), h(t), 0)$  tiene  $g'(t) \neq 0$  para todo  $t$ , entonces  $g(t)$  es estrictamente creciente. Por lo tanto, es uno-a-uno y tiene una función inversa  $g^{-1}$  que también es diferenciable. Esta inversa nos permite reparametrizar la curva  $\alpha$ . Definimos  $f = h \circ g^{-1}$  y obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(u) &= \alpha \circ g^{-1}(u) = (gg^{-1}(u), hg^{-1}(u), 0) \\ &= (u, f(u), 0).\end{aligned}$$

Entonces, nuestros cálculos se vuelven un poco más fáciles. Por ejemplo, la fórmula para la curvatura de Gauss se convierte en  $K = -f''/f(1+f'^2)^2$ . Para evitar confusiones, aún escribiremos

$$\alpha(u) = (u, h(u), 0) \quad y \quad K = -h''/h(1+h'^2)^2.$$

**Ejemplo 2.6** Si giramos la catenaria  $y = c \cosh(x/c)$  alrededor del eje- $x$  obtenemos un catenoide. Para dicha superficie tenemos que

$$K = -\frac{1}{c^2 \cosh^4 \frac{u}{c}}, \quad H = 0.$$

Con el fin de dar una corta prueba de Teorema 2.8, primero vamos a introducir algunas fórmulas que también serán importantes cuando liguemos superficies mínimas con variable compleja. Del Lema 2.3, sabemos que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  es una base para el plano tangente. Como  $U$  es normal al plano tangente,  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, U\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ . Las fórmulas de la aceleración expresan las aceleraciones fundamentales  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$  y  $\mathbf{x}_{vv}$  en términos de la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, U\}$  (en cada punto de la superficie). Por simplicidad, nuevamente supongamos  $F = 0$ , y notemos que esto hace a  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, U\}$  una base ortogonal. Así, los coeficientes pueden ser encontrados tomando productos punto. Escribimos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + lU, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v + mU, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v + nU.\end{aligned}$$

Nuestro trabajo es encontrar las  $\Gamma'$ s. Éstas son justamente los coeficientes en un desarrollo básico, pero son conocidas por el nombre de *símbolos de Christoffel*, especialmente en geometría diferencial superior y teoría de la relatividad. Usamos lo que sabemos acerca de los productos punto para determinar las  $\Gamma'$ s:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 0 + 0 \\ &= \Gamma_{uu}^u E \quad \text{por definición de } E\end{aligned}$$

Podemos calcular  $\mathbf{x}_{uu}$  por la regla del producto y de ahí obtener  $\Gamma_{uu}^u$  :

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \text{ entonces } E_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} = 2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u.$$

En consecuencia

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{E_u}{2} \quad y \quad \Gamma_{uu}^u = \frac{E_u}{2E}.$$

Más aún,  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ , entonces tomando la parcial con respecto de  $u$  nos da

$$0 = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad o \quad \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}.$$

Además  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ , entonces tomando la parcial con respecto de  $v$  da  $E_v = 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}$  y en consecuencia  $E_v/2 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v$ . Más aún,

$$\Gamma_{uu}^v = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)/G = -E_v/2G \quad y \quad \Gamma_{uv}^u = (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)/G = E_v/2E.$$

Continuando,  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ , entonces  $G_v/2 = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v$ . Por lo tanto, como  $0 = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u$ , tenemos,

$$-\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \quad \text{con} \quad \Gamma_{uv}^v = (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v)/G = G_u/2G,$$

$$\Gamma_{vv}^u = (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u)/E = -G_u/2E.$$

Finalmente,  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ , así  $\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = G_v/2E$ . y  $\Gamma_{vv}^v = (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v)/G = G_v/2G$ . Terminamos con las siguientes *fórmulas de aceleración*[8].

**Fórmulas 2.5.10.**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_v + lU, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G} \mathbf{x}_v + mU, \\ \mathbf{x}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{G_v}{2G} \mathbf{x}_v + nU, \\ U_u &= -\frac{l}{E} \mathbf{x}_u - \frac{m}{G} \mathbf{x}_v, \\ U_v &= -\frac{m}{E} \mathbf{x}_u - \frac{n}{G} \mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Ahora estamos en condición de ofrecer la prueba del Teorema 2.8.

**Prueba.** Como las derivadas parciales cruzadas son iguales no importa el orden de diferenciación,

$$\mathbf{x}_{uuv} = \mathbf{x}_{uvu}, \quad \text{o} \quad \mathbf{x}_{uuv} - \mathbf{x}_{uvu} = 0.$$

Esto significa que los coeficientes de  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  y  $U$  son *todos cero* cuando  $\mathbf{x}_{uuv} - \mathbf{x}_{uvu}$  es escrito en esta base. Concentrémonos en el término  $\mathbf{x}_v$ :

$$\mathbf{x}_{uuv} = \left(\frac{E_u}{2E}\right)_v \mathbf{x}_u + \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_{uv} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v \mathbf{x}_v - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_{vv} + l_v U + lU_v.$$

Ahora sustituyamos  $\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}$  y  $U_v$  por sus desarrollos en la base (ver las Fórmulas 2.4) para obtener,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uuv} &= [\ ] \mathbf{x}_u + \left[ \frac{E_u G_u}{4EG} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_v G_v}{4G^2} - \frac{ln}{G} \right] \mathbf{x}_v + [\ ] U \\ \mathbf{x}_{uvu} &= \left(\frac{E_v}{2E}\right)_v \mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_{uu} + \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u \mathbf{x}_v + \frac{G_u}{2G} \mathbf{x}_{uv} + m_u U + mU_u \\ \mathbf{x}_{uvu} &= [\ ] \mathbf{x}_u + \left[ \frac{E_v E_v}{4EG} + \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u + \frac{G_u G_u}{4G^2} - \frac{m^2}{G} \right] \mathbf{x}_v + [\ ] U. \end{aligned}$$

Como el coeficiente  $\mathbf{x}_v$  de  $\mathbf{x}_{uuv} - \mathbf{x}_{uvu}$  es cero, obtenemos

$$0 = \frac{E_u G_u}{4EG} - \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_v G_v}{4G^2} + \frac{E_v E_v}{4EG} - \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \frac{G_u G_u}{4G^2} - \frac{ln - m^2}{G}.$$

Dividiendo por  $E$ , tenemos

$$\frac{ln - m^2}{EG} = \frac{E_u G_u}{4E^2 G} - \frac{1}{E} \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_v G_v}{4EG^2} + \frac{E_v E_v}{4E^2 G} - \frac{1}{E} \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \frac{G_u G_u}{4EG^2}.$$

Por supuesto, el lado izquierdo es  $K$  (ya que  $F = 0$ ) y el lado derecho sólo depende de  $E$  y de  $G$ . Entonces, tenemos una fórmula para  $K$  que no hace uso explícito de la normal  $U$ . Ahora es meramente algebraico demostrar que el lado derecho anterior es

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$

■



## Capítulo 3

# Geometría de las pompas de jabón

### 3.1 Curvatura media y superficies mínimas

En el Capítulo 1, vimos que la tensión superficial y la diferencia de presión  $\rho$  sobre los lados opuestos de una membrana de jabón se combinan para determinar la curvatura promedio de la película. Específicamente, tuvimos

$$\rho = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 2\sigma H,$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial y  $H$  es la curvatura media.

Considerando ahora el caso de una membrana de jabón limitada por un alambre, como no hay volumen encerrado, la presión es la misma sobre ambos lados de la membrana. En consecuencia  $\rho = 0$ , y como  $\sigma \neq 0$ , tenemos que  $H = 0$ .

Tomando en cuenta la siguiente

**Definición 3.1** *Una superficie mínima es aquella que tiene curvatura media igual a cero[13].*

Concluimos que

**Teorema 3.1** *Toda membrana de jabón es un modelo físico de una superficie mínima.*

Hemos visto que la tensión superficial trata de encoger la superficie tanto como sea posible de manera que la superficie es de área mínima entre las superficies que satisfacen ciertas restricciones tales como tener fronteras fijas o volúmenes fijos encerrados. De hecho, esta propiedad de área-minimización implica el anulamiento de la curvatura media y da origen al término *mínima*. Antes de que veamos cómo trabaja esto matemáticamente, revisemos algunos casos.

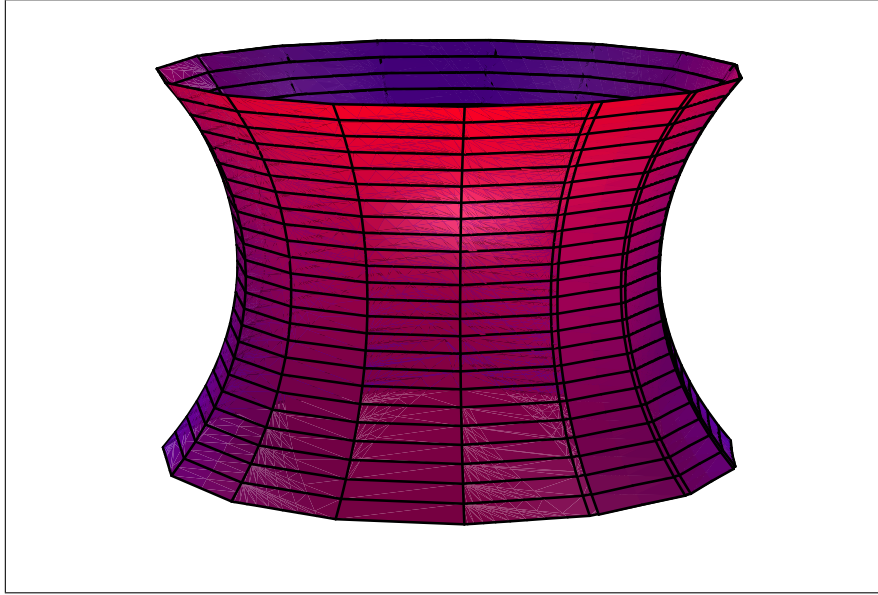
Para lo que sigue, necesitamos definir la curvatura media  $H$  de una superficie  $M$  parametrizada por una función  $\mathbf{x}(u, v)$ , como

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}, \quad (3.1)$$

donde  $E, F$  y  $G$  son los coeficientes de la primera forma fundamental y  $l, m$  y  $n$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental de la parametrización[15].

Comencemos con dos ejemplos clásicos, el catenoide y el helicoido.

**Ejemplo 3.1** (*Un catenoide*).



Catenoide

Un catenoide es una superficie de revolución generada por la catenaria  $y(x) = \cosh(x)$  y parametrizada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, \cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v))$ [1]. Calculemos la curvatura media  $H$ . Primero, los vectores tangentes son

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1, \sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v)), \\ \mathbf{x}_v &= (0, -\cosh(u) \sin(v), \cosh(u) \cos(v)),\end{aligned}$$

con  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u)$ ,  $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$  y  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \cosh^2(u)$ . (Como  $E = G$  y  $F = 0$ , la parametrización se llama *isoterma*[14]; y ésta será una importante idea en el estudio de las superficies mínimas). Para obtener  $H$ , necesitamos también la normal unitaria  $U$  y las cantidades  $l = \mathbf{x}_{uu} \cdot U$ ,  $m = \mathbf{x}_{uv} \cdot U$  y  $n = \mathbf{x}_{vv} \cdot U$ . Por supuesto, obtenemos  $U$  tomando el producto cruz de los vectores tangentes y dividiendo por la magnitud del producto cruz:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \sinh(u) \cos(v) & \sinh(u) \sin(v) \\ 0 & -\cosh(u) \sin(v) & \cosh(u) \cos(v) \end{pmatrix} \\ &= (\sinh(u) \cosh(u), -\cosh(u) \cos(v), -\cosh(u) \sin(v));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= (\sinh(u) \cosh(u), -\cosh(u) \cos(v), -\cosh(u) \sin(v)) / \cosh^2(u) \\
 &= \left( \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}, -\frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(u)} \right).
 \end{aligned}$$

Ahora, utilizamos además las segundas parciales

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{uu} &= (0, \cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v)), \\
 \mathbf{x}_{uv} &= (0, -\sinh(u) \sin(v), \sinh(u) \cos(v)), \\
 \mathbf{x}_{vv} &= (0, -\cosh(u) \cos(v), -\cosh(u) \sin(v)),
 \end{aligned}$$

con

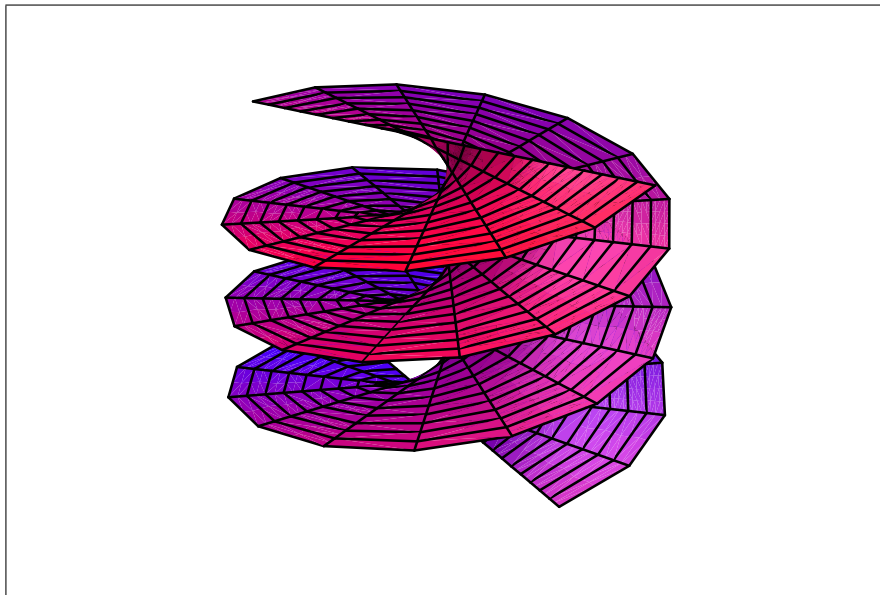
$$l = -\cos^2(v) - \sin^2(v) = -1, \quad m = 0, \quad n = \cos^2(v) + \sin^2(v) = 1.$$

Notemos aquí que  $l = -m$ . Finalmente, obtenemos

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{\cosh^2(u)(-1) + \cosh^2(u)(1) - 0}{2 \cosh^4(u)} = 0$$

Entonces, el catenoide es una superficie mínima.

**Ejemplo 3.2** *Curvatura media del helicoides.*



Helicoides

Un helicoides está parametrizado por la expresión[1]

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u).$$

Entonces

$$\mathbf{x}_u = (-v \sin u, v \cos u, 1),$$

$$\mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, 0),$$

continuando con los cálculos encontramos;

$$E = v^2 + 1, F = 0, G = 1, U = \left( -\frac{\sin u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \right).$$

Tenemos también que

$$\mathbf{x}_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0).$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0),$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0).$$

Utilizando los datos anteriores en las fórmulas respectivas obtenemos

$$l = \mathbf{x}_{uu} \cdot U = 0, \quad m = \mathbf{x}_{uv} \cdot U = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad n = 0,$$

además, tomando en cuenta que  $EG - F^2 = v^2 + 1$ , sustituyendo en la fórmula para  $H$ , nos queda

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{(1)(0) + (1+v^2)(0) - 2(0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right)}{2(1+v^2)} = 0.$$

Con lo cual confirmamos que el helicoides es una superficie mínima.

Ahora veamos una de nuestras situaciones modelo: una superficie obtenida como la gráfica de una función de dos variables. Sea  $z = f(x, y)$  una función de dos variables, y tomemos una parametrización de Monge[8] para su gráfica:  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, f_u), & \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, f_v), & \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, f_{uv}), \\ & & \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, f_{vv}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (-f_u, -f_v, 1), & U &= \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \\ E &= 1 + f_u^2, & F &= f_u f_v, & G &= 1 + f_v^2, \\ l &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, & m &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, & n &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \end{aligned}$$

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2},$$

$$H = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} + (1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}.$$

La expresión para  $H$  y la Definición 3.1 inmediatamente muestran lo siguiente para  $M$  dado por la gráfica de  $z = f(x, y)$ .

**Proposición 3.2**  *$M$  es mínima si y sólo si*

$$(1 + f_v^2)f_{uu} + (1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} = 0.$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de superficie mínima*[1], y en general, no es soluble por métodos simples. Sin embargo, podemos en ocasiones hipotetizar requerimientos algebraicos o geométricos acerca de la función  $f$  que nos permitan resolver la ecuación de superficie mínima y por lo tanto determinar algunas superficies mínimas. A continuación el ejemplo más famoso de esto.

**Ejemplo 3.3** *(Primera superficie de Scherk).*

Supóngase que requerimos la condición algebraica de que la función  $f$  sea separadamente dependiente de las variables  $x$  y  $y$ . Entonces, escribimos  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ . La ecuación de superficie mínima entonces viene a ser

$$g''(x)(1 + h'^2(y)) + h''(y)(1 + g'^2(x)) = 0$$

donde las primas se refieren a las derivadas con respecto de las variables apropiadas. Pero este es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria *separable*. Ponemos todas las  $x$ 's en un miembro de la ecuación y las  $y$ 's en el otro y obtenemos

$$-\frac{1 + g'^2(x)}{g''(x)} = \frac{1 + h'^2(y)}{h''(y)}.$$

Ahora, ¿cómo puede esta ecuación ser posiblemente verdadera cuando un lado es función únicamente de  $x$  y el otro únicamente de  $y$ ? Si mantenemos  $y$  fija, el lado derecho permanece fijo, entonces la variación de  $x$  no tiene efecto. Similarmente, la variación de la  $y$  no tiene efecto si la  $x$  se mantiene fija. Esto significa que la única forma en que se cumple la igualdad es si ambos miembros son iguales a la misma constante, digamos  $c$ . Revisemos entonces el lado  $x$ . Tenemos

$$-\frac{1 + g'^2(x)}{g''(x)} = c$$

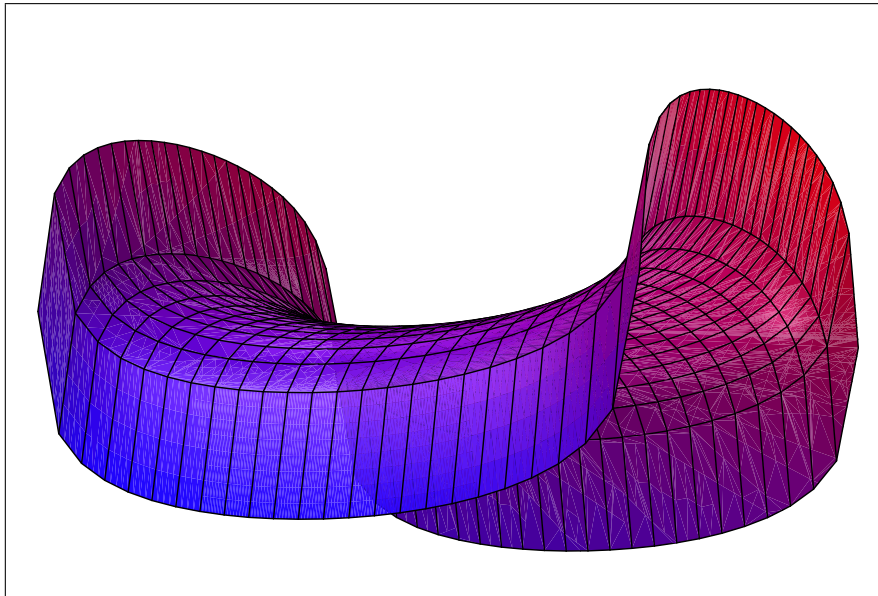
$$1 + g'^2(x) = -cg''(x),$$

y esta ecuación no involucra a la  $g$ . Entonces, ahora podemos sustituir  $\phi = g'$  para obtener  $1 + \phi^2 = -c\phi'$ . Separando e integrando, obtenemos

$$\int \frac{-cd\phi}{1 + \phi^2} = \int dx.$$

Una sencilla sustitución trigonométrica  $\phi = \tan(\theta)$  e integrando produce  $x = -c \arctan(\phi)$  (donde hemos suprimido la constante de integración). Entonces obtenemos,  $\phi = -\tan(x/c)$ , y sustituyendo  $\phi$  por  $g'$  e integrando nuevamente no da  $g(x) = c \ln(\cos(x/c))$ . Los mismos cálculos se cumplen para el lado- $y$  (sin el signo menos, por supuesto) para dar  $h(x) = -c \ln(\cos(y/c))$ , entonces finalmente obtenemos una expresión para  $f$ :

$$f(x, y) = c \ln(\cos(x/c)) - c \ln(\cos(y/c)) = c \ln \left( \frac{\cos(x/c)}{\cos(y/c)} \right).$$



Primera Superficie de Scherk

La superficie  $z = f(x, y)$  se llama (*primera*) *superficie mínima de Scherk*. Note que esta superficie sólo está definida para  $\frac{\cos(x/c)}{\cos(y/c)} > 0$ . Por ejemplo, haciendo  $c = 1$  por conveniencia, una parte de la superficie de Scherk está definida sobre el cuadrado  $-\pi/2 < x < \pi/2, -\pi/2 < y < \pi/2$ . Sorprendentemente, sólo el catenoide y el helicoides eran conocidas como mínimas en los 1700's. La superficie de Scherk fue el siguiente ejemplo de una superficie mínima, y fue descubierta por Scherk en 1835.

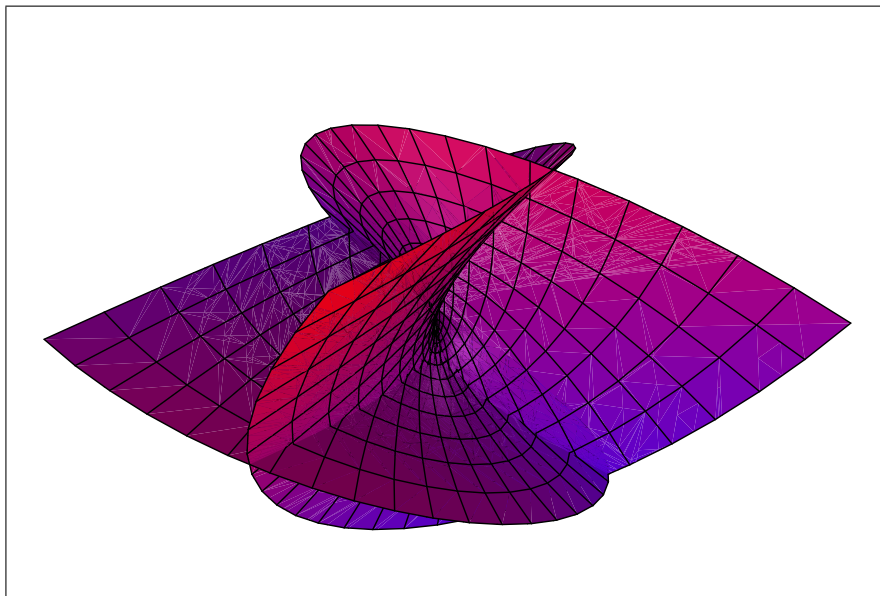
Vimos cómo un requerimiento algebraico transforma la ecuación de superficie mínima en un par de sencillas ecuaciones diferenciales ordinarias. Ahora impongamos algunos requerimientos geométricos. Por ejemplo, ¿qué tal si requerimos que una superficie mínima sea una superficie de revolución?. ¿Esta imposición de simetría circular de algún modo restringe geoméricamente la ecuación de superficie mínima para hacerla resoluble? He aquí la respuesta.

**Teorema 3.3** . *Si una superficie de revolución  $M$  es mínima, entonces  $M$  está contenida ya sea en un plano o en un catenoide[1].*

**Ejemplo 3.4** . *Las siguientes son algunas superficies mínimas que son bien conocidas.*

En todas se cumple, por supuesto, que  $H = 0$ .

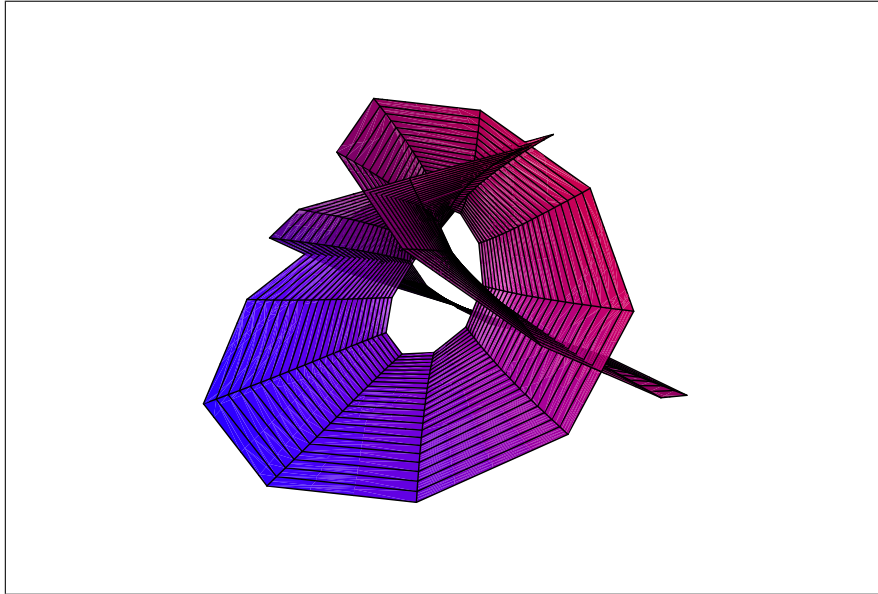
(1) *Superficie de Enneper*



Superficie de Enneper

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2).$$

(2) *La superficie de Henneberg.*



Superficie de Henneberg

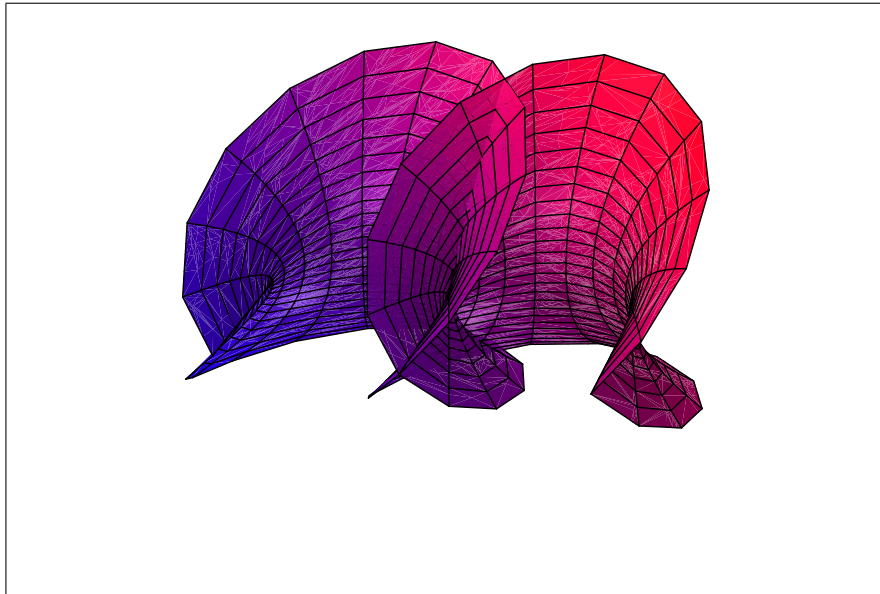
Se define mediante la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$$

donde

$$\begin{aligned} x^1(u, v) &= 2 \sinh(u) \cos(v) - \frac{2}{3} \sinh(3u) \cos(3v), \\ x^2(u, v) &= 2 \sinh(u) \sin(v) - \frac{2}{3} \sinh(3u) \sin(3v), \\ x^3(u, v) &= 2 \cosh(2u) \cos(2v). \end{aligned}$$

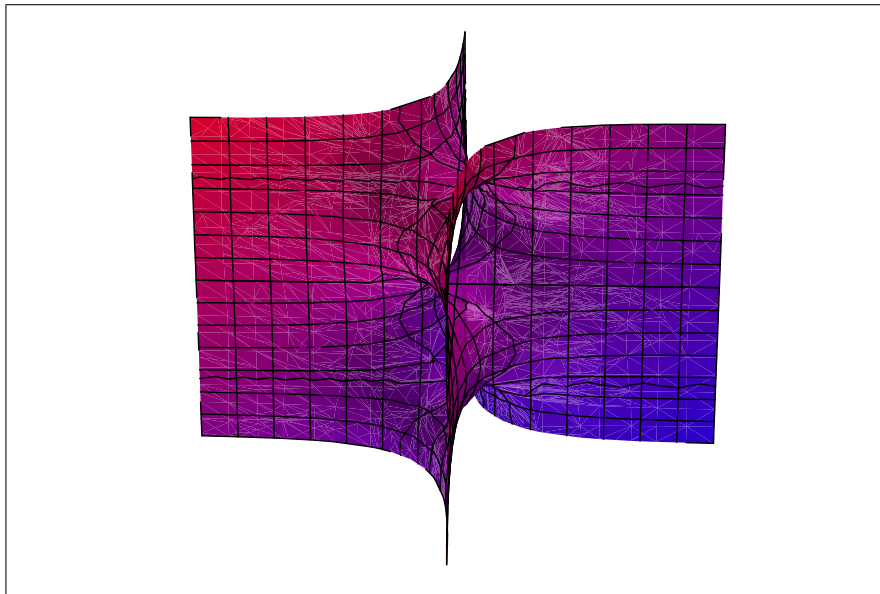
(3) *Superficie de Catalan*



Superficie de Catalan

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - \sin(u) \cosh(v), 1 - \cos(u) \cosh(v), 4 \sin(u/2) \sinh(v/2)).$$

(4) *Quinta Superficie de Scherk*. Esta superficie es escrita con frecuencia en forma no paramétrica como  $\sin z = \sinh x \sinh y$ .



Quinta Superficie de Scherk

Paramétricamente,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\arg \sinh(u), \arg \sinh(v), \arg \sinh(uv)).$$

### 3.2 Relación entre superficies mínimas y pompas de jabón

Conforme sus experimentos con películas de jabón progresaron, Plateau se convenció de que cualquier tipo de frontera podía producir una película cerrada de jabón. Conceptualmente, sin embargo, puede haber fronteras tan complicadas que los requeridos giros y vueltas de la película podrían causar que ésta se rompiera, por ello Plateau, estableció el siguiente problema, ahora conocido como *problema de Plateau*: dada una curva  $C$ , encontrar una superficie mínima  $M$  que tenga a  $C$  como frontera. Como veremos más adelante, las superficies *área-mínima* son mínimas, y fue eventualmente comprobado que la esperanza de encontrar una solución general para el problema de Plateau descansaba en encontrar superficies área-mínima. Entonces, otra versión del problema de Plateau es encontrar una superficie área-mínima que tenga a  $C$  como frontera. Por supuesto, por el Teorema 3.1, esto nos lleva de regreso a las membranas de jabón. Incluso, la *existencia* de superficies área-minimizadoras no es automática, sin embargo. No fue sino hasta comienzos del siglo XX que el problema de Plateau fue resuelto por J. Douglas y T. Radó. Ellos probaron

**Teorema 3.4** *Existe una superficie área-mínima en forma de disco generadora de una curva de Jordan dada.*

(Una superficie mínima tiene *forma de disco* si su dominio paramétrico es el disco unidad  $D = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1\}$  y el círculo frontera mapea sobre la curva de Jordan dada).

En lugar de ver hacia la difícil pregunta de la existencia, preguntemos lo que una superficie  $M$  que tiene área mínima entre superficies con una frontera especificada  $C$  implica con respecto a la superficie. De esta forma, obtenemos una condición necesaria para la existencia de  $M$ . Si vamos a estar hablando de área de superficie, debemos tener un acuerdo sobre cómo calcularla. En el plano, hacemos doble integración ordinaria. Para tratar con superficies curvadas, usamos las parametrizaciones definitorias para transportar todos los cálculos computacionales hechos en el plano a la superficie dada. En el plano, calculamos el área de un paralelogramo encontrando la longitud del producto cruz de los dos vectores sobre sus lados. Como el paralelogramo aproximante es muy pequeño, podemos pensar que es generado por vectores tangentes multiplicados por los cambios en los parámetros,

$$\mathbf{x}_u \Delta u \text{ y } \mathbf{x}_v \Delta v.$$

Así, el área está dada por  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \Delta u \Delta v$ . Esta cantidad aproxima el área de aquella diminuta parte de la superficie. Esto es lo que usualmente hacemos en cálculo: aproximar una parte pequeña y entonces sumarla sucesivamente (integrar) sobre la región entera. De este modo, sea  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrización para una superficie  $M$  y hagamos la

**Definición 3.2** . *El área de la parametrización  $\mathbf{x}$ , denotada por  $A_{\mathbf{x}}$ , es*

$$A_{\mathbf{x}} = \iint |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \, du dv,$$

donde los límites de integración son los límites definidos por la parametrización.

**Ejemplo 3.5** Sea  $f(x, y)$  una función de dos variables, entonces tenemos una parametrización de Monge

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

podemos calcular  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  que son

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u) \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, f_v)$$

con

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |(-f_u, -f_v, 1)| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Entonces

$$A_{\mathbf{x}} = \int \int \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, dudv.$$

Una forma conveniente de calcular el área limitada por curvas cerradas en el plano es usar el teorema de Green. Supongamos que  $P$  y  $Q$  son dos funciones (suaves) reales de dos variables  $x$  y  $y$  definidas sobre una región simple conexa en el plano. Entonces el teorema de Green dice que

$$\int_y \int_x \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \, dxdy = \int_C -Q \, dx + P \, dy,$$

donde el lado derecho es la integral de línea alrededor de la frontera  $C$  de la región encerrada por  $C$ . Como llevamos todas las integrales al plano para efectos de cálculo, encontraremos particularmente útil el teorema de Green.

Ahora supongamos que  $M$  es la gráfica de una función de dos variables  $z = f(x, y)$  y es una superficie de área mínima con frontera  $\tilde{C}$ . Consideremos las superficies vecinas, las cuales parecen versiones ligeramente deformadas de  $M$ ,

$$M^t : z^t(x, y) = f(x, y) + tg(x, y).$$

Aquí,  $g$  es una función sobre el dominio de  $f$  con  $g|_{\tilde{C}} = 0$  (donde  $\tilde{C}$  es la frontera del dominio de  $f$  y  $f(\tilde{C}) = C$ ). La perturbación  $tg(x, y)$  tiene entonces el efecto de mover los puntos de  $M$  una pequeña distancia dejando fija  $C$ . Una parametrización de Monge para  $M^t$  está dada por

$$\mathbf{x}^t(u, v) = (u, v, f(u, v) + tg(u, v)).$$

Encontremos ahora una descripción para las áreas  $M$ . Primero, tenemos

$$|\mathbf{x}_u^t \times \mathbf{x}_v^t| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)}.$$

Por la definición de área, vemos que el área de  $M^t$  es

$$A(t) = \int_v \int_u \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)} \, dudv.$$

Como  $M$  se supuso que tiene área mínima, entonces la función de área  $A(t)$  debe tener un mínimo en  $t = 0$  (ya que  $t = 0$  nos da  $M$ ). Por lo tanto tomemos la derivada de  $A(t)$  e impongamos la condición de que  $A'(0) = 0$ . Podemos tomar la derivada con respecto a  $t$  dentro de la integral ( esencialmente porque  $t$  no tiene nada que hacer con los parámetros,  $u$  y  $v$  ) y usar la regla de la cadena para obtener

$$A'(t) = \int_v \int_u \frac{f_u g_u + f_v g_v + t(g_u^2 + g_v^2)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)}} dudv.$$

En seguida, supusimos que  $t = 0$ , era un mínimo, entonces  $A'(0) = 0$ . De aquí que, haciendo  $t = 0$  en la ecuación anterior, obtenemos

$$\int_v \int_u \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} dudv = 0$$

Ahora, sean

$$P = \frac{f_u g}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad Q = \frac{f_v g}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}},$$

entonces

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{f_u g_u + g f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} - \frac{g(f_u^2 f_{uu} + f_u f_v f_{uv})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{f_v g_v + g f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} - \frac{g(f_v^2 f_{vv} + f_u f_v f_{uv})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}$$

en consecuencia

$$\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + \frac{g(f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}.$$

Como

$$\int_v \int_u \left( \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) dudv = \int_{\tilde{C}} -Q du + P dv,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_v \int_u \left[ \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + \frac{g(f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} \right] dudv = \\ = \int_{\tilde{C}} \frac{f_u g}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} dv - \frac{f_v g}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} du = 0 \end{aligned}$$

ya que

$$g|_{\tilde{C}} = 0.$$

Como esto es verdadero para toda  $g$ , debemos tener

$$f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} = 0$$

Esta es la ecuación de superficie mínima. En consecuencia, por la Proposición 3.1, tenemos  $H = 0$ , y hemos demostrado la siguiente condición *necesaria* para que una superficie sea área-minimizadora.

**Teorema 3.5** *Si  $M$  es área-minimizadora, entonces  $M$  es mínima.*

El Teorema 1.1 nos dice que las membranas de jabón tienden a minimizar el área, entonces este resultado es otra confirmación de que el estudio de las membranas de jabón es un estudio de superficies mínimas. El método que llevó al Teorema 3.5 es un ejemplo de una técnica básica del cálculo de variaciones.

### 3.3 Parámetros isotermos

Lo que hemos hecho anteriormente justamente podría llamarse los fundamentos de la teoría de superficies mínimas. Ahora tenemos una idea de lo que son las superficies mínimas y porqué su estudio es relevante para comprender las membranas de jabón. No obstante, sólo hemos usado herramientas de geometría diferencial y ecuaciones diferenciales para explorar algunos aspectos de las superficies mínimas. En esta sección comenzamos a introducir el poder del análisis complejo en la mezcla de ideas que rodean a las membranas de jabón. La clave para introducir el análisis complejo en la teoría de superficies mínimas es la existencia de parámetros isotermos sobre una superficie mínima. Una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  es *isoterma* si  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$  y  $F = 0$ . Esta suposición de apariencia inocua sobre la métrica tendrá consecuencias maravillosas. De hecho, las coordenadas isotermas existen en todas las superficies, y existen por lo tanto en las superficies mínimas.

**Teorema 3.6** *Las coordenadas isotermas existen sobre cualquier superficie mínima  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ .*

**Prueba.** Fijemos un punto  $m \in M$ . Escojamos un sistema coordenado de  $\mathbb{R}^3$  de manera que  $m$  sea el origen, el plano tangente a  $M$ ,  $T_m M$  es el plano  $xy$ , y cercano a  $m$ ,  $M$  es la gráfica de una función  $z = f(x, y)$ . Además, la regla del cociente y la regla de la cadena dan

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 + f_x^2}{w} \right)_y - \left( \frac{f_x f_y}{w} \right)_x \\ &= -\frac{f_y}{w} [f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)], \\ & \left( \frac{1 + f_y^2}{w} \right)_x - \left( \frac{f_x f_y}{w} \right)_y \\ &= -\frac{f_x}{w} [f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)], \end{aligned}$$

donde,  $w = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ . Sean  $p = f_x$ ,  $q = f_y$  con  $w^2 = 1 + p^2 + q^2$ . Como  $M$  es mínima,  $f$  satisface la ecuación de superficie mínima

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0,$$

por lo tanto tenemos  $\left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y - \left(\frac{pq}{w}\right)_x = 0$  y  $\left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x - \left(\frac{pq}{w}\right)_y = 0$ . Definimos dos campos vectoriales en el plano- $xy$  por

$$V = \left(\frac{1+p^2}{w}, \frac{pq}{w}\right) \quad \text{y} \quad W = \left(\frac{pq}{w}, \frac{1+q^2}{w}\right)$$

y aplicamos el teorema de Green a cualquier curva cerrada  $C$  contenida en una región simplemente conexa  $\mathcal{R}$  para obtener

$$\int_C V \cdot dr = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{pq}{w}\right)_x - \left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y dx dy = 0,$$

$$\int_C W \cdot dr = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x - \left(\frac{pq}{w}\right)_y dx dy = 0,$$

donde  $dr = (dx, dy)$ . Como las integrales de línea son cero para todas las curvas cerradas en  $\mathcal{R}$ ,  $V$  y  $W$  deben tener funciones potencial. Esto es, existen  $\mu$  y  $\rho$  con  $\text{grad}(\mu) = V$  y  $\text{grad}(\rho) = W$ . Consideradas coordenadamente, estas ecuaciones implican  $\mu_x = \frac{1+p^2}{w}$ ,  $\mu_y = \frac{pq}{w}$  y  $\rho_x = \frac{pq}{w}$ ,  $\rho_y = \frac{1+q^2}{w}$ . Definamos un mapeo  $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$T(x, y) = (x + \mu(x, y), y + \rho(x, y)).$$

La matriz Jacobiana de este mapeo es entonces

$$J(T) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_x & \mu_y \\ \rho_x & 1 + \rho_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & \frac{pq}{w} \\ \frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{bmatrix},$$

y calculamos el determinante como  $\det(J(T)) = \frac{(1+w)^2}{w} > 0$ . El Teorema de la Función Inversa dice entonces que, cercana a  $m = (0, 0)$ , hay una función inversa suave  $T^{-1}(u, v) = (x, y)$  con

$$\begin{aligned} J(T^{-1}) &= J(T)^{-1} \\ &= \frac{1}{\det J(T)} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{w} & -\frac{pq}{w} \\ -\frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+p^2}{w} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+w)^2} \begin{bmatrix} w + 1 + q^2 & -pq \\ -pq & w + 1 + p^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por supuesto, para  $(x, y) = T^{-1}(u, v)$ , la última matriz es justamente

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

por la definición del Jacobiano. Usaremos estos cálculos para demostrar que la parametrización (en las coordenadas  $uv$  descritas anteriormente)

$$\mathbf{x}(u, v) \stackrel{def}{=} (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$$

es isoterma. Primero calculamos

$$\mathbf{x}_u = \left( \frac{w+1+q^2}{(1+w)^2}, \frac{-pq}{(1+w)^2}, p \left( \frac{w+1+q^2}{(1+w)^2} \right) + q \left( \frac{-pq}{(1+w)^2} \right) \right)$$

y

$$\mathbf{x}_v = \left( \frac{-pq}{(1+w)^2}, \frac{w+1+p^2}{(1+w)^2}, p \left( \frac{-pq}{(1+w)^2} \right) + q \left( \frac{w+1+p^2}{(1+w)^2} \right) \right).$$

Con los datos anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [(w+1+q^2)^2 + p^2q^2 + p^2(w+1+q^2)^2 \\ &\quad - 2p^2q^2(w+1+q^2) + p^2q^4] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [(1+w)^2(1+q^2+P^2)] \\ &= \frac{w^2}{(1+w)^2}, \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [(-pq)^2 + (w+1+p^2)^2 + p^4q^2 - 2p^2q^2(w+1+p^2) + q^2(w+1+p^2)^2] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [(1+w)^2(1+q^2+P^2)] \\ &= \frac{w^2}{(1+w)^2}, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= \frac{1}{(1+w)^4} [(w+1+q^2)(-pq) + (-pq)(w+1+p^2) + p(w+1)q(w+1)] \\
&= \frac{1}{(1+w)^4} [-pq((1+p^2+q^2) - w^2)] \\
&= \frac{1}{(1+w)^4} [w^2 - w^2] = 0.
\end{aligned}$$

Como  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = E$ , y  $F = 0$ , la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  es isoterma. ■

**Ejemplo 3.6** Podemos apreciar que si  $M$  es una superficie con parametrización isoterma  $\mathbf{x}(u, v)$ , la fórmula para la curvatura media (ec. 3.1) se reduce a  $\frac{l+n}{2E}$ . Por lo tanto, para  $M$  mínima,  $l = -n$ . Recordemos que esto fue cierto para el catenoide (ver el Ejemplo 3.1).

### 3.4 Funciones armónicas y superficies mínimas

Cuando una superficie mínima está parametrizada por una parametrización isoterma  $\mathbf{x}(u, v)$ , hay una estrecha relación entre el operador de Laplace  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$  y la curvatura media. Para ver esto, necesitamos las siguientes fórmulas[1]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_v + lU, \\
\mathbf{x}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{G_v}{2G} \mathbf{x}_v + nU,
\end{aligned}$$

y además, recordando que si  $\Delta \mathbf{x} = 0$  entonces  $\mathbf{x}(u, v)$  es armónica [6].

**Teorema 3.7** Si la parametrización  $\mathbf{x}$  es isoterma, entonces  $\Delta \mathbf{x} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)U$ .

**Prueba.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= \left( \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_v + lU \right) + \left( -\frac{G_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{G_v}{2G} \mathbf{x}_v + nU \right) \\
&= \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_v + lU - \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_v + nU \\
&= (l+n)U \\
&= 2E \left( \frac{(l+n)}{2E} \right) U.
\end{aligned}$$

Examinando la fórmula para la curvatura media cuando  $E = G$  y  $F = 0$ , vemos que

$$H = \frac{El + En}{2E^2} = \frac{l+n}{2E}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)U.$$

■

**Corolario 3.8** Una superficie  $M$  con una parametrización isoterma  $\mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$  es mínima si y sólo si  $x^1$ ,  $x^2$  y  $x^3$  son funciones armónicas.

**Prueba.** Si  $F$  es mínima, entonces  $H = 0$  y, por el teorema previo,  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ . Por lo tanto, las funciones coordenadas de  $\mathbf{x}$  son armónicas. Por otro lado, supongamos que  $x^1$ ,  $x^2$  y  $x^3$  son funciones armónicas. Entonces  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  y por el Teorema 3.7,  $(2EH)U = 0$ . Por lo tanto, como  $U$  es la normal unitaria y  $E = \mathbf{x}_{uu} \neq 0$ , tenemos  $H = 0$ , y  $M$  es mínima.

■

Este resultado relaciona la geometría de la teoría de superficies mínimas con el análisis complejo porque las funciones armónicas, junto con sus funciones armónicas conjugadas, producen funciones holomórficas. Entonces el Corolario 3.8 nos introduce de manera natural en el mundo de la variable compleja a través de la materia estrechamente relacionada de las funciones armónicas.

### 3.5 Las representaciones Weierstrass-Enneper

Finalmente llegamos al alma y corazón de la teoría de las superficies mínimas: la *representación Weierstrass-Enneper*. Lo que hace esta aproximación tan útil e interesante es que nos permite crear superficies mínimas sólo escogiendo funciones holomórficas. ¿Qué puede ser más simple?

Sea  $M$  una superficie mínima descrita por una parametrización isoterma  $\mathbf{x}(u, v)$ . Sea  $z = u + iv$  que denota la coordenada compleja correspondiente., y recordemos que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Como  $u = \frac{z+\bar{z}}{2}$  y  $v = \frac{-i(z-\bar{z})}{2}$ , podemos escribir

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})).$$

Recordamos a  $x^i(z, \bar{z})$  como una función compleja la cual sucede que toma valores reales, y tenemos  $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} (x_u^i - ix_v^i)$  por la definición de  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . Definimos

$$\phi \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (x_z^1, x_z^2, x_z^3).$$

Revisemos  $\phi$  un poco más cercanamente. Usaremos la siguiente notación:  $(\phi)^2 = (x_z^1)^2 + (x_z^2)^2 + (x_z^3)^2$  y  $|\phi|^2 = |x_z^1|^2 + |x_z^2|^2 + |x_z^3|^2$ , donde  $|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$  es el módulo de  $z$ . Primero, nos damos cuenta que  $(x_z^i)^2 = \left(\frac{1}{4}\right) \left( (x_u^i)^2 - (x_v^i)^2 - 2ix_u^i x_v^i \right)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\phi)^2 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 x_u^j x_v^j \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( |\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}_v|^2 - 2i \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \right) \\
&= \frac{1}{4} (E - G - 2iF) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ya que  $\mathbf{x}(u, v)$  es isoterma. Comparando las partes real e imaginaria, vemos que el recíproco también es verdadero. Es decir, si  $(\phi)^2 = 0$ , entonces la parametrización debe ser isoterma.

**Ejemplo 3.7** También tenemos que  $|\phi|^2 = \frac{E}{2} \neq 0$ , que comprobamos verificando el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 + \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 \right) \\
&= \left( |\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}_v|^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} (E + G) \\
&= \frac{E}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \Delta \mathbf{x} = 0,$$

ya que la parametrización es isoterma. (y mínima). En consecuencia, cada  $\phi^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$  es holomórfica. Inversamente, el mismo cálculo muestra que, si cada  $\phi^i$  es holomórfica, entonces cada  $x^i$  es armónica, y, por lo tanto,  $M$  es mínima. Juntas todas estas observaciones dan el

**Teorema 3.9** *Supongamos que  $M$  es una superficie con parametrización  $\mathbf{x}$ . Sea  $\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$  y supongamos  $(\phi)^2 = 0$  (es decir,  $\mathbf{x}$  es isoterma). Entonces  $M$  es mínima si y sólo si cada  $\phi^i$  es holomórfica.*

Cuando cada  $\phi^i$  es holomórfica decimos que  $\phi$  es holomórfica. El resultado anterior dice que cualquier superficie mínima puede ser descrita cercana a cada uno de sus puntos por una tripleta de funciones holomórficas  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  con  $(\phi)^2 = 0$ . Incluso, en este caso podemos construir una parametrización isoterma para una superficie mínima tomando

**Corolario 3.10**  $x^i(z, \bar{z}) = c_i + 2 \operatorname{Re} \int \phi^i dz$ .

**Prueba.** Como  $z = u + iv$ , podemos escribir  $dz = du + idv$ . (Esta es taquigrafía ‘diferencial’ para  $\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt}$ .) Entonces

$$\begin{aligned}\phi^i dz &= \frac{1}{2} [(x_u^i - ix_v^i)(du + idv)] = \frac{1}{2} [x_u^i du + x_v^i dv + i(x_u^i dv - x_v^i du)], \\ \bar{\phi}^i d\bar{z} &= \frac{1}{2} [(x_u^i + ix_v^i)(du - idv)] = \frac{1}{2} [x_u^i du + x_v^i dv - i(x_u^i dv - x_v^i du)].\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}dx^i &= \frac{\partial x^i}{\partial z} dz + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \\ &= \phi^i dz + \bar{\phi}^i d\bar{z} \\ &= \phi^i dz + \overline{\phi^i dz} \\ &= \mathbf{2} \operatorname{Re} \phi^i dz,\end{aligned}$$

y ahora podemos integrar para obtener  $x^i$ . ■

Así, en un sentido real, el problema de construir superficies mínimas se reduce a encontrar  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  con  $(\phi)^2 = 0$ . Una forma precisa de construir una tal  $\phi$  es tomar una función holomórfica  $f$  y una función meromórfica  $g$  (con  $fg^2$  holomórfica) y formar

$$\phi^1 = \frac{1}{2} f (1 - g^2), \quad \phi^2 = \frac{i}{2} f (1 + g^2), \quad \phi^3 = fg,$$

ya que

$$(\phi)^2 = 0.$$

Del mismo modo tenemos que

$$g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}.$$

Por consiguiente, obtenemos el

**Teorema 3.11** (*Representación Weierstrass-Enneper I*). Si  $f$  es una función holomórfica sobre un dominio  $D$ ,  $g$  es meromórfica sobre  $D$  y  $fg^2$  es holomórfica sobre  $D$ , entonces está definida una superficie mínima por la parametrización  $\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$ , donde

$$\begin{aligned}x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int f (1 - g^2) dz, \\ x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int if (1 + g^2) dz, \\ x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \mathbf{2} \int fg dz.\end{aligned}$$

Como podemos escribir las coordenadas de una parametrización en términos de integrales, tenemos una posibilidad real de crear superficies mínimas.

Para hacer las cosas más sencillas todavía, escribamos otra forma de la Representación Weierstrass-Enneper de manera que sólo necesitemos escoger una función en lugar de dos. Supongamos, en el Teorema 3.11, que  $g$  es holomorfa y que tiene una función inversa  $g^{-1}$  ( en un dominio  $D$ ) la cual también es holomorfa. Entonces podemos considerar a  $g$  como una nueva variable compleja  $\tau = g$  con  $d\tau = g'dz$ . Definamos  $F(\tau) = \frac{f}{g'}$  y obtenemos  $F(\tau) d\tau = f dz$ . De aquí que, si sustituimos  $g$  por  $\tau$  y  $f dz$  por  $F(\tau) d\tau$ , obtenemos el

**Teorema 3.12** (*Representación Weierstrass-Enneper II*). Para cualquier función holomorfa  $F(\tau)$ , está definida una superficie mínima por la parametrización

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})),$$

donde

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau, \\ x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int i(1 + \tau^2) F(\tau) d\tau, \\ x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} 2 \int \tau F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Notemos la correspondencia

$$\phi = \left( \frac{1}{2} (1 - \tau^2) F(\tau), \frac{i}{2} (1 + \tau^2) F(\tau), \tau F(\tau) \right).$$

Esta representación nos dice que *cualquier* representación holomorfa  $F(\tau)$  define una superficie mínima. Por supuesto, no vamos a esperar que toda función que dé integrales complejas pueda ser evaluada en forma tan precisa. No obstante, notamos que podemos obtener mucha información acerca de la superficie mínima directamente de sus representaciones.

**Ejemplo 3.8** (*El helicoides*). Sea  $F(\tau) = \frac{i}{2\tau^2}$ . Después de integrar y haciendo la sustitución  $\tau = e^z$  obtenemos

$$\begin{aligned}
x^1 &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau & x^2 &= \operatorname{Re} i \int (1 + \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau \\
&= \operatorname{Re} \int \left[ \frac{i}{2\tau^2} - \frac{i}{2} \right] d\tau & &= \operatorname{Re} \int i \left[ \frac{i}{2\tau^2} + \frac{i}{2} \right] d\tau \\
&= -\operatorname{Re} i \left[ \frac{1}{2\tau} + \frac{\tau}{2} \right] & &= -\operatorname{Re} i^2 \left[ \frac{1}{2\tau} - \frac{\tau}{2} \right] \\
&= -\operatorname{Re} i \frac{e^{-z} + e^z}{2} & &= \operatorname{Re} \frac{e^{-z} - e^z}{2} \\
&= -\operatorname{Re}(i \cosh z) & &= \operatorname{Re}(-\sinh z) \\
&= \sinh u \sin v, & &= -\sinh u \cos v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int \tau \frac{i}{2\tau^2} d\tau \\
&= \operatorname{Re} \int \frac{i}{\tau} d\tau \\
&= \operatorname{Re} i \ln \tau \\
&= \operatorname{Re} iz \\
&= -v.
\end{aligned}$$

La parametrización resultante  $(\sinh u \sin v, -\sinh u \cos v, -v)$  es una forma del helicoido.

**Ejemplo 3.9** Sea  $F(\tau) = \frac{1}{2\tau^2}$ . Entonces, usando el Teorema 3.12 y la sustitución  $\tau = e^z$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
x^1 &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2) \frac{1}{2\tau^2} d\tau & x^2 &= \operatorname{Re} i \int (1 + \tau^2) \frac{1}{2\tau^2} d\tau \\
&= \operatorname{Re} \int \left[ \frac{i}{2\tau^2} - \frac{1}{2} \right] d\tau & &= \operatorname{Re} \int i \left[ \frac{1}{2\tau^2} + \frac{1}{2} \right] d\tau \\
&= \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{2\tau} - \frac{\tau}{2} \right] & &= \operatorname{Re} i \left[ -\frac{\tau^{-1}}{2} + \frac{\tau}{2} \right] \\
&= -\operatorname{Re} \frac{\tau^{-1} + \tau}{2} & &= \operatorname{Re} i \left[ \frac{\tau - \tau^{-1}}{2} \right] \\
&= -\operatorname{Re} \left( \frac{e^{-z} + e^z}{2} \right) & &= \operatorname{Re} i (\sinh z) \\
&= -\operatorname{Re} [\cosh z] & &= -\cosh u \sin v, \\
&= -\cosh u \cos v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \operatorname{Re} \mathbf{2} \int \tau \frac{1}{2\tau^2} d\tau \\
 &= \operatorname{Re} \int \frac{1}{\tau} d\tau \\
 &= \operatorname{Re} \ln \tau \\
 &= \operatorname{Re} \ln \mathbf{e}^z \\
 &= \operatorname{Re} z \\
 &= \operatorname{Re} (u + iv) \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

que es la representación Weierstrass-Enneper II para el catenoide

$$\mathbf{x}(u, v) = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, u).$$

**Ejemplo 3.10** Usando el Teorema 3.11 con

$$(f, g) = \left( -\frac{e^{-z}}{2}, -e^z \right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int f(1 - g^2) dz \\
 &= \operatorname{Re} \int \left( -\frac{e^{-z}}{2} \right) [1 - (-e^z)^2] dz \\
 &= \operatorname{Re} \int \left( -\frac{e^{-z}}{2} \right) [1 - e^{2z}] dz \\
 &= \operatorname{Re} \int \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) dz \\
 &= \operatorname{Re} \int \sinh z dz \\
 &= \operatorname{Re} \cosh z \\
 &= \cosh u \cos v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int i f (1 + g^2) dz \\
&= \operatorname{Re} \int i \left( -\frac{e^{-z}}{2} \right) (1 + (-e^z)^2) dz \\
&= \operatorname{Re} \int i \left( -\frac{e^{-z}}{2} \right) [1 + e^{2z}] dz \\
&= \operatorname{Re} \int i \left( -\frac{e^{-z}}{2} - \frac{e^z}{2} \right) dz \\
&= -\operatorname{Re} \int i \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) dz \\
&= -\operatorname{Re} i \sinh z \\
&= \cosh u \sin v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} 2 \int f g dz \\
&= \operatorname{Re} 2 \int \left( -\frac{e^{-z}}{2} \right) (-e^z) dz \\
&= \operatorname{Re} \int dz \\
&= \operatorname{Re} z \\
&= \operatorname{Re}(u + iv) \\
&= u.
\end{aligned}$$

Y esta es la parametrización del catenoide.

**Ejemplo 3.11** Utilizando nuevamente el Teorema 3.11, ahora con

$$(f, g) = \left( -i \frac{e^{-z}}{2}, e^{-z} \right),$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int f(1 - g^2) dz \\
&= \operatorname{Re} \int \left(-i \frac{e^{-z}}{2}\right) [1 - (-e^z)^2] dz \\
&= \operatorname{Re} \int \left(-i \frac{e^{-z}}{2}\right) [1 - e^{2z}] dz \\
&= \operatorname{Re} \int i \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) dz \\
&= \operatorname{Re} i \int \sinh z dz \\
&= \operatorname{Re} i \cosh z \\
&= -\sinh u \sin v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int i f(1 + g^2) dz \\
&= \operatorname{Re} \int i \left(-i \frac{e^{-z}}{2}\right) (1 + (-e^z)^2) dz \\
&= \operatorname{Re} \int \left(\frac{e^{-z}}{2}\right) [1 + e^{2z}] dz \\
&= \operatorname{Re} \int \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) dz \\
&= \operatorname{Re} \int \cosh z dz \\
&= \operatorname{Re} \sinh z \\
&= \sinh u \sin v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} 2 \int f g dz \\
&= \operatorname{Re} 2 \int \left(-i \frac{e^{-z}}{2}\right) (-e^z) dz \\
&= \operatorname{Re} \int i dz \\
&= \operatorname{Re} i z \\
&= \operatorname{Re} i(u + iv) \\
&= \operatorname{Re}(-v + iu) \\
&= -v.
\end{aligned}$$

Que es la parametrización del helicoide.

**Ejemplo 3.12** La función  $F(\tau) = i\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^3}\right)$  es la representación asociada de la superficie de Catalan

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}\right).$$

La obtenemos cuando después de integrar sustituimos  $\tau$  por  $e^{-iz/2}$  y usamos el desarrollo de  $\sin z$ .

**Ejemplo 3.13** Sea  $F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$ . Entonces la representación asociada es la superficie de Henneberg

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) = & \left(2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh 3u \cos 3v, \right. \\ & 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh 3u \sin 3v, \\ & \left. 2 \cosh 2u \cos 2v\right). \end{aligned}$$

Para  $v = \frac{\pi}{2}$  obtenemos la parábola de Neil  $(z - 2)^3 = 9x^2$ . Esto determinará también una superficie de Henneberg. Para esta primera parte, después de integrar, sustituyamos  $\tau$  por  $e^z$ , usemos los desarrollos de  $\sin z$  y  $\cos z$  y sustituyamos  $y$  por  $-y$ .

**Ejemplo 3.14** Sea  $F(\tau) = 1$  o, equivalentemente,  $(f, g) = (1, z)$ . Con esta equivalencia las representaciones Weierstrass-Enneper dan una superficie de Enneper. Si  $(f, g) = (1, z^n)$ , entonces es obtenida una superficie de Enneper de  $n$ -ésimo orden.

**Ejemplo 3.15** Si  $(f, g) = \left(z^2, \frac{1}{z^2}\right)$ , la representación Weierstrass-Enneper da la superficie de Scherk  $z = \ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$ . Este resultado se alcanza de la siguiente manera: (1) para  $x^1$  usamos fracciones parciales para obtener  $\int \frac{2}{1+\tau^2} d\tau = i \log(1 - i\tau) - i \log(1 + i\tau)$ , (2) como los logaritmos están multiplicados por  $i$  y queremos la parte real, la definición de  $\log(z)$  da  $x^1 = \arctan\left(\frac{u}{1-v}\right) - \arctan\left(\frac{-u}{1+v}\right)$  (es decir,  $1 + \tau i = 1 - v + iu$  y  $1 - i\tau = 1 + v - iu$ ), (3) la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos da entonces  $x^1 = \arctan\left(\frac{2u}{1-(u^2+v^2)}\right)$ , (4) similarmente,  $x^2 = \arctan\left(\frac{-2v}{1-(u^2+v^2)}\right)$ , (5) además,  $x^3 = \operatorname{Re}(\log(\tau^2 + 1) - \log(\tau^2 - 1)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(u^2-v^2+1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2 + 4u^2v^2}\right)$ , (6) analizando los triángulos rectángulos apropiados, escribimos  $\cos x^2$  y  $\cos x^3$  en términos de  $u$  y  $v$  y vemos que  $x^3 = \ln\left(\frac{\cos x^2}{\cos x^1}\right)$ . Notemos que las integrales tienen períodos reales y por eso, justamente para la helicoides, podemos tomar una parte a la vez para construir la superficie entera.

El valor real de las representaciones Weierstrass-Enneper es que podemos analizar muchas facetas de las superficies mínimas directamente de las representaciones  $(f, g)$  y  $F(\tau)$ . Esto

aplica incluso para superficies cuyas integrales Weierstrass-Enneper no son calculables explícitamente. Como un ejemplo de esto, calcularemos la curvatura de Gauss  $K$  de una superficie mínima en términos de  $F(\tau)$ . Primero notemos que (ver [1],[8]) los parámetros isotermos dan

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2E} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{E} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{E_u}{E} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2E} \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} \ln E + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln E \right) \\ &= -\frac{1}{2E} \Delta (\ln E), \end{aligned}$$

donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ . Por el Ejemplo 3.7, sabemos que  $E = 2|\phi|^2$ , por lo que calculamos  $E$  para

$$\phi = \left( \frac{1}{2} (1 - \tau^2) F(\tau), \frac{i}{2} (1 + \tau^2) F(\tau), \tau F(\tau) \right).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} E &= 2 \left[ \left| \frac{1}{2} (1 - \tau^2) F(\tau) \right|^2 + \left| \frac{i}{2} (1 + \tau^2) F(\tau) \right|^2 + |\tau F(\tau)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} |F|^2 \left[ |\tau^2 - 1|^2 + |\tau^2 + 1|^2 + 4|\tau|^2 \right]. \end{aligned}$$

Ahora,  $\tau^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$ , entonces,  $|\tau^2 - 1|^2 = (u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2$ .

De manera semejante,  $|\tau^2 + 1|^2 = (u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2$  y  $4|\tau|^2 = 4(u^2 + v^2)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} |F|^2 2 \left[ (u^2 - v^2)^2 + 1 + 4u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2 \right] \\ &= |F|^2 \left[ u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 1 + 2u^2 + 2v^2 \right] \\ &= |F|^2 \left[ 1 + u^2 + v^2 \right]^2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.16** Usando la igualdad  $|\phi|^2 = \frac{1}{4} |f|^2 \left( (1 - g^2)(1 - \bar{g}^2) + (1 + g^2)(1 + \bar{g}^2) + 4g\bar{g} \right)$  y el Ejemplo 3.7, tenemos directamente de la definición de  $\phi$  en términos de la representación  $(f, g)$  que  $E = |f|^2 \left[ 1 + |g|^2 \right]^2$ .

A continuación, sea  $\ln E = \ln |F|^2 + 2 \ln (1 + u^2 + v^2)$ .

Como

$$\Delta (2 \ln (1 + u^2 + v^2)) = \frac{8}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Debemos calcular ahora

$$\Delta (\ln |F|^2) = \Delta (\log F \bar{F}) = \Delta (\log F + \log \bar{F}).$$

Previamente, hemos visto que  $\Delta = 4\partial^2/\partial\bar{z}\partial z$ . Más aún, como  $F$  es holomórfica,  $\bar{F}$  no lo puede ser, entonces  $\partial\bar{F}/\partial z = 0$  y, consecuentemente,  $\partial(\log \bar{F})/\partial z = 0$ . Nos quedamos con

$$\Delta (\log F) = 4 \frac{\partial^2 (\log F)}{\partial\bar{z}\partial z} = 4 \frac{\partial (F'/F)}{\partial\bar{z}} = 0,$$

ya que  $F, F'$  y, por lo tanto  $F'/F$  son holomórficas. Así,  $\Delta (\ln |F|^2) = 0$ , y  $\Delta (\ln E) = 8/(1 + u^2 + v^2)^2$ .

**Teorema 3.13** *La curvatura de Gauss de la superficie mínima determinada por la representación Weierstrass-Enneper II es*

$$K = \frac{-4}{|F|^2 (1 + u^2 + v^2)^4}.$$

**Prueba.** De los cálculos anteriores,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2E} \Delta (\ln E) \\ &= \frac{-8}{2|F|^2 (1 + u^2 + v^2)^4} \\ &= \frac{-4}{|F|^2 (1 + u^2 + v^2)^4}. \end{aligned}$$

■

Usando la identificación  $F = \frac{f}{g}$  podemos deducir la fórmula

$$K = \frac{4|g|^2}{|F|^2 (1 + |g|^2)^4}$$

en términos de la representación Weierstrass-Enneper I.

Las representaciones Weierstrass-Enneper nos dicen que la teoría de las superficies mínimas se sitúa a los pies de el análisis complejo. No obstante, siempre es útil en matemáticas mirar el mismo objeto desde diferentes puntos de vista, para ello regresemos a algunos fundamentos de geometría diferencial.

### 3.6 El mapeo de Gauss

El *mapeo de Gauss* de una superficie  $M$  con parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  es un mapeo de la superficie  $M$  a la esfera unitaria  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , denotada  $G : M \rightarrow S^2$  y dada por  $G(p) = U_p$ , donde  $U_p$  es la normal unitaria a  $M$  en  $p$ . En términos de la parametrización, podemos escribir  $G(\mathbf{x}(u, v)) = U(u, v)$  y, para una pequeña parte de  $M$ , pensar de  $U(u, v)$  como una parametrización de la esfera  $S^2$ . Hay además una transformación lineal inducida de planos tangentes dada, para la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , por  $G_*(\mathbf{x}_u) = U_u$  y  $G_*(\mathbf{x}_v) = U_v$ . Para entender esto, notemos lo siguiente. Un vector tangente sobre  $M$  es el vector velocidad de alguna curva sobre  $M$ , así tomando  $U$  sólo a lo largo de la curva, creamos una nueva curva sobre la esfera  $S^2$ . El vector tangente de la nueva curva esférica es entonces, por definición, la imagen bajo  $G_*$  del vector tangente original de la curva. Aplicando este razonamiento a las curvas paramétricas, vemos que  $G_*(\mathbf{x}_u) = U_u$  y  $G_*(\mathbf{x}_v) = U_v$ .

**Ejemplo 3.17** (*Mapeo de Gauss de la Helicoide*). Consideremos la helicoide  $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ . Debemos calcular  $G_*(\mathbf{x}_u) = U_u$  y  $G_*(\mathbf{x}_v) = U_v$ . Tenemos

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

con  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$  y  $|\mathbf{x}_u| = 1$  y  $|\mathbf{x}_v| = \sqrt{1 + u^2}$ . La normal unitaria está dada por

$$U = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Tomando derivadas parciales nos da

$$U_u = \frac{(-u \sin v, u \cos v, 1)}{(1 + u^2)^{3/2}}, \quad U_v = \frac{(\cos v, \sin v, 0)}{\sqrt{1 + u^2}}$$

con longitudes calculadas que son

$$|U_u| = \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2} |\mathbf{x}_u|,$$

$$|U_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{1 + u^2} |\mathbf{x}_v|.$$

Además, por supuesto,  $G_*(\mathbf{x}_u) \cdot G_*(\mathbf{x}_v) = U_u \cdot U_v = 0$ , como es requerido para que el mapeo de Gauss  $G$  sea conforme con factor de escala  $\rho(u, v) = 1/(1 + u^2)$ .

**Ejemplo 3.18** *Para la catenoide y la superficie de Enneper,*

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - u^3/3 + uv^2, -v + v^3/3 - vu^2, u^2 - v^2),$$

respectivamente, tenemos que los mapeos de Gauss son conformes con respectivos factores de escala  $1/\cosh^2 u$ ,  $2/(2+u^2+v^2)^2$ .

Los ejemplos 3.17 y 3.18 no son sólo instancias aisladas, como lo muestra el siguiente resultado.

**Proposición 3.14** *Sea  $M$  una superficie mínima con parametrización isoterma  $\mathbf{x}(u, v)$ . Entonces el mapeo de Gauss de  $M$  es un mapeo conforme.*

**Prueba.** Con el fin de mostrar que  $G$  es conforme, sólo necesitamos mostrar que  $|G_*(\mathbf{x}_u)| = \rho(u, v)|\mathbf{x}_u|$ ,  $|G_*(\mathbf{x}_v)| = \rho(u, v)|\mathbf{x}_v|$  y  $G_*(\mathbf{x}_u) \cdot G_*(\mathbf{x}_v) = \rho^2(u, v)\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ . Como parámetros isotermos tienen  $E = G$  y  $F = 0$ , obtenemos  $H = (l + n)/2E$  así como

$$\begin{aligned} G_*(\mathbf{x}_u) &= U_u = -\frac{l}{E}\mathbf{x}_u - \frac{m}{E}\mathbf{x}_v, \\ G_*(\mathbf{x}_v) &= U_v = -\frac{m}{E}\mathbf{x}_u - \frac{n}{E}\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

donde hemos usado las fórmulas para  $U_u$  y  $U_v$  tomadas de la Geometría Diferencial. Usando coordenadas isotermas y usando productos punto nos da

$$\begin{aligned} |U_u|^2 &= \frac{1}{E} [l^2 + m^2], & |U_v|^2 &= \frac{1}{E} [m^2 + n^2], \\ U_u \cdot U_v &= \frac{m}{E} [l + n]. \end{aligned}$$

Pero  $M$  es mínima, entonces  $H = 0$  y esto significa  $l = -n$  por el Ejercicio 3.6. Obtenemos entonces

$$|U_u|^2 = \frac{1}{E} [l^2 + m^2] = |U_v|^2 \quad \text{y} \quad U_u \cdot U_v = 0.$$

Como  $|\mathbf{x}_u| = \sqrt{E} = |\mathbf{x}_v|$  y  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ , vemos que el mapeo de Gauss  $G$  es conforme con factor de escala  $\sqrt{l^2 + m^2}/E$ . ■

**Ejemplo 3.19** *Los resultados anteriores nos dicen que si consideramos  $K = (-l^2 - m^2)/E^2$ , entonces el factor de escala  $\sqrt{l^2 + m^2}/E$  es igual a  $\sqrt{|K|}$ , donde  $K$  es la curvatura de Gauss.*

El siguiente resultado muestra que la conformalidad del mapeo de Gauss casi siempre caracteriza superficies mínimas.

**Proposición 3.15** *Sea  $M$  una superficie parametrizada por  $\mathbf{x}(u, v)$  cuyo mapeo de Gauss  $G : M \rightarrow S^2$  es conforme. Entonces o  $M$  es parte de una esfera, o  $M$  es una superficie mínima.*

### 3.7 Proyección estereográfica y mapeo de Gauss

El mapeo de Gauss para una superficie mínima tiene una descripción directamente en términos de la Representación Weierstrass-Enneper. La *proyección estereográfica del polo Norte*  $N$  está denotada por

$$St : S^2 / \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

y definida por

$$St(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = \left( \frac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{\sin u \cos v}{1 - \sin v}, 0 \right).$$

Como lo hemos venido haciendo, podemos tomar el mapeo inducido por vectores tangentes derivando con respecto de  $u$  y  $v$ .

$$\begin{aligned} St_*(\mathbf{x}_u) &= \left( \frac{-\sin u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, 0 \right) \\ St_*(\mathbf{x}_v) &= \left( \frac{\cos u}{1 - \sin v}, \frac{\sin u}{1 - \sin v}, 0 \right). \end{aligned}$$

En consecuencia, tomando productos punto en  $\mathbb{R}^3$ , obtenemos

$$\begin{aligned} St_*(\mathbf{x}_u) \cdot St_*(\mathbf{x}_u) &= \frac{\cos^2 v}{(1 - \sin v)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - \sin v)^2} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} St_*(\mathbf{x}_v) \cdot St_*(\mathbf{x}_v) &= \frac{1}{(1 - \sin v)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - \sin v)^2} \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

$$St_*(\mathbf{x}_u) \cdot St_*(\mathbf{x}_v) = 0.$$

El factor  $1/(1 - \sin v)$  muestra que la proyección estereográfica es un mapeo conforme con factor de escala  $1/(1 - \sin v)$ . Esto es, en particular, la proyección estereográfica preserva ángulos. En coordenadas Cartesianas, la proyección estereográfica está dada por

$$St(x, y, z) = (x/1 - z, y/1 - z, 0)$$

Podemos identificar el plano real  $\mathbb{R}^2$  con el plano complejo  $\mathbb{C}$  y extender  $St$  a un mapeo uno-uno  $St : S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con el polo Norte mapeando a  $\infty$ . Con estas identificaciones, tenemos

**Teorema 3.16** Sea  $M$  una superficie mínima con parametrización isoterma  $\mathbf{x}(u, v)$  y representación Weierstrass-Enneper  $(f, g)$ . Entonces el mapeo de Gauss de  $M$ ,  $G : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , puede ser identificado con la función meromórfica  $g$ .

**Prueba.** Recordemos que  $\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$ ,  $\bar{\phi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{z}}$  y

$$\phi^1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi^2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi^3 = fg.$$

Describiremos el mapeo de Gauss en términos de  $\phi^1, \phi^2$ , y  $\phi^3$ . Primero, escribimos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \left( (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^1, (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2, (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^3 \right) \\ &= (x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2, x_u^3 x_v^1 - x_u^1 x_v^3, x_u^1 x_v^2 - x_u^2 x_v^1) \end{aligned}$$

y considerando la primera componente  $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^1 = x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2$ . Tenemos

$$\begin{aligned} x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2 &= \text{Im} [(x_u^2 - i x_v^2)(x_u^3 + i x_v^3)] \\ &= \text{Im} [2(\partial x^2 / \partial z) \cdot 2(\partial x^3 / \partial \bar{z})] \\ &= 4\text{Im} (\phi^2 \bar{\phi}^3). \end{aligned}$$

De manera semejante,  $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2 = 4\text{Im} (\phi^3 \bar{\phi}^1)$  y  $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^3 = 4\text{Im} (\phi^1 \bar{\phi}^2)$ .

En consecuencia, obtenemos

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 4\text{Im} (\phi^2 \bar{\phi}^3, \phi^3 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2) = 2(\phi \times \bar{\phi}),$$

donde la última igualdad se sigue de  $z - \bar{z} = 2\text{Im}z$ . Ahora, como  $\mathbf{x}(u, v)$  es isoterma,  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |\mathbf{x}_u| \cdot |\mathbf{x}_v| = |\mathbf{x}_u|^2 = E = 2|\phi|^2$  por el Ejercicio 3.6.1. Por lo tanto, tenemos

$$U = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \frac{2(\phi \times \bar{\phi})}{2|\phi|^2} = \frac{\phi \times \bar{\phi}}{|\phi|^2}.$$

El mapeo de Gauss  $G : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  puede ahora ser dada en términos de  $\phi^i$ :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}(u, v)) &= \text{St}(U(u, v)) \\ &= \text{St}\left(\frac{\phi \times \bar{\phi}}{|\phi|^2}\right) \\ &= \text{St}\left(\frac{2\text{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3, \phi^3 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}\right) \\ &= \left(\frac{2\text{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3)}{|\phi|^2 - 2\text{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^2)}, \frac{2\text{Im}(\phi^3 \bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2\text{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^2)}, 0\right). \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple porque

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-z} &= \frac{2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}} \\ &= \frac{2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2} \cdot \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)} \\ &= \frac{2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)} \end{aligned}$$

y similarmente para  $y/(1-z)$ . Identificando  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $x + iy \in \mathbb{C}$  nos permite escribir

$$G(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3) + 2i\operatorname{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}.$$

Ahora, consideremos el numerador  $\mathcal{N}$  de la fracción anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= 2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3) + 2i\operatorname{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1) \\ &= \frac{1}{i} [\phi^2\bar{\phi}^3 - \bar{\phi}^2\phi^3 + i\phi^3\bar{\phi}^1 - i\bar{\phi}^3\phi^1] \\ &= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) - (\bar{\phi}^3)(\phi^1 + i\phi^2). \end{aligned}$$

Además,  $0 = (\phi)^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = (\phi^1 - i\phi^2)(\phi^1 + i\phi^2) + (\phi^3)^2$ , entonces

$$\phi^1 + i\phi^2 = \frac{-(\phi^3)^2}{\phi^1 - i\phi^2}.$$

Obtenemos por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) + \bar{\phi}^3 \frac{(\phi^3)^2}{\phi^1 - i\phi^2} \\ &= \frac{\phi^3 [(\phi^1 - i\phi^2)(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) + |\phi^3|^2]}{\phi^1 - i\phi^2} \\ &= \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} [|\phi^1|^2 + |\phi^2|^2 + |\phi^3|^2 + i(\bar{\phi}^2\phi^1 - \phi^2\bar{\phi}^1)] \\ &= \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} [|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi_1\bar{\phi}^2)]. \end{aligned}$$

El segundo factor del numerador  $\mathcal{N}$  cancela el denominador de  $G(\mathbf{x}(u, v))$ , y terminamos con

$$G(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}.$$

Por el Ejercicio 3.6.5, sabemos que  $g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}$  también, por lo que queda demostrado.

■

**Teorema 3.17** *La catenoide y la superficie de Enneper son las únicas superficies mínimas cuyo mapeo de Gauss es uno-uno.*



## Capítulo 4

# El problema de Plateau

En este capítulo vamos a describir algunos de los resultados básicos que permitan establecer la existencia de soluciones para el problema de Plateau; es decir, "Encontrar una superficie de área mínima que es generada por una curva cerrada de Jordan dada de antemano".

Como ya vimos que las superficies de área mínima son mínimas, entonces podríamos hacer la siguiente formulación del problema anterior como:

"Dada una curva cerrada y rectificable de Jordan  $\Gamma$ , encontrar una superficie mínima que genere  $\Gamma$ ".

Esta formulación es menos restrictiva que la primera ya que en esta región no interesan los mínimos, sino los puntos estacionarios del funcional de área.

Observamos primero que el problema no necesariamente tiene una única solución. En la Figura 4.1, observamos dos superficies mínimas diferentes que se forman en una misma estructura de alambre.

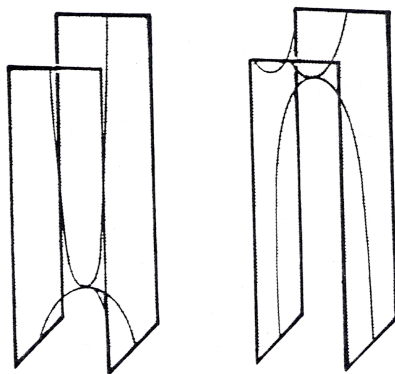


Figura 4.1: Dos soluciones para un mismo marco.

Es posible también considerar el problema de Plateau más general en el cual se encuentra una superficie mínima generada por una o más curvas. Observemos la Figura 4.2.



Figura 4.2: Superficies mínimas en un alambre con forma de audífono.

#### 4.1 El funcional de área y la integral de Dirichlet

La dificultad que presenta el problema de Plateau está en que es posible agregar “cabellos” a una superficie sin que el área aumente.

Ejemplo: Dadas

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

$$K(\Gamma) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

$$H = \{(x, y, z) \mid x = y = 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Sea

$$K^*(\Gamma) = K(\Gamma) \cup H.$$

$K^*(\Gamma)$  se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$x(u, v) = y(u, v) = 0; \quad z(u, v) = \varphi(r); \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}; \quad r = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$x(u, v) = \psi(r) \cos \theta; \quad y(u, v) = \psi(r) \sin \theta; \quad z(u, v) = 0; \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

donde

$$\varphi(r) = e^{4\left(1 - \frac{1}{1-4r^2}\right)},$$

$$\psi(r) = e^{4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4r^2-1}\right)}.$$

$x(u, v)$  es irregular en  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$  y además mapea el disco  $\{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}\}$  en el "cabello"  $H$ . En la Figura 4.3 apreciamos la superficie señalada.

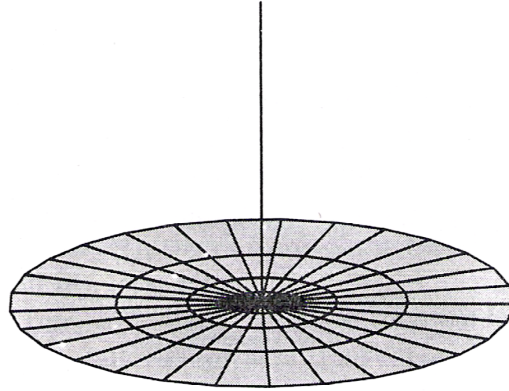


Figura 4.3: Superficie con un cabello.

Aquí vemos que este  $K^*(\Gamma)$  el disco más un pelo, tiene el mismo área que  $K(\Gamma)$ , así que para evitar la presencia de estas soluciones de área mínima, sería conveniente usar parametrizaciones que no presenten estas anomalías.

Para poder evitar las dificultades que aparecen con las superficies con "cabellos" usaremos parametrizaciones adecuadas. Primero observemos que si  $a$  y  $b$  son vectores en  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$|a \times b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

y por consiguiente

$$|a \times b| \leq \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|b\|^2),$$

de donde tenemos que si  $X : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una superficie diferenciable sobre  $B$ , entonces el área de la superficie está dada por

$$A_B(X) = \int_B |x_u \times x_v| \, du \, dv,$$

y si  $D_B(X)$  es la integral de Dirichlet y está dada por

$$D_B(X) = \frac{1}{2} \int_B (\|x_u\|^2 + \|x_v\|^2) \, du \, dv,$$

tenemos en general que

$$A_B(X) \leq D_B(X),$$

y la igualdad se obtiene si

$$\|x_u\| = \|x_v\| \quad \text{y} \quad x_u \cdot x_v = 0.$$

Ahora, debido a que toda superficie regular puede reparametrizarse de tal forma que se satisfagan las relaciones de conformidad

$$\|x_u\| = \|x_v\| \quad \text{y} \quad x_u \cdot x_v = 0,$$

parece más conveniente buscar soluciones al problema de Plateau con estas parametrizaciones, ya que mínimos de  $D_B(X)$  van a ser mínimos también de  $A_B(X)$ . Por consiguiente consideramos el siguiente caso:

$$B = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1 \},$$

$$C = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1 \} = \partial B.$$

Sabemos también que una curva de Jordan  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  ya que es homeomorfa a  $\partial B$ .

**Definición 4.1** *Dada una curva de Jordan  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$ , diremos que  $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una solución al problema de Plateau para el contorno frontera  $\Gamma$  si satisface las siguientes condiciones:*

1. Por una parte  $X \in C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ , donde  $X$  satisface

$$\Delta X = 0.$$

- 2.

$$\|x_u\| = \|x_v\| \quad ; \quad \langle x_u, x_v \rangle = 0.$$

3. La restricción  $X|_C$  de  $X$  a la frontera  $C$  del dominio  $B$  es un homeomorfismo de  $C$  sobre  $\Gamma$ .

Esta solución se conoce como solución tipo-disco del problema de Plateau para el contorno  $\Gamma$ . La condición 3 de arriba se expresa usualmente diciendo que  $X|_C$  es continua y estrictamente monótona. Sin embargo, esta condición no es cerrada con respecto a la convergencia uniforme, así que necesitamos refinar un poco.

**Definición 4.2** *Supongamos que  $\Gamma$  es una curva cerrada de Jordan en  $\mathbb{R}^3$  y que  $\varphi : C \rightarrow \Gamma$  es un homeomorfismo de  $C$  sobre  $\Gamma$ . Entonces un mapeo continuo  $\psi : C \rightarrow \Gamma$  de  $C$  sobre  $\Gamma$ , se dice que es débilmente monótono si existe una función  $\tau : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continua no decreciente con  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(2\pi) = 2\pi$  tal que*

$$\psi(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\tau(\theta)}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

En otras palabras,  $\psi$  es débilmente monótona si los puntos imagen  $\psi(w)$  recorren  $\Gamma$  en una dirección constante cuando  $w$  se mueve a lo largo de  $C$  en una dirección constante. Si definimos el mapeo  $\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow C$  como  $\varepsilon(\theta) = e^{i\theta}$ , podemos escribir la relación anterior como

$$\psi \circ \varepsilon = \varphi \circ \varepsilon \circ \tau,$$

es decir,

$$\varepsilon \circ \tau = \varphi^{-1} \circ \psi \circ \varepsilon,$$

de esta relación se puede concluir:

Resultado: si  $\{\varphi_n\}$  es una sucesión de mapeos débilmente monótonos de  $C$  sobre una curva de Jordan cerrada  $\Gamma$ , y si  $\{\psi_n\}$  converge uniformemente sobre  $C$  a un mapeo  $\psi : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces  $\psi$  es un mapeo débilmente monótono continuo de  $C$  sobre  $\Gamma$ .

Ahora ya estamos en posibilidades de dar la clase de mapeos admisibles  $\mathcal{C}(\Gamma)$ .

**Definición 4.3** Dada una curva cerrada de Jordan  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$ , un mapeo  $X : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se dice que es de clase  $\mathcal{C}(\Gamma)$  si  $X \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3)$  y si su traza  $X|_C$  puede representarse como un mapeo continuo débilmente monótono  $\varphi : C \rightarrow \Gamma$  de  $C$  sobre  $\Gamma$ .

Sea

$$D(X) = D_B(X) = \frac{1}{2} \int_B \left( \|X_u\|^2 + \|X_v\|^2 \right) du dv,$$

la integral de Dirichlet de un mapeo  $X \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3)$ . Entonces definimos el problema variacional  $\mathcal{P}(\Gamma)$  asociado con el problema de Plateau para la curva  $\Gamma$  como : *Minimizar la integral de Dirichlet  $D(X)$  en la clase  $\mathcal{C}(\Gamma)$ .*

Es decir, si

$$e(\Gamma) = \inf \{D(X) | X \in \mathcal{C}(\Gamma)\},$$

nosotros queremos encontrar  $X$  en  $\mathcal{C}(\Gamma)$  tal que  $D(X) = e(\Gamma)$ .

Para resolver éste problema necesitamos encontrar una sucesión minimizante  $\{X_n\}$  cuyos valores en la frontera  $X_n|_C$  contengan una subsucesión que sea uniformemente convergente sobre  $C$ . Esto se logra de la siguiente forma:

Fijemos tres diferentes puntos  $w_1, w_2$  y  $w_3$  sobre  $C$  y tres puntos distintos  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  sobre  $\Gamma$  y consideremos aquellos mapeos  $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$  tales que satisfagan la condición de tres puntos:

$$X(w_k) = Q_k, \quad k = 1, 2, 3$$

y este conjunto de mapeos lo denotamos como  $\mathcal{C}^*(\Gamma)$ . Sea

$$e^*(\Gamma) = \inf \{D(X) | X \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\},$$

entonces es claro que

$$e(\Gamma) \leq e^*(\Gamma).$$

Además, si  $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ , existen tres parámetros distintos  $\xi_1, \xi_2$  y  $\xi_3$  en  $C$  tales que

$$X(\xi_k) = Q_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Sea  $\sigma$  un mapeo conforme de  $\bar{B}$  sobre sí mismo con la propiedad de que

$$\sigma(w_k) = \xi_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Entonces el mapeo  $Y = X \circ \sigma$  está en  $\mathcal{C}^*(\Gamma)$  y satisface  $D(Y) = D(X)$ , por la invariancia conformal de la integral de Dirichlet. Por lo tanto obtenemos

$$e(\Gamma) = e^*(\Gamma).$$

Lo anterior nos muestra que, cualquier solución  $X$  del problema restringido:

$$\mathcal{P}^*(\Gamma) : \text{ "Minimizar } D(X) \text{ en la clase } \mathcal{C}^*(\Gamma) \text{ "}$$

es también una solución del problema original  $\mathcal{P}(\Gamma)$ . Por lo tanto abordaremos el problema  $\mathcal{P}^*(\Gamma)$ .

Antes de empezar la construcción del proceso de minimización, necesitamos hacer ver que  $\mathcal{C}^*(\Gamma)$  es no vacío, de otra forma el problema no tendrá solución.

Para ver que  $\mathcal{C}^*(\Gamma)$  es no vacío, veremos que necesitamos pedir alguna propiedad adicional a la curva  $\Gamma$ .

Sea  $\varphi : C \rightarrow \Gamma$  un homeomorfismo que representa  $\Gamma$ , y sea

$$\varphi(e^{i\theta}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\}$$

su expansión de Fourier,  $A_n, B_n \in \mathbb{R}^3$ , la cual es convergente en  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{R}^3)$ . Podemos asumir que  $\varphi$  satisface la condición prescrita de los tres puntos; es decir,

$$\varphi(w_k) = Q_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Sean  $\rho$  y  $\theta$ , las coordenadas polares alrededor del origen del plano  $w$ , es decir

$$w = \rho e^{i\theta},$$

y sea

$$X(w) := \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\}.$$

Debido a que  $|A_n|$  y  $|B_n|$  están acotados, por  $2 \sup_C |\varphi|$ , la serie del lado derecho converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de  $B$  y es conocido que su límite no es otro que la integral de Poisson para  $\varphi(e^{i\theta})$ , en consecuencia

$$X(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\psi}) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \psi)} d\psi$$

para  $w = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho < 1$ . Por el lema de Schwarz  $X(w)$  es armónico en  $B$  y además,  $X(w) \rightarrow \varphi(w_0)$ ,  $w \rightarrow w_0$ ,  $w \in B$ , para todo  $w_0 \in \partial B$ . Es decir,  $X$  puede extenderse continuamente a  $\bar{B}$  tomando los valores de  $\varphi$  sobre  $C = \partial B$ . Además se puede calcular directamente y obtener

$$D(X) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n|^2 + |B_n|^2).$$

Así, el mapeo  $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  pertenece a la clase  $H_2^1(B, \mathbb{R}^3)$  si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n|^2 + |B_n|^2) < \infty.$$

Si esto vale, entonces  $\mathcal{C}^*(\Gamma)$  es no vacío. La condición anterior se puede ver que se satisface para la curva de Jordan  $\Gamma$  de longitud finita; es decir, que sea rectificable. Por lo tanto una condición suficiente para que  $\mathcal{C}^*(\Gamma)$  sea no vacío, es que curva  $\Gamma$  sea rectificable.

La demostración de la existencia de la solución está dada por los siguientes teoremas que no demostraremos por ser sumamente técnicos, pero se puede consultar su demostración en el libro de Dierkes sobre Superficies Mínimas [19].

**Teorema 4.1** *Si  $\mathcal{C}(\Gamma)$  no es vacío, entonces el problema  $\mathcal{P}(\Gamma)$  tiene al menos una solución, la cual es continua sobre  $\bar{B}$  y armónica en  $B$ . En particular,  $\mathcal{P}(\Gamma)$  tiene una solución para cada curva rectificable  $\Gamma$ .*

**Teorema 4.2** *Todo minimizador  $X$  de la integral de Dirichlet dado, de la clase  $\mathcal{C}(\Gamma)$  es continuo en  $\bar{B}$ , armónico en  $B$ , y además*

$$\|X_u\|^2 = \|X_v\|^2, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

en  $B$  es decir  $X$  es una superficie mínima.

**Teorema 4.3** *Toda solución del problema mínimo  $\mathcal{P}(\Gamma)$  es una superficie de área mínima en*

$$\mathcal{C}(\Gamma) \cap C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3).$$



## Capítulo 5

# Membranas de jabón y sólidos platónicos

Desde tiempos inmemoriales los poliedros regulares han cautivado a la humanidad por muchos motivos: su belleza y simetría saltan a la vista, el hecho de estar contenidos en la esfera, el ser conjugados, la fórmula de Euler [ $V - A + C = 2$ ], etc. Junto a todo lo anterior está la posibilidad de obtener superficies inscritas en su estructura, y esto con nada mejor que con membranas de jabón.

### 5.1 Consideraciones previas para la construcción de los modelos

Primero que nada hay que construir los "sólidos geométricos", que en este caso no son sólidos sino huecos, es decir, vamos a trabajar con su estructura, con su esqueleto. Para tal efecto utilizamos esferas de plástico de un centímetro de diámetro aproximadamente (también podemos usar otros diámetros, como las esferas de los desodorantes roll on) para los vértices y tubos delgados de popotes de plástico (como para tomar café) para las aristas, las caras naturalmente que están huecas. Ahora tenemos que perforar las pequeñas esferas con ángulos precisos para insertar en dichas perforaciones los popotes y así formar la estructura completa del poliedro. Esta es una operación muy delicada pues requiere, en primer lugar, diseñar una prensa para sujetar firmemente las esferas sin dañarlas, en segundo lugar permitir un área expuesta (de la superficie de la esfera) de tamaño suficiente para que acceda la broca, y en tercero pero no menos importante lugar, realizar la perforación con la velocidad de giro de la broca adecuada (alta velocidad de giro de la broca funde el plástico y muy baja velocidad de giro lo desgarran) y la fuerza de penetración (si la fuerza de penetración es excesiva, la broca no actúa como barreno sino como cincel, desintegrando prácticamente las pelotitas de plástico). Todos los factores mencionados anteriormente los pudimos manejar a través de prueba y error y utilizando una fresadora Sherline modelo 5400.

## 5.2 Fórmula para una solución jabonosa

Una vez construidos los cuerpos geométricos hay que preparar una solución de agua jabonosa. Hay muchas y muy variadas recetas para la solución jabonosa, nosotros escogimos la siguiente:

- a) 50% de agua (entre más limpia mejor).
- b) 40% de shampoo para bebé Johnson & Johnson (del tipo *no más lágrimas*).
- c) 10% de glicerina (de preferencia la que se usa en repostería).

## 5.3 Experimentación con los modelos y las leyes de Plateau a que obedecen

Ahora no nos queda más que sumergir los cuerpos geométricos en la mezcla y deleitarnos con las superficies que se forman al extraerlos. Dichas superficies satisfacen las siguientes tres condiciones geométricas descubiertas experimentalmente por Joseph Plateau [5]:

- a) Tres superficies planas de una membrana de jabón se intersectan en una línea.
  - b) El ángulo entre dos cualesquiera planos tangentes a la intersección de superficies, en cualquier punto a lo largo de la línea intersección de tres superficies, es  $120^\circ$ .
  - c) Cuatro de las líneas, cada una formada por la intersección de tres superficies, se encuentran en un punto y el ángulo entre cualquier par de líneas adyacentes es  $109^\circ 28'$ .
- Apreciamos que estas tres leyes se cumplen en el tetraedro.

Del resultado del área mínima contenida en el tetraedro podríamos esperar que la superficie de área mínima contenida en un cubo podría consistir en una serie de superficies cada una limitada por una arista del cubo y encontrándose en un punto en el centro. Pero si esto sucediera, no se satisfarían las condiciones de Plateau. Es por ello que en un hexaedro las superficies se cortan en el centro en un cuadrado.

El octaedro nos puede dar diferentes modelos de superficies mínimas. Estas se pueden obtener sacando el marco de la solución a diferentes ángulos, perturbando la superficie sacudiendo el marco o soplando sobre la superficie de manera que brinque hacia otra configuración mínima.

Los ángulos entre caras adyacentes de un dodecaedro son  $116^\circ 36'$ . Como estos ángulos son menores que  $120^\circ$  las superficies mínimas limitadas por las aristas de un dodecaedro se formarán dentro del marco.

El ángulo diedro del icosaedro, el ángulo entre dos caras adyacentes, es de  $138^\circ 11'$ . Esto es mayor que  $120^\circ$  y consecuentemente la superficie mínima se forma sobre las caras del marco. La superficie consta de 19 caras triangulares planas equiláteras. La superficie mínima, que conecta todas las caras del marco, deja una de las caras abierta. Entonces, como la diferencia de presión a través de cualquier superficie es cero, las secciones triangulares equiláteras son planas.

En las siguientes figuras se describe la forma en que se construyeron los sólidos platónicos utilizando una fresadora Sherline 5400

Una parte muy importante de este trabajo es revisar de manera experimental el conjunto de membranas de jabón que se forman dentro de los sólidos platónicos, mismas que , a la

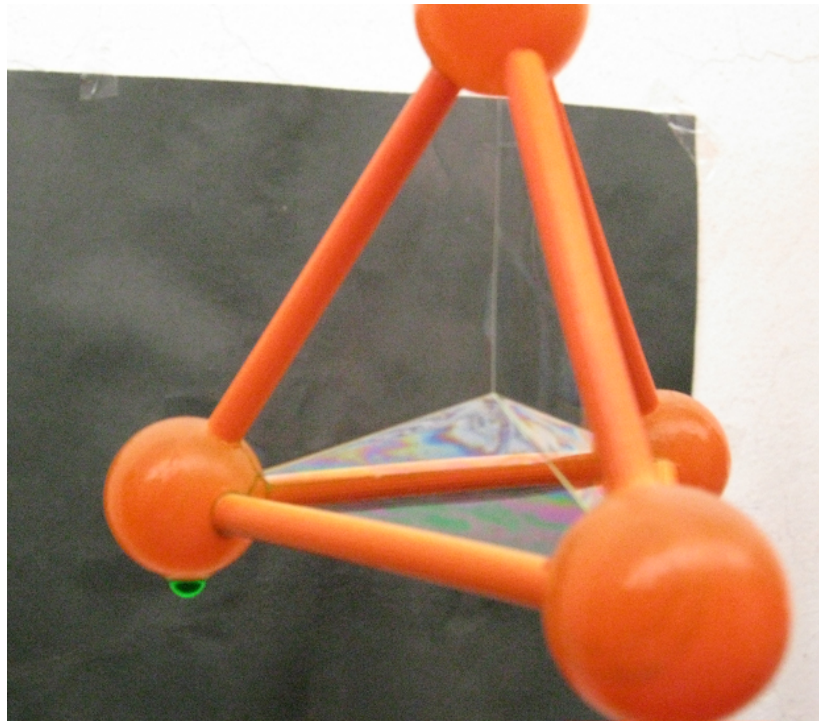


Figura 5.1: Membrana en un tetraedro

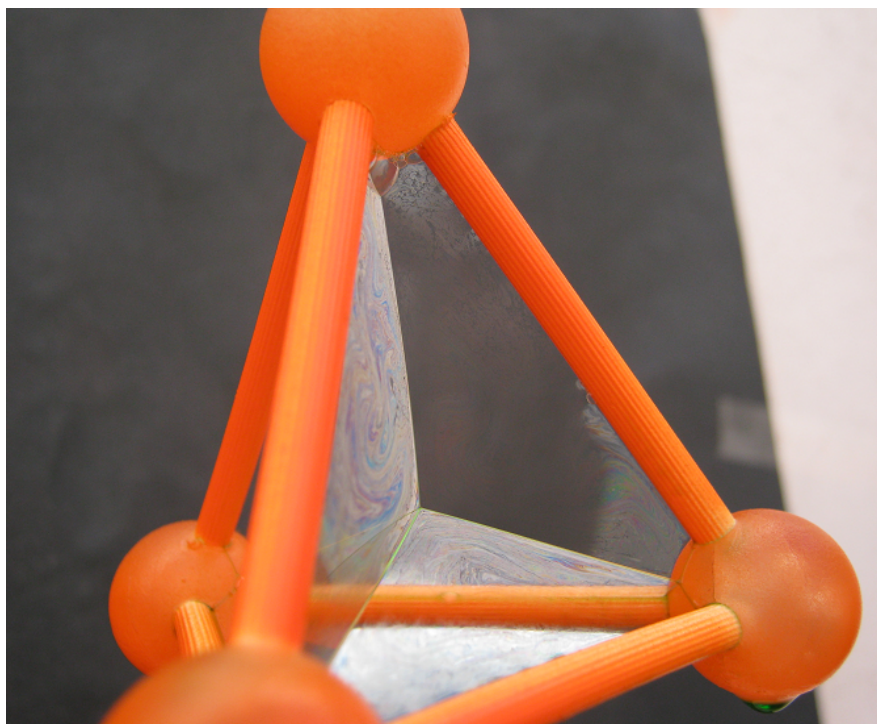


Figura 5.2: Otro aspecto de la figura anterior.

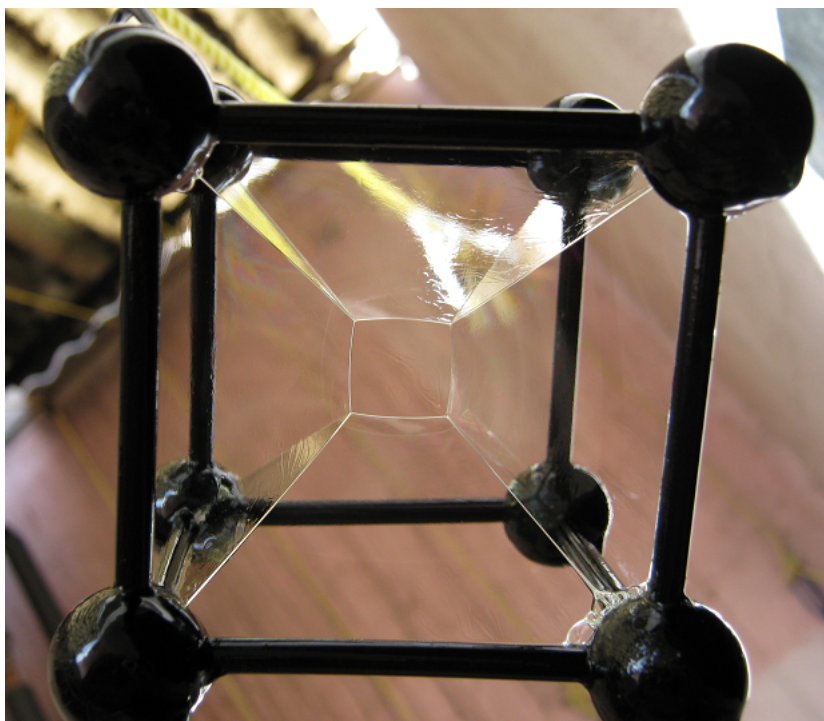


Figura 5.3: Superficies mínimas en el cubo.

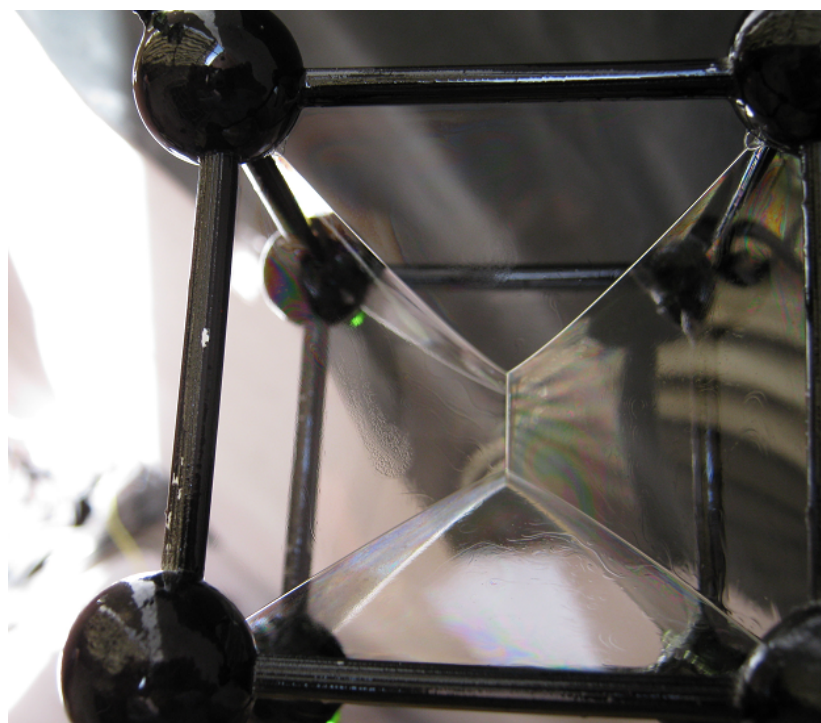


Figura 5.4: Otra vista de la superficie mínima del cubo.

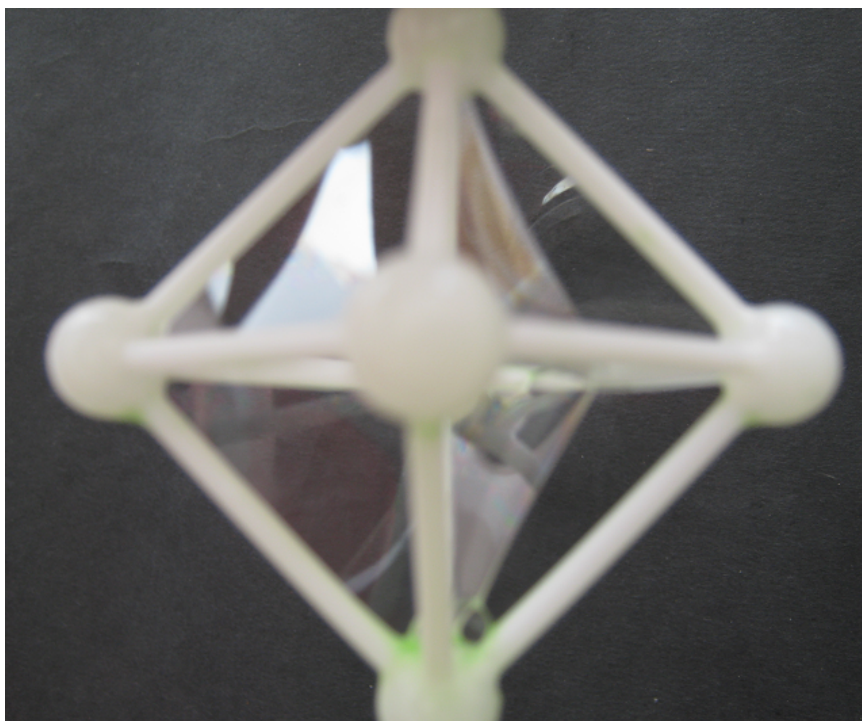


Figura 5.5: Superficies mínimas en el octaedro.

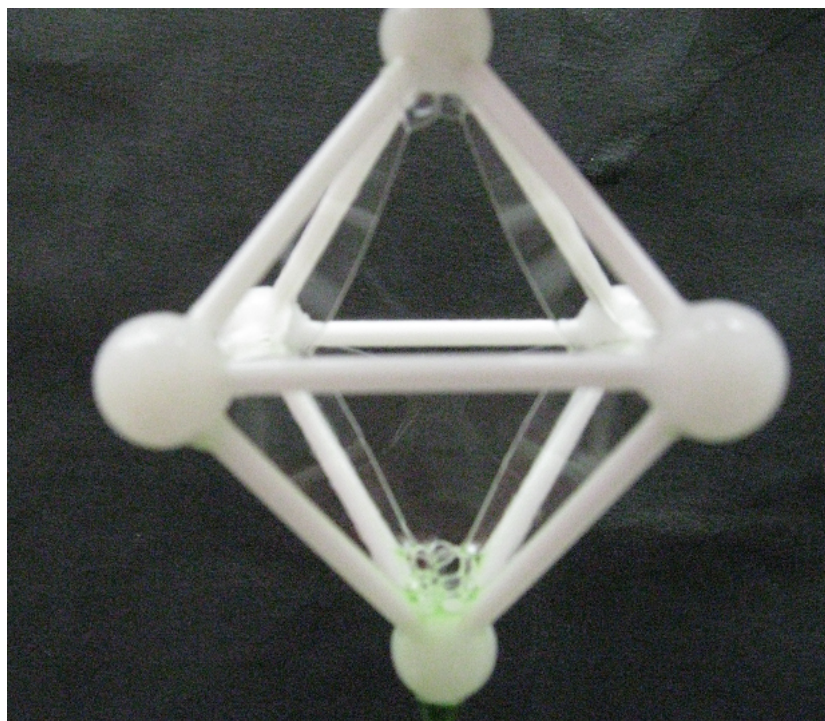


Figura 5.6: Vista frontal de las Superficies mínimas del octaedro.

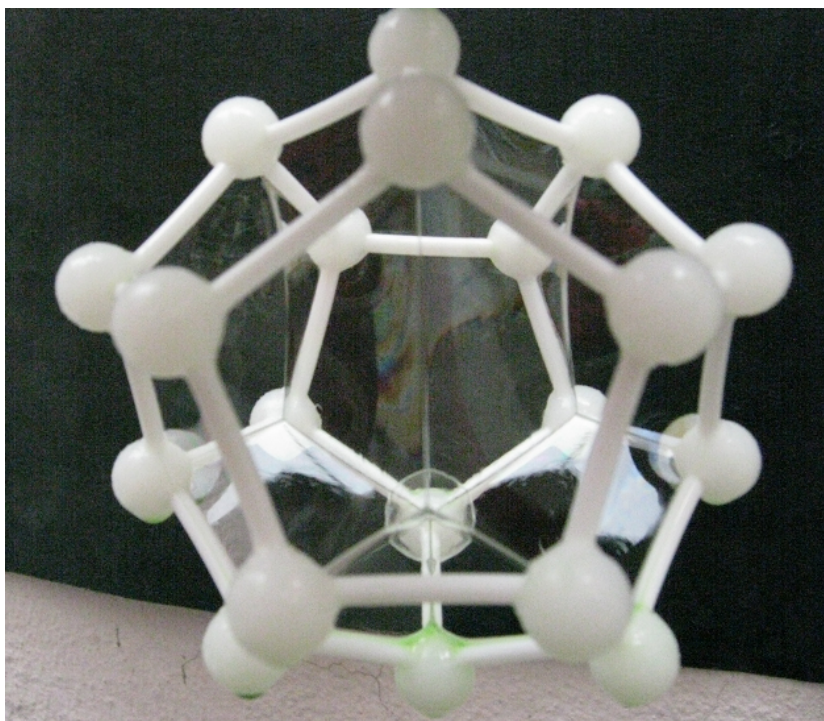


Figura 5.7: Superficies mínimas en el Dodecaedro.

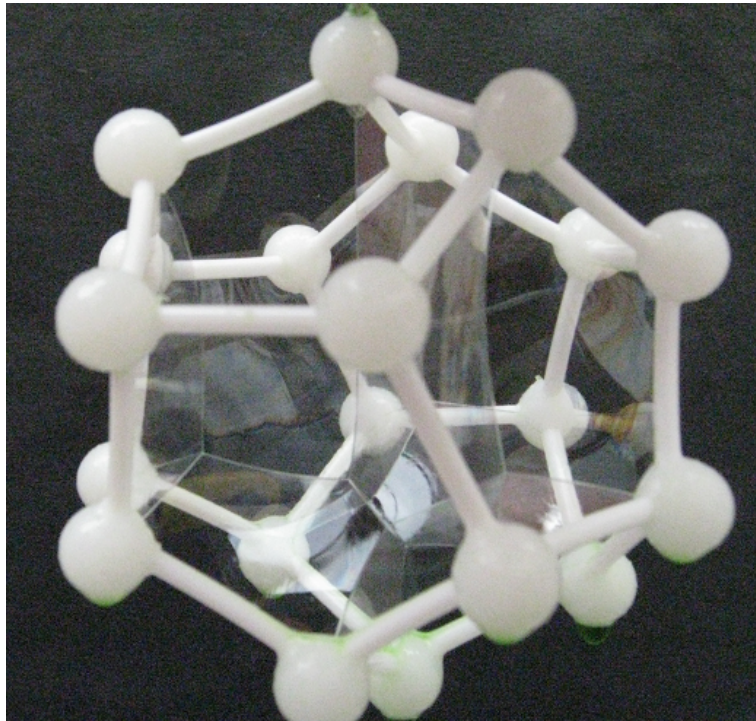


Figura 5.8: El Dodecaedro y sus superficies mínimas.

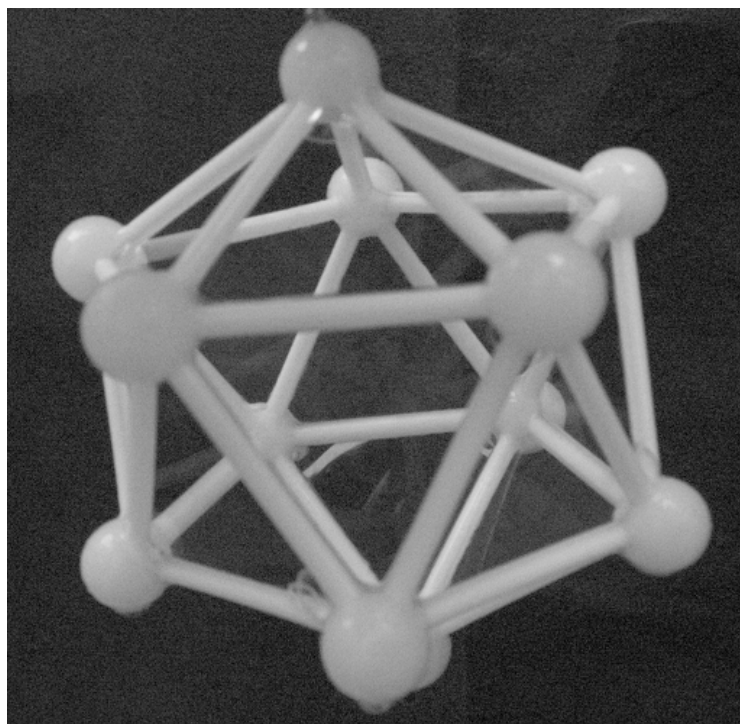


Figura 5.9: Otra vista del Icosaedro.

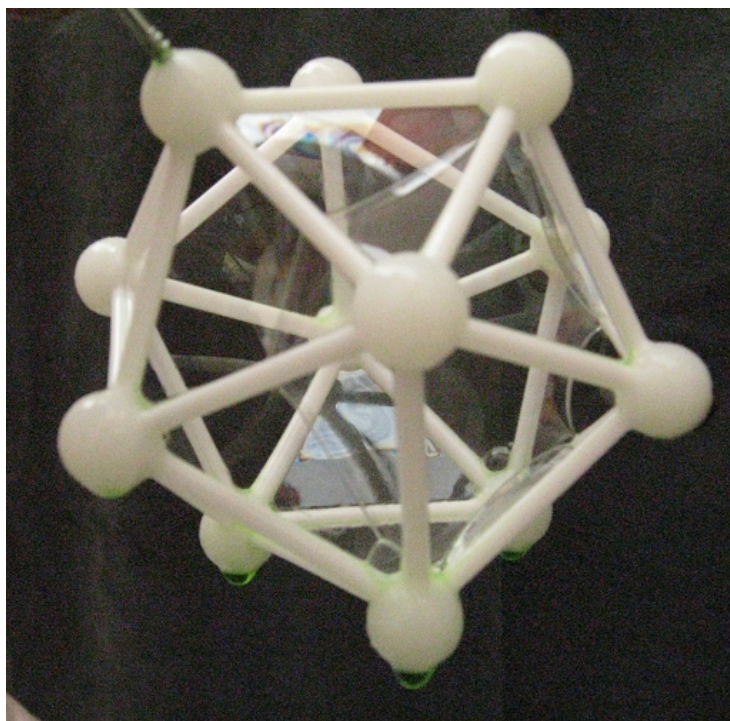


Figura 5.10: Superficies mínimas del icosaedro.

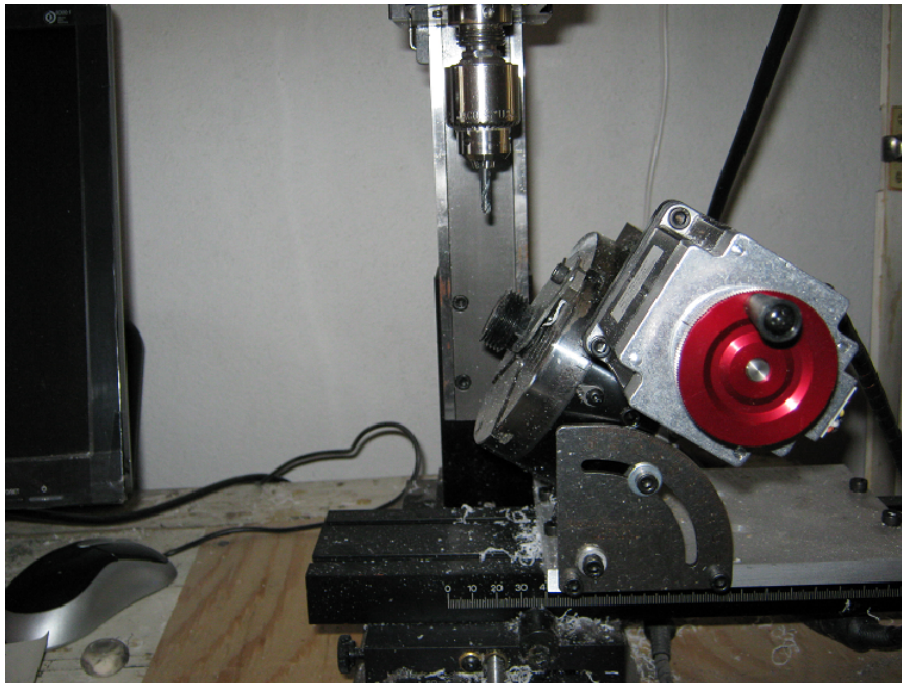


Figura 5.11: Fresadora Sherline 5400 utilizada para la construcción de los modelos.

luz del análisis anterior, son superficies mínimas.

La construcción de los sólidos platónicos, que para este estudio en realidad son estructuras huecas, me planteó problemas de muy diversa índole, destacando entre ellos:

¿De qué material construiría dichas estructuras?

Aquí surgió de manera natural la madera como posible material de construcción, teniéndola que rechazar por su tendencia a absorber agua (que altera las propiedades de la sustancia jabonosa) y por las deformaciones cuando se ve sometida a ésta.

Otra alternativa era el alambre. Este material es el idóneo para estructuras curvadas como el helicoides, pero no para estructuras que constan fundamentalmente de segmentos de recta como es el caso de las aristas de los sólidos platónicos.

Al rechazar las dos opciones anteriores quedaba la posibilidad de contruir los modelos con material plástico ya que, en primer lugar el plástico no altera las propiedades de la sustancia jabonosa y en segundo lugar las aristas se pueden formar a partir de tubos delgados ( como los repuestos de bolígrafo, los popotes para café, etc.).

Así pues decidí construir los modelos usando plástico. Ya tenía el material para las aristas, me faltaba el de los vértices. Una opción era pegar o soldar los delgados tubos de plástico, pero la delicadeza de la operación, el número de pegazones (suponiendo que quedaran bien) y la necesidad de una alta precisión en la disposición de las aristas entre sí (ángulos internos) hicieron prácticamente imposible recurrir a esta alternativa. Viendo la situación anterior opté por considerar la posibilidad de hacer que los vértices de los poliedros fueran esferas de plástico a las que les haría perforaciones para ahí incrustar los pequeños

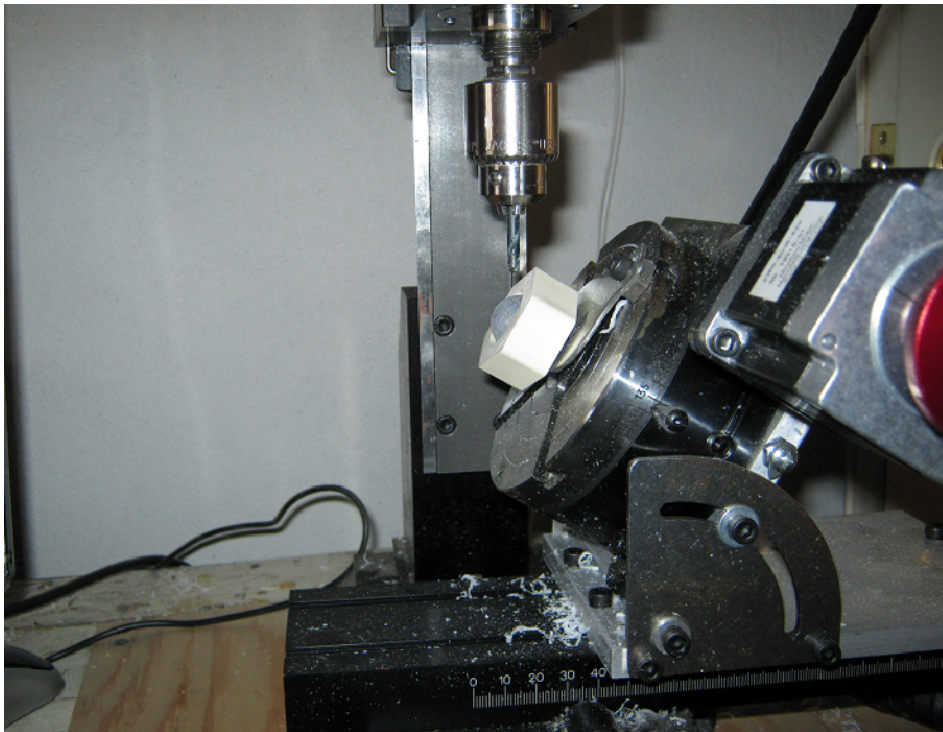


Figura 5.12: Montaje para sujetar y perforar una esfera de plástico.

tubos que harían el papel de aristas.

Visto de esta manera parecía resuelto el problema. Se perforan las esferas de plástico, se encajan los tubos, se pegan los tubos a las esferas y ya está el sólido platónico.

Aunque no fue fácil la elección del material (el plástico), el tomar una decisión en este sentido fue un gran paso.

Una vez elegido el material quedaba el reto de cómo trabajarlo, cómo maquinarlo. En esta parte advertí que la clave de toda la construcción estaba en la perforación de las esferas que iban a servir de vértices ya que las aristas se podían obtener con sólo cortar a la medida los popotes.

Para comenzar, ¿cómo sujetar las esferas firmemente, sin dañarlas, para perforarlas? Como no tenía una prensa adecuada (todas son lineales), necesitaba una pieza que pudiera actuar ejerciendo presión alrededor de la esfera y que al mismo tiempo deje suficiente superficie expuesta para realizar las perforaciones.

Después de varios ensayos llegué al arreglo que se ve en la Figura 5.13. Consiste básicamente en la combinación de conectores de bronce de los que se usan en las instalaciones de cobre para el gas l.p. Hube de agregar un cojinete de hule biselado y biselar por dentro la tuerca de sujeción para que se adapte a la forma de la esfera y así tener más superficie de contacto en el apriete. Esta combinación me permitió tener a mi disposición una gran superficie para trabajar.



Figura 5.13: Arreglo para sujetar las esferas de plástico con seguridad y sin dañarlas

La Figura 5.14 muestra la esfera colocada en el dispositivo de sujeción, que de aquí en adelante llamaré prensa.

Una vez construida la prensa, se atornilla a la base giratoria de la máquina perforadora, que en este caso es una fresadora Sherline 5400. Escogí la fresadora Sherline 5400 porque es una máquina automática en la cual se pueden programar giros con precisión de centésimas de grados, el avance de la broca también se puede programar con décimas de milímetro, y esta es la exactitud que yo necesitaba para el trabajo.

La Figura 5.15 presenta la prensa antes de atornillarla a la base giratoria de la fresadora.



Figura 5.14: Prensa para sujetar las esferas de plástico.

## 5.4 Geometría de los modelos y geometría de la máquina Sherline

Ahora bien, como se aprecia en la Figura 5.16, la prensa es perpendicular a la base de la máquina que en este caso sólo puede realizar movimientos verticales, entonces las perforaciones en las esferas serían paralelas entre si imposibilitando el uso de las mismas como modelos de vértices, ya que precisamente la propiedad de éstos es que las aristas convergen sobre ellos con ángulos muy precisos que no son paralelos entre sí.

Para resolver el problema anterior hay que montar la mesa giratoria (que incluye a la prensa, por supuesto) sobre una superficie inclinable para así poder realizar las perforaciones sobre la esfera a los ángulos adecuados. Tal arreglo se puede ver en la Figura 5.17, donde la mesa giratoria se ha girado un ángulo de  $30^\circ$  como ilustración.

Una vez que tuve la manera de sujetar apropiadamente las esferas (los vértices) me quedaba como tarea llevar la geometría de los sólidos platónicos a la máquina. En primer lugar considerar que iba a realizar perforaciones sobre las pequeñas esferas de plástico con los mismos ángulos con que las aristas convergen en los vértices y que para perforar sólo disponía de una dirección de movimiento, la de arriba hacia abajo. Esta situación no dejó de llamarme la atención pues yo estaba acostumbrado a construir los sólidos platónicos tomando como base el centro de la esfera que los circunscribe, y ahora estaba tomando como base los vértices. En realidad seguí tomando como base el centro de los poliedros para el análisis geométrico y me apoyé en los vértices por necesidades de fabricación.

La Figura 5.18 presenta las líneas asociadas al método de fabricación.

La línea  $\overline{AB}$  es la línea de la base de la máquina.

La línea  $\overline{CD}$  es la línea de la base rotatoria. ( $\overline{CD} \perp \overline{FG}$ ).

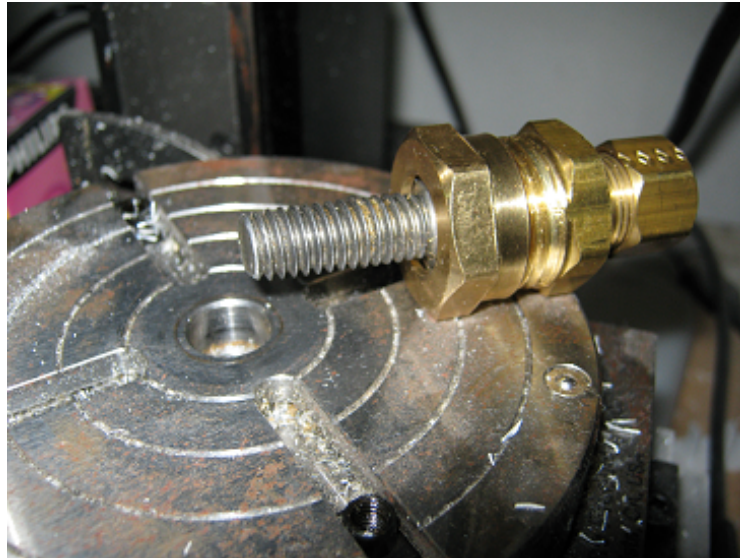


Figura 5.15: La prensa lista para ser atornillada a la base giratoria de la fresadora Sherline 5400.

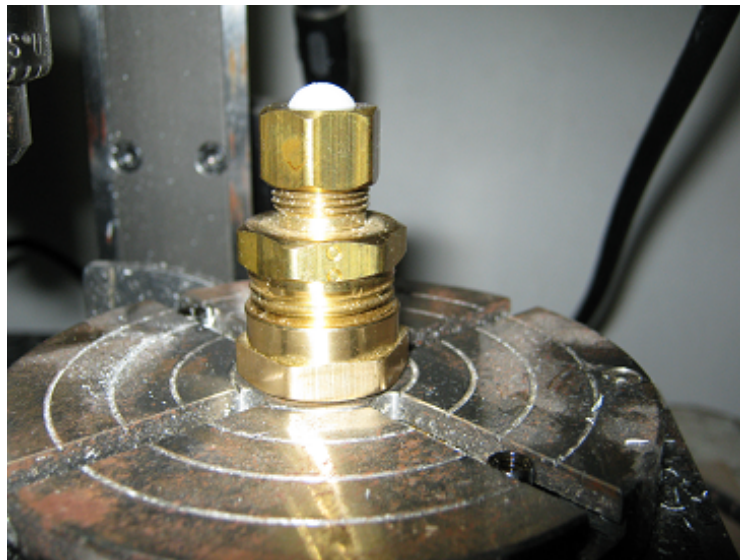


Figura 5.16: La prensa está atornillada a la mesa giratoria de la fresadora Sherline 5400.

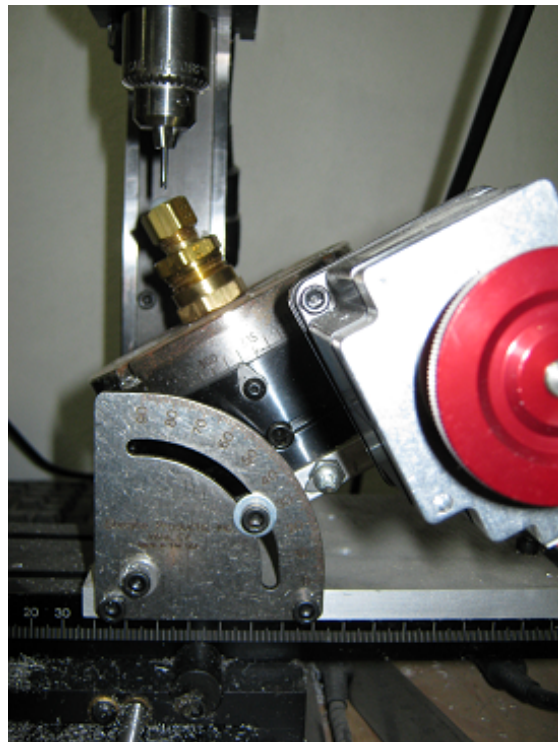


Figura 5.17: La base está inclinada treinta grados.

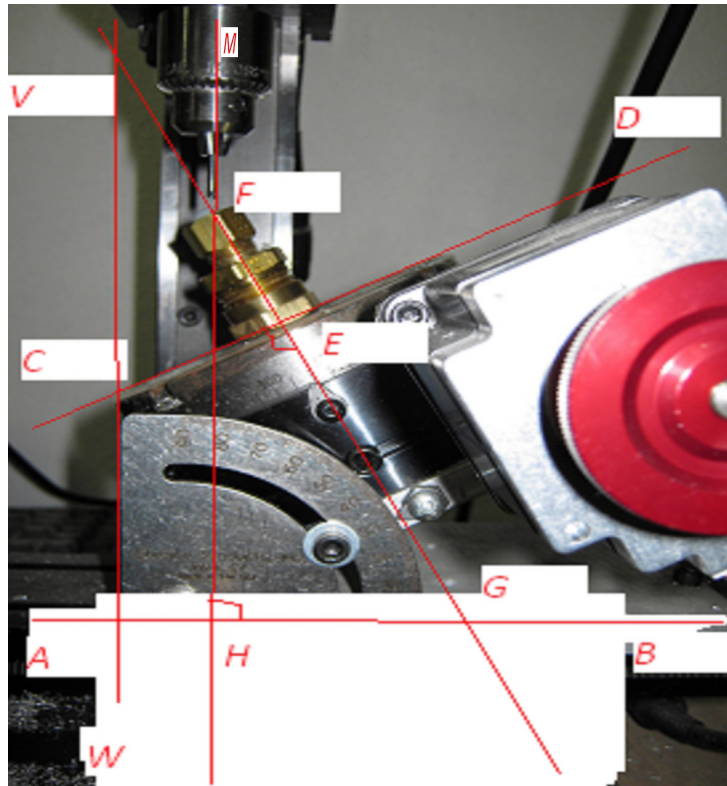


Figura 5.18: Líneas notables en la fresadora

La línea  $\overline{FG}$  es la línea de la prensa. (El segmento  $\overline{EF}$  representa a la prensa).

La línea  $\overline{MH}$  es la línea de la broca. ( $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ ).

La línea  $\overline{VW}$  une la geometría de la máquina con la geometría de los poliedros. ( $\overline{VW} \parallel \overline{MH}$ ).

Esta construcción también nos muestra que el ángulo formado por las líneas  $\overline{CD}$  y  $\overline{AB}$  es el mismo que  $\angle WVG = \angle HFG$ .

Es de fundamental importancia aclarar que el ángulo que forman líneas  $\overline{CD}$  y  $\overline{AB}$  se gobierna totalmente por el mecanismo de transportador metálico que está integrado al sistema.

Podemos considerar que el segmento  $\overline{MF}$  representa a la broca, que sólo tiene movimiento vertical.

En el punto  $F$  se aprecia una pequeña sección circular blanca, ésta representa la parte de la esfera de plástico que queda expuesta después de sujetarla con la prensa.

Ahora que tenemos las líneas de la máquina, vamos a indicar las líneas de cada uno de los poliedros y su relación con las anteriores.

a) El tetraedro.

Dado que cada una de las caras del tetraedro es un triángulo equilátero (Fig. 5.19), su altura tiene el valor de  $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ , donde  $l$  es el lado del triángulo (o arista del tetraedro). Como el segmento  $\overline{ac}$  pasa por el centro geométrico de la cara opuesta al vértice  $c$  y es perpendicular a la línea  $\overline{ab}$ , tenemos que  $\overline{ab} = \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}l \right)$ . Es decir,  $\overline{ab} = \frac{\sqrt{3}}{3}l$ . Como  $\overline{bc} = l$ , tenemos que  $\angle acb = 35.26^\circ$ . Si hacemos  $\overline{bc} \parallel \overline{SV}$  y  $\overline{ab} \parallel \overline{LS}$  deducimos que  $\angle \alpha = 35.26^\circ$ . Todo el análisis anterior nos dice que para obtener el ángulo al cual deben perforarse las esferas que representan los vértices del tetraedro basta con girar la línea  $\overline{CD}$  (que estaba horizontal) un ángulo de  $32.26^\circ$ .

Se realizan tres perforaciones diferentes igualmente espaciadas a  $120^\circ$  en cuatro esferas, cada perforación de unos tres milímetros de profundidad y tenemos habilitados los vértices del tetraedro.

Como ya lo había mencionado anteriormente, las aristas del poliedro las obtenemos sencillamente recortando al mismo tamaño delgados tubos de plástico del grueso que indique la broca utilizada en el trabajo.

Finalmente se unen todas las piezas con pegamento para plástico.



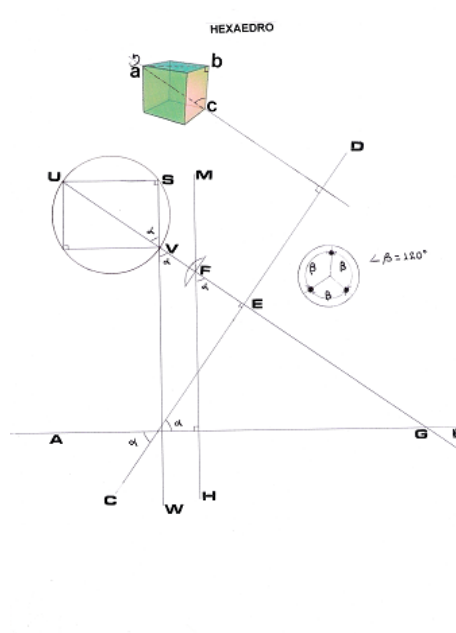


Figura 5.20: Líneas notables del hexaedro o cubo.

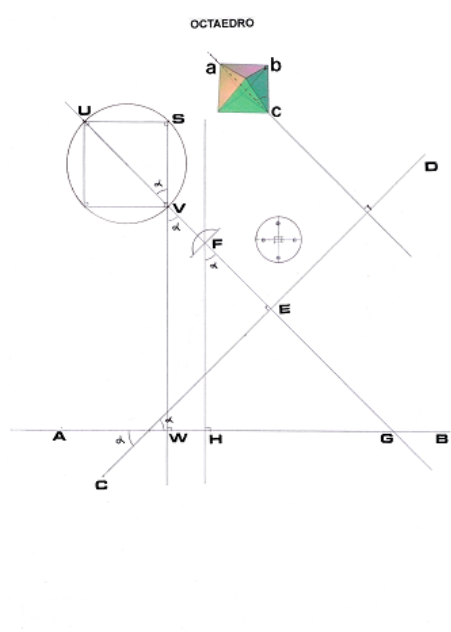


Figura 5.21: La geometría del octaedro.

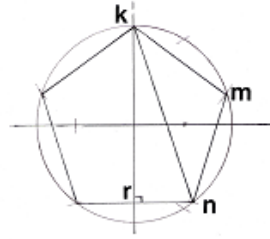


Figura 5.22: Líneas auxiliares en el pentágono regular.

$$\begin{aligned}\overline{kr}^2 &= \overline{kn}^2 - \overline{rn}^2 \\ &= (1.62l)^2 - (0.5l)^2 \\ &= 1.54l^2, \text{ ya que } \overline{rn} = 0.5l.\end{aligned}$$

En la Figura 5.23 tenemos que el  $\triangle aob$  es isósceles ya que  $\overline{ao} = \overline{ob} = 1.54l$  son alturas de dos pentágonos adyacentes. La geometría también nos dice que  $\angle aob = 116.565^\circ$  es el ángulo diedro del dodecaedro. Nuevamente utilizando la ley del coseno tenemos

$$\begin{aligned}\overline{ab}^2 &= \overline{ao}^2 + \overline{ob}^2 - 2\overline{ao} \cdot \overline{ob} \cos \angle aob \\ &= 2(1.54l)^2 - 2(1.54l)^2 \cos 116.565^\circ \\ &= l^2 \left[ 2(1.54)^2 (1 - \cos 116.565^\circ) \right], \text{ y en consecuencia} \\ \overline{ab} &= 2.62l.\end{aligned}$$

Los datos que acabamos de obtener nos revelan que, como  $\overline{bc} = l$ , donde  $l$  es la arista del poliedro, entonces  $\angle acb = \arctan 2.62 = 69.11^\circ = \angle \alpha$ , tomando en cuenta que  $\overline{ab} \parallel \overline{US}$  y  $\overline{bc} \parallel \overline{SW} \perp \overline{AB}$ .

Como en cada vértice concurren tres aristas, realizamos tres perforaciones igualmente espaciadas a  $120^\circ$  en cada esfera.

Necesitamos veinte esferas así perforadas para el dodecaedro-

e) El icosaedro.

El trabajo realizado con el dodecaedro nos reveló que la diagonal del pentágono regular es  $1.62l$ , donde  $l$  es el lado del pentágono. De aquí que, la Fig. 5.24 nos da, en el  $\triangle abc$ ,  $\overline{ab} = 1.62l$  ya que es la diagonal de un pentágono de lado  $l$ , donde  $l$  es la arista del icosaedro, y como  $\overline{bc} = l$ , tenemos  $\angle acb = \arctan 1.62 = 58,31^\circ = \angle \alpha$ , ya que  $\overline{ab} \parallel \overline{US}$  y  $\overline{bc} \parallel \overline{SV}$ .



Como concurren cinco aristas en cada vértice del icosaedro, realizamos en cada esfera cinco perforaciones igualmente espaciadas a  $72^\circ$ .

Con doce esferas trabajadas como se acaba de indicar completamos el icosaedro.



# Bibliografía

- [1] Luis A. Cordero, Marisa Fernández, Alfred Gray, *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica<sup>®</sup>*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [2] Manfredo P. Docarmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [3] Charles Vernon Boys, *Pompas de jabón y las fuerzas que las producen*, EUDEBA, 1964.
- [4] Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba, *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag, 1996.
- [5] Cyril Isenberg, *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*, Dover, 1992.
- [6] Antonio Lascurain Orive, *Curso Básico de Variable Compleja*, Facultad de Ciencias UNAM, 2007.
- [7] Charles H. Lehmann, *Geometría Analítica*, LIMUSA, 1986.
- [8] Martin Lipschutz, *Geometría Diferencial*, Mc Graw-Hill, 1971.
- [9] David Lovett, *Demonstrating Science with Soap Films*, Institute of Physics Publishing, 1994.
- [10] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Prentice Hall, 1996.
- [11] Angel Montesdeoca, *Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*.
- [12] Paul J. Nahin, *When Least is Best*, Princeton University Press, 2004.
- [13] Barret O'Neill, *Elementos de Geometría Diferencial*, Noriega-Limusa, 1990.
- [14] John Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, American Mathematical Society, 2000.
- [15] John Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall, 1997.
- [16] Sears/Zemansky, *Física General*, Ed. Aguilar, 1979.
- [17] Dirk J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.

- [18] Stephen Wolfram, *The Mathematica<sup>®</sup> Book*, Cambridge University Press, 1996.
- [19] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, 1991.