



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ENCAJANDO CONOS EN HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
HUGO VILLANUEVA MÉNDEZ

DIRECTOR:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

MÉXICO, D.F.

AGOSTO, 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
1. Nociones Preliminares	1
1.1. Acuerdos	1
1.2. Resultados Básicos	3
1.3. Continuos e Hiperespacios	6
1.3.1. Hiperespacios y Métrica de Hausdorff	6
1.3.2. Continuos	9
1.3.3. La Topología de Vietoris	12
1.4. Dos Modelos de Hiperespacios	13
1.4.1. El Arco	13
1.4.2. La Circunferencia	14
1.5. Convergencia en Hiperespacios	15
1.6. Funciones en Hiperespacios	18
1.7. Resultados en el Plano	19
1.8. Conos e Hiperespacios	23
1.8.1. Conos	23
1.8.2. Estructura de Hiperespacios	24
1.8.3. La Propiedad Cono = Hiperespacio	26
1.8.4. Continuos $C-H$	30
1.8.5. Hiperespacios Homeomorfos a Conos	33
1.9. Continuos Cono-encajables	35
2. Propiedades de Continuos Cono-encajables en $C(X)$	39
2.1. Conteniendo un Indescomponible	39
2.2. Conteniendo un Subcontinuo Terminal	44
2.3. Sobre Contractilidad	47
2.4. Sobre la Estructura de $C(X)$	48

2.5. Heredando la Propiedad	50
2.5.1. Productos	50
2.5.2. Hiperespacios	54
3. Compactaciones	63
3.1. Compactaciones del Rayo	74
3.1.1. Con un Arco como Residuo	74
3.1.2. Con una Circunferencia como Residuo	83
3.2. Compactaciones de la Unión de Dos Rayos	88
3.2.1. Con un Arco como Residuo	91
3.2.2. Con una Circunferencia como Residuo	105
3.3. Compactaciones de la Recta Real	121
3.3.1. Con un Arco como Residuo	135
3.3.2. Con una Circunferencia como Residuo	141
4. Suavidad por Arcos	145
4.1. Continuos Suaves por Arcos	145
4.1.1. El Orden \leq_p	147
4.1.2. El Conjunto Final.	150
4.1.3. Alcance	151
4.1.4. El Encaje	153
4.1.5. El Teorema	197
4.1.6. Corolarios	198
4.2. Dendroides No Suaves	203
4.2.1. La Semichafaldrana	204
4.2.2. La Chafaldrana	207
5. Problemas y Preguntas Abiertas	228
Bibliografía	232
Índice	236

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico compacto conexo y no vacío. Dado un continuo X podemos considerar su cono, denotado por $Cono(X)$, como el espacio cociente que se obtiene cuando, en el producto cartesiano $X \times [0, 1]$, se identifica el conjunto $X \times \{1\}$ en un solo punto. El hiperespacio de subcontinuos de X es el espacio $C(X)$ que se define como $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un subcontinuo de } X\}$. A $C(X)$ se le considera con la Métrica de Hausdorff.

En el estudio del hiperespacio $C(X)$ se ha observado que éste contiene estructuras similares a las del $Cono(X)$. Se sabe que en $C(X)$ se pueden dar arcos ordenados desde los conjuntos de la forma $\{p\}$ hasta el elemento X de $C(X)$. Estos arcos se parecen a los arcos de la forma $\{p\} \times [0, 1]$ del cono. Por otra parte, los niveles de Whitney de $C(X)$, en algunos continuos, se parecen a los niveles de la forma $X \times \{t\}$ del cono. Para entender mejor estas semejanzas, se pueden leer las secciones 7 y 80 de [16] y el Capítulo 8 de [29].

El problema de determinar cuándo $Cono(X)$ es homeomorfo (o topológicamente equivalente) a $C(X)$, es un problema clásico de la teoría de hiperespacios y ha sido estudiado ampliamente, desde 1972, por varios autores. Para el caso en que la dimensión de $C(X)$ es finita, el problema está prácticamente resuelto. En los artículos [28] y [35], apoyándose de todo lo que se había hecho previamente, se da una respuesta muy completa a este problema, el cual tiene una solución casi exacta porque los continuos que satisfacen dicha propiedad, en realidad no son demasiados. Esto se debe a que, en general, $C(X)$ es mucho mayor (en términos de dimensión) que $Cono(X)$.

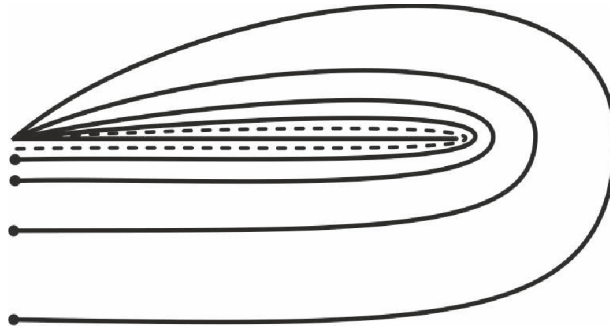
Diremos que un continuo X es *cono encajable en* $C(X)$, si existe un encaje h de $Cono(X)$ en $C(X)$ tal que $h(p, 0) = \{p\}$ para cada $p \in X$. También diremos que X es *cono encajable ordenado en* $C(X)$, si existe un encaje h como el mencionado que, además tiene la propiedad adicional de que $h(p, s) \subsetneq h(p, t)$ cuando $p \in X$ y $s < t$.

Por nuestra experiencia en el estudio de los hiperespacios, sabemos que la clase de los continuos cono-encajables es mucho más amplia que la clase de continuos cuyo cono e hiperespacio son homeomorfos. El problema esencial

que trabajamos es el de determinar los continuos que tienen las propiedades de ser cono-encajable o bien cono-encajable ordenado.

El problema que indicamos, fue planteado en el Primer Taller de Investigación en Continuos e Hiperespacios organizado por el A. Illanes en la ciudad de Puebla, en julio de 2007. Agradezco a las personas que estuvieron trabajando en él durante esas dos semanas, pues surgieron varias ideas para atacarlo. En dicho taller, logramos probar que las dendritas (continuos localmente conexos sin curvas cerradas simples) son continuos cono-encajables ordenados. Más adelante, logramos probar que los abanicos suaves y algunos subcontinuos de los conos de espacios métricos compactos, también son continuos cono-encajables ordenados. Usando esas ideas y con mucho esfuerzo, demostramos que los continuos suaves por arcos son continuos cono-encajables ordenados, resultado que probamos aquí en el Capítulo 4. Aunque la prueba es larga y tiene muchos detalles, representa las ideas geométricas que nos dieron la clave de la demostración.

Por otro lado, creíamos que dentro de la familia de los dendroides (continuos arcoconexos y hereditariamente unicoherentes), los dendroides suaves eran los únicos continuos cono-encajables. En varios ejemplos de dendroides no suaves, logramos probar que no eran cono-encajables. Sin embargo, contrario a nuestra intuición, y después de convencernos y desconvencernos varias veces, demostramos que el continuo de la siguiente figura, al cual le llamamos la chafaldrana, es un continuo cono-encajable.



La chafaldrana es un continuo cono-encajable

Respecto a las compactaciones, en [28] y [35], en particular, se caracterizaron a los continuos cuyos cono e hiperespacio son homeomorfos, dentro de las compactaciones del rayo y de la recta real con un arco o una circunferencia como residuo. En el Capítulo 3, extendemos esos resultados a los continuos cono-encajables y, además, caracterizamos a los continuos cono-encajables dentro de las compactaciones de la unión de dos rayos con un arco o una circunferencia como residuo.

Además, en esta tesis presentamos, en el Capítulo 2, resultados sobre las propiedades que deben tener los continuos cono-encajables y sobre cuándo la propiedad de ser cono-encajable es heredada a subespacios, hiperespacios o productos.

Aún quedan algunas preguntas que se nos presentaron y que no pudimos resolver, las cuales están planteadas a lo largo de la tesis así como en el último capítulo.

Capítulo 1

Nociones Preliminares

En este capítulo presentamos una serie de conceptos y resultados que usaremos a lo largo de la tesis. Nuestro objetivo principal es enlistar los conceptos y resultados generales a los cuales más adelante haremos referencia.

1.1. Acuerdos

Si A es un subespacio de un espacio topológico X , entonces $\text{cl}_X(A)$, $\text{fr}_X(A)$, $\text{int}_X(A)$ y $\text{ext}_X(A)$ denotan la *cerradura* de A en X , la *frontera* de A en X , el *interior* de A en X y el *exterior* de A en X , respectivamente. Recordemos que

$$\text{fr}_X(A) = \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A)$$

y

$$\text{ext}_X(A) = \text{int}_X(X \setminus A).$$

Una *vecindad* de un punto $p \in X$, es un conjunto que tiene a p en su interior.

Dado un espacio métrico X con métrica d , denotamos como $B_d(r, x)$ a la *bola abierta* centrada en $x \in X$ con radio r . Además, dado un subconjunto no vacío y acotado A de un espacio métrico (X, d) , definimos el *diámetro* de A como

$$\text{diám}_d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Si no causa confusión usaremos simplemente $B_d(r, x) = B(r, x)$ y $\text{diám}_d(A) = \text{diám}(A)$.

Dado un espacio métrico X con métrica d y un subconjunto no vacío A de X , definimos la *distancia del punto $p \in X$ a A* como

$$d(p, A) = \inf\{d(p, a) : a \in A\}.$$

De la misma manera, definimos la *distancia entre dos subconjuntos* no vacíos A y B de X como

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

La aplicación $(A, B) \longrightarrow d(A, B)$ no es una métrica para el espacio de subconjuntos de X . Recordemos que si dos subconjuntos A y B tienen un punto de acumulación común, entonces $d(A, B) = 0$. Por otro lado, si $d(A, B) = 0$ no necesariamente es cierto que A y B tengan un punto de acumulación común, basta considerar, en \mathbb{R}^2 , el eje x y la hipérbola $\{(x, 1/x) : x > 0\}$. Recordemos, sin embargo, que si A y B son compactos y ajenos, entonces $d(A, B) > 0$.

Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de un espacio topológico X , diremos que

- (1) A y B están separados en X si $\text{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$ y $\text{cl}_X(B) \cap A = \emptyset$;
- (2) A y B forman una separación de X si A y B están separados en X y $A \cup B = X$;
- (3) C separa a A y B en X si $A \cap B = \emptyset$ y existen dos conjuntos separados, U y V , en X , tales que $X \setminus C = U \cup V$, $A \subset U$ y $B \subset V$.

Recordemos que la frontera de un conjunto separa al interior y al exterior de dicho conjunto.

Denotaremos por I al intervalo cerrado $[0, 1]$ con su topología usual. Un *arco* es un espacio homeomorfo a I . Si L es un arco y $\alpha : I \longrightarrow L$ es un homeomorfismo, los *puntos finales* de L son $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$. Además, hay un orden en L inducido por $\alpha : x \leq y$ si y sólo si $\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$ para cada $x, y \in L$. Una *curva* θ es un espacio homeomorfo a la unión de tres arcos que se intersectan, por pares, sólo en sus puntos finales.

Diremos que un espacio topológico es *no degenerado* si contiene más de un punto. En caso contrario, el espacio será *degenerado*.

1.2. Resultados Básicos

En esta sección presentamos algunos de los resultados básicos que serán utilizados en este trabajo. Comenzaremos con un lema conocido. La demostración se puede encontrar en [8, Teorema 1.53 (5)].

Lema 1.1 (Lema de las Orejas). *Sean X un espacio topológico conexo y C un subconjunto conexo de X . Si $X \setminus C = M \cup N$ con M y N conjuntos separados en X , entonces $M \cup C$ y $N \cup C$ son conexos.*

Lema 1.2 *Sea U un conjunto abierto y conexo de un espacio topológico X . Sea A un conjunto cerrado de X con interior vacío. Si cada punto de A tiene una base de vecindades β tal que, para cualquier $B \in \beta$, $B \setminus A$ es conexo, entonces $U \setminus A$ es abierto y conexo en X .*

Demostración. Para ver que $U \setminus A$ es abierto en X , observemos que es la intersección de los conjuntos abiertos U y $X \setminus A$.

Ahora, supongamos que $U \setminus A$ no es conexo. Así que existen conjuntos no vacíos, abiertos y ajenos V y W de X , tales que $U \setminus A = V \cup W$. Veamos que

$$U = (cl_X(V) \cup cl_X(W)) \cap U.$$

Claramente $(cl_X(V) \cup cl_X(W)) \cap U \subset U$. Tomemos $p \in U$. Si $p \notin A$, entonces $p \in V \cup W \subset cl_X(V) \cup cl_X(W)$ y, por tanto, $p \in (cl_X(V) \cup cl_X(W)) \cap U$. Si $p \in A$, como $int_X(A) = \emptyset$, para cada abierto B de X que contiene a p se tiene que $B \not\subset A$. Dado un abierto cualquiera B que contenga a p , se tiene que $B \cap U \not\subset A$, así que $(B \cap U) \cap V \neq \emptyset$ o $(B \cap U) \cap W \neq \emptyset$. Concluimos que $p \in cl_X(V \cup W) = cl_X(V) \cup cl_X(W)$ y, en consecuencia, $p \in (cl_X(V) \cup cl_X(W)) \cap U$. Hemos probado que $U \subset (cl_X(V) \cup cl_X(W)) \cap U$ y por tanto $U = (cl_X(V) \cup cl_X(W)) \cap U$. Notemos que $cl_X(V) \cap U \neq \emptyset$ y $cl_X(W) \cap U \neq \emptyset$, pues $\emptyset \neq V \subset cl_X(V) \cap U$ y $\emptyset \neq W \subset cl_X(W) \cap U$.

Si $cl_X(V) \cap U \cap cl_X(W) = \emptyset$, entonces $cl_X(V) \cap U$ y $cl_X(W) \cap U$ forman una separación de U lo cual contradice que U sea conexo. De aquí que $cl_X(V) \cap U \cap cl_X(W) \neq \emptyset$. Tomemos un punto $q \in cl_X(V) \cap U \cap cl_X(W)$. Veamos que $q \in A$. De no ser así, $q \in U \setminus A = V \cup W$. Sin pérdida de generalidad,

supongamos que $q \in V$. Entonces existe un abierto $B = V$ tal que $q \in B \subset V \subset X \setminus W$. Pero esto contradice el hecho que $q \in \text{cl}_X(W)$. Por lo tanto $q \in A$. Consideremos la base β tal que para cualquier $B \in \beta$, $q \in B$ y $B \setminus A$ es conexo. Sea $B \in \beta$ tal que $B \subset U$. Como $q \in \text{cl}_X(V)$, se tiene que $B \cap V \neq \emptyset$. Análogamente $B \cap W \neq \emptyset$. Por tanto, $B \cap V$ y $B \cap W$ son abiertos ajenos no vacíos cuya unión es $B \setminus A$, lo cual contradice que $B \setminus A$ es conexo. Esto concluye la prueba. ■

Un espacio X es *localmente conexo* si para cada punto $p \in X$ y todo conjunto abierto U de X que contiene a p , existe un conjunto abierto y conexo C de X , tal que $p \in C \subset U$. Observemos que en un espacio localmente conexo, cada punto tiene una base de vecindades conexas. Recordemos que en un espacio localmente conexo, las componentes de los subconjuntos abiertos son abiertas ([40, Teorema 27.9]).

Definición 1.3 *Dados un espacio topológico X y un punto $p \in X$, definimos la **casi componente de p en X** como el conjunto*

$$Q_p = \bigcap \{E \subset X : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in E\}.$$

Se sabe que la componente de p está contenida en su casi componente ([10, Teorema 9.2.4]). El siguiente resultado dice un caso para el que se cumple la otra contención y, por tanto, la igualdad.

Teorema 1.4 *En un espacio topológico métrico y compacto, las componentes y las casi componentes son las mismas.*

La demostración se puede encontrar en [10, Teorema 9.2.4].

Si X y Y son espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ es una función, sabemos que f es continua si y sólo si para punto $x \in X$ y cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $\lim x_n = x$, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge en Y y $\lim f(x_n) = f(x)$. En espacios métricos compactos, basta encontrar una subsucesión de la sucesión de imágenes que converja a la imagen del límite, como vemos en el siguiente lema.

Lema 1.5 Sean X y Y espacios métricos y compactos. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f es continua;

(b) para cada $x \in X$ y cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $\lim x_n = x$, se tiene que para cualquier subsucesión convergente $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ de $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$, $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$;

(c) para cada $x \in X$ y cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $\lim x_n = x$, existe una subsucesión convergente $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ de $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$, tal que $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$.

Demostración. Sea d una métrica para Y . Veamos que (b) es equivalente a (a) y (c).

(a) implica (b) es clara.

(b) implica (a). Sean $x \in X$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tales que $\lim x_n = x$. Supongamos que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(x)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $G = \{n \in \mathbb{N} : d(f(x), f(x_n)) \geq \epsilon\}$ es infinito. Ordenemos los elementos de G en una sucesión $n_1 < n_2 < \dots$. Como Y es compacto, existen una subsucesión $(f(x_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ y un punto $y \in Y$ tales que $\lim f(x_{n_{k_j}}) = y$. Por (b) $y = f(x)$. Esto es absurdo pues, para cada $j \in \mathbb{N}$, $d(f(x), f(x_{n_{k_j}})) \geq \epsilon$. Concluimos que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ y, por tanto, que f es continua en x .

(b) implica (c). Sean $x \in X$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tales que $\lim x_n = x$. Consideremos la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ de Y . Por la compacidad de Y , existe una subsucesión convergente $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ de $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Entonces, $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$. Hemos encontrado una subsucesión $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ de $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ convergente, tal que $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$.

(c) implica (b). Sean $x \in X$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tales que $\lim x_n = x$. Consideremos la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ de Y y sea $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente de $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Sea $y = \lim f(x_{n_k})$. Como $\lim x_n = x$, tenemos que $\lim x_{n_k} = x$. Entonces, $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $\lim x_{n_k} = x$. Por (c), existe una subsucesión $(x_{n_{k_i}})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim f(x_{n_{k_i}}) = f(x)$. Concluimos que $y = \lim f(x_{n_k}) = f(x)$. ■

Usaremos este lema, demostrando (c), para verificar la continuidad de algunas funciones.

1.3. Continuos e Hiperespacios

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Daremos algunos resultados relacionados con continuos. Éstos serán utilizados en capítulos posteriores. Denotaremos por X a un continuo con métrica d .

1.3.1. Hiperespacios y Métrica de Hausdorff

Dado un continuo X definimos los siguientes *hiperespacios* de X :

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \neq \emptyset\}; \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}; \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}. \end{aligned}$$

Los hiperespacios se pueden definir para cualquier espacio topológico X . Algunos resultados mostrados no necesitan que X sea un continuo. Notemos que el conjunto que contiene a un sólo punto p , puede escribirse en la forma $\{p, p\}$. Entonces $F_2(X)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$F_2(X) = \{\{p, q\} : p, q \in X\}.$$

Definiremos una métrica sobre el espacio 2^X . De esta manera, como $C(X)$ y $F_n(X)$ son subconjuntos de 2^X , ambos espacios serán métricos con la métrica inducida de 2^X .

Definición 1.6 *Dados $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, definimos la **nube centrada en A con radio ϵ** como el conjunto*

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

Notemos que si $0 < \delta < \epsilon$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$. En efecto, dado $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta < \epsilon$. Por tanto $x \in N(\epsilon, A)$. Observemos además que

$$N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\epsilon, a).$$

Notemos ahora que si $A \subset B$, entonces $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, B)$ para cada $\epsilon > 0$. En efecto, dado $p \in N(\epsilon, A)$ existe $a \in A \subset B$ tal que $d(p, a) < \epsilon$. De aquí que $p \in N(\epsilon, B)$. Esto prueba nuestra observación. Otros resultados básicos pero importantes son los siguientes.

Lema 1.7 *Sea X un continuo. Si A es un subconjunto cerrado y no vacío de X y U es un conjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Si $U = X$, para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que $N(\epsilon, A) \subset U$. Supongamos entonces que $\emptyset \neq X \setminus U$. Consideremos los conjuntos cerrados A y $X \setminus U$. Como son compactos y ajenos, se tiene que $d(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2}d(A, X \setminus U)$. Veamos que $N(\epsilon, A) \subset U$. Tomemos un punto $p \in N(\epsilon, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(p, a) < \epsilon$. Por la elección de ϵ , se tiene que $p \notin X \setminus U$. Concluimos que $p \in U$. Por tanto $N(\epsilon, A) \subset U$. ■

Lema 1.8 *Sean $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces*

$$N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B).$$

Demostración. Observemos primero que, como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, entonces $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, A \cup B)$ y $N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Por tanto, $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$.

Ahora, si $x \in N(\epsilon, A \cup B)$, entonces existe $y \in A \cup B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Si $y \in A$, se tiene que $x \in N(\epsilon, A)$. Análogamente, si $y \in B$, entonces $x \in N(\epsilon, B)$. En cualquier caso tenemos que $x \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. Concluimos que $N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. Esto termina la prueba del lema. ■

Estamos listos para definir una métrica para 2^X .

Definición 1.9 (*Métrica de Hausdorff*) Dados $A, B \in 2^X$, definimos

$$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

En [29, Teorema 4.2] se muestra que H es, en efecto, una métrica para el espacio 2^X . Dicha métrica se llama *Métrica de Hausdorff*.

La métrica de Hausdorff también puede ser definida como

$$D(A, B) = \max\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

Veamos que ambas definiciones coinciden.

Lema 1.10 *Dados $A, B \in 2^X$, se tiene que $H(A, B) = D(A, B)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Entonces, dada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Notemos que $d(a, B) \leq d(a, b) < \epsilon$. De aquí que $d(a, B) < \epsilon$ para cada $a \in A$. Por lo tanto, $\sup\{d(a, B) : a \in A\} \leq \epsilon$. Un razonamiento similar muestra que $\sup\{d(b, A) : b \in B\} \leq \epsilon$. Se sigue que $D(A, B) \leq \epsilon$. Así, $D(A, B)$ es una cota inferior del conjunto $\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$. Esto muestra que $D(A, B) \leq H(A, B)$.

Veamos ahora que $H(A, B) \leq D(A, B)$. Sean $\delta > 0$ y $\epsilon = D(A, B) + \delta$. Tomemos un punto $a \in A$. Como la función $f_a : B \rightarrow [0, \infty)$, definida como $f_a(b) = d(a, b)$ es continua y B es compacto, existe $b_0 \in B$ tal que $d(a, b_0) = d(a, B)$. Además, como

$$d(a, b_0) = d(a, B) \leq \sup\{d(x, B) : x \in A\} \leq D(A, B)$$

y $\delta > 0$, tenemos que $d(a, b_0) < D(A, B) + \delta = \epsilon$. Hemos mostrado que $A \subset N(\epsilon, B)$. Un razonamiento similar muestra que $B \subset N(\epsilon, A)$. De la definición de $H(A, B)$ se sigue que $H(A, B) \leq \epsilon = D(A, B) + \delta$. Como esto lo podemos hacer para cada $\delta > 0$, entonces $H(A, B) \leq D(A, B)$. Así concluye la prueba del lema. ■

Mostraremos los siguientes resultados acerca de hiperespacios y la métrica de Hausdorff, los cuales utilizaremos a lo largo del trabajo.

Lema 1.11 *Dados $A, B \in 2^X$, se tiene que $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos primero que $H(A, B) < \epsilon$. Por la definición de H , existe $\delta > 0$ tal que $\epsilon > \delta$, $B \subset N(\delta, A)$ y $A \subset N(\delta, B)$. Como $\epsilon > \delta$, se tiene que $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$ y $N(\delta, B) \subset N(\epsilon, B)$. Por tanto $B \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, B)$.

Supongamos ahora que $B \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, B)$. Tomemos un punto $a \in A$. Entonces existe un punto $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) < \epsilon$. Por tanto, $d(a, B) \leq d(a, b_a) < \epsilon$. Consideremos la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, B)$. Sabemos que f es continua y, como A es compacto, existe $a \in A$ tal que $\sup\{d(x, B) : x \in A\} = d(a, B) < \epsilon$. De manera similar tenemos que $\sup\{d(y, A) : y \in B\} < \epsilon$. Así, por el Lema 1.10, se tiene que $H(A, B) < \epsilon$. ■

Se sabe que si X es compacto, entonces 2^X (respectivamente, $C(X)$) es compacto ([29, Teorema 4.13]) (respectivamente, ([29, Teorema 4.17])).

1.3.2. Continuos

En esta sección presentamos resultados sin demostración que se utilizan en esta tesis. El primero es importante en la teoría de continuos.

Teorema 1.12 *Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [29, Teorema 1.8].

Teorema 1.13 (Del Cable Cortado) *Sea X un espacio métrico compacto. Tomemos A y B subconjuntos cerrados de X . Si ninguna componente de X interseca tanto a A como a B , entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados y ajenos de X tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Podemos encontrar una demostración de este teorema en [29, Teorema 5.2].

Teorema 1.14 (de los Golpes en la Frontera) Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X . Si K es una componente de E , entonces $cl_X(K) \cap fr_X(E) \neq \emptyset$.

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [29, Teorema 5.6].

Decimos que un continuo es *descomponible* si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo es *hereditariamente descomponible* si todos sus subcontinuos no degenerados son descomponibles. Diremos que un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Además, un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles. El siguiente teorema, cuya prueba puede verse en [10, Teorema 9.4.1], caracteriza a los continuos indescomponibles.

Teorema 1.15 Un continuo es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.

Definición 1.16 Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. La **composante de p en X** , denotada por $\kappa(p)$, es el conjunto

$$\kappa(p) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ con } p, x \in A\}.$$

Usaremos los siguientes resultados relacionados con las composantes de un continuo.

Teorema 1.17 Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante $\kappa(p)$ de p en X es un conjunto denso en X .

La demostración de este teorema está dada en [10, Teorema 9.3.7].

Teorema 1.18 *El conjunto de componentes de un continuo no degenerado e indescomponible X es no numerable.*

Podemos encontrar la demostración en [10, Teorema 9.4.3].

Teorema 1.19 *Las componentes de un continuo indescomponible son ajenas entre sí.*

Se puede encontrar la demostración de este teorema en [20, Teorema 5, p. 212].

Dados un continuo no degenerado X y $A \subset X$, decimos que X es *irreducible alrededor de A* , si ningún subcontinuo propio de X contiene a A . Si $A, B \in C(X)$, decimos que X es *irreducible entre A y B* si X es irreducible alrededor de $A \cup B$. Además, diremos que X es *irreducible* si existen $p, q \in X$ tales que $p \neq q$ y X es irreducible entre p y q .

Otras definiciones que utilizaremos son las siguientes.

Definición 1.20 *Un elemento A de 2^X se llama R -conjunto de X si existen un subconjunto abierto y propio U de X tal que $A \subset U$ y dos sucesiones de componentes $(C_n)_{n=1}^\infty$ y $(D_n)_{n=1}^\infty$ de U tales que las sucesiones $(cl_X(C_n))_{n=1}^\infty$ y $(cl_X(D_n))_{n=1}^\infty$ convergen,*

$$(\lim (cl_X(C_n))) \cap (\lim (cl_X(D_n))) = A$$

y $A \subset U$.

Definición 1.21 *Dada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, un n -odo es un continuo X para el cual existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, $E_i \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y E_i y E_j están separados siempre que $i \neq j$. Un triodo es un 3-odo.*

1.3.3. La Topología de Vietoris

Dado un continuo X , podemos definir una topología para el hiperespacio 2^X sin utilizar la métrica.

Definición 1.22 Dado un espacio topológico X , la **Topología de Vietoris** para 2^X es la topología más chica, T_V , para 2^X que tiene la siguiente propiedad natural: $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in T_V$ siempre que U es abierto en X ; y $2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset B\} \in T_V$ siempre que B es cerrado en X .

Mostremos una base para T_V . Si X es un continuo y U_1, \dots, U_n son subconjuntos abiertos de X , definimos

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Si β es la familia

$$\{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\},$$

entonces β es una base para una topología en 2^X . Más aún, en [16, Teorema 1.2], se muestra que β es una base para T_V . A los elementos de β les llamaremos *vietóricos de X* .

En [16, Teorema 3.1] se muestra que la Topología de Vietoris en 2^X es la misma que la topología generada por la métrica de Hausdorff, cuando el espacio X es métrico.

Observemos que

$$\{A \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\} = 2^X - \{A \in 2^X : A \subset X - B\}.$$

Entonces $\{A \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\}$ es abierto (respectivamente, cerrado) en 2^X siempre que B es abierto (respectivamente, cerrado) en X .

1.4. Dos Modelos de Hiperspacios

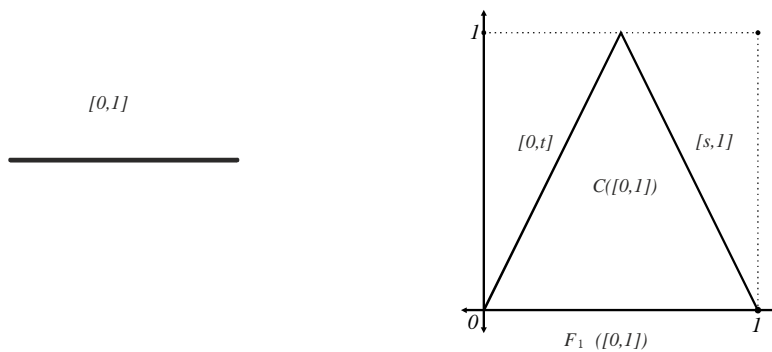
En esta sección presentaremos algunos modelos de hiperspacios a los que haremos referencia más adelante.

1.4.1. El Arco

Construyamos el hiperspacio de subcontinuos de un arco. Para ello, consideremos al arco como el intervalo cerrado $[0, 1]$. Sabemos que los subconjuntos cerrados y conexos del intervalo son conjuntos de un solo punto o intervalos cerrados, es decir,

$$\begin{aligned} C([0, 1]) &= \{A \subset [0, 1] : A \text{ es un punto o un intervalo cerrado}\} \\ &= \{[a, b] \subset [0, 1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}. \end{aligned}$$

Una manera de hacer una representación de $C([0, 1])$ es mediante la identificación $[a, b] \longrightarrow (\frac{a+b}{2}, b-a) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, a cada intervalo le asignamos el par ordenado, en \mathbb{R}^2 , donde la primera entrada representa el punto medio del intervalo y la segunda, representa su longitud. No es difícil ver que esta identificación es un homeomorfismo. Por lo tanto, $C([0, 1])$ es homeomorfo al triángulo en \mathbb{R}^2 que tiene como vértices los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.



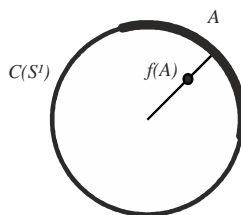
Además, observemos que al singular $\{x\}$ se le asigna el punto $(x, 0)$. Por otro lado, los intervalos que tienen a 0 como uno de sus extremos quedan

representados en el triángulo como el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$. Los intervalos que tienen a 1 como uno de sus extremos quedan representados en dicho triángulo como el segmento que une los puntos $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

1.4.2. La Circunferencia

Ahora veamos un modelo para el hiperespacio de subcontinuos de la circunferencia unitaria S^1 . Sabemos que los subcontinuos de S^1 son conjuntos de un solo punto, arcos o S^1 . Dados un punto o un arco A de S^1 , denotaremos por $m(A)$ al punto medio del arco A , o bien $m(A) = \{a\}$ si $A = \{a\}$. Además, denotaremos por $l(A)$ a la longitud del arco A y $l(A) = 0$ cuando $A = \{a\}$. Observemos que cada subarco A de S^1 está perfectamente determinado por $m(A)$ y $l(A)$.

Entonces, al continuo $A \neq S^1$, le asignamos el punto $f(A)$ que está dentro de S^1 , que tiene distancia $1 - \frac{l(A)}{2\pi}$ del origen y que se encuentra sobre el segmento que une al origen con $m(A)$. Además, $f(S^1)$ corresponde con el origen.



De esta manera, obtenemos un modelo para $C(S^1)$ como el disco unitario D (centrado en el origen) del plano. Observemos que al singular $\{a\}$, como $l(\{a\}) = 0$, se le asigna el punto a . Así, los conjuntos de un solo punto quedan representados en la orilla de D . Los subarcos que tienen una longitud predeterminada y fija representan una circunferencia con centro en el origen.

1.5. Convergencia en Hiperespacios

En esta sección presentamos resultados relativos a la convergencia de sucesiones de subconjuntos cerrados de un continuo, y algunas relaciones con la convergencia de sucesiones de elementos de ellos. Éstos cuáles serán muy útiles a lo largo de la tesis. Veamos primero las definiciones de límites inferior y superior.

Definición 1.23 *Dados un espacio topológico X y una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X , definimos los límites inferior y superior de A_n como*

$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U, \text{ de } X, \text{ que tiene a } x, U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todos, excepto un número finito de números } n\};$

$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ de } X, \text{ que tiene a } x, U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de números } n\}.$

Además, si $A \subset X$, decimos que la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a A si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$.

Observemos que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Entonces, tenemos el siguiente lema.

Lema 1.24 *([29, Lema 4.10]) Sean X un espacio topológico y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y sea $A \subset X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $\lim A_n = A$;
- (2) $A \subset \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subset A$.

El siguiente resultado nos dice que la convergencia en hiperespacios es la misma si consideramos la convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff.

Teorema 1.25 *([29, Teorema 4.11]) Sea X un espacio métrico y compacto, y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X . Entonces $\lim A_n = A$ si y sólo si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Veamos ahora algunos resultados importantes sobre convergencia en hiperespacios.

Lema 1.26 *Dados un continuo X y una sucesión $(A_n)_{n=1}^\infty$ de 2^X , entonces*

(a) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si existe una subsucesión $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(A_n)_{n=1}^\infty$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_{n_k} \in A_{n_k}$ de manera que $\lim x_{n_k} = x$;

(b) $x \in \liminf A_n$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A_n$ tal que $\lim x_n = x$.

Demostración. (a) Supongamos primero que existe una subsucesión $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(A_n)_{n=1}^\infty$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_{n_k} \in A_{n_k}$ de manera que $\lim x_{n_k} = x$. Tomemos un conjunto abierto U de X , que tenga al punto x . Como $\lim x_{n_k} = x$, existe N_0 tal que $x_{n_k} \in U$ si $k \geq N_0$. Entonces, $U \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para cada $k \geq N_0$. De aquí que $x \in \limsup A_n$.

Sea $x \in \limsup A_n$. Dada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(\frac{1}{k}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números n . Sea $n_1 = \min \{n : B(\frac{1}{k}, x) \cap A_n \neq \emptyset\}$ y, si $k > 1$, sea $n_k = \min \{n \in \mathbb{N} : A_n \cap B(\frac{1}{k}, x) \neq \emptyset \text{ y } n > n_{k-1}\}$. Entonces, existe $x_{n_k} \in B(\frac{1}{k}, x) \cap A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lim x_{n_k} = x$. Tomando la subsucesión $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$, tenemos el resultado.

(b) Supongamos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A_n$ tal que $\lim x_n = x$. Tomemos un conjunto abierto U de X , que tenga al punto x . Como $\lim x_n = x$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ si $n \geq N_0$. Entonces $U \cap A_n \neq \emptyset$ si $n \geq N_0$. Por lo tanto, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todos, excepto un número finito de números n . De aquí que $x \in \liminf A_n$.

Ahora sea $x \in \liminf A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ tal que $d(x, A_n) = d(x, x_n)$. Veamos que $\lim x_n = x$. Sea $\epsilon > 0$. Como $x \in \liminf A_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$. Dada $n \geq n_0$, existe $y_n \in B(\epsilon, x) \cap A_n$. De aquí que $d(x, x_n) \leq d(x, y_n) < \epsilon$. Esto muestra que $\lim x_n = x$. ■

Lema 1.27 *Sean $A \in 2^X$ y $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X tales que $\lim A_n = A$. Entonces $p \in A$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $(p_n)_{n=1}^\infty$ de X tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n = p$.*

Demostración. Como $\lim A_n = A$, en particular $A = \liminf A_n$. El resultado se sigue de inmediato del Lema 1.26. ■

Lema 1.28 Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.

Demostración. Supongamos por el contrario de $A \not\subset B$. Entonces, existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2}d(a, B)$. Como B es compacto, $\epsilon > 0$. Por la convergencia de las dos sucesiones, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$ y $H(B, B_n) < \epsilon$ siempre que $n \geq N$. De aquí que, por el Lema 1.11, $A \subset N(\epsilon, A_N) \subset N(\epsilon, B_N)$, pues $A_N \subset B_N$. Entonces, existe $b_N \in B_N$ tal que $d(a, b_N) < \epsilon$. Por otro lado, del Lema 1.11 tenemos que $B_N \subset N(\epsilon, B)$. Por tanto, existe $b \in B$ tal que $d(b_N, b) < \epsilon$.

Se sigue que $d(a, b) \leq d(a, b_N) + d(b_N, b) < 2\epsilon = d(a, B)$. Concluimos que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < d(a, B)$. Esta contradicción termina la prueba del lema. ■

Lema 1.29 Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Entonces $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$ y $H(B, B_n) < \epsilon$ para cada $n \geq n_0$. Entonces, por el Lema 1.11, $A_n \subset N(\epsilon, A)$, $A \subset N(\epsilon, A_n)$, $B_n \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, B_n)$ para cada $n \geq n_0$. De aquí que $A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$ y $A \cup B \subset N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n)$ para cada $n \geq n_0$.

Por otro lado, del Lema 1.8 se sigue que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$ y $N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n) = N(\epsilon, A_n \cup B_n)$. Por lo tanto, $A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A \cup B)$ y $A \cup B \subset N(\epsilon, A_n \cup B_n)$. Esto prueba que $H(A \cup B, A_n \cup B_n) < \epsilon$ para cada $n \geq n_0$. Concluimos que $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$. ■

Lema 1.30 Sean $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in A_n \cap B_n$. Por la compacidad de X , podemos suponer que la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ es convergente. Sea $x = \lim x_n$. Ahora bien, como $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.27, se tiene que $x \in A$. De manera similar tenemos que $x \in B$. Concluimos que $x \in A \cap B$. Por tanto $A \cap B \neq \emptyset$. ■

1.6. Funciones en Hiperespacios

Dados dos continuos X y Y y una función $f : X \rightarrow Y$, definimos las funciones inducidas $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ y $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$ como $2^f(A) = f(A)$ (la imagen de A bajo f) y $C(f)(A) = f(A)$. Observemos que $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. Entonces, por [16, Lema 13.3], 2^f y $C(f)$ son continuas cuando f es continua.

Dado un continuo X , consideremos la función unión $\cup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ definida como

$$\cup(\Lambda) = \bigcup\{A : A \in \Lambda\}.$$

Denotemos a $\cup(\Lambda)$ simplemente como $\bigcup \Lambda$.

El siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [31, Lema 1.48], muestra que la función unión está bien definida y es continua.

Lema 1.31 Sea X un continuo. Entonces, la función unión \cup definida sobre 2^{2^X} es una función continua y suprayectiva de 2^{2^X} sobre 2^X . Más aún, $\cup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ es no expansiva, es decir,

$$H\left(\bigcup \Lambda_1, \bigcup \Lambda_2\right) \leq H^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$$

para cualesquiera $\Lambda_1, \Lambda_2 \in 2^{2^X}$, donde H^2 denota la métrica de Hausdorff para 2^{2^X} inducida por la métrica de Hausdorff H para 2^X .

Lema 1.32 Sea X un continuo. Si Λ es un subcontinuo de 2^X tal que $\Lambda \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \Lambda$ es un subcontinuo de X .

Demostración. Como $\Lambda \in 2^{2^X}$, se tiene que $\bigcup \Lambda$ es un subconjunto compacto de X por [16, Lema 1.31] y el Lema 1.31. Mostremos que $\bigcup \Lambda$ es un subconjunto conexo de X .

Supongamos que esto no es así. Entonces $\bigcup \Lambda$ es la unión de dos subconjuntos cerrados ajenos no vacíos M_1 y M_2 . Sea $A \in C(X) \cap \Lambda$. Como $A \subset \bigcup \Lambda = M_1 \cup M_2$ es conexo, se tiene que $A \subset M_1$ o $A \subset M_2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A \subset M_1$. Sean $\Lambda_1 = \{L \in \Lambda : L \subset M_1\}$ y $\Lambda_2 = \{L \in \Lambda : L \cap M_2 \neq \emptyset\}$. Observemos que Λ_1 y Λ_2 son subconjuntos cerrados ajenos en 2^X tales que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Puesto que $A \in \Lambda$ y $A \subset M_1$, tenemos que $\Lambda_1 \neq \emptyset$. Además, como $M_2 \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $p \in M_2$. Ya que $M_2 \subset \bigcup \Lambda$, existe $B \in \Lambda$ tal que $p \in B$. Entonces $B \in \Lambda_2$ y $\Lambda_2 \neq \emptyset$. Hemos mostrado que Λ no es conexo, lo cual es una contradicción. Concluimos que $\bigcup \Lambda$ es conexo y, por tanto, un subcontinuo de X . ■

Recordemos que un continuo es *indescomponible* si no es la unión de dos de sus subcontinuos propios.

Teorema 1.33 Sea Y un continuo indescomponible y sea $\Lambda \subset 2^Y$ un continuo arcoconexo. Si $\cup \Lambda = Y$ y si $\Lambda \cap C(Y) \neq \emptyset$, entonces $Y \in \Lambda$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [31, Teorema 1.50].

1.7. Resultados en el Plano

En esta sección veremos algunos resultados de la topología de \mathbb{R}^2 . Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por xy al segmento convexo en \mathbb{R}^2 que

une a x con y , si $x \neq y$ y $xy = \{x\}$, si $x = y$. Sean $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las respectivas proyecciones en la primera y segunda coordenadas.

Teorema 1.34 (de la curva θ) Si $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva θ y es unión de los tres arcos L_0, L_1 y L_2 , los cuales se intersectan, dos a dos, sólo en sus puntos finales p_0 y q_0 , entonces

$$\mathbb{R}^2 \setminus C = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \text{ y } fr_X(D_j) = L_j \cup L_{j+1},$$

donde D_0, D_1 y D_2 son las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ (los subíndices reducidos mod 3). Además $D_1 \cup L_1 \cup L_2$ y $D_2 \cup L_2 \cup L_0$ son homeomorfos a discos cerrados; $D_1 \cup L_1 \setminus \{p_0, q_0\}$ y $D_2 \cup L_0 \setminus \{p_0, q_0\}$ son las componentes de $(D_1 \cup D_2 \cup L_0 \cup L_1 \cup L_2) \setminus L_2$ y D_0 es la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [20, Teorema 2, p. 511].

Lema 1.35 Sean M y W subcontinuos de $I \times I$ tales que $\pi_1(M) = \pi_2(W) = I$. Entonces $M \cap W \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $M \cap W = \emptyset$. Como $I \times I$ es un espacio normal y M, W son cerrados, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, M) \cap N(\epsilon, W) = \emptyset$ (donde las nubes son tomadas en el espacio $I \times I$). Puesto que M y W son conexos, $N(\epsilon, M)$ y $N(\epsilon, W)$ son conexos y abiertos. Observemos, además, que $A = (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\})$ es un conjunto cerrado de $I \times I$ con interior vacío tal que para cada punto $p \in A$, $\beta = \{B(\delta, p) : \delta > 0\}$ forma una base de vecindades con la propiedad que para cada $B \in \beta$, $B \setminus A$ es conexo. Se sigue del Lema 1.2 que $N = N(\epsilon, M) \setminus A$ es un conjunto conexo y abierto.

Veamos que $\pi_1(N) = I$. Si $\pi_1(N) \neq I$, entonces existe $r \in I$ tal que $(r, s) \notin N$ para cada $s \in I$. Como $\pi_1(N(\epsilon, M)) = I$, existe r' tal que $(r, r') \in N(\epsilon, M)$. Junto con lo anterior se tiene que $r' \in \{0, 1\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(r, 0) \in N(\epsilon, M)$. Observemos que cualquier bola abierta centrada en $(r, 0)$ contiene puntos de la forma (r, s) con $s > 0$. De aquí que $B(\rho, (r, 0)) \not\subseteq N(\epsilon, M)$ para cada $\rho > 0$. Esto contradice que $N(\epsilon, M)$ es un abierto. Hemos mostrado que $\pi_1(N) = I$.

Tomemos $t, s \in I$ tales que $p = (0, t) \in N$ y $q = (1, s) \in N$. Como los abiertos conexos en el espacio I^2 son arco conexos ([40, Corolario 27.6]) existe un arco $L \subset N$ que une a p con q . Sea L_0 un subarco de L tal que $L_0 \cap ((\{0\} \times I) \cup (\{1\} \times I)) = \{p_0, q_0\}$, donde $p_0 = (0, t_0)$ y $q_0 = (1, s_0)$, para algunos $t_0, s_0 \in I$. Consideremos los arcos

$$L_1 = (\{0\} \times [t_0, 1]) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [s_0, 1]) \text{ y}$$

$$L_2 = (\{0\} \times [0, t_0]) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, s_0]).$$

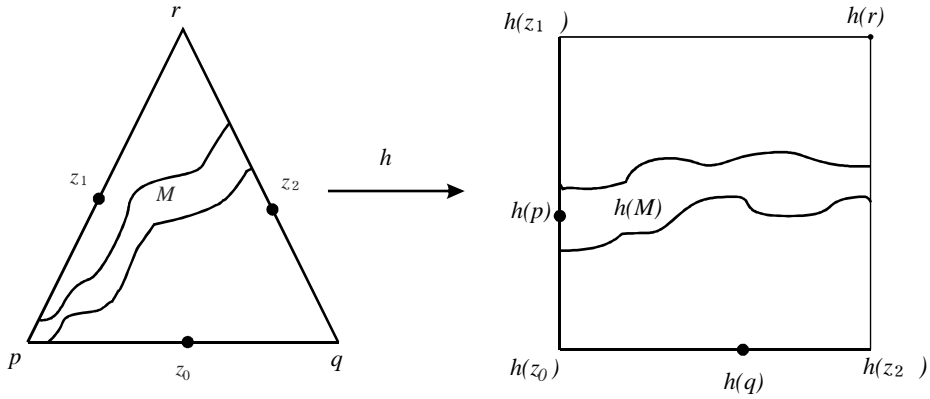
Entonces L_0, L_1 y L_2 son tres arcos que sólo se intersectan por pares en sus puntos finales p_0 y q_0 . Por lo tanto $D = L_0 \cup L_1 \cup L_2$ es homeomorfo a la curva θ . Por el Teorema de la curva θ (Teorema 1.34), se tiene que D separa a $I \times I$ en dos componentes D_1 y D_2 . De tal forma que $I \times I \setminus L_0 = ((D_1 \cup L_1) \setminus \{p_0, q_0\}) \cup ((D_2 \cup L_2) \setminus \{p_0, q_0\})$ y estos dos uniendos son las componentes de $I \times I \setminus L_0$. Como $W \cap N = \emptyset$, W es un conexo en $I \times I \setminus L_0$ e intersecta a L_1 y a L_2 . Esto es una contradicción que termina la prueba. ■

Teorema 1.36 Sean $p = (0, 0), q = (1, 0)$ y $r = (\frac{1}{2}, 1)$ en \mathbb{R}^2 . Sea Δ el triángulo convexo en \mathbb{R}^2 con vértices p, q y r . Sean M y N dos subcontinuos de Δ tales que $p \in M$ y $q \in N$. Si $M \cap qr \neq \emptyset$ y $N \cap pr \neq \emptyset$, entonces $M \cap N \neq \emptyset$.

Demostración. Si $p \in N$ o $q \in M$, se tiene que $M \cap N \neq \emptyset$. Supongamos entonces que $p \notin N$ y $q \notin M$. Sea $z_0 = (\frac{1}{2}, 0)$. Tomemos un punto $z_1 \in pr \setminus \{p, r\}$ tal que $N \cap pr \subset z_1r$ y tomemos un punto $z_2 \in qr \setminus \{q, r\}$ tal que $M \cap qr \subset z_2r$.

Sea $h : \Delta \longrightarrow I \times I$ un homeomorfismo tal que

- i) $h(z_0) = (0, 0)$, $h(z_1) = (0, 1)$, $h(r) = (1, 1)$ y $h(z_2) = (1, 0)$;
- ii) $h(z_0p \cup pz_1) = \{0\} \times I$, $h(z_1r) = I \times \{1\}$, $h(rz_2) = \{1\} \times I$ y $h(z_2q \cup qz_0) = I \times \{0\}$.



Observemos que $h(M)$ y $h(N)$ son subcontinuos de $I \times I$. Como $h(p) \in h(M) \cap (\{0\} \times I)$ y $h(q) \in h(N) \cap (I \times \{0\})$, se tiene que $h(M) \cap (\{0\} \times I) \neq \emptyset$ y $h(N) \cap (I \times \{0\}) \neq \emptyset$. Además, $M \cap qr \subset z_2r$. De aquí que $h(M \cap qr) \subset h(z_2r) = \{1\} \times I$. Por tanto $h(M) \cap (\{1\} \times I) \neq \emptyset$. De manera similar se tiene que $h(N) \cap (I \times \{1\}) \neq \emptyset$.

Como $h(M)$ es un continuo, entonces $\pi_1(h(M))$ es un subcontinuo de I . Pero $\{0, 1\} \subset \pi_1(h(M))$. De aquí que $\pi_1(h(M)) = I$. Un argumento similar muestra que $\pi_2(h(N)) = I$. Entonces, por el Lema 1.35, se tiene que $h(M) \cap h(N) \neq \emptyset$. Por tanto $M \cap N \neq \emptyset$. ■

Este teorema nos es útil para probar el siguiente resultado en el hiperespacio de subcontinuos de un arco. Dados un continuo X y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$, denotamos al conjunto de subcontinuos de B que contiene a A como

$$C(A, B) = \{D \in C(B) : A \subset D\}.$$

Si $A = \{p\} \in F_1(X)$, denotamos a $C(\{p\}, B)$ simplemente como $C(p, B)$.

Teorema 1.37 *Sea A un arco con extremos p y q . Si α y β son subcontinuos de $C(A)$ tales que $\{p\} \in \alpha$, $\{q\} \in \beta$, $\alpha \cap C(q, A) \neq \emptyset$ y $\beta \cap C(p, A) \neq \emptyset$, entonces $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.*

Demostración. Sabemos que existe un homeomorfismo h entre $C(A)$ y Δ , el triángulo convexo en \mathbb{R}^2 con vértices $x = (0, 0)$, $y = (1, 0)$ y $z =$

$(\frac{1}{2}, 1)$, de manera que $h(\{p\}) = x$, $h(\{q\}) = y$, $h(A) = z$, $h(F_1(A)) = xy$, $h(C(p, A)) = xz$ y $h(C(q, A)) = yz$.

Entonces $h(\alpha)$ y $h(\beta)$ son dos subcontinuos de Δ tales que $x \in h(\alpha)$, $y \in h(\beta)$, $h(\alpha) \cap yz \neq \emptyset$ y $h(\beta) \cap xz \neq \emptyset$. Se sigue del Teorema 1.36 que $h(\alpha) \cap h(\beta) \neq \emptyset$. Como h es un homeomorfismo, concluimos que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Esto termina la prueba del teorema. ■

1.8. Conos e Hiperespacios

En esta tesis trabajamos con conos en hiperespacios. Veamos un poco de ellos, incluyendo algo de historia.

1.8.1. Conos

Veamos primero la definición del cono de un espacio topológico.

Definición 1.38 *Dado un espacio topológico X , definimos el **cono** de X , denotado por $\text{Cono}(X)$, como el espacio cociente que resulta de indentificar en un punto al subconjunto $X \times \{1\}$ del espacio $X \times [0, 1]$. Es decir, $\text{Cono}(X)$ es el espacio cociente $X \times [0, 1] / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia sobre $X \times [0, 1]$ dada por $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2)$ si y sólo si $(x_1, t_1) = (x_2, t_2)$ o $t_1 = t_2 = 1$. El punto $X \times \{1\}$ de $\text{Cono}(X)$ es llamado el **vértice** de $\text{Cono}(X)$. El subconjunto $X \times \{0\}$ de $\text{Cono}(X)$ es llamado la **base** del $\text{Cono}(X)$.*

Si X es métrico y compacto, entonces $\text{Cono}(X)$ es topológicamente lo mismo que el espacio $G(Y)$ que resulta de la siguiente construcción geométrica. Supongamos que X es un subconjunto del cubo de Hilbert Q y fijemos un punto $p \in Q$. Consideremos el espacio $Q \times [0, 1]$ en el que $X \times \{0\} \subset Q \times [0, 1]$. Sea $v = (p, 1)$. Para cada $x \in X$, denotemos por xv al segmento de recta en $Q \times [0, 1]$ de $(x, 0)$ a v . Es decir, $xv = \{tv + (1 - t)(x, 0) : t \in [0, 1]\}$. Sea

$$G(Y) = \bigcup \{xv : x \in X\}.$$

Veamos que $Cono(X)$ y $G(X)$ son homeomorfos. Sean $\pi : X \times [0, 1] \longrightarrow Cono(X)$ la función cociente y $f : X \times [0, 1] \longrightarrow G(X)$ la función definida por

$$f(x, t) = tv + (1 - t)(x, 0)$$

para cada $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Veamos que f es constante bajo las fibras de π . Si v es el vértice del cono, entonces $\pi^{-1}(v) = X \times \{1\}$. Por otro lado $f(x, 1) = v$ para cada $x \in X$. Así que f es constante en $\pi^{-1}(v)$. Para un punto $w \neq v$, se tiene que $\pi^{-1}(w)$ es un conjunto de un punto y por tanto f es constante en esa fibra. Hemos mostrado que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Trasgresión ([5, Teorema 3.2]). Por tanto, la función $h = f \circ \pi^{-1} : Cono(X) \longrightarrow G(X)$ es una función continua. Similarmente, se muestra que π es constante en las fibras de f .

Observemos que h es inyectiva y suprayectiva. Además, $Cono(X)$ es compacto, pues $X \times [0, 1]$ es compacto y π es continua. Por lo tanto, h es una función biyectiva continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff. Por tanto h es un homeomorfismo de $Cono(X)$ sobre $G(X)$.

Por la manera en que se construyó el espacio $G(X)$, a $G(X)$ se le llama el *cono geométrico* sobre X . Al punto v de $G(X)$ le llamamos el vértice de $G(X)$ (notemos que la composición $f \circ \pi^{-1}$ antes considerada, lleva al vértice de $Cono(X)$ a v), y al subconjunto $X \times \{0\}$ de $G(X)$ le llamamos la base de $G(X)$.

Esta construcción se puede hacer para cualquier espacio métrico separable (pues dicho espacio se puede encajar en el cubo de Hilbert ([40, Teorema 23.1])). Sin embargo, si consideramos a \mathbb{Z} como subespacio de \mathbb{R}^1 , entonces se puede mostrar que $Cono(\mathbb{Z})$ y $G(\mathbb{Z})$ no son homeomorfos ([5, Ejemplo 1, p. 127]).

1.8.2. Estructura de Hiperespacios

Para estudiar la estructura del hiperespacio $C(X)$, se hace uso de varias herramientas. Por ejemplo, se estudian los arcos en $C(X)$. Tienen interés especial los arcos ordenados.

Definición 1.39 Dados $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es un **arco ordenado** de A a B en $C(X)$, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ cuando $0 \leq s < t \leq 1$.

En [13, Teorema 6.10.] se demuestra la existencia de los arcos ordenados en $C(X)$. Para ello, se usa la siguiente clase de funciones.

Definición 1.40 Una **función de Whitney** en 2^X es una función continua $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

- (a) $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$,
- (b) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

Dada una función de Whitney $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty)$ y $t \in [0, \mu(X)]$, se dice que $\mu^{-1}(t)$ es un *nivel de Whitney* para 2^X . En [13, Teorema 5.3.] se demuestra la existencia de funciones de Whitney para cualquier continuo X . Cuando se habla de una función de Whitney para $C(X)$ simplemente se está refiriendo a una función continua de $C(X)$ en $[0, \infty)$ que satisface las condiciones (a) y (b). Además, puesto que 2^X y $C(X)$ son compactos, la imagen de una función de Whitney es un conjunto acotado que, por la condición (b), alcanza su máximo en el elemento X . Entonces, cuando X es no degenerado, como el producto de una función de Whitney por una constante positiva es también una función de Whitney, podemos considerar a la función de Whitney como una función continua de 2^X (o $C(X)$) en $[0, 1]$. Notemos que, dada una función de Whitney μ y $t \in [0, 1]$, se tiene que $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$.

Definición 1.41 Un continuo tiene la **propiedad cubierta** si ningún subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t)$ cubre (con su unión) a X para cualquier función de Whitney μ para $C(X)$ y todo $t \in [0, \mu(X)]$.

En el estudio del hiperespacio $C(X)$, se ha observado que éste contiene estructuras similares a la de $\text{Cono}(X)$. Primero, existen arcos en $\text{Cono}(X)$ que van desde la base de $\text{Cono}(X)$ hasta el vértice de $\text{Cono}(X)$, los arcos de la forma $\{x\} \times [0, 1]$ en $\text{Cono}(X)$. De manera similar, en $C(X)$ existen

los arcos ordenados que van desde un punto $\{x\} \in F_1(X)$ hasta el elemento $X \in C(X)$.

Por otro lado, existe una proyección natural de $Cono(X)$ sobre $[0, 1]$ que mide la altura de los puntos en $Cono(X)$; de manera similar, existen las funciones de Whitney de $C(X)$ sobre $[0, 1]$ que miden la “altura” (con respecto al orden parcial de la contención) de los elementos de $C(X)$.

Por estas similitudes, es natural preguntarse ¿cuáles continuos X tienen la propiedad que $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$?

El problema de determinar cuándo $Cono(X)$ es homeomorfo (o topológicamente equivalente) a $C(X)$ es clásico en la Teoría de Hiperespacios y ha sido estudiado ampliamente, desde 1972, por varios autores. Particularmente, se han estudiado los continuos $C-H$ y la propiedad $Cono=hiperespacio$.

El primer artículo en el cual aparece un resultado acerca de reconocer un hiperespacio como un cono fue [36] de J. T. Rogers, Jr. El teorema principal del mismo dice que si X es un continuo tipo-círculo en el plano, entonces $C(X)$ se puede encajar en \mathbb{R}^3 . Además, trabajando con un ejemplo no plano, Rogers probó lo siguiente.

Teorema 1.42 [36, Teorema 2] *Si X es el solenoide, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$.*

Esto llevó a muchas investigaciones sobre la estructura de los hiperespacios. Algunos siendo homeomorfos a conos.

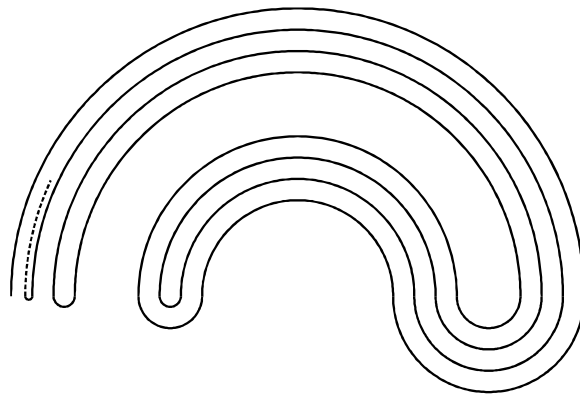
1.8.3. La Propiedad Cono = Hiperespacio

El primer artículo dedicado formalmente a estudiar cuándo un hiperespacio es homeomorfo a un cono fue [34] de J. T. Rogers, Jr. Rogers estudió los continuos X para los cuales existe un tipo especial de homeomorfismo entre $Cono(X)$ y $C(X)$. A saber se interesó por los homeomorfismos para los cuales el vértice v del cono se envía a $X \in C(X)$ y la base $B(X)$ del cono se envía a $F_1(X)$. A tal homeomorfismo le llamaremos *homeomorfismo de Rogers*.

Definición 1.43 *Un continuo X se dice que tiene la **propiedad cono = hiperespacio** si admite un homeomorfismo de Rogers.*

Se sabe que existen continuos X cuyos cono e hiperespacio $C(X)$ son homeomorfos pero no tienen la propiedad cono = hiperespacio. Por ejemplo, los continuos de la figura que ilustra el Teorema 1.60 tienen la propiedad de que su cono e hiperespacio son homeomorfos pero, con excepción del intervalo y la circunferencia, éstos no tienen la propiedad cono=hiperespacio.

Los continuos más simples con la propiedad cono = hiperespacio son el arco y la circunferencia (Sección 1.4.). En [36], Rogers demostró que cualquier solenoide tiene la propiedad cono = hiperespacio y en [34, p. 280] comenta que con las mismas técnicas se demuestra que el continuo conocido como el “arcoiris de Knaster” (siguiente figura) también tiene la propiedad cono = hiperespacio.



Arcoiris de Knaster

A continuación, se presentan otros resultados sobre la propiedad cono = hiperespacio.

Teorema 1.44 [34, Teorema 1] *Si un continuo X tiene la propiedad cono = hiperespacio, entonces cada composante de X es arcoconexa.*

Corolario 1.45 [34, Corolario 1] *Si X es un continuo descomponible tal que X tiene la propiedad cono = hiperespacio, entonces X es arcoconexo.*

En el siguiente resultado sólo suponemos que $Cono(X)$ y $C(X)$ son homeomorfos. Esta propiedad será discutida en la siguiente sección.

Teorema 1.46 [34, Teorema 5] *Sea X un continuo tal que $\dim(X) < \infty$, cada componente de X es arcoconexa y $Cono(X)$ es homeomorfo a $C(X)$. Entonces X es un arco, un continuo tipo-círculo arcoconexo o bien un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.*

Teorema 1.47 [34, Teorema 7] *Sea X un continuo con la propiedad cono = hiperespacio y tal que $\dim(X) < \infty$. Entonces cada subcontinuo propio y no degenerado de X es un arco.*

Más aún, se tiene un resultado más fuerte.

Teorema 1.48 [31, Teorema 8.6.] *Sea X un continuo con la propiedad cono = hiperespacio y tal que $\dim(X) < \infty$. Entonces, X es un arco, una circunferencia, o un continuo indescomponible tal que cada subcontinuo propio y no degenerado de X es un arco.*

Definición 1.49 *Sean X un continuo y d una métrica para X . Decimos que X tiene la **propiedad de Kelley** si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que satisface la siguiente condición:*

(κ) *si $p, q \in X$ son tales que $d(p, q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ es tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.*

Supongamos que X es un continuo con la propiedad de Kelley. Consideremos, además, que cada arco componente de X es una imagen continua y uno-a-uno de \mathbb{R} y que las imágenes de $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0]$ son densas en X . En [4, Teorema 1] se afirma que bajo estas condiciones, todo subcontinuo propio y no degenerado de X es un arco. Agregando la hipótesis de la propiedad cubierta, en [4, Corolario 3], se obtiene que X tiene la propiedad cono = hiperespacio. El siguiente teorema muestra condiciones similares que implican la propiedad cono = hiperespacio.

Teorema 1.50 [16, Teorema 80.3] *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Si cada composante de X es la imagen continua e inyectiva de \mathbb{R} tal que las imágenes de $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0]$ son densas en X , entonces X tiene la propiedad cono = hiperespacio.*

Las condiciones en este teorema son suficientes pero no necesarias para que un continuo tenga la propiedad cono = hiperespacio, pues se sabe que el arcoiris de Knaster tienen la propiedad cono = hiperespacio y no satisface las hipótesis del teorema.

Una *selección* para un hiperespacio $L(X)$ de X , es una función continua $s : L(X) \rightarrow X$ tal que $s(A) \in A$ para toda $A \in L(X)$. En 1999 se obtuvo la siguiente caracterización.

Teorema 1.51 [12, Teorema 2] *Sea X un continuo de dimensión finita. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) X tiene la propiedad cono=hiperespacio;
- (b) existe una selección $s : C(X) - \{X\} \rightarrow X$ tal que, para cada nivel de Whitney \mathcal{A} para $C(X)$, $s|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow X$ es un homeomorfismo;
- (c) existen una selección $s : C(X) - \{X\} \rightarrow X$ y una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tales que $\mu(X) = 1$ y $s|_{\mu^{-1}(t)} : \mu^{-1}(t) \rightarrow X$ es un homeomorfismo, para cada $t \in [0, 1)$.

Este teorema muestra que hay una relación entre los niveles de Whitney $\mu^{-1}(t)$ y los niveles $X \times \{t\}$ de $Cono(X)$, pues hay un homeomorfismo natural entre los niveles $X \times \{t\}$ de $Cono(X)$ y el espacio X , para cada $t \in (0, 1)$.

El siguiente corolario responde preguntas hechas por Dilks y Rogers ([4, p. 236]). Recordemos que un continuo X es **Whitney estable** si es homeomorfo a cada uno de sus niveles de Whitney para $C(X)$ [31, Definición 14.39.1].

Corolario 1.52 [12, Corolario 3] *Si X es un continuo de dimensión finita, X no es la circunferencia y X tiene la propiedad cono=hiperespacio, entonces X tiene la propiedad cubierta y es Whitney estable.*

La noción de tener tipo N fue definida para dendroides pero puede ser extendida a cualquier continuo de la siguiente manera.

Sea A un subcontinuo propio del continuo X . Entonces X es *de tipo N en A* si existen cuatro sucesiones de subcontinuos $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$, $(C_n)_{n=1}^\infty$ y $(D_n)_{n=1}^\infty$ de X , existen dos puntos $a \neq c$ en A y existen sucesiones de puntos $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(c_n)_{n=1}^\infty$ en X tales que $\lim a_n = a$, $\lim c_n = c$, $\lim A_n = A$, $\lim B_n = A$, $\lim C_n = A$, $\lim D_n = A$; $A_n \cap B_n = \{a_n\}$ y $C_n \cap D_n = \{c_n\}$ para cada $n \geq 1$.

Otra consecuencia del Teorema 1.51 es el siguiente resultado.

Corolario 1.53 [12, Corolario 4] *Sea X un continuo de dimensión finita. Si X tiene la propiedad cono=hiperespacio, entonces X no es de tipo N en ninguno de sus subcontinuos propios.*

Respondiendo una pregunta de Dilks y Rogers ([4, Pág. 236]), en [12, Fig. 2] se da un ejemplo de un continuo de dimensión finita X tal que X tiene la propiedad cono = hiperespacio y X no tiene la propiedad de Kelley.

1.8.4. Continuos C - H

Como ya fue mencionado, existen continuos X para los cuales $Cono(X)$ y $C(X)$ son homeomorfos, pero X no tiene la propiedad cono = hiperespacio. Tal es el caso, por ejemplo, del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Esto se debe a que cualquier homeomorfismo entre $Cono(Z)$ y $C(Z)$ envía el vértice v del cono de Z al arco que es residuo de la compactación, lo cual veremos más adelante.

Definición 1.54 *Si X es un continuo tal que $\text{Cono}(X)$ es homeomorfo a $C(X)$, entonces diremos que X es un **continuo C-H**.*

En [28, Teorema 5.7], se muestra que si X es un continuo C-H indescomponible y de dimensión finita, entonces todo homeomorfismo entre $\text{Cono}(X)$ y $C(X)$ es de Rogers. De aquí que X tiene la propiedad cono = hiperespacio.

Sin la condición de la dimensión finita, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1.55 [28, Teorema 5.2] *Si X es un continuo C-H indescomponible y si $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo, entonces $h(v) = X$, donde v es el vértice del cono.*

Teorema 1.56 [28, Teorema 5.4] *Si X es un continuo C-H indescomponible, entonces las componentes de X coinciden con las arccomponentes de X .*

Cuando X es de dimensión finita se puede decir lo siguiente.

Teorema 1.57 [28, Teorema 5.5] *Si X es un continuo C-H indescomponible de dimensión finita, entonces cualquier componente de X es una imagen continua y uno-a-uno de $[0, \infty)$ o bien de \mathbb{R}^1 .*

Una de las diferencias que se pueden encontrar entre $\text{Cono}(X)$ y $C(X)$ tiene que ver con la dimensión de dichos espacios. Por un lado, se sabe que $\dim(\text{Cono}(X)) < \infty$ cuando $\dim(X) < \infty$ ([31, Lema 8.10]); por otro lado, $\dim(C(X)) = \infty$ siempre que $\dim(X) \geq 2$ ([22]). Al respecto, tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 1.58 ([27] y [34, Lema 3]) *Si X es un continuo C-H de dimensión finita, entonces $\dim(X) = 1$. De hecho ([34, Lema 3]), X no puede contener un subcontinuo no degenerado hereditariamente indescomponible.*

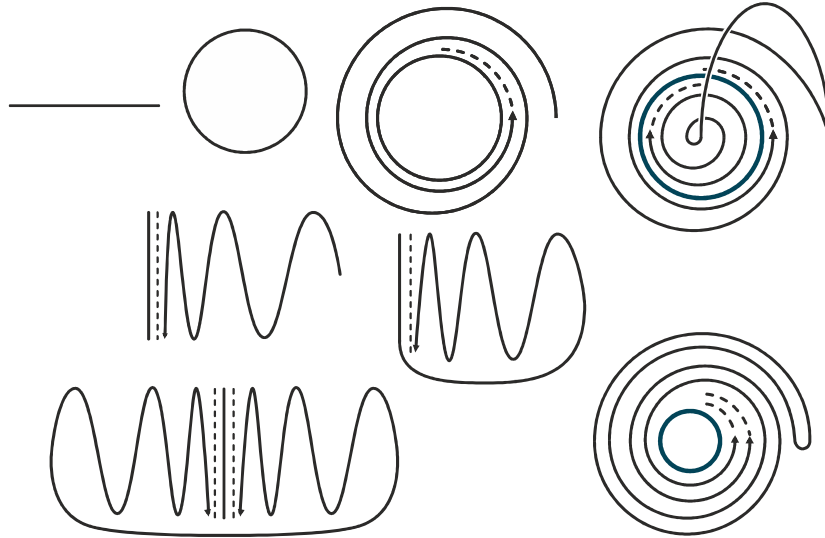
Rogers ([35]) obtuvo independientemente el siguiente resultado, que es más fuerte que el anterior.

Teorema 1.59 [35, Teorema 8] *Si X es un continuo $C-H$ de dimensión finita, entonces X contiene a lo más un subcontinuo indescomponible no degenerado (de aquí, por [30, Teorema 19.14], $\dim(X) = 1$).*

En ese caso, si Y es el único subcontinuo indescomponible no degenerado de X , entonces Y es un continuo $C-H$ de dimensión finita y $X - Y$ es arco-conexo (combinando los resultados [31, Teorema 8.20.4] y [14]). Además, si $h : C(Y) \longrightarrow Cono(Y)$ es un homeomorfismo, se tiene que $h(Y)$ es el vértice de $Cono(Y)$ ([31, Teorema 8.20.3]) y $h(F_1(Y)) = B(Y)$ ([28, Teorema 5.7]). De aquí que Y tiene la propiedad cono = hiperespacio.

En vista del anterior teorema, los continuos de dimensión finita X , para los cuales $Cono(X)$ es homeomorfo a $C(X)$, son casi hereditariamente descomponibles. Entonces es natural preguntarse: ¿cuáles continuos hereditariamente descomponibles X , tienen la propiedad de que su cono e hiperespacio $C(X)$ son homeomorfos? Esta pregunta fue respondida completamente.

Teorema 1.60 ([28] y [34]) *Si X es un continuo hereditariamente descomponible, entonces X es un continuo $C-H$ si y sólo si X es homeomorfo a uno de los ocho continuos de la siguiente figura.*



Continuos $C-H$ hereditariamente descomponibles

El anterior teorema fue obtenido independientemente por Rogers y Nadler.

1.8.5. Hiperespacios Homeomorfos a Conos

Otro problema que ha sido estudiado es el de caracterizar aquellos continuos X para los cuales existe un continuo de dimensión finita Z tal que $C(X)$ y $\text{Cono}(Z)$ son homeomorfos.

En [24], S. Macías resolvió completamente el caso en que X es localmente conexo y obtuvo los siguientes resultados.

Teorema 1.61 [24, Teorema 3] *Si X es un n -odo simple, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(Z)$, para un continuo Z .*

Teorema 1.62 [24, Teorema 4] *Sea X un continuo localmente conexo cuyo espacio de subcontinuos, $C(X)$, tiene dimensión finita. Si $C(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(Z)$, sobre un continuo Z , entonces X es un arco, una curva cerrada simple o un n -odo simple.*

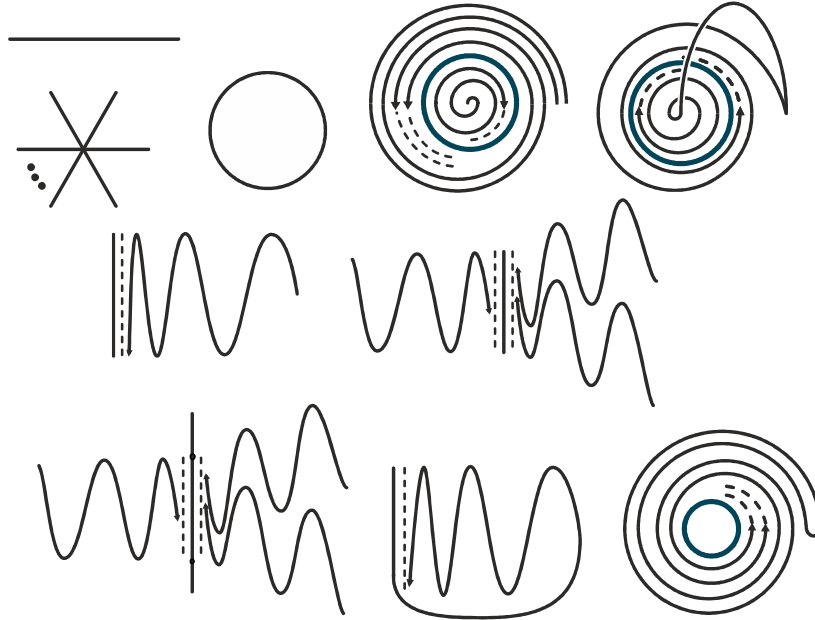
En [23] M. de J. López obtuvo el siguiente teorema.

Teorema 1.63 [23, Pág. 362] *Sea X un continuo tal que existen un continuo Z de dimensión finita y un homeomorfismo $h : C(X) \longrightarrow \text{Cono}(Z)$. Si $Y \in C(X)$ es tal que $h(Y) = v(Z)$, entonces:*

- (a) *Y tiene la propiedad cono = hiperespacio;*
- (b) *$X - Y$ es localmente conexo;*
- (c) *$X - Y$ tiene un número finito de componentes;*
- (d) *cada componente de $X - Y$ es homeomorfa a $[0, \infty)$ o a la recta real;*
- (e) *si una componente R de $X - Y$ es homeomorfa a la recta real, entonces $X - Y = R$;*
- (f) *si A es un subcontinuo de X y A no contiene a Y , entonces A es un arco o un conjunto de un punto.*

Más aún, en [15], A. Illanes y M. de J. López obtuvieron la siguiente caracterización.

Teorema 1.64 *Sea X un continuo hereditariamente descomponible. Entonces existe un continuo de dimensión finita Z tal que $C(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(Z)$ sí y sólo si X es homeomorfo a uno de los continuos de la figura.*



Continuos hereditariamente descomponibles cuyo hiperespacio de subcontinuos es homeomorfo al cono de un continuo de dimensión finita

1.9. Continuos Cono-encajables

En esta tesis estudiaremos la siguiente propiedad.

Definición 1.65 Dado un continuo X , decimos que X es un continuo **cono-encajable en** $C(X)$ si existe un encaje $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(X)$ tal que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$.

Más aún, si $h(p, s) \subsetneq h(p, t)$ siempre que $s < t$ y $p \in X$, decimos que X es un continuo **cono-encajable ordenado en** $C(X)$.

Observación 1.66 *La segunda condición significa que el encaje h se puede hacer mediante arcos ordenados. Es decir, las imágenes de los arcos de la forma $\{p\} \times [0, 1]$, son arcos ordenados en $C(X)$. Además, notemos que, $\{p\} = h(p, 0) \subset h(v)$ para cada $p \in X$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(X)$, entonces $p \in h(v)$ para cada $p \in X$. Es decir, $h(v) = X$.*

El arco y la circunferencia son ejemplos de continuos cono-encajables. Más aún, los continuos C-H y los continuos con la propiedad cono = hiperespacio, son ejemplos de continuos cono-encajables. Tenemos razones para afirmar que las gráficas finitas (continuos que son unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito (considerando al vacío como conjunto finito)), son continuos cono-encajables; sin embargo, faltan algunos detalles para concluir su demostración. Existen varios ejemplos de continuos X que son cono-encajables en $C(X)$ cuyos cono e hiperespacio de subcontinuos no son homeomorfos, algunos de los cuales veremos a lo largo de la tesis.

Para mostrar que existe un encaje, varias veces lo construiremos. Pero, en lugar de definir una función en $\text{Cono}(X)$, la definiremos en $X \times [0, 1]$. Con los siguientes lemas tendremos el encaje deseado. El primero es el Teorema de la Transgresión, su demostración se puede encontrar en [5, Teorema 3.2].

Teorema 1.67 *(Teorema de la Transgresión) Sean $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y $h : X \longrightarrow Z$ una función continua. Supongamos que $h \circ p^{-1}$ es una función univaluada (es decir, h es constante en cada fibra $f^{-1}(y)$). Entonces:*

- 1) $h \circ p^{-1} : Y \longrightarrow Z$ es continua;
- 2) $h \circ p^{-1} : Y \longrightarrow Z$ es una función abierto (cerrado) si y sólo si $h(U)$ es abierto (cerrado) para cada conjunto abierto U que satisface la igualdad $U = f^{-1} \circ f(U)$.

Lema 1.68 *Sean X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $h : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ es una función continua, inyectiva en $X \times [0, 1)$, constante en $X \times \{1\}$, y cumple que $h(x, t) \neq h(x, 1)$ cuando $t < 1$, entonces h induce un encaje natural de $\text{Cono}(X)$ en Y .*

Demostración. Como X es compacto, entonces $X \times [0, 1]$ es compacto. Sea $y_0 \in Y$ tal que $h(x, 1) = y_0$ para cada $x \in X$. Sea $\pi : X \times I \longrightarrow \text{Cono}(X)$ la función cociente. Veamos que h es constante en fibras de π . Si v es el vértice del cono, entonces $\pi^{-1}(v) = X \times \{1\}$. Por otro lado $h(p, 1) = y_0$ para cada $p \in X$. Así que h es constante en $\pi^{-1}(v)$.

Para un punto $w \neq v$, se tiene que $\pi^{-1}(w)$ es un conjunto unipuntual y, por tanto, h es constante en esa fibra. Hemos mostrado que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Trasgresión 1.67. Por tanto, la función $f = h \circ \pi^{-1} : \text{Cono}(X) \longrightarrow Y$ es una función continua.

Veamos que f es inyectiva. Sean $w \neq z$ y $z \in \text{Cono}(X)$. Si uno de ellos es el vértice v del cono, por ejemplo $w = v$, se tiene que $h(v) = y_0$. Por otro lado, $\pi^{-1}(z) = \{(p, t)\}$, con $p \in Y$ y $t < 1$. Por tanto $h(\pi^{-1}(p, t)) = h(p, t) \neq y_0$. Así que $f(w) \neq f(z)$.

Supongamos que ninguno de w y z es el vértice. Tenemos entonces que $\pi^{-1}(w) = \{(p, t)\}$ y $\pi^{-1}(z) = \{(q, s)\}$, con $(p, t) \neq (q, s)$ y $s, t \in [0, 1)$. Como h es inyectiva en $X \times [0, 1)$, se tiene que $h(p, t) \neq h(q, s)$. Por tanto $f(w) \neq f(z)$. Hemos mostrado que f es una función continua e inyectiva de un compacto a un espacio Hausdorff. Por tanto f es un encaje. ■

Lema 1.69 *Dado un continuo X , supongamos que existe una función continua $h : X \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$ tal que*

- (a) $h(p, 0) = \{p\}$;
- (b) existe $Y \in C(X)$ tal que $h(p, t) = Y$ si y sólo si $t = 1$;
- (c) h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

Entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$.

Más aún, si $h(p, s) \not\subseteq h(p, t)$ siempre que $p \in X$ y $s < t$, entonces X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$.

Demostración. Por el Lema 1.68, h induce un encaje natural, f , de $\text{Cono}(X)$ en $C(X)$. Además $f = h \circ \pi^{-1}$, donde $\pi : X \times [0, 1] \longrightarrow \text{Cono}(X)$ es la función cociente.

Observemos que $f(p, 0) = h(\pi^{-1}(p, 0)) = h(p, 0) = \{p\}$. Esto prueba que X es un continuo cono-encajable en $C(X)$.

Ahora bien, si $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $f(p, s) = h(p, s) \subsetneq h(p, t)$. Si $t < 1$, entonces $f(p, t) = h(p, t)$ y por tanto, $f(p, s) \subsetneq f(p, t)$. Para $t = 1$, tenemos que $f(p, 1) = h(\pi^{-1}(v)) = Y = h(p, 1)$. Así que $f(p, s) \subsetneq f(p, 1)$. Concluimos que f es el encaje deseado. De aquí que X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$. ■

Lema 1.70 Sean X un continuo cono-encajable y $h : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje tal que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Entonces la función $K : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(C(X))$ dada por $K(x, t) = h(\{x\} \times [0, t])$ está bien definida y es continua. Más aún, la función $f : X \longrightarrow C(C(X))$ definida como $f(x) = h(\{x\} \times [0, 1])$ es un encaje.

Demostración. Veamos que K es continua. Sean $(x, t) \in \text{Cono}(X)$ y $((x_n, t_n))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\text{Cono}(X)$ tales que $\lim (x_n, t_n) = (x, t)$. Entonces $\lim x_n = x$ y $\lim t_n = t$. Luego $\lim [0, t_n] = [0, t]$ y $\lim (\{x_n\} \times [0, t_n]) = \{x\} \times [0, t]$. Puesto que la función $C(h) : C(\text{Cono}(X)) \longrightarrow C(C(X))$ dada por $C(h)(A) = h(A)$ para cada $A \in C(\text{Cono}(X))$ es continua ([16, Lema 13.3]), tenemos que

$$\begin{aligned} \lim K(x_n, t_n) &= \lim h(\{x_n\} \times [0, t_n]) = \lim (C(h)(\{x_n\} \times [0, t_n])) \\ &= C(h)(\{x\} \times [0, t]) = h(\{x\} \times [0, t]) = K(x, t). \end{aligned}$$

Esto prueba que K es continua.

Ahora, veamos que f es inyectiva. Sean x y y dos puntos distintos de X . Como h es inyectiva y $h(y, 0) = \{y\}$, tenemos que $\{y\} \notin h(\{x\} \times [0, 1])$. Así que $\{y\} \in h(\{y\} \times [0, 1])$ y $\{y\} \notin h(\{x\} \times [0, 1])$. Por tanto, $f(x) \neq f(y)$.

Demostremos que f es continua. Tomemos un punto $x \in X$ y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X , tales que $\lim x_n = x$. Como K es continua, $\lim K(x_n, 1) = K(x, 1)$. Es decir, $\lim f(x_n) = f(x)$. Esto muestra que f es continua.

Por lo tanto, f es una función continua e inyectiva de un espacio compacto a un espacio Hausdorff. Así que f es un encaje. ■

Capítulo 2

Propiedades de Continuos Cono-encajables en $C(X)$

En este capítulo demostraremos algunas propiedades de los continuos cono-encajables en $C(X)$. Primero probaremos que si un continuo X es cono-encajable en $C(X)$, entonces contiene a lo más un continuo indescomponible y posteriormente demostramos un resultado análogo para subcontinuos terminales.

2.1. Conteniendo un Indescomponible

Recordemos que para un continuo X y un punto $p \in X$, la *composante* de p en X , se define como

$$\kappa(p) = \bigcup \{A \subset X : A \text{ es un subcontinuo propio de } X \text{ y } p \in A\}.$$

Definición 2.1 Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y κ una composante de Y . Decimos que κ **se sale** de Y si existe un subcontinuo Z de X tal que $Z \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $Z \cap \kappa \neq \emptyset$ y $Y \not\subseteq Z$.

Veamos que bajo ciertas hipótesis, un subcontinuo indescomponible no puede tener demasiadas composantes que se salgan de él.

Lema 2.2 *Sea X un continuo tal que $\dim(C(X)) < \infty$. Si Y es un subcontinuo indescomponible no degenerado de X , entonces el número de componentes de Y que se salen de Y es finito.*

Demostración. Supongamos que este lema es falso. Sea n un número natural. Entonces podemos tomar n componentes $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ de Y , que se salen de Y . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea Z_i un subcontinuo de X tal que $Z_i \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $Z_i \cap \kappa_i \neq \emptyset$ y $Y \not\subseteq Z_i$.

Supongamos que $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$ para algunas $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$. Sean W_i una componente de $Z_i \cap \kappa_i$ y W_j una componente de $Z_j \cap \kappa_j$. Veamos que W_i es cerrado en X . Como Z_i es cerrado en X , $\overline{W_i} \subset Z_i$. Observemos que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo de Y . Si $\overline{W_i}$ intersecciona dos componentes de Y , como Y es indescomponible, se tiene que $Y = \overline{W_i} \subset Z_i$ (por [20, Teorema 5, p. 212]). Lo cual es una contradicción. Concluimos que $\overline{W_i} \subset \kappa_i$. Hemos mostrado que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo de $Z_i \cap \kappa_i$. Puesto que W_i es una componente de $Z_i \cap \kappa_i$, tenemos que $W_i = \overline{W_i}$. Un razonamiento similar muestra que W_j es cerrado en X .

Como κ_i y κ_j son componentes distintas, se tiene que $\kappa_i \cap \kappa_j = \emptyset$, por lo que W_i y W_j son subconjuntos cerrados y ajenos de X . Por tanto, existen abiertos U_i, U_j de X tales que $W_i \subset U_i$, $W_j \subset U_j$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$. Observemos que, como $W_i \subset Y$ y $Z_i \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, entonces $W_i \subsetneq Z_i$. Análogamente $W_j \subsetneq Z_j$.

Como W_i y Z_i son subcontinuos de X tales que $W_i \subsetneq Z_i$, podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de W_i a Z_i en $C(X)$, tal que $\alpha_i(0) = W_i$, $\alpha_i(1) = Z_i$. Por la continuidad de α_i , existe $t \in (0, 1)$ tal que $W_i \subsetneq \alpha_i(t) \subset U_i$.

Observemos que $\alpha_i(t) \cap \kappa_i \neq \emptyset$. Además, puesto que $\alpha_i(t) \subset Z_i$ y $Y \not\subseteq Z_i$, se tiene que $Y \not\subseteq \alpha_i(t)$. Si $\alpha_i(t) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$, entonces $\alpha_i(t)$ es un subcontinuo de Y tal que $W_i \subsetneq \alpha_i(t) \subsetneq Z_i$. Si $\alpha_i(t)$ intersecciona dos componentes de Y , por [20, Teorema 5, p. 212], $Y = \alpha_i(t) \subset Z_i$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\alpha_i(t) \subset \kappa_i$. Hemos mostrado que $\alpha_i(t)$ es un subcontinuo de $Z_i \cap \kappa_i$. Puesto que W_i es una componente de $Z_i \cap \kappa_i$, tenemos que $W_i = \alpha_i(t)$. Esto contradice que $W_i \subsetneq \alpha_i(t)$. La contradicción surgió al suponer que $\alpha_i(t) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$. Se sigue que $\alpha_i(t) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

Concluimos que $\alpha_i(t)$ es un subcontinuo de X con las mismas propiedades de Z_i pero que además satisface $\alpha_i(t) \subset U_i$.

Análogamente, considerando un arco ordenado $\alpha_j : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ de W_j a Z_j , podemos tomar un subcontinuo $\alpha_j(s)$ de X tal que $\alpha_j(s) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $\alpha_j(s) \cap \kappa_j \neq \emptyset$, $Y \not\subset \alpha_j(s)$ y $\alpha_j(s) \subset U_j$.

Por tanto, $\alpha_i(t)$ y $\alpha_j(s)$ tienen las mismas propiedades que Z_i y Z_j , pero además $\alpha_i(t) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$. Repitiendo este procedimiento con cualquier par de conjuntos Z_i que se intersecten, podemos suponer que $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Entonces $Y \cup \left[\bigcup_{i=1}^n Z_i \right]$ es un n -odo. Se sigue que $C(X)$ contiene una n -celda ([13, Teorema 7.3]). Como esto lo podemos hacer para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $C(X)$ contiene una n -celda para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\dim(C(X)) = \infty$. Lo cual contradice que $\dim(C(X)) < \infty$. Esto concluye la demostración del lema. ■

En el siguiente resultado, mostramos un criterio, bajo el cual, una composante de un continuo indescomponible Y , se sale de Y .

Teorema 2.3 *Sea X un continuo tal que $\dim(C(X)) < \infty$. Sea Y un subcontinuo indescomponible no degenerado de X . Supongamos que $A \in C(X)$ pertenece a la misma arco-componente de $C(X) \setminus \{Y\}$ que $B \in C(X) \setminus C(Y)$, que $A \subset \lambda$ y λ es composante de Y . Entonces λ se sale de Y .*

Demostración. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow C(X) \setminus \{Y\}$ un encaje tal que $f(0) = A$ y $f(1) = B$. Sea $\alpha = \text{Im } f$. Consideremos la función $g : [0, 1] \longrightarrow C(C(X))$ definida como $g(t) = f([0, t])$. Como f es continua, $C(f) : C([0, 1]) \longrightarrow C(C(X))$ es continua. Por lo tanto, g es continua.

Como $B \in \alpha \setminus C(Y)$, tenemos que $\alpha \not\subset C(Y)$. Sea $s_0 = \sup\{s \in [0, 1] : g(s) \subset C(Y)\}$. Consideremos una sucesión creciente $(s_n)_{n=1}^\infty$ en $[0, 1]$ tal que $g(s_n) \subset C(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim s_n = s_0$. Como g es continua, $\lim g(s_n) = g(s_0)$. Se sigue del Lema 1.28 que $g(s_0) \subset C(Y)$. Entonces $s_0 < 1$ y $g(s_0) = f([0, s_0])$ es un arco en $C(Y)$ o un conjunto de un solo

elemento. Entonces, por el Lema 1.32, $\bigcup f([0, s_0])$ es un subcontinuo de Y que intersecta a λ . Si $\bigcup f([0, s_0])$ intersecta a otra composante de Y , entonces $\bigcup f([0, s_0]) = Y$ por [20, Teorema 5, p. 212]. De aquí que $Y \in f([0, s_0])$ por el Teorema 1.33. Lo cual es una contradicción, puesto que $f([0, s_0]) \subset \alpha \subset C(X) \setminus \{Y\}$. Concluimos que $\bigcup f([0, s_0])$ está contenido en λ .

Observemos que $Y \neq f(s_0)$. Es decir, $f(s_0) \subsetneq Y$. Si para cada $t > s_0$ se tiene que $Y \subset \bigcup f([s_0, t])$, tomemos una sucesión decreciente $(t_n)_{n=1}^\infty$ en $(s_0, 1]$ tal que $\lim t_n = s_0$. Entonces $\lim [s_0, t_n] = \{s_0\}$. Por la continuidad de $C(f)$ tenemos que $\lim f([s_0, t_n]) = \{f(s_0)\}$. De aquí que, por la continuidad de la unión (Lema 1.31), $\lim \bigcup f([s_0, t_n]) = \{f(s_0)\}$. Como $Y \subset \bigcup f([s_0, t_n])$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue del Lema 1.28 que $Y \subset f(s_0)$, lo cual es una contradicción.

Concluimos que existe $t_0 > s_0$ tal que $Y \not\subset \bigcup f([s_0, t_0])$. Por lo tanto, $\bigcup f([s_0, t_0])$ es un subcontinuo de X tal que $\bigcup f([s_0, t_0]) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ y que no contiene a Y . Además, como $f(s_0)$ está contenido en λ , se tiene que $\lambda \cap \left(\bigcup f([s_0, t_0])\right) \neq \emptyset$. Esto prueba que λ se sale de Y . ■

Estamos listos para probar la propiedad mencionada de los continuos cono-encajables.

Teorema 2.4 *Sea X un continuo cono-encajable en $C(X)$ tal que $\dim(C(X))$ es finita. Sea $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(X)$ un encaje tal que $h(x, 0) = \{x\}$, para cada $x \in X$. Supongamos que v es el vértice de $\text{Cono}(X)$ y que Y es un subcontinuo indescomponible no degenerado de X . Entonces*

- (a) $h(v) = Y$;
- (b) el único subcontinuo indescomponible no degenerado de X es Y ;
- (c) $h(y, t) \subset Y$ para todo $(y, t) \in Y \times [0, 1]$;
- (d) Y es un continuo cono-encajable en $C(Y)$.

Demostración. Por el Lema 2.2, a lo más un número finito de composantes de Y se salen de Y . Como Y es un continuo indescomponible, tiene una cantidad no numerable de composantes. Así que podemos tomar tres composantes distintas κ_1, κ_2 y κ_3 de Y que no se salen de Y .

Tomemos $i \in \{1, 2, 3\}$ y $x_i \in \kappa_i$. Consideremos la función $f_i : [0, 1] \rightarrow \text{Cono}(X)$ definida como $f_i(t) = (x_i, t)$. Observemos que f_i es un encaje tal que $f_i(0) = (x_i, 0)$ y $f_i(1) = v$. Sea $\alpha_i = \text{Im } f_i$. Como α_i es un arco y h es un encaje, se tiene que $h(\alpha_i)$ es un arco en $C(X)$ que une a $h(x_i, 0) = \{x_i\}$ con $h(v)$.

Observemos que si $i \neq j$, entonces $h(\alpha_i) \cap h(\alpha_j) = h(v)$. Así que $h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$ es un arco en $C(X)$ que une a $\{x_1\}$ con $\{x_2\}$.

Si $h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2) \subset C(Y)$, entonces por el Lema 1.32, $\bigcup h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$ es un subcontinuo de Y . Como $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ son subconjuntos de componentes distintas y $\{x_1\}, \{x_2\} \in h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$, se tiene que $\bigcup h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$ intersecciona a dos componentes distintas de Y . Así que, por [20, Teorema 5, p.212], $\bigcup (h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)) = Y$. Se sigue del Teorema 1.33, que $Y \in h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$. Por otro lado, si $h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2) \not\subset C(Y)$, entonces existe $B \in h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2) \setminus C(Y)$. Observemos que $\{x_i\}$ y B están en el arco $h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2) \subset C(X)$, para $i \in \{1, 2\}$. Puesto que $\{x_i\}$ está en una componente que no se sale de Y , para $i \in \{1, 2\}$, por el Teorema 2.3, tenemos que $\{x_i\}$ no puede estar en la misma arco-componente de $C(X) \setminus \{Y\}$ que B , para $i \in \{1, 2\}$, de manera que $Y \in h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$. En ambos casos tenemos que $Y \in h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Y \in h(\alpha_1)$.

Por otro lado, $h(\alpha_2) \cup h(\alpha_3)$ es un arco en $C(X)$ que une a $\{x_2\}$ con $\{x_3\}$. Un razonamiento similar muestra que $Y \in h(\alpha_2) \cup h(\alpha_3)$. Supongamos que $Y \in h(\alpha_2)$. Concluimos que $Y \in h(\alpha_1) \cap h(\alpha_2) = \{h(v)\}$. Hemos mostrado que $Y = h(v)$.

Si Y_1 es un subcontinuo indescomponible no degenerado de X , Y_1 satisface las mismas hipótesis que Y , así que $h(v) = Y_1$. De manera que $Y_1 = Y$. Por tanto, el único subcontinuo indescomponible no degenerado de X es Y .

Sea $y \in \kappa_1$. Si existe $t \in [0, 1]$ tal que $h(y, t) \not\subset Y$, como $Y = h(v) = h(y, 1)$, tenemos que $t < 1$. Entonces $h(\{y\} \times [0, 1])$ es un arco en $C(X)$ tal que $h(y, 0) \subset \kappa_1$, $h(y, t) \not\subset Y$ y $h(\{y\} \times [0, t]) \subset C(X) \setminus \{Y\}$. Si $h(y, t) \neq X$ y tomamos un arco ordenado β de $h(y, t)$ a X , con $h(\{y\} \times [0, t])$ y β se puede conectar $\{y\}$ con X por un arco que no pasa por Y . Por el Teorema 2.3, κ_1 se sale de Y . En el caso en que $h(y, t) = X$ también se concluye que κ_1 se

sale de Y . En cualquier caso se concluye que κ_1 se sale de Y . Esto contradice la elección de κ_1 y prueba que $h(y, t) \subset Y$ para toda $t \in [0, 1]$.

Dada $y \in Y$, por la densidad de κ_1 en Y (Teorema 1.17) existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de κ_1 tal que $\lim y_n = y$. Dada $t \in [0, 1]$, la continuidad de h implica que $\lim h(y_n, t) = h(y, t)$. Por el párrafo anterior, $h(y_n, t) \subset Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que, por el Lema 1.28, $h(y, t) \subset Y$.

Hemos probado que la función $h' = h|_{C_{\text{ono}}(Y)} : C_{\text{ono}}(Y) \longrightarrow C(X)$ tiene imagen contenida en $C(Y)$. Por tanto, h' tiene las propiedades necesarias para que podamos afirmar que Y es cono-encajable en $C(Y)$. ■

2.2. Conteniendo un Subcontinuo Terminal

Recordemos que un subcontinuo no degenerado y propio Y de un continuo X es *terminal* si siempre que $A \in C(X)$ es tal que $A \cap Y \neq \emptyset$, se tiene que $A \subset Y$ o bien $Y \subset A$.

Mostraremos que un continuo cono-encajable tiene a lo más un continuo terminal. Primero probemos el siguiente lema, donde se muestra la propiedad planteada arriba.

Lema 2.5 *Sean X un continuo y Y un subcontinuo terminal de X . Si α es un arco en $C(X)$ que une un punto de $C(Y)$ con uno de $C(X) \setminus C(Y)$, entonces $Y \in \alpha$.*

Demostración. Sea α un arco en $C(X)$ que une a $M \in C(Y)$ con $N \in C(X) \setminus C(Y)$. Consideremos un homeomorfismo $f : [0, 1] \longrightarrow \alpha$ tal que $f(0) = M$ y $f(1) = N$. Supongamos que $Y \notin \alpha$. Consideremos la función $g : [0, 1] \longrightarrow C(C(X))$, definida como $g(t) = f([0, t])$. Como f es continua, tenemos que $C(f) : C([0, 1]) \longrightarrow C(C(X))$ es continua. Por tanto, g es continua.

Sea $s_0 = \sup\{s \in [0, 1] : g(s) \subset C(Y)\}$. Consideremos una sucesión creciente $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ en $[0, s_0]$ tal que $g(s_n) \subset C(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim s_n =$

s_0 . Como g es continua, tenemos que $\lim g(s_n) = g(s_0)$. Se sigue del Lema 1.28 que $g(s_0) \subset C(Y)$. Entonces $s_0 < 1$. Por el Lema 1.32, $\bigcup f([0, s_0])$ es un subcontinuo de Y .

Observemos que $Y \neq f(s_0)$. Es decir, $f(s_0) \subsetneq Y$. Si para cada $t > s_0$ se tiene que $Y \subset \bigcup f([s_0, t])$, tomemos una sucesión decreciente $(t_n)_{n=1}^\infty$ en $[s_0, 1)$ tal que $\lim t_n = s_0$. Entonces $\lim [s_0, t_n] = \{s_0\}$. Por la continuidad de $C(f)$ tenemos que $\lim f([s_0, t_n]) = f(s_0)$. De aquí que, por la continuidad de la unión (Lema 1.31), $\lim \bigcup f([s_0, t_n]) = f(s_0)$. Como $Y \subset \bigcup f([s_0, t_n])$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue del Lema 1.28 que $Y \subset f(s_0)$. Lo cual es una contradicción. Concluimos que existe $t_0 > s_0$ tal que $Y \not\subset \bigcup f([s_0, t_0])$. Si $\bigcup f([s_0, t_0]) \subset Y$, entonces $g(t_0) = f([0, t_0]) \subset C(Y)$, pues $g(s_0) = f([0, s_0]) \subset C(Y)$. Esto contradice la elección de s_0 . Por lo tanto, $\bigcup f([s_0, t_0]) \not\subset Y$. Como $f(s_0) \in C(Y)$, $\bigcup f([s_0, t_0])$ es un subcontinuo de X que intersecta a Y , que no está contenido en Y y no lo contiene. Esto contradice que Y es un subcontinuo terminal. Concluimos que $Y \in \alpha$. ■

Teorema 2.6 *Sea X un continuo cono-encajable en $C(X)$. Entonces X tiene a lo más un subcontinuo terminal. Más aún, si Y es un subcontinuo terminal de X y $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(X)$ es un encaje tal que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$, entonces $h(v) = Y$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(X)$.*

Demostración. Supongamos que $h(v) \neq Y$, donde Y es un subcontinuo terminal de X . Analizamos dos casos:

Caso 1) $Y \notin \text{Im } h$.

Tomemos un par de puntos $p \in Y$ y $q \in X \setminus Y$. Definamos $f : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como

$$f(t) = \begin{cases} h(p, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h(q, 2 - 2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que $f(0) = \{p\} \in C(Y)$ y $f(1) = \{q\} \in C(X) \setminus C(Y)$. Es claro entonces que $\alpha = \text{Im } f$ es un arco en $C(X) \setminus \{Y\}$ que une a un elemento de $C(Y)$ con uno de $C(X) \setminus C(Y)$. Esto contradice el Lema 2.5. Concluimos que este caso es imposible.

Caso 2) $Y \in (\text{Im } h) \setminus \{h(v)\}$. Sea $(y, t) \in \text{Cono}(X)$ tal que $h(y, t) = Y$. Entonces $t < 1$. Tomemos $q \in X \setminus Y$ y $p \in Y$ tal que $p \neq y$. Definamos $g : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como

$$g(s) = \begin{cases} h(p, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h(q, 2 - 2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, es claro que $\beta = \text{Im } g$ es un arco en $C(X)$ que une a $\{p\}$ con $\{q\}$ que no pasa por Y . Además, $\{p\} \in C(Y)$ y $\{q\} \in C(X) \setminus C(Y)$. Esto contradice el Lema 2.5, mostrando así que este caso también es imposible. Hemos probado entonces que $h(v) = Y$.

Ahora bien, si Y y Z son dos subcontinuos terminales de X , se tiene que $Z = h(v) = Y$. Hemos mostrado que X tiene a lo más un subcontinuo terminal. ■

Es natural preguntarse si un subcontinuo terminal no degenerado de un continuo cono-encajable, también es un continuo cono-encajable. La respuesta es afirmativa como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$ y Y es un subcontinuo terminal de X , entonces Y es un continuo cono-encajable en $C(Y)$.*

Demostración. Sea $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(X)$ un encaje del cono de X en el hiperespacio $C(X)$ tal que $h(x, 0) = \{x\}$, para cada $x \in X$. Sea $h' = h|_{C(Y)} : \text{Cono}(Y) \rightarrow C(X)$. Observemos que h' es continua e inyectiva. Para probar el teorema sólo tenemos que ver que $h'(y, t) \in C(Y)$ para cada $(y, t) \in Y \times [0, 1]$.

Dado $y \in Y$, se tiene que $h(y, 0) = \{y\} \in C(Y)$ y $h(y, 1) = h(v) = Y \in C(Y)$ (Teorema 2.6). Tomemos $0 < t_0 < 1$. Supongamos que $h(y, t_0) \in C(X) \setminus C(Y)$. Definamos $f : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $f(t) = h(y, tt_0)$. Como $\{y\} \times [0, t_0]$ es un arco que no pasa por el vértice del cono, entonces $f([0, 1]) = h(\{y\} \times [0, t_0])$ es un arco en $C(X)$ que no pasa por Y . Sin embargo, es un arco que une a $\{y\} \in C(Y)$ con $h(y, t_0) \in C(X) \setminus C(Y)$. Esto contradice el Lema 2.5. Concluimos que $h'(y, t) = h(y, t) \in C(Y)$ para cada $(y, t) \in Y \times [0, 1]$. ■

2.3. Sobre Contractilidad

Recordemos que un espacio topológico Z es *contráctil* si existen una función continua $h : Z \times [0, 1] \longrightarrow Z$ y un punto $p \in Z$ tales que, para cada $x \in Z$, $h(x, 0) = x$ y $h(x, 1) = p$. Tal función se llama *contracción en Z* .

Intuitivamente, que Z sea contráctil significa que Z se puede deformar continuamente a un punto en un intervalo finito de tiempo.

Sabemos que dado un continuo X , $Cono(X)$ es contráctil. Es natural preguntarse si dado un continuo cono-encajable, se tiene contractilidad en su hiperespacio de subcontinuos. Para ello, vamos a considerar la siguiente variante de la noción de contractilidad.

Definición 2.8 *Dados un subespacio Y de Z y $z_0 \in Z$, decimos que Y es **contráctil a z_0 en Z** si existe una función continua $K : Y \times [0, 1] \longrightarrow Z$ tal que, para toda $y \in Y$, se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (a) $K(y, 0) = y$,
- (b) $K(y, 1) = z_0$.

*Así, K es una **contracción de Y a z_0 en Z** .*

Veamos el siguiente teorema, el cual da respuesta a la pregunta planteada antes.

Teorema 2.9 *Supongamos que X es un continuo cono-encajable en $C(X)$. Sea $h : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje del cono de X en el hiperespacio $C(X)$ tal que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Sea N el subcontinuo de X tal que $h(v) = N$, donde v es el vértice del cono. Entonces existe una contracción $K : F_1(X) \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$ de $F_1(X)$ a N en $C(X)$ tal que K es inyectiva sobre $F_1(X) \times [0, 1)$.*

Demostración. Definamos $K : F_1(X) \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$ como $K(\{x\}, t) = h(x, t)$. Entonces K es una función continua tal que $K(\{x\}, 0) = h(x, 0) = \{x\}$ y $K(\{x\}, 1) = h(x, 1) = h(v) = N$.

Dados $(\{x\}, t), (\{y\}, s) \in F_1(X) \times [0, 1)$ tales que $K(\{x\}, t) = K(\{y\}, s)$. Entonces $h(x, t) = h(y, s)$. Como $s, t < 1$ y h es un encaje, se tiene que $(x, t) = (y, s)$. Es decir, $(\{x\}, t) = (\{y\}, s)$. Esto concluye la demostración. ■

Observemos que el Teorema 2.9 nos dice que si un continuo X es cono-encajable en $C(X)$, entonces $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$. Por [13, Teorema 9.1], se tiene que si $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$, entonces $C(X)$ es contráctil. Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.10 *Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces $C(X)$ es contráctil.*

Si un continuo X es contráctil, se tiene que $C(X)$ es contráctil. Entonces surge la pregunta de si existen continuos contráctiles que no sean continuos cono-encajables. Más adelante (4.32) daremos un ejemplo que muestra que tales continuos existen.

2.4. Sobre la Estructura de $C(X)$

Hemos mencionado que existe una proyección natural de $Cono(X)$ sobre $[0, 1]$ que mide la altura de los puntos de $Cono(X)$; así como lo hace una función de Whitney de $C(X)$ sobre $[0, 1]$ la cual mide la “altura” de los elementos de $C(X)$ (con respecto al orden parcial de la contención).

Cuando tenemos un encaje ordenado de $Cono(X)$ en $C(X)$, es natural preguntarnos si lo podemos definir de manera que “preserve” niveles. Veamos que para un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$, podemos conseguir el encaje de manera que “preserve” niveles.

Teorema 2.11 *Sean X un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$ y $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney tal que $\mu(X) = 1$. Entonces existe un encaje $h : Cono(X) \rightarrow C(X)$ tal que, para cada $x \in X$, se tiene que*

- a) $h(x, 0) = \{x\}$;
- b) $h(x, s) \subsetneq h(x, t)$, siempre que $s < t$;
- c) $\mu(h(x, t)) = t$ para cada $t \in [0, 1]$.

Demostración. Como X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$, existe un encaje $f : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(X)$ tal que $f(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$ y $f(x, s) \subsetneq f(x, t)$ siempre que $s < t$. De la Observación 1.66 tenemos que $f(v) = X$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(X)$. Observemos que $f(\{x\} \times [0, 1])$ es un arco ordenado en $C(X)$ del elemento $\{x\}$ de $F_1(X)$ a X . Por lo tanto, para cada $t \in [0, 1]$, existe un único elemento $A_{x,t} \in f(\{x\} \times [0, 1])$ tal que $\mu(A_{x,t}) = t$.

Definamos la función $h : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(X)$ como $h(x, t) = A_{x,t}$. Veamos que h cumple con lo deseado.

Observemos primero que, para $t = 0$, $A_{x,0}$ es el único elemento de $f(\{x\} \times [0, 1])$ tal que $\mu(A_{x,0}) = 0$. Es decir, $h(x, 0) = A_{x,0} = \{x\}$. Notemos que $h(v) = X$ es el único elemento $A_{x,1}$ de $f(\{x\} \times [0, 1])$ tal que $\mu(A_{x,1}) = 1$. Es decir, $h(v) = A_{x,1} = f(v) = X$ para cada $x \in X$. Además, $\mu(h(x, t)) = t$ para cada $x \in X$ y $t \in [0, 1]$.

Sean $x \in X$ y $s < t$. Entonces $\mu(h(x, s)) < \mu(h(x, t))$. Como además $h(x, s)$ y $h(x, t)$ son elementos de un arco ordenado en $C(X)$, tenemos que $h(x, s) \subsetneq h(x, t)$. Esto prueba b). En particular, $h(x, s) \neq h(x, t)$. Concluimos, además, que $h(x, t) = h(v)$ si y sólo si $t = 1$.

Por otro lado, si $h(x, t) = A = h(y, s)$, entonces $A \in f(\{x\} \times [0, 1]) \cap f(\{y\} \times [0, 1])$. Si $x \neq y$, por ser f un encaje, tenemos que $f(\{x\} \times [0, 1]) \cap f(\{y\} \times [0, 1]) = f(v)$. De aquí que $h(x, t) = h(y, s) = f(v) = h(v)$. Por lo tanto, $t = s = 1$ y $(x, t) = v = (y, s)$. Si $x = y$, tenemos que $\mu(h(x, t)) = \mu(h(y, s))$. Así que $t = s$. Se sigue que $(x, t) = (y, s)$. Hemos probado, así, que h es inyectiva.

Veamos ahora que h es continua. Consideremos una sucesión $(x_n, t_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\text{Cono}(X)$ y un punto $(x, t) \in \text{Cono}(X)$ tales que $\lim(x_n, t_n) = (x, t)$. Supongamos que existe $A \in C(X)$ tal que $\lim h(x_n, t_n) = A$. Veamos que $A = h(x, t)$.

Como $\mu(h(x_n, t_n)) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim t_n = t$, tenemos que $\mu(A) = t$. Entonces, sólo falta ver que $A \in f(\{x\} \times [0, 1])$.

Por el Lema 1.70, sabemos que $\lim f(\{x_n\} \times [0, 1]) = f(\{x\} \times [0, 1])$. Como $h(x_n, t_n) \in f(\{x_n\} \times [0, 1])$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \in f(\{x\} \times [0, 1])$ (Lema 1.27). Esto prueba que $A = h(x, t)$. Por lo tanto, h es continua.

Ya que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff, tenemos que h es un encaje. Esto termina la prueba del teorema. ■

2.5. Heredando la Propiedad

Si un continuo X es cono-encajable en $C(X)$, es natural preguntarse si esta propiedad la hereda a algún espacio. En esta sección veremos situaciones en las que dicha propiedad es heredada.

2.5.1. Productos

Si tenemos una familia numerable de continuos, podemos considerar su producto topológico, el cual es un continuo. Es natural preguntarse si el producto de una familia numerable de continuos cono-encajables es un continuo cono-encajable. Para responder ésto, veamos primero el siguiente lema.

Lema 2.12 *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de continuos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n \in C(X_n)$ y $(A_n^k)_{k=1}^\infty$ una sucesión en $C(X_n)$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} A_n^k = A_n$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=1}^\infty A_n^k \right) = \prod_{n=1}^\infty A_n$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por d_n y H_n las métricas de X_n y $C(X_n)$, respectivamente. Podemos suponer que $\text{diám}_{d_n}(X_n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$ y d la métrica para X definida como

$$d((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Sean $\mathcal{A} = \prod_{n=1}^\infty A_n$ y $\mathcal{A}_k = \prod_{n=1}^\infty A_n^k$. Como $A_n, A_n^k \in C(X_n)$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{A}, \mathcal{A}_k \in C(X)$. Veamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$. Sea $\epsilon > 0$.

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Dada $n \in \{1, \dots, N\}$, como $\lim_{k \rightarrow \infty} A_n^k = A_n$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $H_n(A_n^k, A_n) < \frac{\epsilon}{2N}$ para cada $k \geq k_n$. Sea $n_0 = \max\{k_n : n \in \{1, \dots, N\}\}$.

Tomemos $k \geq n_0$. Para ver que $H(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}) < \epsilon$, veamos que $\mathcal{A} \subset N_H(\epsilon, \mathcal{A}_k)$ y $\mathcal{A}_k \subset N_H(\epsilon, \mathcal{A})$.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$. Dada $n \in \{1, \dots, N\}$, como $H_n(A_n^k, A_n) < \frac{\epsilon}{2N}$, existe $a_n^k \in A_n^k$ tal que $d_n(a_n, a_n^k) < \frac{\epsilon}{2N}$. Para $n > N$, elegimos $a_n^k \in A_n^k$ cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} d\left((a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n^k)_{n=1}^{\infty}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(a_n, a_n^k)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{d_n(a_n, a_n^k)}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_n(a_n, a_n^k)}{2^n} \\ &< \frac{\epsilon}{2N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Hemos encontrado un punto $(a_n^k)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}_k$ tal que $d\left((a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n^k)_{n=1}^{\infty}\right) < \epsilon$. Concluimos que $\mathcal{A} \subset N_H(\epsilon, \mathcal{A}_k)$. Un argumento similar muestra que $\mathcal{A}_k \subset N_H(\epsilon, \mathcal{A})$. Por tanto $H(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}) < \epsilon$ para cada $k \geq n_0$. Esto muestra que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$. ■

Estamos listos para mostrar que el producto de una familia numerable de continuos cono-encajables es un continuo cono-encajable.

Teorema 2.13 *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de continuos tales que X_n es cono-encajable en $C(X_n)$. Entonces el producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo cono-encajable en $C(X)$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : \text{Cono}(X_n) \longrightarrow C(X_n)$ un encaje tal que $h_n(x, t) = \{x\}$ para cada $x \in X_n$.

Definamos la función $h : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(X)$ como

$$h((x_n)_{n=1}^{\infty}, t) = \prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, t).$$

Como $h_n(x_n, t)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, t)$ es un continuo. Además, observemos que $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, t) \subset \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Así que

$$\prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, t) \in C(X).$$

Veamos que h es continua. Sean $A \in \text{Cono}(X)$ y $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\text{Cono}(X)$ tales que $\lim A_k = A$. Sean $A = ((x_n)_{n=1}^{\infty}, t)$ y $A_k = ((x_n^k)_{n=1}^{\infty}, t_k)$. Como $\lim A_k = A$, entonces $\lim t_k = t$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de h_n , tenemos que $\lim h_n(x_n^k, t_k) = h_n(x_n, t)$. Usando el Lema 2.12,

$$\begin{aligned} \lim h(A_k) &= \lim h((x_n^k)_{n=1}^{\infty}, t_k) \\ &= \lim \left(\prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n^k, t_k) \right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (\lim h_n(x_n^k, t_k)) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, t) = h((x_n)_{n=1}^{\infty}, t). \end{aligned}$$

Esto muestra que h es continua.

Para $t = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} h((x_n)_{n=1}^\infty, 0) &= \prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, 0) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \\ &= \{(x_n)_{n=1}^\infty\}, \end{aligned}$$

para cada $(x_n)_{n=1}^\infty \in X$.

Además, para $t = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} h((x_n)_{n=1}^\infty, 1) &= \prod_{n=1}^{\infty} h_n(x_n, 1) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} h_n(v_n), \end{aligned}$$

para cada $(x_n)_{n=1}^\infty \in X$, donde v_n es el vértice de $Cono(X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $h(v) = \prod_{n=1}^{\infty} h_n(v_n)$, donde v es el vértice de $Cono(X)$.

Sean $s, t \in [0, 1]$ y $x, y \in X$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Sean $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ y $y = (y_n)_{n=1}^\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\pi_n : X \rightarrow X_n$ la n -ésima proyección. Puesto que $h(x, t) = h(y, s)$, entonces $\pi_n(h(x, t)) = \pi_n(h(y, s))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $h_n(x_n, t) = h_n(y_n, s)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $t = 1$, entonces $h_n(x_n, t) = h_n(v_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $h_n(v_n) = h_n(y_n, s)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $s = 1$. Un razonamiento similar muestra que si $s = 1$, entonces $t = 1$.

Supongamos que $s, t < 1$. Puesto que h_n es un encaje para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $(x_n, t) = (y_n, s)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $s = t$ y $x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $(x, t) = (y, s)$. Además, como h es una función de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff, tenemos que h es el encaje deseado. ■

Observemos que el Lema 2.12 es válido para un producto finito de continuos. Entonces, usando los mismos argumentos, tenemos que un producto

finito de continuos cono-encajables es un continuo cono-encajable. Por otro lado, tenemos la siguiente pregunta.

Problema 2.14 Si $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo cono-encajable en $C(X)$, ¿será cierto que X_n es un continuo cono-encajable para cada $n \in \mathbb{N}$?

Ahora, como $[0, 1]$ es un continuo cono-encajable en $C([0, 1])$, entonces el cubo de Hilbert Q es un continuo cono-encajable en $C(Q)$. Por otro lado, considerando un continuo X con más de un subcontinuo terminal, encajado en el cubo de Hilbert, por el Teorema 2.6, X no es un continuo cono-encajable en $C(X)$. Esto muestra que la propiedad de ser cono-encajable no es hereditaria.

2.5.2. Hiperespacios

Otra pregunta natural es la siguiente: ¿si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces alguno de sus hiperespacios también lo es? A continuación daremos algunas respuestas.

Dado un continuo X y dada $n \in \mathbb{N}$, recordemos que el n -ésimo producto simétrico de X está definido como

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Dados un continuo X y subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_n de X , denotemos por $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle_m$ al conjunto $\{K \in F_m(X) : K \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ y } K \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Es decir, $\langle A_1, \dots, A_n \rangle_m$ es el conjunto vietórico en $F_m(X)$ para los conjuntos A_1, \dots, A_n o bien, $\langle A_1, \dots, A_n \rangle_m = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \cap F_m(X)$. Entonces $\langle A_1, \dots, A_n \rangle_m$ es cerrado (respectivamente, abierto) en $F_m(X)$ cuando los subconjuntos A_1, \dots, A_n son cerrados (respectivamente, abiertos) en X . Para ver si $F_n(X)$ tiene la propiedad siempre que X la tiene, probemos el siguiente lema.

Lema 2.15 [25, Lema 1] Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y C_1, \dots, C_n subconjuntos conexos de X . Si $m \geq n$, entonces el conjunto $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ es un subconjunto conexo de $F_m(X)$.

Demostración. Tomemos dos elementos distintos $\{x_1, \dots, x_r\}, \{y_1, \dots, y_s\}$ en $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$. Entonces, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un punto $x_{j_i} \in C_i$ para algún $j_i \in \{1, \dots, r\}$. También existe un punto $y_{k_i} \in C_i$ para algún $k_i \in \{1, \dots, s\}$. Probemos el siguiente hecho.

Afirmación 1. Existe un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ que contiene a ambos puntos $\{x_1, \dots, x_r\}$ y $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$.

Supongamos que $\{x_1, \dots, x_r\} \neq \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$. Entonces existe un punto $x_t \in \{x_1, \dots, x_r\} \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$. Sabemos que $x_t \in C_u$ para algún $u \in \{1, \dots, n\}$. Definamos la función

$$f : \{x_{j_1}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\} \times C_u \longrightarrow \langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$$

como $f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, c) = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, c\}$. Observemos que f está bien definida (pues $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$ tiene menos de m puntos) y es continua. Entonces, como $\{x_{j_1}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\} \times C_u$ es conexo, tenemos que

$$\mathcal{A}_1 = f(\{x_{j_1}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\} \times C_u)$$

es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$. Además, notemos que

$$\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\} = f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_u})$$

y

$$\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t\} = f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t).$$

Así que $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}, \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t\} \in \mathcal{A}_1$.

Si $\{x_1, \dots, x_r\} = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t\}$, por lo que hemos realizado, la afirmación está probada. Supongamos que $\{x_1, \dots, x_r\} \neq \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t\}$. Entonces existe un punto $x_v \in \{x_1, \dots, x_r\} \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t\}$. Con un razonamiento análogo al anterior, podemos encontrar un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ que contiene a los puntos $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t\}$ y $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_t, x_v\}$.

Así, hemos construido un subconjunto conexo \mathcal{A} de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ que contiene a los puntos $\{x_1, \dots, x_r\}$ y $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$. Esto prueba la afirmación.

Ahora, definamos la función

$$g_1 : C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\} \longrightarrow \langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$$

como $g(c, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = \{c, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\}$. Observemos que g_1 está bien definida y es continua. Entonces, como $C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\}$ es conexo, tenemos que $\mathcal{B}_1 = g_1(C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\})$ es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$. Además, notemos que $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\} = g_1(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})$ y $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\} = g_1(y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})$ pues $x_{j_1}, y_{k_1} \in C_1$. Por lo tanto, $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\}, \{y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\} \in \mathcal{B}_1$. Notemos que $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$. De aquí que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 \neq \emptyset$.

De la misma manera, definamos la función

$$g_2 : \{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\} \longrightarrow \langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$$

como $g_2(y_{k_1}, c, x_{j_3}, \dots, x_{j_n}) = \{y_{k_1}, c, x_{j_3}, \dots, x_{j_n}\}$. Observemos que g_2 está bien definida y es continua. Entonces, como $\{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\}$ es conexo, tenemos que $\mathcal{B}_2 = g_2(\{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \dots \times \{x_{j_n}\})$ es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$.

Como $x_{j_2}, y_{k_2} \in C_2$, tenemos que $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\} = g_2(y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})$ y $\{y_{k_1}, y_{k_2}, x_{j_3}, \dots, x_{j_n}\} = g_2(y_{k_1}, y_{k_2}, x_{j_3}, \dots, x_{j_n})$. Por lo tanto, $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\}, \{y_{k_1}, y_{k_2}, x_{j_3}, \dots, x_{j_n}\} \in \mathcal{B}_2$. Además, observemos que $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\} \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. De aquí que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$.

De manera similar, definamos $\mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n$ de manera que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{2, \dots, n-1\}$ y $\{y_{k_1}, \dots, y_{k_n}\} \in \mathcal{B}_n$. Así que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ tal que $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}, \{y_{k_1}, \dots, y_{k_n}\} \in \mathcal{B}$. Además, puesto que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 \neq \emptyset$, tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Un argumento similar al utilizado para probar la Afirmación 1, muestra que existe un subconjunto conexo \mathcal{C} de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ tal que $\{y_{k_1}, \dots, y_{k_n}\}, \{y_1, \dots, y_s\} \in \mathcal{C}$. Además, observemos que $\{y_{k_1}, \dots, y_{k_n}\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. De aquí que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Por tanto, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ tal que $\{x_1, \dots, x_r\}, \{y_1, \dots, y_s\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Hemos probado que para cualesquiera dos puntos de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ existe un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ que los contiene. Esto muestra que $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_m$ es conexo. ■

Lema 2.16 Sean $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ sucesiones de 2^X y $A, B \in 2^X$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. Entonces $\lim \langle A_n, B_n \rangle_2 = \langle A, B \rangle_2$.

Demostración. Puesto que A_n y B_n son compactos, y por tanto cerrados, tenemos que $\langle A_n, B_n \rangle_2$ es cerrado en $F_2(X)$. En particular es un subconjunto compacto de $F_2(X)$. Por la compacidad de $2^{F_2(X)}$ podemos suponer que existe un elemento $\mathcal{A} \in 2^{F_2(X)}$ tal que $\lim \langle A_n, B_n \rangle_2 = \mathcal{A}$. Veamos que $\langle A, B \rangle_2 = \mathcal{A}$.

Tomemos un elemento $K \in \mathcal{A}$. Entonces, por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n \in \langle A_n, B_n \rangle_2$ tal que $\lim K_n = K$. Entonces $K_n \subset A_n \cup B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Del Lema 1.29 se sigue que $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$. Así que del Lema 1.28 tenemos que $K \subset A \cup B$.

Por otro lado, tenemos que $K_n \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue del Lema 1.30 que $K \cap A \neq \emptyset$. De manera similar tenemos que $K \cap B \neq \emptyset$. Esto muestra que $K \in \langle A, B \rangle_2$. Así que $\mathcal{A} \subset \langle A, B \rangle_2$.

Ahora, tomemos un elemento $K \in \langle A, B \rangle_2$. Entonces $K \subset A \cup B$, $K \cap A \neq \emptyset$ y $K \cap B \neq \emptyset$. Sean $a \in K \cap A$ y $b \in K \cap B$, de manera que $K = \{a, b\}$.

Como $a \in A$, por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A_n$ tal que $\lim a_n = a$. De manera similar, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B$ tal que $\lim b_n = b$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $K_n = \{a_n, b_n\} \in F_2(X)$. Observemos que $K_n \subset A_n \cup B_n$, $a_n \in K_n \cap A_n$ y $b_n \in K_n \cap B_n$. Así que $K_n \in \langle A_n, B_n \rangle_2$. Además, puesto que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$, tenemos que $\lim K_n = K$. Esto muestra que $K \in \mathcal{A}$ (Lema 1.27). Así que $\langle A, B \rangle_2 \subset \mathcal{A}$.

Concluimos que $\mathcal{A} = \langle A, B \rangle_2$. Esto concluye la prueba del lema. ■

Ahora resulta natural definir una función de $\text{Cono}(F_2(X))$ en $C(F_2(X))$ para un continuo X cono-encajable en $C(X)$.

Teorema 2.17 Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces $F_2(X)$ es un continuo cono-encajable en $C(F_2(X))$. Más aún, si X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$, entonces $F_2(X)$ es un continuo cono-encajable ordenado en $C(F_2(X))$.

Demostración. Sea $f : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje tal que $f(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Definamos la función

$$h : Cono(F_2(X)) \longrightarrow C(F_2(X))$$

como $h(\{x, y\}, t) = \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$ para cada $(\{x, y\}, t) \in Cono(F_2(X))$.

Puesto que $f(x, t)$ y $f(y, t)$ son compactos, y por tanto cerrados, tenemos que $\langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$ es cerrado en $F_2(X)$. En particular es compacto en $F_2(X)$. Además, por el Lema 2.15, tenemos que $\langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$ es conexo en $F_2(X)$. Concluimos que $\langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$ es un subcontinuo de $F_2(X)$. Por lo tanto, h está bien definida. Veamos que h es continua.

Sean $(\{x_n, y_n\}, t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $Cono(F_2(X))$ y $(\{x, y\}, t)$ un elemento de $Cono(F_2(X))$, tales que $\lim(\{x_n, y_n\}, t_n) = (\{x, y\}, t)$. Si $t = 1$, como $\lim t_n = 1$, entonces $\lim f(x_n, t_n) = f(v)$ y $\lim f(y_n, t_n) = f(v)$, donde v es el vértice de $Cono(X)$. Así que $\lim h(\{x_n, y_n\}, t_n) = \langle f(v) \rangle_2 = h(\{x, y\}, 1)$ por el Lema 2.16.

Supongamos ahora que $t < 1$. Entonces $\lim\{x_n, y_n\} = \{x, y\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Como $\lim t_n = t$ y f es continua, tenemos que $\lim f(x_n, t_n) = f(x, t)$ y $\lim f(y_n, t_n) = f(y, t)$. Se sigue del Lema 2.16, que $\lim h(\{x_n, y_n\}, t_n) = \lim \langle f(x_n, t_n), f(y_n, t_n) \rangle_2 = \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 = h(\{x, y\}, t)$. Esto prueba que h es continua.

Para $t = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} h(\{x, y\}, 0) &= \langle f(x, 0), f(y, 0) \rangle_2 \\ &= \langle \{x\}, \{y\} \rangle_2 \\ &= \{\{x, y\}\}. \end{aligned}$$

para cada $\{x, y\} \in F_2(X)$.

Y, para $t = 1$,

$$\begin{aligned} h(\{x, y\}, 1) &= \langle f(x, 1), f(y, 1) \rangle_2 \\ &= \langle f(v), f(v) \rangle_2 \\ &= F_2(f(v)) \end{aligned}$$

para cada $\{x, y\} \in F_2(X)$, donde v es el vértice de $Cono(X)$.

Veamos que h es inyectiva. Sean $(\{x, y\}, t), (\{p, q\}, s) \in \text{Cono}(F_2(X))$ tales que $h(\{x, y\}, t) = h(\{p, q\}, s)$. Así, $\langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 = \langle f(p, s), f(q, s) \rangle_2$.

Si $f(x, t) \not\subseteq f(p, s) \cup f(q, s)$, entonces podemos tomar un punto $a \in f(x, t) \setminus f(p, s) \cup f(q, s)$. Sea $b \in f(y, t)$. Entonces $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 \setminus \langle f(p, s), f(q, s) \rangle_2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $f(x, t) \subset f(p, s) \cup f(q, s)$. De la misma manera, tenemos que $f(y, t) \subset f(p, s) \cup f(q, s)$. Así que $f(x, t) \cup f(y, t) \subset f(p, s) \cup f(q, s)$.

Un argumento similar muestra que $f(p, s) \cup f(q, s) \subset f(x, t) \cup f(y, t)$. Concluimos que $f(x, t) \cup f(y, t) = f(p, s) \cup f(q, s)$.

Supongamos que $(\{x, y\}, t) \neq (\{p, q\}, s)$. Entonces tenemos dos casos.

Caso 1. $s \neq t$.

Supongamos primero que uno de ellos es igual a 1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t = 1$. Entonces $s < 1$ y, puesto que $f(x, t) = f(y, t) = f(v)$, se tiene que $f(p, s) \neq f(v)$ y $f(q, s) \neq f(v)$.

Además, tenemos que $f(p, s) \cup f(q, s) = f(x, t) \cup f(y, t) = f(v)$. Concluimos que $f(p, s) \subsetneq f(v)$ y $f(q, s) \subsetneq f(v)$. Elegimos $a \in f(v) \setminus f(p, s)$. Entonces $\{a\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a\} \in \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 \setminus \langle f(p, s), f(q, s) \rangle_2$, lo cual es una contradicción.

Supongamos que $s, t < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x, t) &\neq f(p, s) \text{ y } f(x, t) \neq f(q, s); \\ f(y, t) &\neq f(p, s) \text{ y } f(y, t) \neq f(q, s). \end{aligned}$$

Ordenemos al conjunto $\{f(x, t), f(y, t), f(p, s), f(q, s)\}$ con la contención. Como es finito, tiene un elemento minimal, es decir, tiene un elemento que no contiene a ningún otro elemento. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(x, t)$ es un elemento minimal.

Entonces, existen $a \in f(p, s) \setminus f(x, t)$ y $b \in f(q, s) \setminus f(x, t)$. Así que $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(p, s), f(q, s) \rangle_2 \setminus \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$, lo cual es una contradicción.

Caso 2. $s = t$.

Si $s = t = 1$, entonces $(\{x, y\}, 1) = (\{p, q\}, 1) = V$, donde V es el vértice de $Cono(F_2(X))$. Lo cual es una contradicción pues supusimos que son elementos distintos. Se sigue que $s, t < 1$ y $\{x, y\} \neq \{p, q\}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \notin \{p, q\}$. Sabemos que $f(x, t) \subset f(p, t) \cup f(q, t)$.

Si $f(p, t) \not\subset f(x, t)$ y $f(q, t) \not\subset f(x, t)$, entonces existen $a \in f(p, t) \setminus f(x, t)$ y $b \in f(q, t) \setminus f(x, t)$. Por tanto, $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(p, t), f(q, t) \rangle_2 \setminus \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $f(p, t) \subset f(x, t)$ o $f(q, t) \subset f(x, t)$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(p, t) \subset f(x, t) \subset f(p, t) \cup f(q, t) = f(x, t) \cup f(y, t)$. Puesto que $x \neq p$ y $t < 1$, tenemos que $f(p, t) \subsetneq f(x, t)$.

Si $f(q, t) \not\subset f(x, t)$, puesto que $f(q, t) \subset f(x, t) \cup f(y, t)$, entonces $f(q, t) \setminus f(x, t) \neq \emptyset$ y $f(q, t) \setminus f(x, t) \subset f(y, t)$. Sean $a \in f(x, t) \setminus f(p, t)$ y $b \in f(q, t) \setminus f(x, t) \subset f(q, t) \setminus f(p, t)$. Se sigue que $b \in f(y, t)$. Así que $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 \setminus \langle f(p, t), f(q, t) \rangle_2$, lo cual es una contradicción.

Concluimos que $f(q, t) \subset f(x, t)$. Más aún, puesto que $x \neq q$ y $t < 1$, tenemos que $f(q, t) \subsetneq f(x, t)$. Por tanto, $f(x, t) \cup f(y, t) = f(p, t) \cup f(q, t) \subset f(x, t)$. De aquí que $f(y, t) \subset f(x, t) = f(p, t) \cup f(q, t)$. Además, puesto que $f(x, t) \neq f(p, t)$ y $f(x, t) \neq f(q, t)$, tenemos que $f(q, t) \not\subset f(p, t)$ y $f(p, t) \not\subset f(q, t)$.

Ahora bien, si $f(p, t) \not\subset f(y, t)$ y $f(q, t) \not\subset f(y, t)$, entonces existen $a \in f(p, t) \setminus f(y, t)$ y $b \in f(q, t) \setminus f(y, t)$. Así que $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(p, t), f(q, t) \rangle_2 \setminus \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $f(p, t) \subset f(y, t)$ o $f(q, t) \subset f(y, t)$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(p, t) \subset f(y, t)$. Si $f(p, t) \subsetneq f(y, t)$, entonces existen $a \in f(x, t) \setminus f(p, t)$ y $b \in f(y, t) \setminus f(p, t)$. Así que $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 \setminus \langle f(p, t), f(q, t) \rangle_2$, lo cual es una contradicción.

Se sigue que $f(y, t) = f(p, t) \not\subseteq f(q, t)$. Entonces, existen $a \in f(x, t) \setminus f(q, t)$ y $b \in f(y, t) \setminus f(q, t)$. De aquí que $\{a, b\} \in F_2(X)$ es tal que $\{a, b\} \in \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2 \setminus \langle f(p, t), f(q, t) \rangle_2$, lo cual es una contradicción.

En todos los casos, al suponer que $(\{x, y\}, t) \neq (\{p, q\}, t)$, llegamos a una contradicción. Concluimos que $(\{x, y\}, t) = (\{p, q\}, s)$. Esto prueba que h es inyectiva.

Ahora bien, como h es una función de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, se tiene que h es un encaje. Esto termina la prueba de que $F_2(X)$ es un continuo cono-encajable en $C(F_2(X))$.

Más aún, si X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$, entonces podemos suponer que $f(x, s) \subsetneq f(x, t)$ siempre que $s < t$, para toda $x \in X$.

Para ver que $F_2(X)$ es cono-encajable ordenado en $C(F_2(X))$, tomemos un elemento $\{x, y\} \in F_2(X)$ y $s < t$. Entonces $f(x, s) \subsetneq f(x, t)$ y $f(y, s) \subsetneq f(y, t)$.

Tomemos un elemento $A \in \langle f(x, s), f(y, s) \rangle_2$. Entonces $A \subset f(x, s) \cup f(y, s) \subset f(x, t) \cup f(y, t)$. Además, $A \cap f(x, s) \subset A \cap f(x, t)$ y $A \cap f(y, s) \subset A \cap f(y, t)$. Puesto que $A \cap f(x, s) \neq \emptyset$ y $A \cap f(y, s) \neq \emptyset$, se sigue $A \cap f(x, t) \neq \emptyset$ y $A \cap f(y, t) \neq \emptyset$. Así que $\langle f(x, s), f(y, s) \rangle_2 \subset \langle f(x, t), f(y, t) \rangle_2$. Es decir, $h(\{x, y\}, s) \subset h(\{x, y\}, t)$.

Como h es inyectiva, concluimos que $h(\{x, y\}, s) \subsetneq h(\{x, y\}, t)$, siempre que $s < t$ y $\{x, y\} \in F_2(X)$. Esto muestra que $F_2(X)$ es un continuo cono-encajable ordenado en $C(F_2(X))$. ■

Desafortunadamente, no tenemos un teorema para $n \geq 3$. Aún tenemos preguntas en este sentido.

Problema 2.18 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que $F_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(F_n(X))$ para algún $n \geq 3$?*

En general, podemos preguntarnos si la propiedad de ser cono-encajable en $C(X)$ la preserva algún otro hiperespacio de X .

Problema 2.19 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que $C(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(C(X))$?*

Problema 2.20 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que $C_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(C_n(X))$ para algún $n \geq 2$?*

Problema 2.21 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que 2^X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(2^X)$?*

Respecto a este problema, se sabe ([2, Teorema 1] y [3, Teorema 3.2]) que si X es localmente conexo, entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert, el cual es un continuo cono-encajable ordenado.

Por otro lado, podemos preguntarnos si un continuo X es cono-encajable siempre que uno de sus hiperespacios lo es.

Problema 2.22 *Dado un continuo X , si $F_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(F_n(X))$ para algún $n \geq 2$, ¿será cierto que X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$?*

Problema 2.23 *Dado un continuo X , si $C_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(C_n(X))$ para algún $n \geq 2$, ¿será cierto que X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$?*

En este sentido, tenemos una respuesta en el caso en que el hiperespacio de subcontinuos de un continuo es cono-encajable y en el caso en que el hiperespacio de compactos no vacíos es cono-encajable. Es decir, tenemos un ejemplo de un continuo X tal que $C(X)$, respectivamente 2^X , es un continuo cono-encajable en $C(C(X))$; sin embargo, X no es cono-encajable en $C(X)$. Este ejemplo lo veremos en el capítulo 4 (Corolario 4.29 y Corolario 4.30).

Más adelante, comentaremos más sobre estos problemas.

Capítulo 3

Compactaciones

Dado un continuo X que es compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo Y , se tiene que Y es un subcontinuo terminal de X . Es natural preguntarnos qué compactaciones del rayo son continuos cono-encajables. El Teorema 2.7 nos dice que debemos buscar una compactación tal que el residuo sea un continuo cono-encajable. La pregunta más simple en este sentido es ¿qué compactaciones del rayo cuyo residuo es un arco son continuos cono-encajables?

En este capítulo estudiaremos las compactaciones del rayo, de la recta real y de la unión de dos rayos que son continuos cono-encajables en $C(X)$. En particular, estudiaremos las compactaciones del rayo que tienen a un arco o una circunferencia como residuo.

Los siguientes lemas serán útiles a lo largo del capítulo.

Lema 3.1 *Dado un continuo X , sea $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset X$ tal que $X \setminus P$ no es conexo. Sea A una componente de $X \setminus P$. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es un encaje tal que $\alpha(s_0) \subset A$ y $\alpha(s) \not\subset A$ para algunos $s_0 \in [0, 1)$ y $s \in (s_0, 1]$, entonces existen $t_0 \in (s_0, s]$ y $i \in \{1, \dots, k\}$ tales que $p_i \in \alpha(t_0)$ y $\bigcup \alpha([s_0, t_0]) \subset \text{cl}_X(A)$.*

Demostración. Veamos que $\text{cl}_X(A) \subset A \cup P$. Tomemos un punto $x \in \text{cl}_X(A)$. Como $A \subset A \cup \{x\} \subset \text{cl}_X(A)$, tenemos que $A \cup \{x\}$ es conexo.

Ahora bien, si $x \notin P$, entonces x está en una componente de $X \setminus P$. Pero $A \cup \{x\}$ es un subconjunto conexo contenido en $X \setminus P$ y, además, contiene a x . Puesto que A es una componente de $X \setminus P$, concluimos que $A \cup \{x\} = A$. Se sigue que $x \in A$. Esto prueba que $\text{cl}_X(A) \subset A \cup P$.

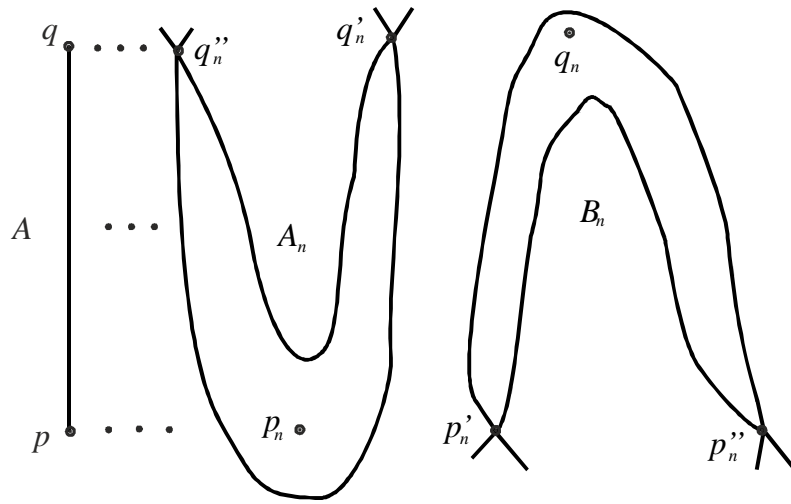
Sea $t_0 = \sup\{t \in [s_0, s] : \bigcup \alpha([s_0, t]) \subset \text{cl}_X(A)\}$. Observemos que $t_0 \leq s$. Tomemos una sucesión creciente $(t_n)_{n=1}^\infty$ en $[s_0, t_0]$ tal que $\bigcup \alpha([s_0, t_n]) \subset \text{cl}_X(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim t_n = t_0$. Por la continuidad de α y de la unión, tenemos que $\lim \bigcup \alpha([s_0, t_n]) = \bigcup \alpha([s_0, t_0])$. Se sigue del Lema 1.28 que $\bigcup \alpha([s_0, t_0]) \subset \text{cl}_X(A)$.

Si $\alpha(t_0) \subset X \setminus P$, puesto que P es cerrado, por la continuidad de la unión, existe $r > t_0$ tal que $\bigcup \alpha([t_0, r]) \subset X \setminus P$ y, como $\bigcup \alpha([t_0, r])$ es un subconjunto conexo de X (Lema 1.32), $\bigcup \alpha([t_0, r]) \subset A \subset \text{cl}_X(A)$. Así que $\bigcup \alpha([t_0, r]) \subset \text{cl}_X(A)$. Esto contradice la definición de t_0 . Así que $\alpha(t_0) \cap P \neq \emptyset$. Por tanto, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $p_i \in \alpha(t_0)$. De aquí que $\alpha(t_0) \not\subset A$. Concluimos que $t_0 > s_0$. Esto concluye la prueba del lema. ■

Lema 3.2 Sean X un continuo cono-encajable en $C(X)$ y $h : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje tal que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Sea v el vértice de $\text{Cono}(X)$. Supongamos que existen un arco A en X con extremos p y q , y sucesiones $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ en $C(X)$, sucesiones $(p_n)_{n=1}^\infty$, $(p'_n)_{n=1}^\infty$, $(p''_n)_{n=1}^\infty$, $(q_n)_{n=1}^\infty$, $(q'_n)_{n=1}^\infty$ y $(q''_n)_{n=1}^\infty$ de X tales que

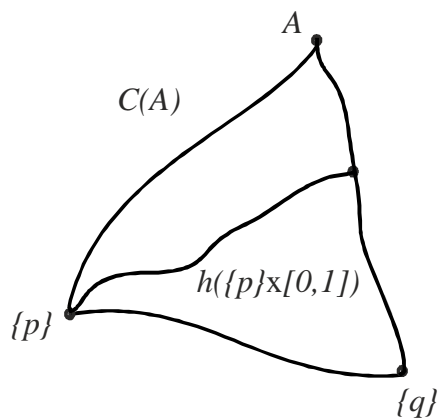
- 1) $\lim A_n = \lim B_n = A$;
- 2) $\lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n = p$;
- 3) $\lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n = q$;
- 4) $p_n, q'_n, q''_n \in A_n$ y $q_n, p'_n, p''_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 5) $p_n \notin \{q'_n, q''_n\}$ y $q_n \notin \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 6) $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 7) $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 8) $h(v) \not\subset A_n$ y $h(v) \not\subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $h(v) = A$ y $h(p, t), h(q, t) \in C(A)$ para cada $t \in [0, 1]$.



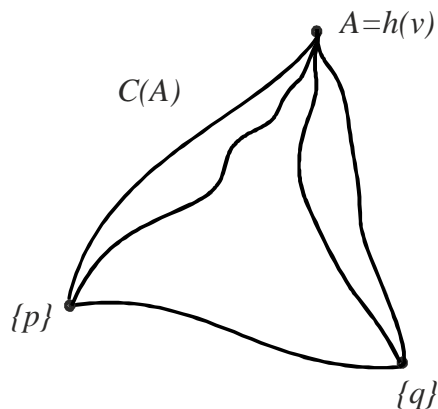
Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $h(\{p_n\} \times [0, 1])$ es un arco en $C(X)$ tal que $h(p_n, 0) = \{p_n\} \subset A_n \setminus \{q_n', q_n''\}$ y $h(v) \not\subset A_n \setminus \{q_n', q_n''\}$. Puesto que $A_n \setminus \{q_n', q_n''\}$ es una componente de $X \setminus \{q_n', q_n''\}$, por el Lema 3.1, existe $t_n \in (0, 1]$ tal que $h(p_n, t_n) \cap \{q_n', q_n''\} \neq \emptyset$ y $\bigcup h(\{p_n\} \times [0, t_n]) \subset \text{cl}_X(A_n) = A_n$.

Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos suponer que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\lim t_n = t_0$. Entonces $\lim h(p_n, t_n) = h(p, t_0)$. Como $h(p_n, t_n) \cap \{q_n', q_n''\} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim \{q_n', q_n''\} = \{q\}$, por el Lema 1.30, tenemos que $h(p, t_0) \cap \{q\} \neq \emptyset$. Es decir, $q \in h(p, t_0)$. Además, por la continuidad de la unión, $\lim \bigcup h(\{p_n\} \times [0, t_n]) = \bigcup h(\{p\} \times [0, t_0])$. Puesto que $\bigcup h(\{p_n\} \times [0, t_n]) \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim A_n = A$, de Lema 1.28 se sigue que $\bigcup h(\{p\} \times [0, t_0]) \subset A$. Concluimos que $h(\{p\} \times [0, t_0])$ es un arco en $C(A)$ que contiene a $\{p\}$ y $h(\{p\} \times [0, t_0]) \cap C(q, A) \neq \emptyset$.



Un razonamiento similar muestra que existe $s_0 \in [0, 1]$ tal que $h(\{q\} \times [0, s_0])$ es un arco en $C(A)$ que contiene a $\{q\}$ y $h(\{q\} \times [0, s_0]) \cap C(p, A) \neq \emptyset$.

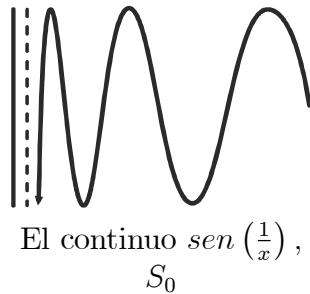
Entonces, por el Teorema 1.37, tenemos que $h(\{p\} \times [0, t_0]) \cap h(\{q\} \times [0, s_0]) \neq \emptyset$. Pero, como h es un encaje, se tiene que $h(\{p\} \times [0, 1]) \cap h(\{q\} \times [0, 1]) = h(v)$. Así que $t_0 = s_0 = 1$. Como $p \in h(q, 1) = h(v)$, $q \in h(p, 1) = h(v)$ y $h(v) \subset A$, concluimos que $h(v) = A$.



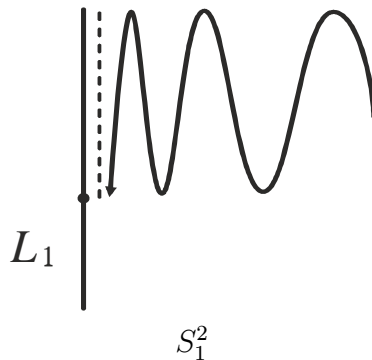
Observemos, además, que $h(p, t), h(q, t) \in C(A)$ para cada $t \in [0, 1]$. ■

Los siguientes continuos jugarán un papel muy importante en este capítulo.

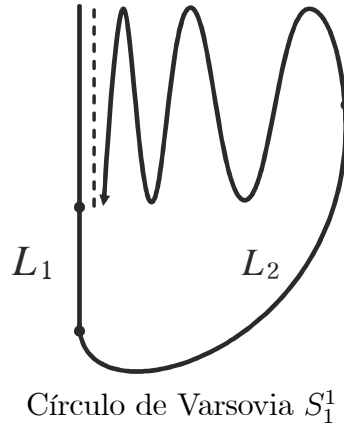
1) Sea S_0 el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$. Es decir, la cerradura en \mathbb{R}^2 de $\{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$.



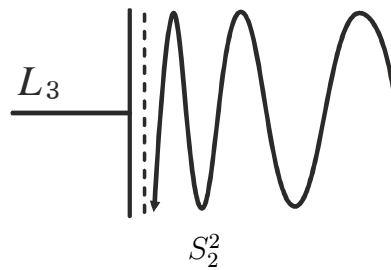
2) Sea $L_1 = \{0\} \times [-2, -1]$ el arco en \mathbb{R}^2 que une los puntos $(0, -1)$ y $(0, -2)$ de manera que $L_1 \cap S_0 = \{(0, -1)\}$. Sea $S_1^2 = S_0 \cup L_1$.



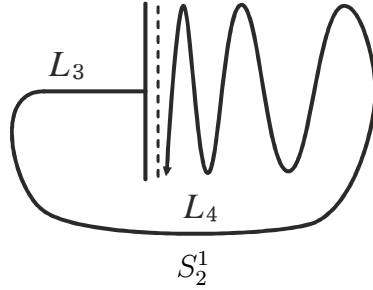
(3) Sea L_2 un arco en \mathbb{R}^2 que une los puntos $(0, -2)$ y $(1, \text{sen}(1))$ tal que $L_2 \cap S_1^2 = \{(0, -2), (1, \text{sen}(1))\}$. Sea $S_1^1 = S_1^2 \cup L_2$. S_1^1 es conocido como el *círculo de Varsovia*.



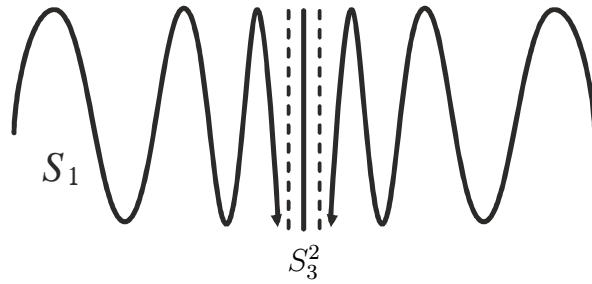
4) Sea $L_3 = [-1, 0] \times \{0\}$ el arco en \mathbb{R}^2 que une los puntos $(0, 0)$ y $(-1, 0)$ de manera que $S_0 \cap L_3 = \{(0, 0)\}$. Sea $S_2^2 = S_0 \cup L_3$.



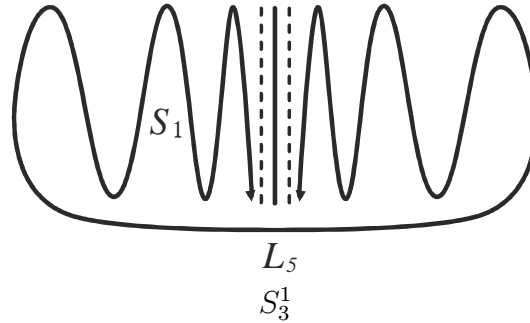
(5) Sea L_4 un arco en \mathbb{R}^2 que une los puntos $(-1, 0)$ y $(1, \text{sen}(1))$ tal que $L_2 \cap S_2^2 = \{(-1, 0), (1, \text{sen}(1))\}$. Sea $S_2^1 = S_2^2 \cup L_4$.



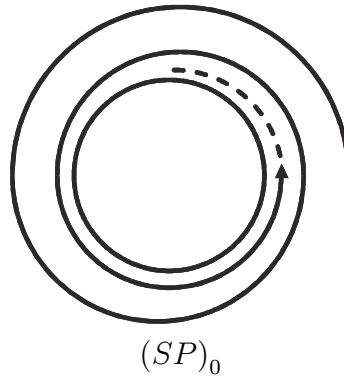
6) Sean S_1 la cerradura en \mathbb{R}^2 de $\{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) : -1 \leq x < 0\}$ y $S_3^2 = S_0 \cup S_1$. Es decir, S_3^2 es una compactación de la unión de dos rayos con un arco como residuo.



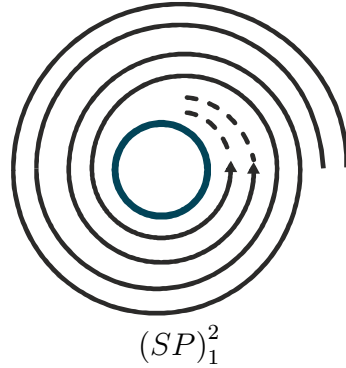
(7) Sea L_5 un arco que une los puntos $(1, \text{sen}(1))$ y $(-1, \text{sen}(-1))$ tales que $L_5 \cap S_3^2 = \{(1, \text{sen}(1)), (-1, \text{sen}(-1))\}$. Sea $S_3^1 = S_3^2 \cup L_5$. Es decir, S_3^1 es una compactación de \mathbb{R} con un arco como residuo.



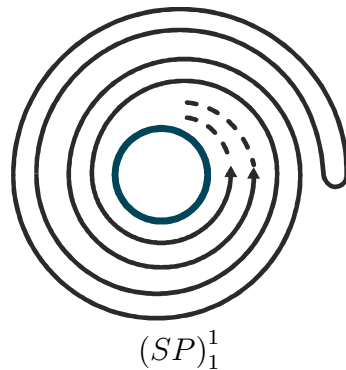
8) Sea $(SP)_0 = S^1 \cup \{(1 + \frac{1}{t})e^{it} : t \geq 1\}$, donde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Es decir, $(SP)_0$ es una compactación del rayo con una circunferencia como residuo. De manera que el rayo es una espiral convergiendo a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj.



9) Sean $(SP)_1 = S^1 \cup \{(1 - \frac{1}{t})e^{it} : t \geq 1\}$ y $(SP)_1^2 = (SP)_1 \cup (SP)_0$. Es decir, $(SP)_1^2$ es una compactación de dos rayos con una circunferencia como residuo. De manera que ambos rayos son una espiral convergiendo a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj. Entonces, $(SP)_1^2$ es homeomorfo a la siguiente figura, en realidad el dibujo preciso consiste de un rayo convergiendo por afuera y otro por adentro.

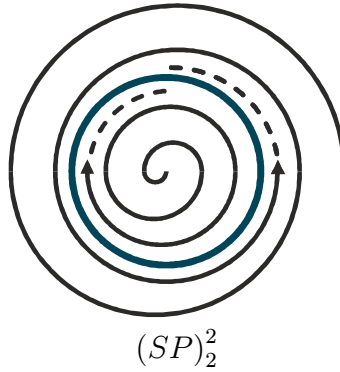


(10) Sea M_1 un arco en \mathbb{R}^3 que une los puntos $(2\cos(1), 2\sin(1))$ y $(0, 0)$ tales que $M_1 \cap (SP)_1^2 = \{(2\cos(1), 2\sin(1)), (0, 0)\}$. Sea $(SP)_1^1 = (SP)_1^2 \cup M_1$. Es decir, $(SP)_1^1$ es una compactación de \mathbb{R} con una circunferencia como residuo. De manera que cada lado de la recta es una espiral convergiendo a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj. Entonces $(SP)_1^1$ es homeomorfo a la siguiente figura. En el dibujo preciso, un lado de la recta converge por afuera y el otro por adentro.

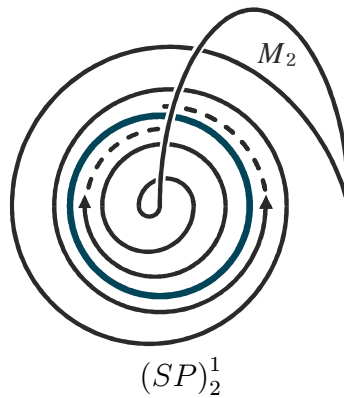


11) Sean $(SP)_2 = S^1 \cup \{(1 + \frac{1}{t})e^{it} : t \leq -1\}$ y $(SP)_2^2 = (SP)_2 \cup (SP)_0$. Es decir, $(SP)_2^2$ es una compactación de la unión de dos rayos con una circunferencia como residuo. De manera que uno de ellos es una espiral convergiendo

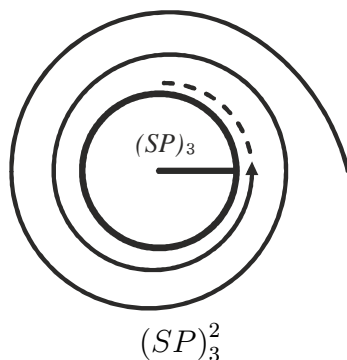
a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que el otro es una espiral convergiendo a la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj.



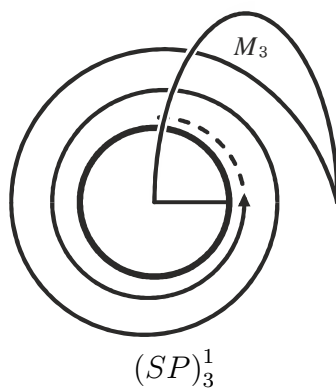
(12) Sea M_2 un arco en \mathbb{R}^3 que une los puntos $(2\cos(1), 2\sin(1))$ y $(0, 0)$ tales que $M_2 \cap (SP)_2^2 = \{(2\cos(1), 2\sin(1)), (0, 0)\}$. Sea $(SP)_2^1 = (SP)_2^2 \cup M_2$. Es decir, $(SP)_2^1$ es una compactación de \mathbb{R}^1 con una circunferencia como residuo. De manera que una mitad de la recta es una espiral convergiendo a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que la otra mitad es una espiral convergiendo a la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj.



13) Sean $(SP)_3$ el segmento convexo en \mathbb{R}^2 que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y $(SP)_3^2 = (SP)_0 \cup (SP)_3$. Es decir, $(SP)_3^2$ es una compactación de la unión de dos rayos con una circunferencia como residuo. De manera que uno de ellos es una espiral convergiendo a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que el otro converge a un punto de la circunferencia.



(14) Sea M_3 un arco en \mathbb{R}^3 que une los puntos $(2\cos(1), 2\sin(1))$ y $(0, 0)$ tales que $M_3 \cap (SP)_3^2 = \{(2\cos(1), 2\sin(1)), (0, 0)\}$. Sea $(SP)_3^1 = (SP)_3^2 \cup M_3$. Es decir, $(SP)_3^1$ es una compactación de \mathbb{R}^1 con una circunferencia como residuo. De manera que una mitad de la recta es una espiral convergiendo a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que la otra mitad converge a un punto de la circunferencia.



Así, el superíndice indicará si es una compactación de la recta real (superíndice 1), o es una compactación de la unión de dos rayos (superíndice 2).

3.1. Compactaciones del Rayo

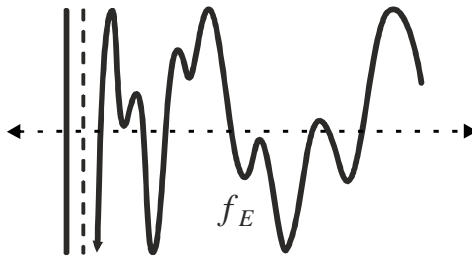
En esta sección, caracterizamos a las compactaciones del rayo, que tienen a un arco o una circunferencia como residuo, para las cuales se puede encajar su cono en su hiperespacio de subcontinuos. Para ello, utilizaremos las caracterizaciones de S_0 y $(SP)_0$ dadas en [28].

3.1.1. Con un Arco como Residuo

En esta subsección, presentamos las definiciones y lemas de [28] que ayudan a caracterizar a S_0 entre las compactaciones del rayo con un arco como residuo.

Un *continuo de Elsa* es una compactación de $[0, \infty)$ con un arco como residuo. Los continuos de Elsa los llamamos *E-continuos*. Un E-continuo es un continuo encadenable ([26, p. 126]), y puede ser encajado en el plano como indica el siguiente resultado, probado en [26, p. 131]:

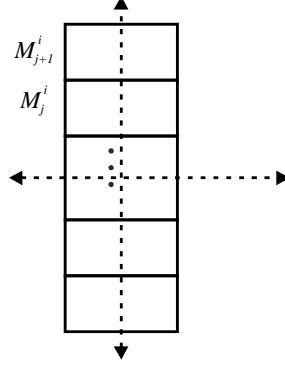
Lema 3.3 *Si X es un E-continuo, entonces X puede ser encajado en el plano de manera que el residuo es el arco $\{0\} \times [-1, 1]$ (contenido en el eje Y) y el resto del continuo es la gráfica de una función continua f_E de $(0, 1]$ a $[-1, 1]$.*



Durante esta sección, E denotará un E -continuo encajado en el plano como en el Lema 3.3 y f_E denotará la función continua en el Lema 3.3. Además, J denotará al arco $\{0\} \times [-1, 1]$. Sean $J(-1) = (0, -1)$ y $J(1) = (0, 1)$ los extremos de J .

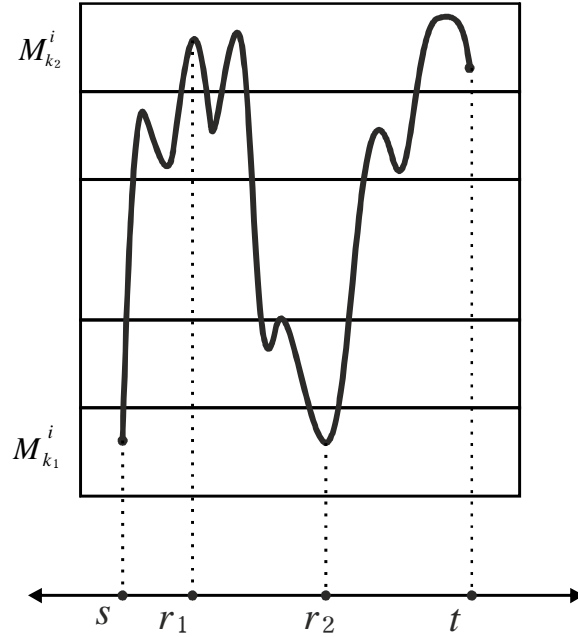
En [28], se presenta un lema que distingue a S_0 de todos los demás E -continuos utilizando la siguiente notación, la cual utilizaremos más adelante.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $d^i(1) < d^i(2) < \dots < d^i(2^{i+1} + 1)$ una numeración de los racionales diádicos $\{m \cdot 2^{-i} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2^i\}$ en J , y sea $\mathcal{C}_i = \{M_j^i : j = 1, 2, \dots, 2^{i+1}\}$ donde $M_j^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2^{-i} \text{ y } d^i(j) \leq y \leq d^i(j+1)\}$. De aquí que \mathcal{C}_i es una cubierta de J compuesta de 2^{i+1} rectángulos cerrados S_j^i en el plano, de lados de longitud 2^{-i} y 2^{-i+1} , y tal que $M_j^i \cap M_k^i \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - k| \leq 1$ (Si $k = j + 1$ entonces la intersección es en la “tapa” de la frontera de M_j^i y la “base” de la frontera de M_k^i). Así, \mathcal{C}_i es una cadena cerrada muy particular. Los miembros de \mathcal{C}_i se llaman *eslabones*. Por una subcadena de \mathcal{C}_i entendemos cualquier subcolección de \mathcal{C}_i que consiste de eslabones con índices consecutivos.



Sean g una función continua con valores reales definida sobre un intervalo cerrado $[s, t]$ y $\mathcal{C}'_i = \{M_j^i : k_1 \leq j \leq k_2\}$ una subcadena de \mathcal{C}_i . Decimos que la gráfica $G(g)$ de g pasa por \mathcal{C}'_i al menos tres veces si y sólo si

- 1) $G(g) \subset \bigcup \mathcal{C}'_i$;
- 2) existen r_1 y r_2 , con $s < r_1 < r_2 < t$, tales que $(s, g(s)), (r_2, g(r_2)) \in M_{k_1}^i$ y $(r_1, g(r_1)), (t, g(t)) \in M_{k_2}^i$, o bien $(s, g(s)), (r_2, g(r_2)) \in M_{k_2}^i$ y $(r_1, g(r_1)), (t, g(t)) \in M_{k_1}^i$.



Lema 3.4 [28, Lema 3.5] Si E no es homeomorfo a S_0 , entonces existen $a, b \in J$, con $a < b$ y $\{a, b\} \neq \{-1, 1\}$, tales que: para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una subcadena $\mathcal{C}'_i = \{M_j^i : k_1 \leq j \leq k_2\}$ de \mathcal{C}_i que satisface

- 1) $a \in M_{k_1}^i$ y $b \in M_{k_2}^i$;
- 2) existe un intervalo cerrado $[s_i, t_i] \subset (0, 1]$ tal que $G(f_E|_{[s_i, t_i]})$ pasa por \mathcal{C}'_i al menos tres veces.

Este lema permite probar el siguiente resultado, en cuyo enunciado utilizamos la Definición 2.8.

Teorema 3.5 [28, Teorema 3.9] Si existe una contracción $\varphi : F_1(E) \times [0, 1] \rightarrow C(E)$ de $F_1(E)$ a J en $C(E)$, tal que φ es inyectiva sobre $F_1(J) \times [0, 1)$, entonces E es homeomorfo a S_0 .

Con estas herramientas obtendremos el siguiente teorema.

Teorema 3.6 *Si E es un E -continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces E es homeomorfo a S_0 .*

Demostración. Notemos que J es un subcontinuo terminal de E . Por lo tanto, si existe un encaje $h : Cono(E) \longrightarrow C(E)$ tal que $h(x, 0) = \{x\}$, por el Teorema 2.6, $h(v) = J$. Entonces, aplicando el Teorema 2.9, existe una contracción $H : F_1(E) \times [0, 1] \longrightarrow C(E)$ de $F_1(E)$ a J en $C(E)$, tal que H es inyectiva sobre $F_1(J) \times [0, 1]$. Del Teorema 3.5, se sigue que E es homeomorfo a S_0 . ■

En [28], se muestra que $Cono(S_0)$ y $C(S_0)$ son homeomorfos. Mencionaremos algunas propiedades del homeomorfismo dado en [28], pues las necesitaremos más adelante.

Ejemplo 3.7 *El continuo $Sen\left(\frac{1}{x}\right)$, S_0 , es un continuo $C-H$.*

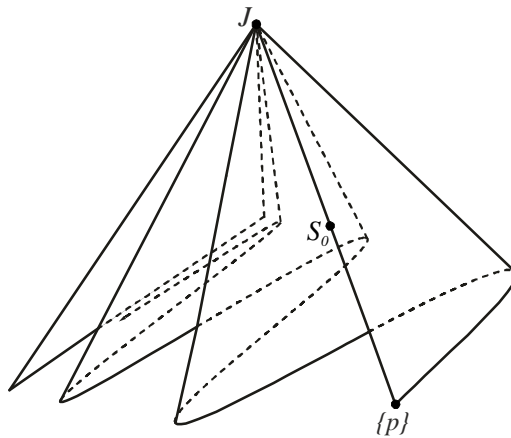
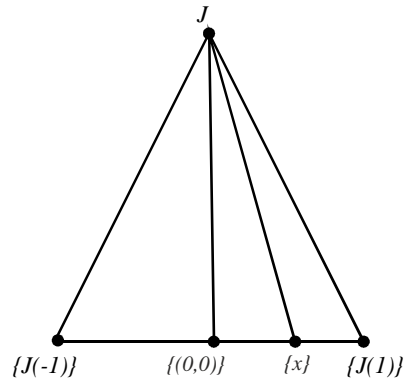
Sea $h : Cono(J) \longrightarrow C(J)$ definida como

$$h(x, t) = \{0\} \times [(1-t)x - t, (1-t)x + t],$$

para cada $(x, t) \in Cono(J)$. Entonces h es un homeomorfismo tal que $h(x, 0) = \{x\}$. Notemos que $h(\{J(-1)\} \times [0, 1]) = C(J(-1), J)$, $h(\{J(1)\} \times [0, 1]) = C(J(1), J)$ y $h(v) = J$, en donde v es el vértice de $Cono(J)$. Además, $h(\{(0, 0)\} \times [0, 1]) = \{\{0\} \times [-t, -t] : t \in [0, 1]\}$ y $h(\{J(-1)\} \times [0, 1]) = \{\{0\} \times [-1, 2t - 1] : t \in [0, 1]\}$.

Denotemos por p al punto $(1, sen(1))$. Además, si x y y son puntos del rayo, denotemos por xy al arco que los une, contenido en el rayo R ; y xJ el continuo irreducible entre x y J . Entonces, en [28, Ejemplo 4.11], se muestra que existe un homeomorfismo $\varphi : Cono(S_0) \longrightarrow C(S_0)$ tal que

- 1) $\varphi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in S_0$;
- 2) $\varphi(v) = J$;
- 3) $\varphi|_{Cono(J)} = h$;
- 4) $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = \{py : y \in R\} \cup \{xJ : x \in R\}$.



Observemos que $\{py : y \in R\} \cup \{xJ : x \in R\} = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$.

Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.8 *Si X es una compactación del rayo con un arco como residuo, entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a S_0 .*

Además, puesto que $\varphi(v) = J \not\subseteq S_0$, tenemos que S_0 no es un continuo cono-encajable ordenado.

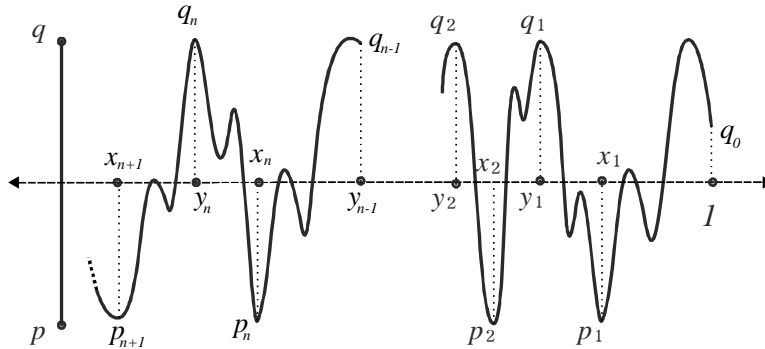
Veamos algunas propiedades de los E-continuos, las cuales serán útiles para las siguientes caracterizaciones.

Lema 3.9 Sea X un E -continuo con el arco A como residuo. Sean p y q los extremos de A . Entonces existen sucesiones $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ de arcos contenidos en el rayo, y sucesiones $(p_n)_{n=1}^\infty$, $(p'_n)_{n=1}^\infty$, $(p''_n)_{n=1}^\infty$, $(q_n)_{n=1}^\infty$, $(q'_n)_{n=1}^\infty$ y $(q''_n)_{n=1}^\infty$ de X tales que

- 1) $\lim A_n = \lim B_n = A$;
- 2) $\lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n = p$;
- 3) $\lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n = q$;
- 4) $p_n, q'_n, q''_n \in A_n$ y $q_n, p'_n, p''_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 5) $p_n \notin \{q'_n, q''_n\}$ y $q_n \notin \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 6) $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 7) $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por el Lema 3.3, podemos considerar al rayo $[1, \infty)$ como la gráfica de una función continua y suprayectiva $g : (0, 1] \rightarrow [-1, 1]$. Entonces, identificaremos al arco A con J . Denotaremos por G a la gráfica de g . Sea $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada.

Como $p, q \in \text{cl}_X(G)$, podemos tomar dos sucesiones $(p_n)_{n=1}^\infty$ y $(q_n)_{n=1}^\infty$ de G tales que $\lim p_n = p$ y $\lim q_n = q$. Dado que $p \neq q$, podemos suponer que $p_n \neq q_m$ para cada par de números $n, m \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n, y_n \in (0, 1]$ tales que $x_n = \pi(p_n)$ y $y_n = \pi(q_n)$. Por la continuidad de π , tenemos que $\lim x_n = \lim \pi(p_n) = \pi(p) = 0$. De la misma manera, se tiene que $\lim y_n = \lim \pi(q_n) = \pi(q) = 0$. Además, podemos suponer que las sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ son decrecientes. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{n+1} < y_n < x_n$. Supongamos, además, que $x_1 < 1$ y denotemos por q_0 al punto $(1, g(1))$. Es decir, tenemos que q_n está en el arco que une a p_n y p_{n+1} para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, p_n está entre q_{n-1} y q_n para cada $n \in \mathbb{N}$.



Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean A_n el arco en X de q_{n-1} a q_n y B_n el arco en X con extremos p_n y p_{n+1} . Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es la gráfica de $g|_{[y_{n+1}, y_n]}$ y B_n es la gráfica de $g|_{[x_{n+1}, x_n]}$. Por la compacidad de $C(X)$, podemos suponer que las sucesiones $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. Veamos que $\lim A_n = J = \lim B_n$.

Sea $K = \lim A_n$. Veamos que K es un subcontinuo de J . Sea $w \in K$. Entonces, por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in A_n$ tal que $\lim w_n = w$. Dado que $A_n \subset G$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $w \in \text{cl}_X(G)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $s_n \in [y_{n+1}, y_n]$ tal que $s_n = \pi(w_n)$. Puesto que $s_n \leq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim y_n = 0$, tenemos que $\lim s_n = 0$. Así que $0 = \lim s_n = \lim \pi(w_n) = \pi(w)$, por la continuidad de π . Esto prueba que $w \in J$. Concluimos que $K \subset J \cap \text{cl}_X(G) = J$. Además, $p_n, q_n \in A_n$. Puesto que $\lim p_{n+1} = p$ y $\lim q_n = q$, por el Lema 1.27, se tiene que $p, q \in K$. Entonces K es un subcontinuo de J que tiene a p y q . De aquí que $J \subset K$. Hemos probado que $K = J$.

Un razonamiento similar muestra que $\lim B_n = J$. Observemos además que $A_n \setminus \{q_n, q_{n+1}\}$ es una componente de $X \setminus \{q_n, q_{n+1}\}$ y $B_n \setminus \{p_n, p_{n+1}\}$ es una componente de $X \setminus \{p_n, p_{n+1}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, haciendo $p'_n = p_n$, $p''_n = p_{n+1}$, $q'_n = q_{n-1}$ y $q''_n = q_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos el resultado. ■

Otra propiedad de los E-continuos que será útil es la siguiente.

Lema 3.10 *Sea X un E-continuo con el arco A_0 como residuo. Si X no es homeomorfo a S_0 , entonces existe un arco $A \subsetneq A_0$, con extremos a y b ; y existen sucesiones $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ de arcos contenidos en el rayo, y sucesiones $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, $(p'_n)_{n=1}^{\infty}$, $(p''_n)_{n=1}^{\infty}$, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, $(q'_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(q''_n)_{n=1}^{\infty}$ de X tales que*

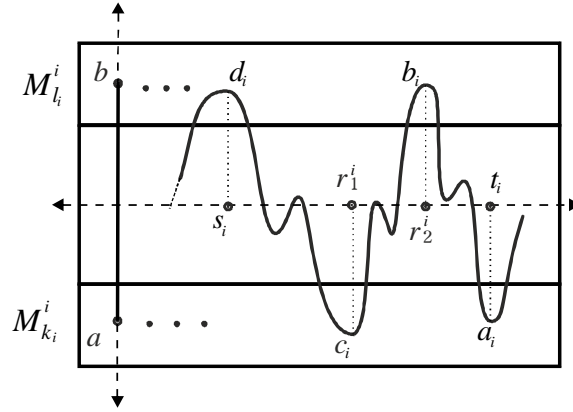
- 1) $\lim A_n = \lim B_n = A$;
- 2) $\lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n = b$;
- 3) $\lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n = a$;
- 4) $p_n, q'_n, q''_n \in A_n$ y $q_n, p'_n, p''_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 5) $p_n \notin \{q'_n, q''_n\}$ y $q_n \notin \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 6) $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 7) $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por el Lema 3.3, podemos considerar al rayo $[1, \infty)$ como la gráfica de una función continua y suprayectiva $g : (0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ e identificar al arco A_0 con J . Sean p y q los extremos de J . Denotaremos por G a la gráfica de g . Sea $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada.

Por el Lema 3.4, existen $a, b \in J$, con $a < b$ y $\{a, b\} \neq \{p, q\}$, tales que: para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una subcadena $\mathcal{C}'_i = \{M'_j : k_i \leq j \leq l_i\}$ de \mathcal{C}_i que satisface

- 1) $a \in M_{k_i}^i$ y $b \in M_{l_i}^i$;
- 2) existe un intervalo cerrado $[s_i, t_i]$ tal que la gráfica $G(g|_{[s_i, t_i]})$ pasa por \mathcal{C}'_i al menos tres veces.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $r_1^i, r_2^i \in (0, 1]$ con $s_i < r_1^i < r_2^i < t_i$, tales que $(s_i, g(s_i)), (r_2^i, g(r_2^i)) \in M_{k_i}^i$ y $(r_1^i, g(r_1^i)), (t_i, g(t_i)) \in M_{l_i}^i$, o bien $(s_i, g(s_i)), (r_2^i, g(r_2^i)) \in M_{l_i}^i$ y $(r_1^i, g(r_1^i)), (t_i, g(t_i)) \in M_{k_i}^i$. Tomando una subsucesión si es necesario, supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $(s_i, g(s_i)), (r_2^i, g(r_2^i)) \in M_{l_i}^i$ y $(r_1^i, g(r_1^i)), (t_i, g(t_i)) \in M_{k_i}^i$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sean $a_i = (t_i, g(t_i))$, $b_i = (r_2^i, g(r_2^i))$, $c_i = (r_1^i, g(r_1^i))$ y $d_i = (s_i, g(s_i))$.



Mostremos que $\lim a_i = \lim c_i = a$ y $\lim b_i = \lim d_i = d$. Primero, observemos que $M_{k_i}^i$ y $M_{l_i}^i$ son rectángulos de diámetro $2^{-i}\sqrt{5}$. Por lo tanto, $\lim \text{diam}(M_{k_i}^i) = \lim \text{diam}(M_{l_i}^i) = 0$. Como $a \in M_{k_i}^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, concluimos que $\lim M_{k_i}^i = \{a\}$. Dado que $a_i, c_i \in M_{k_i}^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim a_i = \lim c_i = a$.

Un razonamiento similar muestra que $\lim b_i = \lim d_i = b$. Sea A el arco en J que une los puntos a y b . Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean A_i el arco que une los puntos a_i y c_i ; y B_i el arco que une los puntos b_i y d_i . Es decir, A_i es la gráfica de la función $g|_{[r_1^i, t_i]}$ y B_i es la gráfica de la función $g|_{[s_i, r_2^i]}$. Observemos que $b_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, pues $r_1^i < r_2^i < t_i$ y $b_i = (r_2^i, g(r_2^i))$. De la misma manera, tenemos que $c_i \in B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, pues $s_i < r_1^i < r_2^i$ y $c_i = (r_1^i, g(r_1^i))$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $W_i = \bigcup_{j=k_i}^{l_i} S_j^i$. Es decir, $W_i = [-2^{-i}, 2^{-i}] \times [d^i(k_i), d^i(l_i)]$.

Observemos que W_i es un subcontinuo de $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Por la compacidad de $C([-1, 1] \times [-1, 1])$, podemos suponer que la sucesión $(W_i)_{i=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $W = \lim W_i$. Observemos que $a \in M_{k_i}^i \subset W_i$ y $b \in M_{l_i}^i \subset W_i$. Por lo tanto, $A \subset W_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subset W$ por el Lema 1.28.

Supongamos que existe un punto $w \in W \setminus A$. Sea $\epsilon = d(w, A)$. Puesto que A es cerrado, tenemos que $\epsilon > 0$. Como $\lim W_i = W$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(W_i, W) < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $i \geq n_0$. Consideremos $i_0 \geq n_0$ tal que $\frac{\sqrt{5}}{2^{i_0}} < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces $H(W_{i_0}, W) < \frac{\epsilon}{3}$. Así que $W \subset N(\frac{\epsilon}{3}, W_{i_0})$. Por tanto, existe $w_0 \in W_{i_0}$ tal que $d(w, w_0) < \frac{\epsilon}{3}$. Ahora, tomemos un punto $z_0 \in A$ tal que $d(z_0, w_0) = d(A, w_0)$. Puesto que $z_0 \in A \subset W_{i_0}$, existe $k_{i_0} \leq j_0 \leq l_{i_0}$ tal que $z_0 \in M_{j_0}^{i_0}$. Dado que $M_{j_0}^{i_0}$ es un rectángulo de diámetro $2^{-i_0}\sqrt{5}$, entonces $\text{diam}(M_{j_0}^{i_0}) = \frac{\sqrt{5}}{2^{i_0}}$. Veamos que $w_0 \in M_{j_0}^{i_0}$. Sea $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la proyección sobre la segunda coordenada. Si $\pi_2(z_0) = \pi_2(w_0)$, puesto que ambos puntos están en W_{i_0} y $M_{j_0}^{i_0}$ es un rectángulo de diámetro $2^{-i_0}\sqrt{5}$, tenemos que $w_0 \in M_{j_0}^{i_0}$. Si $\pi_2(z_0) \neq \pi_2(w_0)$, entonces $z_0 = a$ o bien $z_0 = b$. En ambos casos, $w_0 \in M_{j_0}^{i_0}$. Así que,

$$\begin{aligned} d(z_0, w) &\leq d(z_0, w_0) + d(w_0, w) \leq \frac{\sqrt{5}}{2^{i_0}} + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Esto muestra que $A = W$.

Por la compacidad de $C(X)$ podemos suponer que las sucesiones $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ son convergentes. Veamos ahora que $\lim A_i = \lim B_i = A$. Sea $A_0 = \lim A_i$. Observemos primero que $a_i, c_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Puesto

que $\lim a_i = \lim c_i = a$, por el Lema 1.27, se tiene que $a \in A_0$. De la misma manera, como $b_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim b_i = b$, tenemos que $b \in A_0$.

Por otro lado, como $A_i \subset \bigcup_{j=k_i}^{l_i} M_j^i = W_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, del Lema 1.28 se sigue que $A_0 \subset W = A$. Entonces A_0 es un subcontinuo de A que tiene a los puntos a y b . Esto muestra que $A_0 = A$ y por tanto, $\lim A_i = A$.

Ahora bien, si $B_0 = \lim B_i$, observemos que $b_i, d_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Puesto que $\lim b_i = \lim d_i = b$, por el Lema 1.27, se tiene que $b \in B_0$. De la misma manera, como $c_i \in B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim c_i = a$, tenemos que $a \in B_0$.

Por otro lado, como $B_i \subset \bigcup_{j=k_i}^{l_i} M_j^i = W_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, del Lema 1.28 se sigue que $B_0 \subset W = A$. Entonces B_0 es un subcontinuo de A que tiene a los puntos a y b . Esto muestra que $B_0 = A$ y por tanto, $\lim B_i = A$.

Como $a \neq b$ y $\lim M_{k_i}^i = a$, $\lim M_{l_i}^i = b$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{k_i}^i \cap M_{l_i}^i = \emptyset$ para cada $i \geq N_0$. Puesto que $a_i, c_i \in M_{k_i}^i$ y $b_i, d_i \in M_{l_i}^i$, entonces $c_i \notin \{b_i, d_i\}$ y $b_i \notin \{a_i, c_i\}$ para cada $i \geq N_0$. Además, observemos que $A_i \setminus \{a_i, c_i\}$ es una componente de $X \setminus \{a_i, c_i\}$ y $B_i \setminus \{b_i, d_i\}$ es una componente de $X \setminus \{b_i, d_i\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

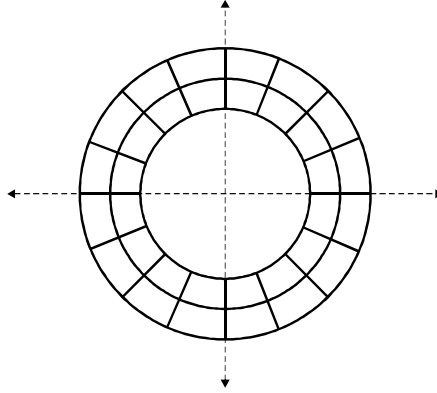
Haciendo $p_i = p'_i = b_i$, $p''_i = d_i$, $q_i = q'_i = c_i$ y $q''_i = a_i$ se tiene el resultado. ■

3.1.2. Con una Circunferencia como Residuo

En esta subsección, caracterizaremos a las compactaciones del rayo, X , que tienen una circunferencia como residuo y que son cono-encajables en $C(X)$. Primero, vamos a distinguir a $(SP)_0$ entre las compactaciones del rayo que tienen a una circunferencia como residuo.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{D}_i = \{A_j^i : j = 1, 2, \dots, 2^{i+1}\}$ donde, usando coordenadas polares,

$$A_j^i = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2^{-i} \leq r \leq 1 + 2^i \text{ y } (j-1)\pi 2^{-i} \leq \theta \leq j\pi 2^{-i}\}.$$



Así que, cada \mathcal{D}_i es una cubierta de S^1 por 2^{i+1} sectores de anillos cerrados A_j^i en el plano. Notemos que $A_j^i \cap A_k^i \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - k| \leq 1$ o $j, k \in \{1, 2^{i+1}\}$. Es decir, \mathcal{D}_i es una cadena circular muy especial. Los elementos de \mathcal{D}_i son llamados *eslabones*.

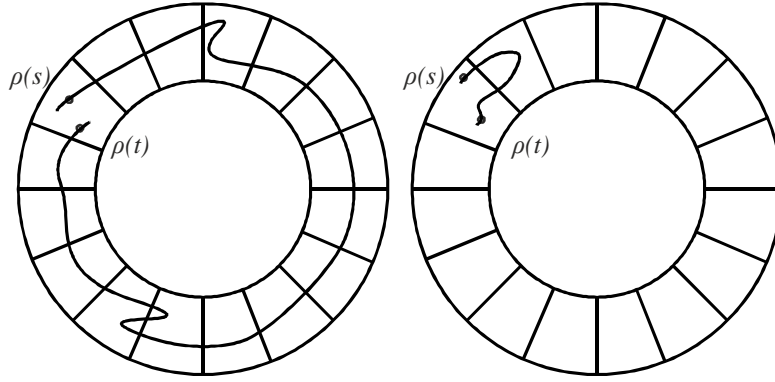
El siguiente lema es un caso especial de [33, Lema 5.6].

Lema 3.11 [28, Lema 4.4] *Cualquier compactación del rayo con una circunferencia como residuo puede ser encajada en el plano de manera que el residuo es la circunferencia estándar S^1 .*

A partir de ahora pensaremos a una compactación del rayo con una circunferencia como residuo encajada en el plano como en el Lema 3.11.

En [28], se presenta la siguiente caracterización de $(SP)_0$.

Lema 3.12 [28, Lema 4.5] *Sea X una compactación del rayo con una circunferencia como residuo y sea $\rho : [0, \infty) \rightarrow X \setminus S^1$ un homeomorfismo. Supongamos que: Dado $i \in \mathbb{N}$, existe $r(i) \in [0, \infty)$ tal que si $\{\rho(s), \rho(t)\} \subset A_k^i$ (para algún k), donde $t \geq s \geq r(i)$, entonces $\rho([s, t]) \cap A_j^i \neq \emptyset$ para cada $j = 1, 2, \dots, 2^{i+1}$ o $\rho([s, t])$ está contenido en la unión de tres eslabones de \mathcal{D}_i . Entonces X es homeomorfo a $(SP)_0$.*



Con lo cual, se obtiene lo siguiente.

Lema 3.13 [28, Lema 4.6] *Si X es una compactación del rayo con una circunferencia como residuo tal que existe una contracción $H : F_1(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ de $F_1(X)$ a S^1 en $C(X)$ (Definición 2.8), tal que H es inyectiva sobre $F_1(S^1) \times [0, 1)$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_0$.*

Entonces, tenemos el siguiente resultado.

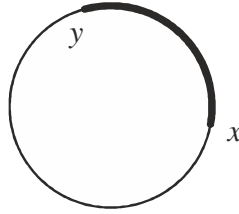
Teorema 3.14 *Sea X una compactación del rayo con una circunferencia como residuo. Si X es cono-encajable en $C(X)$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_0$.*

Demostración. Observemos que S^1 es un subcontinuo terminal de X . Por lo tanto, si existe un encaje $h : Cono(X) \rightarrow C(X)$ tal que $h(x, 0) = \{x\}$, por el Teorema 2.6, $h(v) = S^1$. Entonces, aplicando el Teorema 2.9, existe una contracción $H : F_1(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ de $F_1(X)$ a S^1 tal que H es inyectiva sobre $F_1(S^1) \times [0, 1)$. Del Lema 3.13, se sigue que X es homeomorfo a $(SP)_0$. ■

En [34] se muestra que $Cono((SP)_0)$ y $C((SP)_0)$ son homeomorfos. Describiremos un poco el homeomorfismo dado en [34].

Ejemplo 3.15 *La espiral $(SP)_0$ es un continuo C-H.*

Denotemos por p al punto $(2\cos(1), 2\sin(1))$, es decir, p es el punto extremo del rayo. Para un arco A en X , sea $l(A)$ la longitud del arco A . Dados dos puntos distintos $x, y \in (SP)_0$, si $x, y \in S^1$, entonces xy denota al arco en S^1 de x a y en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si $x, y \notin S^1$, entonces xy denota al arco en $(SP)_0 \setminus S^1$ de x a y . Para cualquier $x \in (SP)_0$, $xx = \{x\}$ y para cada $x \in (SP)_0 \setminus S^1$, xS^1 denota al continuo irreducible entre S^1 y x .



Definamos $f_1 : Cono(S^1) \longrightarrow C(S^1)$ como

$$f_1(x, t) = xy \text{ donde } l(xy) = 2\pi t,$$

para cada $(x, t) \in Cono(S^1)$, si $t < 1$; y $f_1(x, t) = S^1$ si $t = 1$. Entonces f es un homeomorfismo tal que $f_1(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in S^1$.

En [34, Teorema 8] se muestra que existe un homeomorfismo

$$h_1 : Cono((SP)_0) \longrightarrow C((SP)_0)$$

tal que

- 1) $h_1(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_0$;
- 2) $h_1(v) = S^1$;
- 3) $h_1|_{Cono(S^1)} = f_1$;
- 4) $h_1(\{p\} \times [0, 1]) = \{py : y \in (SP)_0 \setminus S^1\} \cup \{xS^1 : x \in (SP)_0 \setminus S^1\}$.

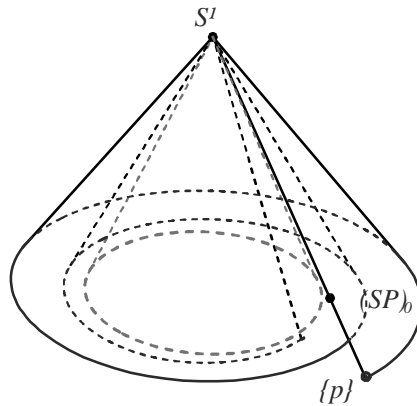
Sin embargo, utilizaremos el siguiente homeomorfismo. Consideremos la función $f : Cono(S^1) \longrightarrow C(S^1)$, donde $f(x, t)$ es el arco en S^1 que tiene a x como punto medio y con longitud igual a $2\pi t$, cuando $t < 1$; y $f(x, t) = S^1$ si $t = 1$. Observemos que f es un homeomorfismo tal que $f(x, 0) = \{x\}$

para cada $x \in S^1$ y $f(\{x\} \times [0, 1])$ es el arco ordenado en $C(S^1)$, de $\{x\}$ a S^1 , de manera que $\{x\}$ crece de la misma manera hacia ambos lados de la circunferencia.

Entonces, existe un homeomorfismo $h : \text{Cono}((SP)_0) \longrightarrow C((SP)_0)$ tal que

- 1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_0$;
- 2) $h(v) = S^1$;
- 3) $h|_{\text{Cono}(S^1)} = f$;
- 4) $h(\{p\} \times [0, 1]) = \{py : y \in (SP)_0 \setminus S^1\} \cup \{xS^1 : x \in (SP)_0 \setminus S^1\}$.

Observemos que $\{py : y \in (SP)_0 \setminus S^1\} \cup \{xS^1 : x \in (SP)_0 \setminus S^1\} = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$.



Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.16 *Si X es una compactación del rayo con una circunferencia como residuo, entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a $(SP)_0$.*

3.2. Compactaciones de la Unión de Dos Rayos

Antes de dar una caracterización de las compactaciones de la recta real que tienen un arco o una circunferencia como residuo y son continuos cono-encajables, estudiemos a las compactaciones de la unión de dos rayos que tienen a un arco o una circunferencia como residuo, y son continuos cono-encajables.

Sean X una compactación de la unión de los rayos $[1, \infty)$ y $(-\infty, -1]$ y $g : [1, \infty) \cup (-\infty, -1] \rightarrow X$ el encaje respectivo, de manera que $Y = X \setminus g([1, \infty) \cup (-\infty, -1])$, el residuo de la compactación, es un arco o una circunferencia. Llamaremos *conjuntos finales de la compactación X* a los conjuntos $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_X(g((-\infty, -n]))$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_X(g([n, \infty))$. Así, X tiene dos finales (que pueden coincidir).

Sean $Y_+ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_X(g([n, \infty))$ y $Y_- = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_X(g((-\infty, -n]))$ los finales de la compactación X . Observemos que Y_+ y Y_- son continuos, pues son intersección anidada de continuos. Además, como $g([1, \infty))$ y $g((-\infty, -1])$ son ajenos y X es un continuo, entonces $Y_+ \cap Y_- \neq \emptyset$ y $Y = Y_+ \cup Y_-$. Sean $g(-1)$ y $g(1)$ los extremos de la compactación.

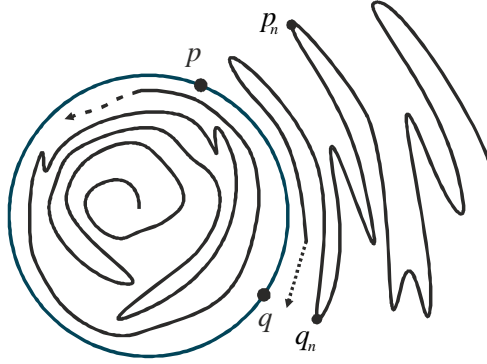
Primero, vamos a caracterizar a los continuos cono-encajables en $C(X)$ entre las compactaciones de la unión de dos rayos y cuyo residuo es un arco. En el siguiente lema consideramos una compactación de la recta real con un arco o una circunferencia como residuo.

Lema 3.17 *Sea X una compactación de la unión de dos rayos cuyo residuo es un arco o una circunferencia Y . Supongamos que X está contenido en un continuo Z de manera que $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z . Si Z es un continuo cono-encajable en $C(Z)$, entonces cada conjunto final no degenerado de X es igual a Y . Además, si Y es un arco y $h : \text{Cono}(Z) \rightarrow C(Z)$ es un encaje tal que $h(z, 0) = \{z\}$ para cada $z \in Z$, entonces $h(v) = Y$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(Z)$.*

Demostración. Notemos primero que si uno de los finales es degenerado, entonces el otro final es igual al residuo y entonces se cumple la primera parte del lema. Supongamos que ninguno de los finales es degenerado. Sea $X = g([1, \infty) \cup (-\infty, -1]) \cup Y$. Supongamos primero que Y_+ es un arco $pq \subset Y$. Más aún, $X_+ = g([0, \infty)) \cup Y_+$ es un E-continuo. Sea $h : \text{Cono}(Z) \longrightarrow C(Z)$ un encaje tal que $h(z, 0) = \{z\}$ para cada $z \in Z$.

Por el Lema 3.9, existen sucesiones $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ de arcos en $g([1, \infty))$, y sucesiones $(p_n)_{n=1}^\infty$, $(p'_n)_{n=1}^\infty$, $(p''_n)_{n=1}^\infty$, $(q_n)_{n=1}^\infty$, $(q'_n)_{n=1}^\infty$ y $(q''_n)_{n=1}^\infty$ de X tales que

- 1) $\lim A_n = \lim B_n = pq$;
- 2) $\lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n = p$;
- 3) $\lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n = q$;
- 4) $p_n, q'_n, q''_n \in A_n$ y $q_n, p'_n, p''_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 5) $p_n \notin \{q'_n, q''_n\}$ y $q_n \notin \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 6) $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $X_+ \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 7) $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $X_+ \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.



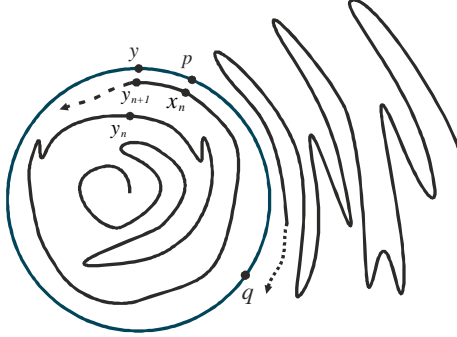
Más aún, notemos que, como $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z , $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $Z \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $Z \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea v el vértice de $\text{Cono}(Z)$. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h(v) \subset A_{n_0}$, entonces $h(v) \not\subset A_n$ para cada $n \geq n_0$. Por el contrario, si tal n_0 no existe, entonces $h(v) \not\subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, podemos suponer que $h(v) \not\subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De manera análoga, podemos suponer que $h(v) \not\subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así que tenemos las condiciones del Lema 3.2. Se sigue que $h(v) = pq$. Hemos mostrado que si Y_+ es un arco, entonces $h(v) = Y_+$.

Ahora bien, si Y_- es un arco, un razonamiento similar muestra que $h(v) = Y_-$. Por lo tanto, $h(v) = Y_+ \cup Y_- = Y$. Así que $Y_+ = Y_- = Y$. Además, en este caso, el residuo Y es un arco y $h(v) = Y$. Por tanto, en el caso en que Y_+ y Y_- son arcos, concluimos que el lema es cierto.

Supongamos ahora que $Y_- = Y$, que Y_+ es un arco y Y es una circunferencia. Puesto que $p \in Y_+ \subset Y = Y_-$, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ de $G_- = g((-\infty, -1])$ tal que $\lim x_n = p$. Sea $y \in Y \setminus Y_+$. Tomemos una sucesión $(y_n)_{n=1}^\infty$ de G_- tal que $\lim y_n = y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $s_n, t_n \in (-\infty, -1]$ tales que $g(s_n) = x_n$ y $g(t_n) = y_n$. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que ambas sucesiones son decrecientes y que $t_{n+1} < s_n < t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es decir, x_n está en el arco en G_- que une los puntos y_n y y_{n+1} .



Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea D_n el arco que une los puntos y_n y y_{n+1} . Observemos que $D_n \setminus \{y_n, y_{n+1}\}$ es una componente de $X \setminus \{y_n, y_{n+1}\}$. Más aún, notemos que, como $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z , $D_n \setminus \{y_n, y_{n+1}\}$ es una componente de $Z \setminus \{y_n, y_{n+1}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ dada por $\alpha(t) = h(x_n, t)$. Puesto que h es un encaje, tenemos que α es un encaje. Además, $\alpha(0) = h(x_n, 0) = \{x_n\} \subset D_n \setminus \{y_n, y_{n+1}\}$ y $\alpha(1) = h(v) = Y_+ \not\subset D_n \setminus \{y_n, y_{n+1}\}$. Entonces, por el Lema 3.1, existe $r_n \in (0, 1]$ tal que $\alpha(t_n) \cap \{y_n, y_{n+1}\} \neq \emptyset$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \in (0, 1]$ tal que $h(x_n, r_n) \cap \{y_n, y_{n+1}\} \neq \emptyset$.

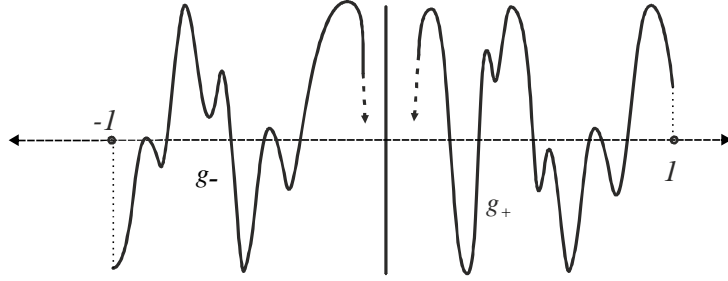
Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos suponer que existe $r \in [0, 1]$ tal que $\lim r_n = r$. Por la continuidad de h , tenemos que $\lim h(x_n, r_n) = h(p, r)$.

Como $h(x_n, r_n) \cap \{y_n, y_{n+1}\} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{y_n, y_{n+1}\} = \{y\}$, por el Lema 1.30 tenemos que $h(p, r) \cap \{y\} \neq \emptyset$. Es decir, $y \in h(p, r)$. Lo cual es una contradicción, pues por el Lema 3.2, $h(p, r) \in C(Y_+)$ para cada $r \in [0, 1]$ y $p \in Y_+$. La contradicción vino de suponer que Y_+ es un arco en Y . Concluimos que, si Y es una circunferencia y Y_+, Y_- son no degenerados, entonces $Y = Y_+ = Y_-$. Esto concluye la prueba. ■

3.2.1. Con un Arco como Residuo

Sea X una compactación de la unión de los rayos $[1, \infty)$ y $(-\infty, -1]$. Sean $g : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow X$ un encaje y $J = X \setminus g((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ el residuo de la compactación, donde J es un arco. Observemos que $\text{cl}_X(g([1, \infty)))$ y $\text{cl}_X(g((-\infty, -1]))$ son E-continuos cuando los finales $J \cap \text{cl}_X(g([1, \infty))) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_X(g([n, \infty)))$, respectivamente $J \cap \text{cl}_X(g((-\infty, -1])) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_X(g((-\infty, -n]))$, son no degenerados. Vamos a considerar a X encajado en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera.

El residuo J será el arco $\{0\} \times [-1, 1]$. El rayo $[1, \infty)$ será identificado como la gráfica de una función continua $g_+ : (0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ y el rayo $(-\infty, -1]$ será la gráfica de una función continua $g_- : [-1, 0) \rightarrow [-1, 1]$. Las funciones g_+ y g_- no son necesariamente suprayectivas. Denotaremos por G_+ y G_- a las gráficas de g_+ y g_- , respectivamente. Entonces $g_+(1)$ y $g_-(-1)$ son los extremos de la compactación. Sean $J_+ = J \cap \text{cl}_X(G_+)$ y $J_- = J \cap \text{cl}_X(G_-)$ los finales de la compactación.



Lema 3.18 Sea X una compactación de dos rayos con un arco como residuo. Supongamos que X está contenido en un continuo Z de manera que $X \setminus \{g_-(-1), g_+(1)\}$ es abierto en Z . Si Z es un continuo cono-encajable en $C(Z)$, entonces X es homeomorfo a S_i^2 para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Sea $h : \text{Cono}(Z) \longrightarrow C(Z)$ un encaje de $\text{Cono}(Z)$ en $C(Z)$ tal que $h(z, 0) = \{z\}$ para cada $z \in Z$. Observemos que $J_+ \cup J_- = J$ y, por tanto, $J_+ \cap J_- \neq \emptyset$. Así que uno de ellos, J_+ o J_- es no degenerado. Sin pérdida de generalidad, supongamos que J_+ es no degenerado. Entonces, por el Lema 3.17, $J_+ = J$ y $h(v) = J$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(X)$. Sean $p = (0, 1)$ y $q = (0, -1)$ los extremos de J .

Veamos que $\text{cl}_X(G_+)$ es homeomorfo a S_0 . Supongamos que no es así. Entonces, por el Lema 3.10, existe un arco $A \subsetneq J$, con extremos a y b ; y existen sucesiones $(A_n)_{n=1}^\infty$ y $(B_n)_{n=1}^\infty$ de arcos contenidos en G_+ , y sucesiones $(p_n)_{n=1}^\infty, (p'_n)_{n=1}^\infty, (p''_n)_{n=1}^\infty, (q_n)_{n=1}^\infty, (q'_n)_{n=1}^\infty$ y $(q''_n)_{n=1}^\infty$ de X tales que

- 1) $\lim A_n = \lim B_n = A$;
- 2) $\lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n = b$;
- 3) $\lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n = a$;
- 4) $p_n, q'_n, q''_n \in A_n$ y $q_n, p'_n, p''_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 5) $p_n \notin \{q'_n, q''_n\}$ y $q_n \notin \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 6) $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- 7) $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por 6) y 7) $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $X \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como $X \setminus \{g_+(1), g_-(-1)\}$ es abierto en Z , $A_n \setminus \{q'_n, q''_n\}$ es una

componente de $Z \setminus \{q'_n, q''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B_n \setminus \{p'_n, p''_n\}$ es una componente de $Z \setminus \{p'_n, p''_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, puesto que $h(v) = J$, tenemos que $h(v) \not\subseteq A_i$ y $h(v) \not\subseteq B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Concluimos, del Lema 3.2, que $h(v) = A$. Lo cual contradice que $h(v) = J$ pues $J \neq A$. Esto prueba que $\text{cl}_X(G_+)$ es homeomorfo a S_0 .

Ahora bien, si J_- es no degenerado, un razonamiento análogo muestra que $\text{cl}_X(G_-)$ es homeomorfo a S_0 . Entonces X es homeomorfo a S_3^2 .

Por otro lado, si J_- es degenerado, entonces X es homeomorfo a S_i^2 para algún $i \in \{1, 2\}$. Esto concluye la prueba del lema. ■

Ahora bien, si X es una compactación de la unión de dos rayos, entonces $X \setminus \{g_-(-1), g_+(1)\}$ es abierto en X . Entonces tenemos el siguiente teorema.

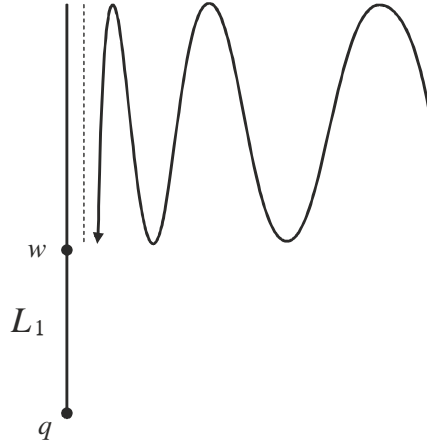
Teorema 3.19 *Sea X una compactación de la unión de dos rayos con un arco como residuo. Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces X es homeomorfo a S_i^2 para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Se sigue del Lema 3.18. ■

Veamos ahora que S_i^2 es un continuo cono-encajable en $C(S_i^2)$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Consideremos el homeomorfismo $\varphi : \text{Cono}(S_0) \rightarrow C(S_0)$ dado en el Ejemplo 3.7.

Proposición 3.20 S_1^2 es un continuo cono-encajable en $C(S_1^2)$. Más aún, existe un encaje $h : \text{Cono}(S_1^2) \rightarrow C(S_1^2)$ tal que:

- 1) $h(x, 0) = \{0\}$ para cada $x \in S_1^2$,
- 2) $h(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(S_1^2)$,
- 3) $h(\{(0, -2)\} \times [0, 1]) = C((0, -2), J \cup L_1) \cup C(J, J \cup L_1)$,
- 4) $h(\{(1, \text{sen}(1))\} \times [0, 1]) = C((1, \text{sen}(1)), S_0) \cup C(J, S_0)$,
- 5) $h(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$, y
- 6) $h(x, t) \in C(L_1 \cup J)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(L_1 \cup J)$.

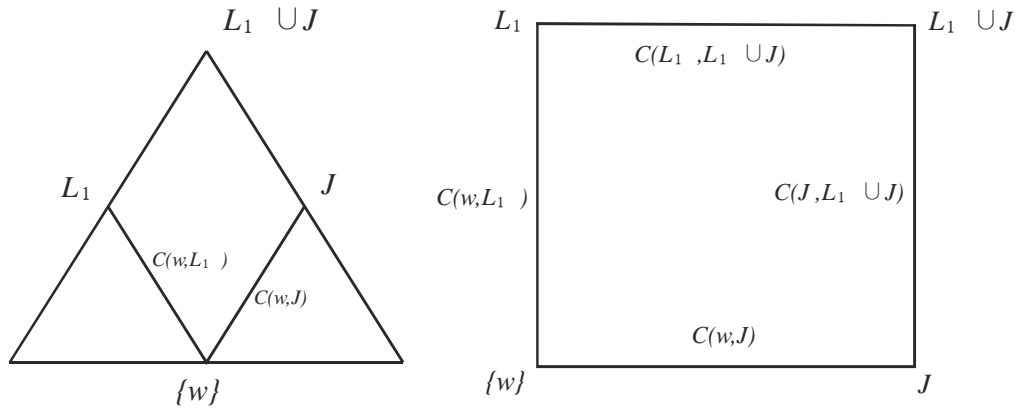


Demostración. Denotemos por w al punto $(0, -1)$. Sean $\alpha_1 : [0, 1] \longrightarrow C(w, J)$ el arco ordenado en $C(J)$, de $\{w\}$ a J ; y $\alpha_2 : [0, 1] \longrightarrow C(w, L_1)$ el arco ordenado en $C(L_1)$, de $\{w\}$ a L_1 . Sea $\alpha : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow C(w, J \cup L_1)$ la función definida como

$$\alpha(s, t) = \alpha_1(s) \cup \alpha_2(t).$$

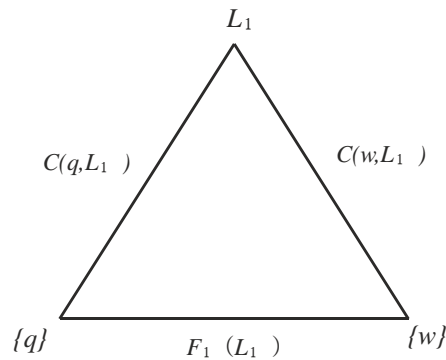
Notemos que α es un homeomorfismo. Así que $C(w, J \cup L_1)$ es un cuadrado. Veamos quiénes se envían a la frontera del cuadrado.

- (1) $\alpha(\{0\} \times [0, 1]) = \alpha_2([0, 1]) = C(w, L_1)$.
- (2) $\alpha([0, 1] \times \{1\}) = \{\alpha_1(s) \cup L_1 : s \in [0, 1]\} = C(L_1, L_1 \cup J)$. Es decir, $\alpha([0, 1] \times \{1\})$ es el arco ordenado en $C(L_1 \cup J)$, de L_1 a $L_1 \cup J$.
- (3) $\alpha(\{1\} \times [0, 1]) = \{J \cup \alpha_1(t) : t \in [0, 1]\} = C(J, J \cup L_1)$. Es decir, $\alpha(\{1\} \times [0, 1])$ es el arco ordenado en $C(L_1 \cup J)$, de J a $L_1 \cup J$.
- (4) $\alpha([0, 1] \times \{0\}) = \alpha_1([0, 1]) = C(w, J)$.



Ahora, sea $q = (0, -2)$. Sabemos que $C(L_1)$ es homeomorfo a un triángulo que une los elementos $\{q\}$, $\{w\}$ y L_1 , en donde los lados del triángulo quedan representados de la siguiente manera.

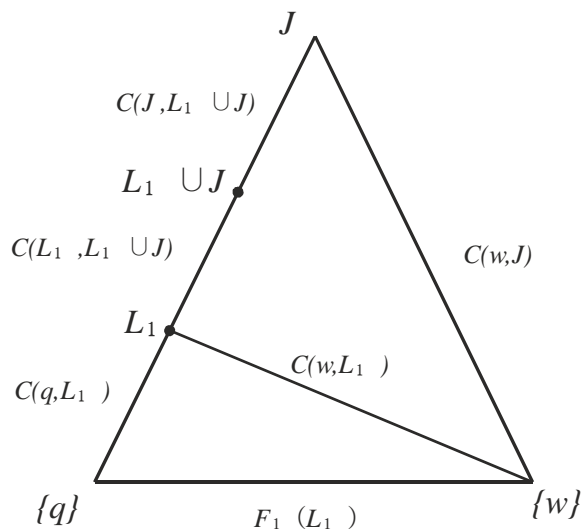
- (1) El lado que une los elementos $\{q\}$ y $\{w\}$ es $F_1(L_1)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{q\}$ y L_1 es $C(q, L_1)$; y
- (3) el lado que une los elementos $\{w\}$ y L_1 es $C(w, L_1)$.



Notemos que $C(w, J \cup L_1) \cap C(L_1) = C(w, L_1)$ y $C(w, J \cup L_1) \cap C(J) = C(w, J)$. Entonces, $C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)$ es una 2-celda. Así, podemos acomodar a $C(w, J \cup L_1)$ y $C(L_1)$ de manera que $C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)$ es un triángulo con vértices $\{q\}$, $\{w\}$ y J de manera que los lados del triángulo quedan representados de la siguiente manera:

- (1) el lado que une los elementos $\{q\}$ y $\{w\}$ es $F_1(L_1)$;

- (2) el lado que une los elementos $\{w\}$ y J es $C(w, J)$; y
 (3) el lado que une los elementos $\{q\}$ y J es $C(q, L_1) \cup C(L_1, J \cup L_1) \cup C(J, J \cup L_1) = C(q, J \cup L_1) \cup C(J, J \cup L_1)$.



Entonces, existe un homeomorfismo natural

$$\phi : \text{Cono}(L_1) \longrightarrow C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)$$

de manera que

- (1) $\phi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in L_1$;
- (2) $\phi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, J \cup L_1) \cup C(J, J \cup L_1)$;
- (3) $\phi(\{w\} \times [0, 1]) = C(w, J)$.

Reparametrizando ϕ si es necesario, podemos suponer que $\phi(w, t) = \{0\} \times [-1, 2t - 1] = \varphi(w, t)$ para cada $t \in [0, 1]$.

Definamos $h : \text{Cono}(S_1^2) \longrightarrow C(S_1^2)$ como

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(S_0); \\ \phi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(L_1). \end{cases}$$

Observemos que h se pega bien, pues $\phi(w, t) = \varphi(w, t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Por lo tanto, h es continua.

Veamos que h es inyectiva. Tomemos $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_1^2)$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Si $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_0)$ o $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(L_1)$, la inyectividad de φ y ϕ , respectivamente, muestra que $(x, t) = (y, s)$.

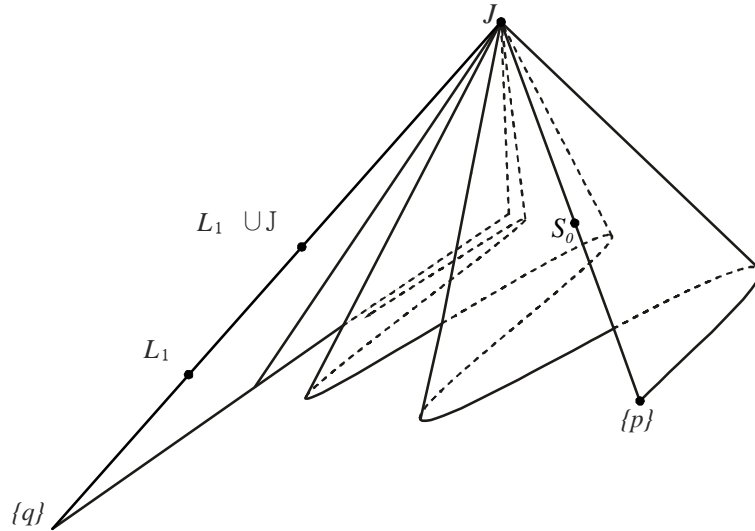
Supongamos ahora que, sin pérdida de generalidad, $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$ y $(y, s) \in \text{Cono}(L_1)$. Entonces $h(x, t) = \varphi(x, t) \in C(S_0)$ y $h(y, s) = \phi(y, s) \in C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)$.

Como $h(x, t) = h(y, s)$ y $C(S_0) \cap (C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)) = C(w, J)$, tenemos, en particular, que $h(y, s) \in C(w, J)$. Como $\varphi|_{\text{Cono}(J)}$ es homeomorfismo entre $\text{Cono}(J)$ y $C(J)$, tenemos que $(y, s) \in \text{Cono}(J)$. Por tanto, $h(y, s) = \varphi(y, s)$. La inyectividad de φ muestra que $h(y, s) = h(x, t)$.

Concluimos que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, h es un encaje. Observemos que, si $p = (1, \text{sen}(1))$, entonces $h(\{p\} \times [0, 1]) = \varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$. Así que h cumple que

- 1) $h(x, 0) = \{0\}$ para cada $x \in S_1^2$,
- 2) $h(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(S_1^2)$,
- 3) $h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, J \cup L_1) \cup C(J, J \cup L_1)$,
- 4) $h(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$,
- (5) $h(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$, y
- (6) $h(x, t) \in C(L_1 \cup J)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(L_1 \cup J)$.

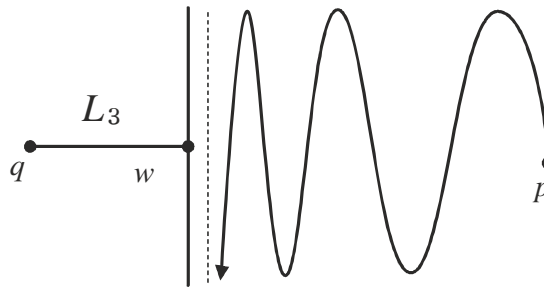
Intuitivamente, $C(S_0) \cup C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)$ se obtiene de pegar el modelo de $C(S_0)$ y el modelo de $C(w, J \cup L_1) \cup C(L_1)$ por el arco $C(w, J)$.



■

Proposición 3.21 S_2^2 es un continuo cono-encajable en $C(S_2^2)$. Además, existe un encaje $h : \text{Cono}(S_2^2) \rightarrow C(S_2^2)$ tal que:

- (1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in S_2^2$;
- (2) $h(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(S_2^2)$;
- (3) $h(\{(1, \text{sen}(1))\} \times [0, 1]) = C((1, \text{sen}(1)), S_0) \cup C(J, S_0)$;
- (4) $h(\{(-1, 0)\} \times [0, 1]) = C((-1, 0), L_3) \cup \{L_3 \cup \varphi((0, 0), t) : t \in [0, 1]\} \cup \{J \cup A : A \in C((0, 0), L_3)\}$;
- (5) $h(x, t) \in C(J \cup L_3)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(J \cup L_3)$; y
- (6) $h(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$.



Demostración. Sean $p = (1, \text{sen}(1))$, $q = (-1, 0)$ y $w = (0, 0)$. Sean $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow C(L_3)$ el arco ordenado en $C(L_3)$, de $\{w\}$ a L_3 , y $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow C(J)$ el arco ordenado en $C(J)$, de $\{w\}$ a J dado por $\alpha_2(t) = \{0\} \times [-t, t]$. Sea $\alpha : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C(w, T)$ la función dada por $\alpha(s, t) = \alpha_1(s) \cup \alpha_2(t)$, donde $T = L_3 \cup J$.

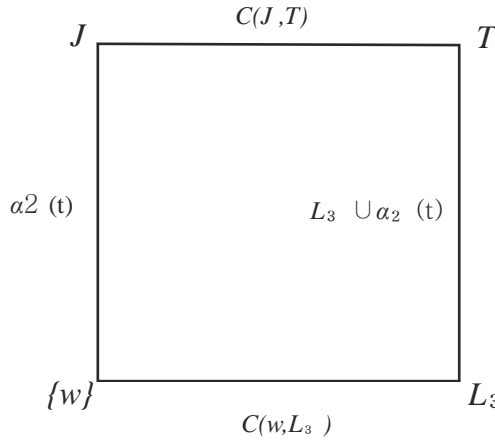
Notemos que α es un encaje. Así que $\Lambda = \text{Im } \alpha$ es un cuadrado. Veamos quiénes se envían a la frontera del cuadrado.

(1) $\alpha(\{0\} \times [0, 1]) = \alpha_2([0, 1])$, es el arco ordenado en $C(J)$, de $\{w\}$ a J de manera que $\{w\}$ crece de manera simétrica en J , hacia J .

(2) $\alpha([0, 1] \times \{1\}) = \{\alpha_1(s) \cup J : s \in [0, 1]\} = C(J, T)$. Así, $\alpha([0, 1] \times \{1\})$ es el arco ordenado en $C(T)$, de J a T .

(3) $\alpha(\{1\} \times [0, 1]) = \{L_3 \cup \alpha_2(t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, $\alpha(\{1\} \times [0, 1])$ es el arco ordenado en $C(T)$, de L_3 a T , de manera que L_3 crece de manera simétrica en J , hasta llegar a T .

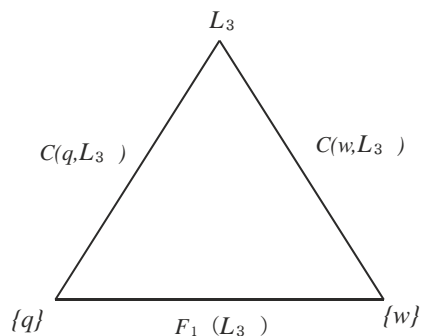
(4) $\alpha([0, 1] \times \{0\}) = \alpha_1([0, 1]) = C(w, L_3)$. Es el arco ordenado en $C(L_3)$, de $\{w\}$ a L_3 .



Consideremos el hiperespacio $C(L_3)$. Como L_3 es un arco, sabemos que un modelo geométrico para $C(L_3)$ es un triángulo cuyos vértices son $\{q\}$, $\{w\}$ y L_3 de manera que los lados quedan representados de la siguiente manera.

- (1) El lado que une los elementos $\{q\}$ y $\{w\}$ es $F_1(L_3)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{q\}$ y L_3 es $C(q, L_3)$;

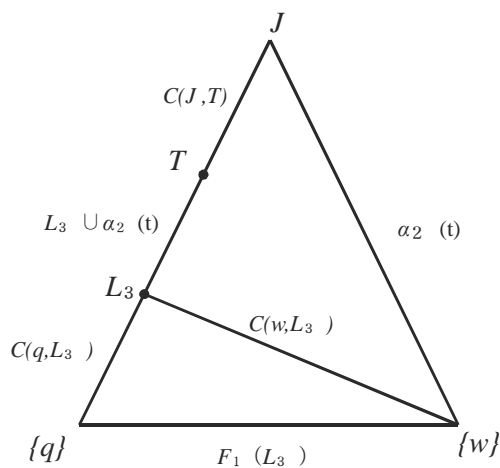
(3) el lado que une los elementos $\{w\}$ y L_3 es $C(w, L_3)$.



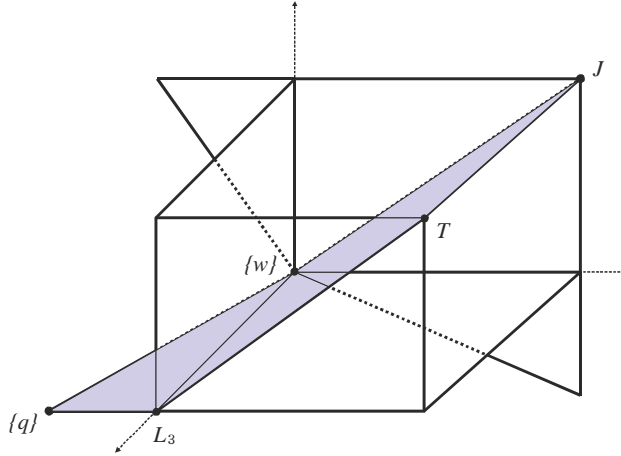
Sea $\Delta = \Lambda \cup C(L_3)$. Observemos que $C(L_3) \cap \Lambda = C(w, L_3)$. Entonces, un modelo geométrico para Δ se obtiene de pegar Λ y $C(L_3)$ por el lado $C(w, L_3)$. Así, Δ representa un triángulo cuyos vértices son $\{q\}$, $\{w\}$ y J , de manera que los lados quedan representados de la siguiente manera.

- (1) el lado que une los elementos $\{q\}$ y $\{w\}$ es $F_1(L_3)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{w\}$ y J es $\alpha_2([0, 1])$;
- (3) el lado que une los elementos $\{q\}$ y J es

$$\begin{aligned}
 & C(q, L_3) \cup \alpha(\{1\} \times [0, 1]) \cup C(J, T) \\
 = & C(q, L_3) \cup \{L_3 \cup \alpha_2(t) : t \in [0, 1]\} \cup C(J, T).
 \end{aligned}$$



Geoméricamente, Δ queda representado en el modelo geométrico de T , de la siguiente manera.



Entonces, existe un homeomorfismo natural $\phi : \text{Cono}(L_3) \longrightarrow \Delta$ tal que

- (1) $\phi(x, t) = \{x\}$ para cada $x \in L_3$;
- (2) $\phi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, L_3) \cup \{L_3 \cup (\{0\} \times [-t, t]) : t \in [0, 1]\} \cup C(J, T)$;
- (3) $\phi(\{w\} \times [0, 1]) = \{\{0\} \times [-t, t] : t \in [0, 1]\}$.

Además, reparametrizando si es necesario, podemos suponer que $\phi(w, t) = \{0\} \times [-t, t] = \varphi(w, t)$, para cada $t \in [0, 1]$. Observemos que $\Delta \cap C(S_0) = \{\{0\} \times [-t, t] : t \in [0, 1]\} = \alpha_2([0, 1])$.

Definamos $h : \text{Cono}(S_2^2) \longrightarrow C(S_2^2)$ como

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(S_0); \\ \phi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(L_3). \end{cases}$$

Observemos que h se pega bien pues $\phi(w, t) = \varphi(w, t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Por lo tanto h es continua.

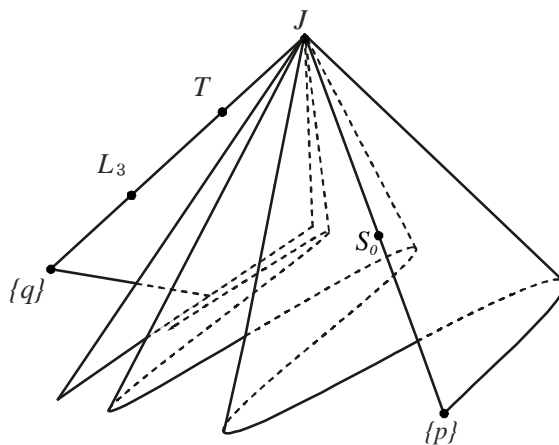
Veamos que h es inyectiva. Tomemos $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_2^2)$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Si $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_0)$ o $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(L_3)$, la inyectividad de φ y ϕ , respectivamente, muestra que $(x, t) = (y, s)$.

Supongamos ahora que, sin pérdida de generalidad, $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$ y $(y, s) \in \text{Cono}(L_3)$. Entonces $h(x, t) = \varphi(x, t) \in C(S_0)$ y $h(y, s) = \phi(y, s) \in \Delta$. Como $h(x, t) = h(y, s)$ y $C(S_0) \cap \Delta = \{\{0\} \times [-t, t] : t \in [0, 1]\}$, tenemos, en particular, que $h(y, s) \in C(J)$. Como $\varphi|_{\text{Cono}(J)}$ es homeomorfismo entre $\text{Cono}(J)$ y $C(J)$, tenemos que $(y, s) \in \text{Cono}(J)$. Por tanto, $h(y, s) = \varphi(y, s)$. La inyectividad de φ muestra que $h(y, s) = h(x, t)$.

Concluimos que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, h es un encaje. Observemos que $h(\{p\} \times [0, 1]) = \varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$. Así, h cumple que

- 1) $h(x, 0) = \{0\}$ para cada $x \in S_2^2$,
- 2) $h(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(S_2^2)$,
- 3) $h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, L_3) \cup \{L_3 \cup (\{0\} \times [-t, t]) : t \in [0, 1]\} \cup C(J, T)$,
- 4) $h(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$,
- (5) $h(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$, y
- (6) $h(x, t) \in C(T)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(T)$.

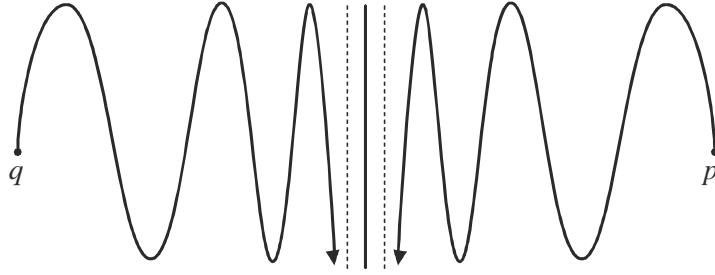
Intuitivamente, $C(S_0) \cup \Delta$ se obtiene de pegar el modelo de $C(S_0)$ y el modelo de Δ por el arco $\{\{0\} \times [-t, t] : t \in [0, 1]\}$.



■

Proposición 3.22 S_3^2 es un continuo cono-encajable en $C(S_3^2)$. Más aún, existe un encaje $h : \text{Cono}(S_3^2) \longrightarrow C(S_3^2)$ tal que

- (1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in S_3^2$;
- (2) $h(v) = J$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(S_3^2)$;
- (3) $h(\{(-1, \text{sen}(-1))\} \times [0, 1]) = C((-1, \text{sen}(-1)), S_1) \cup C(J, S_1)$;
- (4) $h(\{(1, \text{sen}(1))\} \times [0, 1]) = C((1, \text{sen}(1)), S_0) \cup C(J, S_0)$;
- (5) $h(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$;
- (6) $h(x, t) \in C(S_1)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_1)$.



Demostración. Puesto que S_1 es homeomorfo a S_0 , existe un homeomorfismo (Ejemplo 3.7) $\phi : \text{Cono}(S_1) \longrightarrow C(S_1)$ tal que:

- 1) $\phi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in S_1$;
- 2) $\phi(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(S_1)$;
- 3) $\phi|_{\text{Cono}(J)} = \varphi|_{\text{Cono}(J)}$;
- 4) $\phi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, S_1) \cup C(J, S_1)$, en donde $q = (-1, \text{sen}(-1))$.

Definamos la función $h : \text{Cono}(S_3^2) \longrightarrow C(S_3^2)$ como

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(S_0); \\ \phi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(S_1), \end{cases}$$

para $(x, t) \in \text{Cono}(S_3^2)$.

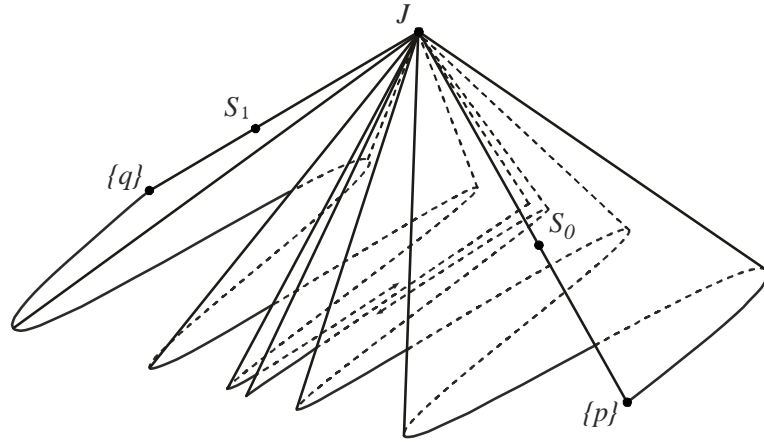
Notemos que h es continua en $\text{Cono}(S_0)$ y $\text{Cono}(S_1)$. Además, $\text{Cono}(S_0) \cap \text{Cono}(S_1) = \text{Cono}(J)$. Puesto que $\phi|_{\text{Cono}(J)} = \varphi|_{\text{Cono}(J)}$, tenemos que h se pega bien. Concluimos que h es continua.

Veamos que h es inyectiva. Tomemos $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_3^2)$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Si $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_0)$ o $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(S_1)$, la inyectividad de φ y ϕ , respectivamente, muestra que $(x, t) = (y, s)$.

Supongamos ahora que, sin pérdida de generalidad, $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$ y $(y, s) \in \text{Cono}(S_1)$. Entonces $h(x, t) = \varphi(x, t) \in C(S_0)$ y $h(y, s) = \phi(y, s) \in C(S_1)$. Como $h(x, t) = h(y, s)$ y $C(S_0) \cap C(S_1) = C(J)$, tenemos, en particular, que $h(y, s) \in C(J)$. Como $\varphi|_{\text{Cono}(J)}$ es homeomorfismo entre $\text{Cono}(J)$ y $C(J)$, tenemos que $(y, s) \in \text{Cono}(J)$. Por tanto, $h(y, s) = \varphi(y, s)$. La inyectividad de φ muestra que $h(y, s) = h(x, t)$. Concluimos que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff. Hemos probado que h es un encaje tal que

- 1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in S_3^2$;
- 2) $h(v) = J$;
- 3) $h|_{\text{Cono}(J)} : \text{Cono}(J) \longrightarrow C(J)$ es un homeomorfismo;
- 4) $h(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$ y $h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, S_1) \cup C(J, S_1)$, en donde $p = (1, \text{sen}(1))$ y $q = (-1, \text{sen}(-1))$.
- (5) $h(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$;
- (6) $h(x, t) \in C(S_1)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_1)$.

Intuitivamente, $C(S_0) \cup C(S_1)$ se obtiene de pegar el modelo de $C(S_0)$ y el modelo de $C(S_1)$ en $C(J)$.



Esto termina la prueba de que S_3^2 es un continuo cono-encajable en $C(S_3^2)$.

■

Del Teorema 3.19 y las Proposiciones 3.20, 3.21 y 3.22, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.23 *Si X es una compactación de la unión de dos rayos con un arco como residuo, entonces X es un continuo cono-encajable si y sólo si X es homeomorfo a S_i^2 para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

3.2.2. Con una Circunferencia como Residuo

Sean X una compactación de los rayos $[1, \infty)$ y $(-\infty, -1]$ y $g : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow X$ un encaje tal que $S = X \setminus g((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$, el residuo de la compactación, es una circunferencia.

Observemos que $\text{cl}_X(g([1, \infty)))$ y $\text{cl}_X(g((-\infty, 1]))$ son compactaciones de un rayo. Cuando $S_+ = S \cap \text{cl}_X(g([1, \infty)))$ (respectivamente, $S_- = S \cap \text{cl}_X(g((-\infty, -1]))$) es un arco, entonces $\text{cl}_X(g([1, \infty)))$ es un E-continuo (respectivamente, $\text{cl}_X(g((-\infty, 1]))$ es un E-continuo).

Ahora bien, por el Lema 3.11, una compactación del rayo con una circunferencia como residuo se puede encajar en el plano de manera que el rayo converge a la circunferencia estándar S^1 . Puesto que S^1 separa al plano, tenemos que la imagen del rayo queda dentro de la circunferencia, o bien, fuera de ella.

Entonces, vamos a considerar a X encajado en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera. El residuo S será la circunferencia estándar S^1 . El rayo $g([1, \infty))$ será identificado afuera de S^1 y el rayo $g((-\infty, -1])$ estará dentro de S^1 . Denotaremos por G_+ y G_- a los rayos $g([1, \infty))$ y $g((-\infty, -1])$, respectivamente. Por el Lema 3.17, tenemos que ninguno de los rayos $g([1, \infty))$ y $g((-\infty, -1])$ converge a un arco.

Lema 3.24 *Sea X una compactación de la unión de dos rayos con una circunferencia, S^1 , como residuo. Supongamos que X está contenido en un continuo Z de manera que $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z . Si Z es un continuo cono-encajable en $C(Z)$ y $h : \text{Cono}(Z) \rightarrow C(Z)$ es tal que $h(z, 0) = \{z\}$ para cada $z \in Z$, entonces $h(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(Z)$.*

Demostración. Observemos que $S_+ \cup S_- = S^1$ y, por tanto, $S_+ \cap S_- \neq \emptyset$. Así que uno de ellos, S_+ o S_- es no degenerado.

Primero supongamos que S_+ y S_- son no degenerados. Entonces, por el Lema 3.17, tenemos que $S_+ = S_- = S^1$. Así que S^1 es un subcontinuo terminal de X . Se sigue del Lema 2.6, que $S_+ = S_- = S^1 = h(v)$.

Ahora bien, supongamos que S_- es degenerado y S_+ es no degenerado. Entonces, por el Lema 3.17, tenemos que $S_+ = S^1$. Sea $Y = G_+ \cup S^1$. Entonces Y es una compactación del rayo con una circunferencia como residuo.

Tomemos un punto $p \in S^1$. Por la inyectividad de h , a lo más para un punto $z \in Z$, existe $t \in [0, 1)$, tal que $h(z, t) = S^1$. Podemos suponer entonces que $h(p, t) \neq S^1$ para cada $t \in [0, 1)$. Consideremos una sucesión $(p_n)_{n=1}^\infty$ de G_+ tal que $\lim p_n = p$.

Afirmamos que podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t'_n \in [0, 1]$ tal que $h(p_n, t'_n) \not\subseteq G_+$. Veamos por qué podemos suponerlo.

Si $h(v) \not\subseteq G_+$, tomando $t'_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple la afirmación. Supongamos que $h(v) \subset G_+$.

Sea $t_0 = \sup \left\{ t \in [0, 1] : \bigcup h(\{p\} \times [0, t]) \subset Y \right\}$. Consideremos una sucesión creciente $(s_n)_{n=1}^\infty$ en $[0, t_0]$ tal que $\lim s_n = t_0$. Entonces $h(p, s_n) \subset Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de h , tenemos que $\lim h(p, s_n) = h(p, t_0)$ y, por el Lema 1.28, se tiene que $h(p, t_0) \subset Y$. Supongamos que existe $t'_0 \in [0, t_0]$ tal que $h(p, t'_0) \not\subseteq S^1$. Entonces $h(\{p\} \times [0, t'_0])$ es un arco en $C(Y)$ que une a $h(p, 0) = \{p\} \in C(S^1)$ con el elemento $h(p, t'_0) \in C(Y) \setminus C(S^1)$. El Lema 2.5 implica que $S^1 \in h(\{p\} \times [0, t'_0])$. Entonces existe $t' \in [0, t'_0]$ tal que $h(p, t') = S^1$. Por la elección de p , tenemos que $t' = 1$ y por tanto, $h(v) = S^1$. Lo cual contradice que $h(v) \subset G_+$. Concluimos que $h(p, t) \subset S^1$ para cada $t \in [0, t_0]$. Puesto que $h(p, t) \neq S^1$ para cada $t \in [0, 1)$ y $h(v) \subset G_+$, tenemos que $t_0 < 1$ y $h(p, t) \subsetneq S^1 \subset X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ para cada $t \in [0, t_0]$. Como $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z , existe $s_0 > t_0$ tal que $\bigcup h(\{p\} \times [0, s_0]) \subset X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ y, por la elección de t_0 , podemos suponer que $\bigcup h(\{p\} \times [0, s_0]) \not\subseteq Y$. Entonces, existe $t' \in [t_0, s_0]$ tal que $h(p, t') \not\subseteq Y$ y $h(p, t') \subset X \setminus \{g(-1), g(1)\}$. De aquí que

$h(p, t') \cap G_- \neq \emptyset$. Sean $x \in h(p, t') \cap G_- \neq \emptyset$ y $\epsilon = \frac{d(x, Y)}{2} > 0$. Por la continuidad de h , tenemos que $\lim h(p_n, t') = h(p, t')$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(h(p, t'), h(p_n, t')) < \epsilon$ para cada $n \geq N_0$. En particular, tenemos que $x \in h(p, t') \subset N(\epsilon, h(p_n, t'))$. Por lo tanto, existe $y \in h(p_n, t')$ tal que $d(x, y) < \epsilon = \frac{d(x, Y)}{2}$. Concluimos que $y \notin Y$ y por tanto, $y \notin G_+$. Así que $h(p_n, t') \not\subset G_+$ para cada $n \geq N_0$. Esto prueba la afirmación.

Observemos que $h(p_n, 0) = \{p_n\} \subset G_+$ y $h(p_n, t'_n) \not\subset G_+$. Sea $t_n = \sup\{s \in [0, 1] : \bigcup h(\{p_n\} \times [0, s]) \subset G_+\}$. Veamos que $h(p_n, t_n) \not\subset G_+$. De lo contrario, $t_n < t'_n \leq 1$ y, puesto que $g((1, \infty))$ es abierto en Z , existe $s > t_n$ tal que $\bigcup h(\{p_n\} \times [t_n, s_n]) \subset G_+$ (por la continuidad de la unión). Esto contradice la elección de t_n . Más aún, considerando una sucesión creciente $(s_i)_{i=1}^\infty$ de $[0, t_n]$ tal que $\lim s_i = t_n$, tenemos que $h(p_n, s_i) \subset G_+$ (por la elección de t_n). De aquí que $h(p_n, t_n) = \lim h(p_n, s_i) \subset \text{cl}_Z(G_+) = Y$.

Puesto que $h(p_n, t_n) \not\subset G_+$ y $h(p_n, t_n) \subset Y$, tenemos que $h(p_n, t_n) \cap S^1 \neq \emptyset$. Observemos que S^1 es un subcontinuo terminal de Y . Por lo tanto, $h(p_n, t_n) \subset S^1$ o bien, $S^1 \subset h(p_n, t_n)$.

Supongamos que $h(p_n, t_n) \subsetneq S^1$. Entonces $h(\{p_n\} \times [0, t_n])$ es un arco en $C(Y)$ que une un elemento de $C(S^1)$ con uno de $C(Y) \setminus C(S^1)$. Como S^1 es un subcontinuo terminal de Y , se sigue del Lema 2.5 que $S^1 \in h(\{p_n\} \times [0, t_n])$. Es decir, existe $s < t_n$ tal que $S^1 = h(p_n, s)$. Esto contradice la elección de t_n . Concluimos que $S^1 \subset h(p_n, t_n)$.

Hemos probado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [0, 1]$ tal que $S^1 \subset h(p_n, t_n)$. Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos suponer que existe $t \in [0, 1]$ tal que $\lim t_n = t$. Entonces, por la continuidad de h , tenemos que $\lim h(p_n, t_n) = h(p, t)$. Ahora bien, puesto que $S^1 \subset h(p_n, t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue del Lema 1.28 que $S^1 \subset h(p, t)$.

Más aún, puesto que $h(\{p_n\} \times [0, t_n]) \subset C(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim h(\{p_n\} \times [0, t_n]) = h(\{p\} \times [0, t])$ (por el Lema 1.70), tenemos que $h(\{p\} \times [0, t]) \subset C(Y)$.

Si $S^1 \subsetneq h(p, t)$, entonces $h(\{p\} \times [0, t])$ es un arco en $C(Y)$ que une a $h(p, 0) = \{p\} \in C(S^1)$ con $h(p, t) \in C(Y) \setminus C(S^1)$. Se sigue del Lema 2.5, que $S^1 \in h(\{p\} \times [0, t])$. Es decir, existe $r \leq t$ tal que $h(p, r) = S^1$. Claramente,

esto también es cierto cuando $S^1 = h(p, t)$. Por la elección de p , tenemos que $r = t = 1$. Es decir, $h(v) = S^1$. Esto concluye la prueba. ■

Estamos listos para caracterizar las compactaciones de dos rayos cuyo residuo es una circunferencia que son continuos cono-encajables.

Lema 3.25 *Sea X una compactación de dos rayos con una circunferencia, S^1 , como residuo. Supongamos que X está contenido en un continuo Z de manera que $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z . Si Z es cono-encajable en $C(Z)$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_i^2$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Sea $h : \text{Cono}(Z) \rightarrow C(Z)$ un encaje tal que $h(z, 0) = \{z\}$ para cada $z \in Z$. Por el Lema 3.24, tenemos que $h(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(Z)$.

Observemos que $S_+ \cup S_- = S^1$ y, por tanto, $S_+ \cap S_- \neq \emptyset$. Así que uno de ellos, S_+ o S_- es no degenerado. Supongamos, sin pérdida de generalidad que S_+ es no degenerado. Entonces, por el Lema 3.17, tenemos que $S_+ = S^1$.

Sea $Y = G_+ \cup S^1$. Entonces Y es una compactación del rayo con una circunferencia como residuo. Veamos que Y es homeomorfo a $(SP)_0$.

Supongamos que no. Entonces, por el Lema 3.12, existe $i \in \mathbb{N}$ para el cual existen s, t con $s < t$ tan grandes como queramos, tales que:

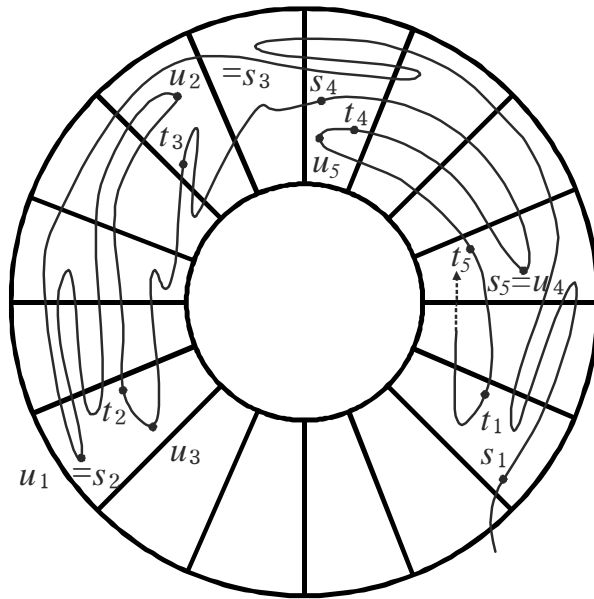
- (1) $\{g_+(s), g_+(t)\} \subset A_{k(s,t)}^i$ para algún $k(s, t)$;
- (2) $g_+([s, t]) \cap A_{j(s,t)}^i = \emptyset$ para algún $j(s, t)$;
- (3) $g_+([s, t])$ no está contenido en la unión de tres eslabones de \mathcal{D}_i .

Denotemos por $\langle i, s, t \rangle$ a la afirmación “(1), (2) y (3) se satisfacen para i, s y t ”. Construyamos tres sucesiones $(s_n)_{n=1}^\infty$, $(t_n)_{n=1}^\infty$ y $(u_n)_{n=1}^\infty$ como sigue.

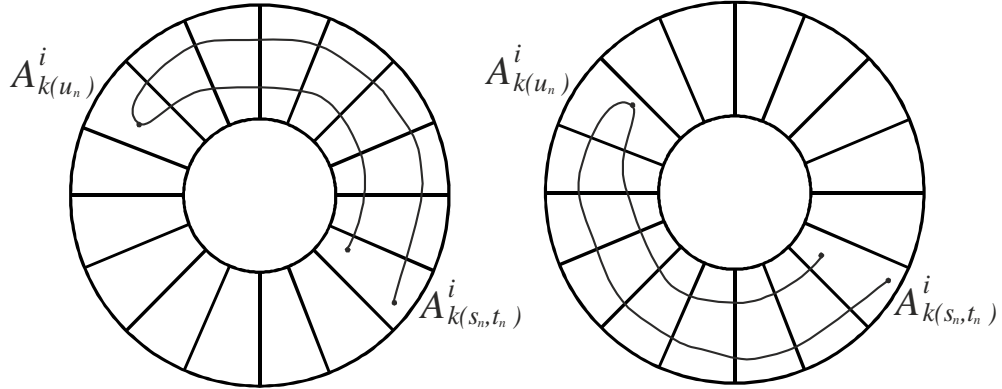
Sea $M_1 = \{s \in [1, \infty) : \text{existe } t > s \text{ tal que } \langle i, s, t \rangle\}$. Sea $s'_1 = \inf M_1$. Sea $s_1 \in M_1$ tal que $g_+([s'_1, s_1])$ está contenido en la unión de, a lo más, dos eslabones de \mathcal{D}_i a los cuales $g_+(s'_1)$ pertenece. Sea $N_1 = \{t > s_1 : \langle i, s_1, t \rangle\}$. Dado que $s_1 \in M_1$, $N_1 \neq \emptyset$. Sea $t'_1 = \inf N_1$. Tomemos $t_1 \in N_1$ tal que $g_+([t'_1, t_1])$ está contenido en la unión de, a lo más, dos eslabones de \mathcal{D}_i . Puesto que $t_1 \in N_1$, entonces $\langle i, s_1, t_1 \rangle$.

Sea $\rho : Y \longrightarrow S^1$ la proyección dada por $\rho(x) = x/|x|$ para cada $x \in Y$, en donde $|x|$ denota la distancia de x al origen $(0,0)$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(0,0) \notin G_+$). Puesto que $\langle i, s_1, t_1 \rangle$, tenemos que $g_+([s_1, t_1]) \cap A_{j(s_1, t_1)}^i = \emptyset$ para algún $j(s_1, t_1)$. Así que $\rho(g_+([s_1, t_1]))$ es un arco η_1 en S^1 . Además, puesto que $g_+(s_1)$ y $g_+(t_1)$ están en el mismo eslabón de \mathcal{D}_i y $g_+([s_1, t_1])$ no está contenido en tres eslabones de \mathcal{D}_i , tenemos que uno de los extremos del arco η_1 es de la forma $\rho(g_+(u_1))$, con $s_1 < u_1 < t_1$, en donde $g_+(u_1)$ no está en la unión de una cadena de tres eslabones de \mathcal{D}_i que intersectan a $\{g_+(s_1), g_+(t_1)\}$.

Ahora, sea $M_2 = \{s \in [u_1, \infty) : \text{existe } t > s \text{ tal que } \langle i, s, t \rangle\}$ y sea $s'_2 = \inf M_2$. Sea $s_2 \in M_2$ tal que $g_+([s'_2, s_2])$ está contenido en la unión de, a lo más, dos eslabones de \mathcal{D}_i a los cuales $g_+(s'_2)$ pertenece. Sea $N_2 = \{t > s_2 : \langle i, s_2, t \rangle\}$. Dado que $s_2 \in M_2$, $N_2 \neq \emptyset$. Sea $t'_2 = \inf N_2$. Tomemos $t_2 \in N_2$ tal que $g_+([t'_2, t_2])$ está contenido en la unión de, a lo más, dos eslabones de \mathcal{D}_i a los cuales $g_+(t'_2)$ pertenece. Puesto que $t_2 \in N_2$, entonces $\langle i, s_2, t_2 \rangle$. Nuevamente, usando la proyección ρ , obtenemos que $\rho(g_+([s_2, t_2]))$ es un arco γ_2 en S^1 tal que uno de sus extremos es de la forma $\rho(g_+(u_2))$, con $s_2 < u_2 < t_2$, en donde $g_+(u_2)$ no está en la unión de una cadena de eslabones de \mathcal{D}_i que intersectan a $\{g_+(s_2), g_+(t_2)\}$. De esta manera, usamos u_2 para definir M_3 , etc. Así, definimos las sucesiones $(s_n)_{n=1}^\infty$, $(t_n)_{n=1}^\infty$ y $(u_n)_{n=1}^\infty$.



Dada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_{k(s_n, t_n)}^i$ y $A_{k(u_n)}^i$ los eslabones de \mathcal{D}_i tales que $g_+(u_n) \in A_{k(u_n)}^i$ y $g_+(s_n), g_+(t_n) \in A_{k(s_n, t_n)}^i$. Entonces podemos suponer que $g_+([s_n, t_n])$ está contenido en una subcadena \mathcal{C}_n de \mathcal{D}_i , que tiene como eslabones extremos a $A_{k(u_n)}^i$ y $A_{k(s_n, t_n)}^i$. Decimos que $g_+([s_n, t_n])$ se dobla en \mathcal{D}_i en sentido antihorario si, al recorrer \mathcal{C}_n del eslabón $A_{k(s_n, t_n)}^i$ al eslabón $A_{k(u_n)}^i$, recorremos a S^1 en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si al recorrer \mathcal{C}_n del eslabón $A_{k(s_n, t_n)}^i$ al eslabón $A_{k(u_n)}^i$, recorremos a S^1 en el sentido de las manecillas del reloj, decimos que $g_+([s_n, t_n])$ se dobla en \mathcal{D}_i en sentido horario.



Intuitivamente, $g_+([s_n, t_n])$ “envuelve” parte de S^1 dos veces, primero en una dirección conforme el parámetro va de s_n a u_n y después en sentido contrario conforme el parámetro va de u_n a t_n . De esta manera, observemos que si $s \in (s_n, u_n)$, entonces existe $t \in (u_n, t_n)$ tales que $g_+(s)$ y $g_+(t)$ están en el mismo eslabón de \mathcal{D}_i . Además, si $g_+([s_n, u_n])$ recorre, esencialmente, en sentido de las manecillas del reloj, entonces $g_+([s_{n+1}, u_{n+1}])$ recorre, esencialmente, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Más aún, $g_+([u_n, t_n])$ recorre, esencialmente en sentido contrario a las manecillas del reloj y el rayo se “regresa” cuando llega al punto u_{n+1} , que es cuando hay un cambio esencial de dirección nuevamente.

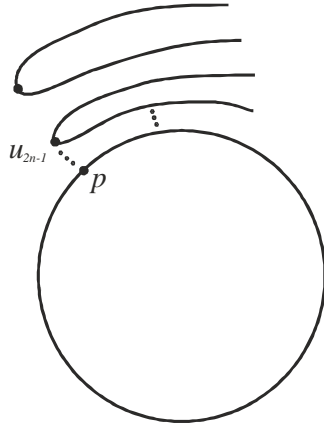
Así, si $g_+([s_n, t_n])$ se dobla en sentido antihorario, entonces $g_+([s_{n+1}, t_{n+1}])$ se dobla en sentido horario. De modo que tenemos dos sucesiones de arcos $(g_+([s_{2n}, t_{2n}]))_{n=1}^{\infty}$ y $(g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}]))_{n=1}^{\infty}$, una de las cuales está formada por arcos que se doblan en sentido antihorario y la otra formada por arcos que se doblan en sentido horario. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}])$ se dobla en sentido antihorario mientras que $g_+([s_{2n}, t_{2n}])$ se dobla en sentido horario.

Ahora bien, dada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_{j(s_n, t_n)}^i$ un eslabón de \mathcal{D}_i tal que $g_+([s_n, t_n]) \cap A_{j(s_n, t_n)}^i = \emptyset$. Como \mathcal{D}_i tiene una cantidad finita de eslabones, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_+([s_n, t_n]) \cap A_j^i = \emptyset$, para algún j . Así, $g_+([s_n, t_n]) \subset \left(\bigcup \mathcal{D}_i\right) \setminus A_j^i$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

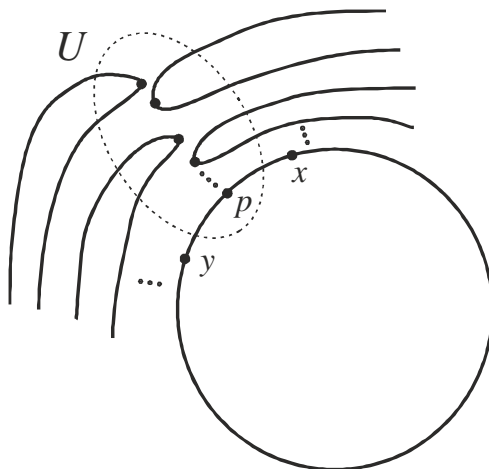
Por la compacidad de Y , podemos suponer que las sucesiones $(g_+(u_{2n-1}))_{n=1}^\infty$ y $(g_+(u_{2n}))_{n=1}^\infty$ son convergentes. Sean $p, q \in S^1$ tales que $\lim g_+(u_{2n-1}) = p$ y $\lim g_+(u_{2n}) = q$. Además, por la compacidad de $C(Y)$, podemos suponer que las sucesiones de arcos $(g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}]))_{n=1}^\infty$ y $(g_+([s_{2n}, t_{2n}]))_{n=1}^\infty$ son convergentes. Sean $\gamma_1 = \lim g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}])$ y $\gamma_2 = \lim g_+([s_{2n}, t_{2n}])$. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_+([s_n, t_n])$ no está contenido en la unión de tres eslabones de \mathcal{D}_i , tenemos que γ_1 y γ_2 son no degenerados, y como $g_+([s_n, t_n]) \subset \left(\bigcup \mathcal{D}_i\right) \setminus A_j^i$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que γ_1 y γ_2 son arcos en S^1 .

Veamos que p es un extremo de γ_1 . Sea $A_{k_1}^i$ el eslabón de D_i tal que $p \in A_{k_1}^i$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\eta_{2n-1} = \rho(g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}]))$. Por la continuidad de ρ , tenemos que $\lim \eta_{2n-1} = \lim \rho(g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}])) = \lim \rho(\gamma_1) = \gamma_1$, pues $\gamma_1 \subset S^1$. Puesto que $\rho(g_+(u_{2n-1}))$ es extremo de η_{2n-1} para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim \rho(g_+(u_{2n-1})) = \rho(p) = p$ es extremo de γ_1 . De la misma manera tenemos que q es un extremo de γ_2 .



Sean $a, b \in S^1$ tales que a y p son los extremos de γ_1 ; y b y q son los extremos de γ_2 . Entonces $a \neq p$ y $b \neq q$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim g_+(s_{2n-1}) = \lim g_+(t_{2n-1}) = a$ y $\lim g_+(s_{2n}) = \lim g_+(t_{2n}) = b$. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}])$ se dobla en sentido antihorario, entonces γ_1 es el arco con extremos a y p tal que, al recorrerlo de a a p , lo hacemos en S^1 en sentido contrario a las manecillas del reloj. De la misma manera, al recorrer a γ_2 de b a q , lo hacemos en el sentido de las manecillas del reloj.

Si $p = q$, mostremos que $\{p\}$ es un R-conjunto en X . Como γ_1 recorre de a a p en sentido contrario a las manecillas del reloj y γ_2 recorre de b a q en el mismo sentido de las manecillas del reloj, existen $x \in \gamma_1 \setminus \{p\}$ y $y \in \gamma_2 \setminus \{q\}$ tales que $xp \subset \gamma_1$, $qy \subset \gamma_2$ y $xp \cap qy = \{p\} = \{q\}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\text{cl}_Z(B(\epsilon, p)) \cap S^1 \subset xp \cup qy \subset \gamma_1 \cup \gamma_2$. Sea $U = B(\epsilon, p)$. Como $\lim g_+(u_{2n-1}) = p = q = \lim g_+(u_{2n})$, podemos suponer que $g_+(u_n) \in U$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean L_n y M_n las componentes, respectivamente, de $U \cap g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}])$ y $U \cap g_+([s_{2n}, t_{2n}])$, tales que $g_+(u_{2n-1}) \in L_n$ y $g_+(u_{2n}) \in M_n$.

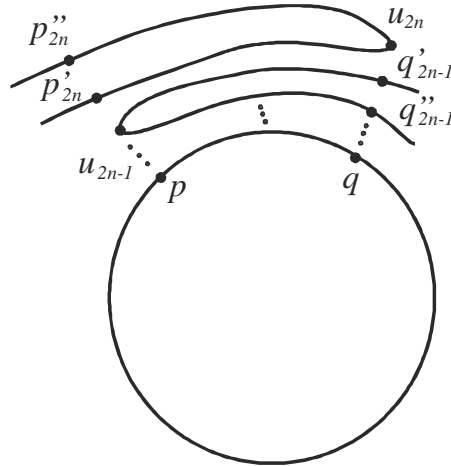


Notemos que $\text{cl}_Z(L_n)$ es un arco contenido en $\text{cl}_Z(U) \cap g_+([s_{2n-1}, t_{2n-1}])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de $C(Z)$, podemos suponer que existe $L \in C(Z)$ tal que $\lim \text{cl}_Z(L_n) = L$. De la misma manera, podemos suponer que existe $M \in C(Z)$ tal que $\lim \text{cl}_Z(M_n) = M$. Observemos que L y M son

subcontinuos de X . Además, $L \subset \gamma_1 \cap \text{cl}_Z(U)$ y $M \subset \gamma_2 \cap \text{cl}_Z(U)$. Por lo tanto, $L \subset px \subset \gamma_1$ y $M \subset qy \subset \gamma_2$. Concluimos que $L \cap M \subset px \cap qy = \{p\}$. Esto muestra que $\{p\}$ es un R-conjunto en X y, como $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z , $\{p\}$ es un R-conjunto en Z .

Así que $C(Z)$ no es contráctil ([13, Teorema 9.8]). Esto contradice el Corolario 2.10. Concluimos que $p \neq q$.

Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $q'_{2n-1} \in g_+([s_{2n-1}, u_{2n-1}])$, $q''_{2n-1} \in g_+([u_{2n-1}, t_{2n-1}])$, $p'_{2n} \in g_+([s_{2n}, t_{2n}])$ y $p''_{2n} \in g_+([u_{2n}, t_{2n}])$ tales que $\lim q'_{2n-1} = \lim q''_{2n-1} = q$, $\lim p'_{2n} = \lim p''_{2n} = p$, $\lim q'_{2n-1}q''_{2n-1} = qp = \lim p'_{2n}p''_{2n}$. Sean $A_n = q'_{2n-1}q''_{2n-1}$ y $B_n = p'_{2n}p''_{2n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $A_n \setminus \{q'_{2n-1}, q''_{2n-1}\}$ es una componente de $Y \setminus \{q'_{2n-1}, q''_{2n-1}\}$ y $B_n \setminus \{p'_{2n}, p''_{2n}\}$ es una componente de $Y \setminus \{p'_{2n}, p''_{2n}\}$. Entonces, tenemos las condiciones del Lema 3.2. De aquí que $h(v) = qp$. Lo cual es una contradicción pues $h(v) = S^1$.



Concluimos que Y es homeomorfo a $(SP)_0$.

Ahora bien, si S_- es no degenerado, un argumento similar muestra que $G_- \cup S_-$ es homeomorfo a $(SP)_0$. En este caso, los rayos G_+ y G_- pueden aproximarse a S^1 en el mismo sentido o hacerlo en sentidos contrarios. Es decir, X es homeomorfo a $(SP)_1^2$ o $(SP)_2^2$.

Si S_- es degenerado, tenemos que X es homeomorfo a $(SP)_3^2$. Esto concluye la prueba. ■

Ahora bien, si X es una compactación de la unión de dos rayos, entonces $X \setminus \{g_-(-1), g_+(1)\}$ es abierto en X . Entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.26 *Sea X una compactación de dos rayos con una circunferencia como residuo. Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_i^2$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Se sigue del Lema 3.25. ■

Ahora veamos que $(SP)_i^2$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_i^2)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea $\varphi : \text{Cono}((SP)_0) \rightarrow C((SP)_0)$ el homeomorfismo dado en el Ejemplo 3.15. Además, sea $f : \text{Cono}(S^1) \rightarrow C(S^1)$ el homeomorfismo donde $f(x, t)$ es el arco yz tal que $l(yz) = 2\pi t$ y x es el punto medio del arco yz , para cada $(x, t) \in \text{Cono}(S^1) \setminus \{v\}$ y $f(v) = S^1$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(S^1)$ y el arco es tomado a partir del punto en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Proposición 3.27 *Dada $i \in \{1, 2\}$, $(SP)_i^2$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_i^2)$. Más aún, existe un encaje $h : \text{Cono}((SP)_i^2) \rightarrow C((SP)_i^2)$ tal que*

- (1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_i^2$;
- (2) $h(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}((SP)_i^2)$;
- (3) $h(\{(2\cos(1), 2\sin(1))\} \times [0, 1]) = C((2\cos(1), 2\sin(1)), (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$;
- (4) $h(\{(0, 0)\} \times [0, 1]) = C((0, 0), (SP)_i) \cup C(S^1, (SP)_i)$;
- (5) $h(x, t) \in C((SP)_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_0)$;
- (6) $h(x, t) \in C((SP)_i)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_i)$.

Demostración. Puesto que $(SP)_i$ es homeomorfo a $(SP)_0$, existe un homeomorfismo $\phi : \text{Cono}((SP)_i) \rightarrow C((SP)_i)$ tal que

- 1) $\phi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_i$;
- 2) $\phi(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}((SP)_i)$;
- 3) $\phi|_{\text{Cono}(S^1)} = f$; y

4) $\phi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_i) \cup C(S^1, (SP)_i)$, en donde $q = (0, 0)$.

Definamos la función $h : Cono((SP)_i^2) \longrightarrow C((SP)_i^2)$ como

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t), & \text{si } (x, t) \in Cono((SP)_0); \\ \phi(x, t), & \text{si } (x, t) \in Cono((SP)_i), \end{cases}$$

para cada $(x, t) \in Cono((SP)_i^2)$.

Notemos que h es continua en $Cono((SP)_0)$ y en $Cono((SP)_i)$. Además, $Cono((SP)_0) \cap Cono((SP)_1) = Cono(S^1)$. Puesto que $\varphi|_{Cono(S^1)} = f = \phi|_{Cono(S^1)}$, tenemos que h se pega bien. Concluimos que h es continua.

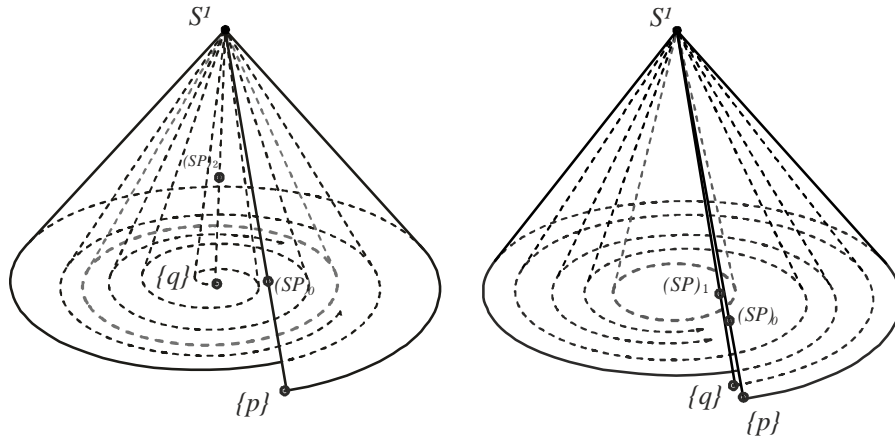
Veamos que h es inyectiva. Sean $(x, t), (y, s) \in Cono((SP)_i^2)$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Si $(x, t), (y, s) \in Cono((SP)_0)$, o bien $(x, t), (y, s) \in Cono((SP)_i)$, la inyectividad de φ y ϕ , respectivamente, muestra que $(x, t) = (y, s)$.

Supongamos ahora que, sin pérdida de generalidad, $(x, t) \in Cono((SP)_0)$ y $(y, s) \in Cono((SP)_1)$. Entonces $h(x, t) = \varphi(x, t) \in C((SP)_0)$ y $h(y, s) = \phi(y, s) \in C((SP)_1)$. Como $h(x, t) = h(y, s)$ y $C((SP)_0) \cap C((SP)_1) = C(S^1)$, tenemos, en particular, que $h(y, s) \in C(S^1)$. Como $\phi|_{Cono(S^1)}$ es un homeomorfismo entre $Cono(S^1)$ y $C(S^1)$, tenemos que $(y, s) \in Cono(S^1)$. Por tanto, $h(y, s) = \varphi(y, s)$. La inyectividad de φ muestra que $h(y, s) = h(x, t)$.

Concluimos que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff. Observemos que, si $p = (2\cos(1), 2\sin(1))$, entonces $h(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$. Hemos probado que h es un encaje tal que

- 1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_i^2$;
- 2) $h(v) = S^1$;
- 3) $h(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$;
- 4) $h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_i) \cup C(S^1, (SP)_i)$;
- 5) $h(x, t) \in C((SP)_0)$, si $(x, t) \in Cono((SP)_0)$;
- 6) $h(x, t) \in C((SP)_i)$, si $(x, t) \in Cono((SP)_i)$.

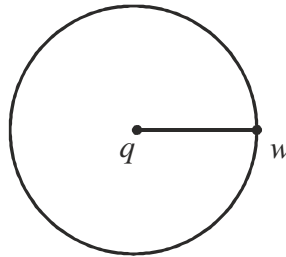
Intuitivamente, $C((SP)_0) \cup C((SP)_i)$ se obtiene de pegar los modelos de $C((SP)_0)$ y $C((SP)_i)$ en $C(S^1)$.



Esto termina la prueba de que $(SP)_i^2$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_i^2)$. ■

Proposición 3.28 $(SP)_3^2$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_3^2)$. Más aún, existe un encaje $h : \text{Cono}((SP)_3^2) \rightarrow C((SP)_3^2)$ tal que

- (1) $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_3^2$;
- (2) $h(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}((SP)_3^2)$;
- (3) $h(\{(2\cos(1), 2\sin(1))\} \times [0, 1]) = C((2\cos(1), 2\sin(1)), (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$;
- (4) $h(\{(0, 0)\} \times [0, 1]) = C((0, 0), (SP)_3) \cup \{(SP)_3 \cup f((1, 0), t) : t \in [0, 1]\} \cup C(S^1, (SP)_3)$;
- (5) $h(x, t) \in C((SP)_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_0)$;
- (6) $h(x, t) \in C((SP)_3 \cup S^1)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_3 \cup S^1)$.

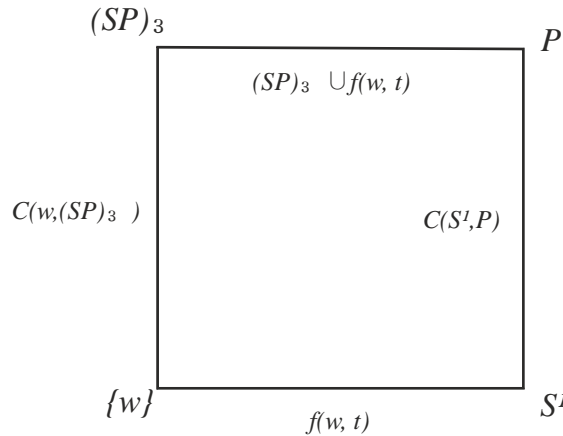


Demostación. Sean $P = (SP)_3 \cup S^1$, $q = (0, 0)$ y $w = (1, 0)$. Sea $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow C(S^1)$ el arco ordenado en $C(S^1)$, de $\{w\}$ a S^1 definido como $\alpha_1(t) = \varphi(w, t) = f(w, t)$. Sea $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow C((SP)_3)$ el arco ordenado en $C((SP)_3)$ de $\{w\}$ a $(SP)_3$. Definamos la función $\alpha : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C(P)$ como

$$\alpha(s, t) = \alpha_1(s) \cup \alpha_2(t).$$

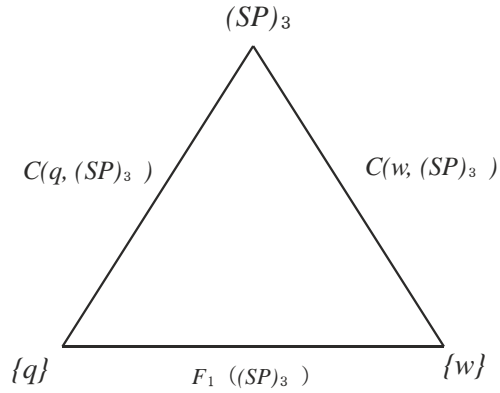
Notemos que α es un encaje. Entonces $\Lambda = \text{Im } \alpha$ es un cuadrado. Veamos quiénes quedan en la frontera del cuadrado.

- (1) $\alpha(\{0\} \times [0, 1]) = \alpha_2([0, 1]) = C(w, (SP)_3)$;
- (2) $\alpha([0, 1] \times \{1\}) = \{\alpha_1(s) \cup (SP)_3 : s \in [0, 1]\} = \{(SP)_3 \cup f((1, 0), t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, $\alpha([0, 1] \times \{1\})$ es el arco ordenado en $C(P)$, de $(SP)_3$ a P , de manera que $(SP)_3$ crece de manera simétrica en S^1 .
- (3) $\alpha(\{1\} \times [0, 1]) = \{S^1 \cup \alpha_2(t) : t \in [0, 1]\} = C(S^1, P)$.
- (4) $\alpha([0, 1] \times \{0\}) = \alpha_1([0, 1]) = f(\{w\} \times [0, 1])$ es el arco ordenado en $C(S^1)$, de $\{w\}$ a S^1 , de manera que w crece de manera simétrica hacia S^1 .



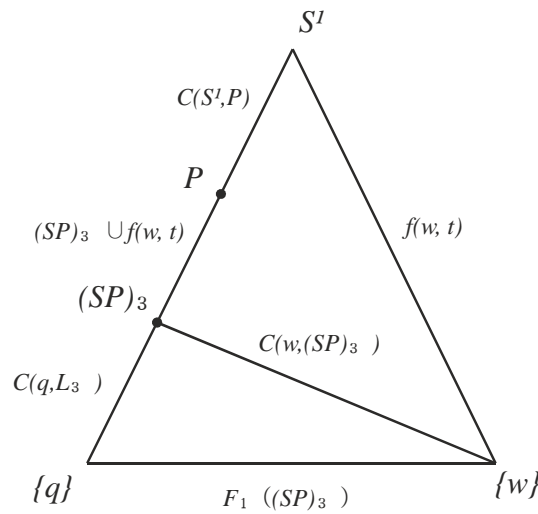
Sabemos que $C((SP)_3)$ es homeomorfo a un triángulo que une los elementos $\{q\}$, $\{w\}$ y $(SP)_3$, en donde los lados del triángulo quedan representados de la siguiente manera.

- (1) El lado que une los elementos $\{q\}$ y $\{w\}$ es $F_1((SP)_3)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{q\}$ y $(SP)_3$ es $C(q, (SP)_3)$; y
- (3) el lado que une los elementos $\{w\}$ y $(SP)_3$ es $C(w, (SP)_3)$.

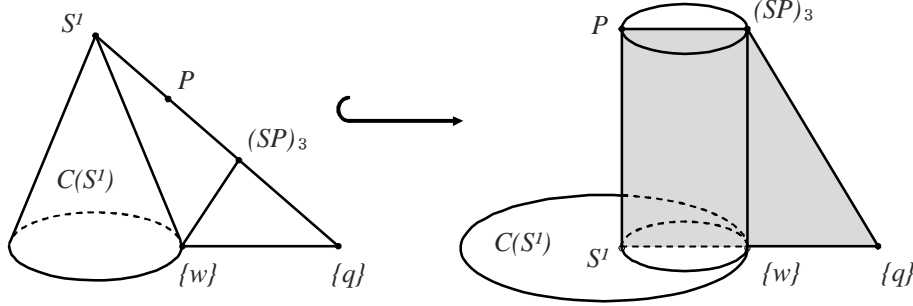


Sea $\Delta = \Lambda \cup C((SP)_3)$. Notemos que $\Lambda \cap C((SP)_3) = C(w, (SP)_3)$. Entonces, un modelo geométrico para Δ se obtiene de pegar Λ y $C((SP)_3)$ por el lado $C(w, (SP)_3)$. Así, Δ representa un triángulo cuyos vértices son los elementos $\{q\}$, $\{w\}$ y S^1 , de manera que los lados del triángulo quedan representados de la siguiente manera:

- (1) el lado que une los elementos $\{q\}$ y $\{w\}$ es $F_1((SP)_3)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{w\}$ y S^1 es $C(w, S^1)$; y
- (3) el lado que une los elementos $\{q\}$ y S^1 es $C(q, (SP)_3) \cup \alpha([0, 1] \times \{1\}) \cup C(S^1, P) = C(q, (SP)_3) \cup \{\alpha_1(s) \cup (SP)_3 : s \in [0, 1]\} \cup C(S^1, P)$.



Geoméricamente, Δ queda representado de la siguiente manera en el modelo de $C(P)$.



Entonces, existe un homeomorfismo natural $\phi : \text{Cono}((SP)_3) \longrightarrow \Delta$ de manera que

- (1) $\phi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_3$;
- (2) $\phi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_3) \cup \{\alpha_1(s) \cup (SP)_3 : s \in [0, 1]\} \cup C(S^1, P)$;
- (3) $\phi(\{w\} \times [0, 1]) = C(w, S^1)$.

Además, reparametrizando ϕ si es necesario, podemos suponer que $\phi(w, t) = \varphi(w, t)$ para cada $t \in [0, 1]$.

Definamos $h : \text{Cono}((SP)_3^2) \longrightarrow C((SP)_3^2)$ como

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}((SP)_0); \\ \phi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}((SP)_3). \end{cases}$$

Observemos que h se pega bien, pues $\phi(w, t) = \varphi(x, t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Por lo tanto, h es continua.

Veamos que h es inyectiva. Tomemos $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}((SP)_3^2)$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Si $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}((SP)_0)$, o bien $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}((SP)_3)$, la inyectividad de φ y ϕ , respectivamente, muestra que $(x, t) = (y, s)$.

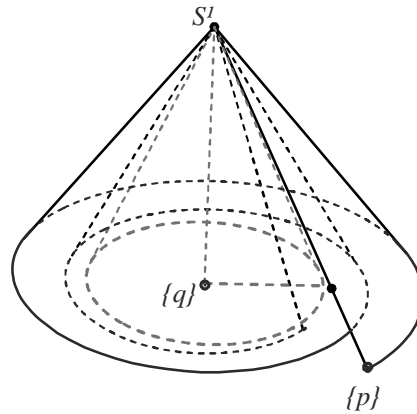
Supongamos ahora que, sin pérdida de generalidad, $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_0)$ y $(y, s) \in \text{Cono}((SP)_3)$. Entonces $h(x, t) = \varphi(x, t) \in C((SP)_0)$ y $h(y, s) = \phi(y, s) \in \Delta$. Como $h(x, t) = h(y, s)$ y $C((SP)_0) \cap \Delta \subset C(S^1)$, tenemos, en

particular, que $h(y, s) \in C(S^1)$. Como $\phi|_{Cono(S^1)}$ es un homeomorfismo entre $Cono(S^1)$ y $C(S^1)$, tenemos que $(y, s) \in Cono(S^1)$. Por tanto, $h(y, s) = \varphi(y, s)$. La inyectividad de φ muestra que $h(y, s) = h(x, t)$.

Concluimos que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, h es un encaje. Observemos que $h(\{p\} \times [0, 1]) = \varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$. Así, h cumple que

- 1) $h(x, 0) = \{0\}$ para cada $x \in S_3^2$,
- 2) $h(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $Cono(S_3^2)$,
- 3) $h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_3) \cup \{(SP)_3 \cup f(w, t) : t \in [0, 1]\} \cup C(S^1, (SP)_3)$,
- 4) $h(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$,
- (5) $h(x, t) \in C((SP)_0)$, si $(x, t) \in Cono((SP)_0)$, y
- (6) $h(x, t) \in C(P)$, si $(x, t) \in Cono(P)$.

Intuitivamente, $C((SP)_0) \cup \Delta$ se obtiene de pegar el modelo de $C((SP)_0)$ y el modelo de Δ por el arco $\{f(w, t) : t \in [0, 1]\}$.



■

Del Teorema 3.26 y las Proposiciones 3.27 y 3.28 se sigue la siguiente caracterización.

Teorema 3.29 *Sea X una compactación de la unión de dos rayos con una circunferencia como residuo. Entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a $(SP)_i^2$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

3.3. Compactaciones de la Recta Real

Sea $Z = f(\mathbb{R}^1) \cup Y$, donde $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow Z$ es un encaje, una compactación de \mathbb{R}^1 con Y como residuo. Llamaremos *conjuntos finales de la compactación* Z a los conjuntos $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_Z(f((-\infty, -n]))$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_Z(f([n, \infty)))$. Así, Z tiene dos finales (que pueden coincidir).

Sean $Y_+ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_Z(f([n, \infty)))$ y $Y_- = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}_Z(f((-\infty, -n]))$ los finales de la compactación Z . Observemos que Y_+ y Y_- son continuos, pues son intersección anidada de continuos. Además, si Y_+ y Y_- son ajenos, entonces ambos son subcontinuos terminales de Z . Entonces, si Z es un continuo cono-encajable en $C(Z)$, por el Teorema 2.6, uno de ellos es degenerado. En cuyo caso, Z es una compactación del rayo. Por esto, vamos a considerar las compactaciones Z , de la recta real, tales que $Y_+ \cap Y_- \neq \emptyset$.

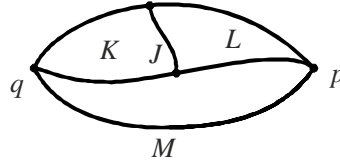
Notemos que si $g = f|_{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)}$, entonces $X = g((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) \cup Y$ es una compactación de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, que tiene a Y como residuo. Además, notemos que $X \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en Z . Entonces podemos aplicar los resultados obtenidos en la sección anterior.

Además, utilizaremos el siguiente lema. La demostración del mismo está basada en ideas que usó el Dr. Gerardo Acosta en su tesis doctoral.

Lema 3.30 *Dados un continuo X y $p, q \in X$, sean $M, Y \in C(X) \setminus \{X\}$ y $J, K, L \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tales que $Y = K \cup L$, $K \cap L = J$, Y es irreducible entre p y q , K es irreducible entre q y J , L es irreducible entre p y J , M es un arco con extremos p y q y $M \cap Y = \{p, q\}$. Sean $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow C(L)$ un arco ordenado en $C(L)$ de $\{p\}$ a L , $\beta_1 : [0, 1] \rightarrow C(K)$ un arco ordenado*

en $C(K)$, de $\{q\}$ a K , $\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow C(L)$ un arco ordenado en $C(L)$ de J a L y $\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow C(K)$ un arco ordenado en $C(K)$ de J a K . Entonces existe un encaje $\eta : \text{Cono}(M) \longrightarrow C(X)$ tal que

- (1) $\eta(x, 0) = \{x\}$, para cada $x \in M$;
- (2) $\eta(\{p\} \times [0, 1]) = \alpha_1([0, 1]) \cup \gamma_1([0, 1])$;
- (3) $\eta(\{q\} \times [0, 1]) = \beta_1([0, 1]) \cup \gamma_2([0, 1])$;
- (4) $\eta(v) = J$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(M)$;
- (5) $\eta(x, t) \notin C(L) \cup C(K)$, para cada $x \notin \{p, q\}$ y $t \in [0, 1]$.



Demostración. Observemos primero que, si $t > 0$, entonces $J \subsetneq \gamma_1(t)$. Entonces, como $K \cap L = J$, tenemos que $K \cap \gamma_1(t) = J$ y $\gamma_1(t) \not\subseteq K$. De la misma manera, si $s > 0$, entonces $J \subsetneq \gamma_2(s)$. Entonces, como $K \cap L = J$, tenemos que $L \cap \gamma_2(s) = J$ y $\gamma_2(s) \not\subseteq L$.

Ahora bien, si $J \subset \alpha_1(t)$ para alguna $t \in [0, 1]$, entonces $\alpha_1(t) \in C(L)$ es tal que $\{p\}, J \subset \alpha_1(t)$. Por la irreducibilidad de L , tenemos que $\alpha_1(t) = L$ y por tanto, $t = 1$. De la misma manera, si $p \in \gamma_1(t)$ para alguna $t \in [0, 1]$, entonces $\gamma_1(t) \in C(L)$ es tal que $\{p\}, J \subset \gamma_1(t)$. Por la irreducibilidad de L , tenemos que $\gamma_1(t) = L$ y por tanto, $t = 1$. Concluimos que $\text{Im } \alpha_1 \cap \text{Im } \gamma_1 = \{L\}$. Así que $\text{Im } \alpha_1 \cup \text{Im } \gamma_1$ es un arco en $C(L)$ de $\{p\}$ a J , y que pasa por L . Un razonamiento análogo muestra que $\text{Im } \beta_1 \cap \text{Im } \gamma_2 = \{K\}$ y por tanto $\text{Im } \beta_1 \cup \text{Im } \gamma_2$ es un arco en $C(K)$ de $\{q\}$ a J y que pasa por K .

Sea $\rho_1 : [0, 1] \longrightarrow C(Y)$ la función definida como

$$\rho_1(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ L \cup \gamma_2(2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos que $\alpha_1(2 \cdot \frac{1}{2}) = \alpha_1(1) = L$ y $\gamma_2(2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = \gamma_2(0) = J$. Por lo tanto, $\alpha_1(1) = L = L \cup J = L \cup \gamma_2(0)$. Por lo tanto, ρ_1 se pega bien. La

continuidad de α_1 y γ_2 implican la de ρ_1 . Observemos, además, que $\rho_1(1) = L \cup \gamma_2(1) = L \cup K = Y$. Puesto que α_1 es un arco ordenado en $C(L)$ de $\{p\}$ a L y γ_2 es un arco ordenado en $C(K)$ de J a K tal que $\gamma_2(t) \not\subseteq L$ si $t > 0$, tenemos que ρ_1 es un arco ordenado en $C(Y)$, de $\{p\}$ a Y , que pasa por L . Observemos que si $t > \frac{1}{2}$, entonces $\rho_1(t) \not\subseteq L$.

Sea $\rho_2 : [0, 1] \longrightarrow C(Y)$ la función definida como

$$\rho_2(t) = \begin{cases} \beta_1(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ K \cup \gamma_1(2t-1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos que $\beta_1(2\frac{1}{2}) = \beta_1(1) = K$ y $\gamma_1(2\frac{1}{2}-1) = \gamma_1(0) = J$. Por lo tanto, $\beta_1(1) = K = K \cup J = K \cup \gamma_1(0)$. Por lo tanto, ρ_2 se pega bien. La continuidad de β_1 y γ_1 implican la de ρ_2 . Observemos, además, que $\rho_2(1) = K \cup \gamma_1(1) = K \cup L = Y$. Puesto que β_1 es un arco ordenado en $C(K)$ de $\{q\}$ a K y γ_1 es un arco ordenado en $C(L)$ de J a L tal que $\gamma_1(t) \not\subseteq K$ si $t > 0$, tenemos que ρ_2 es un arco ordenado en $C(Y)$, de $\{q\}$ a Y , que pasa por K . Observemos que si $t > \frac{1}{2}$, entonces $\rho_2(t) \not\subseteq K$.

Si $q \in \rho_1(t)$ para algún $t \in [0, 1]$, entonces $\rho_1(t) \in C(Y)$ es tal que $p, q \in \rho_1(t)$. Por la irreducibilidad de Y , tenemos que $\rho_1(t) = Y$ y por tanto $t = 1$. De manera similar, Si $p \in \rho_2(t)$ para algún $t \in [0, 1]$, entonces $\rho_2(t) \in C(Y)$ es tal que $p, q \in \rho_2(t)$. Por la irreducibilidad de Y , tenemos que $\rho_2(t) = Y$ y por tanto $t = 1$. Así que $\text{Im } \rho_1 \cap \text{Im } \rho_2 = \{Y\}$.

Sea $\alpha_2 : [0, 1] \longrightarrow C(M)$ el arco ordenado en $C(M)$ de $\{p\}$ a M . Observemos que si $t > 0$, entonces $\alpha_2(t) \not\subseteq Y$. Además, $\alpha_2([0, 1]) = C(p, M)$.

Sea $\mathcal{C}_p = \{A \cup B \in C(X) : A \in \text{Im } \rho_1, B \in \text{Im } \alpha_2\}$. Notemos que si $A \in \text{Im } \rho_1$ y $B \in \text{Im } \alpha_2$, entonces $p \in A \cap B$ y por tanto $A \cup B \in C(p, X) \subset C(X)$. Construyamos un modelo geométrico para \mathcal{C}_p . Definamos la función $\alpha : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}_p$ como

$$\alpha(s, t) = \rho_1(s) \cup \alpha_2(t).$$

Notemos que α es un homeomorfismo. Así que \mathcal{C}_p es un cuadrado. Veamos quiénes se envían a la frontera del cuadrado.

$$(1) \alpha(\{0\} \times [0, 1]) = \alpha_2([0, 1]) = C(p, M),$$

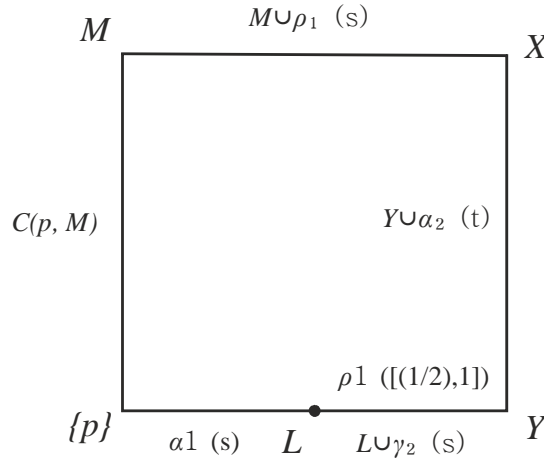
$$(2) \alpha([0, 1] \times \{1\}) = \{\rho_1(s) \cup \alpha_2(1) : s \in [0, 1]\} = \{\rho_1(s) \cup M : s \in [0, 1]\}.$$

Es decir, $\alpha([0, 1] \times \{1\})$ es un arco ordenado en $C(X)$, de M a X , de manera que M crece sólo del lado de p y siguiendo al arco ρ_1 ,

$$(3) \alpha(\{1\} \times [0, 1]) = \{\rho_1(1) \cup \alpha_2(t) : t \in [0, 1]\} = \{Y \cup \alpha_2(t) : t \in [0, 1]\}.$$

Es decir, $\alpha(\{1\} \times [0, 1])$ es un arco ordenado en $C(X)$, de Y a X , de manera que Y crece sólo del lado de p ,

$$(4) \alpha([0, 1] \times \{0\}) = \rho_1([0, 1]).$$



Observemos que si $t > 0$, entonces $\alpha(s, t) = \rho_1(s) \cup \alpha_2(t) \not\subseteq Y$ para cada $s \in [0, 1]$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_p \cap C(Y) = \text{Im } \rho_1$. Así que $\mathcal{C}_p \cap C(L) = \text{Im } \alpha_1$ y $\mathcal{C}_p \cap C(K) = \emptyset$. Por otro lado, tomemos $A \in \text{Im } \rho_1$ y $B \in \text{Im } \alpha_2$. Puesto que $p \in A \cap B$ y Y, M son irreducibles entre p y q , si $q \in B$ entonces $B = M$; si $q \in A$, entonces $A = Y$; y si $q \in A \cap B$, entonces $A \cup B = X$.

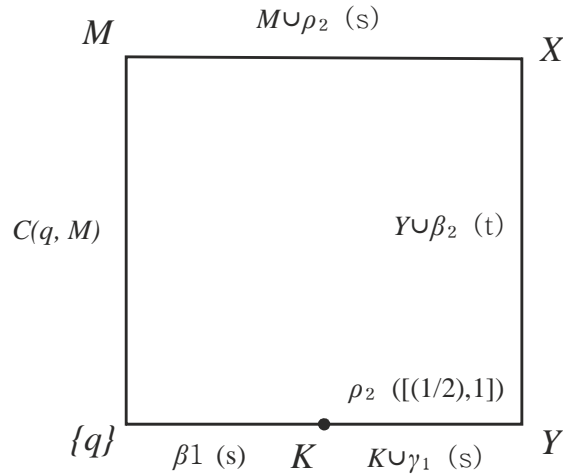
Ahora, sea $\beta_2 : [0, 1] \rightarrow C(M)$, el arco ordenado en $C(M)$, de $\{q\}$ a M . Notemos que si $t > 0$, entonces $\beta_2(t) \not\subseteq Y$. Además, $\beta_2([0, 1]) = C(q, M)$.

Sea $\mathcal{C}_q = \{A \cup B \in C(X) : A \in \text{Im } \rho_2, B \in \text{Im } \beta_2\}$. Notemos que si $A \in \text{Im } \rho_2$ y $B \in \text{Im } \beta_2$, entonces $q \in A \cap B$ y por tanto $A \cup B \in C(q, X) \subset C(X)$. Construyamos un modelo geométrico para \mathcal{C}_q . Definamos la función $\beta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_q$ como

$$\beta(s, t) = \rho_2(s) \cup \beta_2(t).$$

Notemos que β es un homeomorfismo. Así que \mathcal{C}_q es un cuadrado. Veamos quiénes se envían a la frontera del cuadrado.

- (1) $\beta(\{0\} \times [0, 1]) = \beta_2([0, 1]) = C(q, M)$,
- (2) $\beta([0, 1] \times \{1\}) = \{\rho_2(s) \cup M : s \in [0, 1]\}$. Es decir, $\beta([0, 1] \times \{1\})$ es un arco ordenado en $C(X)$, de M a X , de manera que M crece sólo del lado de q y siguiendo al arco ρ_2 ,
- (3) $\beta(\{1\} \times [0, 1]) = \{\rho_2(1) \cup \beta_2(t) : t \in [0, 1]\} = \{Y \cup \beta_2(t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, $\beta(\{1\} \times [0, 1])$ es un arco ordenado en $C(X)$, de Y a X , de manera que Y crece sólo del lado de q ,
- (4) $\beta([0, 1] \times \{0\}) = \rho_2([0, 1])$.



Observemos que si $t > 0$, entonces $\beta(s, t) = \rho_2(s) \cup \beta_2(t) \not\subseteq Y$ para cada $s \in [0, 1]$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_q \cap C(Y) = \text{Im } \rho_2$. Así que $\mathcal{C}_q \cap C(K) = \text{Im } \beta_1$ y $\mathcal{C}_q \cap C(L) = \emptyset$. Por otro lado, tomemos $A \in \text{Im } \rho_2$ y $B \in \text{Im } \beta_2$. Puesto que $q \in A \cap B$ y Y, M son irreducibles entre p y q , si $p \in B$, entonces $B = M$; si $p \in A$, entonces $A = Y$, y si $p \in A \cap B$, entonces $A \cup B = X$. Entonces $\mathcal{C}_p \cap \mathcal{C}_q = \{M, Y, X\}$.

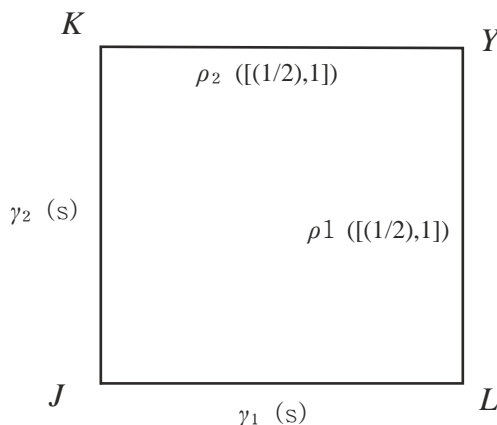
Consideremos el conjunto $\mathcal{C}_J = \{A \cup B \in C(Y) : A \in \text{Im } \gamma_1 \text{ y } B \in \text{Im } \gamma_2\}$. Notemos que si $A \in \text{Im } \gamma_1$ y $B \in \text{Im } \gamma_2$, entonces $J \subset A \cap B$. Por lo tanto, $A \cup B \in C(J, Y) \subset C(Y)$. Además, si $s, t > 0$, entonces $\gamma_1(s) \not\subseteq K$ y $\gamma_2(t) \not\subseteq L$. Así que $\gamma_1(s) \cup \gamma_1(t) \not\subseteq K$ y $\gamma_1(s) \cup \gamma_1(t) \not\subseteq L$ para cualesquiera $s, t > 0$.

Construyamos un modelo geométrico para \mathcal{C}_J . Definamos la función $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}_J$ como

$$\gamma(s, t) = \gamma_1(s) \cup \gamma_2(t).$$

Notemos que γ es un homeomorfismo. Así que \mathcal{C}_J es un cuadrado. Veamos quiénes se envían a la frontera del cuadrado.

- (1) $\gamma(\{0\} \times [0, 1]) = \gamma_2([0, 1])$, es un arco ordenado en $C(K)$, de J a K ,
- (2) $\gamma([0, 1] \times \{1\}) = \{\gamma_1(s) \cup K : s \in [0, 1]\} = \rho_2\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ es un arco ordenado en $C(Y)$, de K a Y , de manera que K crece hasta tener a p ,
- (3) $\gamma(\{1\} \times [0, 1]) = \{L \cup \gamma_2(t) : t \in [0, 1]\} = \rho_1\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ es un arco ordenado en $C(Y)$, de L a Y , de manera que L crece hasta tener a q ,
- (4) $\gamma([0, 1] \times \{0\}) = \gamma_1([0, 1])$ es un arco ordenado en $C(L)$ de J a L .



Observemos entonces que $\mathcal{C}_J \cap C(K) = \text{Im } \gamma_2$ y $\mathcal{C}_J \cap C(L) = \text{Im } \gamma_1$, es decir, \mathcal{C}_J interseca a $C(L) \cup C(K)$ cuando $s = 0$ o $t = 0$.

Ahora consideremos el conjunto

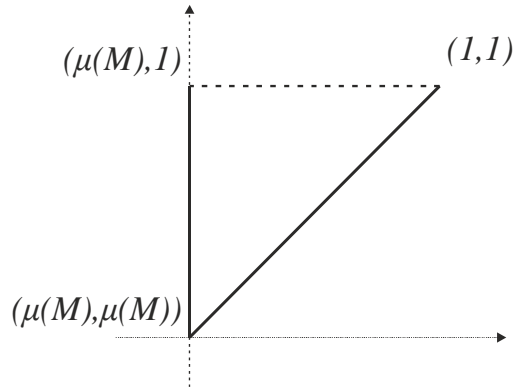
$$\mathcal{C}_M = \{A_p \cup A_q \cup M \in C(X) : A_p \in \text{Im } \rho_1 \text{ y } A_q \in \text{Im } \rho_2\}.$$

Notemos que si $A_p \in \text{Im } \rho_1$ y $A_q \in \text{Im } \rho_2$, entonces $p \in M \cap A_p$ y $q \in M \cap A_q$. Por lo tanto, $A_p \cup A_q \cup M \in C(M, X) \subset C(X)$. Por tanto, $A_p \cup A_q \cup M \not\subseteq Y$ y $\mathcal{C}_M \cap C(Y) = \emptyset$. Además, si $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, entonces $A_p \cup A_q \in C(Y)$ es tal que $p, q \in A_p \cup A_q$. La irreducibilidad de Y implica que $A_p \cup A_q = Y$ y, por

tanto, $A_p \cup A_q \cup M = X$. Construyamos un modelo geométrico para \mathcal{C}_M . Sea $\mu : C(X) \longrightarrow [0, 1]$ una función de Whitney tal que $\mu(X) = 1$.

Para hacer el modelo de \mathcal{C}_M , consideremos el subconjunto \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 que se obtiene de remover del triángulo con vértices $(\mu(M), \mu(M))$, $(\mu(M), 1)$ y $(1, 1)$, el lado que une a los puntos $(\mu(M), 1)$ y $(1, 1)$. Es decir,

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mu(M) \leq x \leq y < 1\}.$$



Además, consideremos al conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{C}_M \setminus \{X\}$. Entonces, para $A \in \mathcal{A}$, A se puede escribir como $A = M \cup A_p \cup A_q$, donde $A_p \in \text{Im } \rho_1$, $A_q \in \text{Im } \rho_2$ y $A_p \cap A_q = \emptyset$. Notemos, además, que $A \cap Y = A_p \cup A_q$ y por tanto, A_p y A_q son las componentes de $A \cap Y$ tales que $p \in A_p$ y $q \in A_q$. Definamos la función $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{T}$ como

$$g(A) = (\mu(M \cup A_p), \mu(A)).$$

Veamos que g está bien definida. Sea $A \in \mathcal{A}$. Entonces $A = M \cup A_p \cup A_q$. Puesto que $M \subset M \cup A_p \subsetneq X$, se tiene que

$$\mu(M) \leq \mu(M \cup A_p) \leq \mu(A) < 1.$$

Así que $g(A) \in \mathcal{T}$. Esto muestra que g está bien definida.

Ahora veamos que g es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$. Entonces $A = M \cup A_p \cup A_q$ y $B = M \cup B_p \cup B_q$. Puesto que $\text{Im } \rho_1$ es un

arco ordenado en $C(Y)$, entonces $A_p \subset B_p$ o bien, $B_p \subset A_p$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $A_p \subset B_p$. Si $A_p \subsetneq B_p$, entonces $\mu(M \cup A_p) < \mu(M \cup B_p)$. Así que $g(A) \neq g(B)$. Si $A_p = B_p$, entonces $A = M \cup A_p \cup A_q$ y $B = M \cup A_p \cup B_q$. Ahora bien, como $\text{Im } \rho_2$ es un arco ordenado en $C(Y)$, tenemos que $A_q \subset B_q$ o bien, $B_q \subset A_q$. Por lo tanto, $A \subset B$ o bien, $B \subset A$. Más aún, como $A \neq B$, entonces $A \subsetneq B$ o bien, $B \subsetneq A$. En ambos casos tenemos que $\mu(A) \neq \mu(B)$. Así que $g(A) \neq g(B)$. Esto prueba que g es inyectiva.

Veamos que g es continua. Tomemos una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de \mathcal{A} y $A \in \mathcal{A}$ tales que $\lim A_n = A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = M \cup A_p^n \cup A_q^n$ y $A = M \cup A_p \cup A_q$. Veamos que $\lim A_p^n = A_p$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $s_n, t_n \in [0, 1]$ tales que $\rho_1(s_n) = A_p^n$ y $\rho_2(t_n) = A_q^n$. Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos suponer que existen $s, t \in [0, 1]$ tales que $\lim s_n = s$ y $\lim t_n = t$. Por la continuidad de ρ_1 y ρ_2 tenemos que $\lim \rho_1(s_n) = \rho_1(s)$ y $\lim \rho_2(t_n) = \rho_2(t)$. Así que, del Lema 1.29 se sigue que $A = \lim A_n = \lim (M \cup A_p^n \cup A_q^n) = \lim (M \cup \rho_1(s_n) \cup \rho_2(t_n)) = M \cup \rho_1(s) \cup \rho_2(t)$. Concluimos que $\lim A_p^n = \rho_1(s) = A_p$ y $\lim A_q^n = \rho_2(t) = A_q$. Del Lema 1.29, tenemos que $\lim (M \cup A_p^n) = M \cup A_p$. Por la continuidad de μ , $\lim \mu(M \cup A_p^n) = \mu(M \cup A_p)$ y $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$. De aquí que

$$\begin{aligned} \lim g(A_n) &= \lim(\mu(M \cup A_p^n), \mu(A_n)) \\ &= (\mu(M \cup A_p), \mu(A)) = g(A). \end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad de g .

Ahora veamos que g es suprayectiva. Sea $(s, t) \in \mathcal{T}$. Entonces $\mu(M) \leq s \leq t < 1$. Puesto que $\mu(M) \leq s$, existe $A_p \in \text{Im } \rho_1$ tal que $\mu(M \cup A_p) = s < 1$. Entonces $M \cup A_p \subsetneq X$. Así que $A_p \subsetneq Y$. Como Y es irreducible entre p y q , tenemos que $q \notin A_p$.

Definamos la función $\beta_3 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\beta_3(r) = M \cup A_p \cup \rho_2(r)$. Entonces β_3 es continua. Notemos que $\mu(\beta_3(0)) = \mu(M \cup A_p \cup \{q\}) = s$ y $\mu(\beta_3(1)) = \mu(M \cup A_p \cup Y) = \mu(X) = 1$. Entonces, existe $r_0 \in [0, 1]$ tal que $\mu(\beta_3(r_0)) = t$. Sea $C = \beta_3(r_0) = M \cup A_p \cup \rho_2(r_0)$. De aquí que $\mu(C) = t < 1$. Por lo tanto, $C \subsetneq X$. Así que $A_p \cup \rho_2(r_0) \subsetneq Y$. Por la irreducibilidad de Y entre p y q , tenemos que $A_p \cap \rho_2(r_0) = \emptyset$. Luego, $C \cap Y = A_p \cup \rho_2(r_0)$. Se

sigue que $C \in \mathcal{A}$, $C = M \cup A_p \cup \rho_2(r_0)$ donde $A_p \in \text{Im } \rho_1$ y $\rho_2(r_0) \in \text{Im } \rho_2$. Por tanto,

$$g(C) = (\mu(M \cup A_p), \mu(C)) = (s, t).$$

Esto prueba que g es suprayectiva.

Veamos que g^{-1} es continua. Tomemos una sucesión $(s_n, t_n)_{n=1}^{\infty}$ de \mathcal{T} y $(s, t) \in \mathcal{T}$ tales que $\lim(s_n, t_n) = (s, t)$. Sea $A = M \cup A_p \cup A_q \in \mathcal{A}$ tal que $g^{-1}(s, t) = A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = M \cup A_p^n \cup A_q^n \in \mathcal{A}$ tal que $g^{-1}(s_n, t_n) = A_n$. Entonces, $\mu(M \cup A_p) = s$ y $\mu(A) = t$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(M \cup A_p^n) = s_n$ y $\mu(A_n) = t_n$.

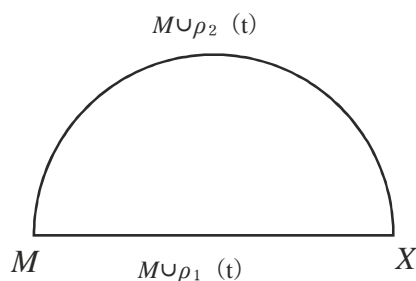
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n, y_n \in [0, 1]$ tales que $\rho_1(x_n) = A_p^n$ y $\rho_2(y_n) = A_q^n$. Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos suponer que existen $x, y \in [0, 1]$ tales que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Entonces, por la continuidad de ρ_1 y ρ_2 , tenemos que $\lim \rho_1(x_n) = \rho_1(x)$ y $\lim \rho_2(y_n) = \rho_2(y)$. Se sigue del Lema 1.29 que $\lim A_n = \lim M \cup A_p^n \cup A_q^n = \lim M \cup \rho_1(x_n) \cup \rho_2(y_n) = M \cup \rho_1(x) \cup \rho_2(y)$.

Sea $B = M \cup \rho_1(x) \cup \rho_2(y)$. Veamos que $B = A = M \cup A_p \cup A_q$. Por el Lema 1.29, tenemos que $\lim M \cup A_p^n = \lim M \cup \rho_1(x_n) = M \cup \rho_1(x)$. Como $\mu(M \cup \rho_1(x_n)) = s_n$ y $\mu(M \cup \rho_1(x_n) \cup \rho_2(y_n)) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim \mu(M \cup \rho_1(x_n)) = \mu(M \cup \rho_1(x)) = s = \mu(M \cup A_p)$ y $\lim \mu(M \cup \rho_1(x_n) \cup \rho_2(y_n)) = \mu(B) = t = \mu(A)$. Puesto que $\text{Im } \rho_1$ es un arco ordenado y $\rho_1(x), A_p \in \text{Im } \rho_1$, se tiene que $M \cup A_p \subset M \cup \rho_1(x)$ o $M \cup \rho_1(x) \subset M \cup A_p$. Pero ambos conjuntos tienen el mismo valor bajo la función de Whitney μ . Esto implica que $M \cup A_p = M \cup \rho_1(x)$. Por otro lado, $\text{Im } \rho_2$ es un arco ordenado tal que $A_q, \rho_2(y) \in \text{Im } \rho_2$. Entonces $A_q \subset \rho_2(y)$ o $\rho_2(y) \subset A_q$. Como $M \cup A_p = M \cup \rho_1(x)$, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Pero ambos conjuntos tienen el mismo valor bajo la función de Whitney μ . Por lo tanto, $A = B$. Esto muestra que $\lim A_n = A$ y por tanto, que g^{-1} es continua.

Hemos mostrado que \mathcal{A} es homeomorfo a \mathcal{T} . Por tanto, la compactación unipuntual de \mathcal{A} , que es \mathcal{C}_M , es homeomorfa a la compactación unipuntual de \mathcal{T} , que es el semidisco K_1 en \mathbb{R}^2 que tiene por diámetro un arco que une los puntos $(\mu(M), \mu(M))$ y $(1, 1)$. Entonces, el modelo geométrico de \mathcal{C}_M es un semidisco, en donde

a) el diámetro del semidisco es el conjunto $\{M \cup \rho_1(t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, es un arco ordenado de M a X , de manera que M crece del lado de p ;

b) el arco del semidisco es el conjunto $\{M \cup \rho_2(t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, es un arco ordenado de M a X , de manera que M crece sólo del lado de q .



Observemos que $\mathcal{C}_M \cap C(L) = \emptyset = \mathcal{C}_M \cap C(K)$.

Ahora consideremos al conjunto

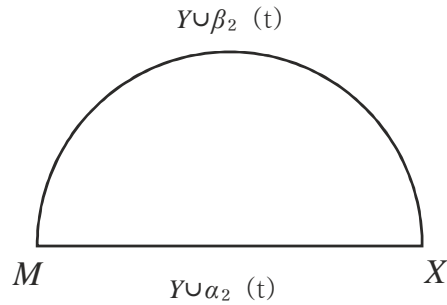
$$\mathcal{C}_Y = \{Y \cup B_p \cup B_q \in C(X) : B_p \in \alpha_2 \text{ y } B_q \in \beta_2\}.$$

Observemos que si $B_p \in \alpha_2$ y $B_q \in \beta_2$, entonces $p \in Y \cap B_p$ y $q \in Y \cap B_q$. Por lo tanto, $Y \cup B_p \cup B_q \in C(Y, X) \subset C(X)$ y $\mathcal{C}_Y \cap C(K) = \emptyset = \mathcal{C}_Y \cap C(L)$. Además, si $B_p \cap B_q \neq \emptyset$, entonces $B_p \cup B_q \in C(M)$ es tal que $p, q \in B_p \cup B_q$. Por la irreducibilidad de M entre p y q , tenemos que $B_p \cup B_q = M$.

Para construir un modelo geométrico de \mathcal{C}_Y , podemos seguir un razonamiento similar al que hicimos para construir el modelo geométrico de \mathcal{C}_M . Entonces, un modelo geométrico para \mathcal{C}_Y es un semidisco en donde

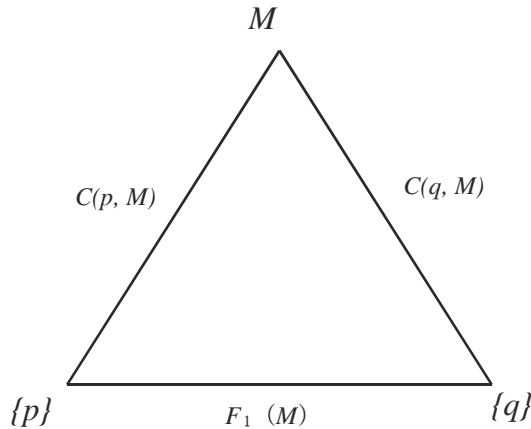
(a) el diámetro del semidisco es el conjunto $\{Y \cup \alpha_2(t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, es un arco ordenado en $C(X)$, de Y a X , de manera que Y crece del lado de p ;

(b) el arco del semidisco es el conjunto $\{Y \cup \beta_2(t) : t \in [0, 1]\}$. Es decir, es un arco ordenado en $C(X)$, de Y a X , de manera que Y crece sólo del lado de q .

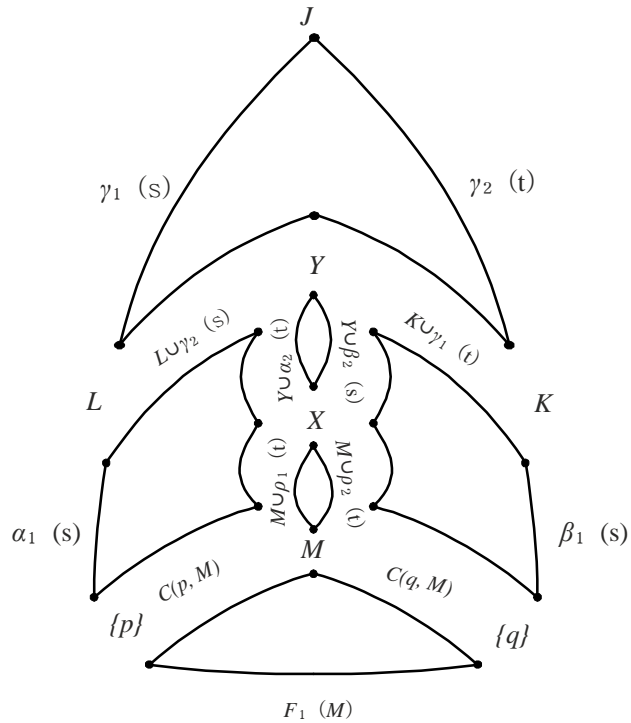


Vamos a considerar también al hiperespacio $C(M)$. Puesto que M es un arco, sabemos que un modelo geométrico para $C(M)$ es un triángulo cuyos vértices son $\{p\}$, $\{q\}$ y M , donde sus lados quedan representados de la siguiente manera.

- (1) El lado que une los elementos $\{p\}$ y $\{q\}$ es $F_1(M)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{p\}$ y M es $C(p, M) = \alpha_2([0, 1])$;
- (3) el lado que une los elementos $\{q\}$ y M es $C(q, M) = \beta_2([0, 1])$.

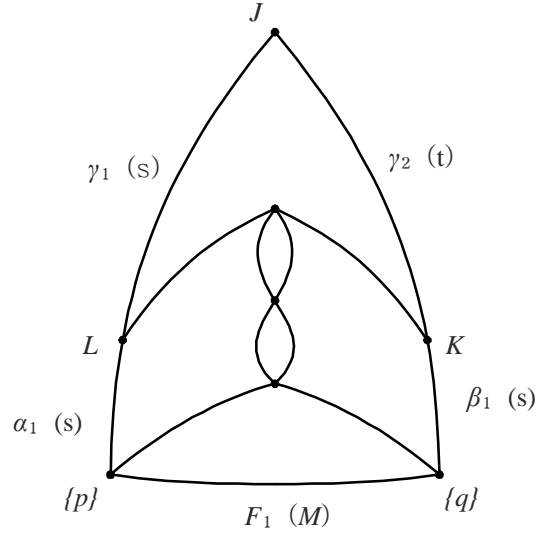


Sea $\Delta = \mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}_q \cup \mathcal{C}_J \cup \mathcal{C}_M \cup \mathcal{C}_Y \cup C(M)$. Observemos que $\mathcal{C}_p \cap \mathcal{C}_q = \{M, Y, X\}$. Además, como $\mathcal{C}_M \subset C(M, X)$ y $\mathcal{C}_Y \subset C(Y, X)$, entonces $\mathcal{C}_M \cap C(M) = \{M\}$, $\mathcal{C}_Y \cap \mathcal{C}_M = \{X\}$ y $\mathcal{C}_Y \cap C(M) = \emptyset$. Además, como $\mathcal{C}_J \subset C(J, Y)$, se tiene que $\mathcal{C}_J \cap \mathcal{C}_M = \emptyset = \mathcal{C}_J \cap C(M)$ y $\mathcal{C}_J \cap \mathcal{C}_Y = \{Y\}$.



Entonces, para obtener un modelo geométrico de Δ , podemos pegar los conjuntos \mathcal{C}_p , \mathcal{C}_q , \mathcal{C}_J , \mathcal{C}_M , \mathcal{C}_Y y $\mathcal{C}(M)$ de manera que formen un triángulo cuyos vértices son $\{p\}$, $\{q\}$ y J , en donde los lados quedan representados de la siguiente manera.

- (1) El lado que une los elementos $\{p\}$ y $\{q\}$ es $F_1(M)$;
- (2) el lado que une los elementos $\{p\}$ y J es $\text{Im } \alpha_1 \cup \text{Im } \gamma_1$;
- (3) el lado que une los elementos $\{q\}$ y J es $\text{Im } \beta_1 \cup \text{Im } \gamma_2$.



Además,

$$\begin{aligned}
 \Delta \cap C(L) &= (\mathcal{C}_p \cap C(L)) \cup (\mathcal{C}_q \cap C(L)) \cup (\mathcal{C}_J \cap C(L)) \\
 &\quad \cup (\mathcal{C}_M \cap C(L)) \cup (\mathcal{C}_Y \cap C(L)) \cup (C(M) \cap C(L)) \\
 &= \text{Im } \alpha_1 \cup \text{Im } \gamma_1 \cup \{\{p\}\} \cup \{\{q\}\} \\
 &= \text{Im } \alpha_1 \cup \text{Im } \gamma_1,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \Delta \cap C(K) &= (\mathcal{C}_p \cap C(K)) \cup (\mathcal{C}_q \cap C(K)) \cup (\mathcal{C}_J \cap C(K)) \\
 &\quad \cup (\mathcal{C}_M \cap C(K)) \cup (\mathcal{C}_Y \cap C(K)) \cup (C(M) \cap C(K)) \\
 &= \text{Im } \beta_1 \cup \text{Im } \gamma_2 \cup \{\{p\}\} \cup \{\{q\}\} \\
 &= \text{Im } \beta_1 \cup \text{Im } \gamma_2.
 \end{aligned}$$

Entonces existe un homeomorfismo natural $\eta : \text{Cono}(M) \longrightarrow \Delta$ tal que

- (1) $\eta(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in M$;
- (2) $\eta(\{p\} \times [0, 1]) = \text{Im } \alpha_1 \cup \text{Im } \gamma_1$;
- (3) $\eta(\{q\} \times [0, 1]) = \text{Im } \beta_1 \cup \text{Im } \gamma_2$;
- (4) $\eta(v) = J$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(M)$.

Además, puesto que $\Delta \cap C(L) = \text{Im } \alpha_1 \cup \text{Im } \gamma_1$ y $\Delta \cap C(K) = \text{Im } \beta_1 \cup \text{Im } \gamma_2$, tenemos que

$$(5) \eta(x, t) \notin C(L) \cup C(K) \text{ para cada } x \notin \{p, q\} \text{ y } t \in [0, 1].$$

Esto concluye la prueba del lema. ■

Este lema nos permite construir encajes, a partir de uno dado, de la siguiente manera.

Lema 3.31 *Dados un continuo X y $p, q \in X$, sean $M, Y \in C(X) \setminus \{X\}$ y $J, K, L \in C(Y) \setminus \{Y\}$ tales que $Y = K \cup L$, $K \cap L = J$, Y es irreducible entre p y q , K es irreducible entre q y J , L es irreducible entre p y J , M es un arco con extremos p y q y $M \cap Y = \{p, q\}$. Supongamos que existe un encaje $\varphi : \text{Cono}(Y) \longrightarrow C(X)$ tal que*

$$(1) \varphi(x, 0) = \{x\} \text{ para cada } x \in Y,$$

$$(2) \varphi(v) = J, \text{ donde } v \text{ es el vértice de } \text{Cono}(Y),$$

$$(3) \varphi(y, t) \in C(K), \text{ siempre que } (x, t) \in \text{Cono}(K),$$

$$(4) \varphi(y, t) \in C(L), \text{ siempre que } (x, t) \in \text{Cono}(L).$$

(5) existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\varphi(\{p\} \times [0, t_0])$ es un arco ordenado en $C(L)$, de $\{p\}$ a L y $\varphi(\{p\} \times [t_0, 1])$ es un arco ordenado en $C(L)$, de J a L ,

(6) existe $s_0 \in (0, 1)$ tal que $\varphi(\{q\} \times [0, s_0])$ es un arco ordenado en $C(K)$, de $\{q\}$ a K y $\varphi(\{q\} \times [t_0, 1])$ es un arco ordenado en $C(K)$, de J a K ,

Entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$.

Demostración. Observemos que podemos aplicar el Lema 3.30. Entonces existe un encaje $\phi : \text{Cono}(M) \longrightarrow C(X)$ tal que

$$(1) \phi(x, 0) = \{x\} \text{ para cada } x \in M;$$

$$(2) \phi(\{p\} \times [0, 1]) = \varphi(\{p\} \times [0, 1]);$$

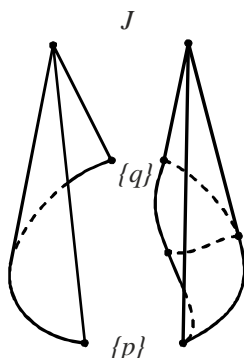
$$(3) \phi(\{q\} \times [0, 1]) = \varphi(\{q\} \times [0, 1]);$$

$$(4) \phi(v) = J, \text{ donde } v \text{ es el vértice de } \text{Cono}(M); \text{ y}$$

$$(5) \phi(x, t) \notin C(L) \cup C(K), \text{ para cada } x \notin \{p, q\} \text{ y } t \in [0, 1].$$

Además, reparametrizando, podemos suponer que $\phi(p, t) = \varphi(p, t)$ y $\phi(q, t) = \varphi(q, t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Definamos la función $h : \text{Cono}(X) \longrightarrow C(X)$ como

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(Y); \\ \phi(x, t), & \text{si } (x, t) \in \text{Cono}(M). \end{cases}$$



Notemos que h se pega bien. Entonces la continuidad de φ y ϕ implican la continuidad de h . Además, observemos que $h(x, t) \in C(L) \cup C(K)$ siempre que $(x, t) \in \text{Cono}(Y)$, y $h(x, t) \notin C(K) \cup C(L)$ siempre que $(x, t) \in \text{Cono}(M)$ y $x \notin \{p, q\}$.

Veamos que h es inyectiva. Tomemos $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(X)$ tales que $h(x, t) = h(y, s)$. Si $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(Y)$, o bien $(x, t), (y, s) \in \text{Cono}(M)$, la inyectividad de φ y ϕ , respectivamente, muestra que $(x, t) = (y, s)$.

Supongamos ahora que, sin pérdida de generalidad, $(x, t) \in \text{Cono}(Y)$, $(y, s) \in \text{Cono}(M)$ y $y \notin \{p, q\}$. Entonces $h(x, t) = \varphi(x, t) \in C(L) \cup C(K)$ y $h(y, s) = \phi(y, s) \notin C(K) \cup C(L)$. Sin embargo, $h(y, s) = \phi(y, s) = h(x, t) = \varphi(x, t) \in C(L) \cup C(K)$. Esta contradicción concluye la prueba de que h es inyectiva.

Entonces h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff. Concluimos que h es un encaje. Además, tenemos que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Esto muestra que X es un continuo cono-encajable en $C(X)$. ■

Estamos listos para caracterizar a las compactaciones de la recta real X , que son continuos cono-encajables en $C(X)$.

3.3.1. Con un Arco como Residuo

Caractericemos primero a las compactaciones de la recta real X , que tienen a un arco como residuo, que son continuos cono-encajables en $C(X)$. Para ello, invocaremos los resultados correspondientes de la sección anterior.

Teorema 3.32 Sea X una compactación de la recta real con un arco como residuo. Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces X es homeomorfo a S_i^1 para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.

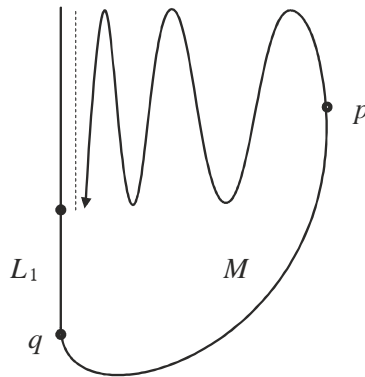
Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow X$ el encaje respectivo y sea $J = X \setminus f(\mathbb{R}^1)$ el residuo de la compactación, en donde J es un arco. Observemos que si $g = f|_{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)}$, entonces $Y = g((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) \cup J$ es una compactación de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, que tiene a J como residuo. Además, notemos que $Y \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en X .

Por el Lema 3.18, tenemos que Y es homeomorfo a S_i^2 para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. De esta manera, $X = S_i^2 \cup M$, en donde $M = f([-1, 1])$ es un arco tal que $M \cap S_i^2 = \{f(-1), f(1)\}$.

Si $i = 1$, entonces X es homeomorfo al círculo de Varsovia S_1^1 . Si $i = 2$, entonces X es homeomorfo a S_2^2 y si $i = 3$, entonces X es homeomorfo a S_3^2 . Esto concluye la prueba del teorema. ■

Ahora veamos que cada uno de S_i^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_i^1)$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. En [28, 4.11], S. B. Nadler, Jr. muestra que $\text{Cono}(S_0)$ y $C(S_0)$ son homeomorfos, y menciona que con las mismas ideas se puede mostrar que $\text{Cono}(S_i^1)$ y $C(S_i^1)$ son homeomorfos para $i \in \{1, 3\}$. Aquí mostramos que el encaje definido cumple con las condiciones requeridas.

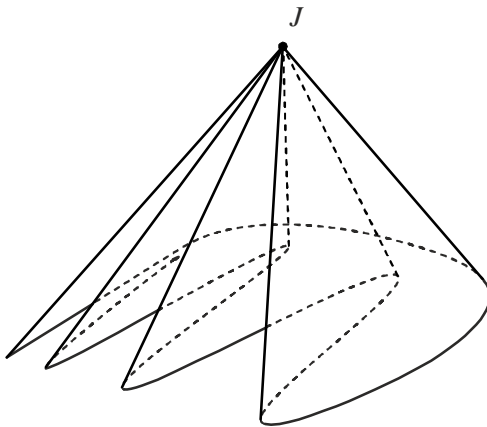
Proposición 3.33 S_1^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_1^1)$.



Demostración. Sean $Y = S_1^2$, $J = \{0\} \times [-1, 1]$, $K = J \cup L_1$, $M = L_2$, $p = (1, \text{sen}(1))$ y $q = (0, -2)$. Notemos que Y es irreducible entre p y q , K es irreducible entre J y q , S_0 es irreducible entre p y J , M es un arco con extremos p y q , $Y = S_0 \cup K$, $S_0 \cap K = J$ y $M \cap Y = \{p, q\}$. Además, por la Proposición 3.20, existe un encaje $\varphi : \text{Cono}(Y) \rightarrow C(Y)$ tal que

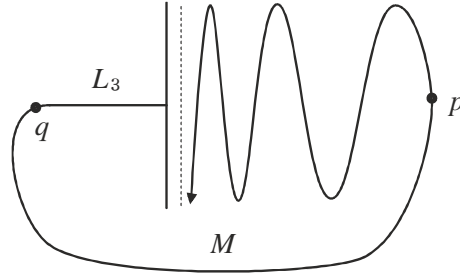
- 1) $\varphi(x, 0) = \{0\}$ para cada $x \in Y$,
- 2) $\varphi(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(Y)$,
- 3) $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, K) \cup C(J, K)$,
- 4) $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$,
- 5) $\varphi(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$, y
- 6) $\varphi(x, t) \in C(K)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(K)$.

Observemos que de la condición 3) se sigue que $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, K) \cup C(J, K)$ es la unión de un arco ordenado en $C(K)$, de $\{q\}$ a K , y un arco ordenado en $C(K)$ de J a K . Y por la condición 4), $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$, es la unión de dos arcos ordenados en $C(S_0)$, uno de ellos de $\{p\}$ a S_0 , y el otro de J a S_0 . Entonces se cumplen las condiciones del Lema 3.31. Concluimos que S_1^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_1^1)$.



■

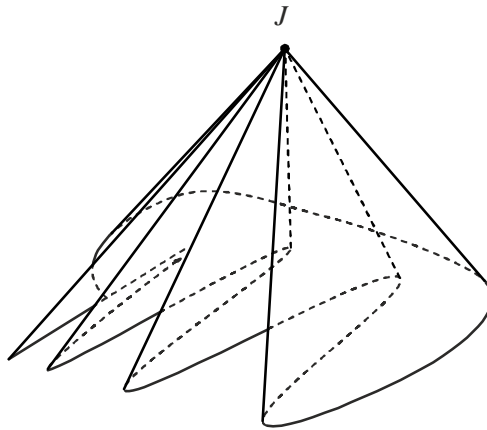
Proposición 3.34 S_2^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_2^1)$.



Demostración. Sean $Y = S_2^2$, $J = \{0\} \times [-1, 1]$, $T = J \cup L_3$, $M = L_4$, $p = (1, \text{sen}(1))$ y $q = (-1, 0)$. Notemos que Y es irreducible entre p y q , T es irreducible entre J y q , S_0 es irreducible entre p y J , M es un arco con extremos p y q , $Y = S_0 \cup T$, $S_0 \cap T = J$ y $M \cap Y = \{p, q\}$. Además, por la Proposición 3.21, existe un encaje $\varphi : \text{Cono}(Y) \longrightarrow C(Y)$ tal que

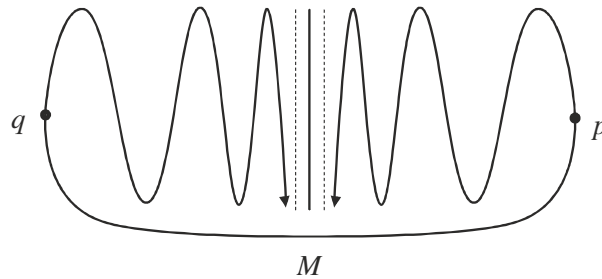
- (1) $\varphi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in Y$;
- (2) $\varphi(v) = J$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}(Y)$;
- (3) $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$;
- (4) $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, L_3) \cup \{L_3 \cup (\{0\} \times [-t, t]) : t \in [0, 1]\} \cup \{J \cup A : A \in C((0, 0), L_3)\}$;
- (5) $\varphi(x, t) \in C(T)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(T)$; y
- (6) $\varphi(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$.

Observemos que de la condición 3) se sigue que $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$ es la unión de dos arcos ordenados en $C(S_0)$, uno de ellos de $\{p\}$ a S_0 , y el otro de J a S_0 . Notemos que $\{L_3 \cup (\{0\} \times [-t, t]) : t \in [0, 1]\}$ es un arco ordenado en $C(T)$, de L_3 a T y $\{J \cup A : A \in C((0, 0), L_3)\}$ es un arco ordenado en $C(T)$ de J a T . Entonces, por la condición 4), $\varphi(\{q\} \times [0, 1])$, es la unión de dos arcos ordenados en $C(T)$, uno de ellos de $\{q\}$ a T , y el otro de J a T . Entonces se cumplen las condiciones del Lema 3.31. Concluimos que S_2^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_2^1)$.



■

Proposición 3.35 S_3^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_3^1)$.

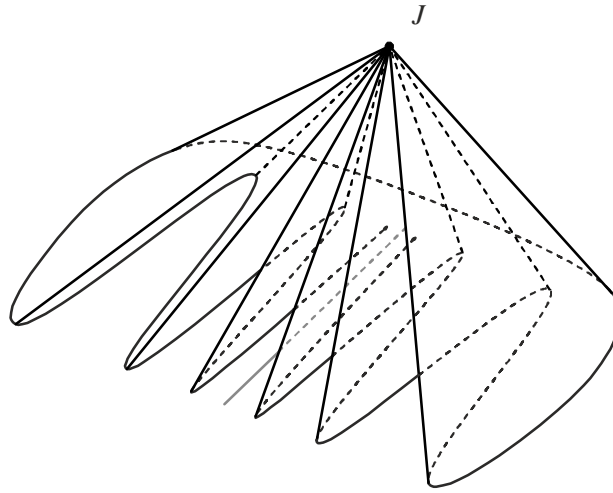


Demostración. Sean $Y = S_3^2$, $J = \{0\} \times [-1, 1]$, $M = L_5$, $p = (1, \text{sen}(1))$ y $q = (-1, \text{sen}(1))$. Notemos que Y es irreducible entre p y q , S_1 es irreducible entre J y q , S_0 es irreducible entre p y J , M es un arco con extremos p y q , $Y = S_0 \cup S_1$, $S_0 \cap S_1 = J$ y $M \cap Y = \{p, q\}$. Además, por la Proposición 3.22, existe un encaje $\varphi : \text{Cono}(Y) \rightarrow C(Y)$ tal que

- (1) $\varphi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in Y$;
- (2) $\varphi(v) = J$, donde v es el vértice de $\text{Cono}(Y)$;
- (3) $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, S_1) \cup C(J, S_1)$;
- (4) $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$;

- (5) $\varphi(x, t) \in C(S_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_0)$;
 (6) $\varphi(x, t) \in C(S_1)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(S_1)$.

Observemos que de la condición 3) se sigue que $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, S_1) \cup C(J, S_1)$ es la unión de dos arcos ordenados en $C(S_1)$, uno de ellos de $\{q\}$ a S_1 , y el otro de J a S_1 . Y de la condición 4) se sigue que $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, S_0) \cup C(J, S_0)$ es la unión de dos arcos ordenados en $C(S_0)$, uno de ellos de $\{p\}$ a S_0 , y el otro de J a S_0 . Entonces se cumplen las condiciones del Lema 3.31. Concluimos que S_3^1 es un continuo cono-encajable en $C(S_3^1)$.



■

Del Teorema 3.32 y las Proposiciones 3.33, 3.34 y 3.35 tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 3.36 *Sea X una compactación de la recta real con un arco como residuo. Entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a S_i^1 para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$.*

3.3.2. Con una Circunferencia como Residuo

Caractericemos ahora las compactaciones de la recta real X , que tienen a una circunferencia como residuo, que son continuos cono-encajables en $C(X)$. Para ello, nuevamente invocaremos los resultados correspondientes de la sección anterior.

Teorema 3.37 *Sea X una compactación de la recta real con una circunferencia como residuo. Si X es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_i^1$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

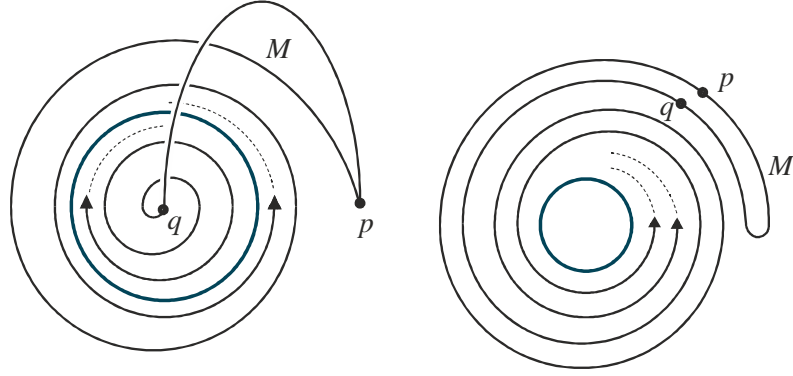
Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow X$ el encaje respectivo y sea $S = X \setminus f(\mathbb{R}^1)$ el residuo de la compactación, en donde S es una circunferencia. Observemos que si $g = f|_{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)}$, entonces $Y = g((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) \cup S$ es una compactación de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, que tiene a S como residuo. Además, notemos que $Y \setminus \{g(-1), g(1)\}$ es abierto en X .

Por el Lema 3.25, tenemos que Y es homeomorfo a $(SP)_i^2$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. De esta manera, $X = (SP)_i^2 \cup M$, en donde $M = f([-1, 1])$ es un arco tal que $M \cap (SP)_i^2 = \{f(-1), f(1)\}$.

Si $i = 1$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_1^1$. Si $i = 2$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_2^1$ y si $i = 3$, entonces X es homeomorfo a $(SP)_3^1$. Esto concluye la prueba del teorema. ■

Ahora veamos que cada uno de $(SP)_i^1$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_i^1)$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. De la misma manera, en [28, 4.11], S. B. Nadler, Jr. menciona que se puede mostrar que $Cono((SP)_i^1)$ y $C((SP)_i^1)$ son homeomorfos para $i \in \{1, 2\}$. Aquí mostramos que el encaje definido cumple con las condiciones requeridas.

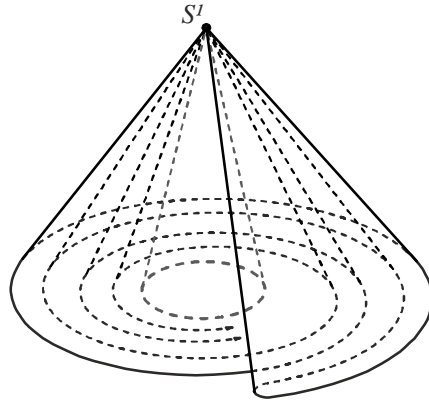
Proposición 3.38 *Dada $i \in \{1, 2\}$, $(SP)_i^1$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_i^1)$.*



Demostración. Sean $Y = S_i^2$, $p = (2\cos(1), 2\sen(1))$ y $q = (0, 0)$. Notemos que Y es irreducible entre p y q , $(SP)_0$ es irreducible entre S^1 y p , $(SP)_i$ es irreducible entre S^1 y q , $Y = (SP)_0 \cup (SP)_i$, $(SP)_0 \cap (SP)_i = S^1$, M_i es un arco que une los puntos p y q , y es tal que $M_i \cap Y = \{p, q\}$. Además, por la Proposición 3.27, existe un encaje $\varphi : \text{Cono}((SP)_i^2) \longrightarrow C((SP)_i^2)$ tal que

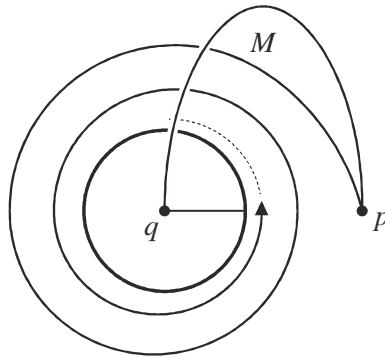
- (1) $\varphi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_i^2$;
- (2) $\varphi(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}((SP)_i^2)$;
- (3) $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$;
- (4) $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_i) \cup C(S^1, (SP)_i)$;
- (5) $\varphi(x, t) \in C((SP)_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_0)$;
- (6) $\varphi(x, t) \in C((SP)_i)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_i)$.

De la condición (3), $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$ es la unión de dos arcos ordenados en $(SP)_0$, uno de ellos de $\{p\}$ a $(SP)_0$ y el otro de S^1 a $(SP)_0$. Además, de la condición (4) se tiene que $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_i) \cup C(S^1, (SP)_i)$ es la unión de dos arcos ordenados en $(SP)_i$, uno de ellos de $\{q\}$ a $(SP)_i$ y el otro de S^1 a $(SP)_i$. Entonces se cumplen las condiciones del Lema 3.31. Concluimos que $(SP)_i^1$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_i^1)$.



■

Proposición 3.39 $(SP)_3^1$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_3^1)$.



Demostración. Sean $Y = S_3^2$, $P = (SP)_3 \cup S^1$, $p = (2\cos(1), 2\sen(1))$ y $q = (0, 0)$. Notemos que Y es irreducible entre p y q , $(SP)_0$ es irreducible entre S^1 y p , P es irreducible entre S^1 y q , $Y = (SP)_0 \cup P$, $(SP)_0 \cap P = S^1$, M_3 es un arco que une los puntos p y q , y tal que $M_3 \cap Y = \{p, q\}$. Además, por la Proposición 3.28, existe un encaje $\varphi : \text{Cono}((SP)_3^2) \rightarrow C((SP)_3^2)$ tal que

(1) $\varphi(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in (SP)_2^2$;

- (2) $\varphi(v) = S^1$, en donde v es el vértice de $\text{Cono}((SP)_3^2)$;
- (3) $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$;
- (4) $h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_3) \cup \{(SP)_3 \cup f(w, t) : t \in [0, 1]\} \cup C(S^1, P)$;
- (5) $\varphi(x, t) \in C((SP)_0)$, si $(x, t) \in \text{Cono}((SP)_0)$;
- (6) $\varphi(x, t) \in C(P)$, si $(x, t) \in \text{Cono}(P)$.

De la condición (3), $\varphi(\{p\} \times [0, 1]) = C(p, (SP)_0) \cup C(S^1, (SP)_0)$ es la unión de dos arcos ordenados en $C((SP)_0)$, uno de ellos de $\{p\}$ a $(SP)_0$ y el otro de S^1 a $(SP)_0$. Además, de la condición (4) se tiene que $\varphi(\{q\} \times [0, 1]) = h(\{q\} \times [0, 1]) = C(q, (SP)_3) \cup \{(SP)_3 \cup f(w, t) : t \in [0, 1]\} \cup C(S^1, P)$, es la unión de dos arcos ordenados en $C(P)$, uno de ellos de $\{q\}$ a P y el otro de S^1 a P . Entonces se cumplen las condiciones del Lema 3.31. Concluimos que $(SP)_3^1$ es un continuo cono-encajable en $C((SP)_3^1)$. ■

Del Teorema 3.37 y de las Proposiciones 3.38 y 3.39 se sigue la siguiente caracterización.

Teorema 3.40 *Sea X una compactación de la recta real con una circunferencia como residuo. Entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a $(SP)_i^1$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Esto concluye nuestro estudio con las compactaciones que son continuos cono-encajables. Aún tenemos las siguientes preguntas:

¿Existirá una compactación del rayo con un triodo simple como residuo que sea un continuo cono-encajable?

Más aún, ¿será cierto que si X es una compactación del rayo con una gráfica finita como residuo que es un continuo cono-encajable en $C(X)$, entonces X es una compactación con un arco o una circunferencia como residuo?

Preguntas análogas se tienen para compactaciones de la unión de dos rayos o de la recta real.

Capítulo 4

Suavidad por Arcos

En este capítulo mostramos que los continuos suaves por arcos son continuos cono-encajables ordenados. Además, damos algunos ejemplos de dendroides que no son suaves por arcos, uno de los cuales es cono-encajable, mientras que el otro no. Comenzaremos con la definición de continuo suave por arcos.

4.1. Continuos Suaves por Arcos

Definición 4.1 Una *arco-estructura* sobre un continuo X es una función $A : X \times X \longrightarrow C(X)$ tal que para cada $x \neq y$ en X , $A(x, y)$ es un arco de x a y . Además se cumple que

- a) $A(x, x) = \{x\}$,
- b) $A(x, y) = A(y, x)$, y
- c) $A(x, z) \subseteq A(x, y) \cup A(y, z)$, donde la igualdad se da siempre que y pertenece a $A(x, z)$.

El par (X, A) es *suave por arcos en el punto* p en X si la función inducida $A_p : X \longrightarrow C(X)$, definida como $A_p(x) = A(p, x)$, es continua. El par (X, A) es *suave por arcos* si existe un punto en X donde (X, A) es suave por arcos.

Definición 4.2 Un continuo X es **suave por arcos en el punto p** si existe una arco-estructura A sobre X para la cual (X, A) es suave por arcos en p . El continuo X es **suave por arcos** si es suave por arcos en algún punto.

A partir de ahora, (X, A) denotará un par formado por un continuo X y una arco-estructura A sobre X . Dados x y y en X , el arco (o conjunto singular) $A(x, y)$ será denotado por xy .

Observación 4.3 Por la propiedad c) de la Definición 4.1, si $x \in qy$, entonces $qy = qx \cup xy$. Así que $qx \subset qy$. Por lo tanto, si $x \in qy \cap qz$, tenemos que $qx \subset qy \cap qz$.

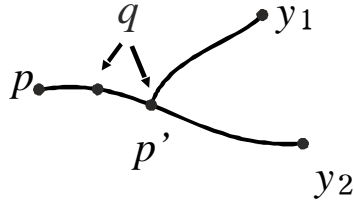
Más aún, tenemos los siguientes lemas.

Lema 4.4 Dados $x, y, u, v \in X$ tales que $u, v \in xy$, entonces $uv \subset xy$.

Demostración. Como $u \in xy$, por la propiedad c) de la Definición 4.1, tenemos que $xy = xu \cup uy$. Por tanto, $xu, uy \subset xy$. Por otro lado, $v \in xy$, así que $v \in xu$ o bien, $v \in uy$. Si $v \in xu$, nuevamente por la propiedad c) de la Definición 4.1, se tiene que $xu = xv \cup vu$. De aquí que $uv \subset xu \subset xy$. De manera similar tenemos que si $v \in uy$, entonces $uy = uv \cup vy$. Así que $uv \subset uy \subset xy$. Esto termina la prueba. ■

Lema 4.5 Sean p, x_1, x_2, y_1 y y_2 puntos de X tales que $px_i \subset py_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Si $p \notin \{x_1, x_2\}$ y $px_1 \cap px_2 = \{p\}$, entonces $py_1 \cap py_2 = \{p\}$.

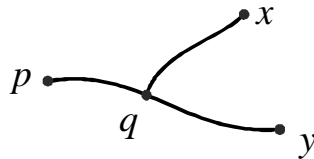
Demostración. Sea $p' \in py_1 \cap py_2$. Entonces $pp' \subset py_1 \cap py_2$. Supongamos que $p' \neq p$. Como pp' y px_1 son arcos contenidos en el arco py_1 , tenemos que $pp' \subset px_1$ o $px_1 \subset pp'$. Si $px_1 \subset pp'$, hacemos $q = x_1$. En caso contrario, hacemos $q = p'$. Hemos elegido $q \neq p$ tal que $pq \subset pp' \cap px_1$.



En forma similar podemos elegir $q' \neq p$ tal que $pq' \subset pp' \cap px_2$. Como q y q' están en el arco pp' , tenemos que $pq \subset pq'$ o $pq' \subset pq$. Esto implica que $pq \subset px_1 \cap px_2 = \{p\}$ o $pq' \subset px_1 \cap px_2 = \{p\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p = p'$. Esto prueba que $py_1 \cap py_2 = \{p\}$. ■

Intuitivamente, tenemos que si dos arcos de la arco-estructura comienzan en el mismo punto y desde ese punto se separan, no se vuelven a intersectar.

Además, si $pq = px \cap py$, entonces $q \in px$ y $q \in py$, de manera que $qx \subset px$ y $qy \subset py$. Supongamos que existe un punto $q' \in qx \cap qy$ tal que $q' \neq q$. Entonces, por la Observación 4.3, $qq' \subset qx \cap qy \subset px \cap py = pq$. De manera que $q' \in pq \subset px$. Observemos el arco px y supongamos que le damos el orden $<$ en el que $p < x$. Como $q' \in pq$, tenemos que $q' < q$ y como $q' \in qx$, tenemos que $q < q'$. Esto es un absurdo que muestra que $qx \cap qy = \{q\}$. Entonces $xq \cup qy$ es un arco contenido en $px \cup py$ con extremos x y y . Por la propiedad (c) de la Definición 4.1, tenemos que $xy \subset xp \cup py$. Se sigue que $xy = xq \cup qy$.



4.1.1. El Orden \leq_p .

Para cada p en X , definimos el orden parcial \leq_p , como

$$x \leq_p y \text{ siempre que } px \subset py.$$

Para un subconjunto K de X , el *conjunto mayor* $M_p(K)$ es el conjunto $\{y \in X : x \leq_p y \text{ para algún } x \in K\}$. El siguiente teorema es muy útil en el estudio de los continuos suaves por arcos.

Teorema 4.6 ([6, Teorema I-1-A]) *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- a) (X, A) es suave por arcos en p .
- b) \leq_p es cerrado en $X \times X$.
- c) Para cada subconjunto cerrado K , el conjunto mayor $M_p(K)$ es cerrado.

Demostración. Veamos que (b) es equivalente a (a) y (c).

(a) implica (b). Sean $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ sucesiones de X tales que $x_n \leq_p y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Por la suavidad por arcos, la función A_p es continua. De aquí que la sucesión $(A_p(y_n))_{n=1}^\infty = (py_n)_{n=1}^\infty$ converge a $A_p(y) = py$. Puesto que $x_n \in py_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.27, tenemos que $x \in py$. Así que $x \leq_p y$. Esto prueba que \leq_p es cerrado en $X \times X$.

(b) implica (a). Sean $y \in X$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de X tales que $\lim y_n = y$. Para probar que la función $A_p : X \rightarrow C(X)$ es continua, necesitamos probar que la sucesión $(A_p(y_n))_{n=1}^\infty = (py_n)_{n=1}^\infty$ converge a $A_p(y) = py$. Veamos que $\lim \sup py_n = \lim \inf py_n = py$.

Puesto que $\lim y_n = y$ y $y_n \in py_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in \lim \sup py_n$. Sea $x \in \lim \sup py_n$. Entonces, por el Lema 1.26, existe una subsucesión $(py_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(py_n)_{n=1}^\infty$, tal que cada arco py_{n_k} contiene un punto x_{n_k} y la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ converge a x . Puesto que \leq_p es cerrado y $x_{n_k} \leq_p y_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \leq_p y$. Por lo tanto, $x \in py$. Así que $\lim \sup py_n \subset py$. Además, $\lim \sup py_n$ es un continuo ([11, Teorema 2-101]) que contiene a p y y . De aquí que $\lim \sup py_n = py$.

Como $\lim \inf py_n \subset \lim \sup py_n$, tenemos que $\lim \inf py_n \subset py$. Veamos que $\lim \inf py_n = py$. Si existe $x \in py \setminus \lim \inf py_n$, entonces existen un subconjunto abierto U que contiene a x y una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ tal que $U \cap py_{n_k} = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\lim \sup py_{n_k} \subset \lim \sup py_n = py$

es un subcontinuo de py que contiene a p y y que no contiene a x . Esta contradicción muestra que $\limsup py_n = \liminf py_n = py$. Así que $(py_n)_{n=1}^\infty$ converge a py .

(c) implica (b). Para ver que \leq_p es cerrado, supongamos que $x \not\leq_p y$. Así que $x \notin py$. Consideremos un abierto U de X tal que $x \in U \subset \text{cl}_X(U) \subset X \setminus py$. Si existe un punto z en $M_p(\text{cl}_X(U)) \cap py$, entonces existe $w \in \text{cl}_X(U)$ tal que $w \leq_p z$. Así que $w \in pz$. Pero $pz \subset py$, pues $z \in py$. Concluimos que $w \in py$. Lo cual contradice que $\text{cl}_X(U) \subset X \setminus py$. De aquí que $M_p(\text{cl}_X(U))$ es un subconjunto cerrado de X tal que $py \cap M_p(\text{cl}_X(U)) = \emptyset$. Tomemos un abierto V de X tal que $y \in V \subset \text{cl}_X(V) \subset X \setminus M_p(\text{cl}_X(U))$. Sea $(s, t) \in U \times V$. Si $s \leq_p t$, entonces $t \in M_p(\text{cl}_X(U)) \cap V = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $s \not\leq_p t$ para cada $(s, t) \in U \times V$. Esto prueba que $\{(x, y) \in X \times X : x \not\leq_p y\}$ es abierto en $X \times X$. Se sigue que \leq_p es cerrado.

(b) implica (c). Sea K un subconjunto cerrado de X . Sean $y \in X$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de $M_p(K)$ tales que $\lim y_n = y$. Veamos que $y \in M_p(K)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que $x_n \leq_p y_n$. Por la compacidad de K , podemos suponer que existe un punto $x \in K$ tal que la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge a x . Puesto que \leq_p es cerrado, tenemos que $x \leq_p y$. Entonces $x \in K$ y $x \leq_p y$. Esto muestra que $y \in M_p(K)$. Concluimos que $M_p(K)$ es cerrado. ■

Otro resultado concerniente a los continuos suaves por arcos que estaremos ocupando es el siguiente lema ([6, Lema I-2-B]).

Lema 4.7 *Sea (X, A) suave por arcos en p . Si $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ son sucesiones que convergen a x y y , respectivamente, y $x_n \leq_p y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq_p y$ y la sucesión de arcos $(x_n y_n)_{n=1}^\infty$ converge al arco xy .*

Demostración. Por el Teorema 4.6, \leq_p es cerrado. Así que $x \leq_p y$. Por lo tanto $px \subset py$. En particular, tenemos que $py = px \cup xy$. Observemos que $x, y \in \liminf x_n y_n$. Veamos que $xy \subset \liminf x_n y_n$. Tomemos un punto $z \in xy \subset py$. Como (X, A) es suave por arcos en p y $\lim y_n = y$, $\lim py_n = py$. Por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in py_n$ tal que $\lim z_n = z$. Ahora bien, notemos que, dada $n \in \mathbb{N}$, $px_n \subset py_n$. Así que $py_n = px_n \cup x_n y_n$. Si $z_n \in x_n y_n$ para todos, excepto un número finito de números n , entonces del Lema

1.26 se sigue que $z \in \liminf x_n y_n$. Supongamos que existe una subsucesión $(z_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(z_n)_{n=1}^\infty$ tal que $z_{n_k} \in px_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim z_n = z$, tenemos que $\lim z_{n_k} = z$. Por otro lado, por el Lema 1.27 tenemos que $z \in px$. Concluimos que $z \in px \cap xy = \{x\}$. Por tanto, $z = x \in \liminf x_n y_n$. Hemos probado que $xy \subset \liminf x_n y_n$.

Veamos que $\limsup x_n y_n \subset xy$. Sea $z \in \limsup x_n y_n$. Por el Lema 1.26, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe una sucesión $(z_n)_{n=1}^\infty$ convergente a z tal que $z_n \in x_n y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $x_n \leq_p z_n \leq_p y_n$. Por el Teorema 4.6, $x \leq_p z \leq_p y$. Concluimos que $z \in xy$. Esto termina la prueba del lema. ■

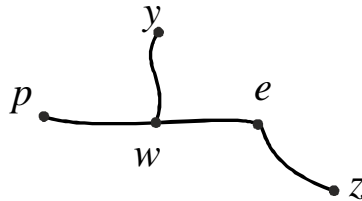
4.1.2. El Conjunto Final.

Dado el par (X, A) , definimos el *conjunto final* de X como $E(X) = \{e \in X : \text{si } e \in xy, \text{ entonces } e = x \text{ o } e = y\}$. Si (X, A) es suave por arcos en p , definimos el *conjunto final de un punto* x en X como $E(x) = \{e \in E(X) : x \leq_p e\}$.

Veamos el siguiente lema.

Teorema 4.8 [6, Lema I-9-A] *Si (X, A) es suave por arcos en p , entonces cada arco px está contenido en un arco pe , para algún $e \in E(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 4.6, $M_p(x)$ es cerrado y por tanto compacto. Sea $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney. Consideremos la función $f : M_p(x) \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(y) = \mu(A_p(y)) = \mu(py)$. Como (X, A) es suave por arcos, tenemos que la función A_p es continua y, por tanto, f es continua. Como $M_p(x)$ es compacto, existe $e \in M_p(x)$ tal que $f(e) \geq f(y)$ para cada $y \in M_p(x)$. Entonces $x \leq_p e$. De aquí que $px \subset pe$.



Veamos que $e \in E(X)$. Si no es así, existe un arco yz tal que $e \in yz$ y $e \notin \{y, z\}$. Sea $w \in pe$, la primera vez que el arco pe (yendo de p a e) interseca al arco yz . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \in ye$. Entonces $wz \cap pw = \{w\}$. De aquí que $pz = pw \cup wz$. Como $w \in yz$, $yz = yw \cup wz$. De modo que $e \in wz \subset pz$. Entonces $px \subset pe \subsetneq pz$. Así que $\mu(pe) < \mu(pz)$. Esto contradice la maximalidad de f en e . Concluimos que $e \in E(X)$. ■

En particular, el Teorema 4.8 prueba que $E(x) \neq \emptyset$ para cada x en X cuando X es suave por arcos. Más aún, podemos ver a X como $\bigcup \{pe : e \in E(X)\}$.

4.1.3. Alcance

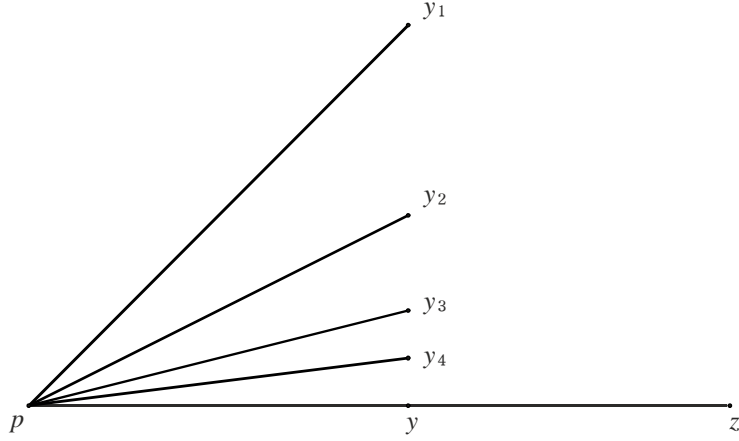
Sean (X, A) suave por arcos en el punto p y $\mu : C(X) \rightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney. Definimos el **alcance**, respecto a p y μ , como la función $\mathcal{L}_{p,\mu} : X \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$\mathcal{L}_{p,\mu}(y) = \begin{cases} \inf \left\{ \frac{\mu(py)}{\mu(pe)} : e \in E(y) \right\}, & \text{si } y \neq p; \\ 0, & \text{si } y = p. \end{cases}$$

para cada $y \in X$. Cuando esté claro a cuáles p y μ nos referamos, escribiremos \mathcal{L} en lugar de $\mathcal{L}_{p,\mu}$.

Observemos que, si $y \neq p$ y $e \in E(y)$, entonces $e \neq p$ y $\mu(pe) \neq 0$. Por otro lado, como $py \subset pe$ para cada $y \in X$ y $e \in E(y)$, tenemos que $\mu(py) \leq \mu(pe)$. Así que $\frac{\mu(py)}{\mu(X)} \leq \frac{\mu(py)}{\mu(pe)}$ y $\mathcal{L}_{p,\mu}(y) \leq 1$, por lo que $\mathcal{L}_{p,\mu}$ está bien definida. Además, $\mathcal{L}_{p,\mu}(y) = 0$ si y sólo si $y = p$.

Veamos que $\mathcal{L}_{p,\mu}$ no es necesariamente continua. Sea $A_0 = [0, 2] \times \{0\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el segmento de recta, en \mathbb{R}^2 , que une al punto $(0, 0)$ con el punto $(1, \frac{1}{n})$. Sea $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Observemos que X es un continuo suave por arcos en el punto $p = (0, 0)$.



Ahora bien, definamos la función $\widehat{\mu} : \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 1] \times \{0\}\} \longrightarrow \{1\}$ como la función constante. Dado que $\lim A_i = [0, 1] \times \{0\}$, el conjunto $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 1] \times \{0\}\}$ es cerrado de $C(X)$. De aquí que $\widehat{\mu}$ es continua en un subconjunto cerrado de $C(X)$. Además, cumple con las propiedades de una función de Whitney. Entonces, por [39, Teorema 3.1], existe una función de Whitney $\mu : C(X) \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $\mu|_{\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 1] \times \{0\}\}} = \widehat{\mu}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n = (1, \frac{1}{n})$ y sean $y = (1, 0)$, $z = (2, 0)$. Si tomamos la sucesión de puntos $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a y , tenemos que $E(y_n) = \{y_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_{p,\mu}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(py_n)} = 1$. Sin embargo, $E(y) = \{(2, 0)\} = \{z\}$. Así que, como $py \not\subseteq pz$, tenemos que $\mathcal{L}_{p,\mu}(y) < 1 = \lim \mathcal{L}_{p,\mu}(y_n)$. Esto prueba que $\mathcal{L}_{p,\mu}$ no necesariamente es continua.

Veamos la siguiente propiedad de $\mathcal{L}_{p,\mu}$.

Lema 4.9 Sean (X, A) suave por arcos en el punto p y $\mu : C(X) \longrightarrow [0, 1]$ una función de Whitney. Entonces para cada $y \in X$, existe $e_y \in E(y)$ tal que

- (a) $\mathcal{L}_{p,\mu}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pe_y)}$;
- (b) $\mu(pe_y) \geq \mu(px)$ para cada $x \in M_p(y)$; y
- (c) $\mathcal{L}_{p,\mu}(x) = \frac{\mu(px)}{\mu(pe_y)}$ para cada $x \in ye_y$.

Demostración. Primero, consideremos la función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = \mu(px) = \mu(A_p(x))$. Como vimos en la demostración del Teorema

4.8, existe $e_y \in E(y)$ tal que $f(e_y) \geq f(x)$ para cada $x \in M_p(y)$. Es decir, $\mu(pe_y) \geq \mu(px)$ para cada $x \in M_p(y)$.

Si $e \in E(X) \cap M_p(y)$, entonces $\mu(pe_y) \geq \mu(pe)$. Así que $\frac{\mu(py)}{\mu(pe_y)} \leq \frac{\mu(py)}{\mu(pe)}$. Concluimos que $e_y \in E(X)$ es tal que $\mathcal{L}_{p,\mu}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pe_y)}$.

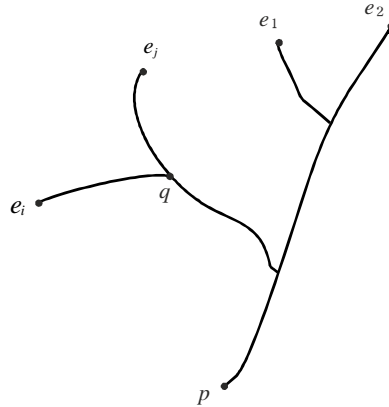
Tomemos $x \in ye_y$. Notemos que $e_y \in E(x)$. Sea $e \in E(x)$. Entonces $py \subset px \subset pe$. Así que $e \in E(y)$. Por lo tanto, $\mu(pe_y) \geq \mu(pe)$ y $\frac{\mu(px)}{\mu(pe_y)} \leq \frac{\mu(px)}{\mu(pe)}$ para cada $e \in E(x)$. Esto muestra que $\mathcal{L}_{p,\mu}(x) = \frac{\mu(px)}{\mu(pe_y)}$ para cada $x \in ye_y$. Esto termina la prueba del lema. ■

4.1.4. El Encaje

Para probar que los continuos suaves por arcos son continuos cono-encajables ordenados, construiremos el encaje del cono en el hiperespacio de subcontinuos. Primero, veamos que si X es un continuo suave por arcos tal que $E(X)$ es finito, entonces X es un árbol.

Lema 4.10 *Si (X, A) es suave por arcos en p y $E(X)$ es finito, entonces X es un árbol.*

Demostración. Sea $E(X) = \{e_1, \dots, e_n\}$. Demostraremos de manera inductiva que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $pe_1 \cup \dots \cup pe_i$ es un árbol. Si $i = 1$, pe_1 es un arco y por tanto un árbol. Supongamos que $i > 1$ y que $T = pe_1 \cup \dots \cup pe_{i-1}$ es un árbol. Sea q el primer punto en el arco pe_i , yendo de e_i a p que pertenece a T . Entonces existe $j \in \{1, \dots, i-1\}$ tal que $q \in pe_j$. Como $q \in pe_i$, $pe_i = pq \cup qe_i$. Ya que $q \in pe_j$, $pq \subset pe_j \subset T$. De manera que $pe_1 \cup \dots \cup pe_i = T \cup pe_i = T \cup pq \cup qe_i = T \cup qe_i$. Por tanto, $pe_1 \cup \dots \cup pe_i$ es la unión del árbol T y el arco qe_i . Además, $T \cap qe_i = \{q\}$. De aquí que $T \cup qe_i$ es un árbol. En particular, $X = pe_1 \cup \dots \cup pe_n$ es un árbol. ■



En los árboles se puede considerar una métrica particular que induce la topología del espacio.

Definición 4.11 Una *métrica convexa* para un espacio X es una métrica, d , para X , que induce la topología sobre X y para la cual siempre existen los puntos medios; es decir, para cualesquiera $x, y \in X$, existe $m \in X$ tal que

$$d(x, m) = \frac{1}{2}d(x, y) = d(m, y).$$

Por [16, Teorema 10.3], todo continuo localmente conexo, en particular los árboles, tiene una métrica convexa. Usaremos la siguiente propiedad.

Proposición 4.12 Sea X un continuo con una métrica convexa d . Entonces cualesquiera dos puntos, x y y , de X pueden ser unidos por un arco, J , en X tal que J es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(x, y)]$.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [16, Proposición 10.4]. Como los árboles son únicamente arcoconexos, la anterior proposición dice que el único arco que une dos puntos es isométrico al intervalo cerrado mencionado. En particular, si z es un punto en el arco que une a los puntos x y y , entonces $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Al arco que une los puntos x y y lo denotaremos por xy .

Con esto, podemos probar el siguiente resultado.

Lema 4.13 Sea (X, A) suave por arcos. Si $E(X)$ es finito, entonces X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$.

Demostración. Por el Lema 4.10, X es un árbol y el conjunto de puntos extremos del árbol es exactamente $E(X)$. En particular, X es una dendrita. Entonces, por [6, Teorema I-2-E], X es suave por arcos en p para cada $p \in X$. Por [16, Proposición 10.4], podemos considerar una métrica convexa d para X . Sea $E(X) = \{e_1, \dots, e_k\}$. Dados $p \in X$ y $e_i \in E(X)$, definimos la función $\alpha_{p,i} : [0, 1] \rightarrow pe_i$ donde $\alpha_{p,i}(t)$ es el único punto $x \in pe_i$ tal que $d(p, x) = td(p, e_i)$. Notemos que $\alpha_{p,i}$ es un homeomorfismo y $\alpha_{p,i}([0, t]) = px$.

Definamos la función $f : X \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ como

$$f(p, t) = \bigcup_{i=1}^k \alpha_{p,i}([0, t]).$$

Observemos que $p \in \alpha_{p,i}([0, t])$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Por tanto, $f(p, t)$ es unión de conjuntos conexos cada uno de los cuales contiene a p . Entonces $f(p, t)$ es conexo. Además, $\alpha_{p,i}([0, t])$ es cerrado, y por tanto compacto, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Así que $f(p, t)$ es una unión finita de subconjuntos compactos de X . Por lo tanto, $f(p, t)$ es compacto. Concluimos que $f(p, t) \in C(X)$.

Veamos ahora que f es continua. Tomemos una sucesión $(p_n, t_n)_{n=1}^{\infty}$ en $X \times [0, 1]$ y un punto $(p, t) \in X \times [0, 1]$ tales que $\lim (p_n, t_n) = (p, t)$. Entonces $\lim p_n = p$ y $\lim t_n = t$. Tomemos $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces X es suave por arcos en e_i . De aquí que $\lim p_n e_i = pe_i$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = \alpha_{p_n, i}(t_n)$. Entonces $e_n \leq_{e_n} x_n \leq_{e_n} p_n$. Por la compacidad de X , podemos suponer que existe $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. Se sigue del Lema 4.7 que $\lim p_n x_n = px$ y $\lim x_n e_i = x e_i$. Por otro lado, tenemos que $d(p_n, x_n) = t_n d(p_n, e_i)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de d , tenemos que $\lim d(p_n, x_n) = d(p, x)$ y $\lim t_n d(p_n, e_i) = td(p, e_i)$. Concluimos que $d(p, x) = td(p, e_i)$. Esto muestra que $x = \alpha_{p, i}(t)$. Además, como $\alpha_{p_n, i}([0, t_n]) = p_n x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim \alpha_{p_n, i}([0, t_n]) = \lim p_n x_n = px = \alpha_{p, i}([0, t])$.

Entonces, por el Lema 1.29,

$$\begin{aligned} \lim f(p_n, t_n) &= \lim (\alpha_{p_n,1}([0, t_n]) \cup \dots \cup \alpha_{p_n,k}([0, t_n])) \\ &= \lim \alpha_{p_n,1}([0, t_n]) \cup \dots \cup \lim \alpha_{p_n,k}([0, t_n]) \\ &= \alpha_{p,1}([0, t]) \cup \dots \cup \alpha_{p,k}([0, t]) = f(p, t). \end{aligned}$$

Esto muestra que f es continua.

Observemos que para cada $p \in X$, $f(p, 1) = \bigcup_{i=1}^k \alpha_{p,i}([0, 1]) = \bigcup_{i=1}^k pe_i = X$.

Además, si $t < 1$, para cada $e_i \in E(X) \setminus \{p\}$, se tiene que $e_i \notin f(p, t)$. Por tanto, $f(p, t) = X$ si y sólo si $t = 1$.

Tomemos $(p, t), (q, s) \in X \times [0, 1]$, tales que $f(p, t) = f(q, s)$. Mostremos que $(p, t) = (q, s)$. Supongamos que no es así. Entonces tenemos dos casos.

Si $p = q$, entonces $s \neq t$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $s < t$. Veamos que $f(p, s) \subsetneq f(p, t)$. Puesto que $\alpha_{p,i}$ es un homeomorfismo, tenemos que $\alpha_{p,i}([0, s]) \subsetneq \alpha_{p,i}([0, t])$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. De aquí que $f(p, s) \subsetneq f(p, t)$. Como $E(X)$ es finito, existe $e_{i_0} \in E(X)$ tal que $d(p, e_{i_0}) \geq d(p, e_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Tomemos un punto $x \in pe_{i_0}$ tal que $x \in f(p, s)$. Entonces existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in \alpha_{p,i}([0, s])$. Es decir, $d(p, x) \leq sd(p, e_i) \leq sd(p, e_{i_0}) = d(p, \alpha_{p,i_0}(s))$. Esto muestra que $x \in \alpha_{p,i_0}([0, s])$. Por lo tanto, $\alpha_{p,i_0}([0, t]) \setminus f(p, s) \neq \emptyset$. Se sigue que $f(p, s) \subsetneq f(p, t)$. Lo cual es un absurdo.

Supongamos entonces que $p \neq q$. Como X es suave por arcos en q y $E(X)$ es finito, existe $e_i \in E(X)$ tal que $p \in qe_i$ y $d(q, e_i) \geq d(q, e)$ para cada $e \in E(X)$ tal que $p \in qe$. Sean $p_t = \alpha_{p,i}(t)$ y $q_s = \alpha_{q,i}(s)$. Como $p_t \in f(p, t) = f(q, s)$, existe $e \in E(X)$ tal que $p_t \in qe$ y $d(q, p_t) \leq sd(q, e)$. Observemos que $p \in pp_t \subset qp_t \subset qe$. Por la elección de e_i , se tiene que $d(q, e) \leq d(q, e_i)$. Por tanto, $d(q, p_t) \leq sd(q, e_i) = d(q, q_s)$. Concluimos que $p_t \in qq_s$. Más aún, $pp_t \subset qq_s$.

Como $q_s \in f(q, s) = f(p, t)$, existe $e' \in E(X)$ tal que $q_s \in pe'$ y $d(p, q_s) \leq td(p, e')$. Como $p \in qq_s$ y $q_s \in pe'$, tenemos que $p \in qe'$. Por la elección de e_i , se tiene que $d(q, p) + d(p, e') = d(q, e') \leq d(q, e_i) = d(q, p) + d(p, e_i)$. De aquí que $d(p, e') \leq d(p, e_i)$. Por tanto, $d(p, q_s) \leq td(p, e_i) = d(p, p_t)$.

Concluimos que $d(q, q_s) = d(q, p) + d(p, q_s) \leq d(q, p) + d(p, p_t) = d(q, p_t)$. Con la desigualdad mostrada arriba, se tiene que p_t y q_s son puntos en el arco qe_q tales que $d(q, p_t) = d(q, q_s)$. Hemos mostrado que $p_t = q_s$.

Puesto que $p_t = q_s$, se tiene que $d(p_t, e_i) = d(q_s, e_i)$. Por tanto, $(1 - t)d(p, e_i) = (1 - s)d(q, e_i)$. Como $p \in qe_i$, se tiene que $d(p, e_i) \leq d(q, e_i)$. De aquí que $1 - t \geq 1 - s$. Se sigue que $s \geq t$.

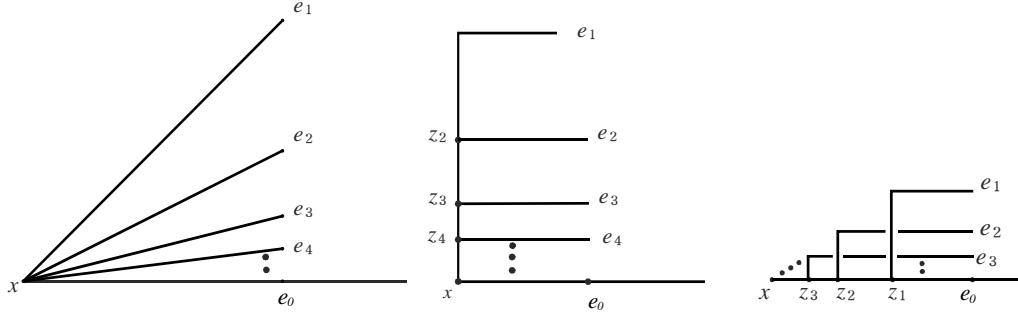
Ahora, tomemos $e_p \in E(X)$ tal que $q \in pe_p$ y $d(e_p, p) \geq d(e, p)$ para cada $e \in E(X)$ que cumpla $q \in pe$. Siguiendo un razonamiento análogo, se demuestra que $t \geq s$. Concluimos que $s = t$. Como ambos son menores a 1, la igualdad $(1 - t)d(p, e_q) = (1 - s)d(q, e_q)$ implica que $d(p, e_q) = d(q, e_q)$. Esto muestra que $p = q$, lo cual es una contradicción. Se sigue que si $f(p, t) = f(q, s)$ con $s, t \in [0, 1)$, entonces $(p, t) = (q, s)$. Es decir, f es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

Observemos que si $t = 1$, entonces $f(p, s) \subsetneq X = f(p, t)$. Además, ya habíamos visto que si $t < 1$, entonces $f(p, s) \subsetneq f(p, t)$. En ambos casos se tiene que $f(p, s) \subsetneq f(p, t)$.

Se sigue del Lema 1.69, que X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$. ■

Para el caso en que $E(X)$ es infinito, vamos a definir el encaje de manera adecuada en una cantidad numerable de arcos ajenos dos a dos. Para ello, necesitamos introducir la siguiente noción.

Definición 4.14 Sean (X, A) suave por arcos, $x, e_0 \in X$ y $(e_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de $E(X)$ tales que $\lim e_n = e_0$. Si $\{x\} = xe_n \cap xe_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, decimos que $\bigcup_{n=0}^\infty xe_n$ es un **abanico simple**. Por otro lado, si existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\{x\} \subsetneq xe_{n_0} \cap xe_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq n_0$, sea z_n el primer punto en el arco xe_n , yendo de e_n a x , que está en xe_{n_0} . Supongamos que $z_n \neq e_{n_0}$ para toda $n \neq n_0$, $\lim z_n = x$ y $z_n \neq z_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$. Decimos que $\bigcup_{n=0}^\infty xe_n$ es un **peine simple** si $n_0 = 1$ y $\{x\} = xe_0 \cap xe_1$, o bien si $n_0 = 0$.



Abanico simple y peine simple

Lema 4.15 Sean (X, A) suave por arcos, $x, e_0 \in X$ y $(e_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión de $E(X)$ tales que $\lim e_n = e_0$. Si $\bigcup_{n=0}^\infty xe_n$ es un abanico simple o un peine simple, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X tal que

- (a) $x_n \in xe_n \setminus \{x, e_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
- (b) $\lim x_n = x$,
- (c) $x_n e_n \cap \left(\bigcup_{m \neq n} xe_m \right) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y
- (d) $x_n e_n \cap xe_0 = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Tomemos una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu(X) = 1$. Supongamos primero que $\bigcup_{n=0}^\infty xe_n$ es un abanico simple.

Dada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in xe_n$ tal que $\mu(xx_n) = \frac{1}{2^n} \mu(xe_n)$. Como $0 < \mu(xx_n) < \mu(xe_n)$ y $xx_n \subset xe_n$, tenemos que $x_n \in xe_n \setminus \{x, e_n\}$. Puesto que $\mu(xx_n) \leq \frac{1}{2^n}$, se tiene que $\lim \mu(xx_n) = 0$. Así que $\lim x_n = x$. Además, dada $n \in \mathbb{N}$, $x_n e_n \subset xe_n \setminus \{x\}$. Por lo tanto, $x_n e_n \cap xe_m \subset (xe_n \setminus \{x\}) \cap xe_m = \emptyset$ para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \neq n$. Esto concluye la prueba en este caso.

Ahora, supongamos que $\bigcup_{n=0}^\infty xe_n$ es un peine simple. Es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\{x\} \subsetneq xe_{n_0} \cup xe_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq n_0$, sea z_n el

primer punto en el arco xe_n , yendo de e_n a x , que está en xe_{n_0} . De aquí que $\{x\} \subsetneq xe_n \cap xe_{n_0} = xz_n$ y, por tanto, $z_n \neq x$ y $z_n \neq e_{n_0}$ para cada $n \neq n_0$. Observemos además que $xe_{n_0} \cap z_n e_n = \{z_n\}$ para cada $n \neq n_0$. Tomemos dos números distintos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$. Como $z_n, z_m \in xe_{n_0}$, podemos suponer que $x <_x z_n <_x z_m <_x e_{n_0}$. Entonces $xz_n \subsetneq xz_m$ y $z_m e_m \subset z_n e_m \setminus \{z_n\}$. Puesto que $xz_n = xe_n \cap xe_{n_0} = xe_n \cap xz_m$, tenemos que $z_n e_n \cap z_m e_m = \{z_n\}$. De aquí que $z_n e_n \cap z_m e_m = \emptyset$ y, además, $(z_n e_n \setminus \{z_n\}) \cap xe_m = \emptyset$

Veamos que, en el caso en que $n_0 = 1$, $xe_0 \cap z_n e_n = \emptyset$ para cada $n > 1$. Observemos que $xe_0 \cap z_n e_n \subset xe_0 \cap (xz_n \cup z_n e_n)$. Pero $xe_0 \cap xe_1 = \{x\}$. Así que xe_0 interseca a xz_n solamente en el punto $\{x\}$. Por lo tanto, los arcos xe_0 y xe_n se intersectan solamente en el punto $\{x\}$ (Lema 4.5). Como $z_n \neq x$, concluimos que $xe_0 \cap z_n e_n = \emptyset$ para cada $n > 1$.

Ahora bien, observemos que $(z_n)_{n \neq n_0}$ es una sucesión en xe_{n_0} que converge a x . Si $n_0 = 1$, podemos tomar un punto $z_1 \in xe_1$ tal que $z_n <_x z_1 <_x e_1$ para cada $n > 1$. Es decir, $xz_n \subsetneq xz_1 \subsetneq xe_1$. Así, en el caso en que $n_0 = 1$, $xe_0 \cap z_1 e_1 \subset xe_0 \cap (xe_1 \setminus \{x\}) = \emptyset$ y $(z_1 e_1 \setminus \{z_1\}) \cap xe_n \subset (z_1 e_1 \setminus \{z_1\}) \cap xz_n = \emptyset$ para cada $n > 1$.

Dada $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$, sea $x_n \in z_n e_n$ tal que $\mu(z_n x_n) = \frac{1}{2^n} \mu(z_n e_n)$. Como $0 < \mu(z_n x_n) < \mu(z_n e_n)$, tenemos que $x <_x z_n <_x x_n <_x e_n$. De modo que $x_n \in xe_n \setminus \{x, z_n, e_n\}$. Como $\mu(z_n x_n) \leq \frac{1}{2^n}$ para cada $n \neq n_0$, se tiene que $\lim \mu(z_n x_n) = 0$ y, por tanto, $\lim x_n = \lim z_n = x$.

Por otro lado, dados dos números distintos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$, $x_n e_n \cap xe_m \subset (z_n e_n \setminus z_n) \cap xe_m = \emptyset$. Si $n_0 = 1$, tenemos que $x_1 e_1 \cap xe_n \subset (z_1 e_1 \setminus z_1) \cap xe_n = \emptyset$ para $n > 1$. Esto prueba que se cumple la propiedad pedida en (c).

Mostremos que se cumple la propiedad en (d). En el caso en que $n_0 = 1$, tenemos que $xe_0 \cap z_n e_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $xe_0 \cap x_n e_n \subset xe_0 \cap z_n e_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el caso en que $n_0 = 0$, tenemos que $xe_0 \cap z_n e_n = \{z_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $xe_0 \cap x_n e_n \subset xe_0 \cap (z_n e_n \setminus \{z_n\}) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que se cumple (d), con lo cual concluimos la prueba del lema. ■

Teorema 4.16 *Si (X, A) es suave por arcos en q y $E(X)$ es infinito, entonces existen $p, e_0 \in X$ y una sucesión $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $E(X)$ tales que (X, A) es*

suave por arcos en p , $\lim e_n = e_0$ y $\bigcup_{n=0}^{\infty} pe_n$ es un abanico simple o un peine simple.

Demostración. Como $E(X)$ es infinito y X es compacto, podemos tomar una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de $E(X)$ y un punto $y \in X$ tales que $\lim y_n = y$, $y_n \neq y_m$ para cada $m \neq n$ y $y \neq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $x \in qy$, sea $E_x = \{e \in E(X) : qe \cap qy = qx\}$. Sean

$$A = \{x \in qy : E_x \neq \emptyset\},$$

$$B = \{x \in A : E_x \text{ es infinito}\} \text{ y}$$

$$C = \{x \in B : \text{existen } e_0 \in X \text{ y una sucesión } (e_n)_{n=1}^{\infty} \text{ en } E(X) \text{ tales que } \lim e_n = e_0 \text{ y } \bigcup_{n=0}^{\infty} xe_n \text{ es un abanico simple o un peine simple}\}.$$

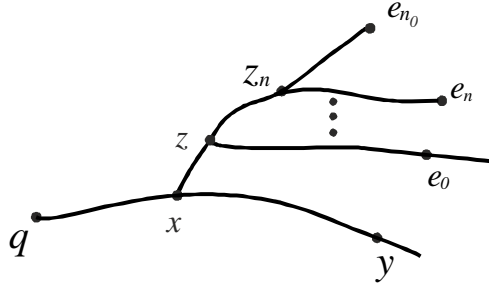
Primero vamos a ver qué condiciones tiene que cumplir un punto x de B para que podamos garantizar que $x \in C$.

Si $x \in B$, como E_x es infinito, existe una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en $E(X)$ tal que $qe_n \cap qy = qx$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X , podemos suponer que existe $e_0 \in X$ tal que $\lim e_n = e_0$. Notemos que, o bien existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \subsetneq xe_n \cap xe_{n_0}$ para una infinidad de números n , o bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, para casi toda $m \neq n$ se tiene que $\{x\} = xe_n \cap xe_m$. Entonces, tomando subsucesiones si es necesario, solo tenemos que considerar dos casos.

El primer caso es que $\{x\} = xe_n \cap xe_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$. En este caso, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \subsetneq xe_k \cap xe_0$, entonces $xe_0 \cap xe_n = \{x\}$ para cada $n \neq k$, pues $xe_k \cap xe_n = \{x\}$. Entonces podemos suponer que $xe_0 \cap xe_n = \{x\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $\bigcup_{n=0}^{\infty} pe_n$ es un abanico simple y, por tanto, que $x \in C$.

El segundo caso es que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \subsetneq xe_n \cap xe_{n_0}$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_0 = 1$. Para

cada $n > 1$, sea z_n el primer punto en el arco xe_n , yendo de e_n a x , que está en xe_1 . Como $\{x\} \subsetneq xe_1 \cap xe_n$ para cada $n > 1$, tenemos que $z_n \neq x$. Por la compacidad de xe_1 , podemos suponer que la sucesión $(z_n)_{n=2}^\infty$ es convergente y sea $z = \lim z_n \in xe_1$.



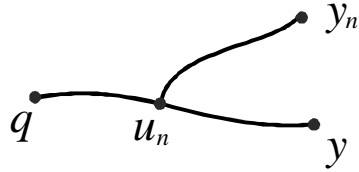
Puesto que $z_n, e_n \in xe_n \subset qe_n$, tenemos que $x <_q z_n <_q e_n$ para cada $n > 1$. Entonces, por el Lema 4.7, $x <_q z <_q e_0$ y $\lim z_n e_n = ze_0$. Por tanto, $z \in xe_0$. De manera que $ze_0 \subset qe_0$.

Cuando se cumpla que $xe_1 \cap xe_0 = \{x\}$. Entonces $z \in xe_1 \cap xe_0 = \{x\}$. Así que $\lim z_n = x$. Por otro lado, como $z_n \neq x$ para cada $n > 1$ y $\lim z_n = x$, podemos suponer que $z_n \neq z_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Esto muestra que $\bigcup_{n=0}^\infty pe_n$ es un peine simple y, por tanto, que $x \in C$.

Hemos mostrado que, dada $x \in B$, para poder garantizar que $x \in C$, basta que se cumpla el primer caso o que se cumpla el segundo caso, pero que además se satisfaga que $xe_0 \cap xe_1 = \{x\}$.

Observemos que $A \neq \emptyset$ pues para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in qy$ tal que $qy_n \cap qy = qu_n$ y así, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$. Ahora bien, denotemos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A .

Ahora veamos que $A' \cup C \neq \emptyset$. Si $A' = \emptyset$, entonces A es finito, de lo contrario A tendría un punto de acumulación, por la compacidad de qy . Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u_k \in B$. Es decir, existe una subsucesión $(y_{n_m})_{m=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ tal que $y_{n_m} \in E_{u_k}$. Como $\lim y_n = y$, se tiene $\lim_{m \rightarrow \infty} y_{n_m} = y$. Sean $e_m = y_{n_m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, $e_0 = y$ y $x = u_k$.



Veamos que $x \in C$. Sabemos que $x \in B$. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \not\subseteq xe_{n_0} \cap xe_{n_0}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_0 = 1$. Observemos que $xe_1 \cap xe_0 = xe_1 \cap xy \subset xe_1 \cap qy$. Como $x \in A$, tenemos que $xe_1 \cap qy = \{x\}$. Por tanto, $xe_1 \cap xe_0 = \{x\}$. Por lo que discutimos antes, $x \in C$.

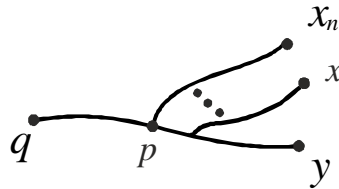
Hemos mostrado que $A' \cup C \neq \emptyset$. Veamos que $A' \cup C$ es cerrado. Basta probar que $(A' \cup C)' \subset A' \cup C$. Notemos que $(A' \cup C)' = (A')' \cup C' \subset A' \cup C' \subset A' \cup A' = A' \subset A' \cup C$. Por tanto $A' \cup C$ es cerrado.

Como $A' \cup C$ es un subconjunto cerrado de qy , podemos tomar $p = \min_{\leq q} A' \cup C$.

Veamos que p es un punto de suavidad de (X, A) . Es decir, veamos que la función inducida $A_p : X \rightarrow C(X)$, es continua (recordemos que $A_p(x) = px$). Tomemos $x \in X$ y una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X tales que $\lim x_n = x$. Analizaremos los lugares por los que el arco x_nq “entra” al arco qy . Puede ocurrir que entre por el arco py (Caso 1)), por el extremo q (Caso 2)), o por el arco $qp \setminus \{q, p\}$ (Caso 3)). Tomando subsucesiones si es necesario, tenemos tres casos.

Caso 1) $p \in qx_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

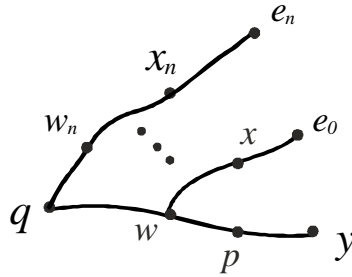
En este caso $p \leq_q x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.7, se tiene que $(px_n)_{n=1}^\infty$ converge a px .



Caso 2) $q \in px_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En este caso $px_n = pq \cup qx_n$. Pero, como (X, A) es suave por arcos en q , se tiene que $(qx_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a qx . Por tanto, la sucesión $(px_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\lim pq \cup \lim qx_n = pq \cup qx$.

Nos falta ver que $pq \cup qx = px$. Sea $w \in qx$ tal que $wx \cap qp = \{w\}$. Si $w = q$, entonces $px = pq \cup qx$.



Supongamos que $w \neq q$. Entonces $p \neq q$. Como $w \in qx$ y $\lim qx_n = qx$, por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $w_n \in qx_n$ tal que $\lim w_n = w$. Como $w \neq q$, podemos suponer que $w_n \neq q$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $w_n \in qx_n \setminus \{q\}$. Por lo tanto, $w_n \notin pq$. Si existe un punto $w' \in X$ tal que $w_n = w'$ para una infinidad de números n , entonces $\lim w_n = w'$. De aquí que $w_n = w' = w \in pq$ para una infinidad de números n . Lo cual es una contradicción. Entonces podemos suponer que $w_n \neq w_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $q \in C$. Lo cual sería una contradicción pues $p = \min_{\leq q} (A' \cup C)$ y $p \neq q$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $e_n \in E(x_n)$. Por la compacidad de X , podemos suponer que la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $e_0 \in X$. Puesto que $qx_n \subset qe_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, del Lema 1.25 se sigue que $qx \subset qe_0$. Además, por el Lema 3.3 tenemos que $qe_n \cap qe_0 = \{q\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $e_n \neq e_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si existe $e' \in X$ tal que $e_n = e'$ para una infinidad de números n , entonces $e_0 = \lim e_n = e'$. De aquí que $e_n = e$ para una infinidad de números n . Lo cual es una contradicción. Podemos suponer

entonces que $e_n \neq e_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces E_q es infinito. Por tanto, $q \in B$.

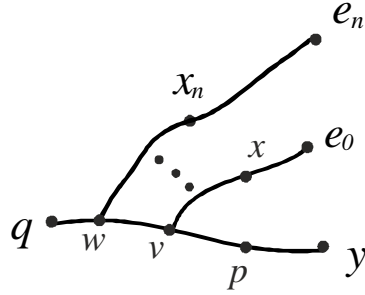
Para ver que $q \in C$, supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{q\} \subsetneq qe_{n_0} \cap qe_{n_0}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_0 = 1$. Como $qe_n \cap qe_0 = \{q\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular, tenemos que $qe_1 \cap qe_0 = \{q\}$. Por lo que discutimos antes, tenemos que $q \in C$. Se sigue que $q = \min_{\leq q}(A' \cup C) = p$. Esto contradice que $p \neq q$. Concluimos que $w = q$ y, por tanto, $px = pq \cup qx$. Esto termina el caso 2.

Caso 3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in pq \setminus \{p, q\}$ tal que $qx_n \cap qp = qw_n$.

En este caso, como qp es compacto, podemos suponer que w_n converge a un punto $w \in qp$. Como $w_n \in qx_n$, tenemos que $w_n \leq_q x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.7, $\lim w_n x_n = wx$. Por otro lado, tenemos que $w_n \leq_q p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente, del Lema 4.7 se sigue que $w \leq_q p$ y $\lim w_n p = wp$. De aquí que $\lim px_n = \lim (pw_n \cup w_n x_n) = pw \cup wx$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $e_n \in E(x_n)$. Por la compacidad de X , podemos suponer que la sucesión $(e_n)_{n=1}^\infty$ converge a un punto $e_0 \in X$. Puesto que $qe_n \cap qy = qe_n \cap qp = qw_n$, tenemos que $w_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos, además, que $w_n e_n \cap qp = \{w_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si existe $e' \in X$ tal que $e_n = e'$ para una infinidad de números n , entonces $e_0 = \lim e_n = e'$. Así que $e_n = e_0$ y $w_n, x_n \in qe_0$ para una infinidad de números n . Además, $qe_0 \cap qp = qe_n \cap qp = qw_n$ para una infinidad de números n , tenemos que $w_n = w_m$ para una infinidad de números $n, m \in \mathbb{N}$. Así que $w_n = w$ para una infinidad de números n . Por la compacidad de we_0 y como $\lim x_n = x$, tenemos que $x \in we_0$. De aquí que $px = pw \cup wx = \lim px_n$. Supongamos entonces que $e_n \neq e_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$.

Si $w_n = w$ para una infinidad de números $n \in \mathbb{N}$. Entonces $w \in A$. Además, $w \in qp \setminus \{q, p\}$. Como $e_n \neq e_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que E_w es infinito y $w \in B$. Si $pw \cap wx = \{w\}$, entonces $px = pw \cup wx = \lim px_n$. Supongamos que $\{w\} \subsetneq wp \cap wx$. Veamos que $w \in C$. Como $w \in B$, supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\{w\} \subsetneq we_n \cap we_{n_0}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_0 = 1$. Mostremos que $we_1 \cap we_0 = \{w\}$.



Sea v el primer punto en el arco pw , yendo de p a w , que está en wx . Entonces $px = pv \cup vx$ y por tanto, $pe_0 = pv \cup vx \cup xe_0 = pv \cup ve_0$. Como $w_n e_n \cap qp = \{w\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $we_n \cap vw = \{w\}$ y $we_n \cap we_0 = \{w\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (Lema 4.5). En particular, $we_1 \cap we_0 = \{w\}$. Esto prueba que $w \in C \cap qp$. Pero $p = \min_{\leq q}(A' \cup C)$. Así que $p \leq_q w$. Concluimos que $p = w$. Lo cual es una contradicción, pues supusimos que $w = w_n \in pq \setminus \{p, q\}$.

Supongamos ahora que $w_n \neq w_m$ para cada par de números distintos n y m . Puesto que $w_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $w \in A' \cap pq$. Entonces $p \leq_q w$. Pero, por la definición de p , tenemos que $p \leq_p w$. Concluimos que $p = w$. Por otro lado, $w_n x_n$ converge a $wx = px$. Además, $w_n \leq_q p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces pw_n converge a $wp = \{p\}$. Así que $px_n = pw_n \cup w_n x_n$ converge a $\{p\} \cup px = px$.

Hemos mostrado que (X, A) es suave por arcos en p .

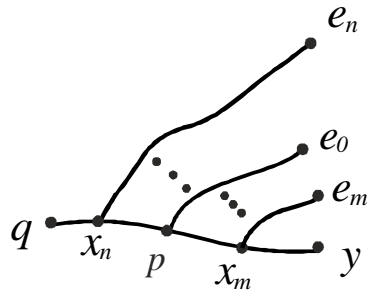
En el caso en que $p \in C_\infty$, tenemos que existen $e_0 \in X$ y una sucesión $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $E(X)$, tales que $\bigcup_{n=0}^\infty pe_n$ es un abanico simple o un peine simple y entonces ya habríamos acabado.

Supongamos entonces que $p \in A'$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en $A \subset qy$, de puntos distintos dos a dos, tales que x_n converge a p y $x_n \neq p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $E_{x_n} \neq \emptyset$, existe $e_n \in E(X)$ tal que $qy \cap qe_n = qx_n$. Veamos que $x_n \in pe_n \setminus \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \in pq$, entonces $pq = px_n \cup x_n q$. De aquí que $pe_n = px_n \cup x_n e_n$. Por tanto $x_n \in pe_n \setminus \{p\}$. Supongamos que $x_n \in py$. Entonces $p \in qx_n \subset qe_n$. Así que $x_n \in pe_n \setminus \{p\}$. En cualquier caso, $x_n \in pe_n \setminus \{p\}$. Observemos, además, que $pe_n \cap qy = px_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $n \neq m$. Si existe $z \in x_n e_n \cap x_m e_m$, entonces $z \in p e_n \cap p e_m$. Así que $p z \subset p e_n \cap p e_m$. Ahora bien, como $z \in x_n e_n$, se tiene que $x_n \in p z$. Por tanto, $p x_n \subset p e_m \cap q y = p x_m$. De manera análoga, tenemos que $p x_m \subset p x_n$. Así que $p x_n = p x_m$. Esto implica que $x_n = x_m$, lo cual es una contradicción. Hemos probado que $x_n e_n \cap x_m e_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$.

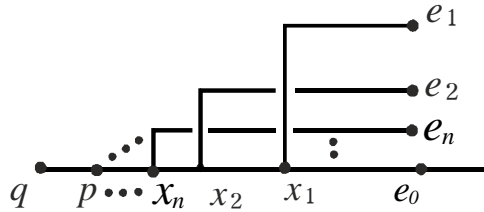
Puesto que $\lim x_n = p$, podemos suponer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in p x_{n_0} \subset q y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_0 = 1$. Entonces, dada $n > 1$, $p x_n \subsetneq p x_1$. Como $x_n e_n \cap x_1 e_1 = \emptyset$, tenemos que $x_n \in x_n e_n \cap p e_1 = x_n e_n \cap (p x_1 \cup x_1 e_1) = x_n e_n \cap p x_1 \subset x_n e_n \cap q y = \{x_n\}$. Concluimos que x_n es el primer punto del arco $p e_n$, yendo de e_n a p , que está en $p e_1$. Como X es compacto, podemos suponer que e_n converge a un punto $e_0 \in X$. Entonces tenemos dos casos.

Caso 1) $\{p\} = p e_0 \cap q y$. Como $p x_n \subset q y$, tenemos que $p e_0 \cap p x_n = \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue del Lema 3.3 que $p e_0 \cap p e_n = \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $p e_0 \cap p e_1 = \{p\}$. Entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} p e_n$ es un peine simple.



Caso 2) $\{p\} \subsetneq p e_0 \cap q y$. Tomando subsucesiones si es necesario tenemos dos subcasos. Si $x_n \notin p e_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $p e_0 \cap p x_n = \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $p e_0 \cap p e_1 = \{p\}$. Entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} p e_n$ es un peine simple. Supongamos ahora que $x_n \in p e_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $z \in p e_0 \cap q y$ tal que $p z = p e_0 \cap q y$. Como $\lim x_n = p$, podemos suponer que $p x_n \subsetneq p x_1 \subsetneq p z$ para cada $n > 1$. Como $p x_n = p e_n \cap q y$, tenemos que $x_n e_n \cap z e_0 = \emptyset$. Así que $x_n \in p e_0 \cap x_n e_n \subset (p z \cup z e_0) \cap x_n e_n = p z \cap x_n e_n \subset q y \cap x_n e_n = \{x_n\}$.

Concluimos que x_n es el primer punto del arco pe_n , yendo de e_n a p , que está en pe_0 . Esto muestra que $\bigcup_{n=0}^{\infty} pe_n$ es un peine simple.



Esto concluye la prueba. ■

Estamos listos para probar el teorema principal de este capítulo. Como ya mencionamos, construiremos el encaje. Para ello vamos a definir varias funciones y veremos algunas propiedades que nos ayudarán con nuestro objetivo.

Sea X un continuo suave por arcos. Consideremos a X como un subcontinuo del cubo de Hilbert I^∞ . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\pi_n : X \rightarrow [0, 1]$ la n -ésima proyección. Si $x \in X$, sea $x_n = \pi_n(x)$.

Consideremos una biyección $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $P_k = \{n \in \mathbb{N} : \xi(n) \in (k\sqrt{2}, (k+1)\sqrt{2})\}$. Puesto que ξ es una biyección y $(\sqrt{2}k, \sqrt{2}(k+1))$ tiene una infinidad de números racionales, P_k tiene una cantidad numerable de elementos.

Observemos que $P_k \cap P_j = \emptyset$ para cualesquiera $k \neq j$. Además, como P_k es un subconjunto de \mathbb{N} , entonces podemos ordenar los elementos de manera creciente: $P_k = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$, donde $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$.

Sea A una arco-estructura para la cual (X, A) es suave por arcos. Por el Corolario 4.13, falta el caso en que $E(X)$ es infinito.

Por el Teorema 4.16, existen $p, e'_0 \in X$ y existe una sucesión $(e'_n)_{n=1}^{\infty}$ de $E(X)$, tales que $\lim e'_n = e'_0$, (X, A) es suave por arcos en p y $\bigcup_{n=0}^{\infty} pe'_n$ es

un abanico simple o un peine simple. Además, por el Lema 4.15, existe una sucesión $(p_n)_n^\infty$ de X , tal que

- (1) $\lim p_n = p$;
- (2) $p_n \in pe'_n - \{p, e'_n\}$;
- (3) $p_n e'_n \cap \left[\bigcup_{m \neq n} pe'_m \right] = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y
- (4) $pe_0 \cap p_n e'_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Construiremos una función continua $h : X \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$ con las siguientes propiedades:

- a) $h(q, 0) = \{q\}$ para cada $q \in X$;
- b) $h(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$;
- c) Si $s \leq t$, entonces $h(q, s) \subset h(q, t)$; y
- d) h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

Dividiremos la construcción en 7 pasos.

PASO 1. FUNCIONES AUXILIARES

La función φ

Consideremos la función $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$\varphi(t, s) = \begin{cases} s^{\frac{t+1}{2}}, & \text{si } s \in (0, 1]; \\ 0, & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Observemos que φ es continua. Veamos algunas propiedades de φ .

(1) Para un número fijo $t_0 \in [0, 1]$, la función $\varphi_{t_0} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por $\varphi_{t_0}(s) = \varphi(t_0, s) = s^{\frac{t_0+1}{2}}$ es un homeomorfismo estrictamente creciente.

(2) $s^{\frac{1}{2}} \geq \varphi(t, s) \geq s$ para cada $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Como $t \in [0, 1]$, entonces $\frac{t+1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$. Puesto que $s \in [0, 1]$, tenemos que $s^{\frac{1}{2}} \geq s^{\frac{t+1}{2}} = \varphi(t, s)$ y $\varphi(t, s) = s^{\frac{t+1}{2}} \geq s$.

La función α

Para $y \in X \setminus \{p\}$, consideramos la función $\alpha_y : py \longrightarrow [0, 1]$ definida como $\alpha_y(x) = t$, donde $\mu(px) = t\mu(py)$. Es decir, $\alpha_y(x) = \frac{\mu(px)}{\mu(py)}$.

Como μ y A_p son continuas, α_y es continua. Además, $\alpha_y(p) = 0$ y $\alpha_y(y) = 1$. Si $x_1, x_2 \in py$ son tales que $x_1 <_p x_2$, entonces $px_1 \subsetneq px_2$. Por tanto, $\mu(px_1) < \mu(px_2)$. Así que $\alpha_y(x_1) < \alpha_y(x_2)$.

La función Ψ

Consideremos también la función $\Psi : [0, 1) \times [0, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, definida como $\Psi(r, s) = \frac{s-r}{1-r}$.

Como $r < 1$, Ψ está bien definida. Además, observemos que Ψ es continua. Si $r \in [0, 1)$ es un número fijo, entonces la función $\Psi_r : [r, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, dada por $\Psi_r(s) = \frac{s-r}{1-r} = \frac{1}{1-r}s - \frac{r}{1-r}$, es una función lineal tal que $\Psi_r(r) = 0$ y $\Psi_r(1) = 1$. Es decir, Ψ_r manda linealmente el intervalo $[r, 1]$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

PASO 2. LA FUNCIÓN DE WHITNEY

Como la sucesión $(e'_n)_{n=1}^\infty$ converge a e'_0 , tenemos que la sucesión $(pe'_n)_{n=1}^\infty$ converge a pe'_0 . Vamos a elegir una función de Whitney μ , distinguiamos dos casos.

Caso 1. $p \neq e'_0$.

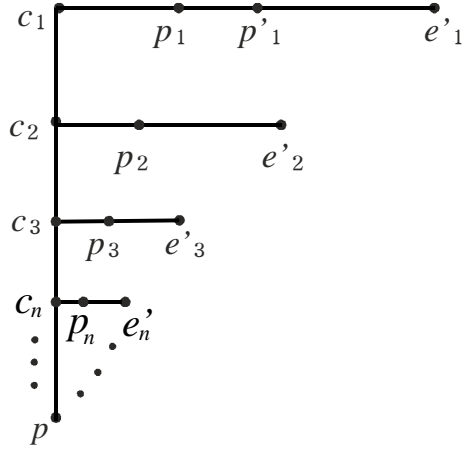
En este caso elegimos una función de Whitney μ cualquiera.

Caso 2. $p = e'_0$.

Subcaso 2.1. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $pe'_i \cap pe'_n \neq \{p\}$ para una infinidad de índices n .

En este caso podemos suponer que $pe'_1 \cap pe'_n \neq \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \geq 2$, elegimos $c_n \in pe'_1$ tal que $pe'_1 \cap pe'_n = pc_n$. Como $\lim pe'_n = pe'_0 = \{p\}$, tenemos que $\lim pc_n = \{p\}$. Entonces podemos elegir una subsucesión de $(c_n)_{n=1}^\infty$ que sea estrictamente decreciente en el arco pe'_1 . De manera que podemos suponer que $\dots <_p c_3 <_p c_2 <_p p_1$. Elegimos un punto $c_1 \in c_2p_1 \setminus$

$\{c_2, p_1\}$. Sea $n \geq 2$. Si ocurre que $p_n \leq_p c_n$, entonces $p_n c_n \subset pe'_1 \cap pe'_n$. De aquí que $p_n e'_n \cap pe'_1 \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Concluimos que $c_n <_p p_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.



Subcaso 2.1

Tomemos un punto $p'_1 \in p_1 e_1$ y consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{pc_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{pp_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{pe'_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup \{pp'_1\} \cup \{\{p\}\} \subset C(X)$. Dado que $\lim pc_n = \{p\}$, $\lim pp_n = \{p\}$ y $\lim pe'_n = \{p\}$, tenemos que \mathcal{A} es cerrado en $C(X)$. Definamos la función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ como

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \{p\}; \\ \frac{1}{2^{20n+1}}, & \text{si } A = pc_n; \\ \frac{1}{2^{10n+2}}, & \text{si } A = pp_n; \\ \frac{1}{2^{n+4}}, & \text{si } A = pe'_n \text{ y } n > 1; \\ \frac{1}{2^5}, & \text{si } A = pp'_1. \end{cases}$$

Observemos que ν es continua y satisface que, si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subsetneq B$, entonces $\nu(A) < \nu(B)$. Así que ν satisface las propiedades de una función de Whitney y está definida en un conjunto cerrado de $C(X)$. Luego, por [39, Teorema 3.1], existe una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$ y $\mu(X) = 1$.

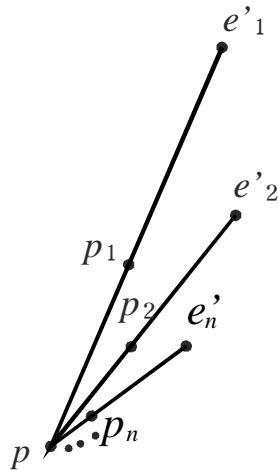
Subcaso 2.2. Para toda $i \in \mathbb{N}$, $pe'_i \cap pe'_n = \{p\}$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

En este caso podemos suponer que $pe'_i \cap pe'_n = \{p\}$ para cualesquiera $i \neq n$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{pp_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{pe'_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{p\}\} \subset C(X)$. Dado que $\lim pp_n = \{p\}$ y $\lim pe'_n = \{p\}$, tenemos que \mathcal{A} es cerrado en $C(X)$. Definamos la función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ como

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \{p\}; \\ \frac{1}{2^{10n+1}}, & \text{si } A = pp_n; \\ \frac{1}{2^{n+4}}, & \text{si } A = pe'_n. \end{cases}$$

Observemos que ν es continua y satisface que, si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subsetneq B$, entonces $\nu(A) < \nu(B)$. Así que ν satisface las propiedades de una función de Whitney y está definida en un conjunto cerrado de $C(X)$. Luego, por [39, Teorema 3.1], existe una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$.



Subcaso 2.2

Esto termina la elección de la función μ .

PASO 3. LA FUNCIÓN f

Por el Lema 4.9, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $e_n \in E(p_n)$ tal que

- (a) $\mathcal{L}(p_n) = \frac{\mu(pp_n)}{\mu(pe_n)}$;
- (b) $\mu(pe_n) \geq \mu(px)$ para cada $x \in M_p(p_n)$; y
- (c) $\mathcal{L}(x) = \frac{\mu(px)}{\mu(pe_n)}$ para cada $x \in p_n e_n$.

En particular, $\mu(pe_n) \geq \mu(pe'_n)$. Como X es compacto, podemos suponer que existe un punto $e_0 \in X$ tal que $\lim e_n = e_0$. Entonces $\lim pe_n = pe_0$.

Necesitamos que en el Subcaso 2.1, ocurra que $\mu(pe_1) = \frac{1}{2^3}$. Vamos a modificar a μ para que esto ocurra. Como $p_1 <_p p'_1 <_p e'_1 \leq_p e_1$, tenemos que $\frac{1}{2^5} < \mu(pe'_1) \leq \mu(pe_1)$. Entonces, puesto que $pe_1 \neq X$, $\frac{1}{2^5} < \mu(pe_1) < 1$. Sean $a = \frac{1}{2^5}$, $b = \frac{1}{2^3}$ y $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq a; \\ a + (b-a) \frac{t-a}{\mu(pe_1)-a}, & \text{si } a \leq t \leq \mu(pe_1); \\ b + (1-b) \frac{t-\mu(pe_1)}{1-\mu(pe_1)}, & \text{si } \mu(pe_1) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Claramente, α es una función continua y estrictamente creciente, por lo que $\alpha \circ \mu$ es una función de Whitney. Como $\text{Im } \nu \subset [0, a]$, $\alpha \circ \mu$ también extiende a ν . Notemos que $\alpha(\mu(pe_1)) = b = \frac{1}{2^3}$. Como α es estrictamente creciente, e_1 sigue teniendo las propiedades que lo definieron. Con esto hemos mostrado que, con esta nueva función de Whitney, a la que seguiremos llamando μ para unificar el nombre, conseguimos que $\mu(pe_1) = \frac{1}{2^3}$.

Los puntos z_n

Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijamos $z_n \in p_n e_n$ tal que $\mu(p_n z_n) \leq \frac{1}{2^n} \mu(p_n e_n) \leq \frac{1}{2^n}$. En el Caso 2, como $\mu(pp_n) = \frac{1}{2^{10n+2}}$, podemos tomar z_n suficientemente cerca de p_n de tal forma que $\mu(pz_n) < \frac{1}{2^{10n}}$. En cualquier caso, $\lim p_n z_n = \{p\}$ y $\lim z_n = p$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \in P_k$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = k_m$. Como ξ es una biyección, k y m son únicos.

Definamos la función $f'_n : p_n z_n \longrightarrow [0, \frac{1}{(k+2)^m}]$ como

$$f'_n(x) = \frac{t}{(k+2)^m}, \text{ donde } t = \frac{\mu(p_n x)}{\mu(p_n z_n)}.$$

Como n es fija y μ es continua, tenemos que f'_n es continua. Notemos que $f'_n(p_n) = 0$ y $f'_n(z_n) = \frac{1}{(k+2)^m}$.

Ahora definiremos una función f_n y un conjunto Y considerando dos casos.

Caso A. $p = e_0$.

En este caso definimos $f_n : p e_n \times X \longrightarrow [0, 1]$ por

$$f_n(y, q) = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0; \\ \pi_k(q) f'_n(y), & \text{si } y \in p_n z_n \text{ y } k > 0; \\ \frac{\pi_k(q)}{(k+2)^m}, & \text{si } y \in z_n e_n \text{ y } k > 0; \\ 0, & \text{si } y \in p p_n \text{ y } k > 0. \end{cases}$$

Aquí definimos $Y = \bigcup \{p e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Caso B. $p \neq e_0$.

En este caso definimos $f_n : p_n e_n \times X \longrightarrow [0, 1]$ como

$$f_n(y, q) = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0; \\ \pi_k(q) f'_n(y), & \text{si } y \in p_n z_n \text{ y } k > 0; \\ \frac{\pi_k(q)}{(k+2)^m}, & \text{si } y \in z_n e_n \text{ y } k > 0. \end{cases}$$

Aquí definimos $Y = p e_0 \cup \left(\bigcup \{p_n e_n : n \in \mathbb{N}\} \right)$.

Como mencionamos antes, $f'_n(z_n) = \frac{1}{(k+2)^m}$. Esto implica que $f_n(z_n, q)$ está bien definida en los puntos donde se define de dos maneras. Claramente, f_n es continua en cada uno de los pedazos en los que está definida y como estos pedazos son subconjuntos cerrados del dominio, podemos concluir que f_n está bien definida y es continua.

Veremos que Y es un conjunto cerrado en el Caso A, también en el Caso B resulta ser cerrado y la prueba es similar. Como $\lim pe_n = pe_0$, el conjunto $\mathcal{B} = \{pe_0\} \cup \{pe_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en $C(X)$. De manera que, por el Lema 1.31, Y es un subconjunto cerrado de X .

Definimos $f : Y \times X \longrightarrow [0, 1]$ por:

$$\begin{aligned} f(y, q) &= f_n(y, q), \text{ si } y \in pe_n, \text{ en el Caso A y,} \\ f(y, q) &= f_n(y, q), \text{ si } y \in p_n e_n; \text{ y } f(y, q) = 0, \text{ si } y \in pe_0, \text{ en el Caso B.} \end{aligned}$$

Veamos cómo relacionamos los Casos A y B con los Casos 1 y 2 de la elección de la función de Whitney μ . En el Caso A, como $\lim e_n = e_0$, tenemos que $\lim pe_n = \{p\}$, de manera que $\lim \mu(pe_n) = 0$ y, como $\mu(pe'_n) \leq \mu(pe_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim \mu(pe'_n) = 0$ y $\lim e'_n = p$. Es decir, $e'_0 = p$. Así que cada vez que estemos en el Caso A, estaremos en el Caso 2, y entonces supondremos que estamos en alguno de los siguientes dos casos.

Caso A.1. $pe'_1 \cap pe'_n \neq \{p\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este caso tenemos construida la sucesión $(c_n)_{n=1}^\infty$ y la función de Whitney μ , en el Subcaso 2.1.

Caso A.2. $pe'_m \cap pe'_n = \{p\}$ para cualesquiera $m \neq n$.

Aquí tenemos definida la función μ en el Subcaso 2.2.

Veamos que f está bien definida. En el Caso B, como los conjuntos $pe_0, p_1 e_1, p_2 e_2, \dots$ son ajenos entre sí, la función f está bien definida. En el Caso A.2, si $n \neq m$, entonces $pe_m \cap pe_n = \{p\}$; y como $f_n(p, q) = 0$ y $f_m(p, q) = 0$, para cada $q \in X$, concluimos que en este subcaso, f está bien definida. En el Caso A.1, si $n < m$, entonces $c_m <_p c_n$. De aquí que $pe_n \cap pe_m = pc_m \subset pc_n \subset pe_n$. De manera que, si $y \in pe_n \cap pe_m$ y $q \in X$, entonces $f_n(y, q) = 0 = f_m(y, q)$. Esto muestra que f está bien definida también en este subcaso y por tanto, f está bien definida.

Veamos que la función f es continua. Sea $(y_0, q_0) \in Y \times X$. En el caso en que $y_0 \notin pe_0 = \lim pe_n$, existe una vecindad U de y_0 en X tal que U intersecta sólo a un número finito de conjuntos pe_n . Así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Y \cap U \subset pe_1 \cup \dots \cup pe_N$. Como $f|_{(pe_n \cap Y) \times X}$ es continua y coincide

en las intersecciones de los conjuntos pe_n , tenemos que $f|_{((pe_1 \cup \dots \cup pe_N) \cap Y) \times X}$ es continua. De manera que f es continua en una vecindad $(Y \cap U) \times X$ de (y_0, q_0) . Por tanto, f es continua en (y_0, q_0) . Ahora supongamos que $y_0 \in pe_0$. En este caso $f(y_0, q_0) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > k_m$ para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $m \in \{1, \dots, n\}$. Dada $r \in \mathbb{N}$ tal que $r > N$, cuando escribimos $r = k_m$, tenemos que $k > n$ o $m > n$. De manera que $\frac{1}{n} > \frac{1}{k} > \frac{1}{(k+2)^m}$ o $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > \frac{1}{(k+2)^m}$. Ya que $(y_0, q_0) \in U = X \setminus \bigcup \{p_i e_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$, tenemos que $W = (Y \cap U) \times X$ es un abierto de $Y \times X$ que tiene a (y_0, q_0) . Si $(y, q) \in W$, entonces $y \in \bigcup \{p_r e_r : r > N\}$ o $y \in pe_0 \cup \left(\bigcup \{pp_i : i \in \mathbb{N}\} \right)$. En el caso en que $y \in p_r e_r$ para alguna $r > N$, poniendo $r = k_m$, por lo que vimos antes, $\frac{1}{n} > \frac{1}{(k+2)^m} \geq f(y, q) \geq 0$ (la desigualdad $\frac{1}{(k+2)^m} \geq f(y, q)$ se observa de las posibles definiciones de $f(y, q)$). En el caso en que $y \in pe_0 \cup \left(\bigcup \{pp_i : i \in \mathbb{N}\} \right)$, por definición, $f(y, q) = 0$. En cualquier caso, $f(y, q) \in [0, \frac{1}{n}]$. Como se puede fijar n tan grande como se quiera, concluimos que f es continua en (y_0, q_0) . Por tanto, f es continua.

PASO 4. LA FUNCIÓN g .

Vamos a definir una función $g : Y \times X \longrightarrow [0, 1]$.

Para el Caso A.1 necesitamos algunas funciones auxiliares más.

La función χ_n

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\chi_n : c_n p_n \longrightarrow [0, 1]$ dada por $\chi_n(x) = \frac{\mu(c_n x)}{\mu(c_n p_n)}$. Claramente χ_n es continua, $\chi_n(c_n) = 0$ y $\chi_n(p_n) = 1$.

La función κ_n

Ahora definamos la función $\kappa_n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, dada por

$$\kappa_n(t) = (1-t) (\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1) + t (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n).$$

Es decir, κ_n es la función continua que envía linealmente al intervalo $[0, 1]$ en el intervalo con extremos $(\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1)$ y $(\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n)$ y que además cumple que $\kappa_n(0) = (\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1)$ y $\kappa_n(1) = (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n)$.

La función ζ_n

Sea $\zeta_n : c_n p_n \longrightarrow [0, 1]$ dada por $\zeta_n = \kappa_n \circ \chi_n$. Notemos que ζ_n es una función continua que satisface que $\zeta_n(c_n) = \kappa_n(\chi_n(c_n)) = \kappa_n(0) = (\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1)$ y $\zeta_n(p_n) = \kappa_n(\chi_n(p_n)) = \kappa_n(1) = (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n)$.

Sea $g : Y \times X \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$g(y, q) = \begin{cases} \varphi(f(y, q), \alpha_{e_1}(y)) \mu(pe_1), & \text{si } y \in pe_1; \\ \varphi(f(y, q), \alpha_{e_n}(y)) \mu(pe_n), & \text{si } y \in p_n e_n \text{ y } n > 1, \\ \zeta_n(y), & \text{si } y \in c_n p_n \text{ y } n > 1. \end{cases}$$

En el Caso A.2, definimos

$$g(y, q) = \varphi(f(y, q), \alpha_{e_n}(y)) \mu(pe_n), \text{ si } y \in pe_n.$$

En el Caso B, definimos

$$g(y, q) = \begin{cases} \varphi(f(y, q), \alpha_{e_n}(y)) \mu(pe_n), & \text{si } y \in p_n e_n; \\ \varphi(f(y, q), \alpha_{e_0}(y)) \mu(pe_0), & \text{si } y \in pe_0. \end{cases}$$

Como el contradominio de φ es el intervalo $[0, 1]$, tenemos que el contradominio de g es también el intervalo $[0, 1]$.

Veamos que g está bien definida. Empecemos por el Caso A.1. Notemos que

$$\begin{aligned} \varphi(f(p_n, q), \alpha_{e_n}(p_n)) \mu(pe_n) &= \varphi(0, \alpha_{e_n}(p_n)) \mu(pe_n) \\ &= (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{0+1}{2}} \mu(pe_n) \\ &= \zeta_n(p_n). \end{aligned}$$

De modo que $g(p_n, q)$ está bien definida para toda $q \in X$. Dada $n > 1$, como $f(c_n, q) = 0$, $\varphi(f(c_n, q), \alpha_{e_1}(c_n)) \mu(pe_1) = (\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1) = \zeta_n(c_n)$. Como $pe_1 \cap p_n e_n = \emptyset$ y $pe_1 \cap c_n p_n = \{c_n\}$, para toda $n \geq 2$, esto termina la prueba de que g está bien definida en el Caso A.1. En el Caso A.2, como $\alpha_{e_n}(p) = 0$, $\varphi(f(p, q), \alpha_{e_n}(p)) = 0$ y como los puntos de la forma (p, q)

son los únicos donde podría haber duplicidad, obtenemos que en el Caso A.2 g está bien definida. En el Caso B, g está bien definida pues está definida en conjuntos ajenos entre sí. Por tanto g está bien definida en todos los casos.

Veamos algunas propiedades de g .

(1) $g(p, q) = 0$ para cada $q \in X$.

Dada $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{e_n}(p) = 0$. Así que $\varphi(f(p, q), \alpha_{e_n}(p)) = 0$. Esto implica que $g(p, q) = 0$.

(2) g es continua.

Para probar (2), sea $(y_0, q_0) \in Y \times X$. En el caso en que $y_0 \notin pe_0 = \lim pe_n$, existe una vecindad U de y_0 en Y tal que U intersecta sólo a un número finito de conjuntos pe_n . Así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Y \cap U \subset pe_1 \cup \dots \cup pe_N$. Como $g|_{(pe_n \cap Y) \times X}$ está definida en términos de funciones continuas, tenemos que $g|_{((pe_1 \cup \dots \cup pe_N) \cap Y) \times X}$ es continua. De manera que g es continua en una vecindad $((Y \cap U) \times X)$ de (y_0, q_0) . Por tanto, g es continua en (y_0, q_0) . Ahora supongamos que $y_0 \in pe_0$. Sea $((y_i, q_i))_{i=1}^\infty$ una sucesión en $Y \times X$ que converja a (y_0, q_0) . Entonces $\lim y_i = y_0$ y $\lim q_i = q_0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $n_i \in \mathbb{N}_0$ tal que $y_i \in pe_{n_i}$. Por el Lema 1.5, basta con que mostremos una subsucesión de $((y_i, q_i))_{i=1}^\infty$ tal que las imágenes de sus términos bajo g converjan a $g(y_0, q_0)$. Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos suponer que $\lim g(y_n, q_n) = t_0$ para alguna $t_0 \in [0, 1]$. Veamos que $t_0 = g(y_0, q_0)$. Si existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que una infinidad de términos de la sucesión $(y_i)_{i=1}^\infty$ pertenecen a $pe_0 \cup pe_1 \cup \dots \cup pe_N$, como $g|_{((pe_1 \cup \dots \cup pe_N) \cap Y) \times X}$ es continua, $t_0 = g(y_0, q_0)$ y hemos terminado. Podemos suponer entonces que, para cada $N \in \mathbb{N}_0$ sólo hay un número finito de términos de la sucesión $(y_i)_{i=1}^\infty$ en el conjunto $pe_0 \cup pe_1 \cup \dots \cup pe_N$. Esto implica que $\lim n_i = \infty$.

Necesitamos analizar tres casos. Analicemos el Caso A.1, el Caso A.2 es similar, pero más simple que éste, así que no lo analizaremos. En el Caso A.1, $pe_0 = \{p\}$, así que $y_0 = p$ y $g(y_0, q_0) = 0$. Además $\lim pe_n = \{p\}$ así que $\lim \mu(pe_{n_i}) = 0 = \lim \mu(pe_{n_i})$. Así que $0 = \lim \frac{\mu(pe_{n_i})}{\mu(pe_1)} = \lim \alpha_{e_1}(c_{n_i})$ y $0 = \lim (\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1)$. Además, $0 = \lim (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n)$ ($\text{Im } \alpha_{e_n} \subset [0, 1]$). De manera que la imagen de ζ_{n_i} converge al conjunto $\{0\}$. Además, la imagen de $\varphi(f \times \alpha_{e_{n_i}}) \mu(pe_{n_i})$ también converge al conjunto $\{0\}$ ($\text{Im } \varphi \subset [0, 1]$).

Entonces, no importa cómo esté definida $g(y_i, q_i)$, tenemos que $\lim g(y_i, q_i) = 0 = g(y_0, q_0)$. Esto termina la prueba de la continuidad en el Caso A.1.

Ahora veamos el Caso B. Como $\lim \alpha_{e_{n_i}}(y_i) = \lim \frac{\mu(py_i)}{\mu(pe_{n_i})} = \frac{\mu(py_0)}{\mu(pe_0)} = \alpha_{e_0}(y_0)$, la continuidad de las funciones f , φ y μ implica que $\lim g(y_i, q_i) = g(y_0, q_0)$. Esto termina la prueba de (2).

(3) $g(y, q) \geq \mu(py)$ para cada $(y, q) \in Y \times X$.

Por la propiedad (2) de φ , $\varphi(f(y, q), \alpha_{e_n}(y)) \geq \alpha_{e_n}(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Así que cuando $g(y, q)$ es de la forma $g(y, q) = \varphi(f(y, q), \alpha_{e_n}(y)) \mu(pe_n)$, tenemos que $g(y, q) \geq \alpha_{e_n}(y) \mu(pe_n) = \mu(py)$ (aún en el caso en que $p = e_0$ y $y \in pe_0 = \{p\}$). Ahora supongamos que $y \in c_n p_n$, $n > 1$ y que, por supuesto, estamos en el Caso A.1. Entonces $g(y, q) = \zeta_n(y)$. Como $\zeta_n(y)$ está entre los números $(\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1)$ y $(\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n)$ bastará probar que cada uno de ellos es mayor o igual que $\mu(py)$. Notemos que $(\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1) = \left(\frac{\mu(pc_n)}{\mu(pe_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1) = (\mu(pc_n) \mu(pe_1))^{\frac{1}{2}}$. Veremos que $(\mu(pc_n) \mu(pe_1))^{\frac{1}{2}} > \mu(pp_n)$. Observemos que

$$\begin{aligned} (\mu(pc_n) \mu(pe_1))^{\frac{1}{2}} &\geq \left(\left(\frac{1}{2^{20n+1}} \right) (\mu(pe'_1)) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\left(\frac{1}{2^{20n+1}} \right) \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10n+1}} \\ &> \frac{1}{2^{10n+2}} = \mu(pp_n). \end{aligned}$$

Además notemos que $\mu(pp_n) \geq \mu(py)$ pues $y \in pp_n$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n) &= (\mu(pp_n) \mu(pe_n))^{\frac{1}{2}} \\ &> (\mu(pp_n) \mu(pp_n))^{\frac{1}{2}} = \mu(pp_n) \\ &\geq \mu(py). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba de (3).

(4) Si $n_0 \in \mathbb{N}_0$ y $x, y \in z_{n_0} e_{n_0}$ son tales que $x <_p y$, entonces $g(x, q) < g(y, q)$ para toda $q \in X$.

Como $x, y \in z_n e_n$, $f(x, q) = \frac{\pi_k(q)}{(k+2)^m} = f(y, q)$, donde k satisface que $n \in P_k$ y $n = k_m$. Sea $t = \frac{\pi_k(q)}{(k+2)^m}$. Dado que $x <_p y$, $\mu(px) < \mu(py)$. De modo que $\alpha_{e_n}(x) < \alpha_{e_n}(y)$. Como la función φ_t es estrictamente creciente, $\varphi(t, \alpha_{e_n}(x)) < \varphi(t, \alpha_{e_n}(y))$. Por tanto, $g(x, q) < g(y, q)$.

(5) $g(e_n, q) = \mu(pe_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada $q \in X$.

Si $n = 0$, en el Caso A, $g(e_n, q) = g(p, q) = 0$ (por (1)). Además $\mu(pe_0) = \mu(\{p\}) = 0$. Supongamos ahora que no estamos en el Caso A o que $n > 0$. Por definición $g(e_n, q) = \varphi(f(e_n, q), \alpha_{e_n}(e_n)) \mu(pe_n)$. Como $\alpha_{e_n}(e_n) = 1$, $\varphi(f(e_n, q), \alpha_{e_n}(e_n)) = 1$ y $g(e_n, q) = \mu(pe_n)$.

(6) Si $n \in \mathbb{N}_0$, $y \in z_n e_n$ y $y <_p e_n$, entonces $g(y, q) < \mu(pe_n)$.

Por (4) y por (5), $g(y, q) < g(e_n, q) = \mu(pe_n)$.

PASO 5. LA FUNCIÓN G

Consideremos la función $g' : Y \times X \rightarrow [0, 1]$ dada por $g'(y, q) = g(y, q) - \mu(py)$. La continuidad de las funciones g y μ implica que g' es continua. La propiedad (3) de g implica que la imagen de g' está contenida en el intervalo $[0, 1]$. Ya que $Y \times X$ es cerrado en $X \times X$, el Teorema de Extensión de Tietze implica que existe una función continua $G' : X \times X \rightarrow [0, 1]$ que extiende a g' .

Sea $G : X \times X \rightarrow [0, 2]$ la función definida como $G(x, q) = G'(x, q) + \mu(px)$. Veamos algunas propiedades de G . La primera es inmediata.

(7) $G(x, q) \geq \mu(px)$ para cada $(x, q) \in X \times X$.

(8) $G(y, q) = g(y, q) \leq 1$ para cada $(y, q) \in Y \times X$.

Esto se debe a que si $(y, q) \in Y \times X$, entonces $G(y, q) = G'(y, q) + \mu(py) = g'(y, q) + \mu(py) = g(y, q) - \mu(py) + \mu(py) = g(y, q) \in [0, 1]$.

(9) Sean $e \in E(X)$, $q \in X$ y $s \in [\mu(pq), 1]$. Entonces existen $t \in [\mu(pq), s]$ y $y \in pe$ tales que $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t)$ y que también satisfacen

la siguiente propiedad: si $y' \in pe$ y $\mathcal{L}(y') = \Psi(\mu(pq), t')$, para algún $t' \in [\mu(pq), s]$, entonces $G(y', q) \leq G(y, q)$.

Vamos a probar (9). Sea

$$\mathcal{E} = \{y \in pe : \mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t) \text{ para algún } t \in [\mu(pq), s]\}.$$

Necesitamos mostrar que \mathcal{E} es cerrado. Tomemos una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de \mathcal{E} y un punto $y \in X$ tal que $\lim y_n = y$. Ya que $y_n \in pe$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $y \in pe$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [\mu(pq), s]$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), t_n)$. Como el intervalo $[\mu(pq), s]$ es compacto, podemos suponer que $\lim t_n = t_0$ para alguna $t_0 \in [\mu(pq), s]$. Dado que Ψ es continua y $\mu(pq) < 1$, tenemos que $\lim \Psi(\mu(pq), t_n) = \Psi(\mu(pq), t_0)$.

Por el Lema 4.9, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in E(y_n)$ tal que $\frac{\mu(py_n)}{\mu(pb_n)} = \mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), t_n)$. Por la compacidad de X , podemos suponer que existe $b_0 \in X$ tal que $\lim b_n = b_0$. Como $y_n \in pb_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.27 tenemos que $y \in pb_0$.

Si $b_0 = p$, entonces $y = p$. Además $\mathcal{L}(p) = 0 = \Psi(\mu(pq), \mu(pq))$. Por tanto, $y = p \in \mathcal{E}$. Supongamos ahora que $b_0 \neq p$. Por la continuidad de μ , $\lim \frac{\mu(py_n)}{\mu(pb_n)} = \frac{\mu(py)}{\mu(pb_0)}$. Entonces $\frac{\mu(py)}{\mu(pb_0)} = \Psi(\mu(pq), t_0)$. Sea $b' \in E(y)$ tal que $\mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pb')}$ $\leq \frac{\mu(py)}{\mu(pb_0)} = \Psi(\mu(pq), t_0)$. Como $\Psi_{\mu(pq)}$ es lineal y $\Psi(\mu(pq), \mu(pq)) = 0 \leq \mathcal{L}(y) \leq \Psi(\mu(pq), t_0)$, existe $t \in [\mu(pq), t_0]$ tal que $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t)$. Esto demuestra que $y \in \mathcal{E}$. Por tanto \mathcal{E} es cerrado.

Notemos que $\mathcal{L}(p) = 0 = \Psi(\mu(pq), \mu(pq))$ y $p \in pe$, así que $p \in \mathcal{E}$. Esto muestra que $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Como la función $G_q : X \rightarrow [0, 2]$ dada por $G_q(y) = G(y, q)$ es continua y \mathcal{E} es compacto y no vacío, existe $y \in \mathcal{E}$ tal que $G(y', q) \leq G(y, q)$ para todo $y' \in \mathcal{E}$. Esto es lo que se quería demostrar.

(10) Sea $(q, s) \in X \times [0, 1]$ tal que $\mu(pq) < s$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, existe $y_n \in z_n e_n$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), s)$ y $G(x, q) \leq G(y_n, q)$ para toda $x \in py_n$. En particular, $\mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), s)) \neq \emptyset$.

Haremos la prueba de (10) considerando los tres posibles casos.

En el Caso A, como $\mu(pq) < s$, tenemos que $\Psi(\mu(pq), s) > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 3$ y $\frac{1}{2^{4n}} < \Psi(\mu(pq), s)$ para toda $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$. Recordemos que cuando estamos en el Caso A, también estamos en el Caso 2, así que $\mu(pz_n) < \frac{1}{2^{10n}}$. Dado que $\mu(pp) = 0 < \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n) \leq \mu(pe_n)$, considerando un arco ordenado de $\{p\}$ a pe_n , se puede conseguir un punto $y_n \in pe_n \setminus \{p\}$ tal que $\mu(py_n) = \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n)$. Así que $\frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)} = \Psi(\mu(pq), s)$.

Si $y_n \in pz_n$, entonces $\mu(py_n) \leq \mu(pz_n) < \frac{1}{2^{10n}}$. Por la elección de μ , $\frac{1}{2^{n+4}} = \mu(pe'_n) \leq \mu(pe_n)$. Así que $\frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)} \leq \frac{2^{n+4}}{2^{10n}} < \frac{1}{2^{4n}} < \Psi(\mu(pq), s) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)}$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $y_n \notin pz_n$ y entonces $y_n \in z_n e_n \setminus \{z_n\} \subset p_n e_n$.

Veamos que y_n tiene las propiedades requeridas. Por la propiedad (c) de e_n , $\mathcal{L}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)} = \Psi(\mu(pq), s)$.

Tomemos $x \in py_n$.

En el caso en que $x \in z_n y_n$, por la propiedad (4), $g(x, q) \leq g(y_n, q)$ y como $x, y_n \in pe_n \subset Y$, tenemos que $G(x, q) = g(x, q) \leq g(y_n, q) = G(y_n, q)$.

Por tanto, podemos suponer que $x \in pz_n$.

Aquí dividimos en dos casos.

Caso A.2.

En este caso,

$$\begin{aligned} G(x, q) &= g(x, q) = \varphi(f(x, q) \alpha_{e_n}(x)) \mu(pe_n) \\ &\leq (\alpha_{e_n}(x))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n), \end{aligned}$$

por la propiedad (2) de φ . Además

$$\begin{aligned} \alpha_{e_n}(x) &= \frac{\mu(px)}{\mu(pe_n)} \leq \frac{\mu(pz_n)}{\mu(pe_n)} \\ &< \frac{1}{2^{10n}} (2^{n+4}) = \frac{1}{2^{9n-4}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
G(x, q) &< \left(\frac{1}{2^{9n-4}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n) \\
&< \frac{1}{2^{4n}} \mu(pe_n) < \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n) \\
&= \mu(py_n) \leq G(y_n, q).
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba para el Caso A.2.

Caso A.1.

En el caso en que $x \in pc_n$,

$$\begin{aligned}
G(x, q) &= g(x, q) \\
&= \varphi(f(x, q), \alpha_{e_1}(x)) \mu(pe_1) \\
&\leq (\alpha_{e_1}(x))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1).
\end{aligned}$$

Además

$$\alpha_{e_1}(x) = \frac{\mu(px)}{\mu(pe_1)} \leq \frac{\mu(pc_n)}{\mu(pe_1)} \leq 2^3 \frac{1}{2^{20n+1}} = \frac{1}{2^{20n-2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
G(x, q) &\leq \frac{1}{2^{10n-1}} \mu(pe_1) = \frac{1}{2^{10n+2}} = \mu(pp_n) \\
&\leq \mu(pz_n) \leq \mu(py_n) \leq G(y_n, q).
\end{aligned}$$

En el caso en que $x \in p_n z_n$,

$$\begin{aligned}
G(x, q) &= g(x, q) \\
&= \varphi(f(x, q), \alpha_{e_n}(x)) \mu(pe_n) \\
&\leq (\alpha_{e_n}(x))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\alpha_{e_n}(x) &= \frac{\mu(px)}{\mu(pe_n)} \leq \frac{\mu(pz_n)}{\mu(pe_n)} \\
&< \frac{1}{2^{10n}} (2^{n+4}) = \frac{1}{2^{9n-4}}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
G(x, q) &< \left(\frac{1}{2^{9n-4}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n) < \frac{1}{2^{4n}} \mu(pe_n) \\
&< \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n) = \mu(py_n) \\
&\leq G(y_n, q).
\end{aligned}$$

Finalmente, en el caso en que $x \in c_n p_n$,

$$\begin{aligned}
G(x, q) &= g(x, q) = \zeta_n(x) \\
&\leq \max \left\{ (\alpha_{e_1}(c_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_1), (\alpha_{e_n}(p_n))^{\frac{1}{2}} \mu(pe_n) \right\} \\
&= \max \{ \zeta_n(c_n), \zeta_n(p_n) \} \\
&= \max \{ G(c_n, q), G(p_n, q) \} \leq G(y_n, q),
\end{aligned}$$

(esta última desigualdad se da por los casos que ya analizamos).

Esto termina la prueba de la propiedad (10) para el Caso A.1.

Ahora probemos la propiedad (10) para el Caso B.

Como $\lim z_n = p$, $\lim pz_n = \{p\}$. De aquí que $\lim \mu(pz_n) = 0$. Dado que $\lim \mu(pe_n) = \mu(pe_0) > 0$, tenemos que $\lim \frac{\mu(pz_n)}{\mu(pe_n)} = 0$. Ya que $\mu(pq) < s$, tenemos que $\Psi(\mu(pq), s) > 0$. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\mu(pz_n)}{\mu(pe_n)} < \Psi(\mu(pq), s)$ para toda $n \geq N_0$.

Dada $n \geq N_0$, dado que $\mu(pz_n) < \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n) \leq \mu(pe_n)$, existe $y_n \in z_n e_n$ tal que $\mu(py_n) = \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n)$. Así que $\frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)} = \Psi(\mu(pq), s)$. Como $y_n \in p_n e_n$, la propiedad (c) de e_n implica que $\mathcal{L}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)} = \Psi(\mu(pq), s)$.

Aseguramos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq N_0$ y para cualesquiera $n \geq N$ y $x \in py_n$, se tiene que $G(x, q) \leq G(y_n, q)$. De no ocurrir esto, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que para cada $n \geq N_0$ existe $x_n \in py_n$ tal que $G(x_n, q) > G(y_n, q)$. Por la propiedad (7), $\Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n) = \mu(py_n) \leq G(y_n, q)$.

Dada $n \geq N_0$, si $x_n \in z_n y_n$, por la propiedad (4), $G(x_n, q) = g(x_n, q) \leq g(y_n, q) = G(y_n, q)$, lo cual es absurdo. Esto muestra que $x_n \in pz_n$ para toda $n \geq N_0$. Por tanto, $\lim x_n = p$.

Por la continuidad de G , $\lim G(x_n, q) = G(p, q) = 0$ (por la propiedad (1)). Por tanto, $\lim G(y_n, q) = 0$. Pero

$$\begin{aligned} \lim G(y_n, q) &\geq \lim \mu(py_n) = \lim \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_n) \\ &= \Psi(\mu(pq), s) \mu(pe_0) > 0. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción que nace de suponer que no existe N . Esto termina la prueba de (10) para el Caso B.

Hemos probado la propiedad (10)

(11) Sean $q \in X$ y $s \in (\mu(pq), 1]$. Sea $N \in \mathbb{N}$ y para cada $n \geq N$, sea y_n como en (10). Entonces y_n satisface las condiciones en (9). Es decir, $y_n \in z_n e_n \subset pe_n$, $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), s)$ y si $y \in pe_n$ y $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t)$ para algún $t \in [\mu(pq), s]$, entonces $G(y, q) \leq G(y_n, q)$.

Para probar (11), sea $y \in pe_n$ tal que $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t)$, para algún $t \in [\mu(pq), s]$. Notemos que $t \leq s$ implica que $\Psi(\mu(pq), t) \leq \Psi(\mu(pq), s)$. De modo que $\mathcal{L}(y) \leq \mathcal{L}(y_n)$. Si $y \notin py_n$, entonces $p_n <_p z_n \leq_p y_n <_p y$. Entonces, por la propiedad (c) de e_n , $\mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pe_n)}$ y $\mathcal{L}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)}$, de manera que $\frac{\mu(py)}{\mu(pe_n)} \leq \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)}$. Esto implica que $y \in py_n$, lo cual es absurdo y prueba que, de todas formas, $y \in py_n$. Aplicando la propiedad (10) concluimos que $G(y, q) \leq G(y_n, q)$.

PASO 6. LA FUNCIÓN β

Sean

$$\mathcal{Y} = \{(q, s) \in X \times [0, 1] : s \geq \mu(pq)\} \text{ y}$$

$$\widehat{\mathcal{Y}} = \{(q, s) \in X \times [0, 1] : s \leq \mu(pq)\}.$$

Observemos que $X \times [0, 1] = \mathcal{Y} \cup \widehat{\mathcal{Y}}$. Veamos que \mathcal{Y} es cerrado. Sean $(q, s) \in X \times [0, 1]$ y $((q_i, s_i))_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de \mathcal{Y} tales que $\lim(q_i, s_i) = (q, s)$. Entonces $s_i \geq \mu(pq_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como μ es continua y X es suave por arcos en p , tenemos que $\lim \mu(pq_i) = \mu(pq)$. Como $\lim s_i = s$, concluimos que $s \geq \mu(pq)$. Así que $(q, s) \in \mathcal{Y}$. Esto prueba que \mathcal{Y} es cerrado.

Un argumento similar muestra que $\widehat{\mathcal{Y}}$ es cerrado.

Denotemos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de subconjuntos no vacíos de X

Dado un punto $(q, s) \in \mathcal{Y}$, sea $\gamma_{(q,s)} : \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), s)) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ la función definida como

$$\gamma_{(q,s)}(y) = \bigcup \{px : \mu(px) \leq G(y, q) \text{ y } y \leq_p x\}.$$

Observemos que $py \subset \gamma_{(q,s)}(y)$, pues $\mu(py) \leq G(y, q)$. Como $\gamma_{(q,s)}(y)$ es una unión de subconjuntos conexos, cada uno de los cuales contiene a p , tenemos que $\gamma_{(q,s)}(y)$ es conexo.

Sea $\mathcal{Z} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ la función dada por

$$\mathcal{Z}(q, t) = \bigcup \{\gamma_{(q,t)}(y) : y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))\}.$$

Como $\mathcal{L}(p) = 0 = \Psi(\mu(pq), \mu(pq))$, tenemos que $p \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), \mu(pq)))$. Además, por la propiedad (10), $\mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t)) \neq \emptyset$ cuando $t > \mu(pq)$. Esto muestra que $\mathcal{Z}(q, t) \neq \emptyset$. Puesto que $p \in \gamma_{(q,t)}(y)$ para cada $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$ y $\gamma_{(q,t)}(y)$ es conexo, entonces $\mathcal{Z}(q, t)$ es conexo y $p \in \mathcal{Z}(q, t)$.

Ahora, sea $\beta : \mathcal{Y} \rightarrow C(X)$ la función definida como

$$\beta(q, s) = \bigcup \{\mathcal{Z}(q, t) : t \in [\mu(pq), s]\}.$$

Veamos algunas propiedades de β . La primera es inmediata.

(12) Si $s \leq t$, entonces $\beta(q, s) \subset \beta(q, t)$.

(13) β está bien definida.

Observemos que $\beta(q, s)$ es conexo pues es una unión de subconjuntos conexos, cada uno de los cuales contiene al punto p . Mostremos que $\beta(q, s)$ es cerrado.

Tomemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en $\beta(q, s)$ y sea $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [\mu(pq), s]$ tal que $x_n \in \mathcal{Z}(q, t_n)$. De aquí que existe $y_n \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t_n))$ tal que $x_n \in \gamma_{(q, t_n)}(y_n)$. Por tanto, existe $w_n \in X$ tal que $\mu(pw_n) \leq G(y_n, q)$, $y_n \in pw_n$ y $x_n \in pw_n$.

Como $[\mu(pq), s]$ y X son compactos, podemos suponer que las sucesiones $(t_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty$ y $(w_n)_{n=1}^\infty$ convergen. Sean \hat{t} , y y w sus respectivos límites. Como $x_n \in pw_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim pw_n = pw$, se tiene que $x \in pw$ (Lema 1.27). Análogamente, dado que $y_n \in pw_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in pw$. Puesto que $t_n \in [\mu(pq), s]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\hat{t} \in [\mu(pq), s]$. Además, tenemos que $\mu(pw_n) \leq G(y_n, q)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como μ y G son continuas, $\mu(pw) \leq G(y, q)$.

Puesto que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), t_n)$, por el Lema 4.9, existe $b_n \in E(y_n)$ tal que $\mu(py_n) = \Psi(\mu(pq), t_n)\mu(pb_n)$. Por la compacidad de X , podemos suponer que existe $b_0 \in X$ tal que $\lim b_n = b_0$. Por el Lema 1.27, tenemos que $y \in pb_0$. Como μ y Ψ son continuas, entonces $\mu(py) = \lim \mu(py_n) = \lim \Psi(\mu(pq), t_n)\mu(pb_n) = \Psi(\mu(pq), \hat{t})\mu(pb_0)$.

Si $p = b_0$, entonces $\mu(py) = 0$ y $p = y$. De aquí que, por la propiedad (1), $0 = g(p, q) = G(p, q) = G(y, q) \geq \mu(pw)$. Por tanto $p = w$. Como $x \in pw = \{p\}$, tenemos que $x = p \in \beta(q, s)$.

Supongamos que $p \neq b_0$. Por el Lema 4.9, existe $b \in E(y)$ tal que $0 \leq \mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pb)} \leq \frac{\mu(py)}{\mu(pb_0)} = \Psi(\mu(pq), \hat{t})$. Como $\mu(pq)$ es un número fijo y Ψ es lineal en la segunda coordenada, existe $t \in [\mu(pq), \hat{t}] \subset [\mu(pq), s]$ tal que $\Psi(\mu(pq), t) = \mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pb)}$. Entonces $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$.

Así que $t \in [\mu(pq), s]$, $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$ y $w \in X$, son tales que $\mu(pw) \leq G(y, q)$, $y \in pw$ y $x \in pw$. Esto muestra que $x \in \gamma_{(q, t)}(y) \subset \beta(q, s)$. Concluimos que $\beta(q, s)$ es cerrado y por tanto compacto. Esto prueba que $\beta(q, s) \in C(X)$ y por tanto β está bien definida.

14) β es continua.

Sean $(q, s) \in \mathcal{Y}$ y $(q_n, s_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{Y} tales que $\lim(q_n, s_n) = (q, s)$. Supongamos que la sucesión $(\beta(q_n, s_n))_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ converge a un elemento $B \in C(X)$. Veamos que $\beta(q, s) = B$.

Tomemos un punto $a \in B$. Como $\lim \beta(q_n, s_n) = B$, por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in \beta(q_n, s_n)$ tal que $\lim a_n = a$.

Puesto que $a_n \in \beta(q_n, s_n)$, existen $t_n \in [\mu(pq_n), s_n]$, $y_n \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq_n), t_n))$ y $w_n \in X$ tales que $\mu(pw_n) \leq G(y_n, q_n)$, $y_n \in pw_n$ y $a_n \in pw_n$.

Como $[0, 1]$ y X son compactos, podemos suponer que las sucesiones $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen. Sean \hat{t} , y y w sus respectivos límites. Como $a_n \in pw_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim pw_n = pw$, se tiene que $a \in pw$. Análogamente, ya que $y_n \in pw_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in pw$. Puesto que $t_n \in [\mu(pq_n), s_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim[\mu(pq_n), s_n] = [\mu(pq), s]$, se tiene que $\hat{t} \in [\mu(pq), s]$. Además, tenemos que $\mu(pw_n) \leq G(y_n, q_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como μ y G son continuas, $\mu(pw) \leq G(y, q)$.

Por el Lema 4.9, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in E(y_n)$ tal que $\mu(py_n) = \Psi(\mu(pq_n), t_n)\mu(pb_n)$. Podemos suponer que la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $b_0 \in X$. Así que, por el Lema 1.27, tenemos que $y \in pb_0$. Como μ y Ψ son continuas,

$$\begin{aligned} \mu(py) &= \lim \mu(py_n) \\ &= \lim \Psi(\mu(pq_n), t_n)\mu(pb_n) \\ &= \Psi(\mu(pq), \hat{t})\mu(pb_0). \end{aligned}$$

Si $p = b_0$, entonces $\mu(py) = 0$ y $p = y$. De aquí que $0 = g(p, q) = G(p, q) = G(y, q) \geq \mu(pw)$. Por tanto $p = w$. Como $a \in pw = \{p\}$, tenemos que $a = p \in \beta(q, s)$.

Supongamos que $p \neq b_0$. Por el Lema 4.9, existe $b \in E(y)$ tal que $0 \leq \mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pb)} \leq \frac{\mu(py)}{\mu(pb_0)} = \Psi(\mu(pq), \hat{t})$. Como $\mu(pq)$ es un número fijo y Ψ es lineal en la segunda coordenada, existe $t \in [\mu(pq), \hat{t}] \subset [\mu(pq), s]$ tal que $\Psi(\mu(pq), t) = \mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pb)}$. Entonces $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$.

Así que $t \in [\mu(pq), s]$, $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$ y $w \in X$, son tales que $\mu(pw) \leq G(y, q)$, $y \in pw$ y $a \in pw$. Esto muestra que $a \in \beta(q, s)$. Concluimos que $B \subset \beta(q, s)$.

Para probar que $\beta(q, s) \subset B$, demostraremos dos afirmaciones.

Afirmación 1. Sean $e \in E(X)$ y $y \in pe$ tales que $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t)$ para algún $t \in [\mu(pq), s]$. Si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_0$ existe $y_n \in pe$ que cumple que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq_n), t_n)$ para algún $t_n \in [\mu(pq_n), s_n]$ y $\lim y_n = y$, entonces para cada $x \in pe$ que satisface $\mu(px) \leq G(y, q)$, se tiene que $px \subset B$.

Demostración. Analizamos dos casos.

Caso 1) $\mu(pe) \geq G(y, q)$.

En este caso, sea $w \in pe$ tal que $\mu(pw) = G(y, q) \geq \mu(py)$. Entonces $py \subset pw$. Tomando subsucesiones si es necesario, tenemos los siguientes subcasos.

Caso 1.1) $G(y_n, q_n) \geq \mu(pe)$ para cada $n \geq N_0$.

En este caso, $pe \subset \gamma_{(q_n, t_n)}(y_n) \subset \mathcal{Z}(q_n, t_n) \subset \beta(q_n, s_n)$ para cada $n \geq N_0$. Como $\lim \beta(q_n, s_n) = B$, por el Lema 1.28, se tiene que $pe \subset B$.

Caso 1.2) $G(y_n, q_n) \leq \mu(pe)$ para cada $n \geq N_0$.

En este caso, para cada $n \geq N_0$, sea $w_n \in pe$ tal que $\mu(pw_n) = G(y_n, q_n) \geq \mu(py_n)$. Entonces $y_n \in pw_n$. Como G es continua, $\lim G(y_n, q_n) = G(y, q) = \mu(pw)$. Entonces $\lim \mu(pw_n) = \mu(pw)$. Puesto que $pw_n, pw \subset pe$, tenemos que $\lim pw_n = pw$. Observemos que $pw_n \subset \gamma_{(q_n, t_n)}(y_n) \subset \mathcal{Z}(q_n, t_n) \subset \beta(q_n, s_n)$. Entonces, por el Lema 1.28, $pw \subset B$. Así que, si $x \in pe$ es tal que $\mu(px) \leq G(y, q) = \mu(pw)$, se tiene que $px \subset pw \subset B$.

Caso 2) $\mu(pe) < G(y, q)$.

En este caso, como $\lim G(y_n, q_n) = G(y, q)$, podemos suponer que $\mu(pe) < G(y_n, q_n)$ para cada $n \geq N_0$. Entonces $pe \subset \gamma_{(q_n, t_n)}(y_n) \subset \mathcal{Z}(q_n, t_n) \subset \beta(q_n, s_n)$ para cada $n \geq N_0$. Puesto que $\lim \beta(q_n, s_n) = B$, se tiene que $pe \subset B$.

Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. Sea $e \in E(X)$. Si $y \in pe$ y $t \in [\mu(pq), s]$ son como en la Propiedad (9) de G , entonces para cada $x \in pe$ tal que $\mu(px) \leq G(y, q)$, se tiene que $px \subset B$.

Demostración. Puesto que $t \in [\mu(qp), s]$ y Ψ es lineal en la segunda coordenada, se tiene que $\Psi(\mu(pq), t) \in [0, \frac{s-\mu(pq)}{1-\mu(pq)}]$.

Caso 1) $t = \mu(pq)$.

En este caso, $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t) = 0$. Por tanto, $y = p$. Así que $G(y, q) = G(p, q) = g(p, q) = 0$. Si $x \in pe$ es tal que $\mu(px) \leq G(y, q) = 0$, entonces $x = p \in B$, pues $p \in \beta(q_n, s_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Caso 2) $t \in (\mu(qp), s)$.

En este caso $\Psi(\mu(pq), t) \in (0, \frac{s-\mu(pq)}{1-\mu(pq)})$. Es decir, $0 < \Psi(\mu(pq), t) < \frac{s-\mu(pq)}{1-\mu(pq)}$. Como $\lim q_n = q$ y $\lim s_n = s$, tenemos que

$$\lim \frac{s_n - \mu(pq_n)}{1 - \mu(pq_n)} = \frac{s - \mu(pq)}{1 - \mu(pq)}.$$

De manera que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Psi(\mu(pq), t) < \frac{s_n - \mu(pq_n)}{1 - \mu(pq_n)}$ para toda $n \geq N_0$.

Sea $n \geq N_0$. Entonces $\Psi(\mu(pq), t) \in (0, \frac{s_n - \mu(pq_n)}{1 - \mu(pq_n)})$.

Como $\Psi_{\mu(pq_n)}$ manda linealmente el intervalo $[\mu(pq_n), s_n]$ sobre el intervalo $[0, \frac{s_n - \mu(pq_n)}{1 - \mu(pq_n)}]$, existe $t_n \in (\mu(pq_n), s_n)$ tal que $\Psi(\mu(pq_n), t_n) = \Psi(\mu(pq), t)$. Concluimos que $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq_n), t_n)$. De aquí que, para cada $n \geq N_0$, existe $y_n = y \in pe$ tal que $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq_n), t_n)$ con $t_n \in [\mu(pq_n), s_n]$.

Además, $\lim y_n = y$. Por la Afirmación 1, para cada $x \in pe$ tal que $\mu(px) \leq G(y, q)$ se tiene que $px \subset B$.

Caso 3) $t = s$.

En este caso $\Psi(\mu(pq), s) = \frac{s-\mu(pq)}{1-\mu(pq)}$. Como $\lim q_n = q$ y $\lim s_n = s$, se tiene que $\lim \frac{s_n - \mu(pq_n)}{1 - \mu(pq_n)} = \frac{s - \mu(pq)}{1 - \mu(pq)}$. Sean $\hat{s}_n = \frac{s_n - \mu(pq_n)}{1 - \mu(pq_n)}$ y $\hat{s} = \frac{s - \mu(pq)}{1 - \mu(pq)}$. Tomando subsucesiones si es necesario, tenemos los siguientes casos.

Caso 3.1) $\hat{s}_n \geq \hat{s}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, como $\hat{s} \in [0, \hat{s}_n]$ y Ψ es lineal en la segunda coordenada, existe $t_n \in [\mu(pq_n), s_n]$ tal que $\hat{s} = \Psi(\mu(pq_n), t_n)$. Entonces $\mathcal{L}(y) =$

$\Psi(\mu(pq), t) = \Psi(\mu(pq), s) = \widehat{s} = \Psi(\mu(pq_n), t_n)$. Por la Afirmación 1, haciendo $y_n = y$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que si $x \in pe$ es tal que $\mu(px) \leq G(y, q)$, entonces $px \subset B$.

Caso 3.2) $\widehat{s}_n \leq \widehat{s}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, sea $c \in E(y)$ tal que $\widehat{s} = \mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pc)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $y_n \in pc$ tal que $\frac{\mu(py_n)}{\mu(pc)} = \widehat{s}_n \leq \widehat{s} = \frac{\mu(py)}{\mu(pc)}$. Entonces $\mu(py_n) \leq \mu(py)$. Como $y, y_n \in pc$, concluimos que $y_n \leq_p y$. Así que $y_n \in pe$.

Puesto que $\lim \widehat{s}_n = \widehat{s}$, se tiene que $\lim \mu(py_n) = \mu(py)$. Como $y, y_n \in pe$, $\lim y_n = y$. Sea $c_n \in E(y_n)$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pc_n)} \leq \frac{\mu(py_n)}{\mu(pc)} = \widehat{s}_n$. Entonces existe $t_n \in [\mu(pq_n), s_n]$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq_n), t_n)$. Por la Afirmación 1, para cada $x \in pe$ tal que $\mu(px) \leq G(y, q)$ se tiene que $px \subset B$.

Esto termina la demostración de la Afirmación 2.

Estamos listos para probar que $\beta(q, s) \subset B$.

Sea $t \in [\mu(pq), s]$. Veamos que $\mathcal{Z}(q, t) \subset B$. Tomemos $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$. Para ver que $\gamma_{(q,t)}(y) \subset B$, consideremos un punto $x \in X$ tal que $\mu(px) \leq G(y, q)$ y $y \in px$.

Sea $e \in E(x)$. Por la Propiedad (9), existe $\widehat{t} \in [\mu(pq), s]$ y existe $\widehat{y} \in pe \cap \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), \widehat{t}))$ tales que, para cada $y' \in pe$ con $\mathcal{L}(y') = \Psi(\mu(pq), t')$ para algún $t' \in [\mu(pq), s]$, se tiene que $G(y', q) \leq G(\widehat{y}, q)$.

Entonces $G(y, q) \leq G(\widehat{y}, q)$. Como $\mu(px) \leq G(y, q)$, por la Afirmación 2 aplicada a \widehat{y} y \widehat{t} , tenemos que $px \subset B$. Concluimos que $\beta(q, s) \subset B$.

Hemos probado que $\beta(q, s) = B$. Por tanto β es continua.

(15) Si $s = \mu(pq)$, entonces $\beta(q, s) = \{p\}$.

Si $s = \mu(pq)$, entonces $\beta(q, s) = \mathcal{Z}(q, s) = \gamma_{(q,s)}(p) = \{p\}$, pues $\mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), \mu(pq))) = \mathcal{L}^{-1}(0) = \{p\}$ y $G(p, q) = 0$.

(16) $\beta(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$. De hecho, si $s < 1$, existe una infinidad de elementos de $E(X)$ que no pertenecen a $\beta(q, s)$.

Sea $(q, s) \in X \times [0, 1)$, tal que $s \geq \mu(pq)$. Si $s = \mu(pq)$, por la propiedad (15), $\beta(q, s) = \{p\} \neq X$. Supongamos ahora que $s > \mu(pq)$. Entonces, por la propiedad (10), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, existe $y_n \in z_n e_n \subset p_n z_n$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), s)$ y $G(x, q) \leq G(y_n, q)$ para cada $x \in py_n$. Notemos que, por la propiedad (c) de e_n , $\mathcal{L}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)}$.

Dada $n \geq N$, como $s < 1$, $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), s) < 1$, $y_n <_p e_n$ y, por las propiedades (4) y (6), $G(y_n, q) = g(y_n, q) < g(e_n, q) = G(e_n, q)$. Además, por la propiedad (5), $G(e_n, q) = g(e_n, q) = \mu(pe_n)$.

Si $e_n \in \beta(q, s)$, entonces existen $t \in [\mu(pq), s]$, $y \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), t))$ y $x \in X$ tales que $e_n \in px$, $\mu(px) \leq G(y, q)$ y $y \leq_p x$. Observemos que px es un arco que contiene a $e_n \in E(X) \setminus \{p\}$, así que $e_n = x$. Por tanto, $y \leq_p e_n$ y $\mu(pe_n) \leq G(y, q)$. Concluimos que $y \in pe_n$ es tal que $G(y_n, q) < \mu(pe_n) \leq G(y, q)$. Lo cual contradice la propiedad (11). De aquí que $e_n \notin \beta(q, s)$ para cada $n \geq N$. Por tanto $\beta(q, s) \subsetneq X$.

Supongamos que $s = 1$. Como $\mathcal{L}(e) = 1$ para cada $e \in E(X) \setminus \{p\}$ y $\mathcal{Z}(q, 1) \subset \beta(q, 1)$, tenemos que $\gamma_{(q,1)}(e) \subset \beta(q, 1)$ para cada $e \in E(X)$.

Ahora bien, $\gamma_{(q,1)}(e) = \bigcup \{px : \mu(px) \leq G(e, q) \text{ y } e \in px\}$. Si $e \in px$, como $p \neq e$, tenemos que $e = x$. Puesto que $\mu(pe) \leq G(e, q)$, tenemos que $\gamma_{(q,1)}(e) = pe$. Concluimos que $pe \subset \beta(q, 1)$ para cada $e \in E(X) \setminus \{p\}$. Entonces, como para cada $x \in X$ existe $e \in E(X) \setminus \{p\}$ tal que $x \in pe$ (Teorema 4.8), se tiene que $x \in \beta(q, 1)$ para cada $x \in X$. Esto muestra que $\beta(q, 1) = X$ para cada $q \in X$.

Concluimos que $\beta(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$, y si $s < 1$, existe una infinidad de elementos de $E(X)$ que no pertenecen a $\beta(q, s)$.

(17) Sea $(q, s) \in \mathcal{Y}$ tal que $\mu(pq) < s$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, existe $y_n \in z_n e_n$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), s)$ y $G(x, q) \leq G(y_n, q)$ para cada $x \in py_n$ (existen por la Propiedad (10)). Para cada $n \geq N$, supongamos que $w_n \in pe_n$ es tal que $\mu(pw_n) = G(y_n, q)$. Entonces $\beta(q, s) \cap pe_n = pw_n$ para cada $n \geq N$.

Sea $n \geq N$. Veamos que $pw_n \subset \gamma_{(q,s)}(y_n)$. Para eso, necesitamos ver que $y_n \leq_p w_n$. Si $pw_n \subsetneq py_n$, entonces $\mu(pw_n) < \mu(py_n) \leq G(y_n, q)$, esto último

por la propiedad (7). Esto contradice que $\mu(pw_n) = G(y_n, q)$. Así que $y_n \leq_p w_n$. Por tanto, $pw_n \subset \gamma_{(q,s)}(y_n) \subset \beta(q, s)$. De aquí que $pw_n \subset \beta(q, s) \cap pe_n$.

Ahora, sea $x \in \beta(q, s) \cap pe_n$. Puesto que $x \in \beta(q, s)$, existen $t \in [\mu(pq), s]$, $y \in X$ y $w \in X$ tales que $x \in pw$, $\mathcal{L}(y) = \Psi(\mu(pq), t)$, $\mu(pw) \leq G(y, q)$ y $y \leq_p w$.

Queremos probar que $x \leq_p w_n$. Supongamos por el contrario que $w_n <_p x$. Entonces $pw_n \subset px$ y $\mu(pw_n) < \mu(px) \leq \mu(pw) \leq G(y, q)$. Puesto que $\mu(py_n) \leq G(y_n, q) = \mu(pw_n)$, tenemos que $G(y_n, q) < G(y, q)$ y que $py_n \subset pw_n$. Si $y \in pe_n$, por la propiedad (11), se tiene que $G(y, q) \leq G(y_n, q)$. Este es un absurdo que implica que $y \notin pe_n$. En particular, $y \notin px$. Sin embargo, como $py \subset pw$ y $px \subset pw$, $px \subsetneq py$. Por otro lado, dado que $py_n \subset pw_n \subset px$, tenemos que $py_n \subsetneq py$ y por tanto, $y_n <_p y$. Así que $\mu(py_n) < \mu(py)$.

Sea $e_y \in E(y)$ tal que $\mathcal{L}(y) = \frac{\mu(py)}{\mu(pe_y)}$. Como $p_n <_p z_n \leq_p y_n <_p y \leq e_y$, entonces $e_y \in M_p(p_n)$. Por la propiedad (b) de e_n , tenemos que $\mu(pe_n) \geq \mu(pe_y)$. Concluimos que $\frac{\mu(py)}{\mu(pe_y)} \geq \frac{\mu(py)}{\mu(pe_n)} > \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)} = \mathcal{L}(y_n)$. Así que $\Psi(\mu(pq), t) > \Psi(\mu(pq), s)$. Pero la función $\Psi_{\mu(pq)}$ es estrictamente creciente y $t \in [\mu(pq), s]$. Lo que implica que $\Psi(\mu(pq), t) \leq \Psi(\mu(pq), s)$. Esta contradicción muestra que $x \leq_p w_n$. Esto prueba que $\beta(q, s) \cap pe_n = pw_n$ para cada $n \geq N$.

PASO 7. LA FUNCIÓN h

Definimos $h : X \times I \longrightarrow C(X)$ como

$$h(q, s) = \begin{cases} xq, & \text{si } (q, s) \in \widehat{\mathcal{Y}}, \text{ donde } x \leq_p q \text{ y } \mu(xq) = s; \\ \beta(q, s) \cup pq, & \text{si } (q, s) \in \mathcal{Y}. \end{cases}$$

Veamos algunas propiedades de h .

(18) h está bien definida.

Si $s = \mu(pq)$, por la propiedad (15), $\beta(q, s) = \{p\}$. Por otro lado, si $x \in X$ es tal que $x \leq_p q$ y $\mu(xq) = \mu(pq)$, entonces $x = p$. Por tanto, $h(q, \mu(pq)) = pq = \beta(q, \mu(pq)) \cup pq$.

Además, si $(q, s) \in \mathcal{Y}$, como $\beta(q, s) \in C(X)$, entonces $h(q, s)$ es la unión de dos subcontinuos de X que tienen a p . Así que $h(q, s) \in C(X)$. Por otro lado, si $(q, s) \in \widehat{\mathcal{Y}}$, entonces $h(q, s) = xq \in C(X)$. Concluimos que h está bien definida.

(19) h es continua.

Veamos primero que $h|_{\widehat{\mathcal{Y}}}$ es continua. Sean $(q, s) \in \widehat{\mathcal{Y}}$ y $(q_n, s_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\widehat{\mathcal{Y}}$ tales que $\lim(q_n, s_n) = (q, s)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in X$ tal que $h(q_n, s_n) = x_n q_n$. Entonces $x_n \leq_p q_n$ y $\mu(x_n q_n) = s_n$. Como X es compacto, podemos suponer que existe un punto $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. Por el Lema 4.7, tenemos que $x \leq_p q$. Por la suavidad de X en p y la continuidad de μ , $\lim \mu(x_n q_n) = \mu(xq)$. Ya que $\lim s_n = s$, concluimos que $\mu(xq) = s$. Entonces $x \in X$ es tal que $x \leq_p q$ y $\mu(xq) = s$. Por tanto, $h(q, s) = xq$. Hemos mostrado que $h|_{\widehat{\mathcal{Y}}}$ es continua.

Ahora, observemos que $h|_{\mathcal{Y}}(q, s) = \beta(q, s) \cup A_p(q)$. Como β y A_p son continuas, tenemos que $h|_{\mathcal{Y}}$ es continua. Concluimos que h es continua en dos conjuntos cerrados cuya unión es $X \times [0, 1]$. Esto prueba que h es continua.

(20) $h(q, 0) = \{q\}$ para cada $q \in X$.

Notemos que $h(q, 0) = xq$, donde $\mu(xq) = 0$. Entonces $h(q, 0) = \{q\}$ para cada $q \in X$.

(21) $h(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$.

Observemos que $pq \subsetneq X$ para cada $q \in X$ (recordemos que X no es un árbol). Entonces $h(q, s) = X$ si y sólo si $\beta(q, s) \cup pq = X$.

Si $s < 1$, por la propiedad (16) hay una infinidad de elementos de $E(X)$ que no pertenecen a $\beta(q, s)$ y como pq no puede tener más de dos elementos de $E(X)$, tenemos que $\beta(q, s) \cup pq \neq X$. Por tanto, $h(q, s) \neq X$. Además, por la propiedad (16), $\beta(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$. Por tanto, $h(q, 1) = \beta(q, 1) \cup pq = X$. Esto prueba la Propiedad (21).

(22) Si $s \leq t$, entonces $h(q, s) \subset h(q, t)$ para toda $q \in X$.

Si $s \leq \mu(pq) \leq t$, entonces $h(q, s) \subset pq \subset h(p, t)$. Si $s \leq t \leq \mu(pq)$. Entonces $h(q, s) = qx_s \subset pq$, donde $\mu(x_sq) = s$ y $h(q, t) = x_tq \subset pq$, donde $\mu(x_tq) = t$. Como x_sq y x_tq son arcos, contenidos en el arco pq , que tienen a q como uno de sus extremos, uno está contenido en el otro. Pero $\mu(x_sq) = s \leq t = \mu(x_tq)$. Así que $h(q, s) = x_sq \subset x_tq = h(q, t)$.

Por último, si $\mu(pq) \leq s \leq t$, entonces $h(q, s) = \beta(q, s) \cup pq$ y $h(q, t) = \beta(q, t) \cup pq$. Por la propiedad (12), $\beta(q, s) \subset \beta(q, t)$. Concluimos que $h(q, s) \subset h(q, t)$.

(23) Si $s > \mu(pq)$, entonces $h(q, s)$ no está contenido en un arco.

Por la propiedad (10), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, existe $y_n \in z_n e_n$ tal que $\mathcal{L}(y_n) = \Psi(\mu(pq), s)$ y $G(x, q) \leq G(y_n, q)$ para cada $x \in py_n$. Notemos que, por la propiedad (c) de e_n , $\mathcal{L}(y_n) = \frac{\mu(py_n)}{\mu(pe_n)}$.

Dada $n \geq N$, por la propiedad (7) tenemos que $\mu(py_n) \leq G(y_n, q)$. Como $y_n \in \mathcal{L}^{-1}(\Psi(\mu(pq), s))$, entonces $py_n \subset \gamma_{(q,s)}(y_n) \subset \mathcal{Z}(q, s) \subset \beta(q, s)$. Por lo tanto, $py_n \subset h(q, s)$ para cada $n \geq N$. Puesto que $y_n \in z_n e_n \subset p_n e_n$ y $p_n e_n \cap p_m e_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$, concluimos que $h(q, s)$ no está contenido en un arco.

(24) Si $h(q_1, s_1) = h(q_2, s_2)$ donde $s_1, s_2 < 1$, entonces $q_1 = q_2$ y $s_1 = s_2$.

Sean $(q_1, s_1), (q_2, s_2) \in X \times [0, 1]$ tales que $s_1, s_2 < 1$ y $h(q_1, s_1) = h(q_2, s_2)$.

Si $s_1 \leq \mu(pq_1)$, entonces $h(q_1, s_1) = x_1 q_1$, donde $x_1 \leq_p q_1$ y $\mu(q_1 x_1) = s_1$. Puesto que $h(q_2, s_2) = h(q_1, s_1) = x_1 q_1$, por la propiedad (23), se tiene que $s_2 \leq \mu(pq_2)$. De aquí que $h(q_2, s_2) = x_2 q_2$, donde $x_2 \leq_p q_2$ y $\mu(x_2 q_2) = s_2$. Como $x_1 q_1 = x_2 q_2$, tenemos que $s_1 = \mu(x_1 q_1) = \mu(x_2 q_2) = s_2$ y como x_1 y x_2 son puntos entre p y q_1 y q_2 , respectivamente, tenemos que $q_1 = q_2$.

Supongamos ahora que $s_1 > \mu(pq_1)$ y $s_2 > \mu(pq_2)$. Por la Propiedad (11), para cada $i \in \{1, 2\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_i$ existe $y_{n,i} \in z_n e_n$ tal que $\mathcal{L}(y_{n,i}) = \Psi(\mu(pq_i), s_i)$ y $G(x, q_i) \leq G(y_{n,i}, q_i)$ para cada $x \in py_{n,i}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Dadas $i \in \{1, 2\}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $q_{n,i}$ el primer punto en el arco pq_i , yendo de q_i a p , que está en pe_n . Es decir, $pe_n \cap pq_i = pq_{n,i}$. Supongamos que existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{n_0,i} \in p_{n_0}e_{n_0}$. Entonces $p_{n_0}e_{n_0} \cap p_{n_0}q_i = p_{n_0}q_{n_0,i}$. Tomemos un número $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$. Así que $pe_n \cap pq_i = pe_n \cap (pp_{n_0} \cup p_{n_0}q_{n_0,i} \cup q_{n_0,i}q_i)$. Como $pe_n \cap p_{n_0}e_{n_0} = \emptyset$, tenemos que $pe_n \cap p_{n_0}q_{n_0,i} = \emptyset$ y, por tanto, $pe_n \cap p_{n_0}q_i = \emptyset$. Se sigue que $pe_n \cap pq_i = pe_n \cap pp_{n_0} = (pp_n \cup p_n e_n) \cap pp_{n_0} = pp_n \cap pp_{n_0}$. Concluimos que $pe_n \cap pq_i \subset pp_n$ para cada $n \neq n_0$. Entonces, podemos tomar $N > n_0$. De esta manera, podemos suponer que $pe_n \cap pq_i \subset pp_n \subset pw_{n,i}$ para cada $n \geq N$.

Dada $i \in \{1, 2\}$, $\mu(py_{n,i}) \leq G(y_{n,i}, q_i) = g(y_{n,i}, q_i) \leq g(e_n, q_i) = G(e_n, q_i) = \mu(pe_n)$. Entonces, para cada $n \geq N$, considerando un arco ordenado de $py_{n,i}$ a pe_n , se puede encontrar un punto $w_{n,i} \in pe_n$ tal que $\mu(pw_{n,i}) = G(y_{n,i}, q_i) = g(y_{n,i}, q_i)$. Por la Propiedad (17),

$$\begin{aligned} h(q_i, s_i) \cap pe_n &= (\beta(q_i, s_i) \cup pq_i) \cap pe_n \\ &= (\beta(q_i, s_i) \cap pe_n) \cup (pq_i \cap pe_n) \\ &= pw_{n,i} \cup (pq_i \cap pe_n) \\ &= pw_{n,i}. \end{aligned}$$

La última igualdad se da porque $pq_i \cap pe_n \subset pw_{n,i}$.

Como $h(q_1, s_1) = h(q_2, s_2)$, entonces $pw_{n,1} = pw_{n,2}$. De aquí que $\mu(pw_{n,1}) = \mu(pw_{n,2})$. Por tanto, $g(y_{n,1}, q_1) = g(y_{n,2}, q_2)$. Concluimos que

$$\varphi(f(y_{n,1}, q_1), \alpha_{e_n}(y_{n,1}))\mu(pe_n) = \varphi(f(y_{n,2}, q_2), \alpha_{e_n}(y_{n,2}))\mu(pe_n).$$

De aquí que

$$\varphi(f(y_{n,1}, q_1), \alpha_{e_n}(y_{n,1})) = \varphi(f(y_{n,2}, q_2), \alpha_{e_n}(y_{n,2})). \quad (4.1)$$

Tomemos $n \geq N$ con $n \in P_0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(n) = 0_m$. Entonces $f(y_{n,1}, q_1) = 0 = f(y_{n,2}, q_2)$. Así que

$$\varphi_0(\alpha_{e_n}(y_{n,1})) = \varphi_0(\alpha_{e_n}(y_{n,2})).$$

Como la función φ_0 es estrictamente creciente, tenemos que

$$\alpha_{e_n}(y_{n,1}) = \alpha_{e_n}(y_{n,2}).$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\mu(py_{n,1}) &= \alpha_{e_n}(y_{n,1})\mu(pe_n) \\
&= \alpha_{e_n}(y_{n,2})\mu(pe_n) \\
&= \mu(py_{n,2}).
\end{aligned}$$

Como $y_{n,1}, y_{n,2} \in pe_n$, concluimos que $y_{n,1} = y_{n,2}$. De aquí que, por la propiedad (c) de e_n ,

$$\begin{aligned}
\frac{s_1 - \mu(pq_1)}{1 - \mu(pq_1)} &= \mathcal{L}(y_{n,1}) = \frac{\mu(py_{n,1})}{\mu(pe_n)} \\
&= \frac{\mu(py_{n,2})}{\mu(pe_n)} = \mathcal{L}(y_{n,2}) \\
&= \frac{s_2 - \mu(pq_2)}{1 - \mu(pq_2)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{s_1 - \mu(pq_1)}{1 - \mu(pq_1)} = \frac{s_2 - \mu(pq_2)}{1 - \mu(pq_2)}. \quad (4.2)$$

Ahora bien, para $n \geq N$, por la igualdad 4.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(py_{n,1})}{\mu(pe_n)} &= \mathcal{L}(y_{n,1}) = \frac{s_1 - \mu(pq_1)}{1 - \mu(pq_1)} \\
&= \frac{s_2 - \mu(pq_2)}{1 - \mu(pq_2)} = \mathcal{L}(y_{n,2}) = \frac{\mu(py_{n,2})}{\mu(pe_n)}.
\end{aligned}$$

De aquí que $\mu(py_{n,1}) = \mu(py_{n,2})$. Por tanto, $y_{n,1} = y_{n,2}$ para cada $n \geq N$. Además,

$$\begin{aligned}
\alpha_{e_n}(y_{n,1}) &= \frac{\mu(py_{n,1})}{\mu(pe_n)} \\
&= \frac{\mu(py_{n,2})}{\mu(pe_n)} = \alpha_{e_n}(y_{n,2}).
\end{aligned}$$

Esto, junto con la igualdad 4.1, muestra que

$$\alpha_{e_n}(y_{n,1})^{\frac{f(y_{n,1},q_1)+1}{2}} = \alpha_{e_n}(y_{n,1})^{\frac{f(y_{n,2},q_2)+1}{2}},$$

Por tanto,

$$f(y_{n,1}, q_1) = f(y_{n,2}, q_2). \quad (4.3)$$

Dada $k \in \mathbb{N}$, elegimos $n \geq N$, tal que $n \in P_k$ y $q_1, q_2 \notin p e_n$ en caso de que $q_1, q_2 \neq p$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = k_m$. Por la igualdad 4.3, se tiene que

$$\frac{\pi_k(q_1)}{(k+2)^m} = \frac{\pi_k(q_2)}{(k+2)^m}.$$

De aquí que $\pi_k(q_1) = \pi_k(q_2)$. Concluimos que $\pi_k(q_1) = \pi_k(q_2)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $q_1 = q_2$. Entonces $\mu(pq_1) = \mu(pq_2)$. Por la igualdad 4.2, tenemos que $s_1 = s_2$. Hemos probado que $(q_1, s_1) = (q_2, s_2)$. Esto prueba que h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

4.1.5. El Teorema

Resumiendo lo que hicimos en la sección anterior, demostramos el siguiente teorema.

Teorema 4.17 *Sea (X, A) suave por arcos tal que $E(X)$ es infinito. Entonces existe una función continua $h : X \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ con las siguientes propiedades:*

- a) $h(q, 0) = \{q\}$ para cada $q \in X$;
- b) $h(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$;
- c) Si $s \leq t$, entonces $h(q, s) \subset h(q, t)$; y
- d) h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

Ahora estamos listos para concluir la demostración del teorema principal de este capítulo.

Teorema 4.18 *Si X es un continuo suave por arcos, entonces X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$.*

Demostración. Sea A una arco-estructura en X tal que (X, A) es suave por arcos.

Si $E(X)$ es finito, por el Lema 4.13, tenemos que X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$.

Supongamos que $E(X)$ es infinito. Entonces, por el Teorema 4.17, existe una función continua $h : X \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ con las siguientes propiedades:

- a) $h(q, 0) = \{q\}$ para cada $q \in X$;
- b) $h(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$;
- c) Si $s \leq t$, entonces $h(q, s) \subset h(q, t)$; y
- d) h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

En particular, como h es inyectiva en $X \times [0, 1)$ y $h(q, s) = X$ si y sólo si $s = 1$, tenemos que $h(q, s) \subsetneq h(q, t)$ siempre que $q \in X$ y $s < t$. Se sigue del Lema 1.69 que X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$. ■

4.1.6. Corolarios

La familia de continuos suaves por arcos es muy extensa. Aquí presentamos algunas de sus subfamilias, las cuales, por el Teorema 4.18, son familias de continuos cono-encajables en $C(X)$.

Un continuo X es un *dendroide* si es arcoconexo y hereditariamente uni-coherente. Entonces, un dendroide no contiene curvas cerradas simples. Más aún, dados dos puntos $x, y \in X$, existe un único arco, denotado por xy , que tiene a x y y como extremos. Entonces la función $A : X \times X \rightarrow C(X)$ definida como $A(x, y) = xy$ para cada par de puntos $x, y \in X$, es una arco-estructura sobre X .

Un dendroide X es suave si existe un punto $p \in X$, llamado *punto inicial* de X , tal que para cada sucesión convergente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de X , si $\lim a_n = a$, entonces la sucesión de arcos $(pa_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim pa_n = pa$.

Con esto, tenemos que un dendroide X es suave si existe un punto p tal que la función inducida $A_p : X \rightarrow C(X)$ es continua. Entonces los dendroides suaves son continuos suaves por arcos. Así que tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.19 *Los dendroides suaves son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$.*

Como caso particular, las *dendritas* (dendroides localmente conexos) son suaves ([1, Corolario 4]). De aquí que son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$. El Teorema 4.18 es resultado de un trabajo realizado generalizando ideas usadas para demostrar varios casos de continuos suaves por arcos, comenzando con las dendritas.

Sea l_2 el *espacio de Hilbert* definido como

$$l_2 = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathbb{R}^1 \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\},$$

donde la distancia entre dos puntos $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$, denotada por $\|x - y\|$, está definida como

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Un conjunto X en l_2 es *convexo* si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, el segmento $\{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$ está contenido en X . Veamos que los continuos convexos en l_2 son suaves por arcos. Dados $x, y \in X$, definimos la función $A : X \times X \rightarrow C(X)$ como $A(x, y) = xy$. Notemos que A es una arcoestructura. Además, si fijamos un punto $p \in X$, la función A_p es continua. Por lo tanto, los continuos convexos en l_2 son suaves por arcos. Así que tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.20 *Los continuos convexos en l_2 son continuos cono-encajables ordenados.*

Más aún, un conjunto X en l_2 es *estrellado* si existe un punto $p \in X$ tal que el segmento $\{tp + (1 - t)x : t \in [0, 1]\}$ está contenido en X para cada $x \in X$. Los continuos estrellados son continuos suaves por arcos, en el punto p .

Corolario 4.21 *Los continuos estrellados en l_2 son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$.*

Los conos sobre espacios métricos compactos también son continuos suaves por arcos, en el vértice del cono.

Corolario 4.22 *Los conos sobre espacios métricos compactos son continuos cono-encajables ordenados.*

Una *contracción libre* de un espacio X a un punto p es una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones para cada $x \in X$:

- a) $H(x, 0) = p$,
- b) $H(x, 1) = x$,
- c) $H(H(x, s), t) = H(x, \min\{s, t\})$ para cada $s, t \in [0, 1]$.

Un espacio X es *libremente contráctil* si existe una contracción libre de X a uno de sus puntos.

En [6, Teorema II-3-A], se muestra que un continuo X es suave por arcos en p si y sólo si X es libremente contráctil a p . Entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.23 *Los continuos libremente contráctiles son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$.*

Decimos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos (X, d) y (Y, ρ) es *no expansiva* si para cada par de puntos $x, y \in X$, $\rho(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. Decimos que Y es un *espacio métrico inyectivo* si para cualquier subconjunto A de un espacio métrico X , y toda función no expansiva $f : A \rightarrow Y$, existe una función no expansiva $F : X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$. En [18, Teorema 1.1], se muestra que todo espacio métrico inyectivo es libremente contráctil a cada uno de sus puntos. De aquí que

Corolario 4.24 *Los continuos inyectivos son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$.*

Recordemos que un continuo es *descomponible* si es la unión de dos de sus subcontinuos propios. Decimos que un continuo X es *indescomponible* si no es descomponible. Si cada subcontinuo no degenerado de un continuo X es indescomponible, decimos que X es *hereditariamente indescomponible*.

Observemos que si X es un continuo hereditariamente indescomponible y $A, B \in C(X)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \subset B$ o bien $B \subset A$, pues de lo contrario, $A \cup B$ es un subcontinuo descomponible de X . De aquí que, si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un único arco ordenado de A a B ([31, Lema 1.59]). En este caso, denotemos por $\alpha(AB)$ al arco ordenado de A a B . Para ampliar la definición, hacemos $\alpha(A, A) = \{A\}$ para cada $A \in C(X)$.

Veamos que $C(X)$ es un continuo suave por arcos. Para ello, vamos a usar la definición alternativa de suavidad por arcos.

Definición 4.25 *(Alternativa)* Decimos que un continuo X es **suave por arcos** en el punto p , si existe una función continua $F : X \rightarrow C(X)$ tal que, para cada $x \neq p$, el conjunto $F(x)$ es un arco de p a x y satisface las siguientes condiciones:

- a) $F(p) = \{p\}$,
- b) si $x \in F(y)$, entonces $F(x) \subset F(y)$.

En [6, Pág. 556], se muestra que las dos definiciones son equivalentes. Mostremos dos ejemplos más de continuos suaves por arcos.

Decimos que una métrica d sobre un continuo X es *fuertemente convexa* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un único arco de x a y el cual es isométrico al segmento $[0, d(x, y)] \subset \mathbb{R}$. Un continuo X es *fuertemente convexo* si admite una tal métrica. Veamos que los continuos fuertemente convexos son suaves por arcos.

Lema 4.26 *Si X es un continuo fuertemente convexo entonces X es suave por arcos.*

Demostración. Fijemos un punto $p \in X$ y definamos la función $F : X \longrightarrow C(X)$ donde $F(x)$ es el único arco de p a x el cual es isométrico a $[0, d(p, x)]$, si $x \neq p$; y $F(p) = \{p\}$. Si $x \in F(y)$, como $F(y)$ es isométrico a $[0, d(p, y)]$, entonces el arco de p a x contenido en $F(y)$ es isométrico a $[0, d(p, x)] \subset [0, d(p, y)]$. Así que $F(x) \subset F(y)$.

Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $x \in X$ tales que $\lim x_n = x$. Tomando subsucesiones si es necesario, tenemos dos casos. Si $x_n = p$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim x_n = p$ y $F(x_n) = \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $\lim F(x_n) = \{p\}$. Supongamos que $x_n \neq p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por [21, 3.4], se tiene que $\lim F(x_n) = F(x)$. Esto prueba que F es continua y, por tanto, que X es suave por arcos en p . ■

Corolario 4.27 *Los continuos fuertemente convexos son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$.*

Mostremos ahora que $C(X)$ es suave por arcos cuando X es un continuo hereditariamente indescomponible.

Lema 4.28 *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $C(X)$ es suave por arcos en X .*

Demostración. Definamos la función $\Gamma : C(X) \longrightarrow C(C(X))$ como $\Gamma(A) = \alpha(AX)$ para cada $A \in C(X)$.

Observemos que $\Gamma(X) = \alpha(XX) = \{X\}$. Además, si $B \in \Gamma(A) = \alpha(AX)$, entonces $A \subset B$. Es decir, $\Gamma(A)$ es un arco ordenado de A a X que pasa por B . Como existe un único arco ordenado de B a X , concluimos que $\Gamma(B) = \alpha(BX) \subset \alpha(AX) = \Gamma(A)$.

Veamos que Γ es continua. Sean $A \in C(X)$ y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $C(X)$ tales que $\lim A_n = A$. Consideremos la sucesión $(\Gamma(A_n))_{n=1}^{\infty}$. Como $C(C(X))$ es compacto, podemos suponer que existe $\mathcal{A} \in C(C(X))$ tal que $\lim \Gamma(A_n) = \mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{A} = \Gamma(A)$.

Sea $B \in \mathcal{A}$. Por el Lema 1.27, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in \Gamma(A_n)$ tal que $\lim B_n = B$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $A_n \subset B_n$. Así que,

por el Lema 1.28, $A \subset B$. Concluimos que $B \in \Gamma(A)$ y por tanto, $\mathcal{A} \subset \Gamma(A)$. Observemos que, puesto que $X \in \Gamma(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $X \in \mathcal{A}$. Además, puesto que $A_n \in \Gamma(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.27, se tiene que $A \in \mathcal{A}$.

Hemos probado que \mathcal{A} es un subcontinuo de $\Gamma(A)$ que tiene a A y X . Como $\Gamma(A)$ es un arco que une a X con A , tenemos que $\mathcal{A} = \Gamma(A)$. Concluimos que Γ es continua y por tanto, $C(X)$ es suave por arcos en X . ■

Con esto, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.29 *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $C(X)$ es un continuo cono-encajable ordenado en $C(C(X))$.*

Más aún, por [9, Teorema 6.3], si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces 2^X es un continuo suave por arcos. Se sigue el siguiente corolario.

Corolario 4.30 *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces 2^X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(2^X)$.*

Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, por el Corolario 4.29 y el Corolario 4.30, tenemos que $C(X)$, respectivamente 2^X , es un continuo cono-encajable ordenado en $C(C(X))$, respectivamente en $C(2^X)$. Sin embargo, cada subcontinuo no degenerado y propio de X es un subcontinuo terminal de X ([31, Teorema 1.58]). Es decir, X contiene una infinidad de subcontinuos terminales. Entonces, por el Teorema 2.6, X no es un continuo cono-encajable en $C(X)$.

4.2. Dendroides No Suaves

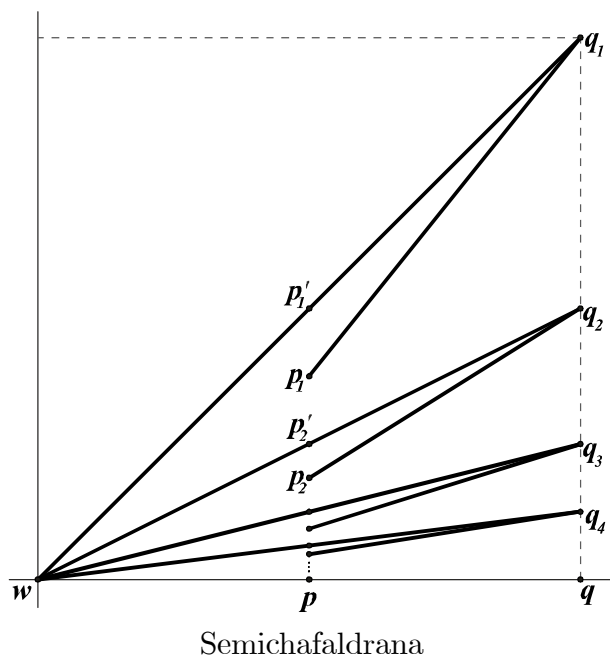
Recordemos que un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Sabemos del Corolario 4.19, que los dendroides suaves son continuos cono-encajables ordenados en $C(X)$. Nos preguntamos ahora si los únicos dendroides que son cono-encajables en $C(X)$ son los dendroides suaves. Veamos los siguientes ejemplos.

4.2.1. La Semichafaldrana

En esta sección, damos un ejemplo de un dendroide no suave que no es cono-encajable en $C(X)$, al que llamaremos semichafaldrana.

Ejemplo 4.31 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean A_n el segmento de recta en \mathbb{R}^2 que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{2^{n-1}})$ y B_n el segmento de recta que une los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2^{n+2}})$ y $(1, \frac{1}{2^{n-1}})$. Sea $A_0 = [0, 1] \times \{0\}$. Definamos la **semichafaldrana** X como

$$X = A_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup B_n \right).$$



Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cup B_n$ es un arco que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{2^{n-1}})$ y contiene al punto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2^{n+2}})$. Además, $(A_n \cup B_n) \cap (A_m \cup B_m) = \emptyset$ para $n \neq m$.

$B_m) = \{(0, 0)\}$. Puesto que $\lim B_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$ y $\lim A_n = A_0$, tenemos que $\lim A_n \cup B_n = A_0$. Entonces X es un continuo. Más aún, es fácil convencerse de que X es un dendroide.

Veamos que X no es suave. Sean $w = (0, 0)$, $p = (\frac{1}{2}, 0)$, $q = (1, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2^{n+2}})$, $p'_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^n})$ y $q_n = (1, \frac{1}{2^{n-1}})$. Observemos que $\lim p_n = \lim p'_n = p$ y $\lim q_n = q$. Si $x, y \in X$, denotemos por xy al arco de x a y en X , si $x \neq y$ y $xy = \{x\}$, si $x = y$.

Supongamos que X es suave en un punto z . Por [1, Teorema 1], tenemos que X es localmente conexo en z . Entonces $z \in A_{n_0} \cup B_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión $(p_n)_{n=1}^\infty$. Entonces, para $m > n_0$ tenemos que el arco que une a z con p_m contiene a $A_m \cup B_m$. De hecho, $zp_m = zw \cup A_m \cup B_m$. Por lo tanto, $\lim zp_n = zw \cup A_0$. Sin embargo, $zp = zw \cup wp \not\subseteq zw \cup A_0$. Esto muestra que X no es suave.

Ahora veamos que X no es un continuo cono-encajable en $C(X)$.

Proposición 4.32 *Si X es la semichafaldrana, entonces X no es un continuo cono-encajable en $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(X)$ tal que $h(x, 0) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Sea v el vértice de $\text{Cono}(X)$. Notemos que $h(v)$ tiene más de un punto. Si $h(v) \subset A_{n_0} \cup B_{n_0}$ para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $h(v) \not\subseteq A_n \cup B_n$ para cada $n > n_0$. En el otro caso, $h(v) \not\subseteq A_n \cup B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h(v) \not\subseteq A_n \cup B_n$ para cada $n > n_0$.

Sea $n > n_0$. Entonces $h(\{p_n\} \times [0, 1])$ es un arco en $C(X)$ tal que $h(p_n, 0) = \{p_n\} \subset B_n \setminus \{q_n\}$ y $h(v) \not\subseteq B_n \setminus \{q_n\}$. Observemos que q_n es un punto de corte de X y $B_n \setminus \{q_n\}$ es una componente de $X \setminus \{q_n\}$. Entonces, por el Lema 3.1, existe $t_n \in (0, 1]$ tal que $q_n \in h(p_n, t_n)$ y $\bigcup h(\{p_n\} \times [0, t_n]) \subset \text{cl}_X(B_n \setminus \{q_n\}) = B_n$.

Por la compacidad de $[0, 1]$ podemos suponer que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\lim t_n = t_0$. Entonces $\lim h(p_n, t_n) = h(p, t_0)$. Como $q_n \in h(p_n, t_n)$ para cada $n > n_0$ y $\lim q_n = q$, por el Lema 1.27, tenemos que $q \in h(p, t_0)$. Además,

por la continuidad de la unión y puesto que $\lim B_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$, tenemos que $\bigcup h(\{p\} \times [0, t_0]) \subset [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$. Así que $h(\{p\} \times [0, t_0])$ es un arco en $C(pq)$ que contiene a $\{p\}$ y $h(\{p\} \times [0, t_0]) \cap C(q, pq) \neq \emptyset$.

Por otro lado, $h(\{q_n\} \times [0, 1])$ es arco en $C(X)$ tal que $h(q_n, 0) = \{q_n\} \subset (B_n \cup C_n) \setminus \{p'_n\}$ y $h(v) \not\subset (B_n \cup C_n) \setminus \{p'_n\}$, donde $C_n = p'_n q_n$. Puesto que p'_n es un punto de corte de X y $(B_n \cup C_n) \setminus \{p'_n\}$ es una componente de $X \setminus \{p'_n\}$, un razonamiento análogo al de los dos párrafos previos, muestra que existe $s_0 \in [0, 1]$ tal que $p \in h(q, s_0)$ y $\bigcup h(\{q\} \times [0, s_0]) \subset pq$. Así que $h(\{q\} \times [0, s_0])$ es un arco en $C(pq)$ que contiene a $\{q\}$ y $h(\{q\} \times [0, s_0]) \cap C(p, pq) \neq \emptyset$.

Por el Lema 1.37, tenemos que $h(\{p\} \times [0, t_0]) \cap h(\{q\} \times [0, s_0]) \neq \emptyset$. Pero, como h es un encaje, se tiene que $h(\{p\} \times [0, t_0]) \cap h(\{q\} \times [0, s_0]) = h(v)$. Así que $t_0 = s_0 = 1$ y como $q \in h(p, 1)$ y $p \in h(q, 1)$, concluimos que $h(v) = pq$. Además, $\bigcup h(\{p\} \times [0, 1]) \subset pq$.

Ahora bien, para cada $n > n_0$, $h(\{p_n\} \times [0, 1])$ es un arco en $C(X)$ tal que $h(p_n, 0) = \{p_n\} \subset A_n \cup B_n \setminus \{w\}$ y $h(v) \not\subset A_n \cup B_n \setminus \{w\}$. Puesto que w es un punto de corte de X y $A_n \cup B_n \setminus \{w\}$ es una componente de $X \setminus \{w\}$, por el Lema 3.1, existe $t'_n \in (0, 1]$ tal que $w \in h(p_n, t'_n)$. Por la compacidad de $[0, 1]$ podemos suponer que existe $t \in [0, 1]$ tal que $\lim t'_n = t$. Por la continuidad de h , tenemos que $\lim h(p_n, t'_n) = h(p, t)$. Como $w \in h(p_n, t'_n)$ para cada $n > n_0$, concluimos que $w \in h(p, t)$. Pero $w \notin pq$. Esto contradice que $\bigcup h(\{p\} \times [0, 1]) \subset pq$. Hemos mostrado que la semichafaldrana no es un continuo cono-encajable en $C(X)$. ■

Hemos mostrado un ejemplo de un dendroide no suave que no es cono-encajable en $C(X)$. La pregunta natural es si siempre es así. Es decir, si todo dendroide no suave X no es cono-encajable en $C(X)$. Daremos la respuesta más adelante.

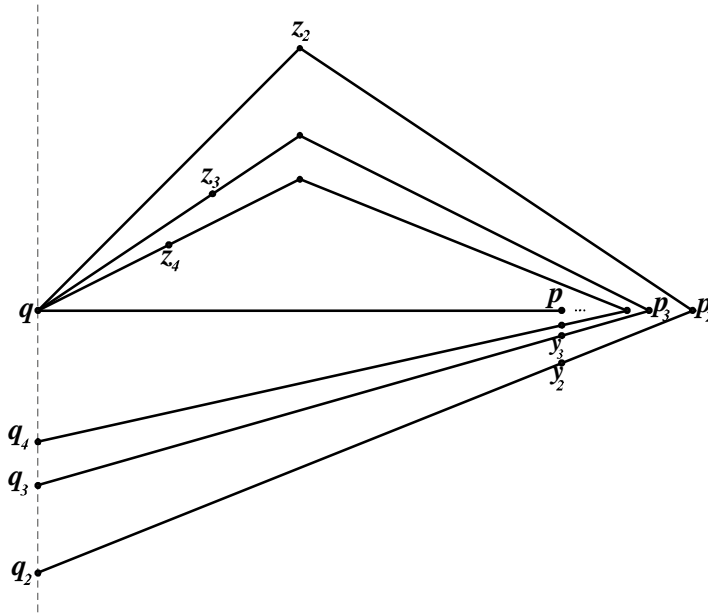
Observemos que la semichafaldrana es contráctil y, por tanto, su hiperespacio de subcontinuos es contráctil. Entonces, la semichafaldrana es un ejemplo de un continuo X que no es cono-encajable en $C(X)$ y tal que $C(X)$ es contráctil.

4.2.2. La Chafaldrana

En esta parte, damos un ejemplo de un dendroide no suave X que es cono-encajable en $C(X)$. Definamos tal continuo.

Ejemplo 4.33 Sea $A_0 = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $C_n = \{(\frac{s}{2}, \frac{s}{n}) : s \in [0, 1]\}$ y $D_n = \{(\frac{ns+n+s}{2n}, \frac{1-s}{n}) : s \in [0, 1]\}$. Es decir, C_n es el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})$; y D_n es el segmento que une los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})$ y $(1 + \frac{1}{2n}, 0)$. Sea $A_n = C_n \cup D_n$. Además, sea $B_n = \{(\frac{(2n+1)(1-s)}{2n}, -\frac{s}{n}) : s \in [0, 1]\}$. Es decir, B_n es el segmento que une los puntos $(1 + \frac{1}{2n}, 0)$ y $(0, -\frac{1}{n})$. Definamos la **chafaldrana** X como

$$X = A_0 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \cup B_n \right).$$



Chafaldrana

Tomamos $n \geq 2$ sólo para facilitar algunas definiciones y algunas cuentas. Sean $p = (1, 0)$ y $q = (0, 0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n = (1 + \frac{1}{2n}, 0)$ y $q_n = (0, -\frac{1}{n})$. Además, sean y_n el punto sobre B_n cuya primera coordenada es 1 y z_n el punto sobre A_n cuya primera coordenada es $\frac{1}{n}$. Es decir, $y_n = (1, -\frac{1}{n(2n+1)})$ y $z_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n^2})$, si $n \geq 2$. Observemos que $\lim p_n = \lim y_n = p$ y $\lim q_n = \lim z_n = q$. Además, $\lim A_n = \lim B_n = A_0$.

Observemos que X es un dendroide. Más aún, un razonamiento similar al utilizado para probar que la semichafaldrana no es suave, muestra que la chafaldrana no es suave.

Si $x, y \in X$, denotemos por xy al arco de x a y en X , si $x \neq y$ y $xy = \{x\}$, si $x = y$.

Vamos a probar que la chafaldrana es un continuo cono-encajable en $C(X)$. Para ello, construiremos el encaje.

Teorema 4.34 *Si X es la chafaldrana, entonces X es un continuo cono-encajable en $C(X)$.*

Demostración. Primero, definamos una función de Whitney apropiada para $C(X)$. Sea

$$\mathcal{A} = C(A_0) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} C(A_n) \right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} C(B_n) \right).$$

Veamos que \mathcal{A} es cerrado en $C(X)$.

Sean $\alpha \in C(X)$ y $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de \mathcal{A} tales que $\lim \alpha_i = \alpha$. Veamos que $\alpha \in \mathcal{A}$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i \in C(B_n)$ para una infinidad de números i , por la compacidad de $C(B_n)$, tenemos que $\alpha \in C(B_n) \subset \mathcal{A}$. De manera similar, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i \in C(A_n)$ o $\alpha_i \in C(A_0)$ para una infinidad de números i , tenemos que $\alpha \in \mathcal{A}$.

Ahora bien, supongamos que para una infinidad de números i , se tiene que $\alpha_i \in \bigcup_{n=2}^{\infty} C(A_n)$. Tomando una subsucesión si es necesario, supongamos que

para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i \in C(A_{n_i})$. Puesto que la sucesión de arcos A_n converge al arco A_0 y $\alpha_i \subset A_{n_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha \in C(A_0)$. En forma similar se trata el caso en que, para una infinidad de números i , se tiene que $\alpha_i \in \bigcup_{n=2}^{\infty} C(B_n)$. Esto muestra que \mathcal{A} es cerrado.

Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada. Es decir, $\pi(x, y) = x$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sean $\pi_n = \pi|_{B_n}$ y $\sigma_n = \pi|_{A_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\pi_n : B_n \rightarrow [0, 1 + \frac{1}{2n}]$ y $\sigma_n : A_n \rightarrow [0, 1 + \frac{1}{2n}]$ son homeomorfismos.

Definamos la función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ como

$$\nu(\alpha) = \text{long}(\pi(\alpha)),$$

para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, donde $\text{long}(\beta)$ es la longitud del intervalo β .

Notemos que la función $\text{long} : C([0, \frac{3}{2}]) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $\text{long}([a, b]) = b - a$, es continua. Como π es continua entonces, ν es continua. Además, tenemos que si $\alpha, \beta \in C([0, \frac{3}{2}])$ son tales que $\alpha \subsetneq \beta$, entonces $\text{long}(\alpha) < \text{long}(\beta)$. Por tanto, puesto que π_n y σ_n son homeomorfismos, si $\alpha \subsetneq \beta$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, entonces $\nu(\alpha) < \nu(\beta)$. Por otro lado, notemos que $\nu(\{x\}) = 0$ para cada $\{x\} \in \mathcal{A}$. Por tanto, ν cumple con las propiedades de una función de Whitney y está definida en un conjunto cerrado de $C(X)$.

Por [39, Teorema 3.1], existe una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$.

Para cada $n \geq 2$, sea $\Gamma_n : q_n p \rightarrow [0, 3 + \frac{1}{n}]$ la función definida como

$$\Gamma_n(x) = \begin{cases} \pi_n(x), & \text{si } x \in q_n p_n; \\ 2 + \frac{1}{n} - \sigma_n(x), & \text{si } x \in p_n q; \\ 2 + \frac{1}{n} + \pi(x), & \text{si } x \in qp. \end{cases}$$

Observemos que $\pi_n(x) \leq 1 + \frac{1}{2n}$, si $x \in q_n p_n$, $\sigma_n(x) \leq 1 + \frac{1}{2n}$, si $x \in p_n q$; y $\pi(x) \leq 1$, si $x \in qp$. En cualquier caso, $\Gamma_n(x) \leq 3 + \frac{1}{n}$. Puesto que π es continua, entonces Γ_n es continua en $q_n p_n$, $p_n q$ y qp . Veamos entonces que se pega bien.

Para $x = p_n$, tenemos que $\pi_n(p_n) = 1 + \frac{1}{2n} = 2 + \frac{1}{n} - (1 + \frac{1}{2n}) = 2 + \frac{1}{n} - \sigma_n(p_n)$.

Para $x = q$, puesto que $\pi(q) = 0 = \sigma_n(q)$, tenemos que $2 + \frac{1}{n} - \sigma_n(q) = 2 + \frac{1}{n} + \pi(q)$.

Concluimos que Γ_n es continua. Observemos que $\Gamma_n(q_n p_n) = [0, 1 + \frac{1}{2n}]$, $\Gamma_n(p_n q) = [1 + \frac{1}{2n}, 2 + \frac{1}{n}]$ y $\Gamma_n(qp) = [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$. Además, puesto que π_n , σ_n y $\pi|_{qp}$ son homeomorfismos en su imagen, tenemos que Γ_n es un homeomorfismo.

La función inversa de Γ_n es la función $\Gamma_n^{-1} : [0, 3 + \frac{1}{n}] \longrightarrow q_n p$ definida como

$$\Gamma_n^{-1}(t) = \begin{cases} \pi_n^{-1}(t), & \text{si } t \in [0, 1 + \frac{1}{2n}]; \\ \sigma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n} - t), & \text{si } t \in [1 + \frac{1}{2n}, 2 + \frac{1}{n}]; \\ (t - 2 - \frac{1}{n}, 0), & \text{si } t \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Consideremos la función $\Psi_n : [0, 2 + \frac{1}{n}] \times [1 - \frac{1}{n}, 1] \longrightarrow [0, 2 + \frac{1}{n}]$ definida como

$$\Psi_n(s, t) = (2n + 1 - sn)t + (1 - 2n + sn + \frac{1}{n}).$$

Observemos que si $s \in [0, 2 + \frac{1}{2n}]$ es un número fijo, entonces Ψ_n es una función lineal en t . Además,

$$\begin{aligned} \Psi_n(s, 1 - \frac{1}{n}) &= (2n + 1 - sn)(1 - \frac{1}{n}) + (1 - 2n + sn + \frac{1}{n}) \\ &= 2n + 1 - sn - 2 - \frac{1}{n} + s + 1 - 2n + sn + \frac{1}{n} \\ &= s, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_n(s, 1) &= (2n + 1 - sn) + (1 - 2n + sn + \frac{1}{n}) \\ &= 2 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto, para un número fijo $s \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$, Ψ_n manda linealmente al intervalo $[1 - \frac{1}{n}, 1]$ sobre el intervalo $[s, 2 + \frac{1}{n}]$. De aquí que $\Psi_n(s, t) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$. Por tanto, Ψ_n está bien definida y es continua

Observemos además que, reescribiendo,

$$\Psi_n(s, t) = (1 - t)ns + (2n + 1)t + (1 - 2n + \frac{1}{n}).$$

Entonces, para un número fijo $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$, $(1 - t)n$ y $(2n + 1)t + (1 - 2n + \frac{1}{n})$ son números fijos. Así que Ψ_n es una función lineal en s y por tanto inyectiva.

Definamos la función $\alpha_n : [0, 3 + \frac{1}{n}] \times [0, 1 - \frac{1}{n}] \longrightarrow [0, 3 + \frac{1}{n}]$ como

$$\alpha_n(s, t) = \begin{cases} (1 - t)s, & \text{si } s \in [0, 1]; \\ (2nt + 1)s - t(2n + 1), & \text{si } s \in [1, 1 + \frac{1}{2n}]; \\ (1 - t)s + t(1 + \frac{1}{2n}), & \text{si } s \in [1 + \frac{1}{2n}, 2]; \\ (1 + nt - \frac{t}{2})s + (\frac{t}{2n} - 2nt), & \text{si } s \in [2, 2 + \frac{1}{n}]; \\ (1 - t)s + (2 + \frac{1}{n})t, & \text{si } s \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Veamos que α_n está bien definida y es continua. Observemos que α_n está definida en $[0, 1] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$, $[1, 1 + \frac{1}{2n}] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$, $[1 + \frac{1}{2n}, 2] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$, $[2, 2 + \frac{1}{n}] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$ y $[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Además, observemos que α_n es continua en cada uno de estos conjuntos.

Para $s = 1$,

$$(2nt + 1) - t(2n + 1) = 1 - t.$$

Para $s = 1 + \frac{1}{2n}$,

$$\begin{aligned} (2nt + 1)(1 + \frac{1}{2n}) - t(2n + 1) &= 1 + \frac{1}{2n} \\ &= (1 + \frac{1}{2n})(1 - t + t) \\ &= (1 - t)(1 + \frac{1}{2n}) + t(1 + \frac{1}{2n}). \end{aligned}$$

Para $s = 2$,

$$\begin{aligned} (1 - t)2 + t(1 + \frac{1}{2n}) &= 2 - t + \frac{t}{2n} \\ &= (1 + nt - \frac{t}{2})2 + (\frac{t}{2n} - 2nt). \end{aligned}$$

Para $s = 2 + \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} (1 + nt - \frac{t}{2})(2 + \frac{1}{n}) + (\frac{t}{2n} - 2nt) &= 2 + \frac{1}{n} \\ &= (1 - t)(2 + \frac{1}{n}) + (2 + \frac{1}{n})t. \end{aligned}$$

Entonces α_n es continua. Falta ver que está bien definida, es decir, que $\alpha_n(s, t) \in [0, 3 + \frac{1}{n}]$. Para ello, veamos lo siguiente.

Sea $t_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ un número fijo. Observemos que la función $\alpha_n|_{[0, 3 + \frac{1}{n}] \times \{t_0\}}$ es una función lineal en cada uno de los intervalos $[0, 1]$, $[1, 1 + \frac{1}{2n}]$, $[1 + \frac{1}{2n}, 2]$, $[2, 2 + \frac{1}{n}]$ y $[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_n(0, t_0) &= 0; \\ \alpha_n(1, t_0) &= 1 - t_0; \\ \alpha_n(1 + \frac{1}{2n}, t_0) &= 1 + \frac{1}{2n}; \\ \alpha_n(2, t_0) &= 2 - t_0 + \frac{t_0}{2n}; \\ \alpha_n(2 + \frac{1}{n}, t_0) &= 2 + \frac{1}{n} \text{ y} \\ \alpha_n(3 + \frac{1}{n}, t_0) &= 2 + \frac{1}{n} + (1 - t_0). \end{aligned}$$

Así que, para un número fijo $t_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, α_n manda linealmente al intervalo $[0, 1]$ sobre $[0, 1 - t_0]$, al intervalo $[1, 1 + \frac{1}{2n}]$ sobre $[1 - t_0, 1 + \frac{1}{2n}]$, al intervalo $[1 + \frac{1}{2n}, 2]$ sobre $[1 + \frac{1}{2n}, 2 - t_0 + \frac{t_0}{2n}]$, al intervalo $[2, 2 + \frac{1}{n}]$ sobre $[2 - t_0 + \frac{t_0}{2n}, 2 + \frac{1}{n}]$ y al intervalo $[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$ sobre $[2 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} + (1 - t_0)]$.

Por otro lado, puesto que $-\frac{1}{2n} < 0 \leq t_0 \leq 1 - \frac{1}{n}$, se tiene que $0 < \frac{1}{n} \leq 1 - t_0 < 1 + \frac{1}{2n}$. Como $t_0 < 1$, tenemos que $0 < 1 - t_0$. Así que $\frac{1}{2n}(1 - t_0) < 1 - t_0$.

Por tanto, $\frac{1}{2n} < 1 - t_0 + \frac{t_0}{2n}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2n} &< 2 - t_0 + \frac{t_0}{2n} \\
 &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \frac{t_0}{2n} \\
 &\leq 2 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \\
 &= 2 + \frac{1}{n} \\
 &< 2 + \frac{1}{n} + (1 - t_0) \\
 &= 3 + \frac{1}{n} - t_0 \\
 &\leq 3 + \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Concluimos que, $\alpha_n(s, t) \leq 3 + \frac{1}{n}$ para cada $(s, t) \in [0, 3 + \frac{1}{n}] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$, por lo que el contradominio de α_n es $[0, 3 + \frac{1}{n}]$. Además, para un número fijo t_0 , la función α_n es inyectiva en la primera coordenada. Observemos que $\alpha_n(s, t) \leq 2 + \frac{1}{n}$ para cada $s \leq 2 + \frac{1}{n}$.

Ahora, consideremos la función $\beta_n : [0, 3 + \frac{1}{n}] \times [1 - \frac{1}{n}, 1] \longrightarrow [0, 3 + \frac{1}{n}]$ definida por

$$\beta_n(s, t) = \begin{cases} \Psi_n(\alpha_n(s, 1 - \frac{1}{n}), t), & \text{si } s \in [0, 2 + \frac{1}{n}]; \\ (1 - t)s + (2 + \frac{1}{n})t, & \text{si } s \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Puesto que $\alpha_n(s, 1 - \frac{1}{n}) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$, si $s \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$, tenemos que β_n está bien definida en $[0, 2 + \frac{1}{n}] \times [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Además, como Ψ_n y α_n son continuas, se tiene que β_n es continua en $[0, 2 + \frac{1}{n}] \times [1 - \frac{1}{n}, 1]$ y en $[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}] \times [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Veamos que se pega bien.

Para $s = 2 + \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned}
 \Psi_n(\alpha_n(2 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}), t) &= \Psi_n(2 + \frac{1}{n}, t) \\
 &= (1 - t)(2n + 1) + (2n + 1)t + (1 - 2n + \frac{1}{n}) \\
 &= 2 + \frac{1}{n} \\
 &= (1 - t)(2 + \frac{1}{n}) + (2 + \frac{1}{n})t.
 \end{aligned}$$

Concluimos que β_n es continua. Sea $s_0 \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$ un número fijo. Entonces $\alpha_n(s_0, 1 - \frac{1}{n})$ es un número fijo. Así que, por la propiedad de Ψ_n , $\beta_n|_{\{s_0\} \times [1 - \frac{1}{n}, 1]}$ manda linealmente al intervalo $[1 - \frac{1}{n}, 1]$ sobre el intervalo $[\alpha_n(s_0, 1 - \frac{1}{n}), 2 + \frac{1}{n}]$.

Observemos que si $t_0 \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$ es un número fijo, entonces β_n es una función lineal cuando s varía en $[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$. Además,

$$\begin{aligned}
 \beta_n(2 + \frac{1}{n}, t_0) &= (1 - t_0)(2 + \frac{1}{n}) + (2 + \frac{1}{n})t_0 \\
 &= 2 + \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \beta_n(3 + \frac{1}{n}, t_0) &= (1 - t_0)(3 + \frac{1}{n}) + (2 + \frac{1}{n})t_0 \\
 &= 2 + \frac{1}{n} + (1 - t_0).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para un número fijo $t_0 \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$, β_n manda linealmente al intervalo $[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$ sobre $[2 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} + (1 - t_0)]$. Además, observemos que, como $1 - \frac{1}{n} \leq t_0 \leq 1$, tenemos que $0 \leq 1 - t_0 \leq \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $2 + \frac{1}{n} \leq 2 + \frac{1}{n} + (1 - t_0) \leq 2 + \frac{2}{n} \leq 3 + \frac{1}{n}$, para cada $n \geq 2$.

Por otro lado, para un número fijo $t_0 \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$, tenemos que Ψ_n es una función lineal, y por tanto inyectiva, en la primera coordenada. Además, $\alpha_n(s, 1 - \frac{1}{n})$ es inyectiva cuando s varía sobre $[0, 2 + \frac{1}{n}]$. De aquí que β_n es inyectiva en la primera coordenada.

Consideremos ahora la función $\varphi_n : [0, 3 + \frac{1}{n}] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 3 + \frac{1}{n}]$ dada por

$$\varphi_n(s, t) = \begin{cases} \alpha_n(s, t), & \text{si } t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]; \\ \beta_n(s, t), & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Puesto que α_n y β_n son continuas, entonces φ_n es continua en los conjuntos cerrados $[0, 3 + \frac{1}{n}] \times [0, 1 - \frac{1}{n}]$ y $[0, 3 + \frac{1}{n}] \times [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Veamos que se pegan bien.

Para $t = 1 - \frac{1}{n}$, sea $s \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$. Por la primera propiedad que vimos de Ψ_n , tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_n(s, 1 - \frac{1}{n}) &= \Psi_n(\alpha_n(s, 1 - \frac{1}{n}), 1 - \frac{1}{n}) \\ &= \alpha_n(s, 1 - \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Además, observemos que, para $s \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$ las funciones α_n y β_n coinciden. Concluimos que φ_n está bien definida y es continua.

Puesto que para cada $t \in [0, 1)$ fija, α_n y β_n son inyectivas en la primera coordenada, tenemos que φ_n también lo es.

Definamos ahora la función $f_n : q_n p \times [0, 1] \longrightarrow q_n p$ como $f_n(x, t) = \Gamma_n^{-1}(\varphi_n(\Gamma_n(x), t))$.

Puesto que Γ_n , φ_n y Γ_n^{-1} son inyectivas en la primera coordenada para cada número fijo $t < 1$, tenemos que f_n es inyectiva en la primera coordenada para cada número fijo $t < 1$. Claramente f_n es continua. Veamos otras propiedades de f_n .

$$(1) f_n(x, 1) = q \text{ para cada } x \in q_n p.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} f_n(x, 1) &= \Gamma_n^{-1}(\varphi_n(\Gamma_n(x), 1)) \\ &= \Gamma_n^{-1}(\beta_n(\Gamma_n(x), 1)). \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\Gamma_n(x) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{-1}(\beta_n(\Gamma_n(x), 1)) &= \Gamma_n^{-1}(\Psi_n(\alpha_n(\Gamma_n(x), 1 - \frac{1}{n}), 1)) \\ &= \Gamma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n}) \\ &= q.\end{aligned}$$

Si $\Gamma_n(x) \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{-1}(\beta_n(\Gamma_n(x), 1)) &= \Gamma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n}) \\ &= q.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la propiedad (1).

(2) Sea $t \in [0, 1)$. Entonces $f_n(x, t) \in q_nq$ si y sólo si $x \in q_nq$.

Supongamos primero que $f_n(x, t) \in q_nq$. Entonces $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$.

Si $t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, tenemos que $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$. Así que $\Gamma_n(x) \leq 2 + \frac{1}{n}$. Se sigue que $x \in q_nq$.

Si $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$, entonces $1 - t > 0$. Además, $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \beta_n(\Gamma_n(x), t) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$.

Ahora bien, si $\Gamma_n(x) > 2 + \frac{1}{n}$, entonces existe $s > 0$ tal que $x = (s, 0)$ y $\Gamma_n(x) = 2 + \frac{1}{n} + s$. Así que $\beta_n(\Gamma_n(x), t) = (1 - t)(2 + \frac{1}{n} + s) + (2 + \frac{1}{n})t = (1 - t)s + 2 + \frac{1}{n} > 2 + \frac{1}{n}$. Esto contradice el hecho de que $\beta_n(\Gamma_n(x), t) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$. Concluimos que $\Gamma_n(x) \leq 2 + \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $x \in q_nq$.

Supongamos ahora que $x \in q_nq$. Entonces $\Gamma_n(x) \in [0, 2 + \frac{1}{n}]$.

Si $t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, tenemos que $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t) \leq 2 + \frac{1}{n}$. De aquí que $f_n(x, t) = \Gamma_n^{-1}(\alpha_n(\Gamma_n(x), t)) \in q_nq$.

Si $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_n(\Gamma_n(x), t) &= \beta_n(\Gamma_n(x), t) \\ &= \Psi_n(\alpha_n(\Gamma_n(x), 1 - \frac{1}{n}), t) \\ &\leq 2 + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Concluimos que $f_n(x, t) \in q_nq$. Esto concluye la prueba de la propiedad (2).

(3) Sea $t \in [0, 1)$. Entonces $f_n(x, t) = q$ si y sólo si $x = q$.

Supongamos primero que $f_n(x, t) = q$. Entonces $\Gamma_n^{-1}(\varphi_n(\Gamma_n(x), t)) = q$. Así que $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \Gamma_n(q) = 2 + \frac{1}{n}$.

Si $t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, entonces $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t)$. Como α_n es inyectiva en la primera coordenada, tenemos que $\Gamma_n(x) = 2 + \frac{1}{n}$. Puesto que Γ_n es un homeomorfismo, $x = q$.

Si $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$, entonces $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \beta_n(\Gamma_n(x), t)$. Puesto que β_n es inyectiva en la primera coordenada, se tiene que $\Gamma_n(x) = 2 + \frac{1}{n}$. Concluimos que $x = q$.

Ahora, supongamos que $x = q$. Entonces $f_n(q, t) = \Gamma_n^{-1}(\varphi_n(\Gamma_n(q), t)) = \Gamma_n^{-1}(\varphi_n(2 + \frac{1}{n}, t)) =$

$$\begin{cases} \Gamma_n^{-1}(\alpha_n(2 + \frac{1}{n}, t)) = \Gamma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n}) = q, & \text{si } t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]; \\ \Gamma_n^{-1}(\beta_n(2 + \frac{1}{n}, t)) = \Gamma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n}) = q, & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

Esto concluye la prueba de la propiedad (3).

(4) Sea $t \in [0, 1)$. Entonces $f_n(x, t) \in qp$ si y sólo si $x \in qp$.

Se sigue de las propiedades (2) y (3) y de que, cuando t es fija, f_n es inyectiva y va del arco q_np en el arco q_np .

(5) Si $x \in qp$, entonces $f_n(x, t) = ((1-t)\pi(x), 0) = f_m(x, t)$ para cualesquiera $n, m \geq 2$.

Sea $x = (s, 0)$. Entonces $\Gamma_n(x) = 2 + \frac{1}{n} + s \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$.

Supongamos que $t \leq 1 - \frac{1}{n}$. Entonces,

$$\begin{aligned} f_n(x, t) &= \Gamma_n^{-1}(\alpha_n(\Gamma_n(x), t)) \\ &= \Gamma_n^{-1}(\alpha_n(2 + \frac{1}{n} + s, t)) \\ &= \Gamma_n^{-1}((1-t)(2 + \frac{1}{n} + s) + (2 + \frac{1}{n})t) \\ &= \Gamma_n^{-1}((1-t)s + 2 + \frac{1}{n}) \\ &= ((1-t)s, 0). \end{aligned}$$

La última igualdad es porque $(1-t)s + 2 + \frac{1}{n} \in [2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$.

Supongamos ahora que $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
f_n(x, t) &= \Gamma_n^{-1}(\beta_n(\Gamma_n(x), t)) \\
&= \Gamma_n^{-1}(\beta_n(2 + \frac{1}{n} + s, t)) \\
&= \Gamma_n^{-1}((1-t)(2 + \frac{1}{n} + s) + (2 + \frac{1}{n})t) \\
&= \Gamma_n^{-1}((1-t)s + 2 + \frac{1}{n}) \\
&= ((1-t)s, 0).
\end{aligned}$$

Concluimos que $f_n(x, t) = ((1-t)s, 0)$ para cada $n \geq 2$. Esto muestra la propiedad (5).

Dada $(x, t) \in X \times [0, 1]$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in q_n p$. El punto $f_n(x, t)$ pertenece a $q_n p$. Entonces podemos considerar el arco $f_n(x, t) p \subset q_n p$.

Si $x \in q_n q$, por la propiedad (3), $f_n(x, t) \in q_n q$. Así que $q p \subset f_n(x, t) p$. Por lo tanto, $\mu(f_n(x, t) p) \geq \mu(q p) = \text{long}(\pi(q p)) = 1$. Considerando un arco ordenado de $f_n(x, t)$ a $f_n(x, t) p$, existe un subarco α de $f_n(x, t) p$ tal que $\mu(\alpha) = t$ y α tiene a $f_n(x, t)$ como uno de sus extremos.

Por otro lado, si $x \in q p$, sea $s \in [0, 1]$ tal que $x = (s, 0)$. Por la propiedad (5), $f_n(x, t) = ((1-t)s, 0)$. Así que $\mu(f_n(x, t) p) = \text{long}(f_n(x, t) p) = 1 - (1-t)s$. Ahora bien, como $s, t \in [0, 1]$, entonces $(1-t) \geq (1-t)s$. Se sigue que $1 - (1-t)s \geq t$. Concluimos que $\mu(f_n(x, t) p) \geq t$. Considerando un arco ordenado de $f_n(x, t)$ a $f_n(x, t) p$, existe un subarco α de $f_n(x, t) p$ tal que $\mu(\alpha) = t$ y α tiene a $f_n(x, t)$ como uno de sus extremos.

Definimos $h : X \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$ de la siguiente manera. Dada $(x, t) \in X \times [0, 1]$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in q_n p$. El punto $f_n(x, t)$ pertenece a $q_n p$. Entonces podemos tomar el subarco α de $f_n(x, t) p$ de tal manera que $\mu(\alpha) = t$ y tiene a $f_n(x, t)$ como uno de sus extremos. Definimos $h(x, t) = \alpha$.

Por la Propiedad (5) de f_n , tenemos que si $x \in q p$, entonces $f_n(x, t) = ((1-t)\pi(x), 0)$. Así que $h(x, t)$ no depende de n cuando $x \in q p$.

Veamos algunas propiedades de h .

(1) Si $x \in q_n y_n$ y $t < 1 - \frac{1}{n}$, entonces

$$h(x, t) = \pi_n^{-1}([(1-t)\pi(x), (1-t)\pi(x) + t]).$$

En efecto, si $x \in q_n y_n$, entonces $\Gamma_n(x) \in [0, 1]$. Así que

$$\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t) = (1-t)\Gamma_n(x) \leq 1.$$

De aquí que

$$f_n(x, t) = \Gamma_n^{-1}((1-t)\Gamma_n(x)) = \pi_n^{-1}((1-t)\Gamma_n(x)).$$

Se sigue que la primera coordenada de $f_n(x, t)$ es $(1-t)\Gamma_n(x)$.

Como $\Gamma_n(x) \in [0, 1]$, entonces $(1-t)\Gamma_n(x) \leq (1-t)$. Así que $(1-t)\Gamma_n(x) + t \leq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} [(1-t)\Gamma_n(x), (1-t)\Gamma_n(x) + t] \times \{0\} &\subset pq \text{ y} \\ \mu([(1-t)\Gamma_n(x), (1-t)\Gamma_n(x) + t]) &= t. \end{aligned}$$

Entonces, $\pi_n^{-1}([(1-t)\Gamma_n(x), (1-t)\Gamma_n(x) + t])$ es un arco en $q_n y_n$ que tiene a $f(x, t)$ como uno de sus extremos, está contenido en el arco que une a p con $f(x, t)$ y $\mu(\pi_n^{-1}([(1-t)\Gamma_n(x), (1-t)\Gamma_n(x) + t])) = t$. Esto muestra que $h(x, t) = \pi_n^{-1}([(1-t)\Gamma_n(x), (1-t)\Gamma_n(x) + t])$.

(2) Si $x \in y_n p_n$ y $t < 1 - \frac{1}{n}$, entonces $h(x, t) \cap y_n p_n \neq \emptyset$.

Como $x \in y_n p_n$, tenemos que $\Gamma_n(x) = \pi_n(x) \in [1, 1 + \frac{1}{2n}]$. Por lo tanto, $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t) \in [1-t, 1 + \frac{1}{2n}]$. Así que $f_n(x, t)$ está en el arco que une los puntos $\pi_n^{-1}(1-t)$ y p_n .

Si $f_n(x, t) \in y_n p_n$, entonces $f_n(x, t) \in h(x, t) \cap y_n p_n$. Supongamos que $f_n(x, t) \notin y_n p_n$. Si γ es el arco que une los puntos $\pi_n^{-1}(1-t)$ y y_n , entonces $\pi_n(\gamma) = [1-t, 1]$. Por lo tanto, $\mu(\gamma) = t$.

Si $h(x, t) \cap y_n p_n = \emptyset$, entonces $h(x, t) \not\subseteq \gamma$ pues $y_n \notin h(x, t)$. Concluimos que $\mu(h(x, t)) < \mu(\gamma) = t$. Lo cual contradice la definición de $h(x, t)$. Hemos probado que $h(x, t) \cap y_n p_n \neq \emptyset$ siempre que $x \in y_n p_n$ y $t < 1 - \frac{1}{n}$.

(3) Si $x \in p_n z_n$ y $t < 1 - \frac{1}{n}$, entonces $h(x, t) = \sigma_n^{-1}([(1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n}, (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})])$.

En efecto, si $x \in p_n z_n$, entonces $\sigma_n(x) \in [\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{2n}]$. De aquí que $\Gamma_n(x) = 2 + \frac{1}{n} - \sigma_n(x) \in [1 + \frac{1}{2n}, 2]$. Por lo tanto, $1 + \frac{1}{2n} \leq \Gamma_n(x) \leq 2$. De modo que

$$\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t) = (1-t)\Gamma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n}) \leq 2.$$

Así que

$$\begin{aligned} f_n(x, t) &= \Gamma_n^{-1}((1-t)\Gamma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})) \\ &= \sigma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n} - (1-t)\Gamma_n(x) - t - \frac{t}{2n}) \\ &= \sigma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n} - (1-t)(2 + \frac{1}{n} - \sigma_n(x)) - t(1 + \frac{1}{2n})) \\ &= \sigma_n^{-1}((2 + \frac{1}{n})(1 - (1-t)) + (1-t)\sigma_n(x) - t(1 + \frac{1}{2n})) \\ &= \sigma_n^{-1}((1-t)\sigma_n(x) + t(2 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2n})) \\ &= \sigma_n^{-1}((1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})) \in qp_n. \end{aligned}$$

Concluimos que la primera coordenada de $f_n(x, t)$ es $(1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n}) \leq 1 + \frac{1}{2n}$. La última desigualdad se cumple al ser $f_n(x, t)$ un punto de qp_n .

Ahora bien, $0 \leq (1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n} \leq (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n}) \leq 1 + \frac{1}{2n}$. Entonces,

$$\begin{aligned} [(1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n}, (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})] \times \{0\} &\subset [0, 1 + \frac{1}{2n}] \times \{0\} \text{ y} \\ \text{long}([(1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n}, (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})]) &= t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma_n^{-1}([(1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n}, (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})])$ es un arco contenido en el arco que une a p con $f_n(x, t)$, que tiene a $f_n(x, t)$ como uno de sus extremos y es tal que $\mu(\sigma_n^{-1}([(1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n}, (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})])) = t$. Esto muestra que

$$h(x, t) = \sigma_n^{-1}([(1-t)\sigma_n(x) + \frac{t}{2n}, (1-t)\sigma_n(x) + t(1 + \frac{1}{2n})]).$$

(4) Si $x \in z_nq$ y $t < 1 - \frac{1}{n}$, entonces $h(x, t) \cap z_nq \neq \emptyset$.

En efecto, si $x \in z_nq$, entonces $\Gamma_n(x) \in [2, 2 + \frac{1}{n}]$. Por lo tanto, $\varphi_n(\Gamma_n(x), t) = \alpha_n(\Gamma_n(x), t) \in [2 - t + \frac{t}{2n}, 2 + \frac{1}{n}]$. Notemos que $1 - \frac{1}{2n} > t(1 - \frac{1}{2n})$, así que $2 - t + \frac{t}{2n} > 1 + \frac{1}{2n}$. De aquí que $f_n(x, t) = \Gamma_n^{-1}(\alpha_n(\Gamma_n(x), t))$ está en el arco que une al punto $\Gamma_n^{-1}(2 - t + \frac{t}{2n})$ con q y dicho arco está contenido en qp_n .

Ahora bien, si $f_n(x, t) \in z_nq$, entonces $f_n(x, t) \in h(x, t) \cap z_nq$. Supongamos que $f_n(x, t) \notin z_nq$. Observemos que $2 + \frac{1}{n} > 2 + \frac{1}{2n} > 2 + \frac{t}{2n} \geq 2$. Como $\sigma_n(z_n) = \frac{1}{n}$, $\Gamma_n(z_n) = 2$, así que $\Gamma_n^{-1}(2 + \frac{t}{2n}) \in qz_n$.

Sea γ el arco que une los puntos $\Gamma_n^{-1}(2 - t + \frac{t}{2n})$ y $\Gamma_n^{-1}(2 + \frac{t}{2n})$. Notemos que

$$\Gamma_n^{-1}(2 - t + \frac{t}{2n}) = \sigma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n} - (2 - t + \frac{t}{2n})) = \sigma_n^{-1}(t + \frac{1}{n} - \frac{t}{2n})$$

y

$$\Gamma_n^{-1}(2 + \frac{t}{2n}) = \sigma_n^{-1}(2 + \frac{1}{n} - (2 + \frac{t}{2n})) = \sigma_n^{-1}(\frac{1}{n} - \frac{t}{2n}).$$

Por lo tanto, $\pi(\gamma) = [\frac{1}{n} - \frac{t}{2n}, t + \frac{1}{n} - \frac{t}{2n}]$. Así que $long([\frac{1}{n} - \frac{t}{2n}, t + \frac{1}{n} - \frac{t}{2n}]) = t$. Concluimos que $\mu(\gamma) = t$.

Si $h(x, t) \cap z_nq = \emptyset$, entonces $h(x, t) \not\subseteq \gamma$ pues $\Gamma_n^{-1}(2 + \frac{t}{2n}) \notin h(x, t)$. Concluimos que $\mu(h(x, t)) < \mu(\gamma) = t$. Esto contradice la definición de $h(x, t)$. Hemos probado que $h(x, t) \cap z_nq \neq \emptyset$ siempre que $x \in z_nq$ y $t < 1 - \frac{1}{n}$.

(5) Si $x = (s, 0) \in pq$, entonces $h(x, t) = [(1-t)s, (1-t)s + t] \times \{0\}$.

En efecto, si $x = (s, 0)$, tenemos que $f(x, t) = ((1-t)s, 0)$. Observemos que $[(1-t)s, (1-t)s + t] \times \{0\}$ es un arco que tiene a $f(x, t)$ como uno de sus

extremos, contenido en $pf(x, t)$ y es tal que $\mu([(1-t)s, (1-t)s+t] \times \{0\}) = t$. Esto prueba que

$$h(x, t) = [(1-t)s, (1-t)s+t] \times \{0\}.$$

Observemos que, por la propiedad (1), $h(x, 1) = [0, 1] \times \{0\} = qp$ para cada $x \in qp$.

(6) h es continua.

Sean $(x, t) \in X \times [0, 1]$ y $((x_n, t_n))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $X \times [0, 1]$ tales que $\lim(x_n, t_n) = (x, t)$. Supongamos que existe $A \in C(X)$ tal que $\lim h(x_n, t_n) = A$. Veamos que $A = h(x, t)$.

Puesto que $\mu(h(x_n, t_n)) = t_n$ y μ es continua, tenemos que $\mu(A) = \lim \mu(h(x_n, t_n)) = \lim t_n = t$.

Consideremos tres casos.

Caso 1) $x \in q_kq \setminus \{q\}$ para algún $k \geq 2$.

En este caso, puesto que $q_kq \setminus q$ es un conjunto abierto de X y $\lim x_n = x$, existe $N \geq 2$ tal que, para cada $n \geq N$, se tiene que $x_n \in q_kq \setminus q$.

Puesto que f_k es continua, tenemos que $\lim f_k(x_n, t_n) = f_k(x, t)$. Además, puesto que $f_k(x_n, t_n) \in h(x_n, t_n)$ para cada $n \geq N$, se tiene que $f_k(x, t) \in A$.

Concentrémonos en el arco q_kp . Notemos que $f_k(x_n, t_n) \subset q_kp$ para toda $n \geq N$. Como $\lim f_k(x_n, t_n) = f_k(x, t)$, entonces $\lim pf_k(x_n, t_n) = pf_k(x, t)$. Y, dado que $h(x_n, t_n) \subset pf_k(x_n, t_n)$ para cada $n \geq N$, por el Lema 1.28, concluimos que $A \subset pf_k(x, t)$.

Hemos mostrado que A es un arco contenido en el arco $pf_k(x, t)$ y, como $f_k(x, t) \in A$, entonces $f_k(x, t)$ es uno de los extremos de A . Además, $\mu(A) = t$. Esto muestra que $h(x, t) = A$.

Caso 2) $x \in qp$.

En este caso, sea $x = (s, 0)$. Tomando subsucesiones si es necesario, tenemos los siguientes subcasos.

Caso 2.1) $x_n \in qp$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n \in [0, 1]$ tal que $x_n = (s_n, 0)$. Entonces $\lim s_n = s$. Además, por la propiedad 5) de h , tenemos que $h(x_n, t_n) = [(1 - t_n)s_n, (1 - t_n)s_n + t_n] \times \{0\}$.

Dado que $\lim t_n = t$ y $\lim s_n = s$, se tiene que $\lim(1 - t_n)s_n = (1 - t)s$ y $\lim((1 - t_n)s_n + t_n) = (1 - t)s + t$. Entonces,

$$\begin{aligned} A &= \lim h(x_n, t_n) \\ &= \lim[(1 - t_n)s_n, (1 - t_n)s_n + t_n] \times \{0\} \\ &= [(1 - t)s, (1 - t)s + t] \times \{0\} \\ &= h(x, t). \end{aligned}$$

Caso 2.2) $x_n \notin qp$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n \geq 2$ tal que $x_n \in A_{k_n} \cup B_{k_n} \subset q_{k_n}p$.

Si $x = q$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_n = k_{n_0}$ para una infinidad de números n , podemos suponer que $k = k_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que f_k es continua, tenemos que $\lim f_k(x_n, t_n) = f_k(q, t) = q$. Además, puesto que $f_k(x_n, t_n) \in h(x_n, t_n)$ para cada $n \geq N$, se tiene que $q = f_k(q, t) \in A$.

Por otro lado, como $\lim f_k(x_n, t_n) = f_k(q, t) = q$, entonces, como todo ocurre en el arco pq_k , $\lim pf_k(x_n, t_n) = pf_k(q, t) = qp$. Y, dado que $h(x_n, t_n) \subset pf_k(x_n, t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.28, concluimos que $A \subset pq$.

Hemos mostrado que A es un arco contenido en el arco pq y, como $q \in A$, entonces q es uno de los extremos de A . Además, $\mu(A) = t$. Esto muestra que $h(q, t) = A$.

Supongamos que $x \neq q$. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_n = k_{n_0}$ para una infinidad de números n , podemos suponer que $k = k_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n \in qq_k$ para una infinidad de números n . Como $\lim x_n = x$, del Lema 1.27 se sigue que $x \in qq_k$. Pero $q \in qp \setminus \{q\}$. De esta contradicción podemos suponer que $k_n \neq k_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, si $x \neq q$ o ($x = q$ y $k_n \neq k_m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$), tenemos que $\lim k_n = \infty$. Por lo tanto, $\lim q_{k_n}p = qp$. Entonces, como $h(x_n, t_n) \subset q_{k_n}p$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim q_{k_n}p = qp$, tenemos que $A \subset qp$.

Ahora bien, si $t = 1$, como $\mu(A) = t = 1$ y $\mu(qp) = 1$, concluimos que $A = qp = h(x, 1)$.

Supongamos que $t < 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t < 1 - \frac{1}{k_n}$ para cada n tal que $k_n \geq N$. Más aún, puesto que $\lim t_n = t$, podemos suponer que $t_n < 1 - \frac{1}{N} \leq 1 - \frac{1}{k_n}$ para cada n tal que $k_n \geq N$.

Tomando subsucesiones si es necesario, tenemos cuatro casos.

a) $x_n \in q_{k_n}y_{k_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \geq N$.

En este caso, por la propiedad (1), tenemos que

$$h(x_n, t_n) = \pi_{k_n}^{-1}([(1 - t_n)\pi(x_n), (1 - t_n)\pi(x_n) + t_n]).$$

Puesto que π es continua, tenemos que $\lim \pi(x_n) = \pi(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim(1 - t_n)\pi(x_n) &= (1 - t)\pi(x) = (1 - t)s \text{ y} \\ \lim((1 - t_n)\pi(x_n) + t_n) &= (1 - t)s + t. \end{aligned}$$

Así que

$$\lim[(1 - t_n)\pi(x_n), (1 - t_n)\pi(x_n) + t_n] = [(1 - t)s, (1 - t)s + t].$$

Concluimos, como $\pi(h(x_n, t_n)) = [(1 - t_n)\pi(x_n), (1 - t_n)\pi(x_n) + t_n]$, que

$$\begin{aligned} A &= \pi(A) \times \{0\} \\ &= \lim (\pi(h(x_n, t_n)) \times \{0\}) \\ &= \lim ([(1 - t_n)\pi(x_n), (1 - t_n)\pi(x_n) + t_n] \times \{0\}) \\ &= [(1 - t)s, (1 - t)s + t] \times \{0\} \\ &= h(x, t). \end{aligned}$$

b) $x_n \in y_{k_n}p_{k_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \geq N$.

En este caso, como $\lim y_{k_n}p_{k_n} = \{p\}$, tenemos que $x = p$. Además, por la propiedad (2), tenemos que $h(x_n, t_n) \cap y_{k_n}p_{k_n} \neq \emptyset$ para cada n tal que $k_n \geq N$. Entonces, se sigue del Lema 1.30 que $A \cap \{p\} \neq \emptyset$. Es decir, $p \in A$.

Concluimos que A es un arco contenido en pq tal que $p \in A$ y $\mu(A) = t$.
Es decir, $A = [1 - t, 1] \times \{0\} = h(p, t)$.

c) $x_n \in p_{k_n} z_{k_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \geq N$.

En este caso, por la propiedad (3), tenemos que

$$h(x, t) = \sigma_{k_n}^{-1} \left(\left[(1-t)\sigma_{k_n}(x) + \frac{t}{2k_n}, (1-t)\sigma_{k_n}(x) + t\left(1 + \frac{1}{2k_n}\right) \right] \right).$$

Puesto que π es continua, tenemos que $\lim \pi(x_n) = \pi(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim \left((1-t_n)\sigma_{k_n}(x_n) + \frac{t_n}{2k_n} \right) &= \lim \left((1-t_n)\pi(x_n) + \frac{t_n}{2k_n} \right) \\ &= (1-t)s \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim \left((1-t_n)\sigma_{k_n}(x_n) + t_n \left(1 + \frac{1}{2k_n} \right) \right) &= \lim \left((1-t_n)\pi(x_n) + t_n \left(1 + \frac{1}{2k_n} \right) \right) \\ &= (1-t)s + t. \end{aligned}$$

Así que

$$\lim \left[\left((1-t_n)\sigma_{k_n}(x_n) + \frac{t_n}{2k_n}, (1-t_n)\sigma_{k_n}(x_n) + t_n \left(1 + \frac{1}{2k_n} \right) \right) \right] = [(1-t)s, (1-t)s + t].$$

Concluimos, como $\pi(h(x_n, t_n)) = \left[(1-t)\sigma_{k_n}(x_n) + \frac{t_n}{2k_n}, (1-t_n)\sigma_{k_n}(x_n) + t_n \left(1 + \frac{1}{2k_n} \right) \right]$, que

$$\begin{aligned} A &= \pi(A) \times \{0\} \\ &= \lim (\pi(h(x_n, t_n)) \times \{0\}) \\ &= \lim \left(\left[\left((1-t)\sigma_{k_n}(x_n) + \frac{t_n}{2k_n}, (1-t_n)\sigma_{k_n}(x_n) + t_n \left(1 + \frac{1}{2k_n} \right) \right) \right] \times \{0\} \right) \\ &= [(1-t)s, (1-t)s + t] \times \{0\} \\ &= h(x, t). \end{aligned}$$

d) $x_n \in z_{k_n} q$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \geq N$.

En este caso, como $\lim z_{k_n}q = \{q\}$, tenemos que $x = q$. Además, por la propiedad (4), tenemos que $h(x_n, t_n) \cap z_{k_n}q \neq \emptyset$ para cada n tal que $k_n \geq N$. Entonces, se sigue del Lema 1.30 que $A \cap \{q\} \neq \emptyset$. Es decir, $q \in A$.

Concluimos que A es un arco contenido en pq tal que $q \in A$ y $\mu(A) = t$. Es decir, $A = [0, t] \times \{0\} = h(q, t)$.

Esto termina la demostración de que h es continua.

7) h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

Sean $(x, s), (y, t) \in X \times [0, 1)$ tales que $h(x, s) = h(y, t)$. Entonces $s = \mu(h(x, s)) = \mu(h(y, t)) = t$.

Supongamos que $x \in q_n p$ y $y \in q_m p$. Puesto que $h(x, t) = h(y, t)$, por la definición de h , tenemos que $f_n(x, t) = f_m(y, t)$. Si $n = m$, entonces $x = y$, pues f_n es inyectiva en la primera coordenada para el número fijo t .

Supongamos que $n \neq m$. Puesto que $f_n(x, t) = f_m(y, t)$, se tiene que $f_n(x, t), f_m(y, t) \in qp$. Por la propiedad (4), de f_n y f_m , tenemos que $x, y \in qp$. Como $f_n(x, t) = f_m(y, t)$, se tiene que $((1-t)\pi(x), 0) = f_n(x, t) = f_m(y, t) = ((1-t)\pi(y), 0)$. Dado que $t < 1$, concluimos que $\pi(x) = \pi(y)$. Como $x, y \in qp \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, tenemos que $x = y$. Hemos probado que $(x, s) = (y, t)$. Esto prueba que h es inyectiva en $X \times [0, 1)$.

8) $h(x, t) = qp$ si y sólo si $t = 1$.

Sea $x \in X$ y supongamos que $x \in q_n p$, para algún $n \geq 2$.

Si $x \in qp$, por la propiedad (1) de f , tenemos que $h(x, 1) = qp$.

Supongamos que $x \in q_n q$. Entonces, por la propiedad (1) de f_n , tenemos que $f_n(x, 1) = q$. Así que $h(x, 1)$ es un arco γ contenido en qp tal que $\mu(\gamma) = 1$. Es decir, $h(x, 1) = qp$.

Supongamos que $t < 1$ y $x \neq q$. Si $x \in q_n q$, entonces $f_n(x, t) \in q_n q$ por la propiedad (2) de f_n . Además, por ser f_n inyectiva en la primera coordenada para el número fijo t , tenemos que $f_n(x, t) \neq q$ por la propiedad (3) de f_n . Concluimos que $h(x, t) \not\subseteq qp$. Por tanto, $h(x, t) \neq qp$.

Si $x \in qp$, entonces $f_n(x, t) \in qp$ por la propiedad (4) de f_n . Por ser f_n inyectiva en la primera coordenada para el número fijo $t < 1$, tenemos que $f_n(x, t) \neq q$ por la propiedad (3) de f_n . Concluimos que $h(x, t) \not\subseteq qp$. Por tanto, $h(x, t) \neq qp$.

Si $x = q$, entonces $h(q, t)$ es un arco α contenido en pq que tiene a q como uno de sus extremos. Así que $\mu(\alpha) = t < 1 = \mu(pq)$. Por lo tanto, $h(q, t) \not\subseteq pq$ y $h(q, t) \neq pq$. Esto concluye la prueba de la propiedad (8).

Hemos mostrado que h cumple las condiciones del Lema 1.69. Por lo tanto, X es un continuo cono-encajable en $C(X)$. ■

Entonces, tenemos un ejemplo de un dendroide no suave que no es cono-encajable y un ejemplo de un dendroide no suave que sí es cono-encajable. Observemos además que el encaje para el cono de la chafaldrana fue hecho de manera que los niveles de la forma $X \times \{t\}$ van a dar a niveles de Whitney.

Capítulo 5

Problemas y Preguntas Abiertas

En este capítulo presentamos los problemas y preguntas abiertas que se fueron presentando a lo largo del trabajo. Además, incluimos otras preguntas así como algunos comentarios acerca de ellas.

Con respecto a si la propiedad de ser cono-encajable se hereda a alguno de sus hiperespacios y viceversa, tenemos las siguientes preguntas.

Problema 5.1 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que $C(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(C(X))$?*

Si X es un continuo localmente conexo, por [9, Teorema 3.6] se tiene que $C(X)$ es un continuo suave por arcos (en cada uno de sus puntos). Se sigue del Teorema 4.18 que $C(X)$ es un continuo cono-encajable ordenado en $C(C(X))$.

Problema 5.2 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que $C_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(C_n(X))$ para algún $n \geq 2$?*

Por [38, Teorema 3.9], si X es localmente conexo, entonces $C_n(X)$ es un suave por arcos, (en cada uno de sus puntos) para cada $n \geq 2$. Se sigue del Teorema 4.18 que $C_n(X)$ es un continuo cono-encajable ordenado en $C(C_n(X))$ para cada $n \geq 2$.

Problema 5.3 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que $F_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(F_n(X))$ para algún $n \geq 3$?*

Problema 5.4 *Si X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$, ¿será cierto que 2^X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(2^X)$?*

En [2, Teorema 1] y [3, Teorema 3.2], D. W. Curtis y R. M. Schori muestran que si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert Q , el cual, por el Teorema 2.13, es cono-encajable en $C(Q)$. De aquí que, si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X es un continuo cono-encajable en $C(2^X)$.

Además, podemos preguntarnos si un continuo X es cono-encajable en $C(X)$ siempre que uno de sus hiperespacios lo es.

Problema 5.5 *Dado un continuo X , si $F_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(F_n(X))$ para algún $n \geq 2$, ¿será cierto que X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$?*

Problema 5.6 *Dado un continuo X , si $C_n(X)$ es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(C_n(X))$ para algún $n \geq 2$, ¿será cierto que X es un continuo cono-encajable (respectivamente cono-encajable ordenado) en $C(X)$?*

Si X es localmente conexo y $n \geq 2$, se sabe ([38, Teorema 3.9]), que $C_n(X)$ es un suave por arcos y por tanto (Teorema 4.18) es un continuo cono-encajable ordenado en $C(C_n(X))$. Así, surge la siguiente pregunta.

Problema 5.7 *Si X es un continuo localmente conexo, ¿será cierto que X es un continuo cono-encajable en $C(X)$? ¿Será cierto que X es un continuo cono-encajable ordenado en $C(X)$?*

Una pregunta natural que surge al estudiar si la propiedad de ser cono-encajable es heredada a algún espacio, es la siguiente.

Problema 5.8 *¿Ser cono-encajable es*
 (a) *una propiedad de Whitney?*
 (b) *una propiedad reversible de Whitney?*

De [9, Teorema 5.4], tenemos que si X es un dendroide suave, entonces todos sus niveles de Whitney son suaves por arcos y por el Teorema 4.18, son cono-encajables.

Vimos en la Subsección 2.5.1 que el producto de continuos cono-encajables (ordenados) es un continuo cono-encajable (ordenado). Podemos preguntarnos si se cumple el regreso. Es decir,

Problema 5.9 *Si $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo cono-encajable en $C(X)$, ¿será cierto que X_n es un continuo cono-encajable para cada $n \in \mathbb{N}$?*

Problema 5.10 *Si $X = \prod_{i=1}^n X_i$ es un continuo cono-encajable en $C(X)$, ¿será cierto que X_i es un continuo cono-encajable para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$?*

Con respecto a las compactaciones del rayo, de la unión de dos rayos y de la recta real, tenemos las siguientes preguntas.

Problema 5.11 *¿Existirá una compactación del rayo X , con un triodo simple como residuo, que sea un continuo cono-encajable en $C(X)$?*

Más aún, tenemos el siguiente problema.

Problema 5.12 *Si X es una compactación del rayo con una gráfica finita como residuo que es un continuo cono-encajable en $C(X)$, ¿será cierto que X es una compactación con un arco o una circunferencia como residuo?*

Preguntas análogas si tienen para compactaciones de la unión de dos rayos o de la recta real.

Problema 5.13 *¿Existirá una compactación de la unión de dos rayos X , con un triodo simple como residuo, que sea un continuo cono-encajable en $C(X)$?*

Problema 5.14 *Si X es una compactación de la unión de dos rayos con una gráfica finita como residuo que es un continuo cono-encajable en $C(X)$, ¿será cierto que X es una compactación con un arco o una circunferencia como residuo?*

Problema 5.15 *¿Existirá una compactación de la recta real X , con un triodo simple como residuo, que sea un continuo cono-encajable en $C(X)$?*

Problema 5.16 *Si X es una compactación de la recta real con una gráfica finita como residuo que es un continuo cono-encajable en $C(X)$, ¿será cierto que X es una compactación con un arco o una circunferencia como residuo?*

Finalmente, podemos preguntarnos si, dado un continuo X , $\text{Cono}(X)$ puede ser encajado en el hiperespacio $C(Y)$ para algún continuo Y . Es decir,

Problema 5.17 *Sea X un continuo de dimensión finita. ¿Existe un continuo Y de dimensión finita tal que X es cono-encajable en $C(Y)$? Es decir, ¿existe un encaje $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C(Y)$ tal que $h(x, 0) \in F_1(Y)$, para cada $x \in X$?*

Bibliografía

- [1] J. J. Charatonik y C. Eberhart, *On smooth dendroids*, Fund. Math. 67 (1970), 297-322.
- [2] D. W. Curtis y R. M. Schori, 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927-931.
- [3] D. W. Curtis y R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19-38.
- [4] A. M. Dilks y J. T. Rogers, Jr., *Whitney stability and contractible hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 83 (1981), 633-640.
- [5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [6] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr. y L. Lum, *Arc-smooth continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 265 (1981), 545-561.
- [7] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr. y L. Lum, *On arc-smooth continua*, Topology Proc. 2 (1977), 645-656.
- [8] A. García-Máynez y A. Tamariz, *Topología General*, Porrúa, México, 1988.
- [9] J. T. Goodykoontz, Jr., *Arc-smoothness in hyperspaces*, Topology Appl. 15 (1983), 131-150.
- [10] D. Hinrichsen, J. L. Fernández, A. Fraguera y A. Álvarez, *Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (22), Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [11] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

- [12] A. Illanes, *The cone = hyperspace property, a characterization*, Topology Appl. 113 (2001), 61-67.
- [13] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (28), Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [14] A. Illanes, *Hyperspaces homeomorphic to cones*, Glasnik Mat., 30 (50) (1995), 285-294.
- [15] A. Illanes y M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones, II*, Topology Appl. 126 (2002), 377-391.
- [16] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [17] W. T. Ingram and D. D. Sherling, *Two continua having a property of J. L. Kelley*, Canad. Math. Bull., 34 (1991), 351-356.
- [18] J. R. Isbell, *Six theorems about injective metric spaces*, Comment. Math. Helv. 39 (1964), 65-76.
- [19] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa, 1968.
- [20] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa, 1968.
- [21] A. Lelek y W. Nitka, *On convex metric spaces. I*, Fund. Math. 49 (1961), 183-204.
- [22] M. Levin y Y. Sternfeld, *The space of subcontinua of a 2-dimensional continuum is infinite dimensional*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 2771-2775.
- [23] M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones*, Topology Appl. 126 (2002), 361-375.
- [24] S. Macías, *Hyperspaces and cones*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3069-3073.

- [25] J. M. Martinez-Montejano, *Non-confluence of the natural map of products onto symmetric products*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 230, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002, 229-236.
- [26] S. B. Nadler, Jr., *Continua which are a one-to-one continuous image of $[0, \infty)$* , Fund. Math. 75 (1972), 123-133.
- [27] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Notices Amer. Math. Soc., 19 (1972), A718-A719.
- [28] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Trans. Amer. Math. Soc., 230 (1977), 321-345.
- [29] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, an Introduction*, Pure and Applied Mathematics 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [30] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (18), Sociedad Matemática Mexicana 2002.
- [31] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (33), Sociedad Matemática Mexicana 2006.
- [32] S. B. Nadler, Jr., *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math., 79 (1973), 233-250.
- [33] S. B. Nadler, Jr. y J. Quinn, *Embeddability and structure properties of real curves*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 125 (1972)
- [34] J. T. Rogers, Jr., *The cone = hyperspace property*, Can. J. Math., 24 (1972), 279-285.
- [35] J. T. Rogers, Jr., *Continua with cones homeomorphic to hyperspaces*, Gen. Top. and Its Applications, 3 (1973), 283-289.
- [36] J. T. Rogers, Jr. *Embedding the hyperspaces of circle-like plane continua*. Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 165-168.
- [37] D. D. Sherling, *Concerning the cone=hyperspace Property*, Canad. J. Math., 35 (1983), 1030-1048.

- [38] L. O. Vázquez, *Suavidad por arcos en hiperespacios*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2011.
- [39] L. E. Ward, Jr., *Extending Whitney maps*, Pacific J. Math., 93 (1981), 465-469.
- [40] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc. Mineola and New York, 2004.

Índice

- Abanico simple, 4.14
- Alcance, 151
- Arco, 2
 - ordenado, 25
- Arco-estructura, 145
- Arcoiris de Knaster, 27

- Bola abierta, 1

- Cable Cortado, Teorema del, 9
- Cerradura, 1
- Casi componente, 4
- Chafaldrana, 207
- Círculo de Varsovia, 67
- Composante, 10
- Conjunto
 - convexo, 199
 - estrellado, 200
 - mayor, 148
 - final, 150
 - de un punto, 150
- Conjuntos
 - finales en compactaciones, 88, 121
 - separados, 2
- Cono,
 - base de, 23
 - de un espacio topológico, 23
 - geométrico, 23

- vértice de, 23
- Continuo, 6
 - C-H, 31
 - cono encajable, 35
 - cono encajable ordenado, 35
 - contráctil, 47
 - a un punto en un espacio, 47
 - de Elsa, 74
 - de tipo N, 30
 - descomponible, 10
 - hereditariamente descomponible, 10
 - hereditariamente indescomponible, 10
 - indescomponible, 10
 - irreducible, 11
 - en A , 11
 - entre A y B , 11
 - fuertemente convexo, 201
 - libremente contráctil, 200
 - terminal, 44
 - $\text{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$, 67
 - suave por arcos, 146
 - en un punto, 146
 - definición alternativa de, 201
 - Whitney estable, 30
- Contracción, 47
 - a un punto en un espacio, 47
 - libre, 200
- Curva θ , 2
 - Teorema de la, 20

- Dendrita, 199
- Dendroide, 198
- Diámetro, 1
- Distancia de un punto a un subconjunto, 2
- Distancia entre dos subconjuntos, 2

- E-continuo, 74
- Espacio métrico inyectivo, 200

Espacio topológico localmente conexo, 4

Exterior, 1

Frontera, 1

Función,

- de Whitney, 25

- inducida a hiperespacios, 18

- no expansiva, 200

- unión, 18

Gráfica finita, 36

Golpes en la Frontera, Teorema de los, 10

Hausdorff, Métrica de, 8

Hiperespacios,

- 2^X , 6

- $C(X)$, 6

- $F_n(X)$, 6

Homeomorfismo de Rogers, 26

Interior, 1

l_2 , 199

Límite inferior, 15

Límite superior, 15

Métrica fuertemente convexa, 201

n -ésimo producto simétrico, 54

n -odo, 11

Nivel de Whitney, 25

Nube, 6

Orejas, Lema de las, 3

Peine simple, 157

Propiedad,

- Cono = Hiperespacio, 27

- cubierta, 25

- de Kelley, 28
Punto inicial, 198
Puntos finales de un arco, 2

R-conjunto, 11

Semichafaldrana, 204

Separación, 2

Selección, 29

Topología de Vietoris, 12

Triodo, 11

Vietóricos, 12