



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

Transformada integral de Fourier de los polinomios de  
 $q$ -Fibonacci y  $q$ -Lucas

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
PEDRO ALBERTO FRANCO CEJÍN

TUTOR:  
DR. NATIG ATAKISHIYEV  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>1. Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1. Series hipergeométricas y $q$ -hipergeométricas. . . . .	1
1.2. Transformada de Fourier. . . . .	2
<b>2. Polinomios de Fibonacci y de Lucas.</b>	<b>4</b>
<b>3. <math>q</math>-extensiones de los polinomios de Fibonacci.</b>	<b>9</b>
<b>4. Transformada de Fourier de <math>F_n(x, s q)</math>.</b>	<b>11</b>
<b>5. <math>q</math>-extensiones de los polinomios de Lucas.</b>	<b>13</b>
<b>6. Transformada de Fourier de <math>L_n(x, s q)</math>.</b>	<b>14</b>
<b>7. Conclusiones.</b>	<b>16</b>
<b>8. Apéndice I.</b>	<b>17</b>
<b>9. Apéndice II.</b>	<b>19</b>

## Introducción

Las funciones especiales aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales, tienen aplicaciones en la Física (por ejemplo en la Mecánica Clásica del siglo XVIII, en Electromagnetismo y Termodinámica del siglo XIX y en la Mecánica Cuántica del siglo XX). Además, las Ingenierías en estos tiempos demandan un conocimiento mayor sobre las Matemáticas aplicadas que antes. Es por esto que es importante entender sus propiedades básicas.

Algunos ejemplos importantes de funciones especiales son los polinomios hipergeométricos clásicos de Jacobi, Laguerre y Hermite, que son soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

El siguiente paso natural fue generalizar los polinomios hipergeométricos clásicos a soluciones de ecuaciones en diferencias finitas. Estas ecuaciones son un caso especial de una relación funcional que podemos escribir como:

$$A(x)f(x+1) + B(x)f(x) + C(x)f(x-1) = 0,$$

donde  $A(x)$ ,  $B(x)$  y  $C(x)$  son polinomios en la variable  $x$  con grado no mayor a dos. Como un ejemplo simple, la función Gamma  $\Gamma(x)$  es solución de una ecuación en diferencias:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

La necesidad de esta generalización viene del uso de las matemáticas aplicadas: muchos sistemas de la física, biología, entre otros, son modelados en términos de ecuaciones en diferencias, en lugar de diferenciales.

De estas generalizaciones vienen algunos polinomios hipergeométricos ortogonales y  $q$ -polinomios hipergeométricos ortogonales, también llamados polinomios hipergeométricos ortogonales básicos, como los polinomios de Charlier  $C_n(x; a)$ , que son solución de la ecuación en diferencias (ver (9.14.5) en p.248 de [1]):

$$-ny(x) = ay(x+1) - (x+a)y(x) + xy(x-1), \quad y(x) = C_n(x; a),$$

y los polinomios de Stieltjes-Wigert  $S_n(x; q)$ , que son solución de la ecuación en  $q$ -diferencias (ver (14.27.5) en p.544 de [1]):

$$-x(1-q^n)y(x) = xy(qx) - (x+1)y(x) + y(q^{-1}x), \quad y(x) = S_n(x; q).$$

El esquema Askey de polinomios hipergeométricos y sus  $q$ -análogos ([2],[1]) reúne el conocimiento que se tiene sobre una gran cantidad de este tipo particular de funciones especiales. Dependiendo del número de parámetros asociados a la familia de polinomios, ésta ocupa diferentes niveles en la jerarquía de Askey. Por ejemplo, los polinomios de Hermite clásicos conocidos  $H_n(x)$

están en el nivel más bajo, mientras que los polinomios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  y los de Charlier  $C_n(x; a)$  están ubicados un nivel más arriba, y así se sigue. Todas las familias de polinomios en éste esquema están caracterizados por unas propiedades “canónicas”: son soluciones de ecuaciones diferenciales o en diferencias de segundo orden, pueden ser generadas por relaciones de recurrencia de tres términos, son ortogonales con respecto a funciones de peso con soporte finito o infinito, tienen fórmulas del tipo de Rodrigues, entre otras. Por supuesto, surgen muchas otras familias de polinomios de interés en el estudio de las Matemáticas aplicadas y puras que no pertenecen al esquema Askey debido a que les faltan algunas de las propiedades antes mencionadas. Este trabajo explorará en detalle dos familias  $q$ -polinomiales de este tipo, los polinomios de  $q$ -Fibonacci (introducidos en [3] y [4]) y los polinomios de  $q$ -Lucas (introducidos en [4] y [5]), que están definidos por una relación de recurrencia de tres términos no convencional. Estos polinomios han sido estudiados en detalle en [6] y tienen varias aplicaciones en el campo de la Física, por ejemplo en el estudio de cadenas diatómicas, en Mecánica Estadística, entre otras.

Los números de Lucas son semejantes a los números de Fibonacci. Cada número de Lucas, al igual que los de Fibonacci, está definido como la suma de sus dos predecesores, es decir, son una sucesión entera de Fibonacci con la diferencia de que los dos primeros números de Lucas son  $L_0 = 2$  y  $L_1 = 1$ , en lugar de 0 y 1 (que son los primeros números de Fibonacci). Esto hace que las propiedades de los números de Lucas sean diferentes que las de los números de Fibonacci.

Estudiamos estos dos polinomios simultáneamente ya que tienen muchas propiedades en común, ésto es debido a que los números de Fibonacci  $F_n$  y los números de Lucas  $L_n$  están muy relacionados (como ya se mencionó ambos tienen la misma relación de recurrencia, pero distintas condiciones iniciales), y esta relación también existe entre los polinomios de Fibonacci  $F_n(x)$  y los polinomios de Lucas  $L_n(x)$  estudiados por Catalan en 1883 y por Bicknell en 1970, respectivamente (ver [10]). Nosotros estudiaremos una variación de estos polinomios definida por J. Cigler, pero que también cuenta con esta relación entre ambos.

En este trabajo repasaremos algunas propiedades de estos polinomios (ver [6]) y nuestro resultado principal, es estudiar estos  $q$ -polinomios al aplicarles la transformada integral de Fourier, y veremos que tienen propiedades de transformación simples, Estos resultados son originales y ya fueron publicados en [22].

En las secciones 2 y 3 daremos algunas propiedades de los polinomios de Fibonacci y de sus  $q$ -extensiones, respectivamente, estas propiedades serán

usadas en la sección 4 para encontrar una forma explícita de la transformada integral de Fourier para los polinomios de  $q$ -Fibonacci.

En las secciones 2 y 5, de una forma semejante hablaremos de propiedades de los polinomios de Lucas y sus  $q$ -extensiones, respectivamente, y análogamente usaremos estas propiedades en la sección 6 para encontrar una forma explícita de la transformada integral de Fourier para las  $q$ -extensiones de los polinomios de Lucas.

En todo el trabajo usaremos la notación estándar de la teoría de las funciones especiales (ver, por ejemplo, [7]-[9]).

# 1. Preliminares.

## 1.1. Series hipergeométricas y $q$ -hipergeométricas.

Se definen las series hipergeométricas por:

$${}_rF_s \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_k}{(b_1, \dots, b_s)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (1)$$

donde

$$(a_1, \dots, a_r)_k := (a_1)_k \cdots (a_r)_k, \quad (2)$$

$$(a)_k := a(a+1)(a+2) \cdots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad (3)$$

mientras que  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  es la función Gamma.

En el caso en el que uno de los parámetros en el numerador  $a_1, a_2, \dots, a_r$  en (1) sea igual a algún entero negativo  $-n$ , entonces la suma sobre  $k$  en (1) tiene solo un número finito de términos distintos de cero y entonces

$${}_rF_s \left( \begin{matrix} -n, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n, a_2, \dots, a_r)_k}{(b_1, \dots, b_s)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (1')$$

representa una serie finita, esto es, (1') es un polinomio de grado  $n$  en la variable  $z$ .

Todas las familias conocidas de polinomios ortogonales tienen expresiones explícitas en términos de los polinomios hipergeométricos del tipo (1'). Por ejemplo, los polinomios de Hermite clásicos conocidos

$$H_n(x) = (2x)^n {}_2F_0 \left( \begin{matrix} -n/2, -(n-1)/2 \\ - \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{x^2} \right),$$

los polinomios de Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_1F_1 \left( \begin{matrix} -n \\ \alpha+1 \end{matrix} \middle| x \right),$$

y los de Charlier

$$C_n(x; a) = {}_2F_0 \left( \begin{matrix} -n, -x \\ - \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{a} \right).$$

Ahora introducimos algunas  $q$ -notaciones estándar, que son  $q$ -extensiones de (2) y (3) (ver [1] y [6]):

$$(a; q)_k := (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{k-1}), \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}},$$

$$[k]_q := \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad [2k - 1]_q!! := \prod_{j=1}^k [2j - 1]_q.$$

Las series  $q$ -hipergeométricas, que son  $q$ -generalizaciones de (1), están definidas por:

$${}_r\phi_s \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_k}{(b_1, \dots, b_s; q)_k} (-1)^{(1+s-r)k} q^{(1+s-r)\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(q; q)_k},$$

donde

$$(a_1, \dots, a_r; q)_k := (a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k, \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}. \quad (4)$$

De forma similar a (1'), tenemos que si uno de los parámetros del numerador  $a_1, a_2, \dots, a_r$  en (4) es igual a  $q^{-n}$ , donde  $n$  es un entero distinto del cero, tenemos que

$$\begin{aligned} & {}_r\phi_s \left( \begin{matrix} q^{-n}, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, a_2, \dots, a_r; q)_k}{(b_1, \dots, b_s; q)_k} (-1)^{(1+s-r)k} q^{(1+s-r)\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(q; q)_k} \end{aligned} \quad (4')$$

representa una serie finita. Entonces (4') es un polinomio de grado  $n$  en la variable  $z$  (ver, por ejemplo, la fórmula (7) en la sección 2).

## 1.2. Transformada de Fourier.

Para una función  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  se define la transformada de Fourier como:

$$\tilde{f}(y) \equiv \mathcal{F}(f(x))(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx.$$

**Propiedades:**

- i) Si  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  y  $a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$ .
- ii) Si  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  y  $a \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{F} \left( a^{-\frac{n}{2}} f \left( \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right) (y)$   
 $= a^{\frac{-n+1}{2}} \mathcal{F}(f(x))(\sqrt{a}y), \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$  (5)

**Demostración:**

$$\begin{aligned} i) \mathcal{F}(af(x) + bg(x))(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} [af(x) + bg(x)] dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(x) dx \\ &= a\mathcal{F}(f(x))(y) + b\mathcal{F}(g(x))(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \mathcal{F}\left(a^{-\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \left[a^{-\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{a}uy} a^{-\frac{n+1}{2}} f(u) du = \frac{a^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(\sqrt{a}y)} f(u) du \\ &= a^{-\frac{n+1}{2}} \mathcal{F}(f(x))(\sqrt{a}y). \end{aligned}$$

## 2. Polinomios de Fibonacci y de Lucas.

Los polinomios de Fibonacci  $F_n(x, s)$  están definidos por la relación de recurrencia de tres términos

$$F_{n+1}(x, s) = xF_n(x, s) + sF_{n-1}(x, s), \quad n \geq 1, \quad (6)$$

con valores iniciales  $F_0(x, s) = 0$  y  $F_1(x, s) = 1$  (ver, por ejemplo, [3, 4]). También se pueden escribir de forma explícita como:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, s) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} s^k x^{n-2k} \\ &= x^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ -n \end{matrix} \middle| -\frac{4s}{x^2} \right), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$  es el coeficiente binomial y  $[x]$  denota el mayor entero menor o igual a  $x$ .

Los polinomios de Fibonacci  $F_n(x, s)$  tienen una función generadora (función cuyos coeficientes de su serie de Taylor son los polinomios) de la forma:

$$f_F(x, s; t) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, s) t^n = \frac{t}{1 - xt - st^2}, \quad |t| < 1, \quad (8)$$

la cual no es difícil de encontrar usando la relación de recurrencia de tres términos (6).

Los polinomios de Fibonacci  $F_n(x, s)$  están normalizados tales que  $F_n(x, 1) = f_n(x)$  (donde  $f_n(x)$  son los polinomios de Fibonacci definidos por Catalan, ver [10], fórmula (37.1) en p.443) y para los valores particulares  $x = s = 1$  la relación (6) genera la sucesión clásica de los números de Fibonacci  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$  y la relación (8) se reduce a la conocida función generadora  $f_F(1, 1; t)$  de los números de Fibonacci  $\{F_n\}$ , que "han sido una fuente de deleite para matemáticos profesionales y amateurs por siete siglos" [11] (ver también [12]-[14]).

Enfatizamos el hecho de que los polinomios de Fibonacci (7) (de grado  $n$  en  $x$  y  $\lfloor n/2 \rfloor$  en  $s$ ) pueden representarse también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, s) &= (2\sqrt{s})^n p_n^{(F)} \left( \frac{x}{2\sqrt{s}} \right), \\ p_n^{(F)}(x) &:= x^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ -n \end{matrix} \middle| -\frac{1}{x^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

entonces las propiedades fundamentales de  $F_n(x, s)$  están definidas básicamente por los polinomios  $p_n^{(F)}(x)$ . Además, tenemos que los polinomios  $p_n^{(F)}(x)$  son esencialmente los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(z)$  con un argumento imaginario  $z \in \mathbb{C}$  (ver p.449 en [10]). En efecto, recordar que los polinomios de Chebyshev  $U_n(z)$  tienen una representación explícita (ver (23) en la p.185 de [15]):

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2z)^{n-2k}. \quad (10)$$

Por tanto, de (7), (9) y (10) con facilidad se deduce que

$$F_{n+1}(x, s) = (-i\sqrt{s})^n U_n(ix/2\sqrt{s}) \quad (11)$$

y, entonces,  $p_n^{(F)}(x) = (-i/2)^n U_n(ix)$ . Observemos que, de la relación de recurrencia de tres términos

$$2zU_n(z) = U_{n+1}(z) + U_{n-1}(z) \quad (12)$$

para los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(z)$  se sigue que

$$p_{n+1}^{(F)}(x) = xp_n^{(F)}(x) + \frac{1}{4}p_{n-1}^{(F)}(x), \quad n \geq 1, \quad (13)$$

con valores iniciales  $p_0^{(F)}(x) = 1$  y  $p_1^{(F)}(x) = x$ . Los coeficientes en la relación de recurrencia de tres términos (13) son  $A_n = 1$  y  $C_n = -1/4$ ; por lo tanto no satisfacen la condición  $A_n C_{n+1} > 0$  del teorema de caracterización de Favard (ver, por ejemplo, (7.1.5) en la p.175 en [7]). Esto significa que no existe una única medida ortogonal positiva para los polinomios  $p_n^{(F)}(x)$ .

En este momento vale la pena destacar que hay al menos tres consecuencias directas de la conexión (11) entre los polinomios de Fibonacci  $F_{n+1}(x, s)$  y los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(ix/2\sqrt{s})$ .

Primero, como los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(z)$  pueden ser expresados en términos de los polinomios hipergeométricos  ${}_2F_1$  como (ver, por ejemplo, 9.8.36 en [1]):

$$U_n(z) = (n+1) {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right), \quad (14)$$

entonces (11) es consistente con la segunda línea en (7) sólo si la fórmula de transformación

$$(n+1) {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) = (2z)^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ -n \end{matrix} \middle| -\frac{1}{z^2} \right) \quad (15)$$

es válida. Para asegurar que (15) se cumpla, daremos una prueba directa de esta identidad en el Apéndice 1.

Segundo, dado que los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(x)$  satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden (ver (9.8.44) en [1])

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 3x \frac{d}{dx} + n(n+2) \right] U_n(x) = 0, \quad (16)$$

uno deduce con facilidad que

$$\left[ (1+x^2) \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx} \right] p_n^{(F)}(x) = n(n+2)p_n^{(F)}(x). \quad (17)$$

Tercero, se sabe que la función generadora de los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(x)$  es de la forma (ver (9.8.56) en [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1-2xt+t^2}, \quad |t| < 1, \quad (18)$$

así que si combinamos (11) con (18), esto nos lleva al mismo resultado que en (8).

Los polinomios de Lucas  $L_n(x, s)$  para  $n \geq 3$  están definidos por la relación de recurrencia de tres términos

$$L_{n+1}(x, s) = xL_n(x, s) + sL_{n-1}(x, s), \quad n \geq 2, \quad (19)$$

con valores iniciales  $L_0(x, s) = 1$ ,  $L_1(x, s) = x$  y  $L_2(x, s) = x^2 + 2s$  [6]. También se pueden escribir de forma explícita como:

$$\begin{aligned} L_n(x, s) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} s^k x^{n-2k} \\ &= x^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ 1-n \end{matrix} \middle| -\frac{4s}{x^2} \right), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Los polinomios de Lucas  $L_n(x, s)$  tienen una función generadora de la forma:

$$f_L(x, s; t) := \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, s) t^n = \frac{1+st^2}{1-xt-st^2}, \quad |t| < 1. \quad (21)$$

Para obtener (21), multiplicar ambos lados de (19) por  $t^{n+1}$  y sumar con respecto al índice  $n$  de  $n = 2$  hasta infinito tomando en cuenta los valores iniciales  $L_0(x, s)$ ,  $L_1(x, s)$  y  $L_2(x, s)$ .

Los polinomios de Lucas  $L_n(x, s)$  están normalizados tales que  $L_n(x, 1) = l_n(x)$  (donde  $l_n(x)$  son los polinomios de Lucas estudiados por Bicknell, ver p.459 en [10]) y para los valores particulares  $x = s = 1$  la sucesión  $\{L_n(1, 1)\}_{n=1}^{\infty}$  reproduce los números de Lucas  $\{L_n\} \equiv \{1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots\}$  y la relación (21) se reduce a la función generadora  $f_L(1, 1; t)$  de éstos números  $\{L_n\}$  (ver [14] para aplicaciones de los números de Lucas y [13] para generalizaciones de los polinomios de Lucas).

Enfatizamos el hecho de que los polinomios de Lucas (20) (de grado  $n$  en  $x$  y  $[n/2]$  en  $s$ ) pueden representarse también de la siguiente forma:

$$L_n(x, s) = s^{n/2} p_n^{(L)} \left( \frac{x}{\sqrt{s}} \right),$$

$$p_n^{(L)}(x) := x^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ 1-n \end{matrix} \middle| -\frac{4}{x^2} \right), \quad (22)$$

de modo que las propiedades fundamentales de  $L_n(x, s)$  están definidas básicamente por los polinomios  $p_n^{(L)}(x)$ . Además, tenemos que los polinomios  $p_n^{(L)}(x)$  son de hecho los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(z)$  con un argumento imaginario  $z \in \mathbb{C}$ . En efecto, recordar que los polinomios de Chebyshev  $T_n(z)$  tienen una representación explícita (ver (23) en la p.185 de [15]):

$$T_n(z) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2z)^{n-2k}$$

$$\equiv 2^{n-1} z^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ 1-n \end{matrix} \middle| \frac{1}{z^2} \right), \quad n \geq 1. \quad (23)$$

Por tanto, de (20), (22) y (23) se sigue que

$$L_0(x, s) = 1, \quad L_n(x, s) = 2(-i\sqrt{s})^n T_n(ix/2\sqrt{s}), \quad n \geq 1, \quad (24)$$

y, entonces,  $p_0^{(L)}(x) = 1$ ,  $p_n^{(L)}(x) = 2(-i)^n T_n(ix/2)$ ,  $n \geq 1$ . Observemos que, de (22), (24) y la relación de recurrencia de tres términos

$$2zT_n(z) = T_{n+1}(z) + T_{n-1}(z) \quad (25)$$

para los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(z)$  se sigue que

$$p_{n+1}^{(L)}(x) = x p_n^{(L)}(x) + p_{n-1}^{(L)}(x), \quad n \geq 1, \quad (26)$$

con valores iniciales  $p_0^{(L)}(x) = 1$  y  $p_1^{(L)}(x) = x$ . Los coeficientes en la relación de recurrencia de tres términos (26) son  $A_n = -C_n = 1$ ; por lo tanto no

satisfacen la condición  $A_n C_{n+1} > 0$  del teorema de caracterización de Favard (ver, por ejemplo, (7.1.5) en la p.175 en [7]). Esto significa que no existe una única medida ortogonal positiva para los polinomios  $p_n^{(L)}(x)$ .

De la misma forma en la que, de la relación (11) entre los polinomios de Fibonacci  $F_{n+1}(x, s)$  y los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_n(ix/2\sqrt{s})$  obteníamos al menos tres consecuencias, podemos observar que la relación (24) entre los polinomios de Lucas  $L_n(x, s)$  y los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(ix/2\sqrt{s})$  nos da tres consecuencias análogas.

Primero, como los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(z)$  pueden ser expresados en términos de los polinomios hipergeométricos  ${}_2F_1$  como (ver, por ejemplo, 9.8.35 en [1]):

$$T_n(z) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right), \quad (27)$$

entonces (24) es consistente con la segunda línea en (20) sólo si la fórmula de transformación

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) = 2^{n-1} z^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ 1-n \end{matrix} \middle| \frac{1}{z^2} \right) \quad (28)$$

es válida. Daremos una prueba directa de esta identidad en el Apéndice 2.

Segundo, dado que los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(x)$  satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden (ver (9.8.43) en [1])

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} + n^2 \right] T_n(x) = 0, \quad (29)$$

de la relación  $p_n^{(L)}(x) = 2(-i)^n T_n(ix/2)$  se sigue que

$$\left[ (4+x^2) \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} \right] p_n^{(L)}(x) = n^2 p_n^{(L)}(x). \quad (30)$$

Tercero, se sabe que la función generadora de los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(x)$  es de la forma (ver (9.8.50) en [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2}, \quad |t| < 1, \quad (31)$$

asi que si combinamos (24) con (31), esto nos lleva al mismo resultado que en (21).

### 3. $q$ -extensiones de los polinomios de Fibonacci.

Cigler definió en [3, 4] un  $q$ -análogo natural de los polinomios de Fibonacci  $F_n(x, s)$ , que satisfacen la relación de recurrencia de tres términos no estándar

$$F_{n+1}(x, s|q) = [x + (q-1)s\mathcal{D}_q] F_n(x, s|q) + sF_{n-1}(x, s|q), \quad n \geq 1, \quad (32)$$

con valores iniciales  $F_0(x, s|q) = 0$  y  $F_1(x, s|q) = 1$ , y donde el operador de  $q$ -diferencia de Hahn  $\mathcal{D}_q$  está definido por

$$\mathcal{D}_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}. \quad (33)$$

Los polinomios de  $q$ -Fibonacci  $F_n(x, s|q)$  se pueden escribir de forma explícita como

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, s|q) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q s^k x^{n-2k} \\ &= x^n {}_4\phi_1 \left( \begin{matrix} q^{-n/2}, q^{(1-n)/2}, -q^{-n/2}, -q^{(1-n)/2} \\ q^{-n} \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^n s}{x^2} \right), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (34)$$

donde  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  denota al coeficiente  $q$ -binomial

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad (35)$$

y  $(z; q)_n$  es el  $q$ -factorial, esto es,  $(z; q)_0 = 1$ ,  $(z; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - zq^k)$  para  $n \geq 1$ .

Una  $q$ -extensión de la función generadora  $f_F(x, s; t)$  asociada a los polinomios de  $q$ -Fibonacci  $F_n(x, s|q)$  es de la forma (cf. (7))

$$\begin{aligned} f_F(x, s; t|q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, s|q) t^n = \frac{t}{1-xt} {}_1\phi_1 \left( \begin{matrix} q \\ qxt \end{matrix} \middle| q; -qst^2 \right) \\ &= t {}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} -\frac{qst}{x}, q \\ 0 \end{matrix} \middle| q; xt \right), \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (36)$$

El tener estas dos expresiones equivalentes en términos de las funciones hipergeométricas básicas, ya sea  ${}_1\phi_1$  o  ${}_2\phi_1$ , es completamente consistente con un caso límite de la fórmula de transformación de Heine (ver [1], fórmula (1.13.13) en la p.20)

$${}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ 0 \end{matrix} \middle| q; z \right) = \frac{(bz; q)_\infty}{(z; q)_\infty} {}_1\phi_1 \left( \begin{matrix} b \\ bz \end{matrix} \middle| q; az \right)$$

con  $a = -qst/x$ ,  $b = q$  y  $z = xt$  (esto significa que el cociente  $(bz; q)_\infty / (z; q)_\infty$  se reduce en este caso al factor  $1/(1 - z) = 1/(1 - xt)$  ).

Observemos que los polinomios de  $q$ -Fibonacci  $F_n(x, s|q)$  están definidos de tal manera que en el límite cuando  $q \rightarrow 1$  se reducen a los polinomios de Fibonacci  $F_n(x, s)$ ,

$$F_n(x, s|1) \equiv \lim_{q \rightarrow 1} F_n(x, s|q) = F_n(x, s), \quad (37)$$

y la función generadora (36) para  $F_n(x, s|q)$  coincide entonces en este límite con (8), que es la función generadora asociada a los polinomios  $F_n(x, s)$ .

## 4. Transformada de Fourier de $F_n(x, s|q)$ .

En esta sección calcularemos la forma explícita de la transformada integral de Fourier clásica de los polinomios de  $q$ -Fibonacci  $F_n(x, s|q)$ . Para poder obtener este resultado, tenemos que observar como se transforma esta familia de polinomios con respecto al cambio  $q \rightarrow 1/q$ . Si reescribimos la ecuación (34) para  $F_n(x, s|q)$  como

$$F_{n+1}(x, s|q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{n,k}^{(F)}(q) s^k x^{n-2k}, \quad (38)$$

entonces los coeficientes en (38) son:

$$c_{n,k}^{(F)}(q) := q^{k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q. \quad (39)$$

De la definición del coeficiente  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  en (35) no es difícil obtener una fórmula de inversión

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q} = q^{k(k-n)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \quad (40)$$

con respecto al cambio  $q \rightarrow 1/q$ . Entonces, se sigue de (39) y (40) que

$$c_{n,k}^{(F)}(q^{-1}) = q^{k(k-n-1)} c_{n,k}^{(F)}(q). \quad (41)$$

Esto significa que (*cf.* (34))

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, s|q^{-1}) &\equiv \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{n,k}^{(F)}(q^{-1}) s^k x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k(k-n-1)} c_{n,k}^{(F)}(q) s^k x^{n-2k} \\ &= x^n {}_4\phi_3 \left( \begin{matrix} q^{-n/2}, q^{(1-n)/2}, -q^{-n/2}, -q^{(1-n)/2} \\ q^{-n}, 0, 0 \end{matrix} \middle| q; -\frac{s}{qx^2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

El siguiente paso es usar la transformada de Fourier aplicada a la función exponencial de Gauss  $e^{-x^2/2}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2}$$

para determinar la transformada integral de Fourier de la función exponencial  $\exp[i(n-2k)\kappa x - x^2/2]$ . Esto da

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy+i(n-2k)\kappa x-x^2/2} dx &= \sqrt{2\pi} e^{-[y+(n-2k)\kappa]^2/2} \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} q^{k(k-n)} e^{-(n-2k)\kappa y - y^2/2}, \end{aligned} \quad (43)$$

donde  $q = e^{-2\kappa^2}$ .

Ahora podemos enunciar y demostrar el siguiente corolario:

**Corolario 4.1:** *La transformada integral de Fourier clásica de los polinomios de  $q$ -Fibonacci  $F_{n+1}(ae^{i\kappa x}, s|q)$  multiplicados por la función exponencial de Gauss  $e^{-x^2/2}$  tiene la forma:*

$$\int_{\mathbb{R}} F_{n+1}(ae^{i\kappa x}, s|q) e^{ixy-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} F_{n+1}(ae^{-\kappa y}, qs|q^{-1}) e^{-y^2/2}, \quad (44)$$

donde  $a$  es una constante arbitraria.

*Demostración:* Usando la primera línea de la ecuación (34) y después la transformada (43) evaluamos paso a paso y obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} F_{n+1}(ae^{i\kappa x}, s|q) e^{ixy-x^2/2} dx \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^{(F)}(q) s^k a^{n-2k} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy+i(n-2k)\kappa x-x^2/2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} e^{-y^2/2} \sum_{k=0}^{[n/2]} q^{k(k-n)} c_{n,k}^{(F)}(q) s^k (ae^{-\kappa y})^{n-2k} \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} e^{-y^2/2} \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^{(F)}(q^{-1}) (qs)^k (ae^{-\kappa y})^{n-2k} \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} F_{n+1}(ae^{-\kappa y}, qs|q^{-1}) e^{-y^2/2}, \end{aligned}$$

usando en el penúltimo paso la relación (41) entre los coeficientes  $c_{n,k}^{(F)}(q)$  y  $c_{n,k}^{(F)}(q^{-1})$ . Esto completa la prueba de (44).

## 5. $q$ -extensiones de los polinomios de Lucas.

En [4, 5] se introdujo una  $q$ -extensión de los polinomios de Lucas  $L_n(x, s)$  como

$$L_n(x, s|q) = L_n(x + (q - 1)s\mathcal{D}_q, s), \quad (45)$$

donde  $\mathcal{D}_q$  es el operador de  $q$ -diferencia de Hahn, y está definido por (33). De (19) se sigue que estos polinomios de  $q$ -Lucas (45) satisfacen la siguiente relación de recurrencia no convencional

$$L_{n+1}(x, s|q) = [x + (q - 1)s\mathcal{D}_q] L_n(x, s|q) + sL_{n-1}(x, s|q), \quad n \geq 2, \quad (46)$$

con valores iniciales  $L_0(x, s|q) = 1$ ,  $L_1(x, s|q) = x$  y  $L_2(x, s|q) = x^2 + (1 + q)s$ . También se pueden escribir de forma explícita como:

$$\begin{aligned} L_n(x, s|q) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k(k-1)/2} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q s^k x^{n-2k} \\ &= x^n {}_4\phi_1 \left( \begin{matrix} q^{-n/2}, q^{(1-n)/2}, -q^{-n/2}, -q^{(1-n)/2} \\ q^{1-n} \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^n s}{x^2} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

donde  $[n]_q := (1 - q^n)/(1 - q)$  y el símbolo  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  denota al coeficiente  $q$ -binomial, definido en (35).

Una  $q$ -extensión de la función generadora  $f_L(x, s; t)$  asociada a los polinomios de  $q$ -Lucas  $L_n(x, s|q)$  es de la forma (cf. (20))

$$\begin{aligned} f_L(x, s; t|q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, s|q) t^n = \frac{1 + st^2}{1 - xt} {}_1\phi_1 \left( \begin{matrix} q \\ qxt \end{matrix} \middle| q; -qst^2 \right) \\ &= (1 + st^2) {}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} -\frac{qst}{x}, q \\ 0 \end{matrix} \middle| q; xt \right), \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (48)$$

El tener estas dos expresiones equivalentes (48) en términos de las funciones hipergeométricas básicas  ${}_1\phi_1$  o  ${}_2\phi_1$ , es completamente consistente con un caso límite de la fórmula de transformación de Heine (ver [1], fórmula (1.13.13) en la p.20)

$${}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ 0 \end{matrix} \middle| q; z \right) = \frac{(bz; q)_{\infty}}{(z; q)_{\infty}} {}_1\phi_1 \left( \begin{matrix} b \\ bz \end{matrix} \middle| q; az \right)$$

con  $a = -qst/x$ ,  $b = q$  y  $z = xt$  (esto significa que el cociente  $(bz; q)_{\infty}/(z; q)_{\infty}$  se reduce simplemente al factor  $1/(1 - z) = 1/(1 - xt)$ ).

Observemos que los polinomios de  $q$ -Lucas  $L_n(x, s|q)$  están definidos de tal manera que en el límite cuando  $q \rightarrow 1$  se reducen a los polinomios de Lucas  $L_n(x, s)$  (20), y la función generadora (48) para  $L_n(x, s|q)$  coincide entonces en este límite con (21), que es la función generadora asociada a los polinomios  $L_n(x, s)$ .

## 6. Transformada de Fourier de $L_n(x, s|q)$ .

En esta sección calcularemos la forma explícita de la transformada integral de Fourier clásica de los polinomios de  $q$ -Lucas  $L_n(x, s|q)$ . Para poder obtener este resultado, tenemos que observar como se transforma esta familia de polinomios con respecto al cambio  $q \rightarrow 1/q$ . Si reescribimos la ecuación (47) para  $L_n(x, s|q)$  como

$$L_n(x, s|q) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^{(L)}(q) s^k x^{n-2k}, \quad (49)$$

entonces los coeficientes en (49) son:

$$c_{n,k}^{(L)}(q) := q^{k(k-1)/2} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q. \quad (50)$$

De las definiciones del símbolo  $[n]_q$  en (47) es fácil obtener la siguiente fórmula de inversión

$$[n]_{1/q} = q^{1-n} [n]_q \quad (51)$$

con respecto al cambio  $q \rightarrow 1/q$ . Entonces, se sigue de (50), (51) y la fórmula de inversión (40) que

$$c_{n,k}^{(L)}(q^{-1}) = q^{k(k-n)} c_{n,k}^{(L)}(q). \quad (52)$$

Esto significa que (*cf.* (47))

$$\begin{aligned} L_n(x, s|q^{-1}) &\equiv \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^{(L)}(q^{-1}) s^k x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} q^{k(k-n)} c_{n,k}^{(L)}(q) s^k x^{n-2k} \\ &= x^n {}_4\phi_3 \left( \begin{matrix} q^{-n/2}, q^{(1-n)/2}, -q^{-n/2}, -q^{(1-n)/2} \\ q^{1-n}, 0, 0 \end{matrix} \middle| q; -\frac{qs}{x^2} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Ahora, utilizando los resultados obtenidos en (43) para la transformada integral de Fourier de la función exponencial  $\exp[i(n-2k)\kappa x - x^2/2]$ , podemos enunciar y demostrar el siguiente corolario:

**Corolario 4.2:** *La transformada integral de Fourier clásica de los polinomios de  $q$ -Lucas  $L_n(be^{i\kappa x}, s|q)$  multiplicados por la función exponencial de Gauss  $e^{-x^2/2}$  tiene la forma:*

$$\int_{\mathbb{R}} L_n (be^{i\kappa x}, s|q) e^{ixy-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} L_n (be^{-\kappa y}, s|q^{-1}) e^{-y^2/2}, \quad (54)$$

donde  $b$  es una constante arbitraria.

*Demostración:* Empezamos con la primera línea de la ecuación (47) y después usamos la transformada (43) para mostrar que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} L_{n+1} (be^{i\kappa x}, s|q) e^{ixy-x^2/2} dx \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^{(L)}(q) s^k b^{n-2k} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy+i(n-2k)\kappa x-x^2/2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} e^{-y^2/2} \sum_{k=0}^{[n/2]} q^{k(k-n)} c_{n,k}^{(L)}(q) s^k (be^{-\kappa y})^{n-2k} \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} e^{-y^2/2} \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^{(L)}(q^{-1}) s^k (be^{-\kappa y})^{n-2k} \\ &= \sqrt{2\pi} q^{n^2/4} L_n (be^{-\kappa y}, s|q^{-1}) e^{-y^2/2}, \end{aligned}$$

usando en el penúltimo paso la relación (52) entre los coeficientes  $c_{n,k}^{(L)}(q)$  y  $c_{n,k}^{(L)}(q^{-1})$ . Esto completa la prueba de (54).

## 7. Conclusiones.

En resumen, hemos estudiado las propiedades bajo la transformada de Fourier de los polinomios de  $q$ -Fibonacci y  $q$ -Lucas, que están dados por las relaciones de recurrencia de tres términos no convencionales (32) y (46), respectivamente. En particular, se demostró que estas familias de polinomios exhiben un comportamiento simple (44) y (54) al aplicarles la transformada integral clásica de Fourier.

De hecho, si aplicamos la transformada finita (discreta) de Fourier a los polinomios de  $q$ -Fibonacci su comportamiento es similar al que presentan éstos polinomios al aplicarles la transformada integral clásica de Fourier (ver [17]-[21]).

Podemos utilizar las técnicas empleadas por Mehta-Dahlquist-Matveev (ver [17]-[21]) para probar que la transformada de Fourier (54) tiene un comportamiento similar al de los polinomios de  $q$ -Lucas con respecto a la transformada discreta de Fourier. No entraremos en detalles en este tema.

Es de considerable interés investigar si existen otras familias de  $q$ -polinomios que estén definidas por relaciones de recurrencia de tres términos no convencionales (como (32) y (46)) y que también se comporten de forma simple bajo la transformada integral clásica de Fourier.

Los resultados obtenidos en esta tesis fueron publicados en [22].

## 8. Apéndice I.

Vamos a dar una prueba directa de la fórmula de transformación

$$(n+1) {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) = (2z)^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ -n \end{matrix} \middle| \frac{1}{z^2} \right), \quad (55)$$

que fue enunciada en la sección 2. Para esto empezaremos con la definición del  ${}_2F_1$ -polinomio hipergeométrico que está del lado izquierdo de (55) y evaluamos, usando la relación  $(-n)_k = (-1)^k n! / (n-k)!$ :

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) &:= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+2)_k (1-z)^k}{(3/2)_k 2^k k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (n+2)_k}{2^k (3/2)_k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-z)^l. \end{aligned} \quad (56)$$

El siguiente paso es cambiar el orden de la suma en (56) con respecto a los índices  $k$  y  $l$ , lo que lleva a la ecuación:

$$\begin{aligned} &{}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \\ &= \frac{\Gamma(3/2)}{n+1} \sum_{l=0}^n \frac{\Gamma(2n+2-l)}{\Gamma(n-l+3/2) l! (n-l)!} \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k (2n+2-l)_k}{(n-l+3/2)_k} \frac{1}{2^l l!}. \end{aligned} \quad (57)$$

La suma sobre  $k$  en (57) representa al polinomio hipergeométrico

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -l, 2n+2-l \\ n-l+3/2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

con un valor especial en la variable  $x = 1/2$ , el cual puede evaluarse usando el segundo teorema de suma de Gauss (ver, por ejemplo, (1.7.1.9) en la p.32 en [16])

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 2a, 2b \\ a+b+1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}, \\ &a+b+1/2 \neq -m, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (58)$$

con  $a = -l/2$  y  $b = n+1-l/2$  (tal que  $a+b+1/2 = n-l+3/2 \geq 3/2$  para toda  $0 \leq l \leq n$ ). La suma sobre  $k$  se reduce entonces a

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -l, 2n+2-l \\ n-l+3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n-l+3/2)}{\Gamma((2n-l+3)/2)\Gamma((1-l)/2)}. \quad (59)$$

Como la función gamma  $\Gamma(z)$  tiene polos en los puntos  $z = -n$ ,  $n \geq 0$ , el lado derecho de la ecuación (59) es cero para todos los valores impares del índice  $l$  debido a la presencia del factor  $\Gamma((1-l)/2)$  en el denominador. Esto quiere decir que sólo los términos con  $l$  par nos dan una contribución distinta de cero en la suma sobre éste índice en la ecuación (57), esto es:

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{\Gamma(2n+2-2m)}{\Gamma(n-m+3/2)\Gamma(1/2-m)} \frac{(z/2)^{n-2m}}{(n-2m)!(2m)!} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{(n+1)} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(\frac{n+1}{2}-m)\Gamma(\frac{n}{2}+1-m)} \frac{(-1)^m z^{n-2m}}{m!}, \tag{60}
\end{aligned}$$

donde en el último paso utilizamos la fórmula de duplicación

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \tag{61}$$

para la función gamma  $\Gamma(z)$  y la relación

$$\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2-m) = \pi / \cos m\pi = (-1)^m \pi.$$

Para finalizar, basta usar la identidad  $\Gamma(z+1-n) = (-1)^n \Gamma(z+1)/(-z)_n$  y de nuevo la fórmula de duplicación (61) para mostrar que

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-\frac{n}{2})_m (\frac{1-n}{2})_m}{(-n)_m} \frac{z^{n-2m}}{m!} \\
&= \frac{2^n}{n+1} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-\frac{n}{2})_m (\frac{1-n}{2})_m}{(-n)_m} \frac{z^{n-2m}}{m!} \\
&= \frac{(2z)^n}{n+1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ -n \end{matrix} \middle| \frac{1}{z^2} \right). \tag{62}
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la fórmula de transformación (55).

## 9. Apéndice II.

Vamos a dar una prueba directa de la fórmula de transformación

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) = 2^{n-1} z^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ 1-n \end{matrix} \middle| \frac{1}{z^2} \right), \quad (63)$$

que fue enunciada en la sección 2. Para esto empezaremos con la definición del  ${}_2F_1$ -polinomio hipergeométrico que está del lado derecho de (63) y evaluamos, usando la relación  $(-n)_k = (-1)^k n! / (n-k)!$ :

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) &:= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{(1/2)_k} \frac{(1-z)^k}{2^k k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (n)_k}{2^k (1/2)_k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-z)^l. \end{aligned} \quad (64)$$

El siguiente paso es cambiar el orden de la suma en (64) con respecto a los índices  $k$  y  $l$ , lo que lleva a la relación:

$$\begin{aligned} &{}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \\ &= n\Gamma(1/2) \sum_{l=0}^n \frac{\Gamma(2n-l)}{\Gamma(n-l+1/2)} \frac{(z/2)^{n-l}}{l!(n-l)!} \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k (2n-l)_k}{(n-l+1/2)_k} \frac{1}{2^k k!}. \end{aligned} \quad (65)$$

La suma sobre  $k$  en (65) representa al polinomio hipergeométrico

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -l, 2n-l \\ n-l+1/2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

con un valor especial de la variable  $x = 1/2$ , el cual puede evaluarse usando el segundo teorema de suma de Gauss (ver, por ejemplo, (1.7.1.9) en la p.32 en [16])

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 2a, 2b \\ a+b+1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}, \\ &a+b+1/2 \neq -m, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (66)$$

con  $a = -l/2$  y  $b = n-l/2$  (tal que  $a+b+1/2 = n-l+1/2 \geq 1/2$  para toda  $0 \leq l \leq n$ ). La suma sobre  $k$  se reduce entonces a

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -l, 2n-l \\ n-l+1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n-l+1/2)}{\Gamma((2n-l+1)/2)\Gamma((1-l)/2)}. \quad (67)$$

Como la función gamma  $\Gamma(z)$  tiene polos en los puntos  $z = -n$ ,  $n \geq 0$ , el lado derecho de la ecuación (67) es cero para todos los valores impares del índice  $l$  debido a la presencia del factor  $\Gamma((1-l)/2)$  en el denominador. Esto quiere decir que sólo los términos con  $l$  par nos dan una contribución distinta de cero en la suma sobre éste índice en la ecuación (65), esto es:

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \\
& n\pi \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{\Gamma(2n-2m)}{\Gamma(n-m+1/2)\Gamma(1/2-m)} \frac{(z/2)^{n-2m}}{(n-2m)!(2m)!} \\
& \frac{n}{2} \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(\frac{n+1}{2}-m)\Gamma(\frac{n}{2}+1-m)} \frac{(-1)^m z^{n-2m}}{m!}, \tag{68}
\end{aligned}$$

donde en el último paso utilizamos la fórmula de duplicación

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \tag{69}$$

para la función gamma  $\Gamma(z)$  y la relación

$$\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2-m) = \pi / \cos m\pi = (-1)^m \pi.$$

Para finalizar, basta usar la identidad  $\Gamma(z+1-n) = (-1)^n \Gamma(z+1)/(-z)_n$  y de nuevo la fórmula de duplicación (69) para mostrar que

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) \\
& = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-\frac{n}{2})_m (\frac{1-n}{2})_m}{(1-n)_m} \frac{z^{n-2m}}{m!} \\
& = 2^{n-1} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-\frac{n}{2})_m (\frac{1-n}{2})_m}{(1-n)_m} \frac{z^{n-2m}}{m!} \\
& = 2^{n-1} z^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ 1-n \end{matrix} \middle| -\frac{1}{z^2} \right). \tag{70}
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la fórmula de transformación (63).

## Referencias

- [1] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw. **Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their  $q$ -Analogues**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] R. Askey and J. Wilson. **Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials**, *Memoirs of the AMS*, Vol. **54**, No. 319, 1985.
- [3] J. Cigler.  $q$ -Fibonacci polynomials, *Fibonacci Quarterly*, **41**, No.1, 31-40, 2003.
- [4] J. Cigler. A new class of  $q$ -Fibonacci polynomials, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **10**, No.1, #R19, 1-15, 2003.
- [5] J. Cigler.  $q$ -Lucas polynomials and associated Rogers–Ramanujan type identities, arXiv:09070165v1, 2009.
- [6] J. Cigler and J. Zeng. A curious  $q$ -analogue of Hermite polynomials, *Journal of Combinatorial Theory A*, **118**, No.1, 9-26, 2011.
- [7] G. Gasper and M. Rahman. *Basic Hypergeometric Functions*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [8] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy. *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [9] M. E. H. Ismail. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [10] T. Koshy. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [11] L. Bers and F. Karal. *Calculus*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [12] R. A. Dunlap. **The Golden Ratio and Fibonacci Numbers**, World Scientific, Singapore, 2006.
- [13] A. Nalli and P. Haukkanen. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, *Chaos, Solitons and Fractals*, **42**, No.5, 3179–3186, 2009.

- [14] A. Stakhov and S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem: Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry, *Applied Mathematics*, Vol.2, No.1, pp.74–84, 2011; Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar’s Geometry), *Applied Mathematics*, Vol.2, No.2, pp.181–188, 2011; Part III. An Original Solution of Hilbert’s Fourth Problem, *Applied Mathematics*, Vol.2, No.3, pp.283–293, 2011.
- [15] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol.2, McGraw-Hill, USA, 1953.
- [16] L. J. Slater. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [17] M. L. Mehta, Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform, *J. Math. Phys.*, **28**, 781–785, 1987.
- [18] G. Dahlquist. A “multigrid” extension of the FFT for the numerical inversion of Fourier and Laplace transforms, *Behaviour & Information Technology*, **33**, No.1, 85–112, 1993.
- [19] V. B. Matveev. Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform, the related functional identities and beyond, *Inverse Problems*, **17**, No.4, 633–657, 2001.
- [20] N. M. Atakishiyev, On  $q$ -extensions of Mehta’s eigenvectors of the finite Fourier transform, *Int. J. Mod. Phys. A*, **21**, 4993–5006, 2006.
- [21] N. M. Atakishiyev, J. P. Rueda and K. B. Wolf. On  $q$ -extended eigenvectors of the integral and finite Fourier transforms, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, No.42, 12701–12707, 2007.
- [22] N. Atakishiyev, P. Franco, D. Levi and O. Ragnisco. On Fourier integral transforms for  $q$ -Fibonacci and  $q$ -Lucas polynomials, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**, No.19, Art. No. 195206, 11 pages, 2012.