UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Invariantes Cardinales de los Espacios Métricos Monótonos.

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

ARTURO ANTONIO MARTÍNEZ CELIS RODRÍGUEZ
Director: Dr. Michael Hrušák

MORELIA, MICHOACÁN - OCTUBRE 2011.

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción.

Dos temas de interés para la teoría de conjuntos son la investigación de invariantes cardinales y el estudio de ideales. En este trabajo nos centraremos en el estudio de los ideales generados por los espacios monótonos.

Un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ se llama monótono si existe un orden lineal $<$ y una constante $c > 0$ tal que para todo $x < y < z$, se tenga que $d(x, y) < c \cdot d(x, z)$. Un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ se llama σ*−monótono* si es unión numerable de subespacios monótonos.

Estos espacios primero aparecen en [**Zi1**] en donde se usan para probar la existencia de conjuntos de medida universal cero cuya dimensión de Hausdorff es grande. Desde entonces se empezaron a sacar propiedades de estos espacios; por ejemplo, los conjuntos σ-monótonos del plano tienen dimensión topológica 0 ó 1. Otros resultados importantes se han obtenido sobre estos espacios, como por ejemplo que un espacio métrico admite una métrica compatible la cual lo hace un espacio monótono si y sólo si es un espacio subordenable (véase [**NeZi1**] y [**NeZi2**] para más información).

Desde la publicación de [**Zi1**] se empezó el estudio de los espacios métricos monótonos y sus propiedades. En este trabajo nos enfocaremos en los subespacios monótonos del plano.

Los subespacios de la línea real son claramente monótonos, así que el σ-ideal que generan no es realmente interesante. Este fenómeno no sucede en el plano. El propósito de éste trabajo es el estudio del σ-ideal generado por los conjuntos monótonos del plano. En particular estamos interesados en el estudio de ciertos invariantes cardinales.

A cada σ-ideal $\mathbf{I}$ usualmente se le asocian 4 invariantes cardinales, los cuales son definidos de la siguiente manera:

- $\mathsf{add}(\mathbf{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbf{I} \text{ y } \bigcup A \notin \mathbf{I}\}$,
- $\mathsf{cov}(\mathbf{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbf{I} \text{ y } \bigcup A = X\}$,
- $\mathsf{cof}(\mathbf{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbf{I} \text{ y } A \text{ es una familia cofinal en } \mathbf{I}\}$,
- $\mathsf{non}(\mathbf{I}) = \min\{|Y| : Y \subseteq X \text{ y } Y \notin \mathbf{I}\}$.

Una familia $\mathcal{A}$ es cofinal en $\mathbf{I}$ si para todo $B \in \mathbf{I}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$.

Los dos casos más conocidos son cuando uno toma por **I** a los ideales de los magros y de los nulos en los reales. La siguiente representación es conocida como el diagrama de Cichoń.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
 & \mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] & \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathfrak{m}_{\sigma \text{ ligado}} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{m}_{\sigma \text{ centrado}} \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}
$$

El ideal de los nulos en los reales está representado por la letra $\mathcal{N}$ y el ideal de los magros en los reales está representado por la letra $\mathcal{M}$. Si φ es una propiedad de órdenes parciales entonces $\mathfrak{m}_\varphi$ es el mínimo cardinal κ tal que existe un orden parcial $\mathbb{P}$ y κ densos sobre $\mathbb{P}$ tal que todo filtro sobre $\mathbb{P}$ evade alguno de los κ densos. La letra $\mathfrak{b}$ representa al mínimo cardinal κ tal que existe una familia de funciones de los naturales en sí mismos tal que no existe una función que acote a todas ellas. La letra $\mathfrak{d}$ representa el mínimo cardinal κ tal que existe una familia de κ funciones, de los naturales en sí mismos, tal que para cualquier otra función g, de los naturales en sí mismos, existe una función f de la familia de κ funciones tal que f acote a g. En el diagrama se lee $a \to b$ si $a \leq b$.

En [**HrZi1**] prueban que los subconjuntos del plano que no son σ-monótonos deben tener tamaño más grande que el número de Martin de los órdenes parciales σ-ligados. También se prueba que es consistente con ZFC la existencia de un subconjunto del plano que no es σ-monótono y cuyo tamaño es estrictamente menor al número de Martin para los órdenes parciales σ centrados. Esto se discutirá más a fondo en el último capítulo de este trabajo.

Uno de los propósitos de este trabajo es comparar los invariantes cardinales del ideal de los conjuntos σ-monótonos del plano y compararlos con los cardinales del diagrama de Cichoń. Veremos que para hacer esto necesitaremos de un tipo de conjuntos que en principio pareciera que no están relacionados con los conjuntos monótonos.

Durante el desarrollo de este trabajo aparecen un tipo de conjuntos llamados conjuntos fuertemente porosos. Del mismo modo que los conjuntos magros y los conjuntos nulos, conjunto poroso es una noción que indica un cierto tipo de estrechez en espacios métricos. Este tipo de conjuntos surgieron de la teoría de la medida geométrica, pero se han estado usando en diferentes áreas de las matemáticas.

Del mismo modo que el concepto de conjunto nunca denso, el concepto de porosidad mide el tamaño relativo de los agujeros en un conjunto dado, sin embargo, el concepto de porosidad requiere que estos hoyos sean lo suficientemente grandes.

En el transcurso de este trabajo veremos que los conjuntos fuertemente porosos del plano y los conjuntos monótonos del plano comparten propiedades muy importantes. Resultará que muchos de sus cardinales resultan ser iguales y así podemos estudiar los cardinales de un ideal a través del otro.

Se dará un pequeño resumen del contenido de cada capítulo de este trabajo.

El primer capítulo se titula **Espacios métricos monótonos**. En este primer capítulo se estudiarán algunas propiedades básicas de espacios métricos monótonos y se darán algunos ejemplos. Se verán algunas propiedades topológicas que comparten este tipo de espacios. También se mostrará la fuerte relacion que tienen con las funciones Lipschitz y se introducirán los invariantes cardinales a estudiar en este trabajo. Veremos que dos de los cardinales podemos calcularlos en ZFC.

El segundo capítulo se titula **Espacios porosos**. En este segundo capítulo se introduce un concepto nuevo: los espacios fuertemente porosos. Estos espacios tienen su origen en la teoría de la medida y resulta que tienen una relación muy importante con los espacios monótonos. Se estudiarán propiedades de los subconjuntos porosos de la recta real, del plano y del conjunto de Cantor y se estudiarán algunos invariantes cardinales asociados a él ideal formado por los subconjuntos σ-porosos de los espacios métricos previamente mencionados. Se concluye el capítulo dando la conexión entre estos subconjuntos porosos y los subconjuntos monótonos del plano.

El tercer capítulo se llama **Resultados de consistencia**. Motivados por resultados de algunos artículos ([**HrZi1**], [**Re1**]), se buscan resultados de consistencia relacionados a los invariantes cardinales de los espacios métricos monótonos y los conjuntos fuertemente porosos. Introduciremos algunas nociones de forcing que nos ayuden a preservar algunos cardinales entre distintos modelos de ZFC. Después se introduce un orden parcial con el cual se construirá un modelo de ZFC que cumpla algunas propiedades. Una de estas propiedades responde a una pregunta que se hace en [**HrZi1**].

El último capítulo se llama **El ideal $\mathbf{SP}_k$**. Este cuarto capítulo está motivado por definiciones y resultados que se vieron en el tercer capítulo. En el tercer capítulo se introduce, para cada número natural, el concepto de conjunto poroso de grado n. En este capítulo veremos algunas propiedades que nos ayuden a distinguir estos conjuntos. Como viene siendo común en este trabajo, también se estudiarán los invariantes cardinales asociados a los σ-ideales generados por estos nuevos conjuntos. De la misma manera que en el capítulo tres, en este último capítulo se definirá un nuevo orden parcial el cual nos ayude a construir un modelo de ZFC que cumpla con algunas propiedades. Este orden parcial también nos ayudara a encontrar un resultado en ZFC. Concluiremos el trabajo con algunas preguntas referentes a este último capítulo.

Veamos algunos requisitos que se esperan del lector para poder seguir este trabajo y algunas aclaraciones sobre algunos detalles del formato de este trabajo.

Se asume que el lector tiene conocimientos básicos de topología y está acostumbrado a las técnicas de forcing y de forcing iterado. Es recomendable también que el lector tenga práctica en las técnicas usadas en análisis real.

Todos los resultados y definiciones están numerados de acuerdo al capítulo en el que aparecen. Por ejemplo, la **definición 4.3** se refiere al tercer resultado o definición del cuarto capítulo.

En este trabajo todos los resultados se presentan con suficiente detalle. Sin embargo, hay detalles muy sencillos que se dejan como ejercicio al lector, usualmente igualdad o contención entre dos conjuntos. Las definiciones básicas se omiten (hemos usado las definiciones de [**Ku1**], [**BaJu1**]).

Ahora se introducirá algo de la notación a usar en este trabajo.

Las letra griega ω estará reservada para el conjunto de los números naturales. Por $\mathbb{N}$ entenderemos a ω sin el cero. Por $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ entenderemos el conjunto de los enteros, de los racionales, de los reales y el plano euclideano, respectivamente. Por ω_1 entenderemos por el primer cardinal no numerable. Por ω_2 entenderemos por el primer cardinal más grande que ω_1.

Los conjuntos podremos enlistarlos ya sea por sus elementos o por sus propiedades. Por ejemplo, para denotar el conjunto de los naturales pares menores a 10, podemos enlistarlos por sus elementos ($\{0, 2, 4, 6, 8\}$) o por su propiedad ($\{n \in \omega : n \text{ es par y } n < 10\}$). Si X, Y son conjuntos, entonces entenderemos X^Y al conjunto de funciones con dominio X e imagen Y. Por $f : X \to Y$, entenderemos que $f \in X^Y$. Si $f \in X^Y$ y $A \subseteq X$, entenderemos por $f(A)$ como la imagen de A bajo f, es decir $\{y \in Y : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$ y si $B \subseteq Y$, entenderemos por $f^{-1}(B)$ como la imagen inversa de B bajo f, es decir $\{x \in X : f(x) \in B\}$. Por $X^{<\omega}$ entenderemos $\bigcup\{X^n : n \in \omega\}$. Si $x \in X^n$ y $y \in X^m$, entenderemos por la concatenación $x^\frown y$ a la función en 2^{n+m} tal que $x^\frown y(k) = x(k)$ si $k < n$ y $x^\frown y(k) = y(k - n)$ en otro caso.

Por modelo siempre entenderemos como un modelo de ZFC (si el lector lo prefiere, como un modelo de una parte suficientemente grande de ZFC tal que todos los resultados de este trabajo se valgan) transitivo y numerable. Un espacio parcialmente ordenado $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se llamará forcing si $\leq$ es separativo sobre $\mathbb{P}$. Para un forcing $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, y alguna propiedad $p(x)$, escribiremos $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$p(x)$" si para toda $p \in \mathbb{P}$, $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$p(x)$".

En el contexto de un espacio linealmente ordenado X, por $[a, b)$ entenderemos $\{x \in X : a \leq x \text{ y } x < b\}$. Análogamente se definen $(a, b), (a, b]$ y $[a, b]$. En un resultado puede haber varios órdenes involucrados, sin embargo, se hará una distinción en caso de que pueda haber confusión.

En el contexto de un espacio métrico $\langle X, d \rangle$, si $A \subseteq X$, entonces entenderemos por diam$A$ al supremo de las distancias de puntos en A (pudiendo ser este infinito). Si $r > 0$ y $x \in X$, entenderemos por $B_r(x)$ al conjunto $\{y \in X : d(x, y) < r\}$. En un resultado puede haber varias funciones de distancia involucradas. En los casos en donde pudiera existir confusión las distancias se han etiquetado.

Para información al lector, la mayoría de los resultados de los primeros dos capítulos los puede encontrar en [**NeZi1**] y [**NeZi2**] y algunos resultados del capítulo 3 los puede encontrar en [**HrZi1**].

Quiero agradecer al Dr. Michael Hrušák por todo lo que me enseñó en sus cursos y por todo su apoyo en este trabajo. También me gustaría agradecer al Dr. Fernando Hernández Hernández y al Dr. David Meza Alcántara por sus comentarios sobre este trabajo.

CAPÍTULO 1

Espacios métricos monótonos.

El propósito de este capítulo es dar las definiciones y los resultados básicos en la teoría de los espacios métricos monótonos. Teniendo estos resultados básicos uno puede aventurarse a estudiar los subconjuntos monótonos de un espacio métrico.

Todos los subconjuntos de la recta real con la distancia usual resultan ser monótonos, por lo que son poco interesantes. Por otro lado, el plano con la distancia usual no es σ-monótono, entonces uno puede definir el ideal de los subconjuntos σ-monótonos del plano. A este ideal le llamaremos **Mon**.

Este capítulo está dividido en 3 secciones. En la primera sección se estudian las definiciones básicas y los resultados más básicos sobre espacios monótonos. También se estudiarán algunos ejemplos de espacios monótonos.

En la segunda sección se verán algunas propiedades topológicas de los espacios monótonos. Esta sección nos dará propiedades generales para poder estudiar al σ-ideal generado por los espacios monótonos del plano.

En la literatura hay 4 invariantes cardinales asociados a los ideales. Estos invariantes serán definidos al principio de la tercera sección de este capítulo. La tercera sección se enfoca en estudiar los invariantes cardinales del ideal **Mon**. Dos de ellos resultan ser fáciles de calcular. Los otros dos tendrán que esperar algunos capítulos mas.

1. Definiciones y ejemplos.

En la introducción se dió la definición de un espacio métrico monótono. En esta definición se requiere de una constante y un orden lineal sobre el espacio. El propósito de la siguiente definición es hacer énfasis en los testigos de la definición.

Definición 1.1. Sea $c > 0$, sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico y sea $<$ un orden lineal sobre X. Diremos que $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, <\rangle$-monótono si para cualesquiera $x < y < z$ elementos de X, se tiene que $d(x, y) \leq c \cdot d(x, z)$.

Si $c > 0$ abreviaremos que un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ es c-monótono si existe un orden lineal $<$ sobre X tal que $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, <\rangle$-monótono. Observe que un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ es monótono si existe $c > 0$ tal que $\langle X, d\rangle$ es c-monótono.

Existen varias caracterizaciones para los espacios monótonos. Si X es un espacio monótono y $x < y < z$ entonces no sólo hay una relación con $d(x, y)$ y $d(x, z)$, también $d(y, z)$ y $d(x, z)$ están relacionados. Más aún, resulta que $\operatorname{diam}[x, y]$ y $d(x, y)$ están relacionados. Las relaciones las da la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico y sea $<$ un orden lineal sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Existe c tal que $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, <\rangle$-monótono.
(2) Existe c tal que para todo $x < y < z$ se tiene que $d(y, z) \leq c \cdot d(x, z)$.
(3) Existe c tal que para todo $x \leq y$ se tiene que $\operatorname{diam}[x, y] \leq c \cdot d(x, y)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (3). Sea c tal que $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, <\rangle$-monótono. Sean $x_0, x_1 \in [x, y]$ y suponga que $x_0 \leq x_1$. Entonces

$$d(x_0, x_1) \leq c \cdot d(x_0, y) \leq c \cdot (d(x_0, x) + d(x, y)) \leq c \cdot (c \cdot d(x, y) + d(x, y)).$$

Por lo tanto $\operatorname{diam}[x, y] \leq c(c + 1) \cdot d(x, y)$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Sea c tal que para todo para todo $x < y < z$, entonces $d(y, z) \leq c \cdot d(x, z)$. Sean $x_0, x_1 \in [x, y]$ y suponga que $x_0 \leq x_1$. Entonces

$$d(x_0, x_1) \leq c \cdot d(x, x_1) \leq c \cdot (d(x_1, y) + d(y, x)) \leq c \cdot (c \cdot d(x, y) + d(x, y)).$$

Por lo tanto $\operatorname{diam}[x, y] \leq c(c + 1) \cdot d(x, y)$.
(3) $\Rightarrow$ (1) y (2). Sean $x < y < z$. Entonces

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam}[x, z] \leq c \cdot d(x, z),$$

$$d(y, z) \leq \operatorname{diam}[x, z] \leq c \cdot d(x, z).$$

Por tanto se tiene (1) y (2). ❑

Si $\langle X, d\rangle$ es un espacio métrico c-monótono y $k \geq c$, entonces $\langle X, d\rangle$ es un espacio k-monótono. Por esto, si $\langle X, d\rangle$ es un espacio monótono, entonces siempre es posible elegir una constante c tal que $\langle X, d\rangle$ cumpla las 3 propiedades dadas por el lema anterior. Otra propiedad sencilla pero muy importante es que cualquier subespacio de un espacio métrico c-monótono es c-monótono.

Los espacios métricos monótonos están fuertemente relacionados con las funciones Lipschitz. Recuerde que una función $f : X \to Y$ entre dos espacios métricos $\langle X, d_X\rangle$ y $\langle Y, d_Y\rangle$ es una función Lipschitz si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ se tiene que $d_X(x, y) \le c \cdot d_Y(f(x), f(y))$. Diremos que $f : X \to Y$ es bi-Lipschitz si f es biyectiva, Lipschitz y su inversa también es Lipschitz. La siguiente proposición relaciona los espacios monótonos con las funciones Lipschitz.

Proposición 1.3. *Un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ es monótono si y sólo si existe un espacio métrico $\langle Y, \rho\rangle$ y una función $f : X \to Y$ tal que $\langle Y, \rho\rangle$ es 1-monótono y f es una función bi-Lipschitz.*

Demostración. ($\Rightarrow$).Suponga que $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, <\rangle$-monótono y c es una constante tal que $\langle X, d\rangle$ cumple las tres propiedades de la proposición 1.2. Para $x, y \in X$ defina $\rho(x, y) = \rho(y, x) = \operatorname{diam}[x, y]$. Claramente ρ define una métrica sobre X y $d \le \rho$ y $\rho \le c \cdot d$. Por lo tanto la identidad de X es la función bi-Lipschitz que se requiere.

($\Leftarrow$). Ahora suponga que $\langle Y, d\rangle$ es un espacio métrico $\langle 1, \prec\rangle$-monótono y que f es una función bi-Lipschitz de X a Y. Defina $x < y$ si y sólo si $f(x) \prec f(y)$. Sean $c_1, c_2 > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, $c_1 \cdot d(x, y) \le \rho(f(x), f(y)) \le c_2 \cdot d(x, y)$. Veamos que $\langle X, d\rangle$ es $\langle c_1c_2, <\rangle$-monótono.

Sean $x, y, z \in X$ con $x < y < z$. Entonces

$$d(x, y) \le \frac{1}{c_1} \cdot \rho(f(x), f(y)) \le \frac{1}{c_1} \cdot \rho(f(x), f(z)) \le \frac{c_2}{c_1} \cdot d(x, z).$$

Por lo tanto $\langle X, d\rangle$ es $\langle \frac{c_2}{c_1}, <\rangle$-monótono. ❑

Gracias a este resultado se tiene que el ser monótono es una propiedad invariante bajo funciones bi-Lipschitz.

Antes de continuar es conveniente ver algunos ejemplos de espacios métricos monótonos. Los ejemplos más sencillos son los subconjuntos de la recta real. Es claro que todos los subconjuntos de la recta real son monótonos. Un ejemplo sencillo de espacios σ-monótonos son los espacios cuya métrica induce la topología discreta. Veamos que toda métrica que induzca la topología discreta hace de todo el espacio un conjunto σ-monótono.

Suponga que $\langle X, d\rangle$ es un espacio métrico cuya métrica induce la topología discreta. Fije un punto $x_0 \in X$ y defina para cada $n \in \omega$

$$A_n = \{x \in X : B_{\frac{1}{n}}(x) = \{x\} \text{ y } d(x, x_0) \le n\}.$$

Tome $x, y, z \in A_n$ puntos distintos. Entonces $d(x, z) \ge \frac{1}{n}$. Por otro lado $d(x, y) \le d(x, x_0) + d(x_0, y) \le 2n$. Por lo tanto $d(x, y) \le 2n^2 d(x, z)$. Así que cualquier orden lineal que se le dé a A_n lo hará un espacio $2n^2$-monótono. Como los A_n cubren a X, se tiene que X es σ-monótono.

Uno se ve tentado a cambiar σ-monótono por monótono en la afirmación anterior, sin embargo, un resultado en [**NeZi1**] muestra que esto no es posible.

Otro ejemplo muy importante son los espacios ultramétricos. Un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ es ultramétrico si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se tiene que $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$. La siguiente proposición nos dará que estos espacios son monótonos.

Proposición 1.4. *Todo espacio ultramétrico es monótono.*

Demostración. Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio ultramétrico y suponga que es acotado. Redefiniendo la métrica por $d' = \frac{d}{\operatorname{diam} X}$ y usando la proposición 1.3 podemos suponer que $\operatorname{diam} X \leq 1$. Sea κ un cardinal lo suficientemente grande tal que cualquier familia de abiertos ajenos tenga cardinalidad menor a κ. Recursivamente se construirá un árbol $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ y una familia $\{U_p : p \in T\}$ tal que

(a) para cada $p \in T$, el conjunto U_p es una bola abierta con radio $\frac{1}{2^{|p|}}$ y para toda $q \subseteq p$ se tenga que $U_p \subseteq U_q$,
(b) para cada $p \in T$, la familia $\{U_q : q$ es un sucesor de $p\}$ es una cubierta abierta de U_p y
(c) para cada $x \in X$, el conjunto $\{p \in T : x \in U_p\}$ está linealmente ordenado por la contención.

Sea $U_\emptyset = X$. Suponga que $p \in T$ y que U_p se ha construido. Sea $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una familia maximal de bolas abiertas disjuntas de radio $\frac{1}{2^{|p|+1}}$ cuyo centro es un elemento de U_p. Para cada $\alpha < \gamma$ agregue a $p^\frown\alpha$ al árbol y defina $U_{p^\frown\alpha}$ como B_α. Veamos que para cada $\alpha < \gamma$, $U_{p^\frown\alpha} \subseteq U_p$.

Sea x el centro de $U_{p^\frown\alpha}$ y sea z el centro de U_p. Sea $y \in U_{p^\frown\alpha}$. Entonces $d(y,z)$ es menor al máximo entre $d(y,x)$ y $d(x,z)$. Como las dos distancias son más chicas que $\frac{1}{2^{|p|}}$, entonces $d(y,z)$ es menor a $\frac{1}{2^{|p|}}$. Por lo tanto $y \in U_p$ y así $U_{p^\frown\alpha} \subseteq U_p$.

Gracias a esta sencilla observación, (a) se cumple. Suponga que (b) no se cumple. Entonces existe $x \in U_p$ tal que $x \notin \bigcup\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es una familia maximal, existe $y \in U_q$ tal que $d(x,y) < \frac{1}{2^{|p|+1}}$ y existe $\alpha < \gamma$ tal que $y \in U_{p^\frown\alpha}$. Sea z el centro de $U_{p^\frown\alpha}$. Como $x \notin U_{p^\frown\alpha}$ entonces $\frac{1}{2^{|p|+1}} \leq d(x,z)$. Ya que d define una ultramétrica sobre X, entonces $d(x,z) \leq d(x,y)$ o $d(x,z) \leq d(y,z)$. Los dos casos son imposibles pues tanto $d(x,y)$ como $d(y,z)$ son menores a $\frac{1}{2^{|p|+1}}$. Por tanto (b) debe cumplirse. De (a) y (b) se deduce (c) fácilmente. Con esto queda construido el árbol T y la familia $\{U_p : p \in T\}$.

El próximo paso de la demostración es construir una nueva métrica y un orden lineal para X.

Sea $x \neq y$. Gracias a (a) y (b), existen unicos $p_{\langle x,y\rangle} \in T$ y ordinales distintos $\xi_x^{p_{\langle x,y\rangle}}$ y $\xi_y^{p_{\langle x,y\rangle}}$ tal que $x, y \in U_{p_{\langle x,y\rangle}}$, $x \in U_{p^\frown\xi_x^{p_{\langle x,y\rangle}}}$, $y \in U_{p^\frown\xi_y^{p_{\langle x,y\rangle}}}$. Defina una nueva métrica ρ en donde $\rho(x,y) = \rho(y,x) = \frac{1}{2^{|p_{\langle x,y\rangle}|}}$ y $\rho(x,x) = 0$. La única propiedad de espacios métricos que podría no ser claro que ρ cumpla es la desigualdad triangular: Sean $x, y, z \in X$. Sin pérdida de generalidad suponga que

$d(x,z) \leq d(x,y)$. Entonces x, y, z son elementos de $U_{p_{\langle x,y \rangle}}$ y así $p_{\langle x,z \rangle}$ extiende a $p_{\langle x,y \rangle}$. Por lo tanto

$$\rho(x,z) = \frac{1}{2^{|p_{\langle x,z \rangle}|}} \leq \frac{1}{2^{|p_{\langle x,y \rangle}|}} \leq \frac{1}{2^{|p_{\langle x,y \rangle}|}} + \frac{1}{2^{|p_{\langle y,z \rangle}|}} = \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

y así ρ define una métrica en X (en realidad una ultramétrica). Claramente $d \leq \rho \leq 2 \cdot d$ y así la identidad es una función bi-Lipschitz con las dos métricas distintas.

Defina un orden $<$ en donde $x < y$ si y sólo si $\rho(x,y) = \frac{1}{2^{|p_{\langle x,y \rangle}|}}$ y $\alpha_x < \alpha_y$. Veamos que $<$ es un orden transitivo.

Sean $x, y, z \in X$ tal que $x < y$, $y < z$. Por (a) y (c) se tiene que $U_{p_{\langle y,z \rangle}} \subseteq U_{p_{\langle x,y \rangle}}$. Gracias a esto se tiene que $p_{\langle x,z \rangle} = p_{\langle x,y \rangle}$ y $\xi_y^{p_{\langle x,y \rangle}} = \xi_z^{p_{\langle x,z \rangle}}$ y así $x < z$. Este mismo cálculo nos sirve para ver que $\langle X, \rho \rangle$ es $\langle 1, < \rangle$-monótono. Por lo tanto $<$ es transitivo y así $<$ es un orden lineal.

Entonces como $\langle X, \rho \rangle$ es $\langle 1, < \rangle$-monótono y la identidad es una función bi-Lipschitz entre $\langle X, d \rangle$, basta usar la proposicion 1.3 para obtener que $\langle X, d \rangle$ es monótono (en realidad 2 monótono pues $d \leq \rho \leq 2 \cdot d$) . Con esto termina el caso acotado.

Suponga ahora que no es acotado. Fije $x_0 \in X$ y considere la familia $\{B_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un orden lineal $<_n$ para $B_n(x_0)$ tal que $B_n(x_0)$ es $\langle 2, <_n \rangle$-monótono. Para cada $x \in X$ considere $n_x = \min\{n \in \omega : x \in B_n(x_0)\}$. Para $x, y \in X$, defina $x < y$ si $n_x < n_y$ o si $n_x = n_y$ y $x <_{n_x} y$.

Note que para toda $x \in X$, $n_x - 1 \leq d(x_0, x)$. También observe que si $x, y \in X$ son tales que $n_x < n_y$ entonces $d(x,y) = d(x_0, y)$. Veamos que $\langle X, d \rangle$ es $\langle 2, < \rangle$-monótono:

Sean $x < y < z$. Suponga que $n_x = n_y = n_z$. Entonces $x <_n y <_n z$ y gracias a la monotonía de $B_n(x_0)$ se tiene que $d(x,y) < 2 \cdot d(x,z)$.

Suponga que $n_x < n_y \leq n_z$. Entonces

$$d(x,y) = d(x_0,y) \leq n_y \leq n_z \leq n_z + (n_z - 2) = 2(n_z - 1) \leq d(x_0,z) = d(x,z).$$

Como último caso suponga que $n_x \leq n_y < n_z$. Entonces

$$d(x,y) \leq \max\{d(x_0,x), d(x,y_0)\} \leq n_y \leq n_z - 1 \leq d(x_0,z) = d(x,z).$$

Por tanto $\langle X, d \rangle$ es $\langle 2, < \rangle$-monótono. ❑

Este último ejemplo será de gran utilidad en un capítulo posterior.

2. La topología en los monótonos.

En los espacios métricos monótonos hay dos topologías a considerar: la topología dada por el orden y la topología dada por la métrica. En esta sección se hablará un poco de la manera en la que están relacionadas estas dos topologías. Los abiertos dados por la métrica no son necesariamente abiertos con la topología del orden: considere al $(0, 1) \cup [2, 3)$ con la métrica usual. Este espacio topológico es 1-monótono con el orden usual, sin embargo, el $[2, 3)$ es un conjunto abierto con la métrica usual mientras que no es abierto con la topología del orden. Lo que sí es cierto es que los abiertos con la topología dada por el orden son abiertos con la topología dada por la métrica.

Proposición 1.5. *Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico $\langle c, <\rangle$-monótono. Entonces todo intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto en la topología dada por la métrica d.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ y sea $x \in (a, b)$. Sea r el mínimo entre $\frac{1}{2c} \cdot d(x, a)$, $\frac{1}{2c} \cdot d(y, a)$, $\frac{1}{2} \cdot d(x, a)$ y $\frac{1}{2} \cdot d(y, a)$. Veamos que $B_r(x) \subseteq (a, b)$.

Sea $y \in B_r(x)$ y suponga que $y < a$. Entonces $y < a < x$ y por tanto $d(y, a) \leq c \cdot d(y, x)$. Como $d(y, x) \leq \frac{1}{2c} \cdot d(x, a)$, entonces $d(y, a) \leq \frac{1}{2} \cdot d(x, a)$. Por otro lado, $d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x)$ y usando que $d(y, x) < \frac{1}{2} \cdot d(a, x)$, se tiene que $d(y, a) > \frac{1}{2} \cdot d(x, a)$ lo que contradice la elección de r. Por lo tanto $a < y$. El caso $b < y$ es análogo. Por tanto $y \in (a, b)$ y así $x \in B_r(x) \subseteq (a, b)$ ❑

Gracias a este resultado tenemos que la topología del orden está contenida en la topología dada por la métrica. En [**NeZi1**] se muestra que la topología de los espacios métricos que son monótonos coinciden con la topología de los subespacios metrizables de espacios ordenados.

Si uno se encuentra con un subconjunto linealmente ordenado de un conjunto X cualquiera, hay orden parcial natural de los subconjuntos de X. Más concretamente, si $\langle X, <\rangle$ un espacio ordenado, $X \subseteq Y$ y A, B son subconjuntos de Y cualesquiera, escribiremos $A <_X B$ si para cualquier $x \in A \cap X$ y para cualquier $y \in B \cap X$ se tiene que $x < y$. En caso de que A, B sean subconjuntos de X, escribiremos que $A < B$ si $A <_X B$. Este orden parcial nos ayudará a extender el orden a conjuntos más grandes.

Lema 1.6. *Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico y sea $D \subseteq X$ un subespacio denso y monótono. Sean $x, y \in X$ distintos. Entonces existen vecindades U_x, U_y de x, y respectivamente tal que $U_x <_D U_y$ o $U_y <_D U_x$.*

Demostración. Suponga falso el resultado y defina $r = \frac{d(x,y)}{4r(c+1)}$. Entonces se tiene que $B_r(x) \nless B_r(y) \nless B_r(x)$. Sean $x_1, x_2 \in B_r(x) \cap D$, $y_1, y_2 \in B_r(y) \cap D$ tal que $x_1 \leq y_1$ y $y_2 \leq x_2$. Si $x_1 \leq y_2$ entonces $x_1 \leq y_2 \leq x_2$ y así $d(x_1, y_2) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq 2cr$. Usando desigualdad triangular se tiene que

$$d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(x_1,y_2) + d(x_2,y) \leq 2r + d(x_1,y_2)$$

y por tanto $d(x,y) \leq 2r(c+1) \leq \frac{d(x,y)}{2}$, lo que es una contradicción. El caso $y_2 < x_1$ es análogo. ❏

Con este resultado hay una manera natural de extender el orden a subconjuntos cerrados. La siguiente proposición nos dice que la propiedad de ser monótono también se extiende a la cerradura de subconjuntos monótonos.

Proposición 1.7. *Cualquier espacio métrico con un subconjunto denso y monótono es monótono.*

Demostración. Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico y sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso y $\langle c, <\rangle$-monótono. Defina $x \prec y$ si y sólo si existen vecindades U_x, U_y de x, y respectivamente tal que $U_x <_D U_y$. Por el lema anterior $\prec$ es un orden lineal que extiende a $<$. Veamos que $\langle X, d\rangle$ es monótono con constante c y orden $\prec$.

Sean $x \prec y \prec z$. Considere tres sucesiones $\{x_n\}_{n\in\omega}$, $\{y_n\}_{n\in\omega}$, $\{z_n\}_{n\in\omega}$ en D tal que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ converja a x, $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converja a y, $\{z_n\}_{n\in\omega}$ converja a z y para cada $n \in \omega$, $d(x_n, y_n) < c \cdot d(x_n, z_n)$ (esto es posible gracias a que existen vecindades U_x, U_y, U_z de x, y, z respectivamente tal que $U_x <_D U_y <_D U_z$). Observe que para cada $n \in \omega$,

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y) \leq d(x,x_n) + cd(x_n,z_n) + d(y_n,y).$$

Tome el límite y use que la función distancia es continua para obtener que $d(x,y) \leq c \cdot d(x,z)$. Por lo tanto $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, \prec\rangle$-monótono. ❏

Por este resultado la cerradura de subespacios monótonos será monótono. Gracias a esto podemos hablar de **Mon** como el ideal generado por los subconjuntos monótonos y cerrados del plano. Gracias a que el plano es unión numerable de subconjuntos compactos entonces **Mon** estará generado por los subconjuntos monótonos y compactos del plano.

3. Invariantes cardinales.

Sea $\mathbf{I}$ un ideal sobre un conjunto X. En la literatura hay 4 invariantes cardinales asociados al ideal $\mathbf{I}$ definidos de la siguiente manera:

- $\mathsf{add}(\mathbf{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbf{I} \text{ y } \bigcup A \notin \mathbf{I}\}$,
- $\mathsf{cov}(\mathbf{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbf{I} \text{ y } \bigcup A = X\}$,
- $\mathsf{cof}(\mathbf{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbf{I} \text{ y } A \text{ es una familia cofinal en } \mathbf{I}\}$,
- $\mathsf{non}(\mathbf{I}) = \min\{|Y| : Y \subseteq X \text{ y } Y \notin \mathbf{I}\}$.

Recuerde que una familia A es cofinal en una familia B si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b \subseteq a$.

Se tiene que $\mathsf{add}(\mathbf{I})$ es menor o igual que los otros 3 cardinales y $\mathsf{cof}(\mathbf{I})$ es mayor o igual que los otros 3. En general no hay ninguna relación entre los dos restantes.

Estamos interesados en el caso en donde $\mathbf{I} = \mathbf{Mon}$. En este caso, es posible calcular dos de los cardinales en ZFC. La idea clave en esto es que la unión de una familia no numerable de rectas no puede ser un subconjunto σ-monótono del plano. Para ver eso primero debemos estudiar las propiedades de las líneas como subespacios del plano.

Necesitaremos dos resultados: ver que la unión de segmentos de recta es un espacio monótono si y sólo si la intersección dos a dos es distinta a un solo punto y que cada uno de los segmentos es un conjunto abierto en la topología del orden.

Al final obtendremos el resultado más importante del capítulo: el cálculo de $\mathsf{add}(\mathbf{Mon})$ y de $\mathsf{cof}(\mathbf{Mon})$ en ZFC.

Tengamos en cuenta el siguiente detalle relacionado a la proposición 1.2: si $\langle X, d\rangle$ es $\langle c, <\rangle$-monótono y c es tal que se cumplen las propiedades de la proposición 1.2, entonces $\langle X, d\rangle$ también es $\langle c, >\rangle$-monótono.

Lema 1.8. *Sean S_1, S_2 dos segmentos cerrados de recta en el plano tal que su unión es un subespacio $\langle c, <\rangle$-monótono. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ entonces tanto el interior de S_1 como el interior de S_2 (según la métrica d) son subconjuntos abiertos según la topología del orden.*

Demostración. Podemos suponer que c es tal que se cumplen las propiedades de la proposición 1.2. Sea $x \in \mathrm{int}_d(S_1)$. Veamos que existe un intervalo I tal que $x \in I \subseteq S_1$.

Sea $r < \min\{\frac{d(x,S_2)}{2c}, \frac{d(x,S_2)}{2}\}$ y tal que $B_r(x)$ esté contenido en la recta y sean $a, b \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ tal que $d(x,b) = \frac{d(x,a)}{c+1}$ y tal que $d(x,a) < d(a,b)$. Como c cumple las propiedades de la proposición 1.2, entonces es posible cambiar el orden $<$ por el orden inverso $>$. Por esta sencilla observación podemos suponer que $a < b$. Veamos que $x \in (a,b)$.

Suponga que $x < a$. Entonces $d(x,a) \leq c \cdot d(x,b) = \frac{c}{c+1} \cdot d(x,a)$. Como $\frac{c}{c+1}$ es menor a 1 lo anterior es una contradicción. Suponga que $b < x$. Entonces $d(b,a) \leq c \cdot d(x,b) = \frac{c}{c+1} \cdot d(x,a)$. Como $\frac{c}{c+1}$ es menor a 1 y $d(x,a) < d(a,b)$ lo anterior es una contradicción. Por tanto $x \in (a,b)$. Veamos que $(a,b) \subseteq S_1$.

Sea $y \in S_2$ y suponga que $a < y < b$. Entonces $d(a,y) \leq c \cdot d(a,b) \leq \frac{r}{2}$. Por otro lado $d(x,S_2) - \frac{r}{2} < d(x,y) - d(x,a) \leq d(a,y)$. Por lo tanto $d(x,S_2) < r$ lo que contradice la definición de r. Por lo tanto $(a,b) \subseteq S_1$.

De manera similar S_2 es abierto en la topología del orden. ❏

Este lema se puede aplicar también a segmentos abiertos.

Corolario 1.9. *Sean S_1, S_2 dos segmentos abiertos de recta en el plano tal que su unión es un subespacio $\langle c, < \rangle$-monótono. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ entonces tanto S_1 como S_2 son subconjuntos abiertos según la topología del orden.*

Demostración. Aplique el lema anterior a los subsegmentos cerrados de S_1 y S_2. ❏

Este resultado puede generalizarse como sigue

Corolario 1.10. *Sean S_1, S_2 dos segmentos abiertos de recta en el plano tal que su unión es un subespacio $\langle c, < \rangle$-monótono. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ entonces $S_1 < S_2$ o $S_2 < S_1$*

Demostración. Sea $i \in \{1, 2\}$. Por el corolario anterior, cada punto de S_i tiene un intervalo contenido en S_i. Como la unión de intervalos es un intervalo, el resultado se sigue de que dos intervalos si se pueden comparar con $<$. ❏

Aunque este corolario se hizo para dos segmentos de recta, en realidad es válido para cualquier número finito de segmentos (veremos más adelante que este resultado es válido inclusive si uno trata con una cantidad infinita de rectas).

Nos gustaría caracterizar a los conjuntos monótonos consistentes de segmentos abiertos. Resulta que es posible caracterizarlos por medio de su intersección, como nos dice el siguiente lema.

Lema 1.11. *Sean S_1, S_2 dos segmentos abiertos de recta en el plano. Si su intersección consiste sólo de un punto x entonces $S_1 \cup S_2$ no es monótono.*

Demostración. El segmento S_1 es dividido por x en dos segmentos S_1^1 y S_1^2. Similarmente segmento S_2 está dividido por x en dos segmentos S_2^1, S_2^2. Aplique el corolario anterior a estos subsegmentos para obtener que la familia de estos subsegmentos junto con el conjunto $\{x\}$ está linealmente ordenado por $<$. Por lo tanto o bien x es punto máximo o es punto mínimo o existen dos subsegmentos S y S' tal que $S <_X \{x\} <_X S'$. En cualquiera de los tres casos existe un intervalo que contiene a x tal que no intersecta a alguno de los S_i^j, lo que es una contradicción, pues los intervalos son abiertos en la topología dada por la métrica, pero estos abiertos intersectan a los cuatro segmentos.

❏

Si la intersección de 2 segmentos tiene más de un punto, entonces la unión será un segmento y por lo tanto un subconjunto monótono del plano. Entonces la caracterización de los conjuntos monótonos consistentes de segmentos abiertos queda de la siguiente manera.

Lema 1.12. *Sean S_1, S_2 dos segmentos abiertos de recta en el plano. La intersección $S_1 \cap S_2$ consiste de un punto si y sólo si $S_1 \cup S_2$ no es un subconjunto monótono del plano.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es el lema 1.11.

($\Leftarrow$) Si la intersección consiste en más de un punto, entonces la unión es un segmento y por lo tanto es monótono. El resultado es claro si la intersección es vacía. ❏

Anteriormente, en el corolario 1.9, hemos visto que si una familia consistente de una cantidad finita de segmentos abiertos cuya unión es un conjunto monótono, entonces cada segmento es un conjunto abierto en la unión. Nos gustaría generalizar ese resultado a cualquier cantidad de segmentos de recta. El siguiente lema nos dará dicha generalización.

Lema 1.13. *Sea $\mathcal{S}$ una familia de segmentos abiertos del plano ajenos por pares tal que su unión es $\langle c, < \rangle$-monótono. Entonces cada $S \in \mathcal{S}$ es un conjunto abierto dado por la topología del orden.*

Demostración. Por el corolario 1.10, la familia $\mathcal{S}$ está linealmente ordenada por $<$ y por lo tanto, para cada $S \in \mathcal{S}$ y para cada $a, b \in S$, el intervalo $(a, b) \subseteq S$. Refiérase a la demostración del lema 1.8 para ver que cada $x \in S$ está contenido en un intervalo $(a, b) \subseteq S$. ❏

El siguiente lema nos caracteriza a los subconjuntos σ-monótonos del plano que son uniónes de líneas rectas.

Lema 1.14. *Sea $\mathcal{L}$ una familia de líneas en $\mathbb{R}^2$. Entonces $\bigcup \mathcal{L}$ es σ-monótono si y sólo si la familia $\mathcal{L}$ es a lo más numerable.*

Demostración. Si la familía de rectas es numerable es claro que la unión es un conjunto σ-monótono del plano.

Supongamos que $\mathcal{L} = \{L_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia de líneas no numerable y suponga que $\bigcup \mathcal{L}$ es un conjunto σ-monótono. Gracias a que **Mon** está generado por subconjuntos monótonos compactos del plano, existe una familia de compactos monótonos $\{C_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcup \mathcal{L} \subseteq \bigcup \{C_n : n \in \omega\}$.

Por el teorema de Baire, para cada $\alpha \in \omega_1$ podemos escoger un $n_\alpha \in \omega$ y un segmento abierto $S_\alpha \subseteq L_\alpha$ tal que $S_\alpha \subseteq L_\alpha \cap C_{n_\alpha}$. Sea $n \in \omega$ tal que el conjunto $I = \{\alpha \in \omega_1 : n_\alpha = n\}$ es no numerable. Sea $X = \{S_\alpha : \alpha \in I\}$, entonces $\bigcup X \subseteq C_n$, por lo tanto $\bigcup X$ es monótono.

Por el lema 1.11 la familia X es ajena dos a dos. Por el lema 1.13 los segmentos S_α son conjuntos abiertos según orden dado por la propiedad de monótono de C_n y por lo tanto X es una familia no numerable de conjuntos abiertos según la métrica euclideana.
Sin embargo, como $\bigcup X$ es un subconjunto del plano, este debe satisfacer la condición *c.c.c.* así que no puede haber una cantidad no numerable de abiertos ajenos. Esto es una contradicción y por tanto $\bigcup \mathcal{L}$ no puede ser un subespacio σ-monótono. ❑

En este último capítulo hemos estudiado varios resultados sobre espacios monótonos y segmentos de recta. Este último lema nos dará el resultado más importante de este capítulo.

Teorema 1.15. *El número cardinal* $\mathsf{add}(\mathbf{Mon})$ *es* ω_1 *y el número cardinal* $\mathsf{cof}(\mathbf{Mon})$ *es* $\mathfrak{c}$.

Demostración. Cada línea es un espacio monótono. Tome una familia no numerable de líneas. La unión no es σ-monótono y por tanto $\mathsf{add}(\mathbf{Mon}) = \omega_1$.

Sea $\mathcal{R} = \{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$. Suponga que $\mathsf{cof}(\mathbf{Mon}) < \mathfrak{c}$. Sea $\mathscr{B} \subseteq \mathbf{Mon}$ una familia cofinal tal que $|\mathscr{B}| < \mathfrak{c}$. Entonces al menos existe un $B \in \mathscr{B}$ tal que B contenga una cantidad no numerable de elementos de $\mathcal{R}$. Por tanto B contiene una cantidad no numerable de elementos de $\mathcal{R}$, así que no puede ser σ-monótono. Esto es una contradicción y por tanto $\mathsf{cof}(\mathbf{Mon}) = \mathfrak{c}$. ❑

Como dato adicional la celularidad de **Mon** es $\mathfrak{c}$: para ver esto, parta a los reales en $\mathfrak{c}$ conjuntos no numerables $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y considere la familia $\{A_\alpha \times \mathbb{R} : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

El siguiente paso sería encontrar propiedades que nos ayuden a calcular los números $\mathsf{non}(\mathbf{Mon})$ y $\mathsf{cov}(\mathbf{Mon})$. Desgraciadamente no se conoce una manera directa de encontrar los valores de $\mathsf{non}(\mathbf{Mon})$ y de $\mathsf{cov}(\mathbf{Mon})$. Para ayudar a esta tarea, se introducira un nuevo tipo de conjuntos: los conjuntos fuertemente porosos. En el siguiente capítulo nos encargaremos de estudiar el σ-ideal generado por este tipo de conjuntos y su relación con el ideal **Mon**.

CAPÍTULO 2

Espacios porosos

En este capítulo se estudiarán los espacios porosos. Se advierte al lector que la definición de espacio poroso en este trabajo corresponde a la definición de espacio fuertemente poroso en la literatura. El concepto de porosidad resulta ser un concepto de estrechez, es decir, que un conjunto poroso será en cierto sentido un conjunto pequeño.

Resulta que estos conjuntos están muy relacionados con los subespacios monótonos del plano. Nuestro primer propósito será ver que las cardinalidades relacionadas a los subconjuntos porosos de la recta, del plano y del conjunto de Cantor son iguales. Después veremos que todo conjunto monótono del plano resulta ser un subconjunto poroso del plano. También veremos que los subconjuntos porosos de la recta nos generan un sub ideal de los subconjuntos monótonos del plano. Al final veremos el por que los cardinales relacionados a los conjuntos monótonos del plano son los mismos a los cardinales relacionados a los subconjuntos porosos. Esto último será una herramienta importante en el estudio de invariantes cardinales de los espacios monótonos del plano.

Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección se darán algunos resultados básicos de los espacios porosos. Estaremos interesados en estudiar los conjuntos porosos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y 2^ω y por esto gran parte de esta sección estará enfocada a dar caracterizaciones de conjuntos porosos en estos espacios métricos. En esta sección también se empieza el estudio del σ-ideal generado por los conjuntos porosos en varios espacios métricos y veremos algunos invariantes cardinales asociados a este σ-ideal.

En la segunda sección hablaremos sobre la conección entre los subconjuntos porosos de varios espacios métricos y los subconjuntos monótonos del plano. Se darán varios encajes entre los σ-ideales generados por estos subconjuntos para así dar una relación entre sus invariantes cardinales.

1. Subconjuntos porosos de reales.

Definición 2.1. Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq X$ es poroso si existe un $p > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ y para cualquier $r \in (0, \mathrm{diam} X)$ existe $y \in X$ tal que $B_{pr}(y) \subseteq B_r(x) \setminus A$. A esta p se le llamará constante de porosidad.

Observe que si $A \subseteq X$ es poroso, entonces es nunca denso. En este trabajo nos interesarán mucho los subconjuntos porosos de los espacios métricos más conocidos: de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ y del conjunto de Cantor. Caracterizaremos con combinatoria a los subconjuntos porosos de estos espacios.

En este trabajo, los conjuntos porosos del espacio de Cantor resultarán ser muy importantes, por lo que una caracterización en términos del árbol $2^{<\omega}$ sería muy útil. El siguiente lema nos dará una caracterización combinatoria de los conjuntos porosos del conjunto de Cantor.

Lema 2.2. *Un conjunto $A \subseteq 2^\omega$ es poroso si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que para toda $p \in 2^{<\omega}$ existe un $q \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq q$, $|q| = |p| + n$ y $A \cap \langle q \rangle = \emptyset$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea c la constante de porosidad de A y sea $n \in \omega$ tal que $n \geq log_2(\frac{1}{c})$. Sea $p \in 2^{<\omega}$, sea $f \in 2^\omega$ y sea $k \in \omega$ tal que $f\restriction_{|k|} = p$. Como A es poroso, existe $g \in 2^\omega$ tal que $B_{\frac{c}{2^k}}(g) \subseteq B_{\frac{1}{2^k}}(f) \backslash A$. Observe que

$$\langle g\restriction_{n+k} \rangle = B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(g) \subseteq B_{\frac{c}{2^k}}(g) \subseteq B_{\frac{1}{2^k}}(f) = \langle f \rangle.$$

Como $p \subseteq g\restriction_{k+n}$ entonces $g\restriction_{k+n}$ cumple las condiciones deseadas.

($\Leftarrow$) Sea $n \in \omega$ tal que para toda $p \in 2^{<\omega}$ existe un $q \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq q$, $|q| = |p| + n$ y $A \cap \langle q \rangle = \emptyset$. Veamos que $c = \frac{1}{2^{n+1}}$ sirve de constante de porosidad.

Sea $x \in X$ y sea $r \in (0, \mathrm{diam} X)$. Sea $k \in \omega$ el mínimo natural tal que $\frac{1}{2^k} \leq r$. Como k es mínimo con esta propiedad se tiene que $\frac{r}{2} \leq \frac{1}{2^k} \leq r$. Sea $y \in 2^{<\omega}$ tal que $x\restriction_k \subseteq y$, $|y| = |x\restriction_k| + n$ y $A \cap \langle y \rangle = \emptyset$ y sea $g \in 2^\omega$ tal que $g\restriction_{|y|} = y$. Claramente $g \in B_r(x)$ y como $B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(g) = \langle y \rangle$ entonces $B_{rc}(g) \cap A = \emptyset$. ❑

Estamos interesados en comparar a los subconjuntos porosos del conjunto de Cantor con los subconjuntos porosos de el intervalo $[0, 1]$ y del cuadrado $[0, 1]^2$. Nos interesa dar una caracterización de los conjuntos porosos del intervalo y del plano que esté relacionada con la caracterización que nos da el lema anterior. Necesitaremos una familia de subconjuntos de $[0, 1]$ y una familia de subconjuntos de $[0, 1]^2$ que nos ayude a codificar al árbol $2^{<\omega}$. La familia para el $[0, 1]$ se construye como sigue:

Para cada $n \in \omega$ defina

$$D_n = \{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}] : i \in |2^n|\}.$$

Observe que para cada $I \in D_n$, $\mathrm{diam} I = \frac{1}{2^n}$. Análogamente se hará una caracterización de los subconjuntos porosos del cuadrado relacionada con la caracterización dada por el lema anterior. Necesitamos una familia de subconjuntos de $[0, 1]^2$ que nos codifique el árbol $2^{<\omega}$. La familia se construye como sigue:

Para cada $n \in \omega$ defina

$$D_n^2 = \{A \times B : A, B \in D_n\}.$$

En este caso todo $C \in D_n^2$ tiene diam$C = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$. Estos conjuntos nos facilitarán dar dicha caracterización a los subconjuntos porosos del intervalo y del cuadrado.

Ya que tenemos estas dos familias, podremos mostrar un análogo del lema 2.2 aplicado a los subconjuntos del $[0, 1]$.

Lema 2.3. *Sea $A \subseteq [0, 1]$. A es poroso si y sólo si existe un número natural n tal que para toda $k \in \omega$ y para todo $I \in D_k$ existe $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' \subseteq I \backslash A$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea p la constante de porosidad de A. Sea n tal que $n \geq log_2 \frac{1}{p} + 1$. Sea $k \in \omega$ y sea $I = [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}] \in D_k$. Por la porosidad de A, existe $y \in [0, 1]$ tal que $(y - \frac{p}{2^{k+1}}, y + \frac{p}{2^{k+1}}) \subseteq (\frac{2i+1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2i+1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}) \backslash A = I \backslash A$. Como la longitud de los elementos de D_{k+n} es menor a $\frac{p}{2^{k+1}}$, debe existir $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' \subseteq (y - \frac{p}{2^{k+1}}, y + \frac{p}{2^{k+1}})$. Como $I' \subseteq I \backslash A$, entonces n es el número natural requerido.

($\Leftarrow$) Sea $n \in \omega$ tal que para toda $k \in \omega$ y para todo $I \in D_k$ existe $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' \subseteq I \backslash A$. Proponga a $p = \frac{1}{2^{n+2}}$ como constante de porosidad. Sea $x \in [0, 1]$ y $r \in (0, 1)$. Sea k el mínimo número natural tal que exista $I \in D_k$ con $I \subseteq B_r(x)$. Entonces existe $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' \subseteq I \backslash A$. Sea y el punto medio de I'. Por la minimalidad de k, se tiene que $B_{pr}(y) \subseteq I'$. Así que $B_{pr}(y) \subseteq B_r(x)$ y $B_{\frac{p}{2^{n+2}}}(y) \cap A = \emptyset$. ❑

Ahora se mostrará un resultado análogo al lema 2.2 aplicado a los subconjuntos del $[0, 1]^2$.

Lema 2.4. *Sea $A \subseteq [0, 1]^2$. A es poroso si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que para toda $k \in \omega$ y para toda $C \in D_k^2$, existe $C' \in D_{k+n}^2$ tal que $C' \subseteq C \backslash A$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que $A \subseteq [0, 1]^2$ es poroso. Sea p una constante de porosidad de A. Sea $n \geq log_2(\frac{2\sqrt{2}}{p}) + 1$. Sea $k \in \omega$ y sea $C \in D_k^2$. Sea x el centro de D_k^2. Ya que A es un conjunto poroso, existe $y \in B_{\frac{1}{2^k}}(x)$ tal que $B_{\frac{p}{2^k}}(y) \subseteq B_{\frac{1}{2^k}}(x) \backslash A$. Sea $C' \in D_{k+n}^2$ tal que $y \in C'$. Como diam$C' = \frac{2\sqrt{2}}{2^{k+n}}$, entonces $C' \subseteq B_{\frac{2\sqrt{2}}{2^{k+n-1}}}(y)$. Como $B_{\frac{2\sqrt{2}}{2^{k+n-1}}}(y) \subseteq B_{\frac{p}{2^k}}(y)$, entonces $C' \subseteq C \backslash A$.

($\Leftarrow$) Suponga que existe $n \in \omega$ tal que para toda $k \in \omega$ y para toda $C \in D_k^2$, existe $C' \in D_{k+n}^2$ tal que $C' \subseteq C \backslash A$. Proponga $p = \frac{1}{2^n+2}$. Sea $x \in [0, 1]^2$ y sea $r < \sqrt{2}$. Sea $k \in \omega$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{2^k} \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}}$. Sea $C \in D_{k+1}$ tal que $x \in C$. Como diam$C = \frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}}$, entonces $C \subseteq B_r(x)$. Sea $C' \in D_{k+n+1}^2$ tal que $C' \cap A = \emptyset$. Sea y el centro de C'. Por la elección de k, se tiene que $B_{rp}(y) \subseteq B_r(x) \backslash A$ y así A es un conjunto poroso. ❑

Nuestro objetivo ahora es mostrar que los invariantes cardinales dados por los σ-ideales generados por los conjuntos porosos del intervalo, del cuadrado, del conjunto de Cantor y de su cuadrado, son iguales. Recordemos la manera canónica de pasar a cada uno de estos conjuntos.

Sea $T : 2^\omega \to [0,1]$ definido por $T(f) = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n-1}}$ y sea $\psi : 2^\omega \to 2^\omega \times 2^\omega$ la función que a cada función $f(x)$ le asigna la pareja $\langle f(2x), f(2x+1)\rangle$. En este trabajo, la métrica a considerar para $2^\omega \times 2^\omega$ es la métrica del máximo. El propósito es usar estas funciones para hacer un *back and forth* entre los σ-ideales de los espacios métricos estudiados.

Algunas observaciones sencillas sobre estas funciones es que si $p \in 2^n$, entonces $T(\langle p\rangle) \in D_n$ y si $n = 2m$, entonces $\psi(p) = B_{\frac{1}{2^m}}(\langle f, g\rangle)$, donde f, g son funciones tales que $f(x) = h(2x)$ y $g(x) = h(2x+1)$, donde h es una extensión de p.

Veremos ahora la relación entre los subconjuntos porosos del conjunto de Cantor y los subconjuntos porosos del intervalo $[0,1]$.

Lema 2.5. *Un subconjunto $A \subseteq 2^\omega$ es poroso si y sólo si $T(A) \subseteq [0,1]$ es poroso.*

Demostración. Se usarán las caracterizaciones dados por el lema 2.2 y el lema 2.3.

($\Rightarrow$)Suponga que A es poroso y sea $n \in \omega$ tal que para toda $p \in 2^{<\omega}$ existe un $q \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq q$, $|q| = |p| + n$ y $A \cap \langle q\rangle = \emptyset$. Sea $k \in \omega$ y sea $I \in D_k$. Claramente existe $p \in 2^{<\omega}$, con $|p| = k$ tal que $T(\langle p\rangle) = I$. Entonces existe $q \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq q$, $|q| = k + n$ y $\langle q\rangle \cap A = \emptyset$. Claramente existe $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' = T(\langle q\rangle)$. Por lo tanto $I' \subseteq I\backslash A$.

($\Leftarrow$) Suponga que $T(A)$ es poroso. Sea n tal que para toda $k \in \omega$ y para todo $I \in D_k$ existe $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' \subseteq I\backslash T(A)$. Sea $p \in 2^{<\omega}$ y sea $k = |p|$. Es claro que $T(\langle p\rangle) \in D_k$. Por lo tanto existe $I' \in D_{k+n}$ tal que $I' \subseteq T(\langle p\rangle)\backslash T(A)$. Existe $q \in 2^{k+n}$ tal que $T(\langle q\rangle) = I'$. Por tanto $p \subseteq q$, $|q| = k + n$ y $\langle q\rangle \cap A = \emptyset$. ❑

Ahora veremos la relación que hay entre los subconjuntos porosos de $2^\omega \times 2^\omega$ y los subconjuntos porosos del intervalo $[0,1]$.

Lema 2.6. *Un subconjunto $A \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ es poroso si y sólo si $(T \times T)(A) \subseteq [0,1]$ es poroso.*

Demostración. Para demostrar este lema, se usará la caracterización dada por el lema 2.4.

($\Rightarrow$) Suponga que A es un conjunto poroso con constante de porosidad p. Sea $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} \leq p$. Sea $k \in \omega$ y sea $C \in D_k^2$. Sean $f, g \in 2^\omega$ tal que

$$(T \times T)(B_{\frac{1}{2^k}}(\langle f, g\rangle)) = (T \times T)(\langle f{\upharpoonright}_k\rangle \times \langle g{\upharpoonright}_k\rangle) = C.$$

Entonces existe $\langle f_0, f_1\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$ tal que $B_{\frac{p}{2^k}}(\langle f_0, f_1\rangle) \subseteq B_{\frac{1}{2^k}}(\langle f, g\rangle)\backslash A$. Sea

$$C' = (T \times T)(\langle f_0\upharpoonright_{k+n+1}\rangle \times \langle f_1\upharpoonright_{k+n+1}\rangle) = (T \times T)(B_{\frac{1}{2^{k+n+1}}}(\langle f_0, f_1\rangle)).$$

Como $\frac{1}{2^{k+n+1}} \leq \frac{p}{2^k}$, entonces $B_{\frac{1}{2^{k+n+1}}}(\langle f_0, f_1\rangle) \subseteq B_{\frac{p}{2^k}}(\langle f, g\rangle)$ y así $C' \subseteq C\backslash(T \times T)(A)$.

($\Leftarrow$) Sea $n \in \omega$ tal que para toda $k \in \omega$ y para toda $C \in D^2_k$, existe $C' \in D^2_{k+n}$ tal que $C' \subseteq C\backslash(T \times T)(A)$. Veamos que A es poroso con constante de porosidad $p = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Sea $r < 1$ y sea $\langle f, g\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$. Sea $k \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^k} \leq r < \frac{1}{2^{k-1}}$. Observe que

$$C = (T \times T)(B_{\frac{1}{2^k}}(\langle f, g\rangle) = (T \times T)(\langle f\upharpoonright_k\rangle \times \langle g\upharpoonright_k\rangle) \in D^2_k.$$

Entonces existe $C' \in D_{k+n}$ tal que $C' = C\backslash(T \times T)(A)$. Sea $\langle f_0, f_1\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$ tal que

$$(T \times T)(B_{\frac{1}{2^{k+n}}}(\langle f_0, f_1, \rangle\rangle) = (T \times T)(\langle f_0\upharpoonright_{k+n}\rangle \times \langle f_1\upharpoonright_{k+n}\rangle) = C'.$$

Como $\frac{r}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{k+n}}$, entonces $B_{rp}(\langle f_0, f_1\rangle) \subseteq B_r(\langle f, g\rangle)\backslash A$. ❑

Veremos ahora la relación que hay entre los subconjuntos porosos del conjunto de Cantor y los subconjuntos porosos de $2^\omega \times 2^\omega$.

Lema 2.7. *Un subconjunto $A \subseteq 2^\omega$ es poroso si y sólo si $\psi(A) \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ es poroso.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Suponga $A \subseteq 2^\omega$ un conjunto poroso. Por el lema 2.2 existe $n \in \omega$ tal que para toda $p \in 2^{<\omega}$ existe un $q \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq q$, $|q| = |p| + n$ y $A \cap \langle q\rangle = \emptyset$. Haciendo más grande n, podemos suponer que n es par. Veamos que $\psi(A)$ es poroso con constante de porosidad $p = \frac{1}{2^{n+1}}$:

Sea $\langle f, g\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$ y sea $r \in (0, 1)$. Sea $k \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^k} \leq r < \frac{1}{2^{k-1}}$. Defina

$$h(x) = \begin{cases} f(\frac{x}{2}) & \text{si } x \text{ es par} \\ g(\frac{x+1}{2}) & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Con esto se tiene que

$$\psi(B_{\frac{1}{2^k}}(h)) = \psi(\langle h\upharpoonright_{2k}\rangle) = B_{\frac{1}{2^k}}(\langle f, g\rangle).$$

Sea $q \in 2^{<\omega}$ tal que $h\upharpoonright_{2k}\subseteq q$, $|q| = 2k + n$ y $A \cap \langle q\rangle = \emptyset$. Sea $e \in 2^\omega$ tal que $e\upharpoonright_{2k+n}= q$. Se tiene entonces que $B_{\frac{1}{2^{2k+n}}}(e) \cap A = \emptyset$. Ya que ψ es una función biyectiva, se tiene que

$$\psi(B_{\frac{1}{2^{2k+n}}}(e)) \cap \psi(A) = B_{\frac{1}{2^{k+\frac{n}{2}}}}(\psi(e)) \cap \psi(A) = \emptyset.$$

Por la elección de k, se tiene que

$$B_{\frac{r}{2^{n+1}}}(\psi(e)) \subseteq B_{\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}}(\psi(e)) \subseteq B_{\frac{1}{2^{k+\frac{n}{2}}}}(\psi(e))$$

y por lo tanto $B_{pr}(\psi(e)) \subseteq B_r(\langle f, g\rangle)\backslash A$.

($\Leftarrow$) Sea ρ la constante de porosidad de $\psi(A)$. Sea n par tal que $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} < \rho$. Veamos que se cumplen las condiciones del lema 2.2.

Sea $p \in 2^{<\omega}$ y sea $x \in 2^{\omega}$ tal que $p \subseteq x$. Cambiando n por $n+1$ podemos suponer que $|p|$ es par. Sea $m = |p|$. Se tiene entonces que

$$\psi(B_{\frac{1}{2^m}}(x)) = \psi(\langle p \rangle) = B_{\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}}(\psi(x)).$$

Por la porosidad de $\psi(A)$, existe $\langle f, g \rangle \in 2^{\omega} \times 2^{\omega}$ tal que

$$B_{\frac{\rho}{2^{\frac{m}{2}}}}(\langle f, g \rangle) \subseteq B_{\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}}(\psi(x)) \setminus \psi(A).$$

Defina

$$h(x) = \begin{cases} f(\frac{x}{2}) & \text{si } x \text{ es par} \\ g(\frac{x+1}{2}) & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces $\psi(\langle h\restriction_{m+n} \rangle) = B_{\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}}}$. Como ψ es biyectiva y $\psi(\langle h\restriction_{m+n} \rangle) \subseteq \psi(\langle p \rangle)$ entonces $p \subseteq h\restriction_{m+n}$. Por la elección de n y la bijectividad de ψ entonces $\langle h\restriction_{m+n} \rangle \cap A = \emptyset$. Gracias a todo esto y al lema 2.2, se tiene que A es poroso. ❑

Estos últimos lemas nos han dado una fuerte relación entre los subconjuntos porosos del conjunto de Cantor, con los subconjuntos porosos de otros espacios métricos conocidos. Con estos lemas ya es posible comparar todos los invariantes cardinales de los σ-ideales de los espacios métricos anteriores.

Teorema 2.8. *Se cumplen las siguientes igualdades:*

- $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^{\omega}))$.
- $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{cov}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{cov}(\mathbf{SP}(\mathbf{2}^{\omega}))$.
- $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^{\omega}))$.
- $\mathsf{cof}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{cof}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{cof}(\mathbf{SP}(2^{\omega}))$.

Demostración. Veamos que $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^{\omega}))$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{SP}(2^{\omega})$ tal que $\bigcup \mathcal{A}$ no es σ-poroso en 2^{ω}. Como el lema 2.6 y el lema 2.7 aseguran que un conjunto $B \subseteq 2^{\omega}$ es poroso si y sólo si $(T \times T)(\psi(B))$ es poroso en $\mathbb{R}^2$, entonces $(T \times T)(\psi)$ manda la familia $\mathcal{A}$ en una familia de conjuntos σ-porosos en $\mathbb{R}^2$ cuya unión no es un subconjunto σ-poroso. Gracias a esto $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) \leq \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^{\omega}))$. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)$ es una familia cuya unión no es σ-poroso en $\mathbb{R}^2$. Por los lemas mencionados anteriormente, la familia de las imagenes inversas de los elementos de $\mathcal{B}$ es una familia de conjuntos σ-porosos en 2^{ω} cuya unión no es un subconjunto σ-poroso. Por lo tanto $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^{\omega}))$.

Veamos que $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^\omega))$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{SP}(2^\omega)$ tal que $\bigcup \mathcal{A}$ no es σ-poroso en 2^ω. Por el lema 2.5, se tiene que T entonces manda la familia $\mathcal{A}$ en una familia de conjuntos σ-porosos en $\mathbb{R}$ cuya unión no es un subconjunto σ-poroso. Entonces $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) \leq \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^\omega))$. Por otro lado, si $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos σ-porosos en $\mathbb{R}$ cuya unión no es un conjunto σ-poroso, entonces, por el mismo lema, la familia de las imágenes inversas de los elementos de $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos σ-porosos de 2^ω cuya unión no es un conjunto σ-poroso. Por tanto $\mathsf{add}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{add}(\mathbf{SP}(2^\omega))$ y con esto se tiene la primera parte del teorema.

Para la parte del cov y de cof las pruebas son análogas, sólo hace falta ver que tanto T como ψ son funciones suprayectivas.

Para la parte de non la prueba cambia un poco: veamos que $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$.

Sea $A \subseteq 2^\omega$ infinito tal que A no es σ-poroso. Por el lema 2.6 y el lema 2.7 se tiene que $(T \times T)(\psi(A))$ no es σ-poroso y tiene la misma cardinalidad de A pues ψ es una función biyectiva y la imagen inversa de T aplicado a los singuletes es numerable. Por lo tanto $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es un subconjunto infinito que no es σ-poroso, entonces, por los lemas mencionados anteriormente, la imagen inversa de A bajo $(T \times T)(\psi)$ no es σ-poroso y tiene la misma cardinalidad de A pues ψ es una función biyectiva y la imagen inversa de T aplicado a los singuletes es numerable.

Veamos que $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$.

Sea $A \subseteq 2^\omega$ infinito tal que A no es un conjunto σ-poroso. Por el lema 2.5 y gracias a que la imagen inversa de T aplicado a los singuletes es numerable, se tiene que $T(A)$ no es σ-poroso y tiene la misma cardinalidad que A. Así $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$. Por otro lado, si $A \subseteq \mathbb{R}$ no es σ-poroso, entonces a causa del mismo lema y gracias a que la imagen inversa de T aplicado a los singuletes es a lo más numerable, $T^{-1}(A)$ no es σ-poroso. Con esto se tiene que $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$. ❑

Este último teorema fue muy importante, ya que nos da herramientas para relacionar a los cardinales de **Mon** y los cardinales de **SP**. La siguiente sección estará dedicada a ver como estos cardinales se relacionan.

2. La relación entre subconjuntos porosos y subespacios monótonos.

Antes de empezar necesitaremos un lema técnico que involucra grupos finitos. Recuerde que si X es un conjunto linealmente ordenado por $<$ y A, B son subconjuntos de X, $A < B$ significa que para cualquier $\langle a, b\rangle \in A \times B$, se tiene que $a < b$. Por $\oplus$ y $\ominus$ entenderemos la suma y la resta módulo $2n$ respectivamente.

LEMA 2.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{Z}_{2n}$ el grupo cíclico de orden $2n$. Si $<$ es un orden lineal sobre $\mathbb{Z}_{2n}$, entonces existe $x \in Z_{2n}$ tal que o bien $x \oplus 1 < x \oplus n < x$ o $x \ominus 1 < x \oplus n < x$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P_0 = \{\{2k, 2k \oplus 1\} : k \in n\}$ y sea $P_1 = \{\{2k \oplus 1, 2k \oplus 2\} : k \in n\}$. Suponga falso el lema. Es fácil ver que para todo $L \in P_0 \cup P_1$ se tiene que o bien $L < L \oplus n$ ó $L \oplus n < L$. Defina

- $I_< = \{L \in P_0 : L < L \oplus n\}$,
- $I_> = \{L \in P_0 : L \oplus n < L\}$,
- $J_< = \{L \in P_1 : L < L \oplus n\}$,
- $J_> = \{L \in P_1 : L \oplus n < L\}$.

Veamos que si existe una k tal que $\{k, k \oplus 1\} \in I_<$ (o bien $I_>, J_<, J_>$) entonces $\{k \oplus 2, k \oplus 3\} \in I_<$ (o respectivamente $I_>, J_<, J_>$):

Suponga que $\{k, k \oplus 1\} \in I_<$. Como $k \oplus 1 < k \oplus n \oplus 1$, entonces $\{k \oplus 1, k \oplus 2\} < \{k \oplus 1 \oplus n, k \oplus 2 \oplus n\}$. Como $k \oplus 2 < k \oplus n \oplus 2$, entonces $\{k \oplus 2, k \oplus 3\} < \{k \oplus 2 \oplus n, k \oplus 3 \oplus n\}$ y por tanto $\{k \oplus 2, k \oplus 3\} \in I_<$.

Por inducción uno puede ver que $I_< = P_0, J_< = P_1, I_> = J_> = \emptyset$ o que $I_> = P_0, J_> = P_1, I_< = J_< = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $I_< = P_0, J_< = P_1, I_> = J_> = \emptyset$. Hay dos casos:

- n es par. En este caso se tiene que $\{0, 1\}, \{n, n \oplus 1\} \in I_<$ y por lo tanto $\{0, 1\} < \{n, n \oplus 1\} < \{0, 1\}$. Esto es una contradicción.
- n es impar. En este caso se tiene que $\{n, n \oplus 1\} \in J_>$. Esto contradice el hecho de que $J_> = \emptyset$.

Como los dos casos son contradictorios, el lema debe ser cierto. ❑

En la proposición anterior, piense a $\mathbb{Z}_{2n}$ como un polígono regular. Entonces, según la proposición anterior, no importa el orden lineal que se le dé a los vértices del polígono, siempre encontraremos dos vértices adyacentes tal que alguna de sus antípodas se queda en medio de los dos según el orden.

Nuestro objetivo ahora es mostrar la relación que existe entre los subconjuntos monótonos del plano y los subconjuntos porosos del plano.

Para el siguiente teorema, necesitaremos algunos resultados básicos: recuerde que para $\alpha > 0$, $sin(\alpha) < \alpha$. Si $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ entonces $sin(\alpha) > \frac{\alpha}{1+\alpha}$. La distancia entre dos vértices adyacentes de un polígono regular de k lados y de radio r es $2r \cdot sin(\frac{\pi}{k})$ y la distancia entre dos antípodas de un poligono regular de $2k$ lados y de radio r es $2r$. Con estos resultados en mente es posible obtener una relación entre subconjuntos monótonos del plano y subconjuntos porosos del plano.

Teorema 2.10. *Cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ monótono es poroso.*

Demostración. Suponga que X es $\langle c, < \rangle$-monótono. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c > 2$. Veamos que X es poroso con constante de porosidad $p = \frac{1}{2+3c}$.

Suponga falso el resultado. Entonces existe un $x \in X$ y $r > 0$ tal que para todo $z \in B_r(x)$, se tiene que $B_{pr}(z) \nsubseteq B_r(x) \backslash X$. En particular para todo $z \in B_{r(1-p)}(x)$, el conjunto $B_{pr}(z) \cap X \neq \emptyset$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2\pi \leq 2m < \pi(2c+1)$.

Sea $\{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ el conjunto de los vertices de un polígono regular de $2m$ lados centrado en x y con radio $r(1-p)$. La numeración de los x_i es tal que x_{i+1} está junto a x_i para las $i < 2m$. Veamos que para $i \neq j$, $B_{rp}(x_i) \cap B_{rp}(x_j) = \emptyset$:

Claramente $d(x_i, x_k) \geq 2r(1-p)sin(\frac{\pi}{2m})$ y como $sin(\alpha) > \frac{\alpha}{1+\alpha}$ para $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, por la definición de p y por la elección de m se tiene que

$$d(x_i, x_j) > 2r(1-p)\frac{\frac{\pi}{2m}}{1+\frac{\pi}{2m}} = 2r\frac{2c+2}{2c+3}\frac{\frac{\pi}{2m}}{1+\frac{\pi}{2m}} > \frac{2rp(2c+2)}{1+2c+1} = 2rp.$$

Por tanto $B_{rp}(x_i) \cap B_{rp}(x_j) = \emptyset$.

Para cada $i \leq 2m$, defina a z_i como un punto en $B_{rp}(x_i) \cap X$. Como $B_{rp}(x_i) \cap B_{rp}(x_j) = \emptyset$ entonces si $i \neq j$ se tiene que $z_i \neq z_j$.

Use la proposición 3.3 para encontrar i, j, k tales que $z_i < z_j < z_k$ y que i, k sean vértices adyacentes y que j sea una antípoda. Suponga que x_j es antípoda de x_i. Usando que $d(x_i, x_k) = 2r(1-p)sin(\frac{\pi}{2m})$, $d(x_i, x_j) = 2r(1-p)$, $sin(\alpha) < \alpha$ y la definición de m se tiene que

$$d(z_i, z_k) \leq rp + d(x_i, x_k) + rp = 2r(1-p)sin(\frac{\pi}{2m}) + 2rp < 2r\frac{1-p}{2c} + 2rp = 2rp\frac{2c+1}{c},$$
$$d(z_i, z_j) \geq d(x_i, x_j) - 2rp = 2r(1-2p) = 2rp(2c+1)$$

y así $c \cdot d(z_i, z_k) < d(z_i, z_j)$, lo que es una contradicción. En el caso de que x_j sea antípoda de x_k, use la proposición 1.2 para obtener una contradicción similar. ❑

Este último teorema muestra una relación entre los subconjuntos monótonos del plano y los subconjuntos porosos del plano. Este lema nos dice que tenemos el ideal de los conjuntos σ-monótonos del plano encajado en el ideal de los conjuntos σ-porosos y por lo tanto $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) \geq \mathsf{non}(\mathbf{Mon})$ y

$\mathsf{cov}(\mathbf{Mon}) \geq \mathsf{cov}(\mathbf{SP})$. Nuestro propósito es ver que la igualdad se da. Antes necesitaremos unos pocos resultados.

LEMA 2.11. *Si $A \subseteq [0,1]$ es poroso entonces existe un espacio ultramétrico X y una función $f : A \to X$ bi-Lipschitz.*

DEMOSTRACIÓN. Sea p una constante de porosidad de A. Construyamos una familia $\{I_p : p \in 2^{<\omega}\}$ consistente de intervalos cerrados de la siguiente manera:

- $I_\emptyset = [0,1]$.
- Si I_p fue construido, quite de I_p un intervalo abierto de longitud $s \cdot \mathrm{diam} I_p$. Llame $I_{p^\frown 0}, I_{p^\frown 1}$ al intervalo izquierdo y derecho restantes respectivamente.

Sea $C = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{p\in 2^n} I_p$. Claramente $A \subseteq X$. Observe que como cada $p \in 2^n$ se tiene que $\mathrm{diam} I_p \leq (1-s)^n$, entonces cada función $f \in 2^\omega$ nos define un único punto en $\bigcap_{n\in\omega} p_{f \upharpoonright n}$. Gracias a esto, para todo $x < y$ elementos de C, existe un único $p_{\langle x,y\rangle} \in 2^{<\omega}$ tal que $x \in I_{p_{\langle x,y\rangle}{}^\frown 0}, y \in I_{p_{\langle x,y\rangle}{}^\frown 1}$.

Defina $\rho(x,y) = \mathrm{diam} I_{p_{\langle x,y\rangle}}$. Veamos que ρ define una ultramétrica sobre A:

Sean $x, y, z \in A$. Sea $q = p_{\langle x,y\rangle} \cap p_{\langle y,z\rangle}$. Como cada punto está determinado por una función $f \in 2^\omega$, se tiene que $q = p_{\langle x,y\rangle}$ o $q = p_{\langle y,z\rangle}$. Dado que $x, y, z \in q$, entonces $p_{\langle x,z\rangle}$ extiende a q y por tanto $\rho(x,z) \leq \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$. Las demás propiedades de espacios métricos son inmediatas.

Claramente $s \cdot \mathrm{diam} I_{p_{\langle x,y\rangle}} \leq d(x,y) \leq I_{p_{\langle x,y\rangle}}$ y por lo tanto la identidad en A es la función bi-Lipschitz requerida. ❏

Este último lema nos ayudará a construir un ideal I tal que **Mon** se quede entre I y $\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)$.

Observe que si $\langle A, d\rangle$ y $\langle B, d\rangle$ son espacios ultramétricos, entonces $A \times B$ es un espacio ultramétrico (con la métrica del máximo).

COROLARIO 2.12. *Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos σ-porosos, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ es σ-monótono.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente ver que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos porosos, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ es monótono. Por el lema anterior, existen X, Y espacios ultramétricos y $f : A \times B \to X \times Y$ una función bi-Lipschitz. Por la proposición 1.3 y por la proposicion 1.4 se tiene que $A \times B$ es monótono. ❏

Con este último resultado estamos listos para demostrar el resultado principal de este capítulo.

TEOREMA 2.13. *$\mathsf{cov}(\mathbf{Mon}) = \mathsf{cov}(\mathbf{SP}(2^\omega))$ y $\mathsf{non}(\mathbf{Mon}) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{J}$ el ideal generado por la familia de rectángulos $\{A \times B \subseteq \mathbb{R}^2 : A, B$ son porosos de $\mathbb{R}\}$. Si $C \subseteq \mathbb{R}^2$ no es elemento de $\mathcal{J}$, entonces una de sus proyecciónes no es elemento de $\mathbf{SP}(\mathbb{R})$ y por tanto $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) \leq \mathsf{non}(\mathcal{J})$. Por otro lado, si $D \subseteq \mathbb{R}$ no es elemento de $\mathbf{SP}(\mathbb{R})$, entonces $D \times D$ no es elemento de $\mathcal{J}$ y por tanto $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{non}(\mathcal{J})$.

Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}$ es una familia que cubre a $\mathbb{R}^2$, entonces la familia de las proyecciones de los elementos de $\mathcal{A}$ cubren a $\mathbb{R}$ y por lo tanto $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) \leq \mathsf{cov}(\mathcal{J})$. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{SP}(\mathbb{R})$ es una familia que cubre a $\mathbb{R}$, entonces la familia de los productos de los elementos de $\mathcal{B}$ cubren a $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}(\mathbb{R})) = \mathsf{cov}(\mathcal{J})$.

Por el teorema 2.8, tenemos que $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}(2^\omega)) = \mathsf{cov}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{cov}(\mathcal{J})$ y también $\mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega)) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(\mathbb{R}^2)) = \mathsf{non}(\mathcal{J})$. Gracias a la proposición 2.10, $\mathcal{J} \subseteq \mathbf{Mon} \subseteq \mathbf{SP}(\mathbb{R})^2$ y por lo tanto $\mathsf{cov}(\mathbf{Mon}) = \mathsf{cov}(\mathbf{SP}(2^\omega))$ y $\mathsf{non}(\mathbf{Mon}) = \mathsf{non}(\mathbf{SP}(2^\omega))$. ❏

Este último teorema nos da la libertad de estudiar $\mathsf{non}(\mathbf{Mon})$ y $\mathsf{cov}(\mathbf{Mon})$ a travez del ideal $\mathbf{SP}(2^\omega)$. Por simplicidad, de ahora en adelante llamaremos $\mathbf{SP}$ al ideal $\mathbf{SP}(2^\omega)$. En el siguiente capítulo se estudiarán el cardinal $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ en distintos modelos de ZFC.

CAPÍTULO 3

Resultados de consistencia

Existe un concepto de estrechez muy relacionado al concepto de porosidad manejado en este trabajo. Uno se pregunta sobre las relaciones que puede haber entre los invariantes cardinales relacionados a estos dos conceptos. Se introduce la siguiente definicion.

Un subconjunto X de un espacio métrico A se llama superiormente poroso en x si existe una constante $p > 0$ y una sucesión $\{r_n \in \mathbb{R} : n \in \omega\}$ convergente a cero, tal que para toda $n \in \omega$, existe y_n tal que $B_{pr_n}(y_n) \subseteq B_{r_n}(x) \setminus X$. Diremos que un subconjunto X de un espacio métrico A es superiormente poroso si para toda $x \in A$, X es superiormente poroso en x. Llamemos **UP** al σ-ideal generado por los subconjuntos superiormente porosos de $\mathbb{R}$. Para más información consulte [**Za1**] y [**Za2**].

M. Repický investigó propiedades del σ-ideal **UP** (consulte [**Re1**], [**Re2**], [**Re3**] para más información). El muestra que $\mathsf{cov}(\mathbf{UP}) \leq \mathsf{cof}(\mathcal{N})$, $\mathsf{non}(\mathbf{UP}) \geq \mathfrak{m}_{\sigma \text{ centrado}}$ y $\mathsf{non}(\mathbf{UP}) \geq \mathsf{add}(\mathcal{N})$. En [**HrZi1**] se muestra que, en las primeras dos desigualdades, no es posible cambiar **UP** por **SP** (equivalentemente por **Mon**). Sin embargo, dejan como pregunta que si es posible cambiar la tercera desigualdad. El propósito de este capítulo es mostrar que esto no es posible, es decir, que es consistente con ZFC que $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) < \mathsf{add}(\mathcal{N})$.

Introduciremos nociones de forcing que nos ayudarán a preservar a $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Con esto podemos introducir un forcing que haga crecer a $\mathsf{add}(\mathcal{N})$ mientras preserve a $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ para poder cumplir con el propósito de este capítulo.

En la primera sección de este capítulo se hablará principalmente sobre la preservación de $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$: se introducirá un concepto que garantiza que $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ quede de tamaño chico después de añadir un filtro genérico a un modelo base. Veremos que este concepto se preserva bajo iteraciones con soporte finito.

En la segunda sección se introducen algunos resultados básicos del forcing Ameba. Este forcing es conocido principalmente por que hace crecer al cardinal $\mathsf{add}(\mathcal{N})$ bajo iteraciones largas. Relacionaremos este forcing con los conceptos del capítulo uno. Este forcing nos ayudará a construir un modelo en donde $\mathsf{non}(\mathbf{Mon}) < \mathsf{add}(\mathcal{N})$.

1. Teoremas de preservación.

En el capítulo anterior, se vieron varias caracterizaciones de subconjuntos porosos sobre distintos espacios métricos. En el lema 2.2 se observa una caracterización sobre los conjuntos porosos del conjunto de Cantor. Esto nos motiva a la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea $n \in \omega$. Un conjunto $A \subseteq 2^\omega$ es poroso de grado n si para toda $p \in 2^{<\omega}$ existe un $q \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq q$, $|q| = |p| + n$ y $A \cap \langle q\rangle = \emptyset$.

Si observamos el lema 2.2, podemos notar que un conjunto $A \subseteq 2^\omega$ es poroso si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que A es poroso de grado n.

Los subconjuntos porosos de grado n por si mismos son un buen tema a estudiar. En el siguiente capítulo profundizaremos el estudio de estos conjuntos, pero por ahora, su propósito será el de simplificarnos las cosas. Llamemos $\mathbf{SP}_n$ al σ-ideal generado por los subconjuntos porosos de grado n del conjunto de Cantor.

Nuestro siguiente objetivo es dar una base del ideal $\mathbf{SP}_n$. Necesitaremos definir los siguientes conjuntos:

Para cada $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$ defina

$$X_\varphi := \{x \in 2^\omega : \forall k \in \omega (x \notin \langle x{\restriction}_k {}^\frown \varphi(x{\restriction}_k)\rangle)\}$$

Mostraremos que estos conjuntos son una base para el σ-ideal generado por los subconjuntos porosos del conjunto de Cantor.

Proposición 3.2. *Sea $n \in \omega$ y considere $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$. Entonces X_φ es un conjunto poroso de grado n.*

Demostración. Sea $p \in 2^{<\omega}$. Defina $q = p^\frown \phi(p)$. Veamos que $\langle q\rangle \cap X_\phi = \emptyset$:

Suponga falso el resultado, es decir que existe $x \in \langle q\rangle \cap X_\varphi$. Sea $k = |p|$. Entonces como $x \in X_\varphi$ se sigue que $x \notin \langle x{\restriction}_k {}^\frown \varphi(x{\restriction}_k)\rangle$. Pero $x{\restriction}_k = p$, así que $x \notin \langle p^\frown \varphi(x{\restriction}_k)\rangle = \langle q\rangle$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $\langle q\rangle \cap X_\phi = \emptyset$. ❑

Hasta ahora se ha mostrado que para cada $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$, X_φ es un elemento del ideal $\mathbf{SP}_n$. Mostraremos que para cada $A \subseteq 2^\omega$ un subconjunto poroso de grado n, existe $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$ tal que $A \subseteq X_\varphi$ y con esto tendremos que los conjuntos X_φ, para $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$, forman una base para $\mathbf{SP}_n$.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea $n \in \omega$. Para cualquier conjunto $A \subseteq 2^\omega$ poroso de grado n existe $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$ tal que $A \subseteq X^n_\varphi$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $p \in 2^{<\omega}$ defina $\varphi(p)$ tal que $\langle p^\frown\varphi(p)\rangle \cap A = \emptyset$ y $|\varphi(p)| = n$. Veamos que $A \subseteq X_\varphi$.

Sea $x \in A$. Sea $k \in \omega$. Por definición de φ, $\langle x\restriction_k {}^\frown\varphi(x\restriction_k)\rangle \cap A = \emptyset$. En particular $x \notin \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi(x\restriction_k)\rangle$. Por tanto $x \in X_\varphi$ y así $A \subseteq X_\varphi$. ❑

Hemos visto el conjunto de X_φ, con $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^n$, forma una base para el σ-ideal $\mathbf{SP}_n$ y asi, juntando a todos los φ, el conjunto de X_φ forma una base para el σ-ideal $\mathbf{SP}$.

El objetivo de este capítulo es obtener un modelo en donde $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ sea pequeño y $\mathsf{add}(\mathcal{N})$ sea grande. Entonces necesitamos un concepto de nocion de forcing que nos asegure que $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ no crezca. El siguiente concepto, aparte de asegurar que $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ no crece, se preserva bajo iteraciones, como se verá en algunas páginas posteriores.

DEFINICIÓN 3.4. Sea $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ un forcing. Diremos que $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ si para todo $\dot{X}$, un $\mathbb{P}$ nombre de un conjunto poroso de grado n, existe un conjunto $Y \in \mathbf{SP}_n$ tal que para todo $x \in 2^\omega$, si $x \notin Y$, entonces $\Vdash_\mathbb{P}$ "$x \notin \dot{X}$". Análogamente diremos que $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ si para todo $\dot{X}$, un $\mathbb{P}$ nombre de un conjunto poroso, existe un conjunto $Y \in \mathbf{SP}$ tal que para todo $x \in 2^\omega$, si $x \notin Y$, entonces $\Vdash_\mathbb{P}$ "$x \notin \dot{X}$".

Claramente si para toda $n \in \omega$, $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$, entonces $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Por esa razón daremos más énfasis en estudiar propiedades de preservación de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.

Una de las razones del por qué se eligió el concepto de preservacion fuerte de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ es porque tiene una buena caracterización en términos de combinatoria. La caracterización está dada por la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea $n \in \omega$. Es equivalente que $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ preserve fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ a que para todo $\dot{\varphi}$, un $\mathbb{P}$ nombre de una función de $2^{<\omega}$ a 2^n, existe una familia numerable de funciones $\{\varphi_i : i \in \omega\}$, con $\varphi_i : 2^{<\omega} \to 2^n$, tal que para cualquier $x \in 2^\omega$, si ocurre que para toda $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_i\restriction_k\rangle$, entonces $\Vdash_\mathbb{P}$ "$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$".*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Sea $\dot{\varphi}$ un $\mathbb{P}$ nombre para una función de $2^{<\omega}$ a 2^n. En la extensión, por la proposición 3.2, $X_{\dot{\varphi}}$ es un conjunto poroso de grado n. Sea $\dot{X}$ un $\mathbb{P}$ nombre para $X_{\dot{\varphi}}$. Como $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$, entonces existe $Y \in \mathbf{SP}_n$ tal que para cualquier $x \in 2^\omega$, si $x \notin Y$ entonces $\Vdash_\mathbb{P}$ "$x \notin \dot{X}$". Entonces existe una familia $\{C_i : i \in \omega\}$ de conjuntos porosos de grado n

tal que $\bigcup\{C_i : i \in \omega\} = Y$. Aplique la proposición 3.3 para obtener una familia numerable de funciones $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ tal que para cada $i \in \omega$, $C_i \subseteq X_{\varphi_i}$. Veamos que para todo $x \in 2^\omega$, si para todo $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \varphi_i(x{\restriction_k})\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists k(x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \dot{\varphi}(x{\restriction_k})\rangle)$".

Sea $x \in 2^\omega$ y suponga que para todo $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \varphi_i(x{\restriction_k})\rangle$. Entonces para todo $i \in \omega$, $x \notin X_{\varphi_i}$ y por lo tanto $x \notin Y$ y así $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \notin X_{\dot{\varphi}}$". Esto último es equivalente a $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists k(x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \dot{\varphi}(x{\restriction_k})\rangle)$" que es la propiedad que se buscaba.

($\Leftarrow$) Sea $\dot{X}$ un $\mathbb{P}$ nombre para un conjunto poroso de grado n. Por la proposición 3.3, existe $\dot{\varphi}$, un $\mathbb{P}$ nombre para una función de $2^{<\omega}$ a 2^n, tal que $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{X} \subseteq X_{\dot{\varphi}}$". Por hipótesis, existe una familia numerable de funciones $\{\varphi_k : k \in \omega\}$ con $\varphi_k : 2^{<\omega} \to 2^n$, tal que para cualquier $x \in 2^\omega$, si ocurre que para toda $i \in \omega$ existe $j \in \omega$ tal que $x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \varphi_i{\restriction_k}\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists k(x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \dot{\varphi}(x{\restriction_k})\rangle)$". Defina $Y = \bigcup\{X_{\varphi_n} : n \in \omega\}$ y suponga que $x \notin Y$. Veamos que $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \notin \dot{X}$".

Como $x \notin Y$ entonces para todo $i \in \omega$, $x \notin X_{\varphi_i}$. Por lo tanto, para todo $i \in \omega$, existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \varphi_i(x{\restriction_k})\rangle$. Por hipótesis, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists k(x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \dot{\varphi}(x{\restriction_k})\rangle)$". Esto es equivalente a que $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \notin X_{\dot{\varphi}}$" y por lo tanto $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \notin \dot{X}$". ❑

Hay un análogo de la proposición anterior para los forcings que preservan fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ y la demostración es idéntica, así que se omitirá.

Proposición 3.6. *Es equivalente que $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ preserve fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ a que para para toda $n \in \omega$ y todo $\dot{\varphi}$, un $\mathbb{P}$ nombre de una función de $2^{<\omega}$ a 2^n, existe una familia numerable de funciones $\{\varphi_i : i \in \omega\}$, con $\varphi_i : 2^{<\omega} \to 2^n$, tal que para cualquier $x \in 2^\omega$, si ocurre que para toda $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \varphi_i{\restriction_k}\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists k(x \in \langle x{\restriction_k} {}^\frown \dot{\varphi}(x{\restriction_k})\rangle)$".*

Demostración. La demostración es idéntica a la proposición anterior. ❑

Lo más importante del concepto de preservar fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP_n})$ es que hacen que el conjunto de Cantor del modelo base no sea parte del ideal $\mathbf{SP}_n$. Este lema es muy importante.

Lema 3.7. *Suponga que $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. Entonces para cualquier filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que sea $\mathbb{P}$ genérico sobre un modelo V, se tiene que $V[G] \models 2^\omega \cap V \notin \mathbf{SP}_n$.*

Demostración. Suponga falso el resultado, es decir que existe una familia $\{\dot{C}_n : n \in \omega\}$ de $\mathbb{P}$ nombres para conjuntos porosos de grado n tal que para todo $x \in 2^\omega$, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists n(x \in \dot{C}_n)$". Por tanto existe una familia $\{Y_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbf{SP}_n$ tal que para todo $k \in \omega$ y para todo $x \in 2^\omega$, si $x \notin Y_k$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \notin \dot{C}_k$". Sea $Y = \bigcup\{Y_k : k \in \omega\}$. Por esto, para todo $x \in 2^\omega$, si $x \notin Y$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\forall k(x \notin \dot{C}_k)$". Por hipótesis, para todo $x \in 2^\omega$, es falso que $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\forall k(x \notin \dot{C}_k)$" y por lo tanto $x \in Y$. Esto implíca que $2^\omega \in \mathbf{SP}_n$, lo cual es falso. ❑

Como viene siendo usual, hay un análogo para el caso en donde el forcing preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$.

LEMA 3.8. *Suponga que* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *preserva fuertemente* $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$. *Entonces para cualquier filtro* $G \subseteq \mathbb{P}$ *que sea* $\mathbb{P}$ *genérico sobre un modelo* V*, se tiene que* $V[G] \models 2^\omega \cap V \notin \mathbf{SP}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es idéntica al lema anterior. ❏

Hemos definido lo que significa preservar fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ e incluso se han dado algunas caracterizaciones, pero no se ha dado ningun ejemplo de forcings que preserven fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Nuestro siguiente paso es encontrar una clase suficientemente grande de forcings tales que preservan fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. Definiremos una clase de forcings que resultará preservar fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.

DEFINICIÓN 3.9. Sea $n \in \omega$. Diremos que un forcing $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ es σ n-ligado si existe una sucesión de subconjuntos $\{\mathbb{P}_k : k \in \omega\}$ tales que para toda $m \in \omega$ y para todo $\{p_i : i \in n\} \subseteq \mathbb{P}_m$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq \{p_i : i \in n\}$.

Observe que todo forcing que sea σ n-ligado es σ ligado, y como todo forcing σ ligado cumple la propiedad c.c.c., entonces todo forcing que sea σ n-ligado cumple la propiedad c.c.c. y entonces preservará cofinalidades y cardinalidades.

Claramente la propiedad de ser σ n-ligado es más fuerte que ser σ m-ligado, para $n > m$, y por tanto ser σ n-ligado es más fuerte que ser σ ligado. Por otro lado, la propiedad de ser σ n-ligado es más débil que ser σ centrado. Por todo esto se tiene que, para $m < n$, tenemos que $\mathfrak{m}_{\sigma \text{ ligado}} < \mathfrak{m}_{\sigma\ m-\text{ligado}} < \mathfrak{m}_{\sigma\ n-\text{ligado}} < \mathfrak{m}_{\sigma \text{ centrado}}$.

Recordemos que todo forcing puede ser encajado densamente en un álgebra booleana. La ventaja de encajar un forcing en un álgebra Booleana es que tenemos la libertad de escojer *valores booleanos*. Si $\mathbb{B}$ es un álgebra booleana y φ es alguna fórmula, denotaremos por $[\![\varphi]\!]$ al supremo de los elementos de $\mathbb{B}$ tales que cumplen φ. A $[\![\varphi]\!]$ le llamaremos el *valor booleano* de φ.

Si $\mathbb{P}$ es encajado densamente en un álgebra booleana $\mathbb{B}$, y consideramos un filtro genérico en $\mathbb{P}$, entonces podemos encontrar un filtro genérico en $\mathbb{B}$ que extienda al genérico en $\mathbb{P}$. Esto también es cierto hacia el otro lado, si tenemos un filtro genérico en $\mathbb{B}$, entonces la restricción será un filtro genérico en $\mathbb{P}$ y así tendremos las mismas extensiones genéricas. Por tanto aplicar forcing en $\mathbb{P}$ es lo mismo que aplicar forcing en $\mathbb{B}$. Usaremos esto para nuestro siguiente resultado.

Los forcings σ n-ligados no sólo preserva cofinalidades y cardinalidades, veremos que también cumple la propiedad de preservar fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.

LEMA 3.10. *Suponga que $\mathbb{P}$ es un forcing σ (2^n)-ligado, entonces $\mathbb{P}$ preserva fuertemente* $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.

DEMOSTRACIÓN. Usaremos los pequeños resultados vistos en el párrafo anterior.

Sea $\{H_i : i \in \omega\} \subseteq \mathbb{P}$ una familia de subconjuntos 2^n-ligados tal que $\bigcup\{H_i : i \in \omega\} = \mathbb{P}$. Sea $\mathbb{B}'$ un álgebra booleana tal que $\mathbb{P}$ esté encajado densamente en $\mathbb{B}'$. Sea $\mathbb{B} = \mathbb{B}'\backslash\{0\}$. Usaremos la equivalencia dada por la proposición 3.5. Sea $\dot\varphi$ un $\mathbb{B}$-nombre para una función de $2^{<\omega}$ a 2^n. Veamos que para cualquier $i \in \omega$ y para cualquier $s \in 2^{<\omega}$ existe un $t \in 2^n$ tal que para todo $p \in H_i$, $p \wedge [\![\dot\varphi(s) = t]\!] \neq 0$.

Suponga falso este último resultado. Entonces existe $i \in \omega$ y $s_0 \in 2^{<\omega}$ tal que para toda $t \in 2^n$, existe $p_t \in H_i$ tal que $p_t \wedge [\![\dot\varphi(s_0) = t]\!] = 0$. Como H_i es 2^n-ligado, debe existir $p \in \mathbb{P}$ tal que, para toda $t \in 2^n$, $p \leq p_t$. Sea G un filtro $\mathbb{B}$-genérico sobre un modelo V tal que $p \in G$. Entonces debe existir $t \in 2^\omega$ tal que

$$V[G] \models \dot\varphi(s_0) = t.$$

Por lo tanto debe existir $q \in G$ tal que

$$q \vdash \text{“}\dot\varphi(s_0) = t\text{”}.$$

Sea $p' \in G$ tal que $p' \leq p \wedge q$. Como $p \leq q$, entonces

$$p' \Vdash \text{“}\dot\varphi(s_0) = t\text{”}.$$

Por lo tanto $p' \leq p \wedge [\![\dot\varphi(s_0) = t]\!]$. Esto es una contradicción y por lo tanto para cualquier $i \in \omega$ y para cualquier $s \in 2^{<\omega}$ existe un $t \in 2^n$ tal que para todo $p \in H_i$, $p \wedge [\![\dot\varphi(s) = t]\!] \neq 0$.

Lo que sigue es definir una familia $\{\varphi_i : i \in \omega\}$ de funciones de $2^{<\omega}$ a 2^n tal que para cualquier $x \in 2^\omega$, si ocurre que para toda $i \in \omega$ existe $j \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_j {}^\frown\varphi_i(x\restriction_j)\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{B}}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot\varphi(x\restriction_k)\rangle)$”. Defina $\varphi_i(s) = t$ si y sólo si para toda $p \in H_i$, $p \wedge [\![\dot\varphi(s) = t]\!] \neq 0$ y t es el primero según un orden previamente elegido con esa propiedad (por ejemplo el orden lexicográfico). Esta función está bien definida por la afirmación anterior. Sea $x \in 2^{<\omega}$ y suponga que para toda $i \in \omega$ existe $j \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_j {}^\frown\varphi_i(x\restriction_j)\rangle$. Veamos que $\Vdash_{\mathbb{B}}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot\varphi(x\restriction_k)\rangle)$”:

Sea $p \in \mathbb{B}$. Sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$. Entonces existe $i \in \omega$ tal que $q \in H_i$. Sea $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_i(x\restriction_k)\rangle$. Por la afirmación anterior y por la definición de φ_i, debe existir $q' \in \mathbb{B}$ tal que $q' \leq q \wedge [\![\dot\varphi(x\restriction_k) = \varphi_i(x\restriction_k)]\!]$. Entonces

$$q' \Vdash \text{“}\dot\varphi(x\restriction_k) = \varphi_i(x\restriction_k)\text{”}.$$

Como $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_i(x\restriction_k)\rangle$, entonces

$$q' \Vdash \text{“}x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot\varphi(x\restriction_k)\rangle\text{”}$$

y en particular

$$q' \Vdash \text{“}\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)\text{”}.$$

Por lo tanto $\Vdash_{\mathbb{B}}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$”. Como $\mathbb{B}$ y $\mathbb{P}$ son nociones de forcing equivalentes, entonces se tiene $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$” y por lo tanto $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. ❑

En particular, si para toda $n \in \omega$, un forcing es σ n-ligado, o si es σ centrado, entonces el forcing preservará fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$.

En este trabajo, todos los forcings con los que construiremos modelos, de una u otra manera se obtendrán mediante una iteración. Afortunadamente el concepto de preservación fuerte de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ también es preservado por iteraciones, como lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 3.11. *Sea $\mathbb{P} = \{\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha\rangle : \alpha \in \kappa\}$ una iteración de forcings con soporte finito tal que para toda $\alpha < \kappa$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es un forcing c.c.c. que preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$”. Entonces $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre κ. Hay 3 casos:

Caso 1. $\kappa = \alpha + 1$. Sea $\mathbb{P} = \{\langle \mathbb{P}_i, \dot{\mathbb{Q}}_i\rangle : i \leq \alpha\}$. Entonces $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$. Ya que estos forcings son equivalentes, trabajaremos con $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$. Usaremos la caracterización dada por la proposición 3.5.

Sea $\dot{\varphi}$ un $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ nombre para una función de $2^{<\omega}$ a 2^n. En $V[G_\alpha]$, como $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$”, existe una familia de funciones $\{\varphi_m : m \in \omega\}$ de $2^{<\omega}$ a 2^n tal que para todo $x \in 2^\omega$, si para toda $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \varphi_i\restriction_k\rangle$, entonces $\Vdash_{\dot{\mathbb{Q}}_\alpha}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$”. Para cada φ_m, considere $\dot{\varphi}_m$, un $\mathbb{P}_\alpha$ nombre para φ_m. Por hipótesis de inducción, $\mathbb{P}_\alpha$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$, por lo tanto existe una familia $\{\varphi_{\langle n,j\rangle} : n, j \in \omega\}$ tal que para todo $m \in \omega$ y para todo $x \in 2^\omega$, si para toda $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \varphi_{\langle m,i\rangle}\restriction_k\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}_m(x\restriction_k)\rangle)$”. Veamos que para todo $x \in 2^\omega$, si para toda $m, i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \varphi_{\langle m,i\rangle}\restriction_k\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$”.

Sea $x \in 2^\omega$ tal que para toda $m, i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \varphi_{\langle m,i\rangle}\restriction_k\rangle$. Entonces para todo $m \in \omega$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}_m(x\restriction_k)\rangle)$” y por lo tanto para toda $m \in \omega$ $V[G_\alpha] \models \exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}_m(x\restriction_k)\rangle)$”. Por lo tanto $\Vdash_{\dot{\mathbb{Q}}_\alpha}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$” y así $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown \dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$” y por lo tanto $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.

Caso 2. La cofinalidad de κ es numerable. Es claro que podemos reducir al caso en donde $\mathbb{P} = \{\langle \mathbb{P}_n, \dot{\mathbb{Q}}_n\rangle : n \in \omega\}$. Usaremos la caracterización dada por la proposición 3.5. Sea $\dot{\varphi}$ un $\mathbb{P}$ nombre para una función de $2^{<\omega}$ a 2^n. Sea $j \in \omega$. En $V[G_j]$ encuentre una función $\varphi_j : 2^{<\omega} \to 2^n$ y una sucesión decreciente de condiciones $\{p_i^j : i \in \omega\} \subseteq \mathbb{P}_{[j,\omega)}$ tal que

$$p_i^j \Vdash_{\mathbb{P}_{[j,\omega)}} \text{“}\varphi_j\restriction_{2^{\leq i}} = \dot{\varphi}\restriction_{2^{\leq i}}\text{”}.$$

Para cada $j \in \omega$, escoja $\dot{\varphi}_j$ un $\mathbb{P}_j$ nombre para φ_j. Use hipótesis de inducción sobre los $\mathbb{P}_j$ para obtener una familia de funciones $\{\varphi_{\langle j,i\rangle} : j, i \in \omega\}$ (esta familia es numerable en el modelo base, pues el forcing preserva cardinalidades) tal que para todo $x \in 2^\omega$, si ocurre que para todo $i \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_{\langle j,i\rangle}(x\restriction_k)\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}_j}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_j(x\restriction_k)\rangle)$”. Veamos que para todo $x \in 2^\omega$, si para todo $\langle j, i\rangle \in \omega\times\omega$ existe k tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_{\langle j,i\rangle}(x\restriction_k)\rangle$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$”.

Suponga que no, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\forall k(x \notin \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)\text{”}.$$

Como la iteración es de soporte finito, entonces existe $j \in \omega$ tal que $p \in \mathbb{P}_j$. Sea G_j un filtro $\mathbb{P}_j$ genérico sobre un modelo base V tal que $p \in G_j$. Como para toda $k \in \omega$, existe $i \in \omega$ tal que $x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\varphi_{\langle j,i\rangle}(x\restriction_k)\rangle$ y como $\mathbb{P}_k$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$, entonces debe existir $k \in \omega$ tal que

$$V[G_j] \models x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}_j(x\restriction_k)\rangle.$$

Por tanto debe existir $q \in G_j$ tal que

$$q \Vdash_{P_j} \text{“}x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}_j(x\restriction_k)\rangle.\text{”}$$

Tome $q' \leq q \wedge p$ y considere $p' = q'{}^\frown p_i{}^\frown k$. Entonces

$$p' \Vdash \text{“}\dot{\varphi}_j = \varphi_j \text{ y } \varphi_j\restriction_{2^{\leq k}} = \dot{\varphi}\restriction_{2^{\leq k}}\text{”}$$

y por lo tanto

$$p' \Vdash \text{“}x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle\text{”},$$

lo que contradice que $p' \leq p$. Por lo tanto $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\exists k(x \in \langle x\restriction_k {}^\frown\dot{\varphi}(x\restriction_k)\rangle)$”.

Caso 3. La cofinalidad de κ es no numerable. Usaremos la caracterización dada por la proposición 3.5. Sea $\dot{\varphi}$ un $\mathbb{P}$ nombre para una función de $2^{<\omega}$ a 2^n. Para cada $p \in 2^{<\omega}$ considere A_q una anticadena maximal tal que decida el valor de $\dot{\varphi}(p)$. Como la iteración es de soporte finito y como cada anticadena es a lo más numerable, debe existir $\lambda < \kappa$ tal que para toda $p \in 2^{<\omega}$, $A_p \subseteq \mathbb{P}_\lambda$. Por lo tanto $V[G_\lambda]$ conoce completamente a $\dot{\varphi}$. Aplique hipótesis de inducción a $\mathbb{P}_\lambda$ para obtener el resultado.

Por estos 3 casos la prueba por inducción está completa y así $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. ❑

Como ha ocurrido en los últimos resultados, esta proposición tiene su análogo para forcings que preservan fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Sin embargo, para objetivos de este trabajo no necesitaremos la proposición análoga. Sólo haremos la observación de que si una iteracion de forcings c.c.c. preservan fuertemente preservan fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ para toda $n \in \omega$, preservará fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$.

Estos son todos los teoremas generales que se requerirán para la construcción del modelo deseado. En el siguiente capítulo se enfocará más en un forcing en particular para luego construir un modelo en donde $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) < \mathsf{add}(\mathcal{N})$.

2. Forcing ameba.

Estamos en busca de un forcing que preserve fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ y que haga crecer $\mathsf{add}(\mathcal{N})$. Necesitaremos la ayuda del siguiente forcing.

Definición 3.12. El forcing $\mathbb{A} = \{B \in \mathfrak{B} : \mu(B) > \frac{1}{2}\}$ con el orden $A \leq B$ si y sólo si $A \subseteq B$ se le llamará el forcing ameba.

Por $\mathfrak{B}$ entenderemos los borelianos en el conjunto de Cantor. Por μ entenderemos la medida de lebesgue en el conjunto de Cantor. Por $\mu*$ entenderemos la medida exterior en el conjunto de Cantor.

Para obtener más información sobre las extensiones que produscan los filtros genéricos de $\mathbb{A}$, nos apoyaremos del siguiente forcing.

$$\mathbb{A}_{\frac{1}{2}} = \{B \in \mathfrak{B} : \mu(B) < \frac{1}{2}\}.$$

Considere el orden inverso sobre $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$, es decir $A \leq B$ si y sólo si $B \subseteq A$. Observe que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$ son isomorfos y por lo tanto producen las mismas extensiones.

El forcing que buscaremos será la iteración con soporte finito del forcing ameba de longitud ω_2. Uno de nuestros objetivos es ver que, en la extensión, $\mathsf{add}(\mathcal{N}) \geq \omega_2$ y para eso usaremos técnicas de reflección. Necesitaremos que la unión de todos los nulos en cada paso sea nulo en en siguiente paso. Considere $f \in 2^\omega$ y N un conjunto nulo sobre un modelo base M. Si variamos sólo un número finito de coordenadas de f para obtener una función g, entonces podemos encontrar un conjunto nulo N' tal que $N' \in M$ y $g \in N'$. En otras palabras, la unión de los conjuntos nulos de un modelo base es cerrado bajo cambios finitos de sus elementos.

En la teoría de probabilidad existen ciertos tipos de eventos, llamados eventos de colas, que se comportan de manera similar. Gracias a un teorema de Kolmogorov, sabemos que la probabilidad asignada a estos eventos es de cero o de uno. Intentaremos recrear el teorema de Kolmogorov y para eso necesitaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.13. Sea $E \subseteq 2^\omega$. Diremos que E es un conjunto de colas si para todo $x \in E$ y para todo $y \in 2^\omega$ tal que y difiere de x en sólo un número finito de cordenadas, entonces $y \in E$.

Ya que la medida de 2^ω es la medida producto, necesitaremos una caracterización que nos permita usar esta propiedad sobre la medida.

LEMA 3.14. *$E \subseteq 2^\omega$ es un conjunto de colas si y sólo si para toda $n \in \omega$, existe $B_n \subseteq \prod_{i \geq n+1} 2^i$ tal que $E = 2^n \times B_n$.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$). Sea $n \in \omega$. Defina $B_n = \{y \in \prod_{i \geq n+1} 2^i : \text{ existe } x \in 2^n \text{ tal que } x^\frown y \in E\}$. Claramente $E = 2^n \times B_n$.

($\Leftarrow$). Sea $x \in E$ y $y \in 2^\omega$ tal que y sólo difiere de x en un numero finito de cordenadas. Entonces existe $k \in \omega$ tal que existen $p, q \in 2^k$ y $r \in \prod_{i \geq k+1} 2^i$ tal que $x = p^\frown r$ y $y = q^\frown r$. Como existe B_k tal que $E = 2^k \times B_k$ y $x \in E$, se tiene que $r \in B_k$ y así $y \in E$. ❑

Esta definición nos permitirá obtener el resultado que nos permitirá observar que $\mathsf{add}(\mathcal{N})$ es grande en la extensión. El resultado está dado por el siguiente lema.

LEMA 3.15. *Sea G un filtro $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$ genérico sobre un modelo V. Entonces $V[G] \models \mu(\bigcup(\mathcal{N} \cap V)) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $N \in \mathcal{N}$, defina $D_N = \{A \in \mathbb{A}_{\frac{1}{2}} : N \subseteq A\}$. Veamos que estos conjuntos son densos en $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$.

Sea $A \in \mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$ y sea $N \in \mathcal{N}$. Sea B un boreliano de medida cero tal que $N \subseteq B$. Entonces $A \cup B \in D_N$ y $A \cup B \leq A$. Por lo tanto D_N es denso.

Gracias a esto, tenemos que $V[G] \models \bigcup(\mathcal{N} \cap V) \subseteq \bigcup G$. Claramente $V[G] \models \mu(\bigcup G) = \frac{1}{2}$. Por otro lado, como los conjuntos abiertos en $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$ son densos en $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$, entonces $V[G] \models \bigcup G$ es abierto . De ahora en adelante trabajaremos en $V[G]$.

Sea $E = \bigcup(\mathcal{N} \cap V)$. Claramente E es un conjunto de colas. Veamos que para todo $A_n \subseteq 2^n$, $\mu^*(E \cap F) = \mu^*(E)\mu(F)$, donde $F = A_n \times (\prod_{i \geq n+1} 2^i)$.

Use el lema 3.14 para encontrar $B_n \subseteq \prod_{i \geq n+1} 2^i$ tal que $E = 2^n \times B_n$. Entonces $E \cap F = A_n \times B_n$. Por lo tanto $\mu^*(E \cap F) = \mu^*(E)\mu(F)$.

Como cada abierto U es unión numerable de cerrado-abiertos, debe existir una familia de $\{F_n : n \in \omega\}$ de la forma $F_n = A_n \times (\prod_{i \geq n+1} 2^i)$ tal que $U = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ y $\mu(U) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n)$.

En particular, como $\bigcup G$ es abierto, $\mu^*((\bigcup G) \cap E) = \mu(\bigcup G)\mu^*(E)$. Como $E \subseteq \bigcup G$, entonces $\mu^*(E) = \mu(\bigcup G)\mu^*(E) = \frac{1}{2}\mu^*(E)$ y por lo tanto $V[G] \models \mu(\bigcup(\mathcal{N} \cap V)) = 0$. ❑

Ya que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}_{\frac{1}{2}}$ son equivalentes, entonces tendremos el mismo resultado para el forcing ameba.

El siguiente objetivo es mostrar que el forcing de $\mathbb{A}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ y mostrar que sus iteraciones con soporte finito tambien preservan $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ para aplicar los resultados obtenidos en la sección anterior. Veamos que, para toda $n \in \omega$, el forcing ameba es n-ligado.

Proposición 3.16. *Sea $n \in \omega$ con $n \geq 2$. El forcing ameba es σ n-ligado.*

Demostración. Para cada C conjunto cerrado-abierto en 2^ω defina

$$\mathbb{A}_C = \{A \in \mathbb{A} : \mu(C \backslash A) < \frac{1}{n} \cdot (\mu(C) - \frac{1}{2})\}.$$

Veamos que $\mathbb{A} = \bigcup\{\mathbb{A}_C : C \text{ es un cerrado-abierto de } 2^\omega\}$:

Sea $A \in \mathbb{A}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(A) = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Como μ es una medida regular, existe $U \subseteq 2^\omega$ tal que $A \subseteq U$ y $\mu(U \backslash A) < \frac{\varepsilon}{n}$.
Como μ es regular, existe C cerrado-abierto de 2^ω tal que $\mu(C) > \frac{1}{2} + \varepsilon$. Entonces

$$\mu(C \backslash A) < \mu(U \backslash A) < \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{1}{2}) < \frac{1}{n} \cdot (\mu(C) - \frac{1}{2}).$$

Por lo tanto $A \in \mathbb{A}_C$ y así $\mathbb{A} = \bigcup\{\mathbb{A}_C : C \text{ es un cerrado-abierto de } 2^\omega\}$.

Ahora veamos que para cada C conjunto cerrado-abierto de 2^ω, la familia $\mathbb{A}_C$ es n-ligada:

Sea $\{A_j : j \in n\} \subseteq \mathbb{A}_C$. Claramente $K = \bigcap\{A_j : j \in n\}$ es boreliano. Dado que

$$\mu(C) \leq \mu(K) + \sum_{j \in n} \mu(C \backslash A_j) < \mu(K) + \frac{1}{n}(\sum_{j \in n} \mu(C) - \frac{1}{2}) = \mu(K) + \mu(C) - \frac{1}{2}$$

entonces $\frac{1}{2} \leq \mu(K)$. Por lo tanto $K \in \mathbb{A}$ y como claramente $K \leq A_j$, para cada $j \in n$, entonces se tiene que $\mathbb{A}_C$ es n-ligado.

Gracias a esto se tiene que $\mathbb{A}$ es σ n-ligado. ❑

Con estos últimos resultados juntos, obtenemos que la iteración de forcings ameba con soporte finito preserva $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Con esto estamos listos para construir un modelo en donde $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) < \mathsf{add}(\mathcal{N})$.

Teorema 3.17. *Es consistente con ZFC que* $\mathsf{non}(\mathbf{Mon}) < \mathsf{add}(\mathcal{N})$.

Demostración. Sea V un modelo tal que $V \models CH$. Sea $\mathbb{P} = \{\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \rangle : \alpha < \omega_2\}$ una iteración de forcings con soporte finito, en donde cada $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es un $\mathbb{P}_\alpha$ nombre para el forcing ameba. Sea G un filtro $\mathbb{P}$ genérico sobre V. Veamos que $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}) = \omega_1$.

Sea $C = V \cap 2^\omega$. Por la proposición 3.16, $\mathbb{P}$ es una iteración de forcings c.c.c con soporte finito, entonces $\mathbb{P}$ es c.c.c. y por lo tanto $\mathbb{P}$ preserva cardinales. Por lo tanto $V[G] \models |C| = \omega_1$. Por otro lado, usando la proposición 3.10 y la proposición 3.11, $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ y por el lema 3.8, $V[G] \models C \notin \mathbf{SP}$. En consecuencia $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}) = \omega_1$.

Veamos que $V[G] \models \mathsf{add}(\mathcal{N}) \geq \omega_2$.

En $V[G]$ considere una familia $\mathfrak{N}$ de conjuntos nulos, tal que $|\mathfrak{N}| = \omega_1$. Sea $N \in \mathfrak{N}$. Existe un conjunto G_N que es intersección numerable de abiertos tal que $N \subseteq G_N$ y $\mu(G) = 0$. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos tal que $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} = G_N$. Cada U_n está codificado por una familia numerable de cerrado-abiertos $\{C_m^n : m \in \omega\}$. En otras palabras, cada U_n está codificado por una función $f_n : \omega \to 2^{<\omega}$.

Para cada $i \in \omega$, tome una anticadena maximal $A_{\langle i,n \rangle}$ en $\mathbb{P}$ tal que decida $f_n(i)$. Gracias a que el forcing es c.c.c., cada $A_{\langle i,n \rangle}$ contiene a lo más una cantidad numerable de condiciones, y cada una de estas condiciones, por ser el soporte finito, está contenida en un P_α con $\alpha < \omega_2$. Por lo tanto, debe existir un $\beta < \omega_2$ tal que para todo $i, n \in \omega$, $A_{\langle i,n \rangle} \subset \mathbb{P}_\beta$.

Con todo esto tenemos que $G_N \in V[G_\beta]$ y por lo tanto, como $|\mathfrak{N}| = \omega_1$, existe un $\gamma < \omega_2$ tal que para todo $N \in \mathfrak{N}$, se tenga que $G_N \in V[G_\gamma]$. Por la proposición 3.15 se tiene que $V[G_{\gamma+1}] \models \bigcup\{G_N : N \in \mathfrak{N}\} \in \mathcal{N}$ y así $V[G] \models \bigcup\{G_N : N \in \mathfrak{N}\} \in \mathcal{N}$. Como $V[G] \models \bigcup \mathfrak{N} \subseteq \bigcup\{G_N : N \in \mathfrak{N}\}$, entonces $V[G] \models \bigcup \in \mathcal{N}$. Por lo tanto $V[G] \models \mathsf{add}(\mathcal{N}) \geq \omega_2$.

Por el teorema 2.13, $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) = \mathsf{non}(\mathbf{Mon})$ y por lo tanto $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{Mon}) < \mathsf{add}(\mathcal{N})$. ❑

Hemos estado usando al ideal **SP** para estudiar al ideal **Mon** gracias al teorema 2.13. Sin embargo, no se sabe que relación se guarda entre $\mathsf{add}(\mathbf{Mon})$ y $\mathsf{add}(\mathbf{SP})$, y entre $\mathsf{cof}(\mathbf{Mon})$ y $\mathsf{cof}(\mathbf{SP})$.

En el primer capítulo se probó que $\mathsf{add}(\mathbf{Mon}) = \omega_1$ y $\mathsf{cof}(\mathbf{Mon}) = \mathfrak{c}$. Por la fuerte relación que tienen **Mon** con **SP**, uno llegaría a pensar que $\mathsf{add}(\mathbf{SP}) = \omega_1$ y $\mathsf{cof}(\mathbf{SP}) = \mathfrak{c}$. Sin embargo, en un trabajo de J. Brendle (véase [**Br1**]), se observa que $\mathsf{add}(\mathbf{UP}) = \omega_1$ y $\mathsf{cof}(\mathbf{UP}) = \mathfrak{c}$ y hemos visto a lo largo del capítulo que **UP** y **SP** tienen propiedades muy distintas. Naturalmente surgen las siguientes preguntas:

¿Es cierto que $\mathsf{add}(\mathbf{Mon}) = \omega_1$? ¿Es cierto que $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}) = \mathfrak{c}$?

Hasta ahora no se ha podido obtener una respuesta a estas preguntas.

En la definición 3.1 se introduce un nuevo ideal que en principio no es claro por que debe tener propiedades distintas al ideal **SP**. Nos preguntamos sobre las diferencias que puede haber entre estos ideales y el ideal **SP**. En principio no es claro el por que, para distintas $m, n \in \omega$, los ideales $\mathbf{SP}_m$ y $\mathbf{SP}_n$ deban ser distintos. En el siguiente capítulo estudiaremos algunas propiedades de estos ideales.

CAPÍTULO 4

El ideal $\mathbf{SP}_k$

En este capítulo mostraremos algunas propiedades del ideal $\mathbf{SP}_k$. Observe que para $m < n$, con $m, n \in \omega$, se tiene que $\mathbf{SP}_m \subseteq \mathbf{SP}_n$ y $\mathbf{SP}_n \subseteq \mathbf{SP}$. Esto nos establece las desigualdades de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_m) \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ y $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}_n) \leq \mathsf{cov}(\mathbf{SP}_m)$. No es claro el por qué estas desigualdades podrían ser estrictas. En el capítulo anterior desarrollamos herramientas que nos ayudarán a construir distintos modelos en donde los valores de estos cardinales sean distintos.

Recordemos el diagrama de Cichoń:

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
& & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
& \mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] & \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathfrak{m}_{\sigma\text{ ligado}} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{m}_{\sigma\text{ centrado}} \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que entre $\mathfrak{m}_{\sigma\text{ ligado}}$ y $\mathfrak{m}_{\sigma\text{ centrado}}$ se encuentran todos los $\mathfrak{m}_{\sigma\ n\text{–ligado}}$. En este capítulo veremos que todos los $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ son más grandes que $\mathfrak{m}_{\sigma\text{ ligado}}$. Con esto y los resultados que están en [**HrZi1**] se muestra que $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ no se puede encajar en el diagrama de Cichoń (es decir, que no es posible comparar $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$ y $\mathfrak{m}_{\sigma\text{ centrado}}$). No sabemos si se pueda encajar algún $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_k)$ en el diagrama.

En la primer sección definiremos un forcing, veremos algunas de sus propiedades y su relación con los resultados del capítulo anterior, además describiremos algunos resultados referentes a los filtros genéricos en ese forcing. Usaremos este forcing para obtener un resultado en ZFC que involucra a algunos números de Martin y el $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. También usaremos este forcing para obtener algunos resultados de consistencia relacionados a los invariantes cardinales del ideal $\mathbf{SP}_n$.

En la segunda sección daremos algunos resultados de consistencia referente a los invariantes cardinales de los ideales $\mathbf{SP}_k$: veremos la consistencia de $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}_n) < \mathfrak{c}$ y la consistencia de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathsf{non}(\mathbf{SP}_m)$, para $n < m$. Concluiremos este trabajo con un par de preguntas relacionadas con los ideales $\mathbf{SP}_k$.

1. Un forcing relacionado a $\mathbf{SP}_k$.

Para poder estudiar las propiedades de los invariantes cardinales de los ideales $\mathbf{SP}_k$, necesitamos a los siguientes forcings.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n^0 = \{\langle s, F\rangle : \quad & \textbf{(a) } s; 2^{<\omega} \to 2^n,\\ & \textbf{(b) } |s| < \omega,\\ & \textbf{(c) } F \in [2^\omega]^{<\omega},\\ & \textbf{(d) } \text{para todo } \sigma \in \mathrm{dom}(s),\ F \cap \langle \sigma\frown s(\sigma)\rangle = \emptyset,\\ & \textbf{(e) } \text{para todo } \sigma \in 2^{<\omega}, \text{ existe } \rho \in 2^n \text{ tal que } F \cap \langle \sigma\frown\rho\rangle = \emptyset\}\end{aligned}$$

donde $\langle s, F\rangle \leq \langle s', F'\rangle$ si y sólo si $s' \subseteq s$ y $F' \subseteq F$. Defina $\mathbb{P}_n = (\mathbb{P}_n^0)^{<\omega}$ con el orden coordenada a coordenada.

Para $F \in [2^\omega]^{<\omega}$, definamos Δ_F como el mínimo nivel en donde todas las funciones de F se han difurcado. Es decir

$$\Delta_F = \min\{i \in \omega : \text{ para todo } x, y \in F,\ \text{si } x\restriction_i = y\restriction_i \text{ entonces } x = y\}$$

En el capítulo anterior, se introduce la definición de lo que significaba que un forcing fuera σ 2^n-ligado y se vieron algunas propiedades relacionadas con la preservación de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. Nos gustaría usar esos resultados, por lo que veremos que este forcing es σ n-ligado, para cierta $n \in \omega$.

Lema 4.1. *Sea $n \in \omega$. Entonces $\mathbb{P}_n^0$ es σ $2^n - 1$-ligado.*

Demostración. Para cada $k \in \omega$, $E \subseteq 2^{<\omega}$ y cada $s; 2^{<\omega} \to 2^n$, defina

$$\mathcal{F}(k, E, s) = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_n^0 : k \geq \Delta_F + n \text{ y } \{x\restriction_k : x \in F\} = E\}.$$

Observe que muchos de estos son conjuntos vacíos, sin embargo no necesitaremos todas las ternas $\langle k, E, s\rangle$ para obtener a $\mathbb{P}_n^0$. Veamos que

$$\mathbb{P}_n^0 = \bigcup\{\mathcal{F}(k, E, s) : k \geq n, E \subseteq 2^k, s; 2^{\leq k-n} \to 2^n\}.$$

Sea $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_n^0$. Sea $t \in \omega$ tal que $\mathrm{dom}(s) \subseteq 2^{\leq t}$. Sea $k = \max\{p, \delta_F\} + n$. Sea $E = \{x\restriction_k : x \in F\}$. Por definición de k, se tiene que $\mathrm{dom}(s) \subseteq 2^{\leq k-n}$ y $k \geq \Delta_F + n$. Por lo tanto $\langle s, F\rangle \in \mathcal{F}(k, E, s)$. Por otro lado, como $k \geq n$, $E \subseteq 2^k$, y $s; 2^{\leq k-n} \to 2^n$, entonces $\mathcal{F}(k, E, s)$ es uno de los elementos a unir y así $\langle s, F\rangle \in \bigcup\{\mathcal{F}(k, E, s) : k \geq n, E \subseteq 2^k, s; 2^{\leq k-n} \to 2^n\}$.

Como la familia $\{\mathcal{F}(k, E, s) : k \geq n, E \subseteq 2^k, s; 2^{\leq k-n} \to 2^n\}$ es numerable, sólo falta ver que cada uno de sus elementos es $2^n - 1$-ligado. Veamos que esto ocurre.

Sea $\mathcal{F}(k, E, s)$ un elemento de dicha familia y sea $\{\langle s, F_i\rangle : 0 < i < 2^n\} \subseteq \mathcal{F}(k, E, s)$. Veamos que $\langle s, \bigcup_{i=1}^{2^n-1} F_i\rangle \in \mathbb{P}_n^0$.

Las propiedades **(a), (b)** y **(c)** claramente se cumplen. Como para cada $\sigma \in \mathrm{dom}(s)$, $F_i \cap \langle \sigma^\frown s(\sigma)\rangle = \emptyset$ entonces para cada $\sigma \in \mathrm{dom}(s)$, $F \cap \langle \sigma^\frown s(\sigma)\rangle = \emptyset$ y por lo tanto **(d)** se cumple. Veamos que **(e)** se cumple.

Sea $\sigma \in 2^{<\omega}$ y sea $m = |\sigma|$. Si no existe $x \in \bigcup_{i=1}^{2^n-1} F_i$ tal que $x\restriction_m = \sigma$, entonces el resultado es cierto. Así que supongamos que existe i y $x \in F_i$ tal que $x\restriction_m = \sigma$. Hay dos casos:

- $m \leq k - n$. En este caso, existe $\rho \in 2^n$ tal que $\langle \sigma^\frown \rho\rangle \cap F_i = \emptyset$. Buscando una contradicción, suponga que existe j y $y \in F_j$ tal que $y \in \langle \sigma^\frown \rho\rangle$. Por definición de E, $y\restriction_k \in E$. Por otro lado, como $E = \{z\restriction_k : z \in F_i\}$, entonces debe existir $z \in F_i$ tal que $z\restriction_k = y\restriction_k$. Como $|\sigma^\frown \rho| \leq k$, entonces $\sigma^\frown \rho \subset y\restriction_k = z\restriction_k$ y así $\langle \sigma^\frown \rho\rangle \cap F_i \neq \emptyset$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $\langle \sigma^\frown \rho\rangle \cap (\bigcup_{i=1}^{2^n-1} F_i) = \emptyset$.
- $m + n > k$. La hipótesis de este caso implica que para todo i, $m > \Delta_{F_i}$ y por lo tanto para todo i, el conjunto $\{x \in F_i : x\restriction_m = \sigma\}$ tiene a lo más un elemento. Como solo hay $2^n - 1$ índices, debe existir $\rho \in 2^n$ tal que, para todo i, $\langle \sigma^\frown \rho\rangle \cap F_i = \emptyset$. Por lo tanto $\langle \sigma^\frown \rho\rangle \cap (\bigcup_{i=1}^{2^n-1} F_i) = \emptyset$.

Por lo tanto **(e)** se cumple y como claramente $\langle s, \bigcup_{i=1}^{2^n-1} F_i\rangle \leq \{\langle s, F_i\rangle : 0 < i < 2^n\}$, entonces se tiene que $\mathcal{F}(k, E, s)$ es $2^n - 1$ ligado. Por lo tanto $\mathbb{P}_n^0$ es un forcing σ $2^n - 1$-ligado. ❑

Como en realidad trabajaremos con el forcing $\mathbb{P}_n$, pondremos énfasis en el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Sea $n \in \omega$. Entonces $\mathbb{P}_n$ es σ $2^n - 1$-ligado.*

Demostración. Claramente el producto finito de forcings σ $2^n - 1$-ligado es σ $2^n - 1$-ligado. De esta afirmación se sigue fácilmente que $\mathbb{P}_n$ es σ $2^n - 1$-ligado. ❑

Más adelante observaremos que este forcing no puede ser σ 2^n-ligado.

Nuestro siguiente objetivo es describir a los filtros genéricos de $\mathbb{P}_n$. Para estudiar a los filtros genéricos, necesitamos saber algunos densos sobre $\mathbb{P}_n$.

Para cada $n \in \omega$ y para cada $x \in 2^\omega$, defina

$$H_x^n = \{p \in \mathbb{P}_n : \text{existe } k \in \omega \text{ y existe } \langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_n^0 \text{ tal que } x \in F \text{ y } p(k) = \langle s, F\rangle\}$$

El siguiente resultado nos asegurará que todos estos conjuntos son densos.

Lema 4.3. *Para todo $n \in \omega$ y para todo $x \in 2^\omega$, H_x^n es denso en $\mathbb{P}_n$*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{P}_n$. Sea $k \in \omega$ tal que $k \notin \mathrm{dom}(f)$. Sea s la función vacía. Defina $f'(j) = f(j)$, si $j \in \mathrm{dom}(f)$, y $f'(k) = \langle s, \{x\}\rangle$. Claramente $f' \in H_x^n$ y $f' \leq f$. ❑

Estos últimos densos nos ayudarán a obtener que ciertos conjuntos en la extensión son elementos del ideal $\mathbf{SP}_n$. Al principio del capítulo 3, en la proposición 3.2 obtuvimos unos conjuntos canónicos, definidos a travez de una función, que generaban a los ideales $\mathbf{SP}_k$. Los siguientes densos nos ayudarán a codificar dichas funciones.

Para cada $k, n \in \omega$ y para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$, defina

$$D^n_{\langle k,\sigma\rangle} = \{p \in \mathbb{P}_n : \text{existe } \langle s, F\rangle \in \mathbb{P}^0_n \text{ tal que } p(n) = \langle s, F\rangle \text{ y } \sigma \in \mathrm{dom}(s)\}.$$

Lema 4.4. *Para todo $n, k \in \omega$ y para todo $\sigma \in 2^{<\omega}$, $D^n_{\langle k,\sigma\rangle}$ es denso en $\mathbb{P}_n$.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{P}_n$. Si $k \notin \mathrm{dom}(f)$, entonces defina $f'(n) = f(n)$ si $n \in \mathrm{dom}(f)$. Considere $s; 2^{<\omega} \to 2^n$ cualquiera tal que $\sigma \in \mathrm{dom}(s)$ y defina $f'(k) = \langle s, \emptyset\rangle$. Claramente $f' \in D^n_{\langle k,\sigma\rangle}$ y $f' \leq f$. Si $k \in \mathrm{dom}(f)$, entonces considere $\langle s, F\rangle$ tal que $f(k) = \langle s, F\rangle$. Sin pérdida de generalidad suponga que $\sigma \notin \mathrm{dom}(s)$. Por la condición **(e)**, existe $\rho \in 2^n$ tal que $F \cap \langle \sigma \cap \rho\rangle = \emptyset$. Defina $s'(x) = s(x)$ si $x \in \mathrm{dom}(s)$ y $s'(\sigma) = \rho$. Claramente $f' \in D^n_{\langle k,\sigma\rangle}$ y $f' \leq f$. ❑

Considere un filtro G sobre $\mathbb{P}_n$ tal que para toda $k \in \omega$ y toda $\sigma \in 2^{<\omega}$, $G \cap D^n_{\langle k,\sigma\rangle} \neq \emptyset$. Para toda $k \in \omega$, se construirá una función $\varphi_k : 2^{<\omega} \to 2^n$. Defina $\varphi_k(\sigma) = \rho$ si y sólo si existe una $p \in G$ y $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}^0_n$ tal que $\sigma \in \mathrm{dom}(s)$, $s(\sigma) = \rho$ y $p(n) = \langle s, F\rangle$. Esta función está bien definida pues G es un filtro y está definida en todo $2^{<\omega}$ pues G intersecta a todos los $D^n_{\langle k,\sigma\rangle}$. El siguiente lema nos dará una propiedad muy importante sobre los filtros genéricos.

Lema 4.5. *Sea G un filtro en $\mathbb{P}_n$ tal que para toda $k \in \omega$ y toda $\sigma \in 2^{<\omega}$, $G \cap D^n_{\langle k,\sigma\rangle} \neq \emptyset$. Sea $X = \{x \in 2^\omega : H^n_x \cap G \neq \emptyset\}$. Entonces $X \subseteq \bigcup_{k\in\omega} X_{\varphi_k}$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como $G \cap H_x \neq \emptyset$, existe $p \in G$ y una $k \in \omega$ tal que $p(k) = \langle s, F\rangle$ y $x \in F$. Veamos que $x \in X_{\varphi_k}$.

Sea $j \in \omega$. Como $G \cap D^n_{\langle k,x\restriction j\rangle} \neq \emptyset$, debe existir $p' \in G$ tal que $p(k) = \langle s', F'\rangle$ y $x\restriction_j \in \mathrm{dom}(s')$. Considere $q \in G$ tal que $q \leq \{p, p'\}$, entonces si $q(k) = \langle s^+, F^+\rangle$ debe ocurrir que $x\restriction_j \in \mathrm{dom}(s^+)$ y $x \in F^+$. Por la propiedad **(d)**, $F^+ \cap \langle x\restriction_j {}^\frown s^+(x\restriction_j)\rangle = \emptyset$. En particular $x \notin F^+ \cap \langle x\restriction_j {}^\frown s^+(x\restriction_j)\rangle$. Como $\varphi_k(x\restriction_k) = s^+(x\restriction_k)$, entonces $x \notin F^+ \cap \langle x\restriction_j {}^\frown \varphi_k(x\restriction_j)\rangle$ y así $x \in X_{\varphi_k}$. ❑

Entonces los filtros genéricos sobre $\mathbb{P}_n$ nos darán conjuntos en el ideal $\mathbf{SP}_k$.

Podremos usar este último lema para obtener un resultado en ZFC el cual involucra al número de Martin de los σ ligados y el cardinal $\mathsf{non}(\mathbf{SP})$.

Corolario 4.6. *Para todo $n \in \omega$ y para todo $k < 2^n$, $\mathfrak{m}_{\sigma\ k\text{-ligado}} \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$.*

Demostración. Sea $X \subseteq 2^\omega$ tal que $|X| < \mathfrak{m}_{\sigma\ k\text{-ligado}}$. Por el corolario 4.2, $\mathbb{P}_n$ es σ k-ligado. Entonces existe G un filtro sobre $\mathbb{P}_n$ tal que, para todo $k \in \omega$ y $\sigma \in 2^{<\omega}$ y para todo $x \in X$, intersecta a $D_{\langle k,\sigma\rangle}$ y a H^n_x. Por el lema 4.5, $X \subseteq \bigcup_{i\in\omega} X_{\varphi_i}$. Por la proposición 3.2, cada X_{φ_i} es un conjunto poroso de grado n y así $X \in \mathbf{SP}_n$. Por lo tanto $\mathfrak{m}_{\sigma\ k\text{-ligado}} \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. ❑

En particular, para cada $n \geq 2$ tenemos que $\mathfrak{m}_{\sigma\ \text{ligado}} \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP})$ y $\mathfrak{m}_{\sigma\ n\text{-ligado}} \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Es lo más que podemos avanzar en ZFC, pues en [**HrZi1**] muestran que es consistente que $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) < \mathfrak{m}_{\sigma\ \text{centrado}}$ y por lo tanto es consistente que, para toda $n \in \omega$, $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathfrak{m}_{\sigma\ \text{centrado}}$. Más aún, en ese mismo artículo se muestra la consistencia de $\mathsf{non}(\mathbf{SP}) > \mathfrak{m}_{\sigma\ \text{centrado}}$ con un filtro genérico sobre un modelo base que satisface $\neg$CH y $MA_{\sigma\ \text{ligado}}$ en un árbol de Suslin. En la extensión $\mathfrak{m}_{\sigma\ \text{centrado}} = \omega_1$ (véase [**HrZi1**]) y $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) > \omega_1$ pues el árbol no agrega reales nuevos y preserva cardinales.

Existe otra aplicación del lema 4.5 la cual nos mostrará que los filtros genéricos de $\mathbb{P}_n$ hacen del modelo base un elemento del ideal $\mathbf{SP}_n$. Este resultado implica que el forcing $\mathbb{P}_n$ no puede ser σ 2^n-ligado.

Corolario 4.7. *Sea $n \in \omega$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_n$ genérico sobre un modelo V. Entonces se tiene que $V[G] \models 2^\omega \cap V \in \mathbf{SP}_n$.*

Demostración. Por genericidad, para todo $k \in \omega$ y $\sigma \in 2^{<\omega}$ y para todo $x \in 2^\omega \cap V$, G intersecta a $D_{\langle k,\sigma\rangle}$ y a H^n_x. Por lo tanto, usando el lema 4.5, se tiene que $V[G] \models 2^\omega \cap V \subseteq \bigcup_{i\in\omega} X_{\varphi_i}$. Por la proposición 3.2, X_{φ_i} es un conjunto poroso de grado n y así $V[G] \models 2^\omega \cap V \in \mathbf{SP}_n$. ❑

Este último resultado nos impone una restricción sobre el corolario 4.2. No podemos mejorar el corolario a hacer los forcings $\mathbb{P}_n$ para que tengan la propiedad de ser σ 2^n-ligados, pues sería una contradicción entre el corolario 4.7 y el lema 3.7.

2. Invariantes cardinales de $\mathbf{SP}_k$.

En esta sección usaremos el forcing $\mathbb{P}_n$ y aplicaremos los resultados de la sección anterior para ver propiedades sobre los invariantes cardinales de los ideales $\mathbf{SP}_k$. En estos resultados usaremos iteraciones con soporte finito del forcing $\mathbb{P}_n$.

Hasta ahora, en este trabajo, no se ha visto ningun resultado relacionado con $\mathsf{cov}(\mathbf{SP})$. En el siguiente resultado mostraremos la existencia de un modelo en donde $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}_n) < \mathfrak{c}$ (y como consecuencia $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}) < \mathfrak{c}$).

Teorema 4.8. *Sea $n \geq 2$. Es consistente con ZFC que $\mathsf{cov}(\mathbf{SP}_n) < \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea V un modelo tal que $V \models \neg CH$. Sea $\mathbb{P} = \{\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \rangle : \alpha < \omega_1\}$ una iteración de soporte finito, donde cada $\mathbb{Q}_\alpha$ es $\mathbb{P}_n$. Por el corolario 4.2, $\mathbb{P}$ es una iteracion de forcings σ ligados. Por lo tanto $\mathbb{P}$ es un forcing c.c.c. y así $V[G] \models \neg CH$. En $V[G]$ considere la familia $C = \{V[G_\alpha] \cap 2^\omega : \alpha < \omega_1\}$. Por el corolario 4.7, $V[G] \models C \subseteq \mathbf{SP}_n$. Veamos que $V[G] \models \bigcup C = 2^\omega$.

Sea $\dot{f}$ un $\mathbb{P}$ nombre para un elemento de 2^ω. Para cada $n \in \omega$, considere A_n, una anticadena maximal en $\mathbb{P}$ tal que decida el valor de $\dot{f}(n)$. Como $\mathbb{P}$ es un forcing c.c.c., entonces cada A_n es a lo más numerable. Como $\mathbb{P}$ es de soporte finito, entonces debe existir $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $n \in \omega$, $A_n \subseteq \mathbb{P}_\alpha$. Por lo tanto $V[G] \models \dot{f} \in 2^\omega \cap V[G_\alpha]$. Por lo tanto $V[G] \models \bigcup C = 2^\omega$.

Con todo esto se tiene que $V[G] \models \mathsf{cov}(\mathbf{SP}_n) < \mathfrak{c}$. ❑

En particular, es consistente con ZFC que $\mathsf{cov}(\mathbf{Mon}) = \mathsf{cov}(\mathbf{SP}) < \mathfrak{c}$.

Ahora estableceremos una importante diferencia entre los ideales $\mathbf{SP}_n$.

Teorema 4.9. *Es consistente con ZFC que* $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathsf{non}(\mathbf{SP}_{n+1})$.

Demostración. Sea V un modelo tal que $V \models CH$. Sea $\mathbb{P} = \{\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \rangle : \alpha < \omega_2\}$ una iteración de soporte finito, donde cada $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es $\mathbb{P}_{n+1}$. Por el lema 3.10 y por el corolario 4.2, $\mathbb{P}$ es una iteración de forcings c.c.c. que preservan fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$. Use la proposición 3.11 para obtener que $\mathbb{P}$ preserva fuertemente $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n)$ y usando la proposición 3.8 se tiene que $V[G] \models V \cap 2^\omega \notin \mathbf{SP}_n$. Como $\mathbb{P}$ preserva cardinales, entonces se tiene que $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) = \omega_1$. Veamos que $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}_{n+1}) = \omega_2$.

Sea $\dot{X}$ un $\mathbb{P}$ nombre para un subconjunto de 2^ω tal que $V[G] \models |\dot{X}| = \omega_1$. Sea $\{\dot{x}_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ un conjunto de $\mathbb{P}$ nombres para los elementos de $\dot{X}$. Para cada $\dot{x} \in \dot{X}$ y para cada $n \in \omega$, considere $A_{\langle \dot{x}, n\rangle}$ una anticadena maximal de $\mathbb{P}$ tal que decida el valor de $\dot{x}(n)$. Como $\mathbb{P}$ es c.c.c. y la iteración es de soporte finito, debe existir $\alpha < \omega_2$ tal que para todo $\dot{x}$ y para todo $n \in \omega$, $A_{\langle \dot{x}, n\rangle} \subseteq \mathbb{P}_\alpha$. Entonces $\dot{X} \in V[G_\alpha]$ y por el corolario 4.7, $V[G] \models \dot{X} \in \mathbf{SP}_{n+1}$. Por lo tanto $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}_{n+1}) = \omega_2$.

Por todo esto, $V[G] \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathsf{non}(\mathbf{SP}_{n+1})$. ❑

Observe que como $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) \leq \mathsf{non}(\mathbf{SP})$, entonces, para cada $n \in \omega$, tambien es consistente con ZFC que $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathsf{non}(\mathbf{SP})$.

A pesar de que hemos podido separar cualesquiera dos de los $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_k)$, no sabemos si es posible separar más de dos (o incluso todos) de estos carinales. No sabemos si es consistente con ZFC que para todo $n < \omega$, $\mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathsf{non}(\mathbf{SP})$. Se concluye este trabajo con unas preguntas para el lector.

¿Existe un modelo $\mathfrak{M}$ y tres números naturales k, n, m tal que $\mathfrak{M} \models \mathsf{non}(\mathbf{SP}_k) < \mathsf{non}(\mathbf{SP}_n) < \mathsf{non}(\mathbf{SP}_m)$?

¿Existe un modelo $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \forall k \in \omega, \mathsf{non}(\mathbf{SP}_k) < \mathsf{non}(\mathbf{SP})$?

Bibliografía

[BaJu1] Bartoszyński, Tomek; Judah, Haim. *Set theory: Structure of the real line*. A. K. Peters, 1995.

[Br1] Brendle, Jörg. *The additivity of porosity ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. 124, no. 1, 1996.

[Fr1] Fremlin, David H. *Measure Theory*, volumen 5. Springer, 2000.

[HrZi1] Hrušák, Michael; Zindulka, Ondřej. *Cardinal invariants of monotone and porous sets*. Por aparecer.

[Ku1] Kunen, Kenneth. *Set theory: An introduction to independence proofs*. Elsevier, 1980.

[NeZi1] Nekvinda, Aleš; Zindulka, Ondřej. *Monotone metric spaces*. Por aparecer, 2010.

[NeZi2] Nekvinda, Aleš; Zindulka, Ondřej. *A Cantor set in the plane that is not σ-monotone*. Fund. Math., por aparecer.

[Ox1] Oxtoby, John C.. *Measure and Cathegory*. Springer, 1980.

[Re1] Repický, Miroslav. *Porous sets and additivity of Lebesgue measure*. Real Anal. Exchange 15, 1989/90.

[Re2] Repický, Miroslav. *Additivity of porous sets*. Real Anal. Exchange 16, 1990/91.

[Re3] Repický, Miroslav. *Cardinal invariants related to porous sets*. Set theory of the reals, Ramat Gan, 1991.

[Za1] Zajíček, L. *Porosity and σ-porosity*, Real Anal. Exchange 13, 1987/88.

[Za2] Zajíček, L. *On σ-porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Anal., no. 5, 2005.

[Zi1] Zindulka, Ondřej. *Universal measure zero, large Hausdorff dimension, and nearly Lipschitz maps*. Fund. Math., por aparecer.