



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

IIMAS

**ÁLGEBRAS DE OPERADORES INTEGRALES
NO LOCALES CON DATOS DISCONTINUOS**

TESIS

QUE PARA OBTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

IVÁN LORETO HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL:

DR. YURI KARLOVICH OZOLINSH

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

DR. NATIK ATAKICHIEV MEKTIYEV

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D.F., FEBRERO, 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Agradezco a mi esposa e hija por el apoyo y la gran motivación que me han dado en todo momento durante mis estudios.

A mis padres y hermanos les agradezco por su ayuda y ejemplo de dedicación que siempre me han brindado.

Le doy las gracias al Dr. Yuri Karlovich por haberme dado la oportunidad de trabajar bajo su excelente asesoría, por todas sus enseñanzas científicas y por el valioso tiempo que me ha dedicado.

Agradezco a los sinodales por haber leído y por hacer observaciones a esta tesis.

Al Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca de la UNAM le doy las gracias por haberme apoyado con una beca de lugar, también agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca económica completa y a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM (DGEP) que me apoyó con una beca económica complementaria.

Agradezco a mis profesores y también a mis amigos por sus enseñanzas, por sus consejos y por el tiempo que me dedicaron durante mis estudios.

Resumen.

En este trabajo, considerando al álgebra de Banach, $\mathcal{B}_{p,w}$, de todos los operadores lineales acotados que actúan sobre el espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{R}, w)$, donde $p \in (1, \infty)$ y w es un peso de Muckenhoupt, estudié la subálgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ de $\mathcal{B}_{p,w}$ generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in PSO^\circ$) y todos los operadores de convolución $W^0(b)$ ($b \in PSO_{p,w}^\circ$), donde $PSO^\circ \subset L^\infty(\mathbb{R})$ y $PSO_{p,w}^\circ \subset M_{p,w}$ son álgebras de funciones lentamente oscilatorias a trozos que admiten discontinuidades lentamente oscilatorias en puntos arbitrarios de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y $M_{p,w}$ es el álgebra de Banach de multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R}, w)$. Bajo ciertas condiciones sobre el peso de Muckenhoupt w , se construyó un cálculo simbólico para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ y se estableció un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ en términos de sus símbolos de Fredholm. Para estudiar el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$, se aplicó la teoría de operadores pseudodiferenciales y de Calderón-Zygmund, el principio local de Allan-Douglas, el teorema de dos idempotentes, el método de operadores límite y la teoría de operadores pseudodiferenciales de Mellin.

También estudié la C^* -álgebra no local \mathfrak{B} de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ generada por todos los operadores de multiplicación por funciones lentamente oscilatorias a trozos, por todos los operadores de convolución con símbolos lentamente oscilatorios a trozos y por todos los operadores de desplazamiento unitarios asociados con el grupo conmutativo de todas las traslaciones $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - h$, para $h \in \mathbb{R}$. Se estableció un cálculo simbólico para la C^* -álgebra \mathfrak{B} y se obtuvo un criterio de Fredholm para los operadores $B \in \mathfrak{B}$ usando una generalización del método de trayectoria local para estudiar C^* -álgebras asociadas con C^* -sistemas dinámicos. Este método está relacionado con el principio local de Allan-Douglas y su generalización se basa en la noción de medidas espectrales.

Índice

1. Introducción	1
2. Preliminares.	5
2.1. Definiciones de operadores de convolución	5
2.2. Conceptos y propiedades básicas de la teoría de Fredholm	6
2.3. Funciones lentamente oscilatorias y sus propiedades	7
2.4. Pesos de Muckenhoupt.	8
2.5. Multiplicadores de Fourier.	9
2.6. Resultados conocidos sobre álgebras de operadores de convolución con datos continuos a trozos.	9
3. Datos: Álgebras de funciones lentamente oscilatorias y de funciones lentamente oscilatorias a trozos	11
3.1. La C^* -álgebra SO^\diamond	11
3.2. Las álgebras de Banach $SO_{p,w}^\diamond$	12
3.3. Las álgebras de Banach $PSO_{p,w}^\diamond$	13
3.4. El espacio de ideales maximales de $SO_{p,w}^\diamond$	13
3.5. El espacio de ideales maximales de $PSO_{p,w}^\diamond$	16
4. Álgebra de operadores del tipo de convolución con datos lentamente oscilatorios	17
4.1. Relaciones entre las clases de funciones SO^\diamond y VMO	17
4.2. Compacidad de los conmutadores	18
4.3. Enfoque abstracto de operadores límite	21
4.4. Aplicaciones de los operadores límite	22
4.5. El espacio de ideales maximales del subálgebra central $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$	26
5. Estudio local del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$	30
5.1. El principio local de Allan-Douglas.	30
5.2. Representantes locales	31
5.3. Estructura de las álgebras locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$	34
6. Una subclase de pesos de Muckenhoupt	35
6.1. Funciones en $VMO_0(U)$	35
6.2. Pesos equivalentes a pesos de Muckenhoupt lentamente oscilatorios	36
6.3. Operadores límite necesarios	39
7. El teorema de dos idempotentes y sus aplicaciones	51
7.1. El teorema de dos idempotentes	51
7.2. El espectro de Y en aplicaciones	52
8. Operadores pseudodiferenciales de Mellin y sus aplicaciones	54
8.1. Operadores de convolución de Mellin	54
8.2. Acotación de operadores pseudodiferenciales de Mellin	55
8.3. Compacidad de conmutadores de operadores pseudodiferenciales de Mellin	56

8.4.	Espectro local de ciertos operadores de convolución de Mellin	56
8.5.	Aplicaciones de los operadores pseudodiferenciales de Mellin	59
9.	Espectro local relacionado al teorema de dos idempotentes	65
9.1.	Estimaciones del espectro local	65
9.2.	Espectro de las clases laterales $X_{\xi,\eta}^\pi$ para $(\xi, \eta) \in \Omega_0$	72
9.3.	Espectro local: identificación	75
10.	Resultados principales para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$	77
10.1.	Corolario del teorema de dos idempotentes	77
10.2.	Álgebras de Banach $\mathfrak{A}_{\xi,\eta}^\pi$ para $\xi, \eta \in M_\infty(SO^\diamond)$	78
10.3.	Homomorfismos de álgebras de Banach de $\mathfrak{A}_{p,w}$	79
10.4.	Cálculo simbólico y la propiedad de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$.	81
10.5.	Casos parciales efectivos	82
11.	El método de trayectoria local y la medida espectral	86
11.1.	El método de trayectoria local	86
11.2.	Una generalización del método de trayectoria local basada en medidas espectrales	88
12.	La C^*-álgebra \mathfrak{B} y sus subálgebras	90
12.1.	Cálculo simbólico para la C^* -álgebra \mathfrak{A}	90
12.2.	La acción del grupo G sobre el espacio de ideales maximales de una C^* -subálgebra central de \mathfrak{A}^π	93
12.3.	Forma general de operadores del tipo de convolución con desplazamientos	94
12.4.	Invertibilidad de los operadores funcionales	95
13.	Estudio de Fredholm de la C^*-álgebra \mathfrak{B}	97
13.1.	Descomposición de la C^* -álgebra \mathfrak{B} y un criterio de Fredholm abstracto asociado	97
13.2.	Un símbolo de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$	99
13.3.	Un criterio de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$	101
13.4.	La C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty,\mathbb{R}}$	103
13.5.	La C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty,\infty}$ y su influencia	107
14.	Cálculo simbólico y un criterio de Fredholm para la C^*-álgebra \mathfrak{B}	110

1. Introducción

Los operadores integrales son instrumentos importantes y adecuados para resolver problemas del análisis real y complejo, y la física matemática. Entre las clases importantes de operadores se encuentran los siguientes: operadores integrales singulares, pseudodiferenciales, de Toeplitz, de Wiener–Hopf y del tipo de convolución más generales (con grupos discretos de desplazamientos, con datos discontinuos y oscilatorios, etc.). La teoría clásica de tales operadores, en el caso de valores continuos o suaves, fue desarrollada por F. D. Gakhov, M. G. Krein, I. Gohberg, S. G. Mikhlin, N. I. Muskhelishvili, y M. E. Taylor, entre otros.

Hasta ahora han sido estudiadas las álgebras de operadores del tipo de convolución con datos que admiten discontinuidades de primera especie en el eje real (ver [23], [16], [68], [20], [53]) y discontinuidades lentamente oscilatorias en el infinito (ver [3]–[4]). El importante problema que consiste en la investigación de álgebras de operadores del tipo de convolución con datos que admiten discontinuidades lentamente oscilatorias a trozos en puntos arbitrarios del eje real estuvo abierto. Para progresar en esta dirección, en particular, fue necesario estudiar la compacidad de ciertos conmutadores de operadores del tipo de convolución que se basa sobre la teoría de operadores pseudodiferenciales con símbolos discontinuos (ver [37], [39], [40], [72]).

Las álgebras de operadores integrales singulares con grupos discretos de desplazamientos y coeficientes lentamente oscilatorios a trozos fueron investigadas en [5]–[8] y [41] (ver también [15]). Las C^* -álgebras de operadores del tipo de convolución con datos continuos a trozos y grupos dóciles de desplazamientos fueron estudiadas en [34]. Por otro lado el problema más difícil del estudio de álgebras de operadores del tipo de convolución no locales con datos discontinuos lentamente oscilatorios a trozos y grupos discretos de desplazamientos con conjuntos arbitrarios de puntos fijos estuvo abierto. La admisión de desplazamientos aporta cambios cualitativos en propiedades de tales operadores y explica la aparición de dificultades en el estudio de tales operadores. Además, la ampliación de clases de datos de operadores considerados implica la necesidad del desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras de operadores integrales no locales y los métodos de investigación correspondientes.

Sea $\mathcal{B}_{p,w}$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados que actúan sobre el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, w)$, donde $p \in (1, \infty)$ y w es un peso de Muckenhoupt, y sea $M_{p,w}$ el álgebra de Banach de multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R}, w)$, si $w = 1$ escribimos \mathcal{B}_p y M_p en lugar de $\mathcal{B}_{p,w}$ y $M_{p,w}$, respectivamente. La subálgebra de Banach $\mathfrak{A}_p(PC)$ de \mathcal{B}_p generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in PC \subset L^\infty(\mathbb{R})$) y todos los operadores de convolución $W^0(b)$ ($b \in PC_p \subset M_p$) con datos continuos a trozos fue estudiada por R.V. Duduchava en [23], [24]. Para espacios de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{R}, w)$, el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}(PC) \subset \mathcal{B}_{p,w}$ fue investigada por R. Schneider [76] y por S. Roch y B. Silbermann [68] (ver también [67]) en el caso de pesos potenciales w , y por A. Böttcher y I.M. Spitkovsky en el caso de pesos de Muckenhoupt generales w [20] (ver también [19]). Su análogo invariante por desplazamientos para espacios de Lebesgue con pesos en el círculo unitario fue estudiado en [53]. La subálgebra de Banach $\mathfrak{A}_p(\text{alg}(PC, SO_\infty))$ de \mathcal{B}_p generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in \text{alg}(PC, SO_\infty) \subset L^\infty(\mathbb{R})$) y todos los operadores de convolución $W^0(b)$ ($b \in \text{alg}(PC_p, SO_{\infty,p}) \subset M_p$) con datos continuos a trozos que admiten discontinuidades lentamente oscilatorias solo en el infinito fueron estudiadas en [3] y [4].

En este trabajo, se estudia la subálgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ de $\mathcal{B}_{p,w}$ generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in PSO^\circ$) y todos los operadores de convolución $W^0(b)$ ($b \in PSO_{p,w}^\circ$), donde $PSO^\circ \subset L^\infty(\mathbb{R})$ y $PSO_{p,w}^\circ \subset M_{p,w}$ son álgebras de funciones lentamente

oscilatorias a trozos que admiten discontinuidades lentamente oscilatorias en puntos arbitrarios de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, para este estudio, primero, aplicando la teoría de operadores pseudodiferenciales y de Calderón-Zygmund (ver p. ej. [72], [77]), se determina la compacidad de conmutadores de operadores de multiplicación aI y operadores de convolución $W^0(b)$ sobre espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, w)$ con $p \in (1, \infty)$ y pesos de Muckenhoupt w para algunas clases de funciones lentamente oscilatorias a trozos $a \in PSO^\diamond$ y $b \in PSO_{p,w}^\diamond$. Los resultados obtenidos extienden aquellos dados en [24, Lemas 7.1–7.4] y [3, Teorema 4.2, Corolario 4.3] a espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, w)$ con pesos de Muckenhoupt generales w y a una clase más amplia de datos a, b . Luego se estudia el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_{p,w}$ generada por los operadores $aW^0(b)$ con funciones $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$ que admiten discontinuidades lentamente oscilatorias en cada punto de $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Aplicando el método de operadores límite (ver [14], [66]), bajo alguna condición sobre los pesos de Muckenhoupt w , se describe el espacio de ideales maximales $\Omega = M(\mathcal{Z}_{p,w}^\pi)$ del álgebra de Banach cociente conmutativa $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi = \mathcal{Z}_{p,w}/\mathcal{K}_{p,w}$ donde $\mathcal{K}_{p,w}$ es el ideal de operadores compactos en $L^p(\mathbb{R}, w)$, y se define la transformada de Gelfand para $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$. Después, bajo ciertas condiciones sobre el peso de Muckenhoupt w , se construye un cálculo simbólico para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ y se establece un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ en términos de sus símbolos de Fredholm. Para este fin, usando la descripción de

$$\Omega = \Omega_{\mathbb{R},\infty} \cup \Omega_{\infty,\mathbb{R}} \cup \Omega_{\infty,\infty}, \text{ donde, } \Omega_{\mathbb{R},\infty} = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \right) \times M_\infty(SO^\diamond),$$

$$\Omega_{\infty,\mathbb{R}} = M_\infty(SO^\diamond) \times \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \right), \Omega_{\infty,\infty} = M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond), \text{ y}$$

$M_t(SO^\diamond)$ es la fibra del espacio de ideales maximales $M(SO^\diamond)$ sobre $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

y aplicando el principio local de Allan-Douglas (ver [18]), se reduce el estudio de la propiedad de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ al estudio de la invertibilidad de las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi$ en ciertas álgebras de Banach locales $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ para $(\xi, \eta) \in \Omega$, y se investiga la estructura de ciertas álgebras de Banach locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \subset \Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ generadas por las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi$ para todo $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$, también se calculan algunos operadores límite necesarios, suponiendo que los pesos w son equivalentes a pesos lentamente oscilatorios. Utilizando estos resultados y aplicando el teorema de dos idempotentes y la teoría de operadores pseudodiferenciales de Mellin se obtiene dicho criterio de Fredholm en términos de sus símbolos de Fredholm, en cuatro casos parciales se obtienen para $\mathfrak{A}_{p,w}$ resultados más efectivos.

También se estudia la C^* -álgebra no local \mathfrak{B} de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ generada por todos los operadores de multiplicación por funciones lentamente oscilatorias a trozos, por todos los operadores de convolución con símbolos lentamente oscilatorios a trozos y por todos los operadores de desplazamiento unitarios asociados con el grupo conmutativo de todas las traslaciones $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - h$, para $h \in \mathbb{R}$. Se establece un cálculo simbólico para la C^* -álgebra \mathfrak{B} y se obtiene un criterio de Fredholm para los operadores $B \in \mathfrak{B}$ usando una generalización del método de trayectoria local (ver [1], [2], [6], [33], y [38]) para estudiar C^* -álgebras asociadas con C^* -sistemas dinámicos. Este método está relacionado con el principio local de Allan-Douglas y su generalización está basada en la noción de medidas espectrales (ver [61]).

La tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2 recordamos algunos conceptos y resultados básicos para comprender el material presentado. Se definen los operadores del tipo de convolución y sus símbolos, se establecen algunas propiedades generales de la teoría de Fredholm en espacios de Banach (ver [29], [18]), se definen las clases de funciones lentamente oscilatorias

en el infinito y se presentan algunas de sus propiedades. En este mismo capítulo se introducen los conceptos de pesos de Muckenhoupt (ver p. ej. [26]) y de multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R}, w)$. También se presentan algunos resultados relacionados a la propiedad de Fredholm de operadores del tipo de convolución con datos continuos (ver p. ej. [16]).

En el capítulo 3 se introducen las álgebras de Banach de funciones lentamente oscilatorias, $SO_{p,w}^\diamond$ y de funciones lentamente oscilatorias a trozos, $PSO_{p,w}^\diamond$, se describe el espacio de ideales maximales, $M(SO_{p,w}^\diamond)$ y $M(PSO_{p,w}^\diamond)$, de las álgebras de Banach conmutativas $SO_{p,w}^\diamond$ y $PSO_{p,w}^\diamond$, respectivamente.

En el capítulo 4, se estudia la compacidad de conmutadores de operadores del tipo de convolución con datos lentamente oscilatorios a trozos. También en este capítulo se dan algunas aplicaciones de técnicas de operadores límite, para ello, primero se da una versión abstracta de tales técnicas. Usando estas aplicaciones de operadores límite, se describe el espacio de ideales maximales $\Omega = M(\mathcal{Z}_{p,w}^\pi)$ de la subálgebra de Banach conmutativa $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ de $\mathfrak{A}_{p,w}^\pi$.

En el capítulo 5, se realiza un estudio local, para ello, se introduce el álgebra de Banach, Λ , de todos los operadores en $\mathcal{B}_{p,w}$, que conmutan módulo operadores compactos, con todos los operadores $A \in \mathcal{Z}_{p,w}^\pi$, y se define el álgebra cociente $\Lambda^\pi := \Lambda/\mathcal{K}_{p,w}$. A cada $(\xi, \eta) \in \Omega$ se le asocia un ideal bilateral cerrado $J_{\xi,\eta}^\pi$ de Λ^π generado por el ideal maximal de $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ identificado con la pareja (ξ, η) . Aplicando el principio local de Allan-Douglas (ver, p. ej. [18, Teorema 1.35]), se reduce el estudio de la propiedad de Fredholm de los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ al estudio de la invertibilidad de las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi := A^\pi + J_{\xi,\eta}^\pi$ en las álgebras de Banach locales $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi := \Lambda^\pi/J_{\xi,\eta}^\pi$ para $(\xi, \eta) \in \Omega$. También en este capítulo se investiga la estructura de las álgebras de Banach locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \subset \Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ generadas por las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi$ para todo $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$.

En el capítulo 6 se define una subclase de pesos de Muckenhoupt equivalente a pesos lentamente oscilatorios y se calculan algunos operadores límite necesarios.

En el capítulo 7 se presenta el teorema de dos idempotentes (ver [11], [12] y las referencias dadas ahí), y se verifica el cumplimiento de sus condiciones en el caso $(\xi, \eta) \in \Omega_0 \subset \Omega$, donde $\Omega_0 = \Omega_{\mathbb{R},\infty} \cup \Omega_{\infty,\mathbb{R}}$, para las álgebras de Banach locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ generadas por la identidad $I_{\xi,\eta}^\pi$ y dos idempotentes $P_{\xi,\eta}^\pi$ y $Q_{\xi,\eta}^\pi$, lo cual nos permite definir los símbolos matriciales para las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi$.

En el capítulo 8 se estudian los operadores pseudodiferenciales de Mellin (cf. [37], [39]) y se dan algunas aplicaciones que permiten la posibilidad de reducir el estudio de operadores pseudodiferenciales de Mellin a operadores de convolución de Mellin.

En el capítulo 9 se aplica la teoría de operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos no regulares para estudiar el espectro local $\mathfrak{M}_{\xi,\eta}$ (esto es, el espectro en $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$) de las clases laterales básicas $X_{\xi,\eta}^\pi = I_{\xi,\eta}^\pi - (P_{\xi,\eta}^\pi - Q_{\xi,\eta}^\pi)^2$ que juegan un papel crucial en aplicaciones del teorema de dos idempotentes para construir un cálculo simbólico para las álgebras de Banach locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ en el caso $(\xi, \eta) \in \Omega_0$. El conjunto $\mathfrak{M}_{\xi,\eta}$ contiene al conjunto $\{0, 1\}$ y está contenido en un arco circular $\tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)} \subset \mathbb{C}$ que depende de p, w y ξ .

En el capítulo 10, aplicando el teorema de dos idempotentes, se obtienen dos resultados principales de esta tesis: se construye un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ y se establece un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$. Estos símbolos son funciones matriciales definidas en el conjunto

$$\tilde{\Omega} := \left(\bigcup_{(\xi,\eta) \in \Omega_0} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi,\eta} \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\} \right).$$

En este capítulo también se estudian las álgebras de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ para las cuales los conjuntos $\mathfrak{M}_{\xi,\eta}$ coinciden con los arcos circulares $\tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ para todo $(\xi, \eta) \in \Omega_0$.

En el capítulo 11 se presenta el método de trayectoria local y una generalización de este método que está basada en medidas espectrales.

En el capítulo 12 se presenta un cálculo simbólico para la C^* -álgebra $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_{2,1}$ que es consecuencia inmediata del capítulo 10. Se estudia la acción del grupo conmutativo G que consiste de todas las traslaciones $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - h$ ($h \in \mathbb{R}$), sobre el espacio de ideales maximales de la C^* -subálgebra central \mathcal{Z}^π de \mathfrak{A}^π . También se estudia la invertibilidad de los operadores funcionales que son los elementos de la C^* -álgebra \mathcal{A} generada por los operadores de multiplicación por funciones lentamente oscilatorias a trozos en \mathbb{R} y por los operadores de desplazamiento isométricos U_g ($g \in G$).

En el capítulo 13 se descompone a la C^* -álgebra no local \mathfrak{B} generada por todos los operadores $A \in \mathfrak{A}$ y por todos los operadores de desplazamiento unitarios U_h ($h \in \mathbb{R}$) haciendo uso de una medida espectral adecuada $P_\varphi(\cdot) : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$, y se obtiene un criterio de Fredholm abstracto para los operadores $B \in \mathfrak{B}$. Se establece un criterio de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty} = P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(\mathfrak{B})$, para ello primero se obtiene un símbolo de invertibilidad para la C^* -subálgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty} = P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$. Se obtiene un criterio de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty,\mathbb{R}} = P_\varphi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}})\varphi(\mathfrak{B})$. También en este capítulo se demuestra que para cada $B \in \mathfrak{B}$ la invertibilidad del operador $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(B^\pi)$ en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi$ implica la invertibilidad del operador $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(B^\pi)$ en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi$.

Y por último en el capítulo 14 se establece un cálculo simbólico para la C^* -álgebra \mathfrak{B} y se obtiene un criterio de Fredholm para los operadores $B \in \mathfrak{B}$.

Los resultados principales de este trabajo son los siguientes. Se demostró la compacidad de conmutadores de operadores de multiplicación aI y operadores de convolución $W^0(b)$ sobre espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, w)$ con $p \in (1, \infty)$ y pesos de Muckenhoupt w para algunas clases de funciones lentamente oscilatorias a trozos $a \in PSO^\circ$ y $b \in PSO_{p,w}^\circ$. Se construyó un cálculo simbólico para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ que esta generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in PSO^\circ$) y todos los operadores de convolución $W^0(b)$ ($b \in PSO_{p,w}^\circ$), y se estableció un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ en términos de sus símbolos de Fredholm. Se estableció un cálculo simbólico para la C^* -álgebra \mathfrak{B} de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ generada por todos los operadores de multiplicación por funciones lentamente oscilatorias a trozos, por todos los operadores de convolución con símbolos lentamente oscilatorios a trozos y por todos los operadores de desplazamiento unitarios asociados con el grupo conmutativo de todas las traslaciones $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - h$, para $h \in \mathbb{R}$ y se obtuvo un criterio de Fredholm para los operadores $B \in \mathfrak{B}$.

Los resultados de los capítulos 3 y 4 fueron aceptados para su publicación en [48], y los de los capítulos 5 – 7 fueron aceptados para su publicación en [49], los resultados de los capítulos 8 – 10 fueron aceptados para su publicación en [50] y los de los capítulos 11 – 14 están considerados en un artículo que está en progreso.

2. Preliminares.

2.1. Definiciones de operadores de convolución

Un *operador de convolución* A en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ está dado por la fórmula

$$(Af)(t) = \int_{\mathbb{R}} k(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Se dice que la función $k \in L^2(\mathbb{R})$ es el *núcleo de convolución* de A . Denotemos por $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ a la *transformada de Fourier*,

$$(\mathcal{F}f)(x) := \hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

y sea $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ la inversa de \mathcal{F} ,

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El operador (2.1) puede escribirse formalmente como

$$A = \mathcal{F}^{-1}\hat{k}\mathcal{F} \quad (2.3)$$

o equivalentemente, $(\hat{A}f)(x) = \hat{k}(x)\hat{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. La función \hat{k} es llamada el *símbolo* del operador (2.1). Dada una función $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, denotamos por aI al operador de multiplicación por a en $L^2(\mathbb{R})$:

$$aI : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto af.$$

Obviamente, aI es acotado en $L^2(\mathbb{R})$ y $\|aI\| = \|a\|_\infty$. En el caso que aI siga a otro operador, digamos X , omitimos la I y abreviamos aIX como aX . Para $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, definimos el operador $W^0(a)$ por

$$W^0(a) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}f.$$

Debido a (2.1) y (2.3) nos referimos al operador $W^0(a)$ como el *operador de convolución con símbolo* a .

Denotemos por $C(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas en \mathbb{R} (con valores complejos) y sean $C_b(\mathbb{R}) := C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ las funciones acotadas y continuas en \mathbb{R} . Denotamos por $C(\dot{\mathbb{R}})$ a las funciones $a \in C_b(\mathbb{R})$ para las cuales los dos límites

$$a(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x), \quad a(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)$$

existen y coinciden; el valor común de estos límites es denotado por $a(\infty)$. Por último, $C_0(\dot{\mathbb{R}})$ es la colección de todas las funciones $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ para las cuales $a(\infty) = 0$. Claramente, $C_b(\mathbb{R})$, $C(\dot{\mathbb{R}})$ y $C_0(\dot{\mathbb{R}})$ son C^* -subálgebras de $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.2. Conceptos y propiedades básicas de la teoría de Fredholm

Sea $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de todos operadores lineales acotados en un espacio de Banach X y $A \in \mathcal{B}(X)$. El *núcleo* $\text{Ker } A$ y la *imagen* $\text{Im } A$ de A son definidos por

$$\text{Ker } A := \{x \in X : Ax = 0\}, \quad \text{Im } A := \{Ax : x \in X\}.$$

Ambos $\text{Ker } A$ e $\text{Im } A$ son subespacios lineales de X , y $\text{Ker } A$ siempre es cerrado. Se dice que el operador A es *normalmente soluble* si $\text{Im } A$ es un subespacio cerrado de X . Si A es normalmente soluble, el conúcleo $\text{Coker } A$ es definido por

$$\text{Coker } A := X/\text{Im } A.$$

Para un operador A normalmente soluble, definimos

$$n(A) := \dim \text{Ker } A, \quad d(A) := \dim \text{Coker } A. \quad (2.4)$$

Notemos que $n(A)$ y $d(A)$ están en $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, y además

$$n(A) = d(A^*), \quad d(A) = n(A^*)$$

donde $A^* \in \mathcal{B}(X^*)$ es el operador adjunto de A . Dos operadores $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ son *equivalentes* si ninguno de ellos es normalmente soluble o ambos A y B son normalmente solubles y $n(A) = n(B)$ y $d(A) = d(B)$. Supongamos que $A \in \mathcal{B}(X)$ es normalmente soluble. El operador A es llamado *Fredholm* si $n(A)$ y $d(A)$ son finitos, y en ese caso el *índice* de A es definido como

$$\text{Ind } A := n(A) - d(A).$$

Se dice que el operador A es *propriadamente n -normal* si $n(A) < \infty$ y $d(A) = \infty$, y *propriadamente d -normal* si $d(A) < \infty$ y $n(A) = \infty$. Decimos que dos operadores $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ son *débilmente Φ -equivalentes* si ninguno de ellos es normalmente soluble o ambos A y B son propriadamente n -normal o bien propriadamente d -normal o bien Fredholm. Denotamos por $\Phi(X)$, $\Phi_n(X)$ y $\Phi_d(X)$ al conjunto de todos los operadores en $\mathcal{B}(X)$ que son Fredholm, propriadamente n -normales y propriadamente d -normales, respectivamente. Los operadores en $\Phi(X) \cup \Phi_n(X)$ y $\Phi(X) \cup \Phi_d(X)$ son llamados *n -normales* y *d -normales*, respectivamente. Decimos que los operadores en $\Phi(X) \cup \Phi_n(X) \cup \Phi_d(X)$ son *semi-Fredholm*, y los que están en $\Phi_n(X) \cup \Phi_d(X)$ son *propriadamente semi-Fredholm*. Definimos

$$\text{Ind } A = \begin{cases} -\infty, & \text{para } A \in \Phi_n(X), \\ +\infty, & \text{para } A \in \Phi_d(X). \end{cases}$$

Ahora recordemos algunas propiedades de operadores semi-Fredholm. Sea $\mathcal{K}(X)$ la colección de todos los operadores compactos en X . Notemos que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(X)$. Se puede mostrar que $A \in \Phi(X)$ si y sólo si la clase $A + \mathcal{K}(X)$ es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. Si $B + \mathcal{K}(X)$ es el inverso de $A + \mathcal{K}(X)$ entonces B es llamado un *regularizador* de A . Definimos el *espectro esencial* de A , $\text{sp}_{\text{ess}} A$, como el espectro de $A + \mathcal{K}(X)$ en $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$, i.e.,

$$\text{sp}_{\text{ess}} A := \{\lambda \in \mathbf{C} : A - \lambda I \text{ no es Fredholm}\}.$$

El $\text{sp}_{\text{ess}} A$ es un subconjunto del espectro de A , $\text{sp } A$, compacto y no vacío. Un operador $A \in \mathcal{B}(X)$ se llama *Fredholm-izquierdo* (respectivamente *Fredholm-derecho*) si existe un $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $BA - I$ (resp. $AB - I$) es compacto.

Teorema 2.1. Los conjuntos $\Phi(X)$, $\Phi_n(X)$ y $\Phi_d(X)$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}(X)$ y la función

$$\text{Ind} : \Phi(X) \cup \Phi_n(X) \cup \Phi_d(X) \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

es constante en las componentes conexas de $\Phi(X) \cup \Phi_n(X) \cup \Phi_d(X)$. Más aún, si $A \in \mathcal{B}(X)$ es semi-Fredholm, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $n(A+C) \leq n(A)$, $d(A+C) \leq d(A)$, siempre que $C \in \mathcal{B}(X)$ y $\|C\| \leq \epsilon$.

Teorema 2.2. Si $A \in \Phi(X)$ ($\Phi_n(X)$, $\Phi_d(X)$) y $K \in \mathcal{K}(X)$, entonces $A+K \in \Phi(X)$ ($\Phi_n(X)$, $\Phi_d(X)$) e $\text{Ind}(A+K) = \text{Ind} A$.

Teorema 2.3. Si $A, B \in \Phi(X) \cup \Phi_n(X)$, ($\Phi(X) \cup \Phi_d(X)$) entonces $AB \in \Phi(X) \cup \Phi_n(X)$, ($\Phi(X) \cup \Phi_d(X)$) e $\text{Ind}(AB) = \text{Ind} A + \text{Ind} B$.

Para consultar las demostraciones de los teoremas escritos ver, por ejemplo, [29], [28].

Lema 2.4. Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es n -normal;

ii) existe un operador compacto K y un $\delta > 0$ tal que

$$\|Ax\| + \|Kx\| \geq \delta\|x\| \text{ para todo } x \in X;$$

iii) existe un número finito de operadores compactos K_1, \dots, K_n y un $\delta > 0$ tal que

$$\|Ax\| + \sum_{j=1}^n \|K_j x\| \geq \delta\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

La demostración se encuentra en [58] y [65, sección 1.3.2].

2.3. Funciones lentamente oscilatorias y sus propiedades

Para una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, sea

$$\text{osc}(f, I) = \sup_{t, s \in I} |f(t) - f(s)|.$$

Denotamos por SO_∞ al conjunto de funciones lentamente oscilatorias en el infinito, es decir,

$$SO_\infty := \left\{ f \in C_b(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{osc}(f, [-2x, -x] \cup [x, 2x]) = 0 \right\}. \quad (2.5)$$

Claramente, SO_∞ es una C^* -subálgebra de $L^\infty(\mathbb{R})$ y $C(\dot{\mathbb{R}}) \subset SO_\infty$.

Sea $C_b^1(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones $a \in C_b(\mathbb{R})$ tal que $a' \in C_b(\mathbb{R})$.

Lema 2.5. (Ver p. ej. [52]). Cada función $a \in SO_\infty$ puede aproximarse uniformemente por funciones en el álgebra no cerrada

$$SO_\infty^1 := \left\{ f \in C_b^1(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x) = 0 \right\} \cap SO_\infty.$$

Cada función $a \in SO_\infty$ puede representarse en la forma

$$a = a_+u_+ + a_-u_-$$

donde a_\pm son funciones pares en SO_∞ y

$$u_\pm(x) = (1 \pm \tanh x)/2, \quad x \in \bar{\mathbb{R}}.$$

2.4. Pesos de Muckenhoupt.

Sea E un subconjunto conexo de \mathbb{R} . Una función medible $w : E \rightarrow [0, \infty]$ es llamada un *peso* si $w^{-1}(\{0, \infty\})$ tiene medida (de Lebesgue) cero. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(E, w)$ al espacio de Lebesgue usual con la norma

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_E |f(x)|^p w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sean χ_+ y χ_- las funciones características de $(0, +\infty)$ y $(-\infty, 0)$, respectivamente, el operador $P = \mathcal{F}\chi_+\mathcal{F}^{-1}$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sobre H_+^2 , donde H_+^2 se puede identificar con el espacio de Hardy de funciones analíticas en el semiplano superior que tienen límites angulares en \mathbb{R} de la clase $L^2(\mathbb{R})$. Mientras que el operador $Q = \mathcal{F}\chi_-\mathcal{F}^{-1}$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sobre H_-^2 . Denotamos por $A_p(\mathbb{R})$ al conjunto de todos los pesos w en \mathbb{R} para los cuales $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}, w)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}, w)$ y el operador P satisface la desigualdad

$$\|Pf\|_{p,w} \leq C_{p,w}\|f\|_{p,w} \text{ para toda } f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}, w),$$

con alguna constante $C_{p,w} < \infty$ independiente de f . A los pesos en $A_p(\mathbb{R})$ se les llama *pesos de Muckenhoupt*. Como

$$P = \mathcal{F}\chi_+\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\chi_-\mathcal{F} = W^0(\chi_-) \quad (2.6)$$

y $W^0(-\text{sign}x)$ es el *operador integral singular de Cauchy* $S_{\mathbb{R}}$, definido en $L^2(\mathbb{R})$ por

$$(S_{\mathbb{R}}f)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{s-t} ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

la integral entendida en el sentido del valor principal, donde $\text{sign}x$ es la función continua a trozos definida por

$$\text{sign}x = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$P = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{R}}), \quad Q = \frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{R}}). \quad (2.8)$$

Por lo tanto, $w \in A_p(\mathbb{R})$ si y sólo si $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}, w)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}, w)$ y $S_{\mathbb{R}}$ se extiende de $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}, w)$ a un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}, w)$ (ver, p. ej., [12]). Si $w \in A_p(\mathbb{R})$ entonces P se extiende (de forma única) a una proyección acotada en $L^p(\mathbb{R}, w)$. La imagen de $L^p(\mathbb{R}, w)$ bajo P es entonces un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{R}, w)$. Este subespacio de $L^p(\mathbb{R}, w)$ es denotado por $H^p(\mathbb{R}, w)$ y es llamado el *espacio de Hardy* con peso.

El siguiente teorema demostrado por Hunt, Muckenhoupt y Wheeden [32], caracteriza los pesos en $A_p(\mathbb{R})$.

Teorema 2.6. Sea $1 < p < \infty$. Un peso w en \mathbb{R} pertenece a $A_p(\mathbb{R})$ si y sólo si

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e I corre sobre todos los intervalos acotados $I \subset \mathbb{R}$; aquí $|I|$ es la longitud de I .

2.5. Multiplicadores de Fourier.

Para $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, denotamos por $L^p(\mathbb{R}, w)$ al espacio de Lebesgue usual con la norma

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Supongamos que $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$. Una función $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ es llamada *multiplicador de Fourier* en $L^p(\mathbb{R}, w)$ si el operador $W^0(a) = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$ manda $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}, w)$ en si mismo y se extiende a un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}, w)$. Denotamos por $M_{p,w}$ al conjunto de todos los multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R}, w)$.

Proposición 2.7. El conjunto $M_{p,w}$ con la norma $\|a\|_{M_{p,w}} := \|W^0(a)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, w))}$ es un álgebra de Banach.

Sea $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, sea $V(\mathbb{R})$ el álgebra de Banach de todas las funciones $a : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ con variación total finita

$$V(a) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |a(t_i) - a(t_{i-1})| : -\infty \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq +\infty \right\}$$

donde el supremo está tomado sobre todas las particiones finitas de la recta real \mathbb{R} y la norma está dada por $\|a\|_V = \|a\|_\infty + V(a)$, y PC la C^* -álgebra de todas las funciones en \mathbb{R} que tienen límites unilaterales finitos en cada punto $t \in \overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.8. (Desigualdad de Stechkin). Si $a \in PC$ y a tiene variación total finita $V(a)$, entonces $a \in M_{p,w}$ y

$$\|a\|_{M_{p,w}} \leq \|S\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, w))} (\|a\|_\infty + V(a)). \quad (2.9)$$

Para ver la demostración del Teorema 2.8 consultar, por ejemplo, [16, Teorema 17.1].

Denotemos por $C_{p,w}(\mathbb{R})$ (resp., $C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$, $PC_{p,w}$) a la cerradura en $M_{p,w}$ del conjunto de todas las funciones $a \in C(\mathbb{R})$ (resp., $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$, $a \in PC$) de variación total finita. Obviamente, $C_{p,w}(\mathbb{R})$, $C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$ y $PC_{p,w}$ son subálgebras de Banach de $M_{p,w}$, y

$$C_{p,w}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}), \quad C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}}) \subset C(\overline{\mathbb{R}}), \quad PC_{p,w} \subset PC.$$

2.6. Resultados conocidos sobre álgebras de operadores de convolución con datos continuos a trozos.

Consideremos el operador

$$A := \sum_{j=1}^n a_j W^0(b_j), \quad (2.10)$$

donde $a_j \in PC$ y $b_j \in PC_{p,w}$, de la inclusión $PC_{p,w} \subset M_{p,w}$ vemos que A es acotado en $L^p(\mathbb{R}, w)$. Sea $OP_{p,w}^C$, (respectivamente $OP_{p,w}$) la subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, w))$ que contiene a todos los operadores de la forma (2.10) con $a_j \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b_j \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$ (resp. $a_j \in PC$ y $b_j \in PC_{p,w}$).

Un resultado clásico sobre operadores pseudo-diferenciales dice que si $a_j \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b_j \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$, entonces el operador (2.10) es Fredholm en $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si

$$\begin{aligned}\sigma(t, \infty) &:= \sum a_j(t)b_j(\infty) \neq 0, \\ \sigma(\infty, x) &:= \sum a_j(\infty)b_j(x) \neq 0, \\ \sigma(\infty, \infty) &:= \sum a_j(\infty)b_j(\infty) \neq 0,\end{aligned}$$

Esto se puede generalizar como sigue. Sea

$$M := (\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}) \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(\infty, \infty)\} \quad (2.11)$$

y equipemos a M con la topología discreta.

Teorema 2.9. [16, Teorema 17.11]. *Existe una función única*

$$\text{Sym} : OP_{p,w}^C \rightarrow BC(M)$$

con las siguientes propiedades:

(a) si $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$ entonces

$$(\text{Sym } aI)(t, x) = a(t), \quad (\text{Sym } W^0(b))(t, x) = b(x) \text{ para } (t, x) \in M;$$

(b) si K es un operador compacto entonces $(\text{Sym } K)(t, x) = 0$ para todo $(t, x) \in M$;

(c) Sym es un homomorfismo de álgebras;

(d) para cada $(t, x) \in M$ la función

$$OP_{p,w}^C \rightarrow \mathbb{C}, \quad A \mapsto (\text{Sym}A)(t, x)$$

es continua;

(e) un operador $A \in OP_{p,w}^C$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si $(\text{Sym}A)(t, x) \neq 0$ para todo $(t, x) \in M$;

(f) si $A \in OP_{p,w}^C$ es Fredholm en $L^p(\mathbb{R}, w)$, entonces existe un operador $B \in OP_{p,w}^C$ tal que $AB - I$ y $BA - I$ son compactos en $L^p(\mathbb{R}, w)$.

El álgebra de Banach generada por los operadores de la forma (2.10) con datos continuos a trozos y su generalización invariante con respecto a desplazamientos fueron investigadas en [53].

3. Datos: Álgebras de funciones lentamente oscilatorias y de funciones lentamente oscilatorias a trozos

3.1. La C^* -álgebra SO^\diamond

Sea Γ el círculo unitario $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o la compactificación por un punto $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de la recta real \mathbb{R} . Para una función medible y acotada $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ y un conjunto $I \subset \Gamma$, sea

$$\text{osc}(f, I) = \sup \{ |f(t) - f(s)| : t, s \in I \}.$$

Siguiendo [5, Sección 4], decimos que una función $f \in L^\infty(\Gamma)$ es *lentamente oscilatoria en un punto* $\eta \in \Gamma$ si para cada $r \in (0, 1)$ o, equivalentemente, para algún $r \in (0, 1)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{osc}(f, \Gamma_{r\varepsilon, \varepsilon}(\eta)) = 0 \quad \text{para } \eta \neq \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \text{osc}(f, \Gamma_{r\varepsilon, \varepsilon}(\eta)) = 0 \quad \text{para } \eta = \infty,$$

donde

$$\Gamma_{r\varepsilon, \varepsilon}(\eta) := \begin{cases} \{z \in \Gamma : r\varepsilon \leq |z - \eta| \leq \varepsilon\} & \text{si } \eta \neq \infty, \\ \{z \in \Gamma : r\varepsilon \leq |z| \leq \varepsilon\} & \text{si } \eta = \infty. \end{cases}$$

Para cada $\eta \in \Gamma$, sea $SO_\eta(\Gamma)$ la C^* -subálgebra de $L^\infty(\Gamma)$ definida por

$$SO_\eta(\Gamma) := \left\{ f \in C_b(\Gamma \setminus \{\eta\}) : f \text{ oscila lentamente en } \eta \right\},$$

donde $C_b(\Gamma \setminus \{\eta\}) := C(\Gamma \setminus \{\eta\}) \cap L^\infty(\Gamma)$. De aquí, poniendo $SO_\lambda := SO_\lambda(\dot{\mathbb{R}})$ para todo $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, concluimos que

$$\begin{aligned} SO_\infty &= \left\{ f \in C_b(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{osc}(f, [-x, -x/2] \cup [x/2, x]) = 0 \right\}, \\ SO_\lambda &= \left\{ f \in C_b(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}) : \lim_{x \rightarrow 0} \text{osc}(f, \lambda + ([-x, -x/2] \cup [x/2, x])) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea SO^\diamond la C^* -subálgebra minimal de $L^\infty(\mathbb{R})$ que contiene a todas las C^* -álgebras SO_λ con $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$. En particular, SO^\diamond contiene a $C(\dot{\mathbb{R}})$.

Lema 3.1. *Sea $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, $a \in SO_\lambda$, y sea $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ el homeomorfismo dado por $\gamma(t) = i(1+t)/(1-t)$. Entonces $a \circ \gamma \in SO_\eta(\mathbb{T})$ donde $\eta := \gamma^{-1}(\lambda)$.*

Demostración. Primero, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\eta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Fijemos $\delta < |\eta - 1|$ y pongamos $\mathbb{T}_\delta(\eta) := \{t \in \mathbb{T} : 0 < |t - \eta| \leq \delta\}$. Como $\gamma'(\eta) = 2i/(1-\eta)^2 \neq 0$, concluimos que

$$0 < m := \inf_{t \in \mathbb{T}_\delta(\eta)} \left| \frac{\gamma(t) - \lambda}{t - \eta} \right| < M := \sup_{t \in \mathbb{T}_\delta(\eta)} \left| \frac{\gamma(t) - \lambda}{t - \eta} \right| < \infty. \quad (3.2)$$

Luego, tomando $\varepsilon \in (0, \delta)$ y poniendo $r := m/(2M) \in (0, 1)$ y $\varepsilon' := \varepsilon M$, inferimos de (3.2) por analogía con [5, Lema 4.2] que si $\varepsilon/2 \leq |t - \eta| \leq \varepsilon$ entonces

$$\begin{aligned} m|t - \eta| \leq |\gamma(t) - \lambda| \leq M|t - \eta| &\Rightarrow m\varepsilon/2 \leq |\gamma(t) - \lambda| \leq M\varepsilon \\ &\Leftrightarrow r\varepsilon' \leq |\gamma(t) - \lambda| \leq \varepsilon'. \end{aligned}$$

De aquí $\gamma(\mathbb{T}_{\varepsilon/2, \varepsilon}(\eta)) \subset \dot{\mathbb{R}}_{r\varepsilon', \varepsilon'}(\lambda)$, lo cual implica que $a \circ \gamma \in SO_\eta(\mathbb{T})$ para cada $a \in SO_\lambda$.

Ahora, sea $\lambda = \infty$ y por lo tanto $\eta = 1$. Fijemos $\delta \in (0, 2)$. Ya que $\lim_{t \rightarrow 1} ((t-1)\gamma(t)) = 2i$, tenemos otra vez que

$$0 < m := \min_{t \in \mathbb{T}_\delta(1)} |(t-1)\gamma(t)| < M := \max_{t \in \mathbb{T}_\delta(1)} |(t-1)\gamma(t)| < \infty. \quad (3.3)$$

Entonces para $\varepsilon/2 \leq |t-1| \leq \varepsilon < \delta$ deducimos de (3.3) que

$$\begin{aligned} m|t-1|^{-1} \leq |\gamma(t)| \leq M|t-1|^{-1} &\Rightarrow m\varepsilon^{-1} \leq |\gamma(t)| \leq M2\varepsilon^{-1} \\ &\Leftrightarrow r\varepsilon' \leq |\gamma(t)| \leq \varepsilon', \end{aligned}$$

donde $r = m/(2M) \in (0, 1)$ y $\varepsilon' := 2\varepsilon^{-1}M$. Por lo tanto $\gamma(\mathbb{T}_{\varepsilon/2, \varepsilon}(1)) \subset \dot{\mathbb{R}}_{r\varepsilon', \varepsilon'}(\infty)$, lo cual significa que $a \circ \gamma \in SO_1(\mathbb{T})$ if $a \in SO_\infty$. \square

Corolario 3.2. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la aplicación $a \mapsto a \circ \beta_\lambda$ definida por el homeomorfismo*

$$\beta_\lambda : \dot{\mathbb{R}} \rightarrow \dot{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x - 1}{x + \lambda} \quad (3.4)$$

es un isomorfismo isométrico de la C^ -álgebra SO_λ sobre la C^* -álgebra SO_∞ .*

Demostración. Obviamente, las C^* -álgebras $SO_\eta(\mathbb{T})$ para todo $\eta \in \mathbb{T}$ son isométricamente isomorfas. En particular, poniendo $\alpha_\eta(t) = \eta t$ para todo $t \in \mathbb{T}$, concluimos que la aplicación $a \mapsto a \circ \alpha_\eta$ es un isomorfismo de $SO_\eta(\mathbb{T})$ sobre $SO_1(\mathbb{T})$. Usando el Lema 3.1, inferimos que la aplicación $a \mapsto a \circ \beta_\lambda$, donde $\beta_\lambda = \gamma \circ \alpha_\eta \circ \gamma^{-1}$ (ver (3.4)) y $\lambda = \gamma(\eta)$, es un isomorfismo isométrico $SO_\lambda \rightarrow SO_\eta(\mathbb{T}) \rightarrow SO_1(\mathbb{T}) \rightarrow SO_\infty$. \square

El siguiente resultado obtenido en [52, Corolario 2.10] nos proporciona otra clase de multiplicadores de Fourier en $M_{p,w}$.

Teorema 3.3. *Si $a \in C^3(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y $\|D^k a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ para todo $k = 0, 1, 2, 3$, donde $(Da)(x) = xa'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces el operador de convolución $W^0(a)$ es acotado en cada espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{R}, w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, y*

$$\|a\|_{M_{p,w}} \leq C_{p,w} \max \{ \|D^k a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} : k = 0, 1, 2, 3 \} < \infty,$$

donde la constante $C_{p,w} \in (0, \infty)$ depende solo de p y w .

3.2. Las álgebras de Banach $SO_{p,w}^\diamond$

Para $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, consideremos las álgebras de Banach conmutativas

$$SO_\lambda^3 := \left\{ a \in SO_\lambda \cap C^3(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}) : \lim_{x \rightarrow \lambda} (D_\lambda^k a)(x) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \right\}$$

equipadas con la norma

$$\|a\|_{SO_\lambda^3} := \max \{ \|D_\lambda^k a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} : k = 0, 1, 2, 3 \},$$

donde $(D_\lambda a)(x) = (x - \lambda)a'(x)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(D_\lambda a)(x) = xa'(x)$ si $\lambda = \infty$. Por el Teorema 3.3, $SO_\lambda^3 \subset M_{p,w}$. Denotemos por $SO_{\lambda,p,w}$ a la cerradura de SO_λ^3 en $M_{p,w}$, y sea $SO_{p,w}^\diamond$ la subálgebra de Banach de $M_{p,w}$ generada por todas las álgebras $SO_{\lambda,p,w}$ ($\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$). Como $M_{p,w} \subset M_2 = L^\infty(\mathbb{R})$, concluimos que $SO_{p,w}^\diamond \subset SO^\diamond$.

3.3. Las álgebras de Banach $PSO_{p,w}^\diamond$

Sea PSO^\diamond la C^* -subálgebra de $L^\infty(\mathbb{R})$ generada por las C^* -álgebras SO^\diamond y PC , y sea $PSO_{p,w}^\diamond$ la subálgebra de Banach de $M_{p,w}$ generada por las álgebras de Banach $SO_{p,w}^\diamond$ y $PC_{p,w}$.

3.4. El espacio de ideales maximales de $SO_{p,w}^\diamond$

Para una C^* -álgebra unitaria conmutativa \mathcal{A} , denotemos por $M(\mathcal{A})$ al conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos no cero en \mathcal{A} o, equivalentemente, el conjunto de todos los ideales maximales de \mathcal{A} . Equipemos a $M(\mathcal{A})$ con la topología de Gelfand. Si \mathcal{C} es un subálgebra de Banach de \mathcal{A} y $\lambda \in M(\mathcal{C})$, entonces al conjunto $M_\lambda(\mathcal{A}) := \{\xi \in M(\mathcal{A}) : \xi|_{\mathcal{C}} = \lambda\}$ se le llama la fibra de $M(\mathcal{A})$ sobre λ . De aquí para cada álgebra de Banach $\mathcal{A} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ con $M(C(\dot{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{A}) = \dot{\mathbb{R}}$ y cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, la fibra $M_\lambda(\mathcal{A})$ denota al conjunto de todos los caracteres (funcionales lineales multiplicativos) de \mathcal{A} que anulan al conjunto $\{f \in C(\dot{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{A} : f(\lambda) = 0\}$.

Identificando los puntos $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$ con los funcionales de evaluación δ_λ sobre $\dot{\mathbb{R}}$, $\delta_\lambda(f) = f(\lambda)$ para $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$, inferimos que el espacio de ideales maximales $M(SO^\diamond)$ de SO^\diamond es de la forma

$$M(SO^\diamond) = \bigcup_{\lambda \in \dot{\mathbb{R}}} M_\lambda(SO^\diamond) \quad (3.5)$$

donde $M_\lambda(SO^\diamond) := \{\xi \in M(SO^\diamond) : \xi|_{C(\dot{\mathbb{R}})} = \delta_\lambda\}$ son fibras de $M(SO^\diamond)$ sobre $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$. Aplicando el Corolario 3.2 y [9, Proposición 5], deducimos que para cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$,

$$M_\lambda(SO^\diamond) = M_\lambda(SO_\lambda) = M_\infty(SO_\infty) = (\text{clos}_{SO_\infty^*} \mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

donde $\text{clos}_{SO_\infty^*} \mathbb{R}$ es la cerradura $*$ -débil de \mathbb{R} en SO_∞^* , el espacio dual de SO_∞ .

Para $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, la fibra $M_\lambda(SO_\lambda)$ está relacionada con los límites parciales de una función $a \in SO_\lambda$ en el punto λ como sigue (ver [14, Corolario 4.3], [3, Corolario 3.3] y usar el Corolario 3.2).

Proposición 3.4. *Si $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ es un subconjunto numerable de SO_λ y $\xi \in M_\lambda(SO_\lambda)$, donde $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, entonces existe una sucesión $\{g_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $g_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, y para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(\lambda + g_n^{-1}t) = \xi(a_k) \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_k(g_n t) = \xi(a_k) \quad \text{si } \lambda = \infty.$$

Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$. Para cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$ consideremos tres álgebras de Banach conmutativas unitarias con la misma unidad las cuales están homomórficamente encajadas una en la otra:

$$SO_\lambda^3 \subset SO_{\lambda,p,w} \subset SO_\lambda. \quad (3.7)$$

Para estudiar la relación entre sus espacios de ideales maximales, por analogía con [3] y [52], usamos el siguiente resultado (ver [71, Teorema 3.10]).

Teorema 3.5. *Sean B_i ($i = 1, 2, 3$) álgebras de Banach conmutativas con la misma unidad las cuales están homomórficamente incluídas una en la otra, $B_1 \subset B_2 \subset B_3$. Supongamos que B_1 es densa en B_2 y que cada funcional lineal multiplicativo definido en B_1 se extiende a un funcional lineal multiplicativo en B_3 . Entonces cada funcional lineal multiplicativo en B_2 también se extiende a un funcional lineal multiplicativo en B_3 .*

Dado $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, consideremos el álgebra conmutativa $C(\dot{\mathbb{R}}) \cap SO_\lambda^3 \subset SO_\lambda^3$. Como $M(C(\dot{\mathbb{R}}) \cap SO_\lambda^3) = \mathbb{R}$, vemos que para cada $t \in \dot{\mathbb{R}}$ el conjunto

$$M_t(SO_\lambda^3) = \{\xi \in M(SO_\lambda^3) : \xi|_{C(\dot{\mathbb{R}}) \cap SO_\lambda^3} = \delta_t\}$$

es la fibra de $M(SO_\lambda^3)$ sobre el punto t . Entonces

$$M(SO_\lambda^3) = \bigcup_{t \in \dot{\mathbb{R}}} M_t(SO_\lambda^3), \quad (3.8)$$

donde $M_t(SO_\lambda^3) = \{t\}$ para todo $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$.

Modificando la prueba de [9, Proposición 5], obtenemos lo siguiente.

Lema 3.6. *Si $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, entonces la fibra $M_\lambda(SO_\lambda^3)$ tiene la forma*

$$M_\lambda(SO_\lambda^3) = (\text{clos}_{(SO_\lambda^3)^*}(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})) \setminus (\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})$$

donde $\text{clos}_{(SO_\lambda^3)^*}(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})$ es la cerradura $*$ -débil de $\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ en $(SO_\lambda^3)^*$, el espacio dual de SO_λ^3 .

Demostración. Primero, probemos que

$$M(SO_\lambda^3) \subset \text{clos}_{(SO_\lambda^3)^*}(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}). \quad (3.9)$$

Fijemos $\xi \in M(SO_\lambda^3)$. Cualquier $(SO_\lambda^3)^*$ -vecindad de ξ es de la forma

$$U := U_{a_1, \dots, a_n; \varepsilon}(\xi) = \left\{ \eta \in (SO_\lambda^3)^* : |\eta(a_i) - \xi(a_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n \right\},$$

donde $\varepsilon > 0$ y $a_1, \dots, a_n \in SO_\lambda^3$. Debemos demostrar que existe un $t_0 \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ tal que $\delta_{t_0} \in U$. Pongamos $a := |a_1 - \xi(a_1)| + \dots + |a_n - \xi(a_n)|$. De acuerdo a [27, § 13, Teorema 1], $a \in SO_\lambda^3$ y entonces $\xi(a) = 0$. Por eso, a no es invertible en SO_λ^3 y, por lo tanto, existe una sucesión $\{t_n\} \subset \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a(t_n) = 0$. Como $|a_i(t) - \xi(a_i)| \leq a(t)$ para todo $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ y cada i , deducimos que existe un $t_0 \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ tal que $|a_i(t_0) - \xi(a_i)| \leq a(t_0) < \varepsilon$ para cada i . En consecuencia, $\delta_{t_0} \in U$, lo cual implica (3.9).

Está claro que $\delta_t \notin M_\lambda(SO_\lambda^3)$ para $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ porque existe una función $b \in C(\dot{\mathbb{R}}) \cap SO_\lambda^3$ tal que $b(t) \neq 0$ para $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ y $b(\lambda) = 0$. Por eso, de (3.9), $M_\lambda(SO_\lambda^3) \subset (\text{clos}_{(SO_\lambda^3)^*}(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})) \setminus (\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})$.

Inversamente, sea $\xi \in (\text{clos}_{(SO_\lambda^3)^*}(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})) \setminus (\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})$, sean $a, b \in SO_\lambda^3$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces elijamos $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ de modo que $\delta_t \in U_{a,b,\varepsilon}(\xi)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |\xi(ab) - \xi(a)\xi(b)| &\leq |\xi(ab) - a(t)b(t)| + |a(t) - \xi(a)||b(t)| + |\xi(a)||b(t) - \xi(b)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon|b(t)| + |\xi(a)|\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ puede ser elegido arbitrariamente, tenemos que $\xi(ab) = \xi(a)\xi(b)$, esto es, $\xi \in M(SO_\lambda^3)$. Pero como $\xi \notin \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\} = \bigcup_{t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}} M_t(SO_\lambda^3)$, de hecho concluimos que $\xi \in M_\lambda(SO_\lambda^3)$. \square

Lema 3.7. *Si $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, entonces cada funcional lineal multiplicativo definido en SO_λ^3 se extiende a un funcional lineal multiplicativo en SO_λ .*

Demostración. Fijemos $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$. Como $M_t(SO_\lambda^3) = \{\delta_t\}$ para todo $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ y los funcionales de evaluación δ_t identificados con los puntos $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ pertenecen a $M(SO_\lambda)$, solo resta probar la existencia de las extensiones requeridas para los funcionales lineales multiplicativos $\xi \in M_\lambda(SO_\lambda^3)$.

Por el Lema 3.6, cada funcional $\xi \in M_\lambda(SO_\lambda^3)$ es el límite de una red $\{t_\alpha\} \subset \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ que no converge a funcionales $t \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$, es decir,

$$\xi(a) = \lim_{\alpha} t_\alpha(a) \quad \text{para cada } a \in SO_\lambda^3,$$

donde $t_\alpha(a) = a(t_\alpha)$ para $a \in SO_\lambda^3$ y $t_\alpha \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$. Entonces, para cada $a \in SO_\lambda^3$, $\{t_\alpha(a)\}$ es una red de Cauchy en \mathbb{C} , esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que $|t_\alpha(a) - t_\beta(a)| < \varepsilon$ si $\alpha, \beta \succ \gamma$. Dado $b \in SO_\lambda$, existe una sucesión $\{a_n\} \subset SO_\lambda^3$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|b - a_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$. Entonces de las relaciones

$$\begin{aligned} |t_\alpha(b) - t_\beta(b)| &\leq |t_\alpha(b - a_n)| + |t_\alpha(a_n) - t_\beta(a_n)| + |t_\beta(a_n - b)| \\ &\leq \|b - a_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + |t_\alpha(a_n) - t_\beta(a_n)| + \|b - a_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

se sigue que $\{t_\alpha(b)\}$ es una red de Cauchy en \mathbb{C} para cada $b \in SO_\lambda$, y por lo tanto esta red converge en \mathbb{C} y su límite es único.

Para cada $b \in SO_\lambda$, definimos $\tilde{\xi}(b) := \lim_{\alpha} t_\alpha(b)$. Entonces $\tilde{\xi}$ es un funcional lineal multiplicativo en SO_λ (y por lo tanto acotado de norma 1 por [69, Proposición 10.6, Teorema 10.7]) ya que

$$\tilde{\xi}(bd) = \lim_{\alpha} t_\alpha(bd) = \lim_{\alpha} t_\alpha(b) \lim_{\alpha} t_\alpha(d) = \tilde{\xi}(b)\tilde{\xi}(d) \quad \text{para todo } b, d \in SO_\lambda.$$

En consecuencia, $\tilde{\xi}$ es una extensión requerida de $\xi \in M(SO_\lambda^3)$ a SO_λ . □

Notemos que la prueba del Lema 3.7 en el caso $\lambda = \infty$ mejora aquella dada en [52, Lema 3.3].

Aplicando (3.7), la densidad de SO_λ^3 en $SO_{\lambda,p,w}$ en la norma de $M_{p,w}$ y el Lema 3.7, concluimos que para cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$ las álgebras de Banach conmutativas

$$B_1 = SO_\lambda^3, \quad B_2 = SO_{\lambda,p,w}, \quad B_3 = SO_\lambda$$

satisfacen las condiciones del Teorema 3.5. Por el Teorema 3.5, cada funcional lineal multiplicativo en $SO_{\lambda,p,w}$ se extiende a un funcional lineal multiplicativo en SO_λ , y por lo tanto $M(SO_{\lambda,p,w}) \subset M(SO_\lambda)$. Por otra parte, $M(SO_\lambda) \subset M(SO_{\lambda,p,w})$ ya que $SO_{\lambda,p,w} \subset SO_\lambda$. Así, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.8. *Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, entonces el espacio de ideales maximales de $SO_{\lambda,p,w}$ y SO_λ coinciden como conjuntos, esto es, $M(SO_{\lambda,p,w}) = M(SO_\lambda)$.*

Fijemos $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$. El Lema 3.8 y las relaciones (3.6) implican que

$$M_\lambda(SO_{p,w}^\circ) = M_\lambda(SO_{\lambda,p,w}) = M_\lambda(SO_\lambda) = M_\infty(SO_\infty) \quad (3.10)$$

para cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$. Análogamente a (3.5) y a (3.8) obtenemos que

$$M(SO_{p,w}^\circ) = \bigcup_{\lambda \in \dot{\mathbb{R}}} M_\lambda(SO_{p,w}^\circ). \quad (3.11)$$

Aplicando (3.11), (3.10) y (3.5) llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3.9. *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, entonces el espacio de ideales maximales de $SO_{p,w}^\circ$ y de SO° coinciden como conjuntos, $M(SO_{p,w}^\circ) = M(SO^\circ)$.*

En lo que sigue escribimos $a(\xi) := \xi(a)$ para $a \in SO_{p,w}^\circ$ y $\xi \in M(SO^\circ)$.

3.5. El espacio de ideales maximales de $PSO_{p,w}^\diamond$

Dado $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, el espacio de ideales maximales $M(PC_{p,w})$ de $PC_{p,w}$ puede identificarse con $\dot{\mathbb{R}} \times \{0, 1\}$ en el siguiente sentido: para $a \in PC_{p,w}$,

$$\begin{aligned} a(\lambda, 0) &= a(\lambda - 0), & a(\lambda, 1) &= a(\lambda + 0) \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \\ a(\lambda, 0) &= a(+\infty), & a(\lambda, 1) &= a(-\infty) \quad \text{si } \lambda = \infty. \end{aligned}$$

Para cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, denotemos por $PSO_{\lambda,p,w}$ a la subálgebra de Banach de $M_{p,w}$ generada por las álgebras de Banach $SO_{\lambda,p,w}$ y $PC_{\lambda,p,w} := PC_{p,w} \cap C(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\})$. Por analogía con [48, Lema 3.3], cada $\xi \in M_\lambda(PSO_{\lambda,p,w})$ es el límite de una red $\{t_\alpha\} \subset \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$ donde todos los caracteres t_α ahora están localizados en la misma semi-vecindad de λ en $\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}$. Entonces, similarmente al Lema 3.8 deducimos que

$$M_\lambda(PSO_{\lambda,p,w}) = M_\lambda(PSO_\lambda), \quad (3.12)$$

donde PSO_λ es la C^* -álgebra generada por SO_λ y $PC_\lambda := C(\dot{\mathbb{R}} \setminus \{\lambda\}) \cap PC$. Lo cuál a su vez (3.12) implica que

$$M_\lambda(PSO_{p,w}^\diamond) = M_\lambda(PSO_{\lambda,p,w}) = M_\lambda(PSO_\lambda) = M_\lambda(PSO^\diamond), \quad (3.13)$$

por lo tanto

$$M(PSO_{p,w}^\diamond) = \bigcup_{\lambda \in \dot{\mathbb{R}}} M_\lambda(PSO_{p,w}^\diamond) = \bigcup_{\lambda \in \dot{\mathbb{R}}} M_\lambda(PSO^\diamond) = M(PSO^\diamond). \quad (3.14)$$

De acuerdo a [63], las C^* -álgebras SO_∞ y $C(\overline{\mathbb{R}})$ son asintóticamente independientes, es decir, la fibra $M_\infty(PSO_\infty)$ es naturalmente homeomorfa a $M_\infty(SO_\infty) \times M_\infty(C(\overline{\mathbb{R}}))$, lo cual significa que la función restricción

$$\zeta \mapsto (\zeta|_{SO_\infty}, \zeta|_{C(\overline{\mathbb{R}})})$$

es un homeomorfismo de PSO_∞ , sobre $M_\infty(SO_\infty) \times M_\infty(C(\overline{\mathbb{R}}))$, donde $M_\infty(C(\overline{\mathbb{R}})) = \{0, 1\}$. En consecuencia, cada $\zeta \in M_\infty(PSO_\infty)$ lo podemos identificar con la pareja $(\xi, \mu) \in M_\infty(SO_\infty) \times \{0, 1\}$.

Lema 3.10. *Para cada $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, cada $p \in (1, \infty)$ y cada $w \in A_p(\mathbb{R})$, la fibra $M_\lambda(PSO_{p,w}^\diamond)$ es identificada con $M_\lambda(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$, y por eso*

$$M(PSO_{p,w}^\diamond) = M(SO^\diamond) \times \{0, 1\}. \quad (3.15)$$

Demostración. Fijemos $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$. El Corolario 3.2 implica que la aplicación $a \mapsto a \circ \beta_\lambda$ con β_λ dado por (3.4) es un isomorfismo isométrico de la C^* -álgebra PSO_λ sobre la C^* -álgebra PSO_∞ . Por lo tanto, $M_\lambda(PSO_\lambda) = M_\infty(PSO_\infty)$, donde $M_\infty(PSO_\infty) = M_\infty(SO_\infty) \times \{0, 1\}$. Ahora aplicando (3.6) deducimos que

$$M_\lambda(PSO_\lambda) = M_\infty(SO_\infty) \times \{0, 1\} = M_\lambda(SO_\lambda) \times \{0, 1\},$$

lo cual implica, debido a (3.13) y (3.10) que

$$M_\lambda(PSO_{p,w}^\diamond) = M_\lambda(SO^\diamond) \times \{0, 1\}. \quad (3.16)$$

Finalmente, (3.16), (3.14) y (3.11) nos dan inmediatamente (3.15). \square

Por (3.16), a cada $\zeta \in M_\lambda(PSO_{p,w}^\circ)$, donde $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, lo podemos identificar con la pareja $(\xi, \mu) \in M_\lambda(SO^\circ) \times \{0, 1\}$. Como $M_\lambda(PC_{p,w}) = M_\lambda(PC) = \{0, 1\}$, del Lema 3.10 se sigue que para cada $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ existe un homomorfismo

$$\phi_\xi : PSO_{p,w}^\circ \rightarrow PC_{p,w}|_{M_\lambda(PC)}, \quad (\phi_\xi a)(\mu) = (\xi, \mu)a \quad \text{para } \mu \in \{0, 1\}. \quad (3.17)$$

Si $a \in PC_{p,w}$, entonces deducimos que $(\xi, 0)a = a(\lambda - 0)$ y $(\xi, 1)a = a(\lambda + 0)$. Así, llegamos a la siguiente afirmación (cf. [5, Teorema 4.6]).

Teorema 3.11. *Si $(\xi, \mu) \in M_\lambda(SO^\circ) \times \{0, 1\}$ y $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, entonces $(\xi, \mu)|_{SO_{p,w}^\circ} = \xi$, $(\xi, \mu)|_{C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})} = \lambda$, $(\xi, \mu)|_{PC_{p,w}} = (\lambda, \mu)$.*

Para $a \in PSO_{p,w}^\circ$ y $\xi \in M(SO^\circ)$, ponemos

$$a(\xi^-) := a(\xi, 0) \quad \text{y} \quad a(\xi^+) := a(\xi, 1), \quad (3.18)$$

donde $a(\xi, \mu) = (\xi, \mu)a$ para $(\xi, \mu) \in M(SO^\circ) \times \{0, 1\}$. En particular, si $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, $a \in PSO_{\lambda,p,w}^\circ$ y $\xi = \lim_\alpha \delta_{t_\alpha} \in M_\lambda(SO^\circ)$, entonces $\lim_\alpha t_\alpha = \lambda$ y

$$\begin{aligned} a(\xi, 0) &= \lim_\alpha a(\lambda - |t_\alpha - \lambda|), & a(\xi, 1) &= \lim_\alpha a(\lambda + |t_\alpha - \lambda|) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}, \\ a(\xi, 0) &= \lim_\alpha a(|t_\alpha|), & a(\xi, 1) &= \lim_\alpha a(-|t_\alpha|) \quad \text{para } \lambda = \infty. \end{aligned}$$

La topología de Gelfand sobre $M(PSO_{p,w}^\circ)$ puede describirse como sigue. Si $\xi \in M_\lambda(SO_{p,w}^\circ)$ ($\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$), una base de vecindades para $(\xi, \mu) \in M(PSO_{p,w}^\circ)$ consiste de todos los conjuntos abiertos de la forma

$$U_{(\xi,\mu)} = \begin{cases} (U_{\xi,\lambda} \times \{0\}) \cup (U_{\xi,\lambda}^- \times \{0, 1\}) & \text{si } \mu = 0, \\ (U_{\xi,\lambda} \times \{1\}) \cup (U_{\xi,\lambda}^+ \times \{0, 1\}) & \text{si } \mu = 1, \end{cases}$$

donde $U_{\xi,\lambda} = U_\xi \cap M_\lambda(SO_{p,w}^\circ)$, U_ξ es una vecindad abierta de ξ en $M(SO_{p,w}^\circ)$, y $U_{\xi,\lambda}^-$, $U_{\xi,\lambda}^+$ consisten de todos los $\zeta \in U_\xi$ cuyas restricciones $\tau = \zeta|_{C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})}$ pertenecen, respectivamente, a los conjuntos $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ y $(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$, y $(\varepsilon, +\infty)$ y $(-\infty, -\varepsilon)$ si $\lambda = \infty$, donde $\varepsilon > 0$. Esta topología depende de la pareja (p, w) .

4. Álgebra de operadores del tipo de convolución con datos lentamente oscilatorios

4.1. Relaciones entre las clases de funciones SO° y VMO

Sea $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$. Dada una función localmente integrable $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ y un intervalo finito I en Γ , denotemos por $|I|$ a la longitud de I y denotemos por

$$I(f) := |I|^{-1} \int_I f(t) dt$$

al promedio de f sobre I . Para $a > 0$, consideremos las cantidades

$$\begin{aligned} M_a(f) &:= \sup_{|I| \leq a} |I|^{-1} \int_I |f(t) - I(f)| dt, \\ M_0(f) &:= \lim_{a \rightarrow 0} M_a(f), \quad \|f\|_* := \lim_{a \rightarrow \infty} M_a(f). \end{aligned} \quad (4.1)$$

La función $f \in L^1_{loc}(\Gamma)$ se dice que tiene oscilación media acotada, $f \in BMO(\Gamma)$, si $\|f\|_* < \infty$. El espacio $BMO(\Gamma)$ es un espacio de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_*$, siempre que dos funciones que difieren por una constante sean identificadas. Una función $f \in BMO(\Gamma)$ se dice que tiene oscilación media cero, $f \in VMO(\Gamma)$, si $M_0(f) = 0$. Como es bien sabido (ver, p. ej., [74]), $VMO(\Gamma)$ es un subespacio cerrado de $BMO(\Gamma)$.

Consideremos el homeomorfismo $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(t) = i(1+t)/(1-t)$. Por [26, Capítulo VI, Corolario 1.3], $f \in BMO(\mathbb{R})$ si y sólo si $f \circ \gamma \in BMO(\mathbb{T})$, y las normas de estas funciones son equivalentes. Por otra parte,

$$VMO := \{f \circ \gamma^{-1} : f \in VMO(\mathbb{T})\} \quad (4.2)$$

es un subespacio cerrado propio de $VMO(\mathbb{R})$. Como $VMO(\mathbb{T})$ es la cerradura de $C(\mathbb{T})$ en $BMO(\mathbb{T})$ (ver, p. ej., [26, p. 253]), (4.2) implica la siguiente propiedad de VMO .

Proposición 4.1. *VMO es la cerradura en $BMO(\mathbb{R})$ del conjunto $C(\dot{\mathbb{R}})$.*

Sea H^∞ la subálgebra cerrada de $L^\infty(\mathbb{R})$ que consiste de todas las funciones que son límites no-tangenciales en \mathbb{R} de funciones analíticas acotadas sobre el semi-plano superior.

Teorema 4.2. *La C^* -álgebra SO^\diamond está contenida en la C^* -álgebra QC de funciones casi-continuas en \mathbb{R} , donde*

$$QC := (H^\infty + C(\dot{\mathbb{R}})) \cap (\overline{H^\infty} + C(\dot{\mathbb{R}})) = VMO \cap L^\infty(\mathbb{R}). \quad (4.3)$$

Demostración. Si $a \in SO_\infty$, entonces $\tilde{a} := a \circ \gamma \in SO_1(\mathbb{T})$ en vista del Lema 3.1. Por [75, Lema 1] y [64, Lema A4], cada función $\tilde{a} \in SO_1(\mathbb{T})$ pertenece al conjunto $VMO(\mathbb{T}) \cap \overline{L^\infty(\mathbb{T})}$. De acuerdo a [74], $VMO(\mathbb{T}) \cap \overline{L^\infty(\mathbb{T})} = QC(\mathbb{T})$, donde $QC(\mathbb{T}) := (H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})) \cap (\overline{H^\infty(\mathbb{T})} + C(\mathbb{T}))$ es la C^* -álgebra de funciones casi-continuas en \mathbb{T} , y $H^\infty(\mathbb{T})$ es la subálgebra cerrada de $L^\infty(\mathbb{T})$ que consiste de todas las funciones que son límites no-tangenciales en \mathbb{T} de funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Así, $\tilde{a} \in QC(\mathbb{T})$, y por eso $a = \tilde{a} \circ \gamma^{-1} \in QC$, donde QC está dado por (4.3). Aplicando (4.3) y el Corolario 3.2, deducimos que para todo $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$ las C^* -álgebras SO_λ , y por consiguiente SO^\diamond , están contenidas en QC . \square

4.2. Compacidad de los conmutadores

Dado $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, consideremos el álgebra de Banach $\mathcal{B}_{p,w} := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, w))$ y su ideal de operadores compactos $\mathcal{K}_{p,w} := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{R}, w))$. El caso en que $w \equiv 1$ abreviamos a $\mathcal{B}_{p,1}$ y a $\mathcal{K}_{p,1}$ por \mathcal{B}_p y \mathcal{K}_p , respectivamente. La notación $C_p(\dot{\mathbb{R}})$, $C_p(\overline{\mathbb{R}})$, PC_p y $SO_{\infty,p}$ se entiende análogamente.

Para dos álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} contenidas en un álgebra de Banach \mathcal{C} , denotamos por $\text{alg}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ al subálgebra de Banach de \mathcal{C} generada por las álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Primero recordemos dos resultados conocidos sobre la compacidad de conmutadores.

Lema 4.3. [24, Lemas 7.1–7.4] *Sea $1 < p < \infty$.*

- (a) *Si $a \in PC$, $b \in PC_p$, y $a(\pm\infty) = b(\pm\infty) = 0$, entonces $aW^0(b), W^0(b)aI \in \mathcal{K}_p$.*
- (b) *Si $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b \in PC_p$, o $a \in PC$ y $b \in C_p(\dot{\mathbb{R}})$, entonces $[aI, W^0(b)] \in \mathcal{K}_p$.*
- (c) *Si $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $b \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$, entonces $[aI, W^0(b)] \in \mathcal{K}_p$.*

Teorema 4.4. [3, Teorema 4.2, Corolario 4.3] Si $1 < p < \infty$, $a \in \text{alg}(SO_\infty, PC)$ y $b \in SO_{\infty,p}$, o $a \in SO_\infty$ y $b \in \text{alg}(SO_{\infty,p}, PC_p)$, o $a \in \text{alg}(SO_\infty, C(\overline{\mathbb{R}}))$ y $b \in \text{alg}(SO_{\infty,p}, C_p(\overline{\mathbb{R}}))$, entonces $[aI, W^0(b)] \in \mathcal{K}_p$.

El uso de un análogo con peso [43] del teorema de Krasnoselskii [57, Teorema 3.10] sobre la interpolación de la compacidad, el cual se sigue del teorema de interpolación de Stein-Weiss (ver, p. ej., [10, Corolario 5.5.4]), nos lleva al siguiente resultado de compacidad.

Lema 4.5. [43, Corolario 5.3] Si un operador lineal T es acotado en cada espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{R}, w)$ ($1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R})$) y T es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, entonces T es compacto en cada espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$.

Aplicando la teoría de operadores pseudodiferenciales y de Calderón-Zygmund, establecemos el siguiente resultado de compacidad para espacios de Lebesgue con pesos.

Teorema 4.6. Sea $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$. Si $a \in PSO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$, o $a \in SO^\diamond$ y $b \in PSO_{p,w}^\diamond$, o $a \in \text{alg}(SO_\infty, C(\overline{\mathbb{R}}))$ y $b \in \text{alg}(SO_{\infty,p,w}, C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}}))$, entonces el conmutador $[aI, W^0(b)]$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$.

Demostración. Por definición, $PSO_{p,w}^\diamond = \text{alg}(SO_{p,w}^\diamond, PC_{p,w}) \subset M_{p,w}$, donde $SO_{p,w}^\diamond$ es la subálgebra de Banach de $M_{p,w}$ generada por todas las álgebras $SO_{\lambda,p,w}$ ($\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$), $SO_{\lambda,p,w}$ es la cerradura de SO_λ^3 en $M_{p,w}$, y $PC_{p,w}$ es la cerradura en $M_{p,w}$ del conjunto de funciones continuas a trozos de variación total finita, y de aquí $PC_{p,w}$ es la cerradura en $M_{p,w}$ del conjunto de todas las funciones constantes a trozos con conjuntos finitos de discontinuidades (ver, p. ej., [24, Observación 2.12]). Además, $C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$ es la cerradura de $C(\overline{\mathbb{R}}) \cap V(\mathbb{R})$ en $M_{p,w}$. En consecuencia, es suficiente probar la compacidad del conmutador $[aI, W^0(b)]$ en los cuatro casos siguientes $\lambda, \mu \in \dot{\mathbb{R}}$:

- 1) $a \in SO_\lambda$ y $b \in SO_\mu^3$,
- 2) $a \in SO_\lambda$ y $b(x) = \text{sign}(x - \mu)$,
- 3) $a(x) = \text{sign}(x - \lambda)$ y $b \in SO_\mu^3$,
- 4) $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $b \in C(\overline{\mathbb{R}}) \cap V(\mathbb{R})$.

Bajo estas condiciones sobre las funciones a y b , los conmutadores $[aI, W^0(b)]$ son operadores lineales acotados en cada espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$. Por lo tanto, de acuerdo al Lema 4.5, es suficiente probar la compacidad del conmutador $[aI, W^0(b)]$ solo en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, lo cual implica su compacidad en todos los espacios $L^p(\mathbb{R}, w)$. Así, en el caso de $L^2(\mathbb{R})$ podemos reemplazar $b \in SO_\mu^3$ por $b \in SO_\mu$. Entonces el caso 3) se reduce al caso 2) bajo la transformación $A \mapsto \mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$. En efecto, $\mathcal{F}a\mathcal{F}^{-1} = W^0(\tilde{b})$ y $\mathcal{F}W^0(b)\mathcal{F}^{-1} = \tilde{a}I$ donde $\tilde{b}(x) = a(-x)$ y $\tilde{a} = b$. Como la afirmación en el caso 4) para el espacio $L^2(\mathbb{R})$ se sigue del Lema 4.3(c), solo resta considerar los casos 1) y 2).

1) Sea $a \in SO_\lambda$ y $b \in SO_\mu$ ($\lambda, \mu \in \dot{\mathbb{R}}$). Si $\lambda = \mu = \infty$, entonces la compacidad del conmutador $[aI, W^0(b)]$ se sigue del Teorema 4.4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu = \infty$. En este caso asumimos sin pérdida de generalidad que $b \in SO_\infty^3$. Entonces de [52, Lema 2.2] se sigue que la distribución $K = \mathcal{F}^{-1}b$ coincide con una función diferenciable $K(\cdot)$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y tal que

$$|K(x)| \leq A_0|x|^{-1}, \quad |K'(x)| \leq A_1|x|^{-2} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.4)$$

donde las constantes A_α ($\alpha = 0, 1$) están acotadas por

$$A_\alpha \leq C_\alpha \max \{ \|D^k b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} : k = 0, 1, 2, 3 \},$$

$(Db)(x) = xb'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y las constantes $C_\alpha \in (0, \infty)$ dependen solo de α . Por consiguiente $K(\cdot)$ es un kernel clásico de Calderón-Zygmund, y el operador de convolución $W^0(b)$ puede ser considerado como el operador de Calderón-Zygmund dado por

$$(Tf)(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

donde T es acotado en cada espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{R}, w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$ (ver, p. ej., Teorema 3.3). En particular, la segunda condición en (4.4) implica que existe una constante $A_2 \in (0, \infty)$ tal que

$$|K(x-y) - K(x)| \leq A_2 |y|^\delta |x|^{-1-\delta} \quad \text{para } |x| \geq 2|y| > 0, \quad (4.6)$$

donde $\delta \in (0, 1)$. Más aún, como el operador de convolución $W^0(b)$ es acotado en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, concluimos de [73, p. 291, Proposición 2] que

$$\sup_{0 < r < R < \infty} \left| \int_{r < |x| < R} K(x) dx \right| < \infty. \quad (4.7)$$

Ya que las condiciones (4.4), (4.6) y (4.7) para el operador $T = W^0(b)$ representado en la forma (4.5) se satisfacen, deducimos de [30, Teorema 7.5.6] que existe una constante $C \in (0, \infty)$ tal que

$$\|[aI, W^0(b)]\|_{\mathcal{B}_2} \leq C \|a\|_* \quad (4.8)$$

para cada $a \in BMO(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ y $\|\cdot\|_*$ está dada por (4.1). Por otra parte, por el Teorema 4.2, la función $a \in SO_\lambda$ pertenece al espacio de Banach VMO , de aquí, por la Proposición 4.1, para cada $a \in SO_\lambda$ existe una sucesión $\{a_n\} \in C(\dot{\mathbb{R}})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\|_* = 0$, y por eso, de (4.8),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[aI, W^0(b)] - [a_n I, W^0(b)]\|_{\mathcal{B}_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|[a - a_n]I, W^0(b)\|_{\mathcal{B}_2} = 0. \quad (4.9)$$

Pero $[a_n I, W^0(b)] \in \mathcal{K}_2$ para todo $a_n \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b \in SO_\infty$ en virtud del Teorema 4.4. En consecuencia, deducimos de (4.9) que el conmutador $[aI, W^0(b)]$ es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ para cada $a \in SO_\lambda$ y cada $b \in SO_\infty$, lo cual prueba la afirmación para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu = \infty$.

El caso $\lambda = \infty$ y $\mu \in \mathbb{R}$ se reduce al caso previo bajo la transformación $A \mapsto \mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$. Ahora sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces

$$[aI, W^0(b)] = [(a - a(\infty))I, W^0(b - b(\infty))], \quad (4.10)$$

y existen funciones $c, d \in C(\dot{\mathbb{R}})$ que se anulan en ∞ y funciones $\tilde{a}, \tilde{b} \in L^\infty(\mathbb{R})$ tales que $a - a(\infty) = \tilde{a}c$ y $b - b(\infty) = \tilde{b}d$. Ya que los operadores $cW^0(d)$ y $W^0(d)cI$ son compactos en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ debido al Lema 4.3(a), deducimos de (4.10) y la igualdad

$$[(a - a(\infty))I, W^0(b - b(\infty))] = \tilde{a}cW^0(d)W^0(\tilde{b}) - W^0(\tilde{b})W^0(d)c\tilde{a}I$$

que $[aI, W^0(b)] \in \mathcal{K}_2$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, lo cual completa la prueba en el caso 1).

2) Ahora sea $a \in SO_\lambda$ y $b(x) = \text{sign}(x - \mu)$ donde $\lambda, \mu \in \dot{\mathbb{R}}$. Claramente, podemos excluir $\mu = \infty$. Ya que $a \in QC = (H^\infty + C(\dot{\mathbb{R}})) \cap (\overline{H^\infty} + C(\dot{\mathbb{R}}))$ en vista del Teorema 4.2, se sigue inmediatamente del resultado de compacidad de Hartman (ver, p. ej., [16, Teorema 2.18]) que $[aI, S_\mathbb{R}] \in \mathcal{K}_2$ (ver también [63, Sección 4]). Entonces, aplicando la igualdad $W^0(b) = -e_{-\mu} S_\mathbb{R} e_\mu I$ donde $e_\mu(x) = e^{i\mu x}$ para $\mu, x \in \mathbb{R}$, deducimos que el conmutador $[aI, W^0(b)] = -e_{-\mu} [aI, S_\mathbb{R}] e_\mu I$ es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, lo cual completa la demostración en el caso 2). \square

4.3. Enfoque abstracto de operadores límite

En lo que sigue necesitamos usar técnicas de operadores límite. Recordemos la versión abstracta de tales técnicas.

Sea X un espacio de Banach y sea X^* su espacio dual. Siguiendo [46], decimos que un operador $V \in \mathcal{B}(X)$ es una *isometría escalada* si V es invertible en $\mathcal{B}(X)$ y $\|V\|_{\mathcal{B}(X)} = 1/\|V^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}$. Fijemos un conjunto $\mathbb{V} \subset \mathcal{B}(X)$ de isometrías escaladas.

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{V}$. Si los límites fuertes

$$A_\mathcal{V} := \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_n^{-1} A V_n) \text{ en } \mathcal{B}(X), \quad A_{\mathcal{V}^*} := \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_n^{-1} A V_n)^* \text{ en } \mathcal{B}(X^*) \quad (4.11)$$

existen, entonces siempre $(A_\mathcal{V})^* = A_{\mathcal{V}^*}$, y nos referiremos al operador $A_\mathcal{V}$ como un *operador límite* del operador A con respecto a la sucesión \mathcal{V} . Notemos que usualmente el operador límite $A_\mathcal{V}$ está definido independientemente de la existencia del límite fuerte $A_{\mathcal{V}^*}$ (ver, p. ej., [14], [66]), mientras que para nuestros propósitos necesitamos la existencia de ambos límites (4.11). Si el operador límite $A_\mathcal{V}$ existe, entonces está únicamente determinado por A y \mathcal{V} , lo cual justifica la notación $A_\mathcal{V}$.

En el siguiente enunciado ponemos las propiedades básicas de los operadores límite (ver, p. ej., [14, Proposición 6.1] o [66, Proposición 1.2.2]).

Lema 4.7. *Supongamos que $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(X)$ es una sucesión de isometrías escaladas.*

- (a) *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ y $A_\mathcal{V}$ existe, entonces $\|A_\mathcal{V}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(X)}$.*
- (b) *Si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, y si los operadores límite $A_\mathcal{V}$, $B_\mathcal{V}$ existen, entonces los operadores límite $(\alpha A)_\mathcal{V}$, $(A + B)_\mathcal{V}$, $(AB)_\mathcal{V}$ también existen y*

$$(\alpha A)_\mathcal{V} = \alpha A_\mathcal{V}, \quad (A + B)_\mathcal{V} = A_\mathcal{V} + B_\mathcal{V}, \quad (AB)_\mathcal{V} = A_\mathcal{V} B_\mathcal{V}.$$

- (c) *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ y si $\{A_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{B}(X)$ es tal que los operadores límite $(A_m)_\mathcal{V}$ existen para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\|A - A_m\|_{\mathcal{B}(X)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces el operador límite $A_\mathcal{V}$ existe y $\|A_\mathcal{V} - (A_m)_\mathcal{V}\|_{\mathcal{B}(X)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.*

El siguiente lema (cf. [46, Teorema 4.2]), obtenido por analogía con [66, Proposición 1.2.9] y siendo una generalización de [28, Cap. 3, Lema 1.1], es útil para estudiar la invertibilidad de operadores en álgebras de Banach cocientes. Damos su prueba.

Lema 4.8. *Sea X un espacio de Banach, \mathcal{A} una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(X)$, y sea \mathcal{J} un ideal bilateral cerrado de \mathcal{A} . Supongamos que $A \in \mathcal{A}$ y para cualquier pareja de elementos $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, sea $\mathfrak{U}(J_1, J_2)$ un conjunto de sucesiones $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{V}$ para el cual los operadores límite $A_\mathcal{V}$ existen y los operadores límite $(J_1)_\mathcal{V}$ y $(J_2)_\mathcal{V}$ existen y son iguales a cero. Si la clase lateral $A + \mathcal{J}$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{A}/\mathcal{J} , entonces los operadores límite $A_\mathcal{V}$ son invertibles en $\mathcal{B}(X)$ para todo $\mathcal{V} \in \mathfrak{U} := \bigcup_{J_1, J_2 \in \mathcal{J}} \mathfrak{U}(J_1, J_2)$ y las normas de sus inversos están acotadas uniformemente.*

Demostración. Si la clase lateral $A + \mathcal{J}$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{A}/\mathcal{J} , entonces existe $B \in \mathcal{A}$ y $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ tales que $I = AB + J_1$ e $I = BA + J_2$. Fijemos una sucesión $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}(J_1, J_2)$. Entonces el operador límite $A_{\mathcal{V}}$ existe. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} I^* &= (V_n^{-1}V_n)^* = (V_n)^*(V_n^{-1})^* = (V_n)^*(AB + J_1)^*(V_n^{-1})^* \\ &= [(V_n)^*B^*(V_n^{-1})^*][(V_n)^*A^*(V_n^{-1})^*] + (V_n)^*J_1^*(V_n^{-1})^* \\ &= (V_n^{-1}BV_n)^*(V_n^{-1}AV_n)^* + (V_n^{-1}J_1V_n)^*. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Obviamente,

$$\|(V_n^{-1}BV_n)^*\|_{\mathcal{B}(X^*)} \leq \|V_n^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \|B\|_{\mathcal{B}(X)} \|V_n\|_{\mathcal{B}(X)} = \|B\|_{\mathcal{B}(X)}. \quad (4.13)$$

Deducimos de (4.12) y (4.13) que para todo $f \in X^*$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_{X^*} \leq \|B\|_{\mathcal{B}(X)} \|(V_n^{-1}AV_n)^*f\|_{X^*} + \|(V_n^{-1}J_1V_n)^*f\|_{X^*}. \quad (4.14)$$

Como $J_1 \in \mathcal{J}$ y, para todo $f \in X^*$ y todo $g \in X$,

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} ((V_n^{-1}J_1V_n)^*f), g \right) = \left(f, \lim_{n \rightarrow \infty} (V_n^{-1}J_1V_n g) \right),$$

se sigue de las condiciones del lema que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(V_n^{-1}J_1V_n)^*f\|_{X^*} = 0.$$

Por otra parte, de la definición del operador límite $A_{\mathcal{V}}$ y la propiedad $A_{\mathcal{V}^*} = (A_{\mathcal{V}})^*$ se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(V_n^{-1}AV_n)^*f\|_{X^*} = \|(A_{\mathcal{V}})^*f\|_{X^*}.$$

Así, el paso en (4.14) al límite cuando $n \rightarrow \infty$ nos da

$$\|f\|_{X^*} \leq \|B\|_{\mathcal{B}(X)} \|(A_{\mathcal{V}})^*f\|_{X^*} \quad (4.15)$$

para todo $f \in X^*$. Análogamente, de $I = BA + J_2$ tenemos que

$$\|g\|_X \leq \|B\|_{\mathcal{B}(X)} \|A_{\mathcal{V}}g\|_X \quad (4.16)$$

para todo $g \in X$. De (4.15) y (4.16) concluimos que $A_{\mathcal{V}}$ es invertible en $\mathcal{B}(X)$ y $\|(A_{\mathcal{V}})^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \|B\|_{\mathcal{B}(X)}$ para todo $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}(J_1, J_2)$. Por lo tanto los operadores límite $A_{\mathcal{V}}$ son invertibles y por lo anterior sus normas están acotadas por $\|B\|_{\mathcal{B}(X)}$ para todo $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}$. \square

4.4. Aplicaciones de los operadores límite

Fijemos $w \in A_p(\mathbb{R})$. Entonces $v = \log w$ es una función BMO en \mathbb{R} (ver, p. ej., [26, Capítulo 6]). Por consiguiente, de [26, Capítulo 6, Teorema 1.2] se sigue que existen dos funciones continuas

$$v_{\pm}(x) := x \int_x^{\pm\infty} \frac{v(\tau)}{\tau^2} d\tau \quad \text{para } \pm x > 0. \quad (4.17)$$

Las funciones v_{\pm} son diferenciables casi donde quiera en $\mathbb{R}_{\pm} = \{x : \pm x > 0\}$, y

$$xv'_{\pm}(x) = v_{\pm}(x) - v(x) \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (4.18)$$

En lo que sigue asumimos que al menos una de las funciones $x \mapsto xv'_{\pm}(x)$ pertenece a L^{∞} en una vecindad $U_{\pm} \subset \mathbb{R}_{\pm}$ de $\pm\infty$, respectivamente. Por (4.18), esto es equivalente a la condición

$$v_- - v \in L^{\infty}(U_-) \quad \text{o} \quad v_+ - v \in L^{\infty}(U_+). \quad (4.19)$$

Decimos que un peso w es localmente equivalente a un peso W en una vecindad U_{\pm} de $\pm\infty$ si $w/W, W/w \in L^{\infty}(U_{\pm})$. Así, en vista de (4.18), el peso $w = e^v$ es localmente equivalente al peso $w_{\pm} = e^{v_{\pm}}$ en una vecindad U_{\pm} de $\pm\infty$, respectivamente. Por eso, los pesos \tilde{w}_{\pm} que coinciden con w en $\mathbb{R} \setminus U_{\pm}$ y con w_{\pm} en U_{\pm} , pertenecen a $A_p(\mathbb{R})$ junto con w , y $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, w))$ si y sólo si $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, \tilde{w}_{\pm}))$.

Sea $e_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x}$ para todo $\lambda, x \in \mathbb{R}$, y sea $U_{\lambda} = W^0(e_{\lambda})$ el operador de traslación que actúa por la regla $(U_{\lambda}f)(x) = f(x - \lambda)$ para $x \in \mathbb{R}$. Sea $SO_p^{\circ} := SO_{p,1}^{\circ}$. Como es usual, para todo $a \in SO^{\circ}$ y todo $\xi \in M(SO^{\circ})$ ponemos $a(\xi) := \xi(a)$.

Lema 4.9. *Si $1 < p < \infty$, $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$, $a \in SO^{\circ}$, $b \in SO_{p,w}^{\circ}$, y se cumple (4.19), entonces para cada $\xi \in M_{\infty}(SO^{\circ})$ existe una sucesión $\{h_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $h_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a(h_n) = a(\xi)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b(h_n) = b(\xi)$, y*

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{h_n}(aI)e_{h_n}^{-1}I) = aI, \quad \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{h_n}W^0(b)e_{h_n}^{-1}I) = b(\xi)I, \quad (4.20)$$

en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$,

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (U_{-h_n}\tilde{w}_+a\tilde{w}_+^{-1}U_{h_n}) &= a(\xi)I, \\ \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (U_{-h_n}\tilde{w}_+W^0(b)\tilde{w}_+^{-1}U_{h_n}) &= W^0(b), \end{aligned} \quad (4.21)$$

en el espacio $L^p(\mathbb{R})$ si $v_+ - v \in L^{\infty}(U_+)$, y

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (U_{h_n}\tilde{w}_-a\tilde{w}_-^{-1}U_{-h_n}) &= a(\xi)I, \\ \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (U_{h_n}\tilde{w}_-W^0(b)\tilde{w}_-^{-1}U_{-h_n}) &= W^0(b), \end{aligned} \quad (4.22)$$

en el espacio $L^p(\mathbb{R})$ si $v_- - v \in L^{\infty}(U_-)$.

Demostración. Por definición (ver Subsección 3.2), cada función $b \in SO_{p,w}^{\circ}$ es aproximada en el álgebra de Banach $M_{p,w}$ por una sucesión de funciones $b_m = \sum_{\lambda \in F_m} b_{m,\lambda}$ donde $b_{m,\lambda} \in SO_{\lambda}^3$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y los F_m son subconjuntos finitos de \mathbb{R} que contienen a ∞ . Por lo tanto $b_m \in SO_{p,w}^{\circ} \cap SO_p^{\circ}$.

Fijemos $\xi \in M_{\infty}(SO^{\circ})$. Como el conjunto $\{b_{m,\infty} \in SO_{\infty}^3 : m \in \mathbb{N}\}$ es a lo más numerable, de la Proposición 3.4 se sigue que existe una sucesión $\{h_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $h_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$\xi(b_{m,\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m,\infty}(x + h_n) \quad (4.23)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ y todo $m \in \mathbb{N}$. Debido a que las funciones $b_{m,\lambda}$ son continuas en ∞ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, concluimos que para estos m y λ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{m,\lambda}(x + h_n) = b_{m,\lambda}(\infty) = \xi(b_{m,\lambda}). \quad (4.24)$$

Como el límite

$$b = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in F_m} b_{m,\lambda}, \quad (4.25)$$

es uniforme en la norma de $M_{p,w}$, deducimos de (4.23), (4.24) y (4.25), que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b(x + h_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in F_m} b_{m,\lambda}(x + h_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in F_m} b_{m,\lambda}(x + h_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in F_m} \xi(b_{m,\lambda}) = \xi(b). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Más aún, en vista de (3.1) uno puede fácilmente probar que la convergencia en (4.26) es uniforme sobre compactos de \mathbb{R} .

Por otra parte, en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ también tenemos lo siguiente:

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{h_n} W^0(b) e_{h_n}^{-1}) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(\cdot + h_n)) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(h_n)). \quad (4.27)$$

En efecto, de acuerdo a [51, Lema 2.5] establecido por analogía con [72, Sección 3.2], para cada $f \in L^p(\mathbb{R}, w)$ y cada $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$, tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}, w)} = 0, \quad (4.28)$$

donde $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \varphi(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ahora, eligiendo funciones rápidamente decrecientes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ cuyas transformadas de Fourier $\mathcal{F}\varphi$ tienen soportes compactos en \mathbb{R} , obtenemos de (4.28) que el conjunto Φ de funciones en $L^p(\mathbb{R}, w)$ cuyas transformadas de Fourier tienen soportes compactos en \mathbb{R} es denso en $L^p(\mathbb{R}, w)$. Por eso, para cada función $f \in \Phi$ existe una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto en \mathbb{R} tal que

$$(W^0[b(\cdot + h_n) - b(h_n)])f = \mathcal{F}^{-1}[b(\cdot + h_n) - b(h_n)]\psi \mathcal{F}f. \quad (4.29)$$

Por analogía con (4.26), de (4.25) se sigue que

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \|[b(\cdot + h_n) - b(h_n)]\psi\|_{M_{p,w}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\lambda \in F_m} [b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)]\psi \right\|_{M_{p,w}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\lambda \in F_m} [b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)]\psi \right\|_{M_{p,w}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in F_m} \lim_{n \rightarrow \infty} \|[b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)]\psi\|_{M_{p,w}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

En vista del Teorema 3.3, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\|[b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)]\psi\|_{M_{p,w}} \\ &\leq C_{p,w} \max_{k=0,1,2,3} \|D^k([b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)]\psi)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde $(Da)(x) = xa'(x)$.

Sea $K := \text{supp } \psi$. Como K es un subconjunto compacto de \mathbb{R} y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} | [b_{m,\lambda}(x + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)] | &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} | (D^k b_{m,\lambda})(x + h_n) | &= 0 \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(ver [14, Sección 4]), inferimos de (4.31) y las relaciones

$$\begin{aligned} &D^k ([b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)] \psi) \\ &= \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (D^\nu [b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)]) (D^{k-\nu} \psi), \end{aligned}$$

$\max_{k=0,1,2,3} \|D^k \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$, y

$$\begin{aligned} D[b_{m,\lambda}(x + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)] &= \frac{x}{x + h_n} (Db_{m,\lambda})(x + h_n), \\ D^2[b_{m,\lambda}(x + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)] &= \frac{x^2}{(x + h_n)^2} (D^2 b_{m,\lambda})(x + h_n) \\ &\quad + \frac{x h_n}{(x + h_n)^2} (Db_{m,\lambda})(x + h_n), \\ D^3[b_{m,\lambda}(x + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)] &= \frac{x^3}{(x + h_n)^3} (D^3 b_{m,\lambda})(x + h_n) \\ &\quad + \frac{3x^2 h_n}{(x + h_n)^3} (D^2 b_{m,\lambda})(x + h_n) + \frac{x h_n^2 - x^2 h_n}{(x + h_n)^3} (Db_{m,\lambda})(x + h_n), \end{aligned}$$

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| [b_{m,\lambda}(\cdot + h_n) - b_{m,\lambda}(h_n)] \psi \|_{M_{p,w}} = 0. \quad (4.32)$$

Entonces de (4.30) y (4.32) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| [b(\cdot + h_n) - b(h_n)] \psi \|_{M_{p,w}} = 0,$$

lo cual junto con (4.29) implica (4.27). Por lo tanto,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e_{h_n} W^0(b) e_{h_n}^{-1}) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(h_n)) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} b(h_n) I = b(\xi) I.$$

En consecuencia, obtenemos (4.20) ya que la primera igualdad en (4.20) es evidente.

Solo resta probar (4.21) ya que la prueba de (4.22) es similar. Como el peso $w_+ = e^{v_+}$ es equivalente al peso $w = e^v$ en una vecindad de $+\infty$, concluimos que los operadores $\tilde{w}_+ a \tilde{w}_+^{-1} I$ y $\tilde{w}_+ W^0(b) \tilde{w}_+^{-1} I$ para $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$ son acotados en el espacio $L^p(\mathbb{R})$. Como la primer igualdad en (4.21) es evidente, demosetremos la segunda igualdad dada ahí.

Primero, supongamos que $b \in SO_{p,w}^\diamond \cap SO_p^\diamond$. Como la función $x \mapsto x v'_+(x)$ pertenece a $L^\infty(U_+)$, deducimos que para todo $h_n > 0$ suficientemente grande,

$$\left| \int_{h_n}^{x+h_n} t v'_+(t) \frac{dt}{t} \right| \leq \sup_{t \in U_+} \text{ess} |t v'_+(t)| \left| \ln \left(\frac{x + h_n}{h_n} \right) \right|,$$

lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{h_n}^{x+h_n} t v'_+(t) \frac{dt}{t} \right) = 0$$

uniformemente en compactos de \mathbb{R} . Por eso,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\exp(v_+(\cdot + h_n) - v_+(h_n)) I \right] = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\exp \left(\int_{h_n}^{(\cdot + h_n)} t v'_+(t) \frac{dt}{t} \right) I \right] = I.$$

En consecuencia, para $b \in M_{p,w} \cap M_p$, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (U_{-h_n} \tilde{w}_+ W^0(b) \tilde{w}_+^{-1} U_{h_n}) &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(e^{v_+(\cdot + h_n)} W^0(b) e^{-v_+(\cdot + h_n)} I \right) \\ &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\exp(v_+(\cdot + h_n) - v_+(h_n)) W^0(b) \exp(v_+(h_n) - v_+(\cdot + h_n)) I \right) \\ &= W^0(b), \end{aligned} \tag{4.33}$$

lo cual completa la prueba de (4.21) para $b \in SO_{p,w}^\diamond \cap SO_p^\diamond$.

Para todo $b \in SO_{p,w}^\diamond \cap SO_p^\diamond$ de (4.33) se sigue que

$$\|W^0(b)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))} \leq \|\tilde{w}_+ W^0(b) \tilde{w}_+^{-1} I\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))} \leq \|W^0(b)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}, \tilde{w}_+))},$$

y por lo tanto, para estos b ,

$$\|b\|_{M_p} \leq \|b\|_{M_{p, \tilde{w}_+}}. \tag{4.34}$$

Como cada función $b \in SO_{p,w}^\diamond$ es aproximada en el álgebra de Banach $M_{p,w}$ por una sucesión de funciones $b_m \in SO_{p,w}^\diamond \cap SO_p^\diamond$ y como las normas $\|\cdot\|_{M_{p, \tilde{w}_+}}$ y $\|\cdot\|_{M_{p,w}}$ son equivalentes, deducimos de (4.34) que $SO_{p,w}^\diamond \subset SO_p^\diamond$ para todos los pesos considerados $w \in A_p(\mathbb{R})$, lo cual implica (4.21) para todo $b \in SO_{p,w}^\diamond$. \square

4.5. El espacio de ideales maximales del subálgebra central $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$.

Para $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, consideremos la subálgebra de Banach

$$\mathfrak{A}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in PSO^\diamond, b \in PSO_{p,w}^\diamond) \tag{4.35}$$

de $\mathcal{B}_{p,w}$ generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in PSO^\diamond$) y todos los operadores de convolución $W^0(b) = \mathcal{F}^{-1} b \mathcal{F}$ ($b \in PSO_{p,w}^\diamond$), y la subálgebra de Banach

$$\mathcal{Z}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in SO^\diamond, b \in SO_{p,w}^\diamond) \tag{4.36}$$

de $\mathfrak{A}_{p,w}$ generada por todos los operadores $aW^0(b)$ con $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$. Junto con el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_{p,w} \subset \mathcal{B}_{p,w}$ dada por (4.36), consideremos la subálgebra de Banach

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in C(\dot{\mathbb{R}}), b \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})) \tag{4.37}$$

de $\mathcal{Z}_{p,w}$ generada por los operadores aI y $W^0(b)$ con $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$.

Por analogía con [67, Proposición 5.8.1], obtenemos lo siguiente.

Lema 4.10. *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$, entonces el álgebra de Banach $\widehat{\mathcal{Z}}_{p,w}$ contiene al ideal $\mathcal{K}_{p,w}$ de operadores compactos en $\mathcal{B}_{p,w}$.*

Demostración. Como es bien sabido, cada operador compacto en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ puede aproximarse uniformemente en $\mathcal{B}_{p,w}$ por una suma finita de operadores de rango uno de la forma

$$(T\varphi)(x) = a(x) \int_{\mathbb{R}} b(y) \varphi(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (4.38)$$

donde $a \in L^p(\mathbb{R}, w)$, $b \in L^q(\mathbb{R}, w^{-1})$ y $1/p + 1/q = 1$. Ya que el conjunto $C_0(\mathbb{R})$ de funciones continuas en \mathbb{R} con soporte compacto es denso en $L^p(\mathbb{R}, w)$ y $L^q(\mathbb{R}, w^{-1})$, podemos tomar $a, b \in C_0(\mathbb{R})$ en (4.38). Entonces existe un número $M > 0$ tal que el conjunto $\{x - y : x \in \text{supp } a, y \in \text{supp } b\}$ está contenido en el segmento $[-M, M]$. Ahora, elijamos una función

$$k(x) := \begin{cases} 1 - \exp((x + M)^{-3}) & \text{si } x < -M, \\ 1 & \text{si } x \in [-M, M], \\ 1 - \exp(-(x - M)^{-3}) & \text{si } x > M. \end{cases}$$

Entonces (4.38) puede escribirse en la forma

$$(T\varphi)(x) = a(x) \int_{\mathbb{R}} k(x - y)b(y) \varphi(y) dy = [aW^0(\widehat{k})b\varphi](x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Resta probar que $\widehat{k} \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$ ya que entonces $T \in \widehat{\mathcal{Z}}_{p,w}$ debido a (4.37). Obviamente, $k \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^3 k(x)] = \pm 1$. Se ve fácilmente que las funciones $k(x), k'(x), xk(x), xk'(x), xk''(x)$ pertenecen al espacio $L^1(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $\widehat{k}, \widehat{k}' \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $\widehat{k}(\infty) = \widehat{k}'(\infty) = 0$. Más aún,

$$\begin{aligned} x^2 \widehat{k}'(x) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 (iy) e^{ixy} k(y) dy = [x e^{ixy} y k(y)] \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x e^{ixy} [k(y) + yk'(y)] dy \\ &= i \int_{\mathbb{R}} (ix) e^{ixy} [k(y) + yk'(y)] dy = [i e^{ixy} [k(y) + yk'(y)]] \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &\quad - i \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} [2k'(y) + yk''(y)] dy = -i \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} [2k'(y) + yk''(y)] dy, \end{aligned}$$

y por eso $\widehat{k}' \in L^1(\mathbb{R})$, lo cual implica que $\widehat{k} \in C(\dot{\mathbb{R}})$ es de variación total acotada. De aquí, por (2.9), $\widehat{k} \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$ para todo $p \in (1, \infty)$ y todo $w \in A_p(\mathbb{R})$. \square

Por el Lema 4.10,

$$\mathcal{K}_{p,w} \subset \widehat{\mathcal{Z}}_{p,w} \subset \mathcal{Z}_{p,w} \subset \mathfrak{A}_{p,w}, \quad (4.39)$$

donde $\mathfrak{A}_{p,w}$ está dada por (4.35). Entonces del Teorema 4.6 se sigue que el álgebra de Banach conmutativo $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi := \mathcal{Z}_{p,w}/\mathcal{K}_{p,w}$ es un subálgebra central del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}^\pi := \mathfrak{A}_{p,w}/\mathcal{K}_{p,w}$.

Teorema 4.11. *Si $1 < p < \infty$, $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$, y (4.19) se cumple, con v_\pm dado por (4.17), entonces el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{Z}_{p,w}^\pi)$ del álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ es homeomorfo al conjunto*

$$\begin{aligned} \Omega := & \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \right) \\ & \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

equipado con la topología inducida por la topología producto de $M(SO^\diamond) \times M(SO^\diamond)$, y la transformada de Gelfand $\Gamma : \mathcal{Z}_{p,w}^\pi \rightarrow C(\Omega)$, $A^\pi \mapsto \mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ está definida en los generadores $A^\pi = (aW^0(b))^\pi$ del álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$, donde $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$, por $\mathcal{A}(\xi, \eta) = a(\xi)b(\eta)$ para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$.

Demostración. Notemos que si J es un ideal maximal de $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$, entonces

$$J \cap \{aI + \mathcal{K}_{p,w} : a \in SO^\diamond\} \quad \text{y} \quad J \cap \text{clos}\{W^0(b) + \mathcal{K}_{p,w} : b \in SO_{p,w}^\diamond\}$$

son ideales maximales de las álgebras de Banach conmutativas

$$\{aI + \mathcal{K}_{p,w} : a \in SO^\diamond\} \quad \text{y} \quad \text{clos}\{W^0(b) + \mathcal{K}_{p,w} : b \in SO_{p,w}^\diamond\}, \quad (4.41)$$

respectivamente (ver [18, Lema 1.33]). Por eso, tomando en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} M(\{aI + \mathcal{K}_{p,w} : a \in SO^\diamond\}) &= M(SO^\diamond), \\ M(\text{clos}\{W^0(b) + \mathcal{K}_{p,w} : b \in SO_{p,w}^\diamond\}) &= M(SO_{p,w}^\diamond), \end{aligned}$$

y el hecho de que $M(SO_{p,w}^\diamond) = M(SO^\diamond)$ debido al Teorema 3.9, concluimos que para cada punto $(\xi, \eta) \in M(SO^\diamond) \times M(SO^\diamond)$ existe el ideal bilateral cerrado (no necesariamente maximal) $I_{\xi,\eta}^\pi$ del álgebra de Banach $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ generado por los ideales maximales

$$\begin{aligned} &\{aI + \mathcal{K}_{p,w} : a \in SO^\diamond, \xi(a) = 0\} \quad \text{y} \\ &\text{clos}\{W^0(b) + \mathcal{K}_{p,w} : b \in SO_{p,w}^\diamond, \eta(b) = 0\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

de las álgebras de Banach conmutativas (4.41), respectivamente. Así, en virtud de (3.5), el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ puede identificarse con un subconjunto de

$$M(SO^\diamond) \times M(SO^\diamond) = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \cup M_\infty(SO^\diamond) \right) \times \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \cup M_\infty(SO^\diamond) \right).$$

Fijemos $(\xi, \eta) \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond)$. Dados $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$ elijamos funciones $a_1 \in C(\dot{\mathbb{R}})$ y $b_1 \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$ tales que $a(\xi) = a_1(\xi)$, $b(\eta) = b_1(\eta)$, y $a_1(\infty) = b_1(\infty) = 0$. Entonces

$$aW^0(b) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (4.43)$$

donde

$$T_1 = (a - a_1)W^0(b - b_1), \quad T_2 = (a - a_1)W^0(b_1), \quad T_3 = a_1W^0(b - b_1), \quad T_4 = a_1W^0(b_1).$$

El operador T_4 es compacto por el Lema 4.3(a), y las clases laterales $T_1^\pi, T_2^\pi, T_3^\pi$ pertenecen al ideal $I_{\xi,\eta}^\pi$. En consecuencia, el ideal bilateral cerrado más pequeño de $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ que corresponde al punto $(\xi, \eta) \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond)$ coincide con toda el álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$. Así que, los ideales maximales del álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ solo pueden corresponder a puntos $(\xi, \eta) \in \Omega$, donde Ω está dado por (4.40).

Solo resta demostrar que para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$, los ideales bilaterales cerrados $I_{\xi,\eta}^\pi$ generados por los ideales maximales (4.42) son ideales maximales del álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$.

Primero, probemos que estos ideales son propios. Para este fin necesitamos demostrar que para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$ los ideales $I_{\xi,\eta}^\pi$ no contienen a la clase lateral $I^\pi = I + \mathcal{K}_{p,w}$. Claramente, los ideales $I_{\xi,\eta}^\pi$ son cerraduras en $\mathcal{B}_{p,w}^\pi = \mathcal{B}_{p,w}/\mathcal{K}_{p,w}$ de los conjuntos

$$\left\{ \sum_{n=1}^N [a_n I]^\pi A_n^\pi + \sum_{m=1}^M [W^0(b_m)]^\pi B_m^\pi \right\} \quad (4.44)$$

donde $a_n \in SO^\circ$, $\xi(a_n) = 0$, $b_m \in SO_{p,w}^\circ$, $\eta(b_m) = 0$, y $A_n, B_m \in \mathcal{Z}_{p,w}$.

Dado $t \in \mathbb{R}$, sea $(\xi, \eta) \in M_t(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$. Supongamos que $I^\pi \in I_{\xi, \eta}^\pi$. de aquí, por (4.44), existe una sucesión de operadores de la forma

$$C_k = \sum_{n=1}^{N_k} a_{n,k} A_{n,k} + \sum_{m=1}^{M_k} W^0(b_{m,k}) B_{m,k} \quad (4.45)$$

con $a_{n,k} \in SO^\circ$, $\xi(a_{n,k}) = 0$, $b_{m,k} \in SO_{p,w}^\circ$, $\eta(b_{m,k}) = 0$ y $A_{n,k}, B_{m,k} \in \mathcal{Z}_{p,w}$, y existe una sucesión de operadores compactos $K_k \in \mathcal{K}_{p,w}$ tal que $C_k^\pi \in I_{\xi, \eta}^\pi$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \|C_k + K_k - I\| = 0$. Como para cada $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ y cada conjunto numerable $\{b_k\} \subset SO_{p,w}^\circ$ existe una sucesión $h_\nu \rightarrow +\infty$ en \mathbb{R} tal que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_k(x + h_\nu) = \eta(b_k)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver [14, Corolario 4.3]), concluimos que existe una sucesión $\{h_\nu\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu = +\infty$ y, para todo $m = 1, 2, \dots, M_k$ y todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_{m,k}(h_\nu) = 0$ y por eso, de (4.20) en el Lema 4.9, $s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (e_{h_\nu} W^0(b_{m,k}) e_{-h_\nu} I) = 0$. Más aún, de (4.45), las propiedades algebraicas de los operadores límite (ver [14, Proposición 6.1]) y [51, Lema 3.8] se sigue que podemos elegir la sucesión $\{h_\nu\}$ en tal forma que exista el límite fuerte

$$\tilde{C}_k := s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (e_{h_\nu} (C_k + K_k) e_{-h_\nu} I) = \sum_{n=1}^{N_k} a_{n,k} \tilde{A}_{n,k} \in \mathcal{B}_{p,w},$$

donde $\tilde{A}_{n,k} = \tilde{a}_{n,k} I$ y $\tilde{a}_{n,k} \in SO^\circ$. De aquí, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{C}_k = I$, lo cual es imposible ya que los operadores \tilde{C}_k pertenecen al ideal maximal $\{aI : a \in SO^\circ, \xi(a) = 0\}$ del álgebra de Banach $\{aI : a \in SO^\circ\}$.

Dado $t \in \mathbb{R}$, ahora sea $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_t(SO^\circ)$, y otra vez supongamos que $I^\pi \in I_{\xi, \eta}^\pi$. Por determinación, supongamos que $v_+ - v \in L^\infty(U_+)$ en (4.19). Entonces análogamente al caso previo existe una sucesión de operadores C_k de la forma (4.45), donde $a_{n,k} \in SO^\circ$, $\xi(a_{n,k}) = 0$, $b_{m,k} \in SO_{p,w}^\circ$, $\eta(b_{m,k}) = 0$ y $A_{n,k}, B_{m,k} \in \mathcal{Z}_{p,w}$, y existe una sucesión de operadores compactos $K_k \in \mathcal{K}_{p,w}$ tal que $C_k^\pi \in I_{\xi, \eta}^\pi$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \|C_k + K_k - I\| = 0$. En consecuencia, en el espacio $L^p(\mathbb{R})$ tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{N_k} a_{n,k} \tilde{w}_+ A_{n,k} \tilde{w}_+^{-1} I + \sum_{m=1}^{M_k} \tilde{w}_+ W^0(b_{m,k}) B_{m,k} \tilde{w}_+^{-1} I + \tilde{w}_+ K_k \tilde{w}_+^{-1} I \right) = I,$$

donde \tilde{w}_+ es el peso construido en la Subsección 4.4 que es equivalente al peso w en una vecindad U_+ de $+\infty$. Como para cada $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ y cada conjunto numerable $\{a_k\} \subset SO^\circ$ existe una sucesión $h_\nu \rightarrow +\infty$ en \mathbb{R} tal que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_k(x + h_\nu) = \xi(a_k)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver [14, Corolario 4.3]), concluimos que existe una sucesión $\{h_\nu\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu = +\infty$ y para todo $n = 1, 2, \dots, N_k$ y todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{n,k}(h_\nu) = 0$ y por eso $s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (U_{-h_\nu} a_{n,k} U_{h_\nu}) = 0$, donde $U_{h_\nu} = W^0(e_{h_\nu})$ es un operador de traslación. Ya que la función $x \mapsto xv'_+(x)$ pertenece a $L^\infty(U_+)$, deducimos de (4.21) en el Lema 4.9 que

$$s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (U_{-h_\nu} \tilde{w}_+ W^0(b_{m,k}) \tilde{w}_+^{-1} U_{h_\nu}) = W^0(b_{m,k}).$$

Entonces, usando (4.45), las propiedades algebraicas de los operadores límite (ver [14, Proposición 6.1]) y [16, Lema 18.9], podemos elegir a la sucesión $\{h_\nu\}$ en tal forma que exista el límite fuerte

$$\hat{C}_k := s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (U_{-h_\nu} \tilde{w}_+ (C_k + K_k) \tilde{w}_+^{-1} U_{h_\nu}) = \sum_{m=1}^{M_k} W^0(b_{m,k}) \hat{B}_{m,k} \in \mathcal{B}_p,$$

donde $\widehat{B}_{m,k} = W^0(\widehat{b}_{m,k})$ y $\widehat{b}_{m,k} \in SO_{p,w}^\diamond \subset SO_p^\diamond$ para los pesos considerados w . De aquí, $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{C}_k = I$ en la norma de \mathcal{B}_p , lo cual es imposible ya que los operadores \widehat{C}_k pertenecen al ideal maximal $\text{clos}\{W^0(b) : b \in SO_{p,w}^\diamond, \eta(b) = 0\}$ del álgebra de Banach $\text{clos}\{W^0(b) : b \in SO_{p,w}^\diamond\}$.

Así, para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$ los ideales $I_{\xi,\eta}^\pi$ no contienen a la clase lateral unidad I^π , y por lo tanto estos ideales son propios. Supongamos, contrariamente a nuestra pretensión en la maximalidad del ideal $I_{\xi,\eta}^\pi$, que para un punto $(\xi, \eta) \in \Omega$ existe un ideal bilateral cerrado propio $\widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi$ del álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ que contiene propiamente al ideal $I_{\xi,\eta}^\pi$. Entonces existe una clase lateral $A^\pi \in \mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ que pertenece a $\widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi \setminus I_{\xi,\eta}^\pi$. Ya que, en vista de (4.43),

$$(aW^0(b))^\pi - (a(\xi)W^0(b(\eta)))^\pi = (aW^0(b))^\pi - (a(\xi)b(\eta)I)^\pi \in I_{\xi,\eta}^\pi \quad (4.46)$$

para todo $a \in SO^\diamond$ y todo $b \in SO_{p,w}^\diamond$, y como $A^\pi \notin I_{\xi,\eta}^\pi$, existe un número complejo $c \neq 0$ tal que $A^\pi - (cI)^\pi \in I_{\xi,\eta}^\pi$. En consecuencia $(cI)^\pi \in \widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi$ porque $A^\pi \in \widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi$ y $I_{\xi,\eta}^\pi \subset \widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi$. Pero la clase lateral $(cI)^\pi$ es invertible en el álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$, lo cual implica que el ideal $\widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi$ coincide con toda el álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$. Así el ideal $\widetilde{I}_{\xi,\eta}^\pi$ no es propio, lo cual es una contradicción. En consecuencia, todos los ideales $I_{\xi,\eta}^\pi$ para $(\xi, \eta) \in \Omega$ son maximales, y por eso $M(\mathcal{Z}_{p,w}^\pi)$ puede ser identificado con Ω dado por (4.40).

Además, por (4.46), el valor de la transformada de Gelfand de la clase lateral $A^\pi = (aW^0(b))^\pi$ en un punto $(\xi, \eta) \in \Omega$ es igual a $a(\xi)b(\eta)$ para cada elección de $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$. Esto define la transformada de Gelfand para toda el álgebra $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$. \square

Corolario 4.12. *Si $1 < p < \infty$, $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$, y (4.19) se cumple, entonces el operador $A \in \mathcal{Z}_{p,w}$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si la transformada de Gelfand de la clase lateral A^π es invertible, esto es, si $\mathcal{A}(\xi, \eta) \neq 0$ para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$.*

Como $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ es un subálgebra central del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}^\pi$, aplicando el principio local de Allan-Douglas (ver, p. ej., [18]) y el teorema de dos idempotentes (ver, p. ej., [12]), uno puede construir una teoría de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ (cf. [3]–[4]).

5. Estudio local del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$

5.1. El principio local de Allan-Douglas.

Como el principio local de Allan-Douglas juega un papel fundamental en este trabajo recordemos su enunciado. Sea $\mathcal{G}A$ el grupo de elementos invertibles de un álgebra de Banach unitaria A .

Teorema 5.1. *Sea A un álgebra de Banach con identidad I , B una subálgebra cerrada del centro de A que contiene a I , $N \subset B$ un ideal maximal de B , J_N el ideal bilateral cerrado de A más pequeño que contiene a N , A_N el álgebra cociente A/J_N , y $M(B)$ el espacio de ideales maximales de B .*

- i) $a \in A$ es invertible por la izquierda (invertible por la derecha, invertible) en A , si y sólo si para cada $N \in M(B)$, la clase lateral $a_N = a + J_N$ es invertible por la izquierda (invertible por la derecha, invertible) en A_N .*

ii) La función $M(B) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $N \mapsto \|a_N\|$ es semicontinua por arriba. Si $a \in A$ y $a_{N_0} \in \mathcal{G}A_{N_0}$, entonces $a_N \in \mathcal{G}A_N$ para todo N en alguna vecindad de N_0 .

iii) Si A es una C^* -álgebra, entonces $\|a\| = \max_{N \in M(B)} \|a_N\|$ para cada $a \in A$.

En lo que sigue asumimos que $1 < p < \infty$, $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$, y se cumple (4.19) con v_\pm dado por (4.17). Sea Λ el subálgebra de Banach de $\mathcal{B}_{p,w}$ que consiste de todos los operadores en $\mathcal{B}_{p,w}$ que conmutan módulo operadores compactos con cada operador $A \in \mathcal{Z}_{p,w}$. Claramente, Λ contiene a $\mathfrak{A}_{p,w}$, y por el Lema 4.10, $\mathcal{K}_{p,w} \subset \mathfrak{A}_{p,w}$, en consecuencia el álgebra de Banach cociente $\Lambda^\pi := \Lambda/\mathcal{K}_{p,w}$ contiene al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}^\pi$. Además, el álgebra Λ^π es el conmutante del álgebra cociente $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$, y por lo tanto Λ^π es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}_{p,w}^\pi = \mathcal{B}_{p,w}/\mathcal{K}_{p,w}$, esto es, los espectros de cada clase lateral $A^\pi \in \Lambda^\pi$ en las álgebras Λ^π y $\mathcal{B}_{p,w}^\pi$ coinciden.

Por el Teorema 4.11, el conjunto Ω dado por (4.40) es el espacio de ideales maximales del subálgebra central $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}^\pi$. Dado $(\xi, \eta) \in \Omega$, sea $J_{\xi,\eta}^\pi$ el ideal bilateral cerrado más pequeño de Λ^π que contiene al ideal maximal $I_{\xi,\eta}^\pi$ de $\mathcal{Z}_{p,w}^\pi$ generado por los ideales maximales

$$\begin{aligned} & \{aI + \mathcal{K}_{p,w} : a \in SO^\circ, a(\xi) = 0\} \quad y \\ & \text{clos}\{W^0(b) + \mathcal{K}_{p,w} : b \in SO_{p,w}^\circ, b(\eta) = 0\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

de las álgebras de Banach conmutativas

$$\{aI + \mathcal{K}_{p,w} : a \in SO^\circ\} \quad y \quad \text{clos}\{W^0(b) + \mathcal{K}_{p,w} : b \in SO_{p,w}^\circ\}, \quad (5.2)$$

respectivamente, y sea $\phi_{\xi,\eta} : \Lambda^\pi \rightarrow \Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ el homomorfismo canónico de Λ^π sobre el álgebra de Banach cociente $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi := \Lambda^\pi/J_{\xi,\eta}^\pi$. Por el principio local de Allan-Douglas, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Lema 5.2. *Una clase lateral $A^\pi \in \Lambda^\pi$ es invertible en Λ^π si y sólo si para cada pareja $(\xi, \eta) \in \Omega$ la clase lateral $A_{\xi,\eta}^\pi := A^\pi + J_{\xi,\eta}^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$.*

5.2. Representantes locales

Identifiquemos las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi$ para $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$, donde $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$.

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, denotemos por χ_λ^- y χ_λ^+ a las funciones características de $(-\infty, \lambda)$ y $(\lambda, +\infty)$, respectivamente, $\chi_\pm := \chi_0^\pm$, y para cada $p \in (1, \infty)$, cada $w \in A_p(\mathbb{R})$, cada $\zeta \in M_\infty(SO^\circ)$, y cada $a \in PSO_{p,w}^\circ$, introducimos la función $\tilde{a}_\zeta \in C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$ dada por

$$\tilde{a}_\zeta := a(\zeta^+)u_- + a(\zeta^-)u_+, \quad (5.3)$$

donde los valores $a(\zeta^\pm)$ están definidos por (3.18) y las funciones $u_\pm \in C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$ están dadas por $u_\pm(x) = (1 \pm \tanh x)/2$ para $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos la siguiente generalización de [3, Lema 5.2].

Lema 5.3. *Sean $a \in PSO^\circ$, $b \in PSO_{p,w}^\circ$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ y*

$$(\phi_\xi a)(\mu) = 0 \quad \text{para todo } \mu \in M_\lambda(PC), \quad (5.4)$$

donde ϕ_ξ es el homomorfismo definido por (3.17) entonces $[aI]_{\xi,\eta}^\pi = 0_{\xi,\eta}^\pi = J_{\xi,\eta}^\pi$ para todo $\eta \in M(SO^\circ)$. Si $\eta \in M_\lambda(SO^\circ)$ y

$$(\phi_\eta b)(\mu) = 0 \quad \text{para todo } \mu \in M_\lambda(PC), \quad (5.5)$$

entonces $[W(b)]_{\xi,\eta}^\pi = 0_{\xi,\eta}^\pi = J_{\xi,\eta}^\pi$ para todo $\xi \in M(SO^\circ)$.

Demostración. Obviamente, es suficiente probar el lema solo para funciones $a \in PSO^\circ$ y $b \in PSO_{p,w}^\circ$ que tienen conjuntos finitos de discontinuidades.

Sea $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ donde $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, y supongamos que se cumple (5.4). Como $a \in PSO^\circ$ tiene un conjunto finito de discontinuidades, del Teorema 3.11 se sigue que existen funciones $a_\lambda^\pm \in SO_\lambda$ tales que

$$a_\lambda^-(\zeta) = a(\zeta, 0), \quad a_\lambda^+(\zeta) = a(\zeta, 1) \quad \text{para todo } \zeta \in M_\lambda(SO^\circ) \quad (5.6)$$

y, para la función

$$\psi_\lambda(a) := \begin{cases} a_\lambda^+ \chi_- + a_\lambda^- \chi_+ & \text{si } \lambda = \infty, \\ a_\lambda^- \chi_\lambda^- + a_\lambda^+ \chi_\lambda^+ & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.7)$$

en PSO° , la función $\tilde{a} := a - \psi_\lambda(a)$ es idénticamente cero en una vecindad del punto $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$. Entonces existe una función $c_\lambda \in C(\dot{\mathbb{R}})$ tal que $c_\lambda(\lambda) = 0$, $c_\lambda(t) = 1$ para todo $t \in \text{supp } \tilde{a}$ y $\tilde{a} = c_\lambda \tilde{a}$, lo cual implica que $[\tilde{a}I]_{\zeta,\eta}^\pi = J_{\zeta,\eta}^\pi$ para todo $\zeta \in M_\lambda(SO^\circ)$ y todo $\eta \in M(SO^\circ)$. Por otra parte, de (5.4), (3.17) y (5.6), $a_\lambda^\pm(\xi) = 0$, y por eso de (5.7) se sigue que $[\psi_\lambda(a)I]_{\xi,\eta}^\pi = J_{\xi,\eta}^\pi$ para $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ dado y todo $\eta \in M(SO^\circ)$. En consecuencia, bajo la condición (5.4), $[aI]_{\xi,\eta}^\pi = [(\tilde{a} + \psi_\lambda(a))I]_{\xi,\eta}^\pi = J_{\xi,\eta}^\pi$ para $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ dado y todo $\eta \in M(SO^\circ)$.

Análogamente, si $\eta \in M_\lambda(SO^\circ)$ para $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$ y si se cumple (5.5), entonces para cada función $b \in PSO_{p,w}^\circ$ con un conjunto finito de discontinuidades existen funciones $b_\lambda^\pm \in SO_{\lambda,p,w}$ tales que

$$b_\lambda^-(\zeta) = b(\zeta, 0), \quad b_\lambda^+(\zeta) = b(\zeta, 1) \quad \text{para todo } \zeta \in M_\lambda(SO^\circ) \quad (5.8)$$

y la función $\tilde{b} := b - \psi_\lambda(b)$ es idénticamente cero en una vecindad del punto $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, donde la función $\psi_\lambda(b) \in PSO_{p,w}^\circ$ está dada por (5.7) con a y a_λ^\pm reemplazadas por b y b_λ^\pm , respectivamente. Entonces existe una función $c_\lambda \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$ tal que $c_\lambda(\lambda) = 0$, $c_\lambda(t) = 1$ para todo $t \in \text{supp } \tilde{b}$ y $\tilde{b} = c_\lambda \tilde{b}$, lo cual implica que

$$[W^0(\tilde{b})]_{\xi,\zeta}^\pi = [W^0(c_\lambda)W^0(\tilde{b})]_{\xi,\zeta}^\pi = J_{\xi,\zeta}^\pi$$

para todo $\zeta \in M_\lambda(SO^\circ)$ y todo $\xi \in M(SO^\circ)$. Por otra parte, de (5.5), (3.17) y (5.8), $b_\lambda^\pm(\eta) = 0$, y por eso la clase lateral

$$[W^0(\psi_\lambda(b))]_{\xi,\eta}^\pi = \begin{cases} [W^0(b_\lambda^+)W^0(\chi_-) + W^0(b_\lambda^-)W^0(\chi_+)]_{\xi,\eta}^\pi & \text{si } \lambda = \infty, \\ [W^0(b_\lambda^+)W^0(\chi_\lambda) + W^0(b_\lambda^-)W^0(\chi_\lambda)]_{\xi,\eta}^\pi & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

coincide con $J_{\xi,\eta}^\pi$ para $\eta \in M_\lambda(SO^\circ)$ dado y todo $\xi \in M(SO^\circ)$. Por lo tanto, bajo la condición (5.5),

$$[W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi = [W^0(\tilde{b}) + W^0(\psi_\lambda(b))]_{\xi,\eta}^\pi = J_{\xi,\eta}^\pi$$

para $\eta \in M_\lambda(SO^\circ)$ dado y todo $\xi \in M(SO^\circ)$. \square

Sea $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ la subálgebra cerrada más pequeña de $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ que contiene al conjunto $\{A_{\xi,\eta}^\pi : A^\pi \in \mathfrak{A}_{p,w}^\pi\}$.

Teorema 5.4. Para cada $(\xi, \eta) \in \Omega$ y cada $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $\delta_{\xi, \eta} : A \mapsto A_{\xi, \eta}^\pi$ definida en los generadores aI ($a \in PSO^\diamond$) y $W^0(b)$ ($b \in PSO_{p, w}^\diamond$) del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p, w}$ por

$$\delta_{\xi, \eta}(aI) := \begin{cases} [(a(\xi^-)\chi_\lambda^- + a(\xi^+)\chi_\lambda^+)I]_{\xi, \eta}^\pi, & (\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond), \\ [(a(\xi^+)\chi_- + a(\xi^-)\chi_+)I]_{\xi, \eta}^\pi, & (\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond), \\ [\tilde{a}_\xi I]_{\xi, \eta}^\pi, & (\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\text{y por } \delta_{\xi, \eta}(W^0(b)) := \begin{cases} [W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+)]_{\xi, \eta}^\pi, & (\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond), \\ [W^0(b(\eta^-)\chi_\tau^- + b(\eta^+)\chi_\tau^+)]_{\xi, \eta}^\pi, & (\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond), \\ [W^0(\tilde{b}_\eta)]_{\xi, \eta}^\pi, & (\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \end{cases} \quad (5.10)$$

se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach $\delta_{\xi, \eta} : \mathfrak{A}_{p, w} \rightarrow \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$.

Más aún, para todo $A \in \mathfrak{A}_{p, w}$,

$$\sup_{(\xi, \eta) \in \Omega} \|\delta_{\xi, \eta}(A)\|_{\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi} \leq \|A^\pi\| := \inf_{K \in \mathcal{K}_{p, w}} \|A + K\|.$$

Demostración. Sea $(\xi, \eta) \in \Omega$. Consideremos los homomorfismos naturales de álgebras de Banach

$$\delta_{\xi, \eta} : \mathfrak{A}_{p, w} \rightarrow \mathfrak{A}_{p, w}^\pi \rightarrow \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi, \quad A \mapsto A^\pi \mapsto A_{\xi, \eta}^\pi.$$

Obviamente, para cada $A \in \mathfrak{A}_{p, w}$,

$$\sup_{(\xi, \eta) \in \Omega} \|\delta_{\xi, \eta}(A)\|_{\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi} \leq \|A^\pi\|.$$

Solo resta demostrar las igualdades (5.9) y (5.10) para $a \in PSO^\diamond$ y $b \in PSO_{p, w}^\diamond$.

Fijemos $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$. Las funciones

$$\hat{a}_\xi := a - a(\xi^-)\chi_\lambda^- - a(\xi^+)\chi_\lambda^+ \quad \text{y} \quad \hat{b}_\eta := b - b(\eta^+)\chi_- - b(\eta^-)\chi_+$$

pertenecen a PSO^\diamond y $PSO_{p, w}^\diamond$, respectivamente. Más aún, de (3.17) y (3.18) se sigue que $(\phi_\xi(\hat{a}_\xi))(\mu) = 0$ para todo $\mu \in M_\lambda(PC)$ y $(\phi_\eta(\hat{b}_\eta))(\mu) = 0$ para todo $\mu \in M_\infty(PC)$. Entonces, por el Lema 5.3,

$$[\hat{a}_\xi I]_{\xi, \eta}^\pi = [W^0(\hat{b}_\eta)]_{\xi, \eta}^\pi = J_{\xi, \eta}^\pi, \quad (5.11)$$

lo cual implica que para $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$,

$$\begin{aligned} [aI]_{\xi, \eta}^\pi &= [(a(\xi^-)\chi_\lambda^- + a(\xi^+)\chi_\lambda^+)I]_{\xi, \eta}^\pi, \\ [W^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi &= [W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+)]_{\xi, \eta}^\pi. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$. Las funciones

$$\hat{a}_\xi := a - a(\xi^+)\chi_- + a(\xi^-)\chi_+ \quad \text{y} \quad \hat{b}_\eta := b - b(\eta^-)\chi_\tau^- - b(\eta^+)\chi_\tau^+$$

pertencen a PSO^\diamond y $PSO_{p,w}^\diamond$, respectivamente. Ya que otra vez $(\phi_\xi(\widehat{a}_\xi))(\mu) = 0$ para todo $\mu \in M_\infty(PC)$ y $(\phi_\eta(\widehat{b}_\eta))(\mu) = 0$ para todo $\mu \in M_\tau(PC)$ en vista de (3.17) y (3.18), deducimos otra vez (5.11) del Lema 5.3. Así, para $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$, obtenemos

$$\begin{aligned} [aI]_{\xi,\eta}^\pi &= [(a(\xi^+)\chi_- + a(\xi^-)\chi_+)I]_{\xi,\eta}^\pi, \\ [W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi &= [W^0(b(\eta^-)\chi_\tau^- - b(\eta^+)\chi_\tau^+)]_{\xi,\eta}^\pi. \end{aligned}$$

Finalmente, sea $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$. Como, por (3.17) y (3.18),

$$\phi_\xi(a - \widetilde{a}_\xi) = 0, \quad \phi_\eta(b - \widetilde{b}_\eta) = 0,$$

donde las funciones \widetilde{a}_ξ y \widetilde{b}_η están dadas por (5.3), del Lema 5.3 se sigue inmediatamente que

$$[aI]_{\xi,\eta}^\pi = [\widetilde{a}_\xi I]_{\xi,\eta}^\pi, \quad [W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi = [W^0(\widetilde{b}_\eta)]_{\xi,\eta}^\pi.$$

En consecuencia, para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$, las fórmulas (5.9) para $\delta_{\xi,\eta}(aI) = [aI]_{\xi,\eta}^\pi$ y las fórmulas (5.10) para $\delta_{\xi,\eta}(W^0(b)) = [W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi$ quedan probadas. \square

El Teorema 5.4 y el Lema 5.2 implican inmediatamente lo siguiente.

Corolario 5.5. *Un operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi = \delta_{\xi,\eta}(A) \in \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ son invertibles en las álgebras cocientes $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$.*

5.3. Estructura de las álgebras locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$

Lema 5.6. *Las álgebras locales $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ generadas por todas las clases laterales $[aW^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi = [aW^0(b)]^\pi + J_{\xi,\eta}^\pi$, donde $a \in PSO^\diamond$ y $b \in PSO_{p,w}^\diamond$, tienen la siguiente estructura:*

(i) *si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$, entonces $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ está generada por la unidad $I_{\xi,\eta}^\pi$ y por los dos idempotentes*

$$P := [\chi_\lambda^+ I]_{\xi,\eta}^\pi, \quad Q := [W^0(\chi_0^-)]_{\xi,\eta}^\pi; \quad (5.12)$$

(ii) *si $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$, entonces $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ está generada por la unidad $I_{\xi,\eta}^\pi$ y por los dos idempotentes*

$$P := [\chi_0^- I]_{\xi,\eta}^\pi, \quad Q := [W^0(\chi_\tau^+)]_{\xi,\eta}^\pi; \quad (5.13)$$

(iii) *si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$, entonces $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ está generada por la unidad $I_{\xi,\eta}^\pi$ y por los dos idempotentes que conmutan mutuamente*

$$P := [u_- I]_{\xi,\eta}^\pi, \quad Q := [W^0(u_-)]_{\xi,\eta}^\pi, \quad (5.14)$$

donde $u_-(x) = (1 - \tanh x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Del Teorema 5.4 tenemos lo siguiente.

(i) Si $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} [aW^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi &= [(a(\xi^-)\chi_\lambda^- + a(\xi^+)\chi_\lambda^+)I]_{\xi, \eta}^\pi [W^0(b(\eta^+)\chi_0^- + b(\eta^-)\chi_0^+)]_{\xi, \eta}^\pi \\ &= \left(a(\xi^-)[I]_{\xi, \eta}^\pi + \widehat{a}(\xi)[\chi_\lambda^+I]_{\xi, \eta}^\pi \right) \left(b(\eta^-)[I]_{\xi, \eta}^\pi + \widehat{b}(\eta)[W^0(\chi_0^-)]_{\xi, \eta}^\pi \right) \end{aligned}$$

donde $\widehat{a}(\xi) := a(\xi^+) - a(\xi^-)$ y $\widehat{b}(\eta) := b(\eta^+) - b(\eta^-)$. Así, en este caso el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ está generada por la unidad $I_{\xi, \eta}^\pi$ y por los dos idempotentes (5.12).

(ii) Análogamente, si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$ y $\tau \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} [aW^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi &= [(a(\xi^+)\chi_0^- + a(\xi^-)\chi_0^+)I]_{\xi, \eta}^\pi [W^0(b(\eta^-)\chi_\tau^- + b(\eta^+)\chi_\tau^+)]_{\xi, \eta}^\pi \\ &= \left(a(\xi^-)[I]_{\xi, \eta}^\pi + \widehat{a}(\xi)[\chi_0^-I]_{\xi, \eta}^\pi \right) \left(b(\eta^-)[I]_{\xi, \eta}^\pi + \widehat{b}(\eta)[W^0(\chi_\tau^+)]_{\xi, \eta}^\pi \right). \end{aligned}$$

Así, en este caso el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ está generada por la unidad $I_{\xi, \eta}^\pi$ y por los dos idempotentes (5.13).

(iii) Fijemos $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$. Por (5.9) y (5.10), para $a \in PSO^\circ$ y $b \in PSO_{p,w}^\circ$ tenemos que

$$[aW^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi = [aI]_{\xi, \eta}^\pi [W^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi = [\widetilde{a}_\xi I]_{\xi, \eta}^\pi [W^0(\widetilde{b}_\eta)]_{\xi, \eta}^\pi = [\widetilde{a}_\xi W^0(\widetilde{b}_\eta)]_{\xi, \eta}^\pi,$$

donde las funciones $\widetilde{a}_\xi \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $\widetilde{b}_\eta \in C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$ son de la forma (5.3). Entonces

$$\begin{aligned} [\widetilde{a}_\xi W^0(\widetilde{b}_\eta)]_{\xi, \eta}^\pi &= [(a(\xi^+)u_- + a(\xi^-)u_+)I]_{\xi, \eta}^\pi [W^0(b(\eta^+)u_- + b(\eta^-)u_+)]_{\xi, \eta}^\pi \\ &= \left(a(\xi^-)[I]_{\xi, \eta}^\pi + \widehat{a}(\xi)[u_-I]_{\xi, \eta}^\pi \right) \left(b(\eta^-)[I]_{\xi, \eta}^\pi + \widehat{b}(\eta)[W^0(u_-)]_{\xi, \eta}^\pi \right). \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.6, los idempotentes (5.14) conmutan. Por eso, si $\xi, \eta \in M_\infty(SO^\circ)$, entonces los generadores del álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ consisten de la unidad $[I]_{\xi, \eta}^\pi$ y de los idempotentes (5.14) que conmutan mutuamente. \square

6. Una subclase de pesos de Muckenhoupt

6.1. Funciones en $VMO_0(U)$

Dada una vecindad abierta simétrica $U \subset \mathbb{R}$ de un punto 0, decimos que $\sigma \in VMO_0(U)$ si $\sigma \in L^1(U)$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x |\sigma(t) - I_x(\sigma)| dt = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (I_x(\sigma) - I_{-x}(\sigma)) = 0, \quad (6.1)$$

donde

$$I_x(\sigma) := \frac{1}{x} \int_0^x \sigma(t) dt \quad \text{para } x \in U \setminus \{0\}.$$

Notemos que $VMO_0(U) \not\subset L^\infty(U)$.

Dado $v \in VMO_0(U)$, consideremos la función

$$V(x) := \frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt \quad (x \in U) \quad (6.2)$$

Decimos que $V \in \widetilde{SO}_0(U)$ si $V \in C(U \setminus \{0\})$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \max_{|y|, |z| \in [x, 2x]} |V(y) - V(z)| = 0. \quad (6.3)$$

Notemos que $\widetilde{SO}_0(U) \not\subset L^\infty(U)$.

Lema 6.1. Si $v \in VMO_0(U)$, entonces la función V dada por (6.2) está en $\widetilde{SO}_0(U)$.

Demostración. Sea $0 < x \leq y \leq z \leq 2x$. Entonces, por (6.2),

$$|V(y) - V(z)| \leq \frac{1}{y} \int_0^y |v(t) - I_y(v)| dt + |I_y(v) - I_z(v)| + \frac{1}{z} \int_0^z |v(t) - I_z(v)| dt \quad (6.4)$$

donde

$$\begin{aligned} |I_y(v) - I_z(v)| &= \left| \frac{1}{y} \int_0^y [v(t) - I_z(v)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{y} \int_0^y |v(t) - I_z(v)| dt \leq \frac{2}{z} \int_0^z |v(t) - I_z(v)| dt. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Como $v \in VMO_0(U)$, los lados derechos de (6.4) y (6.5) son pequeños si x es suficientemente pequeño. Además, $V \in C(U \setminus \{0\})$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0} (V(x) - V(-x)) = 0$$

debido a (6.1). Por lo tanto (6.3) se cumple, y por eso $V \in \widetilde{SO}_0(U)$. \square

Está claro que la función V es diferenciable casi donde sea en U y

$$xV'(x) = v(x) - V(x) \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}_+. \quad (6.6)$$

En consecuencia $v - V \in L^\infty(U)$ si la función $x \mapsto xV'(x)$ está en $L^\infty(U)$.

Similarmente a [75, Lema 3] y [64, Lema A4], tenemos lo siguiente.

Lema 6.2. $SO_0(U) := \widetilde{SO}_0(U) \cap L^\infty(U) \subset VMO_0(U) \cap L^\infty(U)$.

6.2. Pesos equivalentes a pesos de Muckenhoupt lentamente oscilatorios

Sea $1 < p < \infty$ y $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$. Es fácil ver que para cada $t \in \mathbb{R}$ el peso $w_t := w(t + (\cdot))$ está en $A_p(\mathbb{R})$, mientras que el peso $w_\infty := w(1/(\cdot))$ está en $A_q(\mathbb{R})$, donde $q = p/(p-1)$. De aquí, para todo $t \in \mathbb{R}$ las funciones $v_t = \ln w_t$ están en $BMO(\mathbb{R})$,

$$v_t(x) = v(x+t) \quad \text{y} \quad v_\infty(x) = v(1/x) \quad \text{para } t, x \in \mathbb{R}.$$

Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, las funciones

$$V_t(x) := \frac{1}{x} \int_0^x v_t(\tau) d\tau \quad (6.7)$$

son continuas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En lo que sigue suponemos que

(A) para cada $t \in \mathbb{R}$ la función v_t está en $VMO_0(U_{0,t})$ y la función $x \mapsto xV'_t(x)$ pertenece a $VMO_0(U_{0,t}) \cap L^\infty(U_{0,t})$, donde $U_{0,t}$ es una vecindad simétrica de 0 en \mathbb{R} .

Por **(A)** y el Lema 6.1, para cada $t \in \dot{\mathbb{R}}$ la función V_t dada por (6.7) pertenece a $\widetilde{SO}_0(U_{0,t})$ y la función

$$x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \tau V_t'(\tau) d\tau \quad (x \in U_{0,t})$$

pertenece a $SO_0(U_{0,t}) := \widetilde{SO}_0(U_{0,t}) \cap L^\infty(U_{0,t})$.

Decimos que un peso w es localmente equivalente a un peso W en una vecindad $U_t \subset \dot{\mathbb{R}}$ de un punto $t \in \dot{\mathbb{R}}$ si $w/W, W/w \in L^\infty(U_t)$. Ya que, por (6.6),

$$xV_t'(x) = v_t(x) - V_t(x) \quad \text{casi donde sea en } U_{0,t} \quad (6.8)$$

para cada $t \in \dot{\mathbb{R}}$, y como las funciones $x \mapsto xV_t'(x)$ están en $L^\infty(U_{0,t})$ para todo $t \in \dot{\mathbb{R}}$ por la suposición **(A)**, concluimos que el peso $w(x) = e^{v(x)}$ es localmente equivalente a los pesos $W_t(x) = e^{V_t(x-t)}$ en vecindades de los puntos $t \in \mathbb{R}$ y al peso $W_\infty(x) = e^{V_\infty(1/x)}$ en una vecindad de ∞ . Para cada $t \in \dot{\mathbb{R}}$, consideremos ahora las funciones

$$\widetilde{V}_t(x) := \frac{1}{x} \int_0^x V_t(\tau) d\tau \quad \text{para } x \in U_{0,t}. \quad (6.9)$$

En vista de (6.6)–(6.9), deducimos que para cada $t \in \dot{\mathbb{R}}$,

$$x\widetilde{V}_t'(x) = V_t(x) - \widetilde{V}_t(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \tau V_t'(\tau) d\tau, \quad (6.10)$$

donde la función de la derecha y por consecuencia la función $x \mapsto x\widetilde{V}_t'(x)$ pertenece a $SO_0(U_{0,t})$. De aquí, (6.10) y (6.8) implican que el peso $w(x) = e^{v(x)}$ es localmente equivalente a los pesos $\widetilde{W}_t(x) = e^{\widetilde{V}_t(x-t)}$ en vecindades de los puntos $t \in \mathbb{R}$ y al peso $\widetilde{W}_\infty(x) = e^{\widetilde{V}_\infty(1/x)}$ en una vecindad de ∞ .

Así, bajo la condición **(A)**, podemos reemplazar el peso $w = e^v$ por los pesos equivalentes \widetilde{W}_t en vecindades abiertas U_t de los puntos $t \in \dot{\mathbb{R}}$, donde las funciones $\widetilde{V}_t(x) = \ln \widetilde{W}_t(x+t)$ para $t \in \mathbb{R}$ y $\widetilde{V}_\infty(x) = \ln \widetilde{W}_\infty(1/x)$ poseen la propiedad: cada función $x \mapsto x\widetilde{V}_t'(x)$ está en $SO_0(U_{0,t})$. Más aún, para todo $t \in \dot{\mathbb{R}}$ las funciones \widetilde{V}_t debido a **(A)** y los Lemas 6.1 y 6.2 satisfacen las relaciones

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\widetilde{V}_t(x) - \widetilde{V}_t(-x)) = 0.$$

Por [13, Sección 3] (cf. también [54, Sección 5]), los pesos lentamente oscilatorios \widetilde{W}_t pertenecen a $A_p(U_t)$ en vecindades U_t de puntos $t \in \dot{\mathbb{R}}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} -1/p < \liminf_{x \rightarrow 0} [x\widetilde{V}_t'(x)] &\leq \limsup_{x \rightarrow 0} [x\widetilde{V}_t'(x)] < 1 - 1/p \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \\ -1/q < \liminf_{x \rightarrow 0} [x\widetilde{V}_\infty'(x)] &\leq \limsup_{x \rightarrow 0} [x\widetilde{V}_\infty'(x)] < 1 - 1/q \quad \text{para } t = \infty, \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde $1/p + 1/q = 1$. Como

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow 0} [x\widetilde{V}_\infty'(x)] &= \liminf_{x \rightarrow \infty} [(1/x)\widetilde{V}'_\infty(1/x)] = -\limsup_{x \rightarrow \infty} [x(\ln \widetilde{W}_\infty)'(x)], \\ \limsup_{x \rightarrow 0} [x\widetilde{V}_\infty'(x)] &= \limsup_{x \rightarrow \infty} [(1/x)\widetilde{V}'_\infty(1/x)] = -\liminf_{x \rightarrow \infty} [x(\ln \widetilde{W}_\infty)'(x)], \end{aligned}$$

podemos reemplazar (6.11) por las condiciones equivalentes

$$\begin{aligned} -1/p < \liminf_{x \rightarrow t} [(x-t)(\ln \widetilde{W}_t)'(x)] &\leq \limsup_{x \rightarrow 0} [(x-t)(\ln \widetilde{W}_t)'(x)] < 1 - 1/p, \\ -1/p < \liminf_{x \rightarrow \infty} [x(\ln \widetilde{W}_\infty)'(x)] &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} [x(\ln \widetilde{W}_\infty)'(x)] < 1 - 1/p, \end{aligned} \quad (6.12)$$

para $t \in \mathbb{R}$ y $t = \infty$, respectivamente.

Observación 6.3. Repitiendo el procedimiento $V \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x V(\tau) d\tau$ varias veces podemos lograr una suavidad arbitraria de los pesos equivalentes bajo la condición **(A)**. Por ejemplo, poniendo

$$\widehat{V}_t(x) := \frac{1}{x} \int_0^x \widetilde{V}_t(\tau) d\tau \quad \text{para } x \in U_{0,t},$$

deducimos de (6.10), los Lemas 6.2 y 6.1 que para cada $t \in \dot{\mathbb{R}}$ la función $C^1(U_{0,t} \setminus \{0\})$

$$x\widehat{V}'_t(x) = \widetilde{V}_t(x) - \widehat{V}_t(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \tau \widetilde{V}'_t(\tau) d\tau, \quad (6.13)$$

pertenece a $SO_0(U_{0,t})$ junto con la función $x \mapsto x\widetilde{V}'_t(x)$. Más aún, por (6.13) y [44, Proposición 3.4],

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x\widehat{V}'_t(x) - x\widetilde{V}'_t(x)) = 0.$$

Tomando una subcubierta finita de una cubierta de $\dot{\mathbb{R}}$ por vecindades abiertas U_t ($t \in \dot{\mathbb{R}}$), concluimos que existe un conjunto a lo más finito $\mathfrak{X} \subset \dot{\mathbb{R}}$ donde uno de los pesos w o w^{-1} no está acotado en una vecindad de $t \in \mathfrak{X}$. Más aún, podemos reemplazar el peso $w \in A_p(\mathbb{R})$ por un peso equivalente $W = e^V$ tal que $V' \in C(\dot{\mathbb{R}} \setminus \mathfrak{X})$ y, para algunas vecindades simétricas $u_\lambda \subset \dot{\mathbb{R}}$, las funciones $\sigma_\lambda : x \mapsto (x-\lambda)V'(x)$ están en $SO_\lambda(u_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $\sigma_\infty : x \mapsto xV'(x)$ está en $SO_\infty(u_\infty)$ si $\infty \in \mathfrak{X}$, y $\sigma_\lambda \in C_b(u_\lambda)$ con $\sigma_\lambda(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \mathfrak{X}$, $\lim_{x \rightarrow \lambda} (V(x) - V(2\lambda - x)) = 0$ si $\lambda \in \mathfrak{X} \cap \mathbb{R}$, y $\lim_{x \rightarrow \infty} (V(x) - V(-x)) = 0$ si $\infty \in \mathfrak{X}$. En este caso decimos que para el peso $w \in A_p(\mathbb{R})$ existe un peso equivalente lentamente oscilatorio $W = e^V$, donde W pertenece automáticamente a $A_p(\mathbb{R})$.

Como $\sigma_\lambda \in SO_\lambda(u_\lambda)$ para todo $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, para cada $\xi \in M(SO^\circ)$ podemos definir los números

$$\delta_\xi := \xi(\sigma_\lambda) \quad \text{si } \xi \in M_\lambda(SO^\circ). \quad (6.14)$$

Si $w \in A_p(\mathbb{R})$, entonces debido a (6.12) concluimos que $\delta_\xi \in (-1/p, 1 - 1/p)$. Más aún, $\delta_\xi = 0$ para todo $\xi \in \bigcup_{\lambda \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \mathfrak{X}} M_\lambda(SO^\circ)$ ya que $\sigma_\lambda(\lambda) = 0$.

Como $V(x) = \widetilde{V}_\lambda(x - \lambda)$ para $x \in u_\lambda$ si $\lambda \in \mathbb{R}$, y como $V(x) = \widetilde{V}_\infty(1/x)$ para $x \in u_\infty$, deducimos de (6.10) que

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(x) &= (x-\lambda)V'(x) = (x-\lambda)\widetilde{V}'_\lambda(x-\lambda) = \frac{1}{x-\lambda} \int_0^{x-\lambda} \tau \widetilde{V}'_\lambda(\tau) d\tau \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \sigma_\infty(x) &= xV'(x) = -(1/x)\widetilde{V}'_\infty(1/x) = -x \int_0^{1/x} \tau \widetilde{V}'_\infty(\tau) d\tau \quad \text{si } \lambda = \infty, \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde, por la condición **(A)** las funciones $x \mapsto xV'_\lambda(x)$ están en $VMO_0(U_{0,\lambda}) \cap L^\infty(U_{0,\lambda})$ para todo $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, mientras que las funciones en la derecha de (6.15) están en $SO_\lambda(u_\lambda)$. Por eso,

podemos representar a los números (6.14) en la forma

$$\delta_\xi := \begin{cases} \xi \left(\frac{1}{x-\lambda} \int_0^{x-\lambda} \tau V'_\lambda(\tau) d\tau \right) & \text{si } \xi \in M_\lambda(SO^\diamond) \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}, \\ -\xi \left(x \int_0^{1/x} \tau V'_\infty(\tau) d\tau \right) & \text{si } \xi \in M_\infty(SO^\diamond), \end{cases} \quad (6.16)$$

donde el funcional ξ es aplicado a funciones de x .

6.3. Operadores límite necesarios

Para estudiar la invertibilidad de las clases laterales $A_{\xi,\eta}^\pi \in \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ necesitamos usar las técnicas de operadores límite (ver Subsección 4.3).

Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$. En lo que sigue suponemos que el peso de Muckenhoupt $w = e^v$ satisface la condición **(A)** de la Subsección 6.2, y por eso para el peso w existe un peso equivalente lentamente oscilatorio $W = e^V \in A_p(\mathbb{R})$ (ver Subsección 6.2). Notemos que la condición **(A)** sobre el peso w implica (4.19) para el peso equivalente W . En particular, la demostración del Lema 4.9 implica el siguiente resultado.

Corolario 6.4. *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R})$ satisface la condición **(A)**, entonces $SO_{p,w}^\diamond \subset SO_p^\diamond$.*

Encontraremos en esta subsección varios operadores límite necesarios suponiendo sin pérdida de generalidad que el peso $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio en $A_p(\mathbb{R})$. Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la función

$$\sigma_\lambda(x) := \begin{cases} (x - \lambda)v'(x) & \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \\ xv'(x) & \text{si } \lambda = \infty, \end{cases} \quad (6.17)$$

está en $SO_\lambda(u_\lambda)$, y los números $\delta_\xi \in (-1/p, 1 - 1/p)$ pueden ser calculados por (6.14) con σ_λ dado por (6.17). Obviamente, todos los resultados de esta subsección también son válidos bajo la condición **(A)**, con δ_ξ calculado por las fórmulas (6.16).

Sea $e_h(x) = e^{ihx}$ para $h, x \in \mathbb{R}$. Para $y > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos los operadores isométricos $V_y, U_\lambda \in \mathcal{B}_p$ dados para $f \in L^p(\mathbb{R})$ por

$$(V_y f)(x) = y^{1/p} f(yx), \quad (U_\lambda f)(x) = f(x - \lambda), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.18)$$

Lema 6.5. *Si $K \in \mathcal{K}_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y las sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ satisfacen las relaciones*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n/y_n) = +\infty, \quad (6.19)$$

entonces en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{h_n} U_{-\lambda} K U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) &= 0, \\ \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{-h_n} U_{-\lambda} K U_\lambda e_{h_n} V_{y_n} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda K e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \right) &= 0, \\ \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_\lambda K e_{-\lambda} U_{-h_n} V_{y_n}^{-1} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} U_{-\lambda} K U_\lambda V_{y_n} \right) = 0, \quad \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_{-\lambda} K e_\lambda V_{y_n}^{-1} \right) = 0. \quad (6.22)$$

Demostración. Como $\|U_h\| = 1$ y $\|V_y\| = 1$ para todo $h, y \in (0, \infty)$, es suficiente demostrar que los operadores $e_{\mp h_n} V_{y_n}$, $U_{\pm h_n} V_{y_n^{-1}}$ y $V_{y_n^{\pm 1}}$ convergen débilmente a cero en $L^p(\mathbb{R})$, es decir, que

$$\begin{aligned} (e_{\mp h_n} V_{y_n} f, g) &:= \int_{\mathbb{R}} (e_{\mp h_n} V_{y_n} f)(x) \overline{g(x)} dx \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \\ (U_{\pm h_n} V_{y_n^{-1}} f, g) &:= \int_{\mathbb{R}} (U_{\pm h_n} V_{y_n^{-1}} f)(x) \overline{g(x)} dx \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \\ (V_{y_n^{\pm 1}} f, g) &:= \int_{\mathbb{R}} (V_{y_n^{\pm 1}} f)(x) \overline{g(x)} dx \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.23)$$

para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$ y cada $g \in (L^p(\mathbb{R}))^* = L^q(\mathbb{R})$. En efecto, para cada operador $K \in \mathcal{K}_p$, la convergencia débil a cero de $e_{\mp h_n} V_{y_n}$, $U_{\pm h_n} V_{y_n^{-1}}$ y $V_{y_n^{\pm 1}}$ implican, respectivamente, (6.20), (6.21) y (6.22).

Como las funciones continuas con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R})$ y $L^q(\mathbb{R})$, podemos suponer que f y g poseen esta propiedad. Entonces vemos que

$$\begin{aligned} (e_{\mp h_n} V_{y_n} f, g) &= \int_{\Delta_n^{\pm}} e^{\mp i h_n x} y_n^{1/p} f(y_n x) \overline{g(x)} dx = 0, \\ (U_{\pm h_n} V_{y_n^{-1}} f, g) &= \int_{\tilde{\Delta}_n^{\pm}} y_n^{-1/p} f(y_n^{-1} x \mp y_n^{-1} h_n) \overline{g(x)} dx = 0, \\ (V_{y_n^{\pm 1}} f, g) &= \int_{\Delta_n^{\pm}} y_n^{\pm 1/p} f(y_n^{\pm 1} x) \overline{g(x)} dx = 0, \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande ya que en este caso los conjuntos $\Delta_n^{\pm} := (y_n^{\mp 1} \text{supp } f) \cap \text{supp } g$ y $\tilde{\Delta}_n^{\pm} := (y_n \text{supp } f \pm h_n) \cap \text{supp } g$ son vacíos, lo cual da las relaciones (6.23) y completa la prueba. \square

Para aplicar los operadores (6.18), los cuales no son isométricos en espacios de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{R}, w)$, necesitamos pasar al espacio de Lebesgue sin peso $L^p(\mathbb{R})$ por medio de la transformación $A \mapsto w A w^{-1} I$.

Lema 6.6. *Si $1 < p < \infty$, $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$ es un peso lentamente oscilatorio, $a \in SO^{\diamond}$, $b \in SO_{p,w}^{\diamond}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

- (i) *para cada $(\xi, \eta) \in M_{\lambda}(SO^{\diamond}) \times M_{\infty}(SO^{\diamond})$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (6.19) y en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} (a w W^0(b) w^{-1} I) U_{\lambda} e_{-h_n} V_{y_n} \right) &= a(\xi) b(\eta) I, \\ \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{-h_n} U_{-\lambda} (a w W^0(b) w^{-1} I) U_{\lambda} e_{h_n} V_{y_n} \right) &= a(\xi) b(\eta) I; \end{aligned} \quad (6.24)$$

- (ii) *para cada $(\xi, \eta) \in M_{\infty}(SO^{\diamond}) \times M_{\lambda}(SO^{\diamond})$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (6.19) y en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_{\lambda} (a w W^0(b) w^{-1} I) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) &= a(\xi) b(\eta) I, \\ \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_{\lambda} (a w W^0(b) w^{-1} I) e_{-\lambda} U_{-h_n} V_{y_n^{-1}} \right) &= a(\xi) b(\eta) I. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Demostración. Aplicando aproximaciones en $L^\infty(\mathbb{R})$ y $M_{p,w}$, respectivamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que a es una suma de funciones en SO_ν y b es una suma de funciones en SO_ν^3 donde ν corre sobre un subconjunto finito de \mathbb{R} . Entonces $b \in M_{p,\tilde{w}}$ para cada $\tilde{w} \in A_p(\mathbb{R})$.

(i) Fijemos $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, y consideremos el operador $awW^0(b)w^{-1}I \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$, donde $a \in PSO^\circ$ y $b \in PSO_{p,w}^\circ$. Entonces para cada $y_n, h_n > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} & V_{y_n^{-1}e_{h_n}}U_{-\lambda}(awW^0(b)w^{-1}I)U_\lambda e_{-h_n}V_{y_n} \\ &= a[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]w[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]W^0(b[y_n(\cdot) + h_n])w^{-1}[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]I, \\ & V_{y_n^{-1}e_{-h_n}}U_{-\lambda}(awW^0(b)w^{-1}I)U_\lambda e_{h_n}V_{y_n} \\ &= a[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]w[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]W^0(b[y_n(\cdot) - h_n])w^{-1}[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]I. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ahora sean $a \in SO^\circ$ y $b \in SO_{p,w}^\circ$. Como $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio, la función $\sigma_\lambda : x \mapsto (x - \lambda)v'(x)$ pertenece a la C^* -álgebra $SO_\lambda(u_\lambda)$ en una vecindad u_λ de λ y

$$\lim_{x \rightarrow 0} (v(\lambda + x) - v(\lambda - x)) = 0. \quad (6.27)$$

Entonces existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ que satisfacen (6.19) y tales que

$$a(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\lambda \pm y_n^{-1}), \quad b(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(\pm h_n), \quad (6.28)$$

$$\delta_\xi = \xi(\sigma_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^{-1}v'(\lambda + y_n^{-1})). \quad (6.29)$$

Para este fin primero elegimos la sucesión $\{y_n\}$, y luego elegimos la sucesión $\{h_n\}$. Por (6.28), $a(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\lambda \pm y_n^{-1}x)$, y la convergencia es uniforme sobre compactos de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En consecuencia,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n^{-1}e_{h_n}}U_{-\lambda}(aI)U_\lambda e_{-h_n}V_{y_n}) = a(\xi)I \quad (6.30)$$

Siguiendo la prueba de [52, Teorema 4.3], deducimos de (6.26) que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n^{-1}e_{h_n}}U_{-\lambda}(e^vW^0(b)e^{-v}I)U_\lambda e_{-h_n}V_{y_n}) \\ &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e^{v_n(\cdot)}|x|^{\delta_\xi}W^0(b(y_n(\cdot) + h_n))|x|^{-\delta_\xi}e^{-v_n(\cdot)}I), \end{aligned} \quad (6.31)$$

donde la función

$$\begin{aligned} v_n(x) &:= v(\lambda + y_n^{-1}x) - v(\lambda + y_n^{-1}) - \delta_\xi \log |x| \\ &= (v(\lambda + y_n^{-1}\text{sign } x) - v(\lambda + y_n^{-1})) + \int_{y_n^{-1}\text{sign } x}^{y_n^{-1}x} (tv'(\lambda + t) - \delta_\xi) \frac{dt}{t} \end{aligned} \quad (6.32)$$

está acotada sobre cada compacto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Más aún, debido a (6.32), (6.27) y (6.29),

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e^{v_n}I) = I. \quad (6.33)$$

Como $h_n \rightarrow +\infty$ y $h_n/y_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos que para cada $M > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $My_n/h_n \leq 1/2$ para todo $n > N$, por lo cual para todo $x \in [-M, M]$ tenemos que

$$h_n/2 \leq h_n(1 - My_n/h_n) \leq h_n + y_nx \leq h_n(1 + My_n/h_n) \leq 3h_n/2. \quad (6.34)$$

Por eso, para cada $M > 0$, deducimos de (6.28) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(y_n x + h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(h_n) = b(\eta) \quad (6.35)$$

uniformemente con respecto a $x \in [-M, M]$. De aquí, deducimos de (6.31) y (6.33) que en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} (e^v W^0(b) e^{-v} I) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) \\ &= |x|^{\delta_\xi} \left(\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(y_n(\cdot) + h_n)) \right) |x|^{-\delta_\xi} I. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Solo resta probar que en cualquier espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \tilde{w})$ con un peso de Muckenhoupt \tilde{w} tenemos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(y_n(\cdot) + h_n)) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(h_n)). \quad (6.37)$$

Denotemos por Φ al conjunto de funciones en $L^p(\mathbb{R}, \tilde{w})$ cuyas transformadas de Fourier tienen soporte compacto en \mathbb{R} . Este conjunto es denso en $L^p(\mathbb{R}, \tilde{w})$ (ver [51, Lema 2.5]). Por eso, para cada función $f \in \Phi$ existe una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto en \mathbb{R} tal que

$$(W^0[b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)])f = \mathcal{F}^{-1}[b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)]\psi \mathcal{F}f. \quad (6.38)$$

Entonces, por analogía con el Lema 4.9, deducimos del Teorema 3.3 que

$$\begin{aligned} & \left\| [b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)]\psi \right\|_{M_{p, \tilde{w}}} \\ & \leq C_{p, w} \max_{k=0,1,2,3} \left\| D^k([b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)]\psi) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

donde $(Da)(x) = xa'(x)$.

Sea $K := \text{supp } \psi$. Como K es un subconjunto compacto de \mathbb{R} y

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |b(y_n x + h_n) - b(h_n)| = 0, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |(D^k b)(y_n x + h_n)| = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(ver [14, Sección 4]), deducimos de (6.39) y las relaciones

$$\begin{aligned} & D^k([b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)]\psi) \\ &= \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (D^\nu [b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)])(D^{k-\nu}\psi), \end{aligned}$$

donde $\max \{ \|D^k \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} : k = 0, 1, 2, 3 \} < \infty$ y

$$\begin{aligned} D[b(y_n x + h_n) - b(h_n)] &= \frac{y_n x}{y_n x + h_n} (Db)(y_n x + h_n), \\ D^2[b(y_n x + h_n) - b(h_n)] &= \frac{(y_n x)^2}{(y_n x + h_n)^2} (D^2 b)(y_n x + h_n) \\ &\quad + \frac{y_n x h_n}{(y_n x + h_n)^2} (Db)(y_n x + h_n), \\ D^3[b(y_n x + h_n) - b(h_n)] &= \frac{(y_n x)^3}{(y_n x + h_n)^3} (D^3 b)(y_n x + h_n) \\ &\quad + \frac{3(y_n x)^2 h_n}{(y_n x + h_n)^3} (D^2 b)(y_n x + h_n) + \frac{y_n x h_n^2 - (y_n x)^2 h_n}{(y_n x + h_n)^3} (Db)(y_n x + h_n), \end{aligned}$$

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| [b(y_n(\cdot) + h_n) - b(h_n)] \psi \right\|_{M_{p,w}} = 0, \quad (6.40)$$

lo cual junto con (6.38) implican (6.37). Aplicando (6.37) en el caso de $\tilde{w}(x) = |x|^{\delta_\xi}$ y usando (6.35), concluimos que en el espacio $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\delta_\xi})$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[y_n(\cdot) + h_n]) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(h_n)) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} b(h_n)I = b(\eta)I. \quad (6.41)$$

Finalmente, (6.36) y (6.41) implican que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{h_n} U_{-\lambda} (e^v W^0(b) e^{-v} I) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = b(\eta)I, \quad (6.42)$$

lo cual junto con (6.30) dan la primer igualdad en (6.24). La segunda igualdad en (6.24) se prueba análogamente.

(ii) Fijemos $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\lambda(SO^\diamond)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, y consideremos el operador $awW^0(b)w^{-1}I \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$, donde $a \in PSO^\diamond$ y $b \in PSO_{p,w}^\diamond$. Entonces para cada $y_n, h_n > 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} & V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (awW^0(b)w^{-1}I) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \\ &= a[y_n(\cdot) + h_n] w[y_n(\cdot) + h_n] W^0(b[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]) w^{-1}[y_n(\cdot) + h_n] I, \\ & V_{y_n} U_{h_n} e_\lambda (awW^0(b)w^{-1}I) e_{-\lambda} U_{-h_n} V_{y_n}^{-1} \\ &= a[y_n(\cdot) - h_n] w[y_n(\cdot) - h_n] W^0(b[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]) w^{-1}[y_n(\cdot) - h_n] I. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Ahora sea $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$. Como $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio, la función $\sigma_\infty : x \mapsto xv'(x)$ pertenece a la C^* -álgebra $SO_\infty(u_\infty)$ en una vecindad u_∞ de ∞ . Entonces existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (6.19) y

$$a(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\pm h_n), \quad b(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(\lambda \pm y_n^{-1}). \quad (6.44)$$

Por (6.44) y (6.34),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(y_n x \pm h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\pm h_n) = a(\xi),$$

donde la convergencia es uniforme sobre compactos de \mathbb{R} . En consecuencia, tomando en cuenta (6.34), tenemos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (aI) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \right) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (a[y_n(\cdot) + h_n] I) = a(\xi)I. \quad (6.45)$$

Por analogía con la parte (i), deducimos de (6.43) que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (e^v W^0(b) e^{-v} I) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \right) \\ &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\tilde{v}_n(\cdot)} |x|^{\delta_\xi} W^0(b[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]) |x|^{-\delta_\xi} e^{-\tilde{v}_n(\cdot)} I \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

donde la función \tilde{v}_n está dada por

$$\tilde{v}_n(x) := v(y_n x + h_n) - v(h_n) = \int_{h_n}^{y_n x + h_n} tv'(t) \frac{dt}{t}. \quad (6.47)$$

Debido a (6.19) y (6.34), deducimos de (6.47) que para n suficientemente grande,

$$|\tilde{v}_n(x)| \leq \|\sigma_\infty\|_{L^\infty(u_\infty)} \left| \ln \left(\frac{y_n x + h_n}{h_n} \right) \right|, \quad (6.48)$$

donde el lado derecho de (6.48) tiende a cero uniformemente sobre compactos de \mathbb{R} cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e^{\tilde{v}_n} I) = I. \quad (6.49)$$

Por el Lema 4.7(b), de (6.46) y (6.49) se sigue que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (e^v W^0(b) e^{-v} I) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]), \end{aligned} \quad (6.50)$$

donde usamos la relación $SO_{p,w}^\diamond \subset SO_p^\diamond$ (ver Corolario 6.4). Como $y_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos de (6.44) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(\lambda + y_n^{-1} x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(\lambda + y_n^{-1}) = b(\eta) \quad (6.51)$$

uniformemente con respecto a x sobre compactos de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Así, solo resta probar que en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)]) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[\lambda + y_n^{-1}]). \quad (6.52)$$

Sea Φ el conjunto de funciones en $L^p(\mathbb{R})$ cuyas transformadas de Fourier tienen soporte compacto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Este conjunto es denso en $L^p(\mathbb{R})$. Por eso, para cada función $f \in \Phi$ existe una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$(W^0[b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})])f = \mathcal{F}^{-1}[b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})]\psi \mathcal{F}f. \quad (6.53)$$

Entonces, deducimos de [72, Capítulo IV, Teorema 3] que

$$\begin{aligned} & \| [b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})]\psi \|_{M_p} \\ & \leq C_p \max_{k=0,1} \| D^k([b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})]\psi) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned} \quad (6.54)$$

donde la constante $C_p \in (0, \infty)$ depende solo de p , y $(Da)(x) = xa'(x)$.

Como $K = \text{supp } \psi$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} | [b(\lambda + y_n^{-1} x) - b(\lambda + y_n^{-1})] | = 0, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} | (Db)(\lambda + y_n^{-1} x) | = 0 \end{aligned}$$

debido a (6.51) y [14, Sección 4], deducimos de (6.54) y las relaciones

$$\begin{aligned} D([b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})]\psi) &= [b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})](D\psi) \\ & \quad + (D[b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})])\psi, \\ D[b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})] &= \frac{y_n^{-1} x}{\lambda + y_n^{-1} x} (Db)(\lambda + y_n^{-1} x), \end{aligned}$$

y máx $\{\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|D\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\} < \infty$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| [b(\lambda + y_n^{-1}(\cdot)) - b(\lambda + y_n^{-1})] \psi \|_{M_p} = 0,$$

lo cual junto con (6.53) implican (6.52). Combinando (6.50), (6.52) y (6.51), concluimos que en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (e^v W^0(b) e^{-v} I) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(\lambda + y_n^{-1})) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} b(\lambda + y_n^{-1}) I = b(\eta) I, \end{aligned} \quad (6.55)$$

lo cual junto con (6.45) da la primer igualdad en (6.25). La segunda igualdad en (6.25) se prueba análogamente. \square

Consideremos el álgebra de Banach cociente $\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}^\pi := \tilde{\Lambda}^\pi / \tilde{J}_{\xi, \eta}^\pi$, donde

$$\tilde{J}_{\xi, \eta}^\pi := \{ w A^\pi w^{-1} I^\pi : A^\pi \in J_{\xi, \eta}^\pi \} \quad (6.56)$$

es un ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\tilde{\Lambda}^\pi := \{ [w A w^{-1} I]^\pi : A \in \Lambda \}$. Sea $\tilde{J}_{\xi, \eta}$ el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\tilde{\Lambda} := \{ w A w^{-1} I : A \in \Lambda \}$ que consiste de todos los operadores $w A w^{-1} I + K$ donde $A^\pi \in J_{\xi, \eta}^\pi$ y $K \in \mathcal{K}_p$. Denotamos por $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ si las álgebras de Banach \mathcal{A} y \mathcal{B} son isomorfas, observemos que

$$\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}^\pi = \tilde{\Lambda}^\pi / \tilde{J}_{\xi, \eta}^\pi \cong \tilde{\Lambda} / \tilde{J}_{\xi, \eta} =: \tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}. \quad (6.57)$$

Para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$, definimos a los homomorfismos $\gamma_\xi : PSO^\diamond \rightarrow PC$ por

$$\gamma_\xi(a) := \begin{cases} a(\xi^+) \chi_- + a(\xi^-) \chi_+ & \text{si } \xi \in M_\infty(SO^\diamond), \\ a(\xi^-) \chi_\lambda^- + a(\xi^+) \chi_\lambda^+ & \text{si } \xi \in M_\lambda(SO^\diamond) \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.58)$$

Lema 6.7. *Si $1 < p < \infty$, $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio en $A_p(\mathbb{R})$, $a \in PSO^\diamond$, $b \in PSO_{p,w}^\diamond$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

(i) *para cada $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (6.19) y en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} (a w W^0(b) w^{-1} I) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) \\ &= (a(\xi^-) \chi_- + a(\xi^+) \chi_+) b(\eta^-) I, \\ & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{-h_n} U_{-\lambda} (a w W^0(b) w^{-1} I) U_\lambda e_{h_n} V_{y_n} \right) \\ &= (a(\xi^-) \chi_- + a(\xi^+) \chi_+) b(\eta^+) I; \end{aligned} \quad (6.59)$$

(ii) *para cada $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\lambda(SO^\diamond)$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (6.19) y en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (a w W^0(b) w^{-1} I) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= a(\xi^-) W^0(b(\eta^-) \chi_- + b(\eta^+) \chi_+), \\ & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_\lambda (a w W^0(b) w^{-1} I) e_{-\lambda} U_{-h_n} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= a(\xi^+) W^0(b(\eta^-) \chi_- + b(\eta^+) \chi_+). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Demostración. Sea $a \in PSO^\circ$, $b \in PSO_{p,w}^\circ$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y sea

$$(\xi, \eta) \in (M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times M_\lambda(SO^\circ)).$$

Obviamente, el operador $awW^0(b)w^{-1}I \in \mathcal{B}_p$ está representado en la forma

$$\gamma_\xi(a)wW^0(\gamma_\eta(b))w^{-1}I + D_{\xi,\eta},$$

donde las funciones $\gamma_\xi(a)$ y $\gamma_\eta(b)$ están dadas por (6.58) y el operador $D_{\xi,\eta}$ pertenece al ideal $\tilde{\mathcal{J}}_{\xi,\eta}$ debido al Lema 5.3. Cualquier operador $D_{\xi,\eta} \in \tilde{\mathcal{J}}_{\xi,\eta}$ es de la forma

$$D_{\xi,\eta} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_m} \left(A_{k,m} a_{k,m} I + B_{k,m} w W^0(b_{k,m}) w^{-1} I + K_m \right), \quad (6.61)$$

donde $A_{k,m}, B_{k,m} \in \tilde{\Lambda} \subset \mathcal{B}_p$, $K_m \in \mathcal{K}_p$, $a_{k,m} \in SO^\circ$, $b_{k,m} \in SO_{p,w}^\circ$ y $a_{k,m}(\xi) = 0$, $b_{k,m}(\eta) = 0$.

(i) Sea $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} & awW^0(b)w^{-1}I \\ &= (a(\xi^-)\chi_\lambda^- + a(\xi^+)\chi_\lambda^+)e^vW^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+)e^{-v}I + D_{\xi,\eta}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Como el operador $D_{\xi,\eta}$ en (6.62) tiene la forma (6.61), aplicando la Proposición 3.4, podemos elegir sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que (6.19) se cumple,

$$\delta_\xi = \xi(\sigma_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_\lambda(\lambda \pm y_n^{-1})$$

y para todo $k = 1, \dots, N_m$ y todo $m \in \mathbb{N}$,

$$a_{k,m}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,m}(\lambda \pm y_n^{-1}) = 0, \quad b_{k,m}(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{k,m}(\pm h_n) = 0. \quad (6.63)$$

Entonces deducimos de (6.61), (6.63), el Lema 6.6(i) y (6.20) que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} D_{\xi,\eta} U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = 0. \quad (6.64)$$

Aplicando (6.26) y tomando en cuenta (6.34), obtenemos que

$$\begin{aligned} & V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} (a(\xi^-)\chi_\lambda^- + a(\xi^+)\chi_\lambda^+) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \\ &= (a(\xi^-)\chi_- + a(\xi^+)\chi_+) I, \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} & V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} \left(e^v W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) e^{-v} I \right) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \\ &= e^{v_n(\cdot)} |x|^{\delta_\xi} W^0(b(\eta^+)\chi_- [y_n(\cdot) + h_n] + b(\eta^-)\chi_+ [y_n(\cdot) + h_n]) |x|^{-\delta_\xi} e^{-v_n(\cdot)} I, \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde la función v_n y el número δ_ξ están dados por (6.32) y (6.29), respectivamente, y (6.33) se cumple. De aquí, deducimos de (6.33) y (6.66) que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} \left(e^v W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) e^{-v} I \right) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) \\ &= |x|^{\delta_\xi} \left(\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(\eta^+)\chi_- [y_n(\cdot) + h_n] + b(\eta^-)\chi_+ [y_n(\cdot) + h_n]) \right) |x|^{-\delta_\xi} I. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Ahora, tomando una función $f \in \Phi$ y una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto $K \subset \mathbb{R}$ como en (6.38), concluimos que para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} & (W^0(b(\eta^+)\chi_-[y_n(\cdot) + h_n] + b(\eta^-)\chi_+[y_n(\cdot) + h_n]))f \\ &= \mathcal{F}^{-1}(b(\eta^+)\chi_-[y_n(\cdot) + h_n] + b(\eta^-)\chi_+[y_n(\cdot) + h_n])\psi\mathcal{F}f \\ &= \mathcal{F}^{-1}b(\eta^-)\psi\mathcal{F}f = \mathcal{F}^{-1}b(\eta^-)\mathcal{F}f = b(\eta^-)f, \end{aligned}$$

y por eso en el espacio $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\delta\xi})$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(\eta^+)\chi_-[y_n(\cdot) + h_n] + b(\eta^-)\chi_+[y_n(\cdot) + h_n]) = b(\eta^-)I. \quad (6.68)$$

Por lo tanto, deducimos de (6.67) y (6.68) que en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{h_n} U_{-\lambda} \left(e^v W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) e^{-v} I \right) U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = b(\eta^-)I,$$

lo cual junto con (6.65) y (6.64) nos da la primer igualdad en (6.59) de (6.62). La segunda igualdad en (6.59) se prueba análogamente.

(ii) Ahora sea $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\lambda(SO^\diamond)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$awW^0(b)w^{-1}I = (a(\xi^+)\chi_- + a(\xi^-)\chi_+)e^vW^0(b(\eta^-)\chi_\lambda^- + b(\eta^+)\chi_\lambda^+)e^{-v}I + D_{\xi,\eta}. \quad (6.69)$$

Aplicando otra vez la Proposición 3.4 al operador $D_{\xi,\eta}$ de la forma (6.61), podemos elegir sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que (6.19) se cumple y para todo $k = 1, \dots, N_m$ y todo $m \in \mathbb{N}$,

$$a_{k,m}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,m}(\pm h_n) = 0, \quad b_{k,m}(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{k,m}(\lambda \pm y_n^{-1}) = 0. \quad (6.70)$$

Entonces de (6.61), (6.70), el Lema 6.6(ii) y (6.21) se sigue que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda D_{\xi,\eta} e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \right) = 0. \quad (6.71)$$

Aplicando (6.43) obtenemos que

$$\begin{aligned} & V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (a(\xi^+)\chi_- + a(\xi^-)\chi_+) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \\ &= (a(\xi^+)\chi_-[y_n(\cdot) + h_n] + a(\xi^-)\chi_+[y_n(\cdot) + h_n])I, \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} & V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda \left(e^v W^0(b(\eta^-)\chi_\lambda^- + b(\eta^+)\chi_\lambda^+) e^{-v} I \right) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \\ &= e^{\tilde{v}_n(\cdot)} W^0(b(\eta^-)\chi_- + b(\eta^+)\chi_+) e^{-\tilde{v}_n(\cdot)} I, \end{aligned} \quad (6.73)$$

donde la función \tilde{v}_n está dada por (6.47), y se cumple (6.49). De aquí, tomando en cuenta (6.34), deducimos de (6.72) que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda (a(\xi^+)\chi_- + a(\xi^-)\chi_+) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n}^{-1} \right) \\ &= \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left((a(\xi^+)\chi_-[y_n(\cdot) + h_n] + a(\xi^-)\chi_+[y_n(\cdot) + h_n])I \right) \\ &= a(\xi^-)I. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Por otra parte, (6.73) y (6.49) implican que

$$\begin{aligned} & \text{s-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\lambda \left(e^v W^0 (b(\eta^-) \chi_\lambda^- + b(\eta^+) \chi_\lambda^+) e^{-v} I \right) e_{-\lambda} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) \\ & = W^0 (b(\eta^-) \chi_- + b(\eta^+) \chi_+). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Las relaciones (6.74) y (6.75) dan la primera igualdad en (6.59). La segunda igualdad en (6.59) se prueba análogamente. \square

Sea $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0 := (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \mathbb{R})$. En lo que sigue diremos que las entradas ξ y η de la pareja $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$ son *coherentes*, si para conjuntos numerables arbitrarios $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset SO^\circ$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset SO_{p,w}^\circ$ existe una sucesión $\{y_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ y para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k(\lambda + y_n^{-1}), \quad b_k(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k(y_n), \quad (6.76)$$

si $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$, y

$$a_k(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k(y_n), \quad b_k(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k(\tau + y_n^{-1}), \quad (6.77)$$

si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$.

Para parejas $(\xi, \eta) \in (M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ))$ con entradas coherentes ξ y η , donde $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente afirmación.

Lema 6.8. *Si $1 < p < \infty$, $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio en $A_p(\mathbb{R})$, $a \in PSO^\circ$, $b \in PSO_{p,w}^\circ$ y $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, entonces*

(i) *para cada pareja $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$ con entradas coherentes ξ, η existe una sucesión $\{y_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, se cumple (6.76) y en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} & \text{s-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} (awW^0(b)w^{-1}I) U_\lambda V_{y_n} \right) \\ & = (a(\xi^-) \chi_- + a(\xi^+) \chi_+) |x|^{\delta_\xi} W^0 (b(\eta^+) \chi_- + b(\eta^-) \chi_+) |x|^{-\delta_\xi} I \end{aligned} \quad (6.78)$$

donde δ_ξ está dado por (6.29);

(ii) *para cada pareja $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$ con entradas coherentes ξ, η existe una sucesión $\{y_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, se cumple (6.77) y en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} & \text{s-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau (awW^0(b)w^{-1}I) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) \\ & = (a(\xi^+) \chi_- + a(\xi^-) \chi_+) |x|^{\delta_\xi} W^0 (b(\eta^-) \chi_- + b(\eta^+) \chi_+) |x|^{-\delta_\xi} I, \end{aligned} \quad (6.79)$$

donde

$$\delta_\xi := \xi(\sigma_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pm y_n v'(\pm y_n)). \quad (6.80)$$

Demostración. (i) Sea $a \in PSO^\circ$, $b \in PSO_{p,w}^\circ$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces escribiendo al operador $awW^0(b)w^{-1}I$ en la forma (6.62), donde $D_{\xi,\eta} \in \widetilde{\mathcal{J}}_{\xi,\eta}$ está dado por (6.61), y aplicando la Proposición 3.4, elegimos una sucesión $\{y_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$

$+\infty$, se cumple (6.29) y también se cumplen las relaciones (6.76), donde a_k y b_k son reemplazadas por $a_{k,m}$ y $b_{k,m}$. Entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} & V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} (awW^0(b)w^{-1}I) U_\lambda V_{y_n} \\ &= a[\lambda + y_n^{-1}(\cdot)] e^{v_n(\cdot)} |x|^{\delta_\xi} W^0(b(y_n(\cdot))) |x|^{-\delta_\xi} e^{-v_n(\cdot)} I, \end{aligned} \quad (6.81)$$

$$V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} (a(\xi^-)\chi_\lambda^- + a(\xi^+)\chi_\lambda^+) U_\lambda V_{y_n} = (a(\xi^-)\chi_- + a(\xi^+)\chi_+) I, \quad (6.82)$$

$$\begin{aligned} & V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} \left(e^v W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) e^{-v} I \right) U_\lambda V_{y_n} \\ &= e^{v_n(\cdot)} |x|^{\delta_\xi} W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) |x|^{-\delta_\xi} e^{-v_n(\cdot)} I, \end{aligned} \quad (6.83)$$

donde la función v_n y el número δ_ξ están dados por (6.32) y (6.29), respectivamente, y (6.33) se cumple. De (6.83) y (6.33) se sigue que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} \left(e^v W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) e^{-v} I \right) U_\lambda V_{y_n} \right) \\ &= |x|^{\delta_\xi} W^0(b(\eta^+)\chi_- + b(\eta^-)\chi_+) |x|^{-\delta_\xi} I. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Solo resta probar que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} D_{\xi, \eta} U_\lambda V_{y_n} \right) = 0. \quad (6.85)$$

Sean $a \in SO^\circ$, $b \in SO_{p,w}^\circ$ y

$$a(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\lambda \pm y_n^{-1}), \quad b(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(\pm y_n). \quad (6.86)$$

Como en la prueba del Lema 6.6, supongamos sin pérdida de generalidad que a es una suma de funciones en SO_ν y b es una suma de funciones en SO_ν^3 donde ν corre sobre un subconjunto finito de \mathbb{R} .

Por analogía con el Lema 6.6, deducimos que en cualquier espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \tilde{w})$ con un peso de Muckenhoupt \tilde{w} ,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(y_n(\cdot))) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(y_n)). \quad (6.87)$$

En efecto, tomando una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, obtenemos que

$$\| [b(y_n(\cdot)) - b(y_n)] \psi \|_{M_{p, \tilde{w}}} \leq C_{p, \tilde{w}} \max_{k=0,1,2,3} \| D^k ([b(y_n(\cdot)) - b(y_n)] \psi) \|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

donde

$$\begin{aligned} D^k ([b(y_n(\cdot)) - b(y_n)] \psi) &= \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (D^\nu [b(y_n(\cdot)) - b(y_n)]) (D^{k-\nu} \psi), \\ D^k [b(y_n x) - b(y_n)] &= (D^k b)(y_n x) \quad (k = 1, 2, 3), \quad \max_{k=0,1,2,3} \| D^k \psi \|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |b(y_n x) - b(y_n)| &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |(D^k b)(y_n x)| = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| [b(y_n(\cdot)) - b(y_n)] \psi \|_{M_{p, \tilde{w}}} = 0,$$

lo cual implica (6.87).

Debido a (6.86), (6.33) y (6.87), deducimos de (6.81) por analogía con el Lema 6.6(i) que para $a \in SO^\diamond$ y $b \in SO_{p,w}^\diamond$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} (aI) U_\lambda V_{y_n} \right) = a(\xi)I, \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} U_{-\lambda} (e^v W^0(b) e^{-v} I) U_\lambda V_{y_n} \right) \\ &= |x|^{\delta_\xi} \left(\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b(y_n)) \right) |x|^{-\delta_\xi} I = b(\eta)I. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Usando (6.76) para conjuntos numerables $\{a_{k,m}\} \subset SO^\diamond$ y $\{b_{k,m}\} \subset SO_{p,w}^\diamond$ tales que $a_{k,m}(\xi) = 0$ y $b_{k,m}(\eta) = 0$, y aplicando (6.61), (6.88), (6.89) y (6.22), obtenemos (6.85).

Finalmente, (6.62), (6.82), (6.84) y (6.85) implican (6.78) para la pareja (ξ, η) de entradas coherentes $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$ y $\eta \in M_\infty(SO^\diamond)$.

(ii) Sean $a \in PSO^\diamond$, $b \in PSO_{p,w}^\diamond$ y $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$, donde $\tau \in \mathbb{R}$. Escribimos al operador $awW^0(b)w^{-1}I$ en la forma (6.69), donde $D_{\xi,\eta} \in \tilde{\mathcal{J}}_{\xi,\eta}$ está dado por (6.61). Como $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio, la función $\sigma_\infty : x \mapsto xv'(x)$ pertenece a la C^* -álgebra $SO_\infty(u_\infty)$ en una vecindad u_∞ de ∞ , y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (v(x) - v(-x)) = 0. \quad (6.90)$$

Elijamos una sucesión $\{y_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, se cumple (6.80), y también se cumplen las relaciones (6.77), donde a_k y b_k son reemplazadas por $a_{k,m}$ y $b_{k,m}$. Entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} & V_{y_n} e_\tau (awW^0(b)w^{-1}I) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \\ &= a[y_n(\cdot)] e^{\hat{v}_n(\cdot)} |x|^{\delta_\xi} W^0(b[\tau + y_n^{-1}(\cdot)]) |x|^{-\delta_\xi} e^{-\hat{v}_n(\cdot)} I, \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$V_{y_n} e_\tau (a(\xi^+) \chi_- + a(\xi^-) \chi_+) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} = (a(\xi^+) \chi_- + a(\xi^-) \chi_+) I, \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned} & V_{y_n} e_\tau \left(e^v W^0(b(\eta^-) \chi_\tau^- + b(\eta^+) \chi_\tau^+) e^{-v} I \right) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \\ &= e^{\hat{v}_n(\cdot)} |x|^{\delta_\xi} W^0(b(\eta^-) \chi_- + b(\eta^+) \chi_+) |x|^{-\delta_\xi} e^{-\hat{v}_n(\cdot)} I, \end{aligned} \quad (6.93)$$

donde δ_ξ está dado por (6.80) y la función

$$\begin{aligned} \hat{v}_n(x) &:= v(y_n x) - v(y_n) - \delta_\xi \log |x| \\ &= (v(y_n) - v(y_n \text{sign } x)) + \int_{y_n \text{sign } x}^{y_n x} (tv'(t) - \delta_\xi) \frac{dt}{t} \end{aligned} \quad (6.94)$$

está acotada sobre cada compacto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Más aún, por (6.94), (6.90) y (6.80), deducimos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (e^{\hat{v}_n} I) = I. \quad (6.95)$$

Se sigue de (6.93) y (6.95) que

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau \left(e^v W^0(b(\eta^-) \chi_\tau^- + b(\eta^+) \chi_\tau^+) e^{-v} I \right) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= |x|^{\delta_\xi} W^0(b(\eta^-) \chi_- + b(\eta^+) \chi_+) |x|^{-\delta_\xi} I. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Ahora sean $a \in SO^\diamond$, $b \in SO_{p,w}^\diamond$ y

$$a(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\pm y_n), \quad b(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(\tau \pm y_n^{-1}). \quad (6.97)$$

Otra vez suponemos sin pérdida de generalidad que a es una suma de funciones en SO_ν y b es una suma de funciones en SO_ν^3 donde ν corre sobre un subconjunto finito de \mathbb{R} . Por analogía con el Lema 6.6, deducimos que en el espacio $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\delta_\xi})$ con δ_ξ dado por (6.80),

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[\tau + y_n^{-1}(\cdot)]) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[\tau + y_n^{-1}]) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (b[\tau + y_n^{-1}]I). \quad (6.98)$$

Entonces de (6.91), (6.95), (6.97) y (6.98) se sigue que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau (aI) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) = a(\xi)I, \quad (6.99)$$

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau (e^v W^0(b) e^{-v} I) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= |x|^{\delta_\xi} \left(\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} W^0(b[\tau + y_n^{-1}(\cdot)]) \right) |x|^{-\delta_\xi} I = b(\eta)I. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Usando (6.77) para conjuntos numerables $\{a_{k,m}\} \subset SO^\diamond$ y $\{b_{k,m}\} \subset SO_{p,w}^\diamond$ tales que $a_{k,m}(\xi) = 0$ y $b_{k,m}(\eta) = 0$, aplicando (6.99), (6.100) y (6.22), deducimos de (6.61) que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau D_{\xi,\eta} e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) = 0. \quad (6.101)$$

Finalmente, (6.69), (6.92), (6.96) y (6.101) implican (6.79) para la pareja (ξ, η) de entradas coherentes $\xi \in M_\infty(SO^\diamond)$ y $\eta \in M_\tau(SO^\diamond)$. \square

7. El teorema de dos idempotentes y sus aplicaciones

7.1. El teorema de dos idempotentes

Sea

$$\Omega_0 := \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond) \right), \quad (7.1)$$

si $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, entonces del Lema 5.6 se sigue que el cálculo simbólico para el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ puede obtenerse del teorema de dos idempotentes (ver, p. ej., [12] y las referencias dadas ahí).

Aplicaremos la siguiente versión del teorema de dos idempotentes, la cual se sigue de [12, Teorema 8.9].

Teorema 7.1. *Sea \mathcal{B} un álgebra de Banach con identidad e y sean p y q idempotentes no cero en \mathcal{B} . Además sea \mathcal{A} la subálgebra cerrada más pequeña de \mathcal{B} que contiene a e, p y q . Pongamos*

$$X := e - (p - q)^2 = pqp + (e - p)(e - q)(e - p), \quad (7.2)$$

$$Y := p + 2q, \quad (7.3)$$

y supongamos que los puntos 0 y 1 no son aislados en $\text{sp}_{\mathcal{B}} X$ o que $\{0, 1, 2, 3\} \subset \text{sp}_{\mathcal{B}} Y$. Definamos la aplicación $\omega_\mu : \{e, p, q\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ para $\mu \in \mathbb{C}$ por

$$\omega_\mu(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_\mu(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_\mu(q) = \begin{bmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

donde $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ es un valor arbitrario de la raíz cuadrada. Entonces

- (a) Para cada $\mu \in \text{sp}_{\mathcal{A}}X$ la aplicación ω_μ se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach ω_μ de \mathcal{A} en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.
- (b) Un elemento $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra \mathcal{B} si y sólo si $\det \omega_\mu(A) \neq 0$ para todo $\mu \in \text{sp}_{\mathcal{B}}X$.
- (c) Un elemento $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra \mathcal{A} si y sólo si $\det \omega_\mu(A) \neq 0$ para todo $\mu \in \text{sp}_{\mathcal{A}}X$.

Demostración. Si los puntos 0 y 1 no son aislados en $\text{sp}_{\mathcal{B}}X$, entonces la parte (a) del teorema se sigue de [11, Proposición 9(d)]. Ahora supongamos que $\{0, 1, 2, 3\} \subset \text{sp}_{\mathcal{B}}Y$. Por [11, Teorema 1(a)], para cada $\mu \in \text{sp}_{\mathcal{A}}X \setminus \{0, 1\}$ la aplicación $\omega_\mu : \{e, p, q\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach ω_μ de \mathcal{A} en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. Ya que $\text{sp}_{\mathcal{B}}Y \subset \text{sp}_{\mathcal{A}}Y$ y de aquí $\{0, 1, 2, 3\} \subset \text{sp}_{\mathcal{A}}Y$, deducimos de [11, Teorema 1(b)] que para cada $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ la aplicación $G_n : \{e, p, q\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{aligned} G_0(e) &= 1, & G_0(p) &= 0, & G_0(q) &= 0, \\ G_1(e) &= 1, & G_1(p) &= 1, & G_1(q) &= 0, \\ G_2(e) &= 1, & G_2(p) &= 0, & G_2(q) &= 1, \\ G_3(e) &= 1, & G_3(p) &= 1, & G_3(q) &= 1, \end{aligned} \tag{7.5}$$

se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach de \mathcal{A} sobre \mathbb{C} . Solo resta observar que para todo $A \in \mathcal{A}$ en vista de (7.5) y (7.4),

$$\begin{aligned} G_0(A) &= [\omega_1(A)]_{2,2} \text{ for } n = 0, & G_1(A) &= [\omega_0(A)]_{1,1} \text{ for } n = 1, \\ G_2(A) &= [\omega_0(A)]_{2,2} \text{ for } n = 2, & G_3(A) &= [\omega_1(A)]_{1,1} \text{ for } n = 3, \end{aligned} \tag{7.6}$$

respectivamente, donde $[\omega_\mu(A)]_{i,i}$ es la (i, i) -entrada de la matriz $\omega_\mu(A)$ para $\mu \in \{0, 1\}$. Por lo tanto para cada $\mu \in \text{sp}_{\mathcal{A}}X \cap \{0, 1\}$ la aplicación $\omega_\mu : \{e, p, q\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ también se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach ω_μ de \mathcal{A} en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, lo cual completa la prueba de la parte (a). Más aún, por (7.6), $G_n(A) \neq 0$ para todo $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ y todo $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si

$$\det \omega_\mu(A) \neq 0 \text{ para todo } \mu \in \{0, 1\}. \tag{7.7}$$

Finalmente, en vista de la parte (a) y (7.7), las partes (b) y (c) se siguen de [11, Teorema 1(c,d)]. \square

7.2. El espectro de Y en aplicaciones

Sea $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ y supongamos que se cumple **(A)**. Ahora probemos que para $\mathcal{B} = \Lambda_{\xi, \eta}^\pi$ y Y dado por (7.3), donde $p = P_{\xi, \eta}^\pi$ y $q = Q_{\xi, \eta}^\pi$ están dados por (5.12) o (5.13), la condición $\{0, 1, 2, 3\} \subset \text{sp}_{\mathcal{B}}Y$ se cumple automáticamente.

Lema 7.2. *Si $(\lambda, \tau) \in (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \mathbb{R})$ y los idempotentes $P_{\xi, \eta}^\pi$ y $Q_{\xi, \eta}^\pi$ están dados por (5.12) para $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$ y por (5.13) para $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, entonces el espectro del elemento*

$$Y_{\xi, \eta}^\pi := P_{\xi, \eta}^\pi + 2Q_{\xi, \eta}^\pi \tag{7.8}$$

en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$ contiene al conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

Demostración. (i) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$. Entonces, por (7.8) y (5.12), tenemos que

$$Y_{\xi, \eta}^\pi = [\chi_\lambda^+ I + 2W^0(\chi_0^-)]^\pi + J_{\xi, \eta}^\pi.$$

Ya que para el peso $w \in A_p(\mathbb{R})$ existe un peso equivalente lentamente oscilatorio $W \in A_p(\mathbb{R})$ en vista de la condición **(A)**, suponemos sin pérdida de generalidad que el peso $w \in A_p(\mathbb{R})$ es lentamente oscilatorio. Entonces pasando al espacio sin peso $L^p(\mathbb{R})$, y usando (6.57), podemos reemplazar a $Y_{\xi, \eta}^\pi$ por la clase lateral

$$\tilde{Y}_{\xi, \eta} := \chi_\lambda^+ I + 2wW^0(\chi_0^-)w^{-1}I + \tilde{J}_{\xi, \eta} \quad (7.9)$$

en el álgebra de Banach cociente $\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta} := \tilde{\Lambda}/\tilde{J}_{\xi, \eta}$, con el mismo espectro:

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} Y_{\xi, \eta}^\pi = \text{sp}_{\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}} \tilde{Y}_{\xi, \eta}. \quad (7.10)$$

Por la prueba del Lema 6.7(i), para cualquier pareja de operadores $D_{\xi, \eta}^{(1)}, D_{\xi, \eta}^{(2)} \in \tilde{J}_{\xi, \eta}$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que (6.19) y (6.29) se cumplen y, para $i = 1, 2$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{h_n} U_{-\lambda} D_{\xi, \eta}^{(i)} U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = 0, \quad (7.11)$$

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{-h_n} U_{-\lambda} D_{\xi, \eta}^{(i)} U_\lambda e_{h_n} V_{y_n} \right) = 0. \quad (7.12)$$

Sea $\tilde{I}_{\xi, \eta} := I + \tilde{J}_{\xi, \eta}$. Para cada $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ consideremos la clase lateral

$$\tilde{Y}_{\xi, \eta} - m\tilde{I}_{\xi, \eta} = B_m + \tilde{J}_{\xi, \eta}, \quad (7.13)$$

donde $\tilde{Y}_{\xi, \eta}$ está dado por (7.9) y

$$B_m := (\chi_\lambda^+ - m)I + 2wW^0(\chi_0^-)w^{-1}I.$$

Si $m \notin \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} Y_{\xi, \eta}^\pi$, entonces $m \notin \text{sp}_{\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}} \tilde{Y}_{\xi, \eta}$ por (7.10), y en consecuencia la clase lateral (7.13) es invertible en el álgebra cociente $\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}$. Por otra parte, por el Lema 6.7(i),

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{h_n} U_{-\lambda} B_m U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = \begin{cases} \chi_0^+ I & \text{si } m = 0, \\ -\chi_0^- I & \text{si } m = 1; \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} e_{-h_n} U_{-\lambda} B_m U_\lambda e_{h_n} V_{y_n} \right) = \begin{cases} \chi_0^+ I & \text{si } m = 2, \\ -\chi_0^- I & \text{si } m = 3. \end{cases} \quad (7.15)$$

Como (7.14) y (7.15) se cumplen para todas las sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ que satisfacen (6.19) y (6.29), y para cualquier pareja de operadores $D_{\xi, \eta}^{(1)}, D_{\xi, \eta}^{(2)} \in \tilde{J}_{\xi, \eta}$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ que satisfacen (6.19), (6.29) y (7.11)–(7.12), deducimos de (7.14), (7.15) y el Lema 4.8 que la invertibilidad de la clase lateral (7.13) en el álgebra $\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}$ implica la invertibilidad del operador límite correspondiente en la derecha de (7.14) o (7.15) en el álgebra \mathcal{B}_p , lo cual es imposible. Por lo tanto $m \in \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} Y_{\xi, \eta}^\pi$.

(ii) Sea $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$. Entonces, por (7.8) y (5.13), concluimos que

$$\begin{aligned} Y_{\xi, \eta}^\pi &:= [\chi_0^- I + 2W^0(\chi_\tau^+)]^\pi + J_{\xi, \eta}^\pi, \\ \tilde{Y}_{\xi, \eta} &:= \chi_0^- I + 2wW^0(\chi_\tau^+)w^{-1} + \tilde{J}_{\xi, \eta}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

y se cumple (7.10). Por la prueba del Lema 6.7(ii), para cualquier pareja de operadores $D_{\xi, \eta}^{(1)}, D_{\xi, \eta}^{(2)} \in \tilde{J}_{\xi, \eta}$ existen sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (6.19) y, para $i = 1, 2$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_\tau D_{\xi, \eta}^{(i)} e_{-\tau} U_{-h_n} V_{y_n^{-1}} \right) = 0, \quad (7.17)$$

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\tau D_{\xi, \eta}^{(i)} e_{-\tau} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) = 0. \quad (7.18)$$

Para cada $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ consideremos la clase lateral (7.13), donde $\tilde{Y}_{\xi, \eta}$ está dado ahora por (7.16) y

$$B_m := (\chi_0^- - m)I + 2wW^0(\chi_\tau^+)w^{-1}I.$$

Si $m \notin \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} Y_{\xi, \eta}^\pi$, entonces $m \notin \text{sp}_{\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}} \tilde{Y}_{\xi, \eta}$, y en consecuencia la clase lateral (7.13) es invertible en el álgebra cociente $\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}$. Deducimos del Lema 6.7(ii) que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_\tau B_m e_{-\tau} U_{-h_n} V_{y_n^{-1}} \right) = \begin{cases} 2W^0(\chi_0^+) & \text{si } m = 1, \\ -2W^0(\chi_0^-) & \text{si } m = 3; \end{cases} \quad (7.19)$$

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{-h_n} e_\tau B_m e_{-\tau} U_{h_n} V_{y_n^{-1}} \right) = \begin{cases} 2W^0(\chi_0^+) & \text{si } m = 0, \\ -2W^0(\chi_0^-) & \text{si } m = 2. \end{cases} \quad (7.20)$$

Por analogía con la parte (i), deducimos de (7.17)–(7.20) y el Lema 4.8 que la invertibilidad de la clase lateral (7.13) en $\tilde{\Lambda}_{\xi, \eta}$ implica la invertibilidad del correspondiente operador límite a la derecha de (7.19) o (7.20) en el álgebra \mathcal{B}_p . Pero estos operadores límite no son invertibles, por lo cual otra vez $m \in \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} Y_{\xi, \eta}^\pi$. \square

En consecuencia, concluimos del Teorema 7.1 y el Lema 7.2 que la invertibilidad de las clases laterales $A_{\xi, \eta}^\pi$ en las álgebras de Banach $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$ y $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ para las parejas $(\xi, \eta) \in \Omega_0 = \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ) \right) \cup \left(M_\infty(SO^\circ) \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\circ) \right)$, está descrita en términos de la matriz de símbolos $\omega_\mu(A_{\xi, \eta}^\pi)$, donde $\mu \in \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X$ y $\mu \in \text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi} X$, respectivamente, y de acuerdo a (7.2), $X = X_{\xi, \eta}^\pi = I_{\xi, \eta}^\pi - (P_{\xi, \eta}^\pi - Q_{\xi, \eta}^\pi)^2$.

8. Operadores pseudodiferenciales de Mellin y sus aplicaciones

8.1. Operadores de convolución de Mellin

Sea $d\mu(\varrho) = d\varrho/\varrho$ la medida invariante (normalizada) en \mathbb{R}_+ . Consideremos la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, la cual es usualmente conocida como la transformada de Mellin y está definida por

$$M : L^2(\mathbb{R}_+, d\mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (Mf)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(\varrho) \varrho^{-ix} \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

El operador M es invertible, con su inverso dado por

$$M^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad (M^{-1}g)(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x)r^{ix} dx, \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Sea $1 < p < \infty$ y E el isomorfismo isométrico

$$E : L^p(\mathbb{R}_+, d\mu) \rightarrow L^p(\mathbb{R}), \quad (Ef)(x) := f(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (8.1)$$

Entonces la aplicación $A \mapsto E^{-1}AE$ transforma el operador de convolución de Fourier $W^0(a) = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F} \in \mathcal{B}_p$ en el operador de convolución de Mellin

$$\text{Co}(\tilde{a}) := M^{-1}\tilde{a}M \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$$

donde $\tilde{a}(x) = a(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto la clase de multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ coincide con la clase de multiplicadores de Mellin en $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$.

8.2. Acotación de operadores pseudodiferenciales de Mellin

Si a es una función absolutamente continua de variación total finita en \mathbb{R} , entonces $a' \in L^1(\mathbb{R})$ y $V(a) = \int_{\mathbb{R}} |a'(x)|dx$ (ver, p. ej., [62, Cap. VIII, Secciones 3 y 9; Cap. IX, Sección 4]). El conjunto $V(\mathbb{R})$ de funciones absolutamente continuas de variación total finita en \mathbb{R} forma un álgebra de Banach cuando lo equipamos con la norma

$$\|a\|_V := \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + V(a)$$

Siguiendo [37, 39], denotemos por $C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ al álgebra de Banach de todas las funciones $V(\mathbb{R})$ -valuadas continuas y acotadas en \mathbb{R}_+ con la norma

$$\|b(\cdot, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))} = \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \|b(r, \cdot)\|_V.$$

Como es usual, sea $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en \mathbb{R}_+ .

Los operadores pseudodiferenciales de Mellin son generalizaciones de operadores de convolución de Mellin. El siguiente resultado de acotación para operadores pseudodiferenciales de Mellin se obtuvo en [39, Teorema 3.1] (ver también [37, Teorema 3.1]).

Teorema 8.1. *Si $b \in C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, entonces el operador pseudodiferencial de Mellin $\text{Op}(b)$, definido para funciones $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ por la integral iterada*

$$[\text{Op}(b)f](r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{R}_+} b(r, \lambda) \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{i\lambda} f(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \text{para } r \in \mathbb{R}_+,$$

se extiende a un operador lineal acotado en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ con $p \in (1, \infty)$ y existe un número $C_p \in (0, \infty)$ que depende solo de p tal que

$$\|\text{Op}(b)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} \leq C_p \|b\|_{C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))}.$$

8.3. Compacidad de conmutadores de operadores pseudodiferenciales de Mellin

Seguendo [75], una función $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ es llamada *lentamente oscilatoria* (en 0 y en ∞) si para cada (equivalentemente, para algún) $\beta \in (0, 1)$,

$$\lim_{x \rightarrow s} \text{osc}(f, [\beta x, x]) = 0 \quad (s \in \{0, \infty\}),$$

donde $\text{osc}(f, [\beta x, x]) := \sup \{|f(r) - f(\varrho)| : r, \varrho \in [\beta x, x]\}$ es la oscilación de f en el segmento $[\beta x, x] \subset \mathbb{R}_+$. Obviamente, el conjunto $SO(\mathbb{R}_+)$ de todas las funciones lentamente oscilatorias (en 0 y en ∞) que están en $C_b(\mathbb{R}_+)$ es una C^* -álgebra conmutativa unitaria. Esta álgebra contiene propiamente a $C(\overline{\mathbb{R}_+})$, la C^* -álgebra de todas las funciones continuas en $\overline{\mathbb{R}_+} := [0, +\infty]$.

Sea $SO(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ la subálgebra de Banach de $C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ que consiste de todas las funciones $V(\mathbb{R})$ -valuadas b en \mathbb{R}_+ que oscilan lentamente en 0 y en ∞ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{cm}_x^C(b) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{cm}_x^C(b) = 0,$$

donde

$$\text{cm}_x^C(b) = \max \{ \|b(r, \cdot) - b(\varrho, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} : r, \varrho \in [x, 2x] \}.$$

Sea $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ el álgebra de Banach de todas las funciones $V(\mathbb{R})$ -valuadas b que pertenecen a $SO(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ y tales que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \|b(r, \cdot) - b^h(r, \cdot)\|_V = 0$$

donde $b^h(r, \lambda) := b(r, \lambda + h)$ para todo $(r, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

El siguiente resultado sobre la compacidad de conmutadores de operadores pseudodiferenciales de Mellin fue obtenido en [41, Teorema 3.5] (ver también [37, Corolario 8.4]).

Teorema 8.2. *Si $a, b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, entonces el conmutador*

$$\text{Op}(a) \text{Op}(b) - \text{Op}(b) \text{Op}(a)$$

es compacto en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ con $p \in (1, \infty)$.

8.4. Espectro local de ciertos operadores de convolución de Mellin

Fijemos $p \in (1, \infty)$. Dado $s \in \{0, \infty\}$, denotamos por $SO_s(\mathbb{R}_+)$ a la C^* -subálgebra de $SO(\mathbb{R}_+)$ que consiste de las funciones en $SO(\mathbb{R}_+)$ que tienen límites (finitos) en el punto $\tilde{s} \in \{0, \infty\} \setminus \{s\}$. Sea $\Lambda(\mathbb{R}_+, s)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ que conmutan módulo operadores compactos con los operadores de multiplicación aI donde $a \in SO_s(\mathbb{R}_+)$, y sean $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+) := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$, $[aI]^\pi := aI + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$. Obviamente, el espacio de ideales maximales de la C^* -álgebra conmutativa $\mathcal{Z}_s^\pi := \{[aI]^\pi : a \in SO_s(\mathbb{R}_+)\}$ puede identificarse con el conjunto

$$M(SO_s(\mathbb{R}_+)) := M_s(SO^\circ) \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\tilde{s}\}.$$

Dado $\xi \in M(SO_s(\mathbb{R}_+))$, sea $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach cociente $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s) := \Lambda(\mathbb{R}_+, s)/\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ generado por el ideal maximal $\mathcal{I}_\xi^\pi := \{[aI]^\pi : a \in SO_s(\mathbb{R}_+), \xi(a) = 0\}$ de la C^* -álgebra conmutativa \mathcal{Z}_s^π . Consideremos el álgebra de Banach

cociente $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s) := \Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)/J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ que consiste de las clases laterales $A_\xi^\pi := A^\pi + J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$.

Consideremos la subálgebra de Banach \mathcal{D} de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in SO(\mathbb{R}_+)$) y todos los operadores de convolución de Mellin $\text{Co}(b) = M^{-1}bM$ ($b \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$). Aplicando la transformación $A \mapsto EAE^{-1}$, donde E está dado por (8.1), deducimos del Teorema 4.4 que los conmutadores $[aI, \text{Co}(b)]$, donde $a \in SO(\mathbb{R}_+)$ y $b \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$, son compactos en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Por consiguiente, $\mathcal{D} \subset \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$ para cada $s \in \{0, \infty\}$, y por eso el álgebra de Banach conmutativo \mathcal{Z}_s^π es un subálgebra central de las álgebras de Banach $\mathcal{D}^\pi := \mathcal{D}/\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ y $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$. El álgebra $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es el conmutante de \mathcal{Z}_s^π , y por lo tanto $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}^\pi(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)) := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))/\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$.

Dado $s \in \{0, \infty\}$ y $\xi \in M(SO_s(\mathbb{R}_+))$, consideremos la subálgebra de Banach minimal \mathcal{D}_ξ^π de $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ que contiene al conjunto $\{A_\xi^\pi : A \in \mathcal{D}\}$. Por el principio local de Allan-Douglas, la clase lateral $A^\pi \in \mathcal{D}^\pi$ es invertible en $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ (respectivamente, en \mathcal{D}^π) si y sólo si las clases laterales A_ξ^π son invertibles en las álgebras de Banach cocientes $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ (respectivamente, en \mathcal{D}_ξ^π) para todo $\xi \in M(SO_s(\mathbb{R}_+))$.

Estudiemos el espectro local de algunos operadores de convolución de Mellin $A = \text{Co}(b) \in \mathcal{D}$, es decir, el espectro de las clases laterales A_ξ^π en las álgebras de Banach $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ y \mathcal{D}_ξ^π para $\xi \in M_s(SO^\diamond)$, donde $s \in \{0, \infty\}$.

Teorema 8.3. Sean $1 < p < \infty$, $\nu \in (0, 1)$, $s \in \{0, \infty\}$, $\xi \in M_s(SO^\diamond)$, y

$$b_\nu(\lambda) := \coth(\pi\lambda + \pi i\nu) \in C_p(\overline{\mathbb{R}}). \quad (8.2)$$

Entonces

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)}[\text{Co}(b_\nu)]_\xi^\pi = \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi}[\text{Co}(b_\nu)]_\xi^\pi = \text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} \text{Co}(b_\nu) = \mathcal{L}_\nu, \quad (8.3)$$

donde

$$\mathcal{L}_\nu := \{ \coth(\pi\lambda + \pi i\nu) : \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \}. \quad (8.4)$$

Demostración. Fijemos $s \in \{0, \infty\}$ y $\xi \in M_s(SO^\diamond)$ y pongamos $A := \text{Co}(b_\nu)$. Como es bien sabido (ver, p. ej., [67, Proposición 4.2.11]), para cada $\nu \in (0, 1)$ y cada $p \in (1, \infty)$, la función b_ν pertenece al álgebra de Banach $C_p(\overline{\mathbb{R}})$. Por la cerradura de la inversión de $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ en $\mathcal{B}^\pi(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ y por [24] (ver también [68]), tenemos que

$$\text{sp}_{\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A^\pi = \text{sp}_{ess} A = \text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} A = b_\nu(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{L}_\nu. \quad (8.5)$$

Por lo tanto, deducimos del principio local de Allan/Douglas que

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A_\xi^\pi \subset \text{sp}_{\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A^\pi = \mathcal{L}_\nu. \quad (8.6)$$

Como el espectro $\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A_\xi^\pi$ no separa a \mathbb{C} debido a (8.6) y (8.4), deducimos de [69, Corolario 10.18] que

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A_\xi^\pi = \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi} A_\xi^\pi. \quad (8.7)$$

Obviamente también tenemos que

$$\text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} A = \text{sp}_{\mathcal{D}} A. \quad (8.8)$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{sp}_{\mathcal{D}^\pi} A_\xi^\pi$. Como la clase lateral $[\lambda I - A]_\xi^\pi$ es invertible en el álgebra cociente \mathcal{D}_ξ^π , existe un operador $B \in \mathcal{D}$ tal que la clase lateral B_ξ^π es la inversa de la clase lateral $[\lambda I - A]_\xi^\pi$ en \mathcal{D}_ξ^π . De aquí, existen operadores $C, D \in \mathcal{D}$ tales que $C^\pi, D^\pi \in J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ y

$$[\lambda I - A]^\pi B^\pi = I^\pi + C^\pi, \quad B^\pi [\lambda I - A]^\pi = I^\pi + D^\pi. \quad (8.9)$$

Tomando en cuenta las definiciones de los ideales $\mathcal{I}_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s) \subset \mathcal{Z}_s^\pi$ y $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s) \subset \Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ y el hecho de que \mathcal{Z}_s^π es una C^* -álgebra, deducimos de [67, Proposición 2.2.5] (ver también [12, Proposición 8.6]) que cada elemento en el ideal $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ del álgebra $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es de la forma $Q' a_\xi I + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ donde $Q' \in \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$, $a_\xi \in SO_s(\mathbb{R}_+)$ y $a_\xi(\xi) = 0$. Por eso,

$$C^\pi = a_\xi Q + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+), \quad D^\pi = \tilde{a}_\xi \tilde{Q} + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+), \quad (8.10)$$

donde $Q, \tilde{Q} \in \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$, $a_\xi, \tilde{a}_\xi \in SO_s(\mathbb{R}_+)$, y

$$a_\xi(\xi) = \tilde{a}_\xi(\xi) = 0. \quad (8.11)$$

En virtud de (8.9) y (8.10), existen operadores $K, \tilde{K} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ tales que

$$(\lambda I - A)B = I + a_\xi Q + K, \quad B(\lambda I - A) = I + \tilde{a}_\xi \tilde{Q} + \tilde{K}. \quad (8.12)$$

Ahora sea $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ (la prueba para $\xi \in M_0(SO^\circ)$ es análoga). Aplicando la Proposición 3.4, el Lema 4.7 y (8.11) concluimos que para los operadores $A, B, a_\xi I, \tilde{a}_\xi I \in \mathcal{D}$ existe una sucesión $\{y_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $y_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n} A V_{y_n}^{-1}) = A, \quad (8.13)$$

donde $(V_{y_n} f)(x) = (y_n)^{1/p} f(y_n x)$ for $x \in \mathbb{R}_+$, existe el límite fuerte

$$B_\infty := \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n} B V_{y_n}^{-1}), \quad (8.14)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_\xi(y_n) = a_\xi(\xi) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_\xi(y_n) = \tilde{a}_\xi(\xi) = 0. \quad (8.15)$$

Más aún, por [46, Lema 4.4], para cada operador $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ y cada sucesión $\{y_n\} \subset (0, +\infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$,

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n} K V_{y_n}^{-1}) = 0 \quad (8.16)$$

en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Por eso, deducimos de (8.15) y (8.16) que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n} (a_\xi Q + K) V_{y_n}^{-1}) = 0, \quad \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (V_{y_n} (\tilde{a}_\xi \tilde{Q} + \tilde{K}) V_{y_n}^{-1}) = 0. \quad (8.17)$$

Así, de (8.12)–(8.14) y (8.17) se sigue que

$$(\lambda I - A)B_\infty = B_\infty(\lambda I - A) = I. \quad (8.18)$$

Por lo tanto, la invertibilidad de la clase lateral $[\lambda I - A]_\xi^\pi$ en el álgebra cociente \mathcal{D}_ξ^π implica la invertibilidad del operador $\lambda I - A$ en el álgebra de Banach \mathcal{D} . En consecuencia, $\text{sp}_{\mathcal{D}} A \subset \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi} A_\xi^\pi$. Así, tomando en cuenta (8.5), (8.8) y (8.7), tenemos que

$$\mathcal{L}_\nu = \text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} A = \text{sp}_{\mathcal{D}} A \subset \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi} A_\xi^\pi = \text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A_\xi^\pi. \quad (8.19)$$

Combinando (8.19) y (8.6), obtenemos que

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A_\xi^\pi = \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi} A_\xi^\pi = \text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} A = \mathcal{L}_\nu,$$

lo cual completa la demostración. \square

8.5. Aplicaciones de los operadores pseudodiferenciales de Mellin

Sea $w = e^v$ un peso de Muckenhoupt en $A_p(\mathbb{R}_+)$ que oscila lentamente en 0 y en ∞ , es decir, la función $\sigma : r \mapsto rv'(r)$ está en $SO(\mathbb{R}_+)$. Es fácil ver que la función

$$b(r, \lambda) =: \coth(\pi\lambda + \pi i(1/p + rv'(r))), \quad (8.20)$$

pertenece al álgebra de Banach $C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. Más aún, $b \in SO(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ porque la función $r \mapsto rv'(r)$ está en $SO(\mathbb{R}_+)$. Por consiguiente, para cada $\xi \in M_0(SO^\diamond) \cup M_\infty(SO^\diamond)$ podemos introducir la función

$$b(\xi, \lambda) =: \coth(\pi\lambda + \pi i(1/p + \xi v'(\xi))), \quad (8.21)$$

donde $\xi v'(\xi) := \xi((\cdot)v'(\cdot)) \in (-1/p, 1 - 1/p)$ ya que $w = e^v \in A_p(\mathbb{R}_+)$.

Lema 8.4. *Sea $w = e^v$ un peso de Muckenhoupt en $A_p(\mathbb{R}_+)$ que oscila lentamente en 0 y en ∞ y satisfice la condición*

$$0 < 1/p + \inf_{r \in \mathbb{R}_+} rv'(r) \leq 1/p + \sup_{r \in \mathbb{R}_+} rv'(r) < 1. \quad (8.22)$$

Si $b \in C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ está dado por (8.20), entonces para cada $s \in \{0, \infty\}$ y cada $\xi \in M_s(SO^\diamond)$ la clase lateral $[\text{Op}(b(\cdot, \cdot) - b(\xi, \cdot))]^\pi$ pertenece al ideal $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$.

Demostración. Por analogía con [45, Lema 7.4], necesitamos demostrar que

$$\begin{aligned} & b(r, \lambda) - b(\xi, \lambda) \\ &= \coth(\pi\lambda + \pi i(1/p + rv'(r))) - \coth(\pi\lambda + \pi i(1/p + \xi v'(\xi))) \\ &= \pi i \int_{\xi v'(\xi)}^{rv'(r)} \frac{dx}{\sinh^2(\pi\lambda + \pi i(1/p + x))} = \pi i(rv'(r) - \xi v'(\xi))c(r, \lambda), \end{aligned} \quad (8.23)$$

donde la función

$$c(r, \lambda) := \int_0^1 \frac{d\theta}{\sinh^2(\pi\lambda + \pi i[1/p + \xi v'(\xi) + \theta(rv'(r) - \xi v'(\xi))])}$$

pertenece a $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. Dividimos la prueba de la inclusión $c \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ en nueve pasos.

Poniendo $\sigma(r) = rv'(r)$, escribimos la función c en la forma

$$c(r, \lambda) = \int_0^1 E(\sigma(r), \lambda, \theta) d\theta, \quad (8.24)$$

donde

$$E(t, \lambda, \theta) := \frac{1}{\sinh^2(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(t - \sigma(\xi))])}. \quad (8.25)$$

para $(t, \lambda, \theta) \in [\inf_{r \in \mathbb{R}_+} rv'(r), \sup_{r \in \mathbb{R}_+} rv'(r)] \times \mathbb{R} \times [0, 1]$.

1. Estimación uniforme de $c(r, \lambda)$. Poniendo

$$d := \max\{\cos(2\pi\tilde{\nu}_-), \cos(2\pi\tilde{\nu}_+)\}, \quad (8.26)$$

donde

$$\tilde{\nu}_- := 1/p + \inf_{r \in \mathbb{R}_+} \sigma(r), \quad \tilde{\nu}_+ := 1/p + \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \sigma(r),$$

deducimos que

$$\begin{aligned}
& \left| \sinh^2(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) \right| \\
&= \sinh^2(\pi\lambda) + 2^{-1} - 2^{-1} \cos[2\pi(1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi)))] \\
&\geq \sinh^2(\pi\lambda) + 2^{-1}(1-d),
\end{aligned} \tag{8.27}$$

donde $1-d > 0$ en vista de (8.26) y (8.22). Por lo tanto, si $M_1 := 2/(1-d)$, concluimos de (8.25) y (8.27) que

$$|E(\sigma(r), \lambda, \theta)| \leq M_1 \quad \text{para todo } (r, \lambda, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 1]. \tag{8.28}$$

Esta estimación y (8.24) implican que

$$|c(r, \lambda)| \leq M_1 \quad \text{para todo } (r, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \tag{8.29}$$

Además, por (8.25) y (8.27),

$$|E(\sigma(r), \lambda, \theta)| \leq \frac{1}{\sinh^2(\pi\lambda) + 2^{-1}(1-d)},$$

lo cual implica que

$$M := \sup_{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]} \int_{\mathbb{R}} |E(\sigma(r), \lambda, \theta)| d\lambda < \infty. \tag{8.30}$$

2. Estimación uniforme de $\frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda)$. Diferenciando (8.24), obtenemos que

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) = - \int_0^1 2\pi E(\sigma(r), \lambda, \theta) \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) d\theta. \tag{8.31}$$

Como $\coth^2 z = 1 + \sinh^{-2} z$, deducimos de (8.28) que existe una constante $M_2 \in (0, \infty)$ tal que

$$\left| \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) \right| < M_2 \tag{8.32}$$

para todo $(r, \lambda, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 1]$. Por lo tanto, de (8.31) y (8.32) se sigue que

$$\left| \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) \right| \leq 2\pi M_2 \int_0^1 |E(\sigma(r), \lambda, \theta)| d\theta, \tag{8.33}$$

lo cual implica de acuerdo a (8.28) que

$$\left| \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) \right| \leq 2\pi M_1 M_2 \quad \text{para todo } (r, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \tag{8.34}$$

3. Estimación uniforme de $\frac{\partial^2 c}{\partial \lambda^2}(r, \lambda)$. De (8.31) se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial \lambda^2}(r, \lambda) &= \int_0^1 \left[2\pi^2 [E(\sigma(r), \lambda, \theta)]^2 + 4\pi^2 E(\sigma(r), \lambda, \theta) \right. \\
&\quad \left. \times \coth^2(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) \right] d\theta,
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Por consiguiente, deducimos de (8.28) y (8.32) que

$$\left| \frac{\partial^2 c}{\partial \lambda^2}(r, \lambda) \right| \leq \pi^2(2M_1 + 4M_2^2) \int_0^1 |E(\sigma(r), \lambda, \theta)| d\theta. \quad (8.36)$$

4. Estimación uniforme de $c(r, \lambda) - c(\varrho, \lambda)$. Debido a (8.25), para todo $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} & E(\sigma(r), \lambda, \theta) - E(\sigma(\varrho), \lambda, \theta) \\ &= -2\pi i \theta \int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} E(t, \lambda, \theta) \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(t - \sigma(\xi))]) dt. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Entonces, tomando en cuenta (8.24) y (8.25), obtenemos que

$$\begin{aligned} & c(r, \lambda) - c(\varrho, \lambda) = \\ &= -2\pi i \int_0^1 \theta \int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} E(t, \lambda, \theta) \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(t - \sigma(\xi))]) dt d\theta. \end{aligned}$$

Por (8.28) y (8.32), tenemos que

$$|E(t, \lambda, \theta) \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(t - \sigma(\xi))])| \leq M_1 M_2$$

para todo $(t, \lambda, \theta) \in [\inf_{r \in \mathbb{R}_+} rv'(r), \sup_{r \in \mathbb{R}_+} rv'(r)] \times \mathbb{R} \times [0, 1]$. Por eso,

$$|c(r, \lambda) - c(\varrho, \lambda)| \leq \pi M_1 M_2 |\sigma(r) - \sigma(\varrho)|. \quad (8.38)$$

5. Estimación uniforme de $\frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) - \frac{\partial c}{\partial \lambda}(\varrho, \lambda)$. De (8.31) y (8.37) se sigue que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) - \frac{\partial c}{\partial \lambda}(\varrho, \lambda) = -2\pi \int_0^1 [E(\sigma(r), \lambda, \theta) - E(\sigma(\varrho), \lambda, \theta)] \\ & \quad \times \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) d\theta \\ & \quad - 2\pi \int_0^1 E(\sigma(\varrho), \lambda, \theta) [\coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) \\ & \quad - \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(\varrho) - \sigma(\xi))])] d\theta \\ &= 4\pi^2 i \int_0^1 \theta \left(\int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} E(t, \lambda, \theta) \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(t - \sigma(\xi))]) dt \right) \\ & \quad \times \coth(\pi\lambda + \pi i[1/p + \sigma(\xi) + \theta(\sigma(r) - \sigma(\xi))]) d\theta \\ & \quad + 2\pi^2 i \int_0^1 \theta E(\sigma(\varrho), \lambda, \theta) \left(\int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} E(t, \lambda, \theta) dt \right) d\theta. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Tomando en cuenta (8.39), (8.28) y (8.32), obtenemos en el caso $\sigma(r) \geq \sigma(\varrho)$ que

$$\left| \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) - \frac{\partial c}{\partial \lambda}(\varrho, \lambda) \right| \leq \pi^2(4M_2^2 + 2M_1) \int_0^1 \theta d\theta \int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} |E(t, \lambda, \theta)| dt. \quad (8.40)$$

6. Estimación uniforme de $c(r, x+h) - c(r, x)$. Para todo $(r, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, deducimos de (8.34) que

$$|c(r, x+h) - c(r, x)| = \left| \int_x^{x+h} \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) d\lambda \right| \leq 2\pi M_1 M_2 |h|. \quad (8.41)$$

7. Prueba de que $c \in C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. Se sigue de (8.29) que

$$\|c(r, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1 \quad \text{para todo } r \in \mathbb{R}_+. \quad (8.42)$$

Además, aplicando (8.33), cambiando el orden de integración y usando (8.30), para todo $r \in \mathbb{R}_+$ tenemos que

$$\begin{aligned} V(c(r, \cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) \right| d\lambda \leq 2\pi M_2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 |E(\sigma(r), \lambda, \theta)| d\theta \right) d\lambda \\ &= 2\pi M_2 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} |E(\sigma(r), \lambda, \theta)| d\lambda \right) d\theta \leq 2\pi M_2 M. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Combinando (8.42) y (8.43), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|c\|_{C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))} &= \sup_{r \in \mathbb{R}_+} (\|c(r, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} + V(c(r, \cdot))) \\ &\leq M_1 + 2\pi M_2 M < \infty. \end{aligned} \quad (8.44)$$

De (8.38) vemos que

$$\|c(r, \cdot) - c(\varrho, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \pi M_1 M_2 |\sigma(r) - \sigma(\varrho)|. \quad (8.45)$$

Además, aplicando (8.40), con $\sigma(r) \geq \sigma(\varrho)$, cambiando el orden de integración y usando (8.30), deducimos que para todo $r, \varrho \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} V(c(r, \cdot) - c(\varrho, \cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) - \frac{\partial c}{\partial \lambda}(\varrho, \lambda) \right| d\lambda \\ &\leq \pi^2 (4M_2^2 + 2M_1) \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_0^1 \theta d\theta \int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} |E(t, \lambda, \theta)| dt \\ &= \pi^2 (4M_2^2 + 2M_1) \int_0^1 \theta d\theta \int_{\sigma(\varrho)}^{\sigma(r)} dt \int_{\mathbb{R}} |E(t, \lambda, \theta)| d\lambda \\ &\leq \pi^2 (2M_2^2 + M_1) M |\sigma(r) - \sigma(\varrho)|. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Combinando (8.45) y (8.46), vemos que para todo $r, \varrho \in \mathbb{R}_+$,

$$\|c(r, \cdot) - c(\varrho, \cdot)\|_V \leq M_3 |\sigma(r) - \sigma(\varrho)|, \quad (8.47)$$

donde $M_3 := \pi M_1 M_2 + 2\pi^2 M_2^2 M + \pi^2 M_1 M$. De (8.47) se sigue que c es una función continua $V(\mathbb{R})$ -valuada. Más aún, es acotada debido a (8.44). En consecuencia, $c \in C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$.

8. Prueba de que $c \in SO(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. La estimación (8.45) implica inmediatamente que

$$cm_x^C(c) \leq \pi M_1 M_2 \text{osc}(\sigma, [x, 2x]), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Como $\sigma \in SO(\mathbb{R}_+)$, de la última estimación obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow s} cm_x^C(c) = \lim_{x \rightarrow s} \text{osc}(\sigma, [x, 2x]) = 0 \quad (s \in \{0, \infty\}).$$

Así, tomando en cuenta el resultado del paso 7, concluimos que c pertenece al álgebra de Banach $SO(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$.

9. Prueba de que $c \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. De (8.41) se sigue que para $h \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{r \in \mathbb{R}_+} \|c(r, \cdot) - c^h(r, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\pi M_1 M_2 |h|. \quad (8.48)$$

Por otra parte, de (8.36) obtenemos para $r \in \mathbb{R}_+$ y $h > 0$,

$$\begin{aligned} V(c(r, \cdot) - c^h(r, \cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda + h) - \frac{\partial c}{\partial \lambda}(r, \lambda) \right| d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\lambda}^{\lambda+h} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(r, y) dy \right| d\lambda \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\lambda}^{\lambda+h} \left| \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(r, y) \right| dy d\lambda \\ &\leq \pi^2 (2M_1 + 4M_2^2) \int_{\mathbb{R}} \int_{\lambda}^{\lambda+h} \left(\int_0^1 |E(\sigma(r), y, \theta)| d\theta \right) dy d\lambda. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Cambiando otra vez el orden de integración dos veces y tomando en cuenta (8.30), tenemos para $h > 0$, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\lambda}^{\lambda+h} \left(\int_0^1 |E(\sigma(r), y, \theta)| d\theta \right) dy d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \int_{y-h}^y \left(\int_0^1 |E(\sigma(r), y, \theta)| d\theta \right) d\lambda dy \\ &= h \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |E(\sigma(r), y, \theta)| d\theta dy = h \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |E(\sigma(r), y, \theta)| dy d\theta = hM. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Combinando (8.49) y (8.50), vemos que

$$V(c(r, \cdot) - c^h(r, \cdot)) \leq \pi^2 (2M_1 + 4M_2^2) M h \quad (h > 0). \quad (8.51)$$

Análogamente se puede demostrar que

$$V(c(r, \cdot) - c^h(r, \cdot)) \leq \pi^2 (2M_1 + 4M_2^2) M (-h) \quad (h < 0). \quad (8.52)$$

De (8.51) y (8.52) tenemos para $h \in \mathbb{R}$, que

$$\sup_{r \in \mathbb{R}_+} V(c(r, \cdot) - c^h(r, \cdot)) \leq \pi^2 (2M_1 + 4M_2^2) M |h|. \quad (8.53)$$

Combinando (8.48) y (8.53), llegamos a la igualdad

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \|c(r, \cdot) - c^h(r, \cdot)\|_V = 0. \quad (8.54)$$

Del paso 8 y la igualdad (8.54) se sigue finalmente que $c \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$.

Por (8.23),

$$\text{Op}(b(\cdot, \cdot) - b(\xi, \cdot)) = \pi i (\sigma(\cdot) - \sigma(\xi)) \text{Op}(c), \quad (8.55)$$

donde la clase lateral $[\pi i (\sigma(\cdot) - \sigma(\xi)) I]^\pi \in J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ Como $c \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ y $SO_s(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, deducimos del Teorema 8.2 que la clase lateral $[\text{Op}(c)]^\pi$ conmuta con cualquier clase lateral $[aI]^\pi$ ($a \in SO_s(\mathbb{R}_+)$, $s \in \{0, \infty\}$). Por lo tanto, $\text{Op}(c) \in \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$, y de (8.55) se sigue que $[\text{Op}(b(\cdot, \cdot) - b(\xi, \cdot))]^\pi \in J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$. \square

Consideremos la aplicación

$$\mathcal{T} : \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+)) \rightarrow \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)), \quad A \mapsto \mathcal{G}A\mathcal{G}^{-1}, \quad (8.56)$$

donde \mathcal{G} es el isomorfismo isométrico de $L^p(\mathbb{R}_+)$ sobre $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ dado por

$$(\mathcal{G}f)(r) = r^{1/p}f(r), \quad \text{para } r \in \mathbb{R}_+, \quad (8.57)$$

y consideremos al operador singular integral de Cauchy, $S_{\mathbb{R}_+}$, dado por (2.7) con \mathbb{R} reemplazado por \mathbb{R}_+ , entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.5. *Si $w = e^v$ es un peso de Muckenhoupt en $A_p(\mathbb{R}_+)$ que oscila lentamente en 0 y en ∞ , entonces para cada $s \in \{0, \infty\}$ y cada $\xi \in M_s(SO^\circ)$,*

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)}[\mathcal{T}(wS_{\mathbb{R}_+}w^{-1}I)]_\xi^\pi = \mathcal{L}_{\nu(\xi)} := \{ \coth(\pi\lambda + \pi i\nu(\xi)) : \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \}, \quad (8.58)$$

donde $\nu(\xi) := 1/p + \xi v'(\xi) \in (0, 1)$.

Demostración. Reemplazando el peso $w = e^v$ por el peso equivalente lentamente oscilatorio $\tilde{w} = e^{\tilde{v}}$ donde $\tilde{v}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt$ para x en una vecindad de 0 y $\tilde{v}(x) = x \int_x^\infty \frac{v(t)}{t^2} dt$ para x en una vecindad de ∞ , podemos lograr una suavidad arbitraria de los pesos equivalentes lentamente oscilatorios. Más aún, debido a la Observación 6.3, el peso inicial y los pesos equivalentes tienen el mismo comportamiento asintótico en 0 (respectivamente, en ∞). Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $D^k v \in SO(\mathbb{R}_+)$ para todo $k = 1, 2, 3$, donde $(Dv)(x) = xv'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$, y que (8.22) se cumple.

Entonces de [40, Teorema 9.2] se sigue que

$$\mathcal{T}(wS_{\mathbb{R}_+}w^{-1}I) = \text{Op}(b) + K \quad (8.59)$$

donde la función b dada por (8.20) pertenece a $C_b(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, el operador pseudodiferencial de Mellin $\text{Op}(b)$ está definido en el Teorema 8.1, y $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$.

Fijemos $s \in \{0, \infty\}$ y $\xi \in M_s(SO^\circ)$. Por el Lema 8.4,

$$[\text{Op}(b)]_\xi^\pi = [\text{Op}(b(\xi, \cdot))]_\xi^\pi, \quad (8.60)$$

donde $\text{Op}(b(\xi, \cdot)) = M^{-1}b(\xi, \cdot)M$ es un operador de convolución de Mellin. Entonces, debido a la relación $b(\xi, \cdot) = b_{\nu(\xi)}(\cdot)$, donde $b(\xi, \cdot)$ y b_ν están dados por (8.21) y (8.2), respectivamente, y $\nu(\xi) := 1/p + \xi v'(\xi) \in (0, 1)$, deducimos de (8.3) que

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)}[\text{Op}(b(\xi, \cdot))]_\xi^\pi = \text{sp}_{B(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} \text{Op}(b(\xi, \cdot)) = \mathcal{L}_{\nu(\xi)}. \quad (8.61)$$

Las relaciones (8.60) y (8.61) nos llevan a

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+)}[\text{Op}(b)]_\xi^\pi = \mathcal{L}_{\nu(\xi)}. \quad (8.62)$$

Finalmente, (8.62) y (8.59) implican (8.58). \square

9. Espectro local relacionado al teorema de dos idempotentes

El objetivo de esta sección es estimar y determinar el espectro de elementos $X = I - (P - Q)^2$ para todo $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, donde Ω_0 está dado por (7.1), $I = I_{\xi, \eta}^\pi$ y P, Q están dados por (5.12) o (5.13) si,

$$(\xi, \eta) \in \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \quad \text{o} \quad (\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond),$$

respectivamente.

A tal espectro lo llamamos espectro local.

9.1. Estimaciones del espectro local

Para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$, consideremos el ideal bilateral cerrado J_ξ^π del álgebra de Banach $\Lambda^\pi \subset \mathcal{B}_{p,w}^\pi$ generado por el ideal maximal

$$\mathcal{I}_\xi^\pi := \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond, a(\xi) = 0\}$$

de la C^* -álgebra conmutativa $\{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond\}$ e introduzcamos el álgebra de Banach cociente $\Lambda_\xi^\pi := \Lambda^\pi / J_\xi^\pi$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Junto con Λ consideremos la subálgebra de Banach $\Delta(\lambda)$ de $\mathcal{B}_{p,w}$ que consiste de todos los operadores en $\mathcal{B}_{p,w}$ que conmutan módulo operadores compactos con todos los operadores aI ($a \in SO_\lambda$). Dado $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$, consideremos el ideal bilateral cerrado $J_\xi^\pi(\lambda)$ del álgebra de Banach cociente $\Delta^\pi(\lambda) := \Delta(\lambda) / \mathcal{K}_{p,w}$ generado por el ideal maximal

$$\mathcal{I}_\xi^\pi(\lambda) := \{[aI]^\pi : a \in SO_\lambda, a(\xi) = 0\}$$

del álgebra de Banach conmutativo $\{[aI]^\pi : a \in SO_\lambda\}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$, sea $\Delta_\xi^\pi(\lambda) := \Delta^\pi(\lambda) / J_\xi^\pi(\lambda)$.

Como SO^\diamond y SO_λ son C^* -álgebras, deducimos de [67, Proposición 2.2.5] (ver también [12, Proposición 8.6]) que el ideal J_ξ^π es de la forma

$$\begin{aligned} J_\xi^\pi &= \{A^\pi [aI]^\pi : A^\pi \in \Lambda^\pi, a \in SO^\diamond, a(\xi) = 0\} \\ &= \{B^\pi [bI]^\pi : B^\pi \in \Lambda^\pi, b \in SO_\lambda, b(\xi) = 0\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

donde existe una función $c \in SO^\diamond$ tal que $a = cb$ y por eso $B^\pi = A^\pi [cI]^\pi$. De aquí, como $\Lambda^\pi \subset \Delta^\pi(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, deducimos de (9.1) que para cada $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$,

$$J_\xi^\pi \subset J_\xi^\pi(\lambda) = \{A^\pi [aI]^\pi : A^\pi \in \Delta^\pi(\lambda), a \in SO_\lambda, a(\xi) = 0\}. \quad (9.2)$$

Lema 9.1. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$,*

$$J_\xi^\pi(\lambda) \cap \Lambda^\pi = J_\xi^\pi. \quad (9.3)$$

Demostración. Para cada función $a \in SO_\lambda$ con valor $a(\xi) = 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad abierta u_n de ξ en $M(SO_\lambda)$ tal que $|a(\zeta)| < 1/n$ para todo $\zeta \in u_n$. Por el lema de Urysohn, existen funciones $b_n \in SO_\lambda$ con valores en $[0, 1]$ tales que $b_n(\xi) = 0$ y $b_n(\zeta) = 1$ para todo

$\zeta \in M(SO_\lambda) \setminus u_n$. Entonces la función $a \in SO_\lambda$ es aproximada uniformemente por funciones $a_n = ab_n \in SO_\lambda$.

Si $A^\pi[aI]^\pi \in J_\xi^\pi(\lambda) \cap \Lambda^\pi$ en (9.2), entonces $A^\pi[a_n I]^\pi = A^\pi[aI]^\pi [b_n I]^\pi \in J_\xi^\pi$ debido a (9.1) porque $A^\pi[aI]^\pi \in \Lambda^\pi$ y la función $b_n \in SO^\circ$ se hace cero en el punto ξ . Por lo tanto la clase lateral $A^\pi[aI]^\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} A^\pi[a_n I]^\pi$ también pertenece a J_ξ^π , lo cual da (9.3). \square

Dado $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$, donde

$$\widehat{\Omega}_0 := (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \mathbb{R}), \quad (9.4)$$

sea $\mathcal{D}_{\lambda, \tau}^\pi$ la subálgebra de Banach conmutativa de $\mathcal{B}_{p, w}^\pi$ generada por las clases laterales I^π y $[\widehat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi$, donde

$$\widehat{X}_{\lambda, \tau} := \begin{cases} I - (\chi_\lambda^+ I - W^0(\chi_0^-))^2 & \text{si } (\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}, \\ I - (\chi_0^- I - W^0(\chi_\tau^+))^2 & \text{si } (\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9.5)$$

Para $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, consideremos la clase lateral

$$X_{\xi, \eta}^\pi := \begin{cases} [I - (\chi_\lambda^+ I - W^0(\chi_0^-))^2]^\pi + J_{\xi, \eta}^\pi & \text{si } (\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}, \\ [I - (\chi_0^- I - W^0(\chi_\tau^+))^2]^\pi + J_{\xi, \eta}^\pi & \text{si } (\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.6)$$

la cual pertenece al álgebra de Banach $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$. Vemos de (9.5) y (9.6) que $X_{\xi, \eta}^\pi = [\widehat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + J_{\xi, \eta}^\pi$ para todo $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$ y todo $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$.

Teorema 9.2. *Si $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, donde Ω_0 está dado por (7.1), entonces*

$$\{0, 1\} \subset \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi \subset \widetilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}, \quad (9.7)$$

donde

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)} := \{(1 + \coth[\pi(x + i\nu(\xi))])/2 : x \in \overline{\mathbb{R}}\}, \quad (9.8)$$

$$\nu(\xi) := \begin{cases} 1/p + (\xi - \lambda)v'(\xi) & \text{si } \xi \in M_\lambda(SO^\circ), \lambda \in \mathbb{R}, \\ 1/p + \xi v'(\xi) & \text{si } \xi \in M_\infty(SO^\circ). \end{cases} \quad (9.9)$$

Demostración. Primero, probemos que

$$\{0, 1\} \subset \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi. \quad (9.10)$$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que w es un peso lentamente oscilatorio en $A_p(\mathbb{R})$, pasando al espacio sin peso $L^p(\mathbb{R})$ y usando (6.57), podemos reemplazar a $X_{\xi, \eta}^\pi$ por la clase lateral

$$\widetilde{X}_{\xi, \eta} := \begin{cases} I - (\chi_\lambda^+ I - wW^0(\chi_0^-)w^{-1}I)^2 + \widetilde{J}_{\xi, \eta} & \text{si } (\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}, \\ I - (\chi_0^- I - wW^0(\chi_\tau^+)w^{-1}I)^2 + \widetilde{J}_{\xi, \eta} & \text{si } (\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

la cual pertenece al álgebra cociente $\widetilde{\Lambda}_{\xi, \eta} = \widetilde{\Lambda}/\widetilde{J}_{\xi, \eta}$ y tiene el espectro

$$\text{sp}_{\widetilde{\Lambda}_{\xi, \eta}} \widetilde{X}_{\xi, \eta} = \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi, \quad (9.11)$$

donde $\tilde{\Lambda} = \{wAw^{-1}I : A \in \Lambda\}$ es un subálgebra de Banach de \mathcal{B}_p y $\tilde{J}_{\xi,\eta}$ es el ideal bilateral cerrado de $\tilde{\Lambda}$ que consiste de todos los operadores $wAw^{-1}I + K$ con $A^\pi \in J_{\xi,\eta}^\pi$ y $K \in \mathcal{K}_p$. De aquí, si $m \in \{0, 1\} \setminus \text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi$, entonces debido a (9.11) la clase lateral $B_m + \tilde{J}_{\xi,\eta}$, donde

$$B_m := \begin{cases} (1-m)I - (\chi_\lambda^+ I - wW^0(\chi_0^-)w^{-1}I)^2 & \text{si } (\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}, \\ (1-m)I - (\chi_0^- I - wW^0(\chi_\tau^+)w^{-1}I)^2 & \text{si } (\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

es invertible en el álgebra cociente $\tilde{\Lambda}_{\xi,\eta}$.

(i) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$. Siguiendo la prueba del Lema 7.2, consideremos sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n/y_n) = +\infty, \quad (9.12)$$

y $a_k(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k(\lambda \pm y_n^{-1})$, $b_k(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k(\pm h_n)$ para conjuntos numerables arbitrarios $\{a_k\} \in SO^\diamond$ y $\{b_k\} \in SO_{p,w}^\diamond$. Por el Lema 6.7(i), obtenemos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} B_m U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = (\chi_0^- - m)I, \quad m \in \{0, 1\}. \quad (9.13)$$

Como por la prueba de Lema 6.7(i),

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n^{-1}} e_{h_n} U_{-\lambda} A U_\lambda e_{-h_n} V_{y_n} \right) = 0,$$

para cualquier operador $A \in \tilde{J}_{\xi,\eta}$, deducimos de (9.13) y el Lema 4.8 que la invertibilidad de la clase lateral $\tilde{X}_{\xi,\eta}^\pi - m\tilde{I}_{\xi,\eta}^\pi \in \tilde{\Lambda}_{\xi,\eta}^\pi$ implica la invertibilidad del operador límite $(\chi_0^- - m)I$ en el álgebra de Banach \mathcal{B}_p . Pero el operador $(\chi_0^- - m)I$ no es invertible para $m \in \{0, 1\}$, por lo cual $m \in \text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi$, lo cual completa la prueba de (9.10) en el caso (i).

(ii) Sea $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$. Consideremos sucesiones $\{y_n\}, \{h_n\} \subset (0, \infty)$ tales que se cumple (9.12) y $a_k(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k(\pm h_n)$, $b_k(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k(\tau \pm y_n^{-1})$ para conjuntos arbitrarios $\{a_k\} \in SO^\diamond$ y $\{b_k\} \in SO_{p,w}^\diamond$. Por el Lema 6.7(ii), tenemos que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_\tau B_m e_{-\tau} U_{-h_n} V_{y_n^{-1}} \right) = W^0(\chi_0^+ - m), \quad m \in \{0, 1\}. \quad (9.14)$$

Como

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} U_{h_n} e_\tau A e_{-\tau} U_{-h_n} V_{y_n^{-1}} \right) = 0$$

para cualquier operador $A \in \tilde{J}_{\xi,\eta}$, deducimos de (9.14) y el Lema 4.8 que la invertibilidad de la clase lateral $\tilde{X}_{\xi,\eta}^\pi - m\tilde{I}_{\xi,\eta}^\pi \in \tilde{\Lambda}_{\xi,\eta}^\pi$ implica la invertibilidad del operador límite $W^0(\chi_0^+ - m)$ en el álgebra de Banach \mathcal{B}_p . Pero el operador $W^0(\chi_0^+ - m)$ no es invertible para $m \in \{0, 1\}$, por lo cual $m \in \text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi$, lo que completa la prueba de (9.10) en el caso (ii).

Como (9.10) está probado para todo $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, solo resta probar la inclusión de la derecha en (9.7).

Tomando $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ donde $(\lambda, \tau) \in \hat{\Omega}_0$, consideremos las clases laterales $[\hat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi$ y $[\hat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)$ en las álgebras de Banach cocientes $\Lambda_\xi^\pi = \Lambda^\pi/J_\xi^\pi$ y $\Delta_\xi^\pi(\lambda) = \Delta^\pi(\lambda)/J_\xi^\pi(\lambda)$, respectivamente, donde el operador $\hat{X}_{\lambda,\tau}$ está dado por (9.5). Como $J_\xi^\pi \subset J_{\xi,\eta}^\pi$, la

invertibilidad de la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi$ en el álgebra de Banach Λ_ξ^π implica la invertibilidad de la clase lateral $X_{\xi,\eta}^\pi$ en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$. Por lo tanto,

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi \subset \text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi). \quad (9.15)$$

Aseveramos que para cada $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y cada $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$,

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi) = \text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)). \quad (9.16)$$

En efecto, si la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach Λ_ξ^π , entonces por (9.2) la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)$ es invertible en el álgebra de Banach $\Delta_\xi^\pi(\lambda)$. Por el contrario, si la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)$ es invertible en el álgebra de Banach $\Delta_\xi^\pi(\lambda)$ y $\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda))$ no separa a \mathbb{C} , entonces la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)$ es invertible en el álgebra de Banach $\mathcal{D}_\xi^\pi(\lambda) \subset \Delta_\xi^\pi(\lambda)$ generada por las clases laterales $I^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)$ y $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)$. Por consiguiente, como $\mathcal{D}_\xi^\pi(\lambda)$ es la cerradura del conjunto $\{A^\pi + J_\xi^\pi(\lambda) : A^\pi \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi\}$, concluimos que existe una clase lateral $B^\pi \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi$ tal que

$$[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi B^\pi - I^\pi \in J_\xi^\pi(\lambda), \quad B^\pi [\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi - I^\pi \in J_\xi^\pi(\lambda).$$

Esto implica por (9.3) que la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach Λ_ξ^π . Así, tenemos (9.16) siempre que $\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda))$ no separe a \mathbb{C} .

Por otra parte, para cada $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y cada $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$, definimos el operador $\widetilde{X}_{\lambda,\tau} := w\widehat{X}_{\lambda,\tau}w^{-1}I \in \mathcal{B}_p$, donde $\widehat{X}_{\lambda,\tau}$ está dado por (9.5), y consideremos la clase lateral

$$\begin{aligned} & [\widetilde{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda) = \\ & \begin{cases} [w(I - (\chi_\lambda^+ I - W^0(\chi_0^-))^2)w^{-1}I]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda) & \text{si } (\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}, \\ [w(I - (\chi_0^- I - W^0(\chi_\tau^+))^2)w^{-1}I]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda) & \text{si } (\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}, \end{cases} \end{aligned} \quad (9.17)$$

la cual pertenece al álgebra de Banach cociente $\widetilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda) := \widetilde{\Delta}^\pi(\lambda)/\widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda)$, donde $\widetilde{\Delta}^\pi(\lambda) := \{[wAw^{-1}I]^\pi : A \in \Delta(\lambda)\}$ es una subálgebra de Banach de \mathcal{B}_p^π y

$$\widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda) := \{wA^\pi w^{-1}I : A^\pi \in J_\xi^\pi(\lambda)\}$$

es un ideal bilateral cerrado de $\widetilde{\Delta}^\pi(\lambda)$. Obviamente,

$$\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)) = \text{sp}_{\widetilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\widetilde{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda)). \quad (9.18)$$

Además, en (9.17) se puede suponer sin pérdida de generalidad que $v = \ln w$ es tal que la función (6.17) está en SO_λ , la función $x \mapsto \sigma_\lambda(x + \lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ es una función par en SO_0 , y la función $x \mapsto \sigma_\infty(x)$ es una función par en SO_∞ . Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(\lambda + (\cdot))|_{\mathbb{R}_+} &= \sigma_\lambda(\lambda - (\cdot))|_{\mathbb{R}_+} \in SO_0(\mathbb{R}_+) \text{ si } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \sigma_\lambda(\cdot)|_{\mathbb{R}_+} &= \sigma_\lambda(-(\cdot))|_{\mathbb{R}_+} \in SO_\infty(\mathbb{R}_+) \text{ si } \lambda = \infty. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Además, para $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, deducimos de (9.15), (9.16) y (9.18) que

$$\begin{aligned} \text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi &\subset \text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi}([\widehat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + J_\xi^\pi) = \text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)) \\ &= \text{sp}_{\widetilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\widetilde{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda)) \end{aligned} \quad (9.20)$$

si $\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda))$ no separa a \mathbb{C} . Abajo veremos que se satisface esta última condición.

Primero, sea $(\lambda, \tau) \in \{(0, \infty), (\infty, 0)\}$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$. Consideremos el isomorfismo isométrico

$$\Upsilon : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p_2(\mathbb{R}_+), \quad (\Upsilon f)(x) = \begin{cases} f(x) \\ f(-x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (9.21)$$

donde la norma de las funciones vectoriales $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^2 \in L^p_2(\mathbb{R}_+)$ con entradas en $L^p(\mathbb{R}_+)$ está dada por $\|\varphi\| = (\|\varphi_1\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}^p + \|\varphi_2\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}^p)^{1/p}$.

Como $W^0(\chi_-) = P_+ := (I + S_{\mathbb{R}})/2$ (ver, p. ej., [16, Sección 2.5]), donde el operador singular integral de Cauchy $S_{\mathbb{R}}$ está dado por (2.7), concluimos que

$$I - (\chi_- I - W^0(\chi_+))^2 = I - (\chi_+ I - W^0(\chi_-))^2 = I - (\chi_+ I - P_+)^2. \quad (9.22)$$

Como v es una función par (ver (9.19)), se ve fácilmente que

$$\begin{aligned} &\Upsilon [e^v (I - (\chi_+ I - P_+)^2) e^{-v} I] \Upsilon^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (I + e^v S_{\mathbb{R}_+} e^{-v} I)/2 & 0 \\ 0 & (I + e^v S_{\mathbb{R}_+} e^{-v} I)/2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Como $\lambda \in \{0, \infty\}$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$, deducimos que para cualquier clase lateral $A^\pi \in \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda)$,

$$\mathcal{T}(A^\pi \Upsilon^{-1}) = [A_{i,j}^\pi]_{i,j=1}^2, \quad A_{i,j}^\pi \in J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, \lambda) \quad (i, j = 1, 2), \quad (9.24)$$

donde \mathcal{T} dado por (8.56)–(8.57) es aplicado a cada entrada y $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, \lambda)$ es el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach \mathcal{B}_p^π definido en la Subsección 8.4 para $s = \lambda$. Por lo tanto, debido a (9.22)–(9.24), la invertibilidad de la clase lateral $[\widetilde{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda)$ en $\widetilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)$ para $(\lambda, \tau) \in \{(0, \infty), (\infty, 0)\}$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ es equivalente a la invertibilidad de la clase lateral

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{T}(I + e^v S_{\mathbb{R}_+} e^{-v} I)/2]_\xi^\pi & [0]_\xi^\pi \\ [0]_\xi^\pi & [\mathcal{T}(I + e^v S_{\mathbb{R}_+} e^{-v} I)/2]_\xi^\pi \end{bmatrix}, \quad (9.25)$$

donde las entradas en la matriz (9.25) pertenecen a $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, \lambda)$. En consecuencia,

$$\text{sp}_{\widetilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\widetilde{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + \widetilde{J}_\xi^\pi(\lambda)) = \text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, \lambda)}[\mathcal{T}(I + e^v S_{\mathbb{R}_+} e^{-v} I)/2]_\xi^\pi. \quad (9.26)$$

Como $w = e^v$ es un peso lentamente oscilatorio en \mathbb{R}_+ , deducimos del Teorema 8.5 y la igualdad $\nu(\xi) = 1/p + \xi v'(\xi)$ que

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, \lambda)}[\mathcal{T}(I + e^v S_{\mathbb{R}_+} e^{-v} I)/2]_\xi^\pi = \widetilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}, \quad (9.27)$$

donde $\tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ está dado por (9.8). Combinando (9.18), (9.26) y (9.27), concluimos que para $(\lambda, \tau) \in \{(0, \infty), (\infty, 0)\}$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$,

$$\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)) = \text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\tilde{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi(\lambda)) = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}, \quad (9.28)$$

y por eso $\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda))$ no separa a \mathbb{C} , lo cual completa la prueba de (9.20) para $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, donde $(\lambda, \tau) \in \{(0, \infty), (\infty, 0)\}$. Ahora aplicando (9.20) y (9.28), obtenemos que

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi \subset \text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\tilde{X}_{\lambda,\tau}]^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi(\lambda)) = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}, \quad (9.29)$$

lo cual completa la prueba de (9.7) en el caso $(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega}_{0,\infty}$, donde

$$\tilde{\Omega}_{0,\infty} := (M_0(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times M_0(SO^\circ)).$$

Los casos restantes de $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ se reducen al caso $(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega}_{0,\infty}$ como sigue.

Primero, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$. Consideremos el operador isométrico de desplazamiento

$$U_{-\lambda} : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R}), \quad (U_{-\lambda}f)(x) = f(x + \lambda) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces para cada $a \in SO_\lambda$ la función $a_\lambda(x) := a(x + \lambda)$ está en SO_0 . Además, obtenemos que

$$\begin{aligned} U_{-\lambda} [w(I - (\chi_\lambda^+ I - W^0(\chi_0^-))^2)w^{-1}I]^\pi U_\lambda \\ = [e^{v(\lambda+(\cdot))}(I - (\chi_+ I - P_+)^2)e^{-v(\lambda+(\cdot))}I]^\pi, \end{aligned}$$

donde el peso $\widehat{w}(x) := e^{v(x+\lambda)}$ está en $A_p(\mathbb{R})$ y, de acuerdo a (6.17), la función $\sigma_\lambda(x + \lambda) = xv'(x + \lambda)$ pertenece a SO_0 . Se ve fácilmente que

$$U_{-\lambda}^\pi \tilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda) U_\lambda^\pi = \tilde{\Delta}_\zeta^\pi(0), \quad U_{-\lambda}^\pi \tilde{J}_\xi^\pi(\lambda) U_\lambda^\pi = \tilde{J}_\zeta^\pi(0), \quad (9.30)$$

donde $\zeta \in M_0(SO^\circ)$ y $\zeta(a_\lambda) = \xi(a)$ para cada $a \in SO_\lambda$. Notemos que $\tilde{\Delta}_\zeta^\pi(0)$ y $\tilde{J}_\zeta^\pi(0)$ están definidos como antes, pero con w reemplazado por \widehat{w} . Por consiguiente, deducimos de (9.22) y (9.30) que

$$\text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\tilde{X}_{\lambda,\infty}]^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi(\lambda)) = \text{sp}_{\tilde{\Delta}_\zeta^\pi(0)}([\tilde{X}_{0,\infty}]^\pi + \tilde{J}_\zeta^\pi(0)), \quad (9.31)$$

donde

$$\tilde{X}_{0,\infty} = e^{v(\lambda+(\cdot))}(I - (\chi_+ I - P_+)^2)e^{-v(\lambda+(\cdot))}I.$$

Tomando en cuenta la igualdad

$$\nu(\zeta) = 1/p + \zeta(\sigma_\lambda((\cdot) + \lambda)) = 1/p + \xi(\sigma_\lambda) = \nu(\xi),$$

donde σ_λ está dado por (6.17), concluimos de (9.18), (9.31) y (9.28) que

$$\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\infty}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)) = \text{sp}_{\tilde{\Delta}_\zeta^\pi(0)}([\tilde{X}_{0,\infty}]^\pi + \tilde{J}_\zeta^\pi(0)) = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}. \quad (9.32)$$

Así, de acuerdo a (9.32), $\text{sp}_{\Delta_\xi^\pi(\lambda)}([\widehat{X}_{\lambda,\infty}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda))$ no separa a \mathbb{C} para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$. Finalmente, (9.20) y (9.32) dan (9.29) para todo $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$ y todo $(\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}$.

Ahora sea $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$. Entonces en vista de la relación $W^0(\chi_0^+) = P_- := (I - S_{\mathbb{R}})/2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} & e_\tau [w(I - (\chi_0^- I - W^0(\chi_\tau^+))^2)w^{-1}I]^\pi e_{-\tau} I \\ &= [e^v(I - (\chi_- I - P_-)^2)e^{-v}I]^\pi = [e^v(I - (\chi_+ I - P_+)^2)e^{-v}I]^\pi. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Más aún,

$$[e_\tau I]^\pi \tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty) [e_{-\tau} I]^\pi = \tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty), \quad [e_\tau I]^\pi \tilde{J}_\xi^\pi(\infty) [e_{-\tau} I]^\pi = \tilde{J}_\xi^\pi(\infty), \quad (9.34)$$

Por lo tanto, deducimos de (9.33) y (9.34) que

$$\text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty)}([e_\tau \tilde{X}_{\infty, \tau} e_{-\tau} I]^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi(\infty)) = \text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty)}([\tilde{X}_{\infty, 0}]^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi(\infty)), \quad (9.35)$$

donde

$$\tilde{X}_{\infty, 0} = e^v(I - (\chi_+ I - P_+)^2)e^{-v}I.$$

Tomando en cuenta la igualdad $\nu(\xi) = 1/p + \xi(\sigma_\infty)$ donde σ_∞ está dado por (6.17), concluimos de (9.18), (9.35) y (9.28) que

$$\text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty)}([\hat{X}_{\infty, \tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\infty)) = \text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty)}([\tilde{X}_{\infty, 0}]^\pi + \tilde{J}_\xi^\pi(\infty)) = \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}. \quad (9.36)$$

Así, de acuerdo a (9.36), $\text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\infty)}([\hat{X}_{\infty, \tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\infty))$ no separa a \mathbb{C} para todo $\tau \in \mathbb{R}$ y todo $\xi \in M_\infty(SO^\diamond)$. Finalmente, (9.20) y (9.36) dan (9.29) para todo $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ y todo $(\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}$.

En consecuencia, (9.29) está probado para todo $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ y todo $(\lambda, \tau) \in \hat{\Omega}_0$, lo cual completa la demostración. \square

Dado $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, consideremos la subálgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ de $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$ generada por la clase lateral $I_{\xi, \eta}^\pi$, P y Q , donde P, Q están dados por (5.12) o (5.13) si,

$$(\xi, \eta) \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \quad \text{o} \quad (\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond)$$

respectivamente. Como el espectro $\text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi$ no separa a \mathbb{C} debido a (9.7)–(9.8), deducimos el siguiente corolario del Teorema 9.2 y [69, Corolario 10.18].

Corolario 9.3. *Si $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, entonces*

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi = \text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi} X_{\xi, \eta}^\pi.$$

Corolario 9.4. *Si $(\lambda, \tau) \in \hat{\Omega}_0$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$, entonces*

$$\tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)} \subset \text{sp}_{\Lambda^\pi} [\hat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi. \quad (9.37)$$

Demostración. Si $(\lambda, \tau) \in \hat{\Omega}_0$ y $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$, entonces concluimos de (9.28), (9.32) y (9.36) que

$$\text{sp}_{\tilde{\Delta}_\xi^\pi(\lambda)}([\hat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi + J_\xi^\pi(\lambda)) = \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}. \quad (9.38)$$

Aplicando (9.20) y (9.38), deducimos que

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi} [\hat{X}_{\lambda, \tau}]_\xi^\pi = \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}. \quad (9.39)$$

Obviamente,

$$\text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi} [\hat{X}_{\lambda, \tau}]_\xi^\pi \subset \text{sp}_{\Lambda^\pi} [\hat{X}_{\lambda, \tau}]^\pi,$$

lo cual junto con (9.39) implican (9.37). \square

9.2. Espectro de las clases laterales $X_{\xi,\eta}^\pi$ para $(\xi, \eta) \in \Omega_0$

Fijemos $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y consideremos el álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ generada por las clases laterales $[aI]^\pi$ ($a \in SO^\diamond$), $[W^0(b)]^\pi$ ($b \in SO_{p,w}^\diamond$) y $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi$, donde $\widehat{X}_{\lambda,\tau}$ está dado por (9.5).

Claramente, el álgebra $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ consiste de elementos de la forma

$$Y^\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n} W^0(b_{k,s,n})]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k \right) \quad (9.40)$$

donde $a_{k,s,n} \in SO^\diamond$ y $b_{k,s,n} \in SO_{p,w}^\diamond$ para todo $k = 0, 1, \dots, N_n$, todo $s = 1, 2, \dots, M_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la subálgebra de Banach conmutativa $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi = \text{alg} \{[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi\}$ de Λ^π generada por la clase lateral unidad I^π y la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi$. Entonces el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi)$ de $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi$ coincide con el espectro $\text{sp}_{\Lambda^\pi}[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi$ del elemento $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi$ (ver, p. ej., [18, Sección 1.19]). Sea

$$\mathcal{N}_{\lambda,\tau} := \text{sp}_{\Lambda^\pi}[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi = \text{sp}_{\text{ess}} \widehat{X}_{\lambda,\tau}. \quad (9.41)$$

Para cada $(\xi, \eta, \mu) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond) \times \mathcal{N}_{\lambda,\tau}$, introducimos el ideal bilateral cerrado $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ del álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ generado por los ideales maximales

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,\xi}^\pi &:= \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond, a(\xi) = 0\}, \\ \mathcal{I}_{2,\eta}^\pi &:= \{[W^0(b)]^\pi : b \in SO_{p,w}^\diamond, b(\eta) = 0\}, \\ \mathcal{I}_{3,\mu}^\pi &:= [I_\mu]^\pi \end{aligned} \quad (9.42)$$

de las álgebras de Banach conmutativas

$$\{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond\}, \quad \text{clos}\{[W^0(b)]^\pi : b \in SO_{p,w}^\diamond\}, \quad \mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi,$$

respectivamente, donde $[I_\mu]^\pi$ es el ideal maximal del álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}^\pi$ que contiene al elemento $[\widehat{X}_{\lambda,\tau} - \mu I]^\pi$.

Dado $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$, donde $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$, sea

$$\mathfrak{M}_{\xi,\eta} := \{\mu \in \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)} : I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi\}, \quad (9.43)$$

donde $\widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ y $\nu(\xi)$ están dados por (9.8) y (9.9), respectivamente.

Abajo demostraremos que, para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_0$, el espectro de la clase lateral $X_{\xi,\eta}^\pi$ en ambas álgebras $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ y $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ coincide con $\mathfrak{M}_{\xi,\eta}$.

Teorema 9.5. *Si $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ y $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$, entonces*

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi = \text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi = \mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \quad (9.44)$$

donde $\mathfrak{M}_{\xi,\eta}$ está dado por (9.43).

Demostración. Fijemos $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y $(\xi, \eta, \mu) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond) \times \mathcal{N}_{\lambda,\tau}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n} W^0(b_{k,s,n})]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k = T_1^\pi + T_2^\pi + T_3^\pi + T_4^\pi, \quad (9.45)$$

donde

$$\begin{aligned}
T_1^\pi &:= \sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [(a_{k,s,n} - a_{k,s,n}(\xi))W^0(b_{k,s,n})]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k, \\
T_2^\pi &:= \sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}(\xi)W^0(b_{k,s,n} - b_{k,s,n}(\eta))]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k, \\
T_3^\pi &:= \sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}(\xi)W^0(b_{k,s,n}(\eta))]^\pi (([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k - \mu^k I^\pi), \\
T_4^\pi &:= \sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}(\xi)b_{k,s,n}(\eta)\mu^k]^\pi I^\pi.
\end{aligned}$$

Las clases laterales $T_1^\pi, T_2^\pi, T_3^\pi$ pertenecen al ideal $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. De aquí

$$\sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}W^0(b_{k,s,n})]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k - \sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}(\xi)b_{k,s,n}(\eta)\mu^k]^\pi I^\pi \in \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi.$$

Consideremos el homomorfismo canónico $\psi_{\xi,\eta,\mu} : \mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi \rightarrow Z_{\xi,\eta,\mu}^\pi := \mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi / \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ dado por $A^\pi \mapsto A^\pi + \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. Entonces para cada clase lateral de la forma (9.40) existe un número $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned}
&\psi_{\xi,\eta,\mu} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}W^0(b_{k,s,n})]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}(\xi)b_{k,s,n}(\eta)\mu^k]^\pi I^\pi + \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \right) \\
&= [cI]^\pi + \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi.
\end{aligned} \tag{9.46}$$

Sea $I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$, y por consiguiente $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ es un ideal propio del álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$. Demostremos que $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ es un ideal maximal de $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$.

Por el contrario, supongamos que existe un ideal bilateral cerrado propio $\widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ del álgebra $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ el cual contiene propiamente al ideal $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. Entonces existe una clase lateral $A^\pi \in \mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ la cual pertenece a $\widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \setminus \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. Como en vista de (9.46),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{N_n} \sum_{s=1}^{M_n} [a_{k,s,n}W^0(b_{k,s,n})]^\pi ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi)^k + \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \right) = [cI]^\pi + \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \tag{9.47}$$

para todo $a_{k,s,n} \in SO^\diamond$, todo $b_{k,s,n} \in SO_{p,w}^\diamond$ y todo $\mu \in \mathcal{N}_{\lambda,\tau}$, existe un número complejo $c \neq 0$ tal que $A^\pi - [cI]^\pi \in \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$, porque de otra forma $A^\pi \in \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ si $c = 0$, lo cual contradice nuestra suposición de que $A^\pi \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \setminus \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. Por lo tanto, $[cI]^\pi \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ ya que $A^\pi \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ y $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \subset \widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. Pero la clase lateral $[cI]^\pi$, donde $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es invertible en el álgebra de Banach $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$, lo cual implica que el ideal $\widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ coincide con toda el álgebra $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$. Entonces el ideal $\widetilde{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ no es propio, lo que es una contradicción.

De aquí, para $(\xi, \eta, \mu) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ) \times \mathcal{N}_{\lambda,\tau}$ y $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$, el ideal $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \subset \mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ es maximal si es propio, y el valor de la transformada de Gelfand de la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi \in \mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ en el punto (ξ, η, μ) identificándolo con el ideal maximal $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ coincide con μ .

Fijemos $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, y consideremos el conjunto

$$\mathfrak{N}_{\xi,\eta} := \{\mu \in \mathcal{N}_{\lambda,\tau} : I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi\}. \quad (9.48)$$

Aseveramos que

$$\mathfrak{N}_{\xi,\eta} = \text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi. \quad (9.49)$$

En efecto, tomemos $\mu \in \mathfrak{N}_{\xi,\eta}$ y consideremos el álgebra de Banach conmutativa $\text{alg}(X_{\xi,\eta}^\pi)$ generada por las clases laterales $I_{\xi,\eta}^\pi$ y $X_{\xi,\eta}^\pi$. Tenemos que

$$\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi / \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \cong (\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi / J_{\xi,\eta}^\pi) / (\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi / J_{\xi,\eta}^\pi). \quad (9.50)$$

Pero $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi / J_{\xi,\eta}^\pi = \text{alg}(X_{\xi,\eta}^\pi)$ por (9.6) y $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi / J_{\xi,\eta}^\pi = \widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$, donde $\widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ es el ideal del álgebra de Banach $\text{alg}(X_{\xi,\eta}^\pi)$ que contiene a la clase lateral $X_{\xi,\eta}^\pi - \mu I_{\xi,\eta}^\pi$. De aquí, por (9.50), la invertibilidad de cualquier clase lateral $A^\pi + \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ en el álgebra cociente $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi / \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ es equivalente a la invertibilidad de la clase lateral $A_{\xi,\eta}^\pi + \widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ en el álgebra cociente $\text{alg}(X_{\xi,\eta}^\pi) / \widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. Por eso, como la clase lateral $[\widehat{X}_{\lambda,\tau} - \mu I]^\pi \in \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ no es invertible debido a que $I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$, concluimos que la clase lateral $(X_{\xi,\eta}^\pi - \mu I_{\xi,\eta}^\pi) \in \widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ tampoco es invertible, y vice versa. Por lo tanto este μ está en $\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi$, y así $\mathfrak{N}_{\xi,\eta} \subset \text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi$.

Por el contrario, si $\mu \in \text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi$ para $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, entonces $\widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ es un ideal maximal de $\text{alg}(X_{\xi,\eta}^\pi)$, y por eso $\widehat{\mathcal{I}}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \neq \text{alg}(X_{\xi,\eta}^\pi)$. Pero entonces de (9.50) se sigue que $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ es un ideal propio de $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$, lo cual implica que $I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$. De aquí, como $\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi \subset \mathcal{N}_{\lambda,\tau}$, concluimos que $\mu \in \mathfrak{N}_{\lambda,\tau}$ y en consecuencia $\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi \subset \mathfrak{N}_{\lambda,\tau}$, lo cual completa la prueba de (9.49).

Resta probar que

$$\mathfrak{M}_{\xi,\eta} = \mathfrak{N}_{\xi,\eta} \quad (9.51)$$

para todo $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$ y todo $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$.

El Corolario 9.4 y (9.41) implican la relación $\widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)} \subset \mathcal{N}_{\lambda,\tau}$, y por consiguiente, invocando (9.43) y (9.48), obtenemos que

$$\mathfrak{M}_{\xi,\eta} \subset \mathfrak{N}_{\xi,\eta}. \quad (9.52)$$

Aplicando (9.49) y (9.7), concluimos que $\mathfrak{N}_{\xi,\eta} \subset \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$, por lo cual

$$\mathfrak{N}_{\xi,\eta} \subset \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)} \cap \{\mu \in \mathcal{N}_{\lambda,\tau} : I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi\} = \mathfrak{M}_{\xi,\eta}. \quad (9.53)$$

Ahora, combinando (9.52) y (9.53), obtenemos (9.51).

Finalmente, de (9.49) y (9.51) se sigue que

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi = \mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \quad (9.54)$$

lo cual junto con el Corolario 9.3 nos da (9.44) para todo $(\xi, \eta) \in \Omega_0$. \square

9.3. Espectro local: identificación

Estudiemos bajo que condiciones $\mathfrak{M}_{\xi,\eta} = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$. Sea $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$, donde $\widehat{\Omega}_0$ está dado por (9.4), y sea $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ que tiene entradas coherentes ξ y η . Por la Subsección 6.3, las entradas ξ y η de una pareja $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ son llamadas *coherentes*, si para conjuntos numerables arbitrarios $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset SO^\diamond$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset SO_{p,w}^\diamond$ existe una sucesión $\{y_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple (6.76), si $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$, y se cumple (6.77) si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$.

Aplicando la teoría de operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos lentamente oscilatorios y técnicas de operadores límite, se puede probar la siguiente afirmación.

Teorema 9.6. *Si $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y la pareja $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ tiene entradas coherentes, entonces*

$$\mathfrak{M}_{\xi,\eta} = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}. \quad (9.55)$$

Demostración. Fijemos $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y consideremos la pareja $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$ con entradas coherentes. De acuerdo a (9.43), es suficiente probar que

$$I^\pi \notin \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi \text{ para todo } \mu \in \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}. \quad (9.56)$$

Claramente, los ideales $\mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ del álgebra de Banach $\mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$ consisten de las clases laterales que tienen la forma

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ [a_\nu A_\nu]^\pi + \sum_{m=1}^{M_\nu} [W^0(b_{m,\nu})]^\pi [B_{m,\nu}]^\pi + ([\widehat{X}_{\lambda,\tau}]^\pi - \mu I^\pi) [C_\nu]^\pi \right\}, \quad (9.57)$$

donde $a_\nu \in SO^\diamond$, $a_\nu(\xi) = 0$, $b_{m,\nu} \in SO_{p,w}^\diamond$, $b_{m,\nu}(\eta) = 0$, y $A_\nu, B_{m,\nu}, C_\nu \in \mathcal{Y}_{\lambda,\tau}^\pi$.

Contrariamente a (9.56), supongamos que $I^\pi \in \mathcal{I}_{\xi,\eta,\mu}^\pi$ para algún $\mu \in \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$. Entonces, por (9.57), existen una sucesión de operadores compactos $K_\nu \in \mathcal{K}_{p,w}$ y una sucesión de operadores

$$T_\nu := w \left(a_\nu A_\nu + \sum_{m=1}^{M_\nu} W^0(b_{m,\nu}) B_{m,\nu} + (\widehat{X}_{\lambda,\tau} - \mu I) C_\nu + K_\nu \right) w^{-1} I \quad (9.58)$$

en $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$ tales que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = I. \quad (9.59)$$

Si $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$, donde $(\lambda, \tau) \in \mathbb{R} \times \{\infty\}$, entonces de (6.76), (9.58), (6.22), el Lema 6.5 y el Lema 6.8(i) se sigue que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} U_{-\lambda} (T_\nu - w(\widehat{X}_{\lambda,\tau} - \mu I) C_\nu w^{-1} I) U_\lambda V_{y_n} \right) = 0, \quad (9.60)$$

y por consiguiente en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} U_{-\lambda} T_\nu U_\lambda V_{y_n} \right) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n}^{-1} U_{-\lambda} T_\nu U_\lambda V_{y_n} \right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(|x|^{\delta_\xi} (\widehat{X}_{0,\infty} - \mu I) \widehat{C}_\nu |x|^{-\delta_\xi} I \right) = |x|^{\delta_\xi} (\widehat{X}_{0,\infty} - \mu I) \widehat{C} |x|^{-\delta_\xi} I, \end{aligned} \quad (9.61)$$

donde

$$\delta_\xi = \xi(\sigma_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^{-1} v'(\lambda + y_n^{-1}))$$

y los siguientes límites fuertes existen en \mathcal{B}_p :

$$|x|^{\delta_\xi} \widehat{C}_\nu |x|^{-\delta_\xi} I = \text{s-lim}_{\nu \rightarrow \infty} (w C_\nu w^{-1} I), \quad |x|^{\delta_\xi} \widehat{C} |x|^{-\delta_\xi} I = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (|x|^{\delta_\xi} \widehat{C}_\nu |x|^{-\delta_\xi} I). \quad (9.62)$$

Así, de (9.59) y (9.61) se sigue que

$$|x|^{\delta_\xi} (\widehat{X}_{0,\infty} - \mu I) \widehat{C} |x|^{-\delta_\xi} I = I. \quad (9.63)$$

Se ve fácilmente que el operador $|x|^{\delta_\xi} \widehat{C} |x|^{-\delta_\xi} I$ pertenece al subálgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}_{0,\infty} := \text{alg} \{ |x|^{\delta_\xi} \widehat{X}_{0,\infty} |x|^{-\delta_\xi} I \}$ de \mathcal{B}_p generada por los operadores I y $|x|^{\delta_\xi} \widehat{X}_{0,\infty} |x|^{-\delta_\xi} I$. Más aún, aplicando (9.21), deducimos por analogía con (9.25) que

$$\begin{aligned} & \Upsilon (|x|^{\delta_\xi} \widehat{X}_{0,\infty} |x|^{-\delta_\xi} I) \Upsilon^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (I + |x|^{\delta_\xi} S_{\mathbb{R}_+} |x|^{-\delta_\xi} I)/2 & 0 \\ 0 & (I + |x|^{\delta_\xi} S_{\mathbb{R}_+} |x|^{-\delta_\xi} I)/2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Por la demostración del Teorema 8.5, el operador

$$(I + |x|^{\delta_\xi} S_{\mathbb{R}_+} |x|^{-\delta_\xi} I)/2 \in \mathcal{B}_p$$

es similar al operador de convolución de Mellin $\text{Co}(\widehat{b}_\nu(\xi)) \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$, donde

$$\widehat{b}_\nu(\xi)(\lambda) := [1 + \coth(\pi\lambda + \pi i\nu(\xi))]/2 \quad \text{y} \quad \nu(\xi) = 1/p + \delta_\xi.$$

De aquí, por el Teorema 8.3, de (9.64) se sigue que

$$\text{sp}_\Lambda (|x|^{\delta_\xi} \widehat{X}_{0,\infty} |x|^{-\delta_\xi} I) = \text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} \text{Co}(\widehat{b}_\nu(\xi)) = \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}. \quad (9.65)$$

Como $\mu \in \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ pertenece al espectro del operador $|x|^{\delta_\xi} \widehat{X}_{0,\infty} |x|^{-\delta_\xi} I$, concluimos que el operador $|x|^{\delta_\xi} (\widehat{X}_{0,\infty} - \mu I) \widehat{C} |x|^{-\delta_\xi} I$ está contenido en un ideal maximal del álgebra de Banach $\mathcal{A}_{0,\infty}$, lo cual contradice la igualdad (9.58) y prueba (9.55) en el caso $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora sea $(\xi, \eta) \in M_\lambda(SO^\circ) \times M_\tau(SO^\circ)$, donde $(\lambda, \tau) \in \{\infty\} \times \mathbb{R}$. Entonces deducimos de (6.77), (9.58), el Lema 6.5 y el Lema 6.8(ii) que

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau (T_\nu - w(\widehat{X}_{\lambda,\tau} - \mu I) C_\nu w^{-1} I) e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) = 0,$$

y por lo tanto en el espacio $L^p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau T_\nu e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(V_{y_n} e_\tau T_\nu e_{-\tau} V_{y_n^{-1}} \right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(|x|^{\delta_\xi} (\widehat{X}_{\infty,0} - \mu I) \widehat{C}_\nu |x|^{-\delta_\xi} I \right) = |x|^{\delta_\xi} (\widehat{X}_{\infty,0} - \mu I) \widehat{C} |x|^{-\delta_\xi} I, \end{aligned} \quad (9.66)$$

donde

$$\delta_\xi := \xi(\sigma_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n v'(y_n)).$$

y existen los límites fuertes (9.62) en \mathcal{B}_p . Así, de (9.59) y (9.66) se sigue que

$$|x|^{\delta_\xi}(\widehat{X}_{\infty,0} - \mu I)\widehat{C}|x|^{-\delta_\xi}I = I. \quad (9.67)$$

Como $\widehat{X}_{\infty,0} = \widehat{X}_{0,\infty}$, deducimos de (9.65) que

$$\text{sp}_\Lambda(|x|^{\delta_\xi}\widehat{X}_{\infty,0}|x|^{-\delta_\xi}I) = \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)},$$

donde $\nu(\xi) = 1/p + \delta_\xi$ para $\xi \in M_\infty(SO^\diamond)$. Por consiguiente, $\mu \in \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ pertenece al espectro del operador $|x|^{\delta_\xi}\widehat{X}_{\infty,0}|x|^{-\delta_\xi}I$, lo cual análogamente al caso previo contradice la igualdad (9.67). Esto prueba (9.55) en el caso $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\tau(SO^\diamond)$, donde $\tau \in \mathbb{R}$. \square

10. Resultados principales para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$

Esta sección contiene los resultados principales del trabajo: un cálculo simbólico para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ y un criterio de la propiedad de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$. En esta sección suponemos que $1 < p < \infty$ y que el peso $w \in A_p(\mathbb{R})$ satisface la condición **(A)** de la Subsección 6.2, y por eso w es equivalente a un peso lentamente oscilatorio.

10.1. Corolario del teorema de dos idempotentes

Para cada (ξ, η) en Ω_0 dado por (7.1), concluimos del Teorema 9.5 y (9.43) que

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi = \text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi} X_{\xi,\eta}^\pi = \mathfrak{M}_{\xi,\eta} \subset \widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)},$$

donde $\widetilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ está dado por (9.8) y (9.9). De aquí, tomando $\mathcal{A} = \text{alg}\{E, P, Q\} = \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$, $\mathcal{B} = \Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ y $X = E - (P - Q)^2 = X_{\xi,\eta}^\pi$ en el Teorema 9.5, donde $E = I_{\xi,\eta}^\pi$ y los idempotentes $P = P_{\xi,\eta}^\pi$ y $Q = Q_{\xi,\eta}^\pi$ están dados por (5.12) si $(\xi, \eta) \in \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$ y por (5.13) si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond)$, inmediatamente deducimos el siguiente corolario del Teorema 7.1, el Lema 7.2, el Teorema 9.5.

Teorema 10.1. *Sea $1 < p < \infty$, sea $w \in A_p(\mathbb{R})$ un peso que satisface la condición **(A)** de la Subsección 6.2, y sea $(\xi, \eta) \in \Omega_0$. Entonces el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$, y*

(i) *para cada $\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}$, la aplicación $\pi_\mu : \{I_{\xi,\eta}^\pi, P_{\xi,\eta}^\pi, Q_{\xi,\eta}^\pi\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ dada por $\pi_\mu(I_{\xi,\eta}^\pi) = I_{2 \times 2}$,*

$$\pi_\mu(P_{\xi,\eta}^\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi_\mu(Q_{\xi,\eta}^\pi) = \begin{bmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{bmatrix}$$

se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach $\pi_\mu : \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$, donde $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ es cualquier valor arbitrario de la raíz cuadrada;

(ii) *una clase lateral $A_{\xi,\eta}^\pi \in \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ (equivalentemente, en $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$) si y sólo si $\det[\pi_\mu(A_{\xi,\eta}^\pi)] \neq 0$ para todo $\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}$.*

10.2. Álgebras de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ para $\xi, \eta \in M_\infty(SO^\diamond)$

De acuerdo al Lema 5.6(iii), el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ para cada $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$ está generada por todas las clases laterales $[aW^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi$ donde $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $b \in C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$, y por eso es conmutativa debido al Teorema 4.6. De aquí tenemos lo siguiente.

Lema 10.2. *Si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$, entonces $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ es un álgebra de Banach conmutativa isomorfa al álgebra $C(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ donde*

$$\mathcal{X} = \{(-\infty, -\infty), (-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty), (+\infty, +\infty)\}, \quad (10.1)$$

y la transformada de Gelfand

$$\Gamma : \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \rightarrow C(\mathcal{X}, \mathbb{C}), \quad \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \mapsto (\Gamma(\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi))(\cdot, \cdot)$$

está dada para $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$, $b \in C_{p,w}(\overline{\mathbb{R}})$ y $x \in \mathcal{X}_{j,k}$ ($j, k \in \{0, 1\}$) por

$$\begin{aligned} (\Gamma([aI]_{\xi,\eta}^\pi))(x) &= a(\xi^+)(1-j) + a(\xi^-)j, \\ (\Gamma([W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi))(x) &= b(\eta^+)(1-k) + b(\eta^-)k, \end{aligned} \quad (10.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{0,0} &= \{(-\infty, -\infty)\}, & \mathcal{X}_{0,1} &= \{(-\infty, +\infty)\}, \\ \mathcal{X}_{1,0} &= \{(+\infty, -\infty)\}, & \mathcal{X}_{1,1} &= \{(+\infty, +\infty)\}. \end{aligned}$$

Demostración. Fijemos $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$. Por el Lema 5.6(iii), el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ está generada por todas las clases laterales $[\tilde{a}_\xi W^0(\tilde{b}_\eta)]_{\xi,\eta}^\pi$, donde las funciones $\tilde{a}_\xi \in C(\overline{\mathbb{R}})$, $\tilde{b}_\eta \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$ son de la forma (5.3). De aquí,

$$\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi = \text{alg}\{[cW^0(d)]_{\xi,\eta}^\pi : c \in C(\overline{\mathbb{R}}), d \in C_p(\overline{\mathbb{R}})\},$$

y en vista del Lema 4.3(c) el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ es conmutativa.

Obviamente, el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi)$ de $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ puede ser identificado con el conjunto de cuatro puntos \mathcal{X} dado por (10.1). En efecto, $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi = \text{alg}\{E, P, Q\}$, donde P, Q están dados por (5.14) y $E = I_{\xi,\eta}^\pi$. Por analogía con la prueba de (9.10) (o similarmente a [20, p. 261]), concluimos que

$$\text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi} P = \{0, 1\}, \quad \text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi} Q = \{0, 1\},$$

y en consecuencia el espacio de ideales maximales $\mathcal{X} = M(\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi)$ de $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ es la unión de los siguientes cuatro conjuntos no vacíos

$$\mathcal{X}_{j,k} := \{y \in \mathcal{X} : (\Gamma P)(y) = 1-j, (\Gamma Q)(y) = 1-k\}, \quad j, k \in \{0, 1\},$$

donde $\Gamma : \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \rightarrow C(\mathcal{X})$ es la transformada de Gelfand. Si $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$, $b \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$, $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$ y $y \in \mathcal{X}_{j,k}$, entonces deducimos del Teorema 5.4 y (5.3) que

$$\begin{aligned} (\Gamma[aI]_{\xi,\eta}^\pi)(y) &= a(\xi^+)(1-j) + a(\xi^-)j, \\ (\Gamma[W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi)(y) &= b(\eta^+)(1-k) + b(\eta^-)k. \end{aligned}$$

Por eso, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{0,0} \cup \mathcal{X}_{0,1} \cup \mathcal{X}_{1,0} \cup \mathcal{X}_{1,1}$, donde los conjuntos $\mathcal{X}_{j,k}$ pueden identificarse con

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{0,0} &= \{(-\infty, -\infty)\}, & \mathcal{X}_{0,1} &= \{(-\infty, +\infty)\}, \\ \mathcal{X}_{1,0} &= \{(+\infty, -\infty)\}, & \mathcal{X}_{1,1} &= \{(+\infty, +\infty)\},\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. \square

Corolario 10.3. *Si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$, entonces el álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$, y una clase lateral $A_{\xi, \eta}^\pi \in \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$ (equivalentemente, en $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$) si y solo si*

$$(\Gamma(A_{\xi, \eta}^\pi))(\pm\infty, +\infty) \neq 0, \quad (\Gamma(A_{\xi, \eta}^\pi))(\pm\infty, -\infty) \neq 0.$$

Demostración. Fijemos $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$. Como el espectro $\text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi} A_{\xi, \eta}^\pi$ de cualquier clase lateral $A_{\xi, \eta}^\pi \in \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ es finito debido al Lema 10.2 y por consiguiente su interior es vacío, deducimos de [69, Teorema 10.18] que

$$\text{sp}_{\Lambda_{\xi, \eta}^\pi} A_{\xi, \eta}^\pi = \text{sp}_{\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi} A_{\xi, \eta}^\pi,$$

lo cual implica la cerradura de la inversión de $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ en $\Lambda_{\xi, \eta}^\pi$. Entonces el criterio de invertibilidad para $A_{\xi, \eta}^\pi$ de sigue directamente del Lema 10.2. \square

10.3. Homomorfismos de álgebras de Banach de $\mathfrak{A}_{p,w}$

Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned}\Omega_0 &:= \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond) \right), \\ \tilde{\Omega} &:= \left(\bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_0} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta} \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\} \right).\end{aligned}$$

Para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$, consideremos la aplicación

$$\Theta_{\xi, \eta, \mu} : \{[aI]_{\xi, \eta}^\pi : a \in PSO^\diamond\} \cup \{[W^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi : b \in PSO_{p,w}^\diamond\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

dada por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\Theta_{\xi, \eta, \mu}([aI]_{\xi, \eta}^\pi) &= \begin{bmatrix} a(\xi^+) & 0 \\ 0 & a(\xi^-) \end{bmatrix}, \\ \Theta_{\xi, \eta, \mu}([W^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi) &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{10.3}$$

donde $\varrho(\mu)$ es cualquier valor fijo de $\sqrt{\mu(1 - \mu)}$.

Lema 10.4. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p(\mathbb{R})$ un peso que satisface la condición **(A)**. Para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$, la aplicación $\Theta_{\xi, \eta, \mu}$, dada en los generadores de las álgebras de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ por las fórmulas (10.3), se extiende a un homomorfismo de álgebras de Banach $\Theta_{\xi, \eta, \mu} : \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$.*

Demostración. El Teorema 10.1 implica que para todo $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ y todo $\mu \in \mathfrak{M}_{\xi, \eta}$ podemos definir las aplicaciones

$$\Theta_{\xi, \eta, \mu} : \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad A_{\xi, \eta}^\pi \mapsto \pi_\mu(A_{\xi, \eta}^\pi) \quad (10.4)$$

donde los homomorfismos $\pi_\mu : \mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ están descritos en el Teorema 10.1(i). Así, para todo

$$(\xi, \eta, \mu) \in \bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_0} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta},$$

las aplicaciones (10.4) son homomorfismos de álgebras de Banach. Primero, verifiquemos que las fórmulas (10.3) son consistentes con el Teorema 10.1 y el Lema 5.6(i),(ii).

(i) Sea $(\xi, \eta) \in \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$. Entonces del Teorema 5.4, el Lema 5.6 y el Teorema 10.1 se sigue que los homomorfismos de álgebras de Banach (10.4) actúan en los generadores del álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ por

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi, \eta, \mu}([aI]_{\xi, \eta}^\pi) &= \pi_\mu \left(a(\xi^-)[\chi_\lambda^- I]_{\xi, \eta}^\pi + a(\xi^+)[\chi_\lambda^+ I]_{\xi, \eta}^\pi \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes a(\xi^-) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes a(\xi^+) = \begin{bmatrix} a(\xi^+) & 0 \\ 0 & a(\xi^-) \end{bmatrix}, \\ \Theta_{\xi, \eta, \mu}([W^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi) &= \pi_\mu \left(b(\eta^+)[W^0(\chi_0^-)]_{\xi, \eta}^\pi + b(\eta^-)[W^0(\chi_0^+)]_{\xi, \eta}^\pi \right) \\ &= \begin{bmatrix} \mu & \varrho(\mu) \\ \varrho(\mu) & 1 - \mu \end{bmatrix} \otimes b(\eta^+) + \begin{bmatrix} 1 - \mu & -\varrho(\mu) \\ -\varrho(\mu) & \mu \end{bmatrix} \otimes b(\eta^-) \\ &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual es consistente con (10.3).

(ii) Análogamente, para $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\circ)$ los homomorfismos de álgebras de Banach (10.4) están definidos en los generadores del álgebra de Banach $\mathcal{A}_{\xi, \eta}^\pi$ por

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi, \eta, \mu}([aI]_{\xi, \eta}^\pi) &= \pi_\mu \left(a(\xi^+)[\chi_0^- I]_{\xi, \eta}^\pi + a(\xi^-)[\chi_0^+ I]_{\xi, \eta}^\pi \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes a(\xi^+) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes a(\xi^-) = \begin{bmatrix} a(\xi^+) & 0 \\ 0 & a(\xi^-) \end{bmatrix}, \\ \Theta_{\xi, \eta, \mu}([W^0(b)]_{\xi, \eta}^\pi) &= \pi_\mu \left(b(\eta^-)[W^0(\chi_\tau^-)]_{\xi, \eta}^\pi + b(\eta^+)[W^0(\chi_\tau^+)]_{\xi, \eta}^\pi \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \mu & -\varrho(\mu) \\ -\varrho(\mu) & \mu \end{bmatrix} \otimes b(\eta^-) + \begin{bmatrix} \mu & \varrho(\mu) \\ \varrho(\mu) & 1 - \mu \end{bmatrix} \otimes b(\eta^+) \\ &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual es consistente con (10.3).

(iii) Ahora sea $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ)$. En este caso, tomando en cuenta el Lema 10.2, ponemos

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi, \eta, 0}(A_{\xi, \eta}^\pi) &:= \begin{bmatrix} (\Gamma(A_{\xi, \eta}^\pi))(-\infty, +\infty) & 0 \\ 0 & (\Gamma(A_{\xi, \eta}^\pi))(+\infty, -\infty) \end{bmatrix} \\ \Theta_{\xi, \eta, 1}(A_{\xi, \eta}^\pi) &:= \begin{bmatrix} (\Gamma(A_{\xi, \eta}^\pi))(-\infty, -\infty) & 0 \\ 0 & (\Gamma(A_{\xi, \eta}^\pi))(+\infty, +\infty) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.5)$$

donde la transformada de Gelfand

$$\Gamma : \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \rightarrow C(\mathcal{X}, \mathbb{C}), \quad A_{\xi,\eta}^\pi \mapsto (\Gamma(A_{\xi,\eta}^\pi))(\cdot, \cdot)$$

está dada por (10.2). En consecuencia, para cada $(\xi, \eta, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$ las aplicaciones $\Theta_{\xi,\eta,\mu} : \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ también son homomorfismos de álgebras de Banach, y de (10.5) y (10.2) se sigue que las matrices $\Theta_{\xi,\eta,\mu}([aI]_{\xi,\eta}^\pi)$ y $\Theta_{\xi,\eta,\mu}([W^0(b)]_{\xi,\eta}^\pi)$ para $a \in PSO^\diamond$ y $b \in PSO_{p,w}^\diamond$ también están dadas por las fórmulas (10.3). \square

El Lema 10.4, el Teorema 10.1 y el Corolario 10.3 implican inmediatamente lo siguiente.

Corolario 10.5. *Para cada $(\xi, \eta) \in \Omega$, donde $\Omega = \Omega_0 \cup (M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond))$, una clase lateral $A_{\xi,\eta}^\pi \in \mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ (equivalentemente, en $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$) si y solo si las matrices $\Theta_{\xi,\eta,\mu}(A_{\xi,\eta}^\pi)$ son invertibles para todo $\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}$ si $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ y todo $\mu \in \{0, 1\}$ si $(\xi, \eta) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond)$.*

10.4. Cálculo simbólico y la propiedad de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$

Para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$, definimos la aplicación

$$\Psi_{\xi,\eta,\mu} : \{aI : a \in PSO^\diamond\} \cup \{W^0(b) : b \in PSO_{p,w}^\diamond\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

dada por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi,\eta,\mu}(aI) &= \begin{bmatrix} a(\xi^+) & 0 \\ 0 & a(\xi^-) \end{bmatrix}, \\ \Psi_{\xi,\eta,\mu}(W^0(b)) &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-(1-\mu)) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1-\mu) + b(\eta^-\mu) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

donde $\varrho(\mu)$ es cualquier valor fijo de $\sqrt{\mu(1-\mu)}$.

Como $\Psi_{\xi,\eta,\mu} = \Theta_{\xi,\eta,\mu} \circ \delta_{\xi,\eta}$ para todo $(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$, donde $\delta_{\xi,\eta}$ está dado por (5.9)–(5.10) y $\Theta_{\xi,\eta,\mu}$ está dado por (10.3), el Lema 10.4 implica inmediatamente lo siguiente.

Teorema 10.6. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p(\mathbb{R})$ un peso que satisface la condición **(A)**. Las aplicaciones $\Psi_{\xi,\eta,\mu}$ $((\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega})$, dadas en los generadores del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ por las fórmulas (10.6), se extienden a homomorfismos de álgebras de Banach $\Psi_{\xi,\eta,\mu} : \mathfrak{A}_{p,w} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$.*

A cualquier operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ le asignamos la función matricial

$$A : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad (\xi, \eta, \mu) \mapsto \mathcal{A}(\xi, \eta, \mu) := \Psi_{\xi,\eta,\mu}(A),$$

llamada el *símbolo* del operador A .

Aplicando la cerradura de la inversión de las álgebras de Banach $\mathcal{A}_{\xi,\eta}^\pi$ en las álgebras de Banach $\Lambda_{\xi,\eta}^\pi$ para todo $(\xi, \eta) \in \Omega$ (ver el Teorema 10.1 y el Corolario 10.3) y la definición de símbolos de Fredholm para operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$, deducimos inmediatamente del Teorema 10.6, el Corolario 5.5 y el Corolario 10.5 el siguiente criterio de la propiedad de Fredholm.

Teorema 10.7. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p(\mathbb{R})$ un peso que satisface la condición (A). Entonces el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}^\pi$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}_{p,w}^\pi$. Un operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ es de Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si*

$$\det \mathcal{A}(\xi, \eta, \mu) \neq 0 \quad \text{para todo } (\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}. \quad (10.7)$$

Denotemos por $BC(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^{2 \times 2})$ a la C^* -álgebra de todas las funciones $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -valuadas continuas en $\tilde{\Omega}$. La aplicación símbolo

$$\Psi : \mathfrak{A}_{p,w} \rightarrow BC(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad A \mapsto \mathcal{A}(\cdot, \cdot, \cdot),$$

es un homomorfismo de álgebras de Banach cuyo kernel $\text{Ker } \Psi$ contiene al ideal $\mathcal{K}_{p,w}$ de todos los operadores compactos en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$.

En consecuencia, podemos reescribir el Teorema 10.7 en la forma siguiente.

Teorema 10.8. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p(\mathbb{R})$ que satisface la condición (A). Entonces un operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ es de Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si su símbolo $\Psi(A)$ es invertible.*

10.5. Casos parciales efectivos

En esta sección presentamos cuatro casos del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,w}$ en los cuales podemos reemplazar al conjunto $\mathfrak{M}_{\xi,\eta} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ para cada pareja $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ por todo el arco circular $\tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$. Como $\tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ es un arco circular con puntos finales 0 y 1, podemos definir una rama continua de la raíz cuadrada $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ para $\mu \in \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$.

Teorema 10.9. *Sea $1 < p < \infty$, sea $w = e^v \in A_p(\mathbb{R})$ un peso lentamente oscilatorio, y sea $\mathfrak{A}_{p,w}$ el álgebra de Banach que tiene una de las siguientes formas:*

$$(i) \quad \mathfrak{A}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in PSO^\diamond, b \in PC_{p,w}),$$

$$(ii) \quad \mathfrak{A}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in PSO^\diamond, b \in PSO_{p,w}^\diamond \text{ y existen los límites } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} b(x)),$$

$$(iii) \quad \mathfrak{A}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in \text{alg}(PC, SO_\infty), b \in \text{alg}(PC_{p,w}, SO_{\infty,p,w})),$$

$$(iv) \quad \mathfrak{A}_{p,w} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in PC, b \in PSO_{p,w}^\diamond),$$

donde, además, existen los siguientes límites:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x)) \text{ en el caso (ii), } \quad \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x-\lambda)v'(x)) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ en el caso (iii),} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x)) \text{ y } \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x-\lambda)v'(x)) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ en el caso (iv).} \end{aligned} \quad (10.8)$$

Entonces un operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ es de Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}, w)$ si y sólo si

$$\det \mathcal{A}(\xi, \eta, \mu) \neq 0 \quad \text{para todo } (\xi, \eta, \mu) \in \check{\Omega} \quad (10.9)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &:= \left(\bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_0} \{(\xi, \eta)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)} \right) \cup \left(M_\infty(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ) \times \{0, 1\} \right), \\ \nu(\xi) &:= 1/p + \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x)) \text{ para todo } \xi \in M_\infty(SO^\circ) \text{ en el caso (ii),} \\ \nu(\xi) &:= 1/p + \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x - \lambda)v'(x)) \text{ para todo } \xi \in M_\lambda(SO^\circ) \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ en} \\ &\quad \text{el caso (iii),} \\ \nu(\xi) &:= 1/p + \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x - \lambda)v'(x)) \text{ para todo } \xi \in M_\lambda(SO^\circ) \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y} \\ \nu(\xi) &:= 1/p + \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x)) \text{ para todo } \xi \in M_\infty(SO^\circ) \text{ en el caso (iv).}\end{aligned}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{A}_{p,w}$ el álgebra de Banach que tiene una de las formas (i)–(iv), con las condiciones (10.8) sobre el peso en los casos (ii)–(iv). Necesitamos probar que en todos estos casos la condición (10.7) es equivalente a la condición (10.9). Claramente, es suficiente verificar esto para $(\xi, \eta) \in \Omega_0$.

Caso (i). Para cada $(\lambda, \tau) \in \hat{\Omega}_0$ (ver (9.4)) y cada $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ existe un $\eta \in M_\tau(SO^\circ)$ tal que la pareja (ξ, η) tiene entradas coherentes. De aquí, el Teorema 9.6 implica que $\mathfrak{M}_{\xi, \eta} = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ para esta pareja (ξ, η) . Como $b(\tilde{\eta}^\pm) = b(\eta^\pm)$ para cada $b \in PC_{p,w}$ y cada $\tilde{\eta} \in M_\tau(SO^\circ)$, concluimos que para cada operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ el valor de su símbolo $\mathcal{A}(\xi, \tilde{\eta}, \mu)$ para $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ dado y cada $(\tilde{\eta}, \mu) \in M_\tau(SO^\circ) \times \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$, donde $(\lambda, \tau) \in \hat{\Omega}_0$, coincide con $\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)$. Así, en el caso (i) la condición (10.7) es equivalente a la condición (10.9).

Caso (ii). Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ existe un $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ tal que la pareja (ξ, η) tiene entradas coherentes. Análogamente, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ y cada $\eta \in M_\tau(SO^\circ)$ existe un $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ tal que la pareja (ξ, η) tiene entradas coherentes. Tomando en cuenta el hecho de que $\nu(\xi) = 1/p + \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x))$ para todo $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ debido a (10.8), otra vez deducimos del Teorema 9.6 que $\mathfrak{M}_{\xi, \eta} = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ para las parejas elegidas (ξ, η) . Como todas las funciones $a \in PSO^\circ$ y $b \in PSO_{p,w}^\circ$ en el caso (ii) tienen límites unilaterales en ∞ , y por eso $a(\tilde{\xi}^\pm) = a(\xi^\pm)$ y $b(\tilde{\eta}^\pm) = b(\eta^\pm)$ para todo $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in M_\infty(SO^\circ)$, concluimos que para cada operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ el valor de su símbolo $\mathcal{A}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \mu)$ para $\tilde{\xi} \in M_\lambda(SO^\circ)$ dado, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, y cada $(\tilde{\eta}, \mu) \in M_\infty(SO^\circ) \times \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ coincide con $\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)$. Análogamente, para cada operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ deducimos que el valor de su símbolo $\mathcal{A}(\tilde{\xi}, \eta, \mu)$ para $\eta \in M_\tau(SO^\circ)$ dado, donde $\tau \in \mathbb{R}$, y cada $(\tilde{\xi}, \mu) \in M_\infty(SO^\circ) \times \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ coincide con $\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)$. Así, en el caso (ii) la condición (10.7) también es equivalente a la condición (10.9).

Caso (iii). Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ existe un $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ tal que la pareja (ξ, η) tiene entradas coherentes. Análogamente, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ y cada $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ existe un $\eta \in M_\tau(SO^\circ)$ tal que la pareja (ξ, η) tiene entradas coherentes. Tomando en cuenta el hecho de que $\nu(\xi) = 1/p + \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x - \lambda)v'(x))$ para todo $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ debido a (10.8), deducimos del Teorema 9.6 que $\mathfrak{M}_{\xi, \eta} = \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$ para las parejas elegidas (ξ, η) . Como todas las funciones $a \in PSO^\circ$ y $b \in PSO_{p,w}^\circ$ en el caso (iii) tienen límites unilaterales en todos los puntos de \mathbb{R} , y por eso $a(\tilde{\xi}^\pm) = a(\xi^\pm)$ y $b(\tilde{\eta}^\pm) = b(\eta^\pm)$ para todo $\tilde{\xi} \in M_\lambda(SO^\circ)$ y todo $\tilde{\eta} \in M_\tau(SO^\circ)$, donde $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, concluimos que para cada operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ el valor de su símbolo $\mathcal{A}(\tilde{\xi}, \eta, \mu)$ para $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ dado y cada $(\tilde{\xi}, \mu) \in M_\lambda(SO^\circ) \times \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, coincide con $\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)$. Análogamente, para cada operador $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ deducimos que el valor de su símbolo $\mathcal{A}(\xi, \tilde{\eta}, \mu)$ para $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ dado y cada $(\tilde{\eta}, \mu) \in M_\tau(SO^\circ) \times \tilde{\mathcal{L}}_{p,w,\nu(\xi)}$, donde

$\tau \in \mathbb{R}$ coincide con $\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)$. Así, en el caso (iii) la condición (10.7) también es equivalente a la condición (10.9).

Caso (iv). Para cada $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$ y cada $\eta \in M_\tau(SO^\diamond)$ existe un $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$ tal que la pareja (ξ, η) tiene entradas coherentes. Tomando en cuenta el hecho de que en el caso (iv) $\nu(\xi) = 1/p + \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x - \lambda)v'(x))$ para todo $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y que $\nu(\xi) = 1/p + \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x))$ para todo $\xi \in M_\infty(SO^\diamond)$ debido a (10.8), deducimos del Teorema 9.6 que $\mathfrak{M}_{\xi, \eta} = \widetilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}$ para las parejas elegidas (ξ, η) . Como $a(\xi^\pm) = a(\xi^\pm)$ para cada $a \in PC$ y cada $\widetilde{\xi} \in M_\lambda(SO^\diamond)$, concluimos que para cada operador $A \in \mathfrak{A}_{p, w}$ el valor de su símbolo $\mathcal{A}(\widetilde{\xi}, \eta, \mu)$ para $\eta \in M_\tau(SO^\diamond)$ dado y cada $(\widetilde{\xi}, \mu) \in M_\lambda(SO^\diamond) \times \widetilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}$, donde $(\lambda, \tau) \in \widehat{\Omega}_0$, coincide con $\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)$. Así, en el caso (iv) la condición (10.7) otra vez es equivalente a la condición (10.9). \square

Si el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p, w}$ tiene una de las formas (i)–(iv) descritas en el Teorema 10.9, podemos reducir los conjuntos sobre los cuales están definidos los símbolos. Introduzcamos la siguiente subálgebra central $\mathcal{Z}_{p, w}^\pi$ del álgebra cociente $\mathfrak{A}_{p, w}^\pi$ en cada uno de los casos (i)–(iv):

- (i) $\mathcal{Z}_{p, w}^\pi := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in SO^\diamond, b \in C_{p, w}(\dot{\mathbb{R}}))$,
- (ii) $\mathcal{Z}_{p, w}^\pi := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in SO^\diamond, b \in SO_{p, w}^\diamond \text{ y } a, b \text{ son continuas en } \infty)$,
- (iii) $\mathcal{Z}_{p, w}^\pi := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in SO_\infty, b \in SO_{\infty, p, w})$,
- (iv) $\mathcal{Z}_{p, w}^\pi := \text{alg}(aI, W^0(b) : a \in C(\dot{\mathbb{R}}), b \in SO_{p, w}^\diamond)$.

Por analogía con la prueba del Teorema 4.11, deducimos en cada uno de los casos (i)–(iv) que el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{Z}_{p, w}^\pi)$ de $\mathcal{Z}_{p, w}^\pi$ es homeomorfo, respectivamente, al conjunto:

- (i) $\Omega := \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times \{\infty\} \right) \cup (M_\infty(SO^\diamond) \times \mathbb{R}) \cup (M_\infty(SO^\diamond) \times \{\infty\})$,
- (ii) $\Omega := \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times \{\infty\} \right) \cup \left(\{\infty\} \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond) \right) \cup (\{\infty\} \times \{\infty\})$,
- (iii) $\Omega := (\mathbb{R} \times M_\infty(SO^\diamond)) \cup (M_\infty(SO^\diamond) \times \mathbb{R}) \cup (M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond))$,
- (iv) $\Omega := (\mathbb{R} \times M_\infty(SO^\diamond)) \cup \left(\{\infty\} \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond) \right) \cup (\{\infty\} \times M_\infty(SO^\diamond))$.

De aquí, tomando los valores unilaterales comunes $a(\lambda^+) := a(\xi^+)$ y $a(\lambda^-) := a(\xi^-)$ para todo $\xi \in M_\lambda(SO^\diamond)$ si las funciones consideradas $a \in PSO^\diamond$ tienen límites unilaterales en el punto $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, y tomando valores unilaterales comunes $b(\tau^+) := b(\eta^+)$ y $b(\tau^-) := b(\eta^-)$ para todo $\eta \in M_\tau(SO^\diamond)$ si las funciones consideradas $b \in PSO_{p, w}^\diamond$ tienen límites unilaterales en un punto $\tau \in \dot{\mathbb{R}}$, podemos definir los símbolos para los generadores $A = aW^0(b)$ ($a \in PSO^\diamond, b \in PSO_{p, w}^\diamond$) del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p, w}$, como sigue, respectivamente.

(i) Los símbolos de los generadores $A = aW^0(b)$ están dados por

$$\mathcal{A}(\xi, \tau, \mu) = \begin{bmatrix} a(\xi^+)[b(\tau^+)\mu + b(\tau^-)(1 - \mu)] & a(\xi^+)[b(\tau^+) - b(\tau^-)]\varrho(\mu) \\ a(\xi^-)[b(\tau^+) - b(\tau^-)]\varrho(\mu) & a(\xi^-)[b(\tau^+)(1 - \mu) + b(\tau^-)\mu] \end{bmatrix}, \quad (10.10)$$

para todo $(\xi, \tau, \mu) \in \tilde{\Omega}$, donde

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &:= \left(\bigcup_{(\xi, \tau) \in \Omega_1} \{(\xi, \tau)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)} \right) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times \{\infty\} \times \{0, 1\}), \\ \Omega_1 &:= \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\circ) \times \{\infty\} \right) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times \mathbb{R}).\end{aligned}\quad (10.11)$$

(ii) Los símbolos de los generadores $A = aW^0(b)$ están dados en el conjunto

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &:= \left(\bigcup_{\xi \in \Delta_1} \{(\xi, \infty)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)} \right) \cup \left(\bigcup_{\eta \in \Delta_2} \{(\infty, \eta)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\infty)} \right) \\ &\cup (\{\infty\} \times \{\infty\} \times \{0, 1\}),\end{aligned}\quad (10.12)$$

donde

$$\Delta_1 := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\circ), \quad \Delta_2 := \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\circ), \quad \nu(\infty) := 1/p + \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x)),$$

por las fórmulas

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\xi, \infty, \mu) &= \begin{bmatrix} a(\xi^+) [b(-\infty)\mu + b(+\infty)(1 - \mu)] & a(\xi^+) [b(-\infty) - b(+\infty)] \varrho(\mu) \\ a(\xi^-) [b(-\infty) - b(+\infty)] \varrho(\mu) & a(\xi^-) [b(-\infty)(1 - \mu) + b(+\infty)\mu] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (10.13)$$

para todo $(\xi, \infty, \mu) \in \bigcup_{\xi \in \Delta_1} (\{(\xi, \infty)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)})$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\infty, \eta, \mu) &= \begin{bmatrix} a(-\infty) [b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu)] & a(-\infty) [b(\eta^+) - b(\eta^-)] \varrho(\mu) \\ a(+\infty) [b(\eta^+) - b(\eta^-)] \varrho(\mu) & a(+\infty) [b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (10.14)$$

para todo $(\infty, \eta, \mu) \in \bigcup_{\eta \in \Delta_2} (\{(\infty, \eta)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\infty)})$, y

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\infty, \infty, \mu) &= \begin{bmatrix} a(-\infty) [b(-\infty)\mu + b(+\infty)(1 - \mu)] & a(-\infty) [b(-\infty) - b(+\infty)] \varrho(\mu) \\ a(+\infty) [b(-\infty) - b(+\infty)] \varrho(\mu) & a(+\infty) [b(-\infty)(1 - \mu) + b(+\infty)\mu] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (10.15)$$

para todo $\mu \in \{0, 1\}$.

(iii) Los símbolos de los generadores $A = aW^0(b)$ están dados en el conjunto

$$\tilde{\Omega} := \left(\bigcup_{(\lambda, \eta) \in \Delta_3} \{(\lambda, \eta)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\lambda)} \right) \cup \left(\bigcup_{(\xi, \tau) \in \Delta_4} \{(\xi, \tau)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)} \right)\quad (10.16)$$

$$\cup (M_\infty(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ) \times \{0, 1\}),\quad (10.17)$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_3 &:= \mathbb{R} \times M_\infty(SO^\circ), \quad \Delta_4 := M_\infty(SO^\circ) \times \mathbb{R}, \\ \nu(\lambda) &:= 1/p + \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x - \lambda)v'(x)) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

por las fórmulas

$$\mathcal{A}(\lambda, \eta, \mu) = \begin{bmatrix} a(\lambda^+)[b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu)] & a(\lambda^+)[b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ a(\lambda^-)[b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & a(\lambda^-)[b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu] \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

para todo $(\lambda, \eta, \mu) \in \bigcup_{(\lambda, \eta) \in \Delta_3} \{(\lambda, \eta)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\lambda)}$,

$$\mathcal{A}(\xi, \tau, \mu) = \begin{bmatrix} a(\xi^+)[b(\tau^+)\mu + b(\tau^-)(1 - \mu)] & a(\xi^+)[b(\tau^+) - b(\tau^-)]\varrho(\mu) \\ a(\xi^-)[b(\tau^+) - b(\tau^-)]\varrho(\mu) & a(\xi^-)[b(\tau^+)(1 - \mu) + b(\tau^-)\mu] \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

para todo $(\xi, \tau, \mu) \in \bigcup_{(\xi, \tau) \in \Delta_4} \{(\xi, \tau)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)}$, y

$$\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu) = \begin{bmatrix} a(\xi^+)[b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu)] & a(\xi^+)[b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ a(\xi^-)[b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & a(\xi^-)[b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu] \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

para todo $(\xi, \eta, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$.

(iv) Los símbolos de los generadores $A = aW^0(b)$ están dados por

$$\mathcal{A}(\lambda, \eta, \mu) = \begin{bmatrix} a(\lambda^+)[b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu)] & a(\lambda^+)[b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ a(\lambda^-)[b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & a(\lambda^-)[b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu] \end{bmatrix}, \quad (10.21)$$

para todo $(\lambda, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &:= \left(\bigcup_{(\lambda, \eta) \in \Omega_2} \{(\lambda, \eta)\} \times \tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\lambda)} \right) \cup (\{\infty\} \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}), \\ \Omega_2 &:= (\mathbb{R} \times M_\infty(SO^\diamond)) \cup \left(\{\infty\} \times \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_\tau(SO^\diamond) \right), \\ \nu(\lambda) &:= 1/p + \lim_{x \rightarrow \lambda} ((x - \lambda)v'(x)) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nu(\infty) := 1/p + \lim_{x \rightarrow \infty} (xv'(x)). \end{aligned} \quad (10.22)$$

11. El método de trayectoria local y la medida espectral

11.1. El método de trayectoria local

Tomando en cuenta la importancia del método de trayectoria local para este trabajo, recordemos sus enunciados (ver [33], [38]).

Sea \mathfrak{A} una C^* -álgebra unitaria y sea \mathfrak{Z} una C^* -subálgebra central de \mathfrak{A} con la misma identidad I . Para un grupo discreto G con unidad e , sea $U : g \mapsto U_g$ una representación unitaria de G , es decir, un homomorfismo del grupo G sobre un grupo $U_G = \{U_g : g \in G\}$ de elementos unitarios, donde $U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}$ y $U_e = I$. Denotemos por

$$\mathfrak{B} := \text{alg}(\mathfrak{A}, U_G) \quad (11.1)$$

a la C^* -álgebra minimal que contiene a la C^* -álgebra \mathfrak{A} y al grupo U_G . Asumamos que

(A1) *para cada $g \in G$ las funciones $\alpha_g : a \mapsto U_g a U_g^*$ son $*$ -automorfismos de las C^* -álgebras \mathfrak{A} y \mathfrak{Z} .*

De acuerdo a (A1), \mathfrak{B} es la cerradura del conjunto \mathfrak{B}^0 que consiste de todos los elementos de la forma $b = \sum a_g U_g$ donde $a_g \in \mathfrak{A}$ y g corre sobre subconjuntos finitos de G .

Como la C^* -álgebra \mathcal{Z} es conmutativa, deducimos del teorema de Gelfand-Naimark (ver, p. ej., [61, § 16]) que $\mathcal{Z} \cong C(M(\mathcal{Z}))$ donde $C(M(\mathcal{Z}))$ es la C^* -álgebra de todas las funciones continuas con valores complejos sobre el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{Z})$ de \mathcal{Z} . Además, si (A1) se cumple, entonces cada $*$ -automorfismo $\alpha_g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ induce un homeomorfismo $\beta_g : M(\mathcal{Z}) \rightarrow M(\mathcal{Z})$ dado por la regla

$$z[\beta_g(m)] = [\alpha_g(z)](m), \quad z \in \mathcal{Z}, m \in M(\mathcal{Z}), g \in G, \quad (11.2)$$

donde $z(\cdot) \in C(M(\mathcal{Z}))$ es la transformada de Gelfand del elemento $z \in \mathcal{Z}$. Al conjunto $G(m) := \{\beta_g(m) : g \in G\}$ se le llama la G -órbita de un punto $m \in M(\mathcal{Z})$.

En lo que sigue también suponemos que

(A2) G es un grupo discreto dócil.

Por [31], un grupo discreto G es llamado *dócil* si la C^* -álgebra $l^\infty(G)$ de todas las funciones a valores complejos acotadas con la norma suprema en G tiene un promedio invariante, esto es, tiene un funcional lineal positivo ρ de norma 1 que satisface la condición

$$\rho(f) = \rho(sf) = \rho(f_s) \quad \text{para todo } s \in G \text{ y todo } f \in l^\infty(G),$$

donde $(sf)(g) = f(s^{-1}g)$, $(f_s)(g) = f(gs)$, $g \in G$. Los grupos finitos, los grupos conmutativos, los grupos subexponenciales y los grupos solubles son ejemplos de grupos dóciles (ver, p. ej., [1], [31], [38]).

Equipemos al conjunto de todos los estados puros $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ (ver, p. ej., [21], [60]) de la C^* -álgebra \mathfrak{A} con la topología inducida $*$ débil, y sea J_m el ideal bilateral cerrado de \mathfrak{A} generado por el ideal maximal $m \in M(\mathcal{Z})$ de la C^* -álgebra central $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{A}$. Por [17, Lema 4.1], si $\mu \in \mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$, entonces $\text{Ker } \mu \supset J_m$ donde $m := \mathcal{Z} \cap \text{Ker } \mu \in M(\mathcal{Z})$, y por consiguiente $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{m \in M(\mathcal{Z})} \{\nu \in \mathcal{P}_{\mathfrak{A}} : \text{Ker } \nu \supset J_m\}$. Además, supongamos que

(A3) *existe un conjunto $M_0 \subset M(\mathcal{Z})$ tal que para cada conjunto finito $G_0 \subset G$ y para cada conjunto abierto no vacío $W \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ existe un estado $\nu \in W$ tal que $\beta_g(m_\nu) \neq m_\nu$ para todo $g \in G_0 \setminus \{e\}$, donde el punto $m_\nu = \mathcal{Z} \cap \text{Ker } \nu$ pertenece a la G -órbita $G(M_0) := \{\beta_g(m) : g \in G, m \in M_0\}$ del conjunto M_0 .*

Si la C^* -álgebra \mathfrak{A} es conmutativa, entonces el conjunto $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ de todos los estados puros de \mathfrak{A} coincide con el conjunto de los funcionales lineales multiplicativos no cero de \mathfrak{A} (ver, p. ej., [21, Corolario 2.3.21]). Por lo tanto, eligiendo $\mathcal{Z} = \mathfrak{A}$ e identificando al conjunto de funcionales lineales multiplicativos no cero de \mathfrak{A} con el espacio de ideales maximales $M(\mathfrak{A})$ de \mathfrak{A} , podemos reescribir (A3) en la forma

(A30) *existe un conjunto $M_0 \subset M(\mathfrak{A})$ tal que para cada conjunto finito $G_0 \subset G$ y cada conjunto abierto no vacío $W \subset M(\mathfrak{A})$ existe un punto $m_0 \in W \cap G(M_0)$ tal que $\beta_g(m_0) \neq m_0$ para todo $g \in G_0 \setminus \{e\}$.*

Para cada $m \in M(\mathcal{Z})$, sea $\tilde{\pi}_m$ una representación isométrica

$$\tilde{\pi}_m : \mathfrak{A}/J_m \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_m) \quad (11.3)$$

del álgebra cociente \mathfrak{A}/J_m en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_m . Además, consideremos el *-homomorfismo canónico $\varrho_m : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/J_m$ y la representación

$$\pi'_m : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_m), \quad A \mapsto (\tilde{\pi}_m \circ \varrho_m)(A). \quad (11.4)$$

Sea Ω el conjunto de G -órbitas de todos los puntos $m \in M_0$ con $M_0 \subset M(\mathcal{Z})$ tomado de (A3), sea $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{H}_m$ donde $m = m_\omega$ es un punto fijo arbitrario de una órbita $\omega \in \Omega$, y sea $l^2(G, \mathcal{H}_\omega)$ el espacio de Hilbert de todas las funciones $f : G \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ tales que $f(g) \neq 0$ a lo más para un conjunto numerable de puntos $g \in G$ y $\sum \|f(g)\|_{\mathcal{H}_\omega}^2 < \infty$. Para cada $\omega \in \Omega$ consideremos la representación $\pi_\omega : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(l^2(G, \mathcal{H}_\omega))$ definida para todo $a \in \mathfrak{A}$, todo $g, h \in G$ y todo $f \in l^2(G, \mathcal{H}_\omega)$ por

$$[\pi_\omega(a)f](g) = \pi'_{m_\omega}(\alpha_g(a))f(g), \quad [\pi_\omega(U_h)f](g) = f(gh). \quad (11.5)$$

Modificando ligeramente la prueba del Teorema 4.1 en [38] (cf. también [38, Teorema 4.12] donde la condición superflua de la cerradura del conjunto $M_0 \subset M(\mathcal{Z})$ fue impuesta), establecemos el siguiente resultado.

Teorema 11.1. *Si las condiciones (A1)–(A3) se satisfacen, entonces un elemento $b \in \mathfrak{B}$ es invertible en \mathfrak{B} si y solo si para cada órbita $\omega \in \Omega$ el operador $\pi_\omega(b)$ es invertible en el espacio $l^2(G, \mathcal{H}_\omega)$ y, en el caso de que Ω sea infinito,*

$$\sup \{ \|(\pi_\omega(b))^{-1}\| : \omega \in \Omega \} < \infty.$$

11.2. Una generalización del método de trayectoria local basada en medidas espectrales

Si la condición (A3) no se cumple necesitamos usar medidas espectrales para descomponer a la C^* -álgebra inicial en una suma ortogonal de C^* -álgebras para las cuales tal condición se cumple o estas álgebras pueden ser estudiadas por otros métodos. Aquí presentamos la generalización correspondiente al método de trayectoria local elaborado en [33], [38] y complementado en [6].

Sea M un espacio de Hausdorff compacto y \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Por [61, p. 249], una *medida espectral* $P(\cdot)$ es una función de la σ -álgebra $\mathfrak{R}(M)$ de todos los subconjuntos de Borel de M en el conjunto de proyecciones ortogonales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que para cada $\xi \in \mathcal{H}$ la función $\Delta \mapsto (P(\Delta)\xi, \xi)$ es la restricción a conjuntos de Borel de una medida en M definida por una integral en $C(M)$. De aquí, para todo $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{R}(M)$:

- (i) $P(\emptyset) = 0$, $P(M) = I$ (el operador identidad en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$),
- (ii) $P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = P(\Delta_1)P(\Delta_2)$,
- (iii) $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$ si Δ_1 y Δ_2 son conjuntos disjuntos.

Ahora consideremos la C^* -álgebra $\mathfrak{B} = \text{alg}(\mathfrak{A}, U_G)$ definida por (11.1) bajo la única condición (A1) del método de trayectoria local para las C^* -álgebras \mathfrak{A} y $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{A}$. Como es sabido (ver, p. ej., [22, Teorema 2.6.1]), existe una representación isométrica $\pi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de la C^* -álgebra \mathfrak{B} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Denotemos por $\mathfrak{R}(M(\mathcal{Z}))$ a la σ -álgebra de todos los subconjuntos de Borel de $M(\mathcal{Z})$, y sea

$$\mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z})) = \{ \Delta \in \mathfrak{R}(M(\mathcal{Z})) : \beta_g(\Delta) = \Delta \text{ para todo } g \in G \}, \quad (11.6)$$

donde los homeomorfismos β_g están dados por (11.2). De acuerdo a [61, § 17], para la representación $\pi|_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de una C^* -álgebra conmutativa unitaria \mathcal{Z} , existe una única medida espectral $P_\pi(\cdot)$ la cual conmuta con todos los operadores en la C^* -álgebra $\pi(\mathcal{Z})$ y en su conmutante $\pi(\mathcal{Z})'$, y tal que

$$\pi(z) = \int_{M(\mathcal{Z})} z(m) dP_\pi(m) \quad \text{para todo } z \in \mathcal{Z}, \quad (11.7)$$

donde $z(\cdot) \in C(M(\mathcal{Z}))$ es la transformada de Gelfand de un elemento $z \in \mathcal{Z}$.

Como $az = za$ para todo $a \in \mathfrak{A}$ y todo $z \in \mathcal{Z}$, se sigue que

$$\pi(a)P_\pi(\Delta) = P_\pi(\Delta)\pi(a) \quad \text{para todo } \Delta \in \mathfrak{R}(M(\mathcal{Z})) \text{ y todo } a \in \mathfrak{A}. \quad (11.8)$$

Más aún, si (A1) se cumple entonces, por [38, Lema 4.6],

$$\pi(U_g)P_\pi(\Delta) = P_\pi(\Delta)\pi(U_g) \quad \text{para todo } \Delta \in \mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z})) \text{ y todo } g \in G. \quad (11.9)$$

Dado $\Delta \in \mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z}))$ tal que $P_\pi(\Delta) \neq 0$, definimos el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}_\Delta := P_\pi(\Delta)\mathcal{H} = \{P_\pi(\Delta)\xi : \xi \in \mathcal{H}\}$$

e introducimos las siguientes tres C^* -subálgebras de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\Delta)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\Delta &:= \{P_\pi(\Delta)\pi(b) : b \in \mathfrak{B}\}, \\ \mathfrak{A}_\Delta &:= \{P_\pi(\Delta)\pi(a) : a \in \mathfrak{A}\}, \quad \text{y} \quad \mathfrak{Z}_\Delta := \{P_\pi(\Delta)\pi(z) : z \in \mathcal{Z}\}. \end{aligned}$$

Como \mathcal{Z} es una C^* -subálgebra central de \mathfrak{A} , concluimos inmediatamente de (11.8) que \mathfrak{Z}_Δ es una C^* -subálgebra central de \mathfrak{A}_Δ , donde $\mathfrak{A}_\Delta \subset \mathfrak{B}_\Delta$.

Para cada conjunto de Borel $\Delta \in \mathfrak{R}(M(\mathcal{Z}))$, sean $\text{Int } \Delta$ y $\bar{\Delta}$ el interior y la cerradura de Δ , respectivamente, y sea $\tilde{\Delta}$ el subconjunto cerrado de $\bar{\Delta}$ dado por

$$\tilde{\Delta} = \{m \in M(\mathcal{Z}) : P_\pi(W_m \cap \Delta) \neq 0 \text{ para cada vecindad abierta } W_m \text{ de } m\}. \quad (11.10)$$

Resumamos algunas propiedades importantes de los conjuntos $\tilde{\Delta}$.

Lema 11.2. [38, Lemas 5.1–5.2] *Si $\Delta \in \mathfrak{R}(M(\mathcal{Z}))$ e $\text{Int } \Delta \neq \emptyset$, entonces (i) $P_\pi(\Delta) \neq 0$; (ii) $\mathfrak{Z}_\Delta \cong C(\tilde{\Delta})$; (iii) $\bar{\text{Int } \Delta} \subset \tilde{\Delta} \subset \bar{\Delta}$; (iv) $\tilde{\Delta} = \bar{\text{Int } \Delta}$ en el caso $P_\pi(\Delta \setminus \text{Int } \Delta) = 0$.*

Fijemos $\Delta \in \mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z}))$. Obviamente, también $\tilde{\Delta} \in \mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z}))$. Para cada $g \in G$, consideremos el operador unitario $U_{g,\Delta} := P_\pi(\Delta)\pi(U_g)$ en \mathcal{H}_Δ . Como la condición (A1) se cumple, las funciones

$$\alpha_{g,\Delta} : P_\pi(\Delta)\pi(a) \mapsto U_{g,\Delta}P_\pi(\Delta)\pi(a)U_{g,\Delta}^* = P_\pi(\Delta)\pi(U_g a U_g^*)P_\pi(\Delta) \quad (g \in G)$$

son *-automorfismos de las C^* -álgebras \mathfrak{Z}_Δ y \mathfrak{A}_Δ . Como $\mathfrak{Z}_\Delta \cong C(\tilde{\Delta})$ donde $\tilde{\Delta} \in \mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z}))$ y el isomorfismo está dado por $P_\pi(\Delta)\pi(z) \mapsto z(\cdot)|_{\tilde{\Delta}}$ donde $z(\cdot)|_{\tilde{\Delta}}$ es la restricción de la transformada de Gelfand para $z \in \mathcal{Z}$ a $\tilde{\Delta}$, se sigue que cada *-automorfismo $\alpha_{g,\Delta}$ induce sobre $\tilde{\Delta}$ al homeomorfismo $\beta_{g,\Delta} := \beta_g|_{\tilde{\Delta}}$, donde β_g está definido por (11.2).

Combinando las propiedades de la medida espectral $P_\pi(\cdot)$ con (11.8) y (11.9), obtenemos el siguiente resultado de descomposición.

Proposición 11.3. *Sea $\pi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación isométrica de la C^* -álgebra $\mathfrak{B} = \text{alg}(\mathfrak{A}, U_G)$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} y sea $\{\Delta_i\}$ una familia a lo más numerable de conjuntos de Borel disjuntos en $\mathfrak{R}_G(M(\mathcal{Z}))$ tal que $P_\pi(\Delta_i) \neq 0$ para todo i y $P_\pi(M(\mathcal{Z}) \setminus \bigcup_i \Delta_i) = 0$. Si la condición (A1) se cumple, entonces la función*

$$\Theta : \mathfrak{B} \rightarrow \bigoplus_i \mathfrak{B}_{\Delta_i}, \quad b \mapsto \bigoplus_i P_\pi(\Delta_i)\pi(b)$$

es un C^ -álgebra homomorfismo isométrico de la C^* -álgebra \mathfrak{B} en la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{B}} := \bigoplus_i \mathfrak{B}_{\Delta_i}$. Entonces un elemento $b \in \mathfrak{B}$ es invertible si y solo si para cada i el operador $P_\pi(\Delta_i)\pi(b)$ es invertible en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{Δ_i} y*

$$\sup_i \|(P_\pi(\Delta_i)b)^{-1}\| < \infty \quad \text{en el caso que } \{\Delta_i\} \text{ es numerable.}$$

Así que, es suficiente estudiar las C^* -álgebras \mathfrak{B}_{Δ_i} por separado. Si estas álgebras satisfacen las condiciones (A1)–(A3), podemos aplicar el Teorema 11.1 (para situaciones más generales ver [38, Sección 5]).

Terminamos esta sección con dos resultados sobre medidas espectrales que son cruciales en el estudio de algunas C^* -álgebras \mathfrak{B}_{Δ_i} . Recordemos (ver, p. ej., [61, § 17]) que si $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación de una C^* -álgebra unitaria \mathcal{A} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces existe un sistema $\{\mathcal{H}_\alpha\}$ de subespacios de \mathcal{H} mutuamente ortogonales y un sistema $\{\pi_\alpha\}$ de representaciones cíclicas $\pi_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ tales que $\pi = \bigoplus_\alpha \pi_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \bigoplus_\alpha \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$.

Lema 11.4. *Sea $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación de una C^* -álgebra unitaria conmutativa \mathcal{Z} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $M(\mathcal{Z})$ el espacio de ideales maximales de \mathcal{Z} y $\pi = \bigoplus_\alpha \pi_\alpha$ la descomposición de la representación π en la suma directa de representaciones cíclicas π_α en los subespacios mutuamente ortogonales \mathcal{H}_α del espacio \mathcal{H} . Para cada conjunto de Borel $\Delta \in \mathfrak{R}(M(\mathcal{Z}))$ y cada subespacio $\mathcal{H}' = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathcal{H}_\alpha$ de \mathcal{H} con un conjunto finito Q , existe una sucesión de elementos $z_n \in \mathcal{Z}$ tal que*

$$P_\pi(\Delta) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \pi(z_n) \quad \text{en el espacio } \mathcal{H}'.$$

Notemos que el Lema 11.4 se sigue de la prueba de [38, Lema 4.6].

Lema 11.5. *Sea \mathcal{A} una C^* -álgebra unitaria y \mathcal{Z} una C^* -subálgebra central de \mathcal{A} con la misma unidad. Sea $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación de \mathcal{A} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Dado un conjunto abierto Δ del espacio de ideales maximales $M(\mathcal{Z})$ de \mathcal{Z} , denotemos por $\mathcal{Z}(\Delta)$ al subconjunto de \mathcal{Z} compuesto por los elementos $z \in \mathcal{Z}$ cuyas transformadas de Gelfand $z(\cdot)$ son funciones reales en $C(M(\mathcal{Z}))$ con soporte en $\overline{\Delta}$ y valores en el segmento $[0, 1]$. Entonces*

$$\|P_\pi(\Delta)\pi(a)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup_{z \in \mathcal{Z}(\Delta)} \|\pi(az)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}. \quad (11.11)$$

12. La C^* -álgebra \mathfrak{B} y sus subálgebras

12.1. Cálculo simbólico para la C^* -álgebra \mathfrak{A}

Sea $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ la C^* -álgebra de todos los operadores lineales acotados que actúan en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$, y sea \mathcal{K} el ideal de todos los operadores compactos en \mathcal{B} .

Consideremos las C^* -álgebras

$$\mathfrak{A} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a, b \in PSO^\diamond) \subset \mathcal{B}, \quad (12.1)$$

$$\mathcal{Z} := \text{alg}(aI, W^0(b) : a, b \in SO^\diamond) \subset \mathfrak{A} \quad (12.2)$$

generadas por los operadores de multiplicación aI y por los operadores de convolución $W^0(b)$ donde, $a, b \in PSO^\diamond$ y $a, b \in SO^\diamond$, respectivamente.

Por el Teorema 4.11, el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{Z}^\pi)$ de la C^* -subálgebra central $\mathcal{Z}^\pi = \mathcal{Z}/\mathcal{K}$ de la C^* -álgebra $\mathfrak{A}^\pi = \mathfrak{A}/\mathcal{K}$ es homeomorfo al conjunto

$$\begin{aligned} \Omega = & \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \right) \\ & \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \end{aligned} \quad (12.3)$$

equipado con la topología inducida por la topología producto de $M(SO^\diamond) \times M(SO^\diamond)$. Consideremos los conjuntos

$$\Omega_0 = \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\diamond) \right), \quad (12.4)$$

$$\tilde{\Omega} = \left(\bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_0} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta} \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\} \right), \quad (12.5)$$

donde $\mathfrak{M}_{\xi, \eta}$ es el conjunto introducido en la Subsección 9.2 para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ y tal que

$$\{0, 1\} \subset \mathfrak{M}_{\xi, \eta} \subset [0, 1], \quad (12.6)$$

En efecto, como $p = 2$, $w = 1$ y $\nu(\xi) = 1/2$ para todo $\xi \in M(SO^\diamond)$, deducimos del Teorema 9.2 que $\tilde{\mathcal{L}}_{p, w, \nu(\xi)} = [0, 1]$. Entonces (12.6) se sigue del Teorema 9.2 y el Teorema 9.5.

De acuerdo a la Subsección 10.4, para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$ definimos la función

$$\Psi_{\xi, \eta, \mu} : \{aI : a \in PSO^\diamond\} \cup \{W^0(b) : b \in PSO^\diamond\} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

dada por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi, \eta, \mu}(aI) &= \begin{bmatrix} a(\xi^+) & 0 \\ 0 & a(\xi^-) \end{bmatrix}, \\ \Psi_{\xi, \eta, \mu}(W^0(b)) &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12.7)$$

donde $\varrho(\mu)$ es cualquier valor fijo de $\sqrt{\mu(1 - \mu)}$, y $c(\xi^+) = c(\xi, 1)$, $c(\xi^-) = c(\xi, 0)$ para $c \in PSO^\diamond$ y para puntos $(\xi, 1), (\xi, 0) \in M(PSO^\diamond)$.

Entonces el Teorema 10.6 implica el siguiente resultado.

Teorema 12.1. *Las funciones $\Psi_{\xi, \eta, \mu}$ ($(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}$) dadas en los generadores de la C^* -álgebra \mathfrak{A} por las fórmulas (12.7) se extienden a los C^* -álgebra homomorfismos $\Psi_{\xi, \eta, \mu} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$.*

A cualquier operador $A \in \mathfrak{A}$ le asignamos la función matricial acotada

$$\mathcal{A} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad (\xi, \eta, \mu) \mapsto \mathcal{A}(\xi, \eta, \mu) := \Psi_{\xi, \eta, \mu}(A),$$

llamada el *símbolo de Fredholm* del operador A .

El criterio de Fredholm obtenido en el Teorema 10.6 toma la siguiente forma para la C^* -álgebra \mathfrak{A} .

Teorema 12.2. *La C^* -álgebra cociente \mathfrak{A}^π es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin \mathcal{B}^π . Un operador $A \in \mathfrak{A}$ es de Fredholm en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si*

$$\det \mathcal{A}(\xi, \eta, \mu) \neq 0 \quad \text{para todo } (\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}. \quad (12.8)$$

Denotemos por $B(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^{2 \times 2})$ a la C^* -álgebra de todas las funciones en $\tilde{\Omega}$ acotadas con valores en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Teorema 12.3. *La función símbolo de Fredholm*

$$\Psi : \mathfrak{A} \rightarrow B(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad A \mapsto \mathcal{A}(\cdot, \cdot, \cdot),$$

es un C^* -álgebra homomorfismo cuyo kernel $\text{Ker } \Psi$ coincide con el ideal \mathcal{K} de todos los operadores compactos en el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Como sabemos (ver, p. ej. la Subsección 10.4), $\mathcal{K} \subset \text{Ker } \Psi$. Solo resta probar que $\text{Ker } \Psi \subset \mathcal{K}$. Se sigue del Teorema 12.2 que para cada $A \in \mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned} |A|^2 &= r((AA^*)^\pi) = \max_{(\xi, \eta, \mu) \in \tilde{\Omega}} r(\mathcal{A}(\xi, \eta, \mu)\mathcal{A}^*(\xi, \eta, \mu)) \\ &= r(\Psi(A)\Psi(A)^*I) = \|\Psi(A)I\|_{B(L^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^2))}^2, \end{aligned} \quad (12.9)$$

donde $r(Y)$ es el radio espectral de Y . Si $A \in \text{Ker } \Psi$, esto es, si $\Psi(A)I = 0$, entonces deducimos de (12.9) que $|A| = 0$, por lo cual $A \in \mathcal{K}$, lo que completa la demostración. \square

Corolario 12.4. *La función*

$$\Psi_0 : \mathfrak{A}^\pi \rightarrow B(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad A^\pi \mapsto \mathcal{A}(\cdot, \cdot, \cdot),$$

es un C^* -álgebra isomorfismo de la C^* -álgebra \mathfrak{A}^π sobre la C^* -álgebra $\Psi(\mathfrak{A}) = \Psi_0(\mathfrak{A}^\pi) \subset B(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}^{2 \times 2})$.

Podemos reescribir el Teorema 12.2 en la siguiente forma.

Teorema 12.5. *Un operador $A \in \mathfrak{A}$ es de Fredholm en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si el símbolo de Fredholm $\Psi(A)$ es invertible.*

12.2. La acción del grupo G sobre el espacio de ideales maximales de una C^* -subálgebra central de \mathfrak{A}^π

Consideremos el grupo conmutativo G que consiste de todas las traslaciones

$$g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - h \quad (h \in \mathbb{R}), \quad (12.10)$$

con el producto $g_h g_s = g_{h+s}$ para todo $h, s \in \mathbb{R}$. Dado un desplazamiento $g_h \in G$, definimos el operador de desplazamiento unitario U_h definido en $L^2(\mathbb{R})$ por

$$(U_h f)(x) := f(x - h), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}. \quad (12.11)$$

Como es sabido (ver, p. ej., [59, Teorema 4.1]), para todas las funciones $a, b \in PSO^\circ$ y cada traslación $g \in G$,

$$U_g a U_g^{-1} = (a \circ g)I, \quad U_g W^0(b) U_g^{-1} = W^0(b), \quad (12.12)$$

donde $a \circ g \in SO^\circ$ para $a \in SO^\circ$ debido a [5, Lema 4.2], y de aquí $a \circ g \in PSO^\circ$ para $a \in PSO^\circ$. En consecuencia, para cada $g \in G$, la función

$$\alpha_g : A^\pi \mapsto U_g^\pi A^\pi (U_g^\pi)^{-1} \quad (12.13)$$

es un $*$ -automorfismo de las C^* -álgebras \mathfrak{A}^π y \mathfrak{Z}^π . Así, la condición (A1) del método de trayectoria local descrito en la Sección 11 se satisface.

Para cada desplazamiento $g \in G$, usaremos la misma letra g para denotar al homeomorfismo $\xi \mapsto g(\xi)$ en $M(SO^\circ)$ dado por

$$a(g(\xi)) = (a \circ g)(\xi) \quad \text{para todo } a \in SO^\circ \text{ y } \xi \in M(SO^\circ), \quad (12.14)$$

donde $a(\xi) := \xi(a)$. De (12.12) y el Teorema 4.11 se sigue que

$$[\Gamma(U_g^\pi Z^\pi (U_g^\pi)^{-1})](\xi, \eta) = [\Gamma(Z^\pi)](g(\xi), \eta) \quad \text{para todo } Z \in \mathfrak{Z}, \quad g \in G, \quad (\xi, \eta) \in \Omega,$$

donde $\Gamma : \mathfrak{Z}^\pi \rightarrow C(\Omega)$ es la transformada de Gelfand descrita en el Teorema 4.11. De aquí, cada difeomorfismo $g \in G$ induce en Ω un homeomorfismo β_g que actúa por la regla

$$\beta_g : \Omega \rightarrow \Omega, \quad (\xi, \eta) \mapsto (g(\xi), \eta), \quad (12.15)$$

donde $g(\xi)$ está dado por (12.14). Describamos al conjunto de puntos fijos de los homeomorfismos β_g ($g \in G$).

Teorema 12.6. *El conjunto de todos los puntos fijos para cada homeomorfismo β_g ($g \in G \setminus \{e\}$) coincide con el conjunto $(M_\infty(SO^\circ) \times \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\circ)) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ))$.*

Demostración. Fijemos $(\xi, \eta) \in (M_\infty(SO^\circ) \times \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M_\lambda(SO^\circ)) \cup (M_\infty(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ))$. Por (12.15), $\beta_g(\xi, \eta) = (g(\xi), \eta)$, y aseveramos que $g(\xi) = \xi$ para todo $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ y todo $g \in G$. Para probar la última igualdad es suficiente demostrar que

$$a(g(\xi)) = a(\xi) \quad \text{para todo } a \in SO^\circ. \quad (12.16)$$

Fijemos $a \in SO^\circ$. De acuerdo a [5, Corolario 4.4] (ver también [14, Proposición 4.2 y Corolario 4.3]), existe una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow +\infty$ y

$$a(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(x_n), \quad a(g(\xi)) = (a \circ g)(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(g(x_n)). \quad (12.17)$$

Fijemos $h \in \mathbb{R}$ y tomemos el desplazamiento $g \in G \setminus \{e\}$ que actúa por la regla $g(x) = x - h$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $r_n = x_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que $|h| < r_n/2$ para cada $h \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces

$$r_n/2 \leq \min\{x_n, x_n - h\} < \max\{x_n, x_n - h\} \leq 3r_n/2 \quad (12.18)$$

Como $a \in SO^\diamond$, se sigue de la definición de SO^\diamond que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{osc} \left(a, [-3r_n, -r_n/2] \cup [r_n/2, 3r_n/2] \right) = 0. \quad (12.19)$$

Como $x_n, g(x_n) \in [r_n/2, 3r_n/2]$ debido a (12.18), deducimos de (12.19) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(g(x_n))$$

y por lo tanto (12.16) se sigue de (12.17). Claramente, los homeomorfismos β_g relacionados con las traslaciones $g \in G \setminus \{e\}$ no tienen otros puntos fijos. \square

12.3. Forma general de operadores del tipo de convolución con desplazamientos

Estudiemos la invertibilidad de los operadores funcionales que son los elementos de la C^* -álgebra

$$\mathcal{A} := \text{alg}(PSO^\diamond, U_G) \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$$

generada por los operadores de multiplicación por funciones en \mathbb{R} lentamente oscilatorias a trozos y por los operadores de desplazamiento isométricos U_g ($g \in G$).

Observemos que la C^* -álgebra

$$\mathfrak{B} = \text{alg}(aI, W^0(b), U_g : a, b \in PSO^\diamond, g \in G) \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})),$$

puede ser vista como la C^* -álgebra $\mathfrak{B} = \text{alg}(\mathcal{A}, W^0(b) : b \in PSO^\diamond)$ generada por la C^* -álgebra \mathcal{A} y por todos los operadores de convolución $W^0(b)$ con $b \in PSO^\diamond$.

Sea PSO^0 la subálgebra no cerrada de PSO^\diamond que consiste de todas las funciones en PSO^\diamond con conjuntos finitos de discontinuidades. Entonces la C^* -álgebra \mathcal{A} es la cerradura del álgebra $\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{A}$ que consiste de los operadores funcionales $A = \sum_{g \in F} a_g U_g$, donde $a_g \in PSO^0$ y F corre sobre subconjuntos finitos de G .

Sea \mathfrak{A}^0 la subálgebra no cerrada de \mathfrak{A} generada por los operadores aI y $W^0(b)$, donde $a, b \in PSO^0$. Entonces \mathfrak{A}^0 consiste de todos los operadores de la forma $\sum_{i=1}^n T_{i1} T_{i2} \dots T_{ij_i}$ donde $n, j_i \in \mathbb{N}$ y $T_{i,k} \in \{aI, W^0(b) : a, b \in PSO^0\}$.

Denotemos por \mathfrak{B}^0 a la subálgebra no cerrada y densa de la C^* -álgebra \mathfrak{B} que consta de todos los operadores de la forma $\sum_{i=1}^n T_{i1} T_{i2} \dots T_{ij_i}$ donde $n, j_i \in \mathbb{N}$ y $T_{i,k} \in \{aI, W^0(b), U_g : a, b \in PSO^0, g \in G\}$. Entonces, por analogía con $A \in \mathcal{A}^0$, cada operador $B \in \mathfrak{B}^0$ puede representarse en la forma

$$B = \sum_{g \in F} D_g U_g \quad (12.20)$$

donde $D_g \in \mathfrak{A}^0$ y F es un subconjunto finito de G . Cualquier operador $B \in \mathfrak{B}$ es el límite en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ de una sucesión de operadores $B_n \in \mathfrak{B}^0$.

12.4. Invertibilidad de los operadores funcionales

Con el fin de obtener un criterio de invertibilidad para los operadores $A \in \mathcal{A}$, aplicaremos el método de trayectoria local.

Sea $\tilde{\mathfrak{A}} := \tilde{\mathfrak{Z}} := \{aI : a \in PSO^\circ\}$. Como $\tilde{\mathfrak{Z}} \cong PSO^\circ$, tenemos que $M(\tilde{\mathfrak{Z}}) = M(PSO^\circ)$, donde $M(PSO^\circ) = M(SO^\circ) \times \{0, 1\}$ debido a (3.14) y (3.15). Por la Subsección 3.5, la topología de Gelfand en $M(PSO^\circ)$ puede describirse como sigue. Si $\xi \in M_\lambda(SO^\circ)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), una base de vecindades para $(\xi, \mu) \in M(PSO^\circ)$ consiste de todos los conjuntos abiertos de la forma

$$U_{(\xi, \mu)} = \begin{cases} (U_{\xi, \lambda} \times \{0\}) \cup (U_{\xi, \lambda}^- \times \{0, 1\}) & \text{si } \mu = 0, \\ (U_{\xi, \lambda} \times \{1\}) \cup (U_{\xi, \lambda}^+ \times \{0, 1\}) & \text{si } \mu = 1, \end{cases} \quad (12.21)$$

donde $U_{\xi, \lambda} = U_\xi \cap M_\lambda(SO^\circ)$, U_ξ es una vecindad abierta de ξ en $M(SO^\circ)$, y $U_{\xi, \lambda}^-, U_{\xi, \lambda}^+$ consisten de todos los $\zeta \in U_\xi$ cuyas restricciones $\tau = \zeta|_{C(\mathbb{R})}$ pertenecen, respectivamente, a los conjuntos $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ y $(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$, y a $(\varepsilon, +\infty)$ y $(-\infty, -\varepsilon)$ si $\lambda = \infty$, donde $\varepsilon > 0$.

Verifiquemos que se cumplen las suposiciones hechas en la Sección 11.

La primer igualdad en (12.12) implica que para cada $g \in G$ y todo $a \in PSO^\circ$ la función $\tilde{\alpha}_g : aI \mapsto U_g a U_g^{-1} = (a \circ g)I$ es un *-automorfismo de las C^* -álgebras conmutativas $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{Z}} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$. Como G es un grupo dócil, tenemos que las condiciones (A1)–(A2) para la C^* -álgebra \mathcal{A} se cumplen.

Para cada $g \in G$, el *-automorfismo $\tilde{\alpha}_g$ induce el homeomorfismo

$$\tilde{\beta}_g : M(PSO^\circ) \rightarrow M(PSO^\circ), \quad (\xi, \mu) \mapsto (g(\xi), \mu), \quad (12.22)$$

donde $g(\xi)$ está dado por (12.14). Si el ideal $\xi \in M(SO^\circ)$ pertenece a la fibra $M_t(SO^\circ)$, entonces $g(\xi) \in M_{g(t)}(SO^\circ)$. De aquí, tomando en cuenta la acción topológicamente libre del grupo G sobre \mathbb{R} y la topología de Gelfand (12.21) en $M(PSO^\circ)$, concluimos que la condición (A3₀) para la C^* -álgebra \mathcal{A} también se cumple, con $M_0 := M(PSO^\circ) \setminus M_\infty(PSO^\circ)$.

Con cada ideal maximal $(\xi, \mu) \in M(PSO^\circ)$ asociamos la representación

$$\Pi_{(\xi, \mu)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(l^2(G)), \quad A \mapsto A_{(\xi, \mu)} \quad (12.23)$$

dada para los operadores $A = \sum_{g \in F} a_g U_g \in \mathcal{A}^0$ con coeficientes $a_g \in PSO^0$ por

$$(A_{(\xi, \mu)} f)(h) = \sum_{g \in F} [(a_g \circ h)(\xi, \mu)] f(hg) \quad (h \in G, f \in l^2(G)). \quad (12.24)$$

Entonces para cada $\xi \in M_\infty(SO^\circ)$ y $\mu \in \{0, 1\}$ los operadores $A_{(\xi, \mu)} \in \mathcal{B}(l^2(G))$ están dados por

$$(A_{(\xi, \mu)} f)(h) = \sum_{g \in F} a_g(\xi, \mu) f(hg) \quad (h \in G, f \in l^2(G)). \quad (12.25)$$

Con los operadores (12.25) asociamos los operadores funcionales

$$A_{\xi, \mu} := \sum_{g \in F} a_g(\xi, \mu) U_g \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})) \quad (12.26)$$

con coeficientes constantes. Fijemos un punto $\tau \in \mathbb{R}$ y consideremos el conjunto

$$\mathfrak{R}_{\tau, \infty} := M_\tau(SO^\circ) \times \{0, 1\} \subset M(PSO^\circ). \quad (12.27)$$

El conjunto $\mathfrak{R}_{\tau,\infty}$ contiene exactamente un punto en cada G -órbita definida por la acción del grupo G sobre $M(PSO^\diamond) \setminus M_\infty(PSO^\diamond)$ por medio de los homeomorfismos $\tilde{\beta}_g$ ($g \in G$) dados por (12.22).

Como las condiciones (A1), (A2), (A3₀) se cumplen, tenemos lo siguiente.

Teorema 12.7. *Fijemos $\tau \in \mathbb{R}$. Un operador funcional $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si para todo $(\xi, \mu) \in \mathfrak{R}_{\tau,\infty}$ los operadores $A_{(\xi,\mu)}$ son invertibles en el espacio $l^2(G)$ y*

$$\sup_{(\xi,\mu) \in \mathfrak{R}_{\tau,\infty}} \|(A_{(\xi,\mu)})^{-1}\| < \infty. \quad (12.28)$$

Demostración. Tomemos el ideal maximal $\tilde{\mathcal{J}}_{(\xi,\mu)} := \{aI : a \in PSO^\diamond, a(\xi, \mu) = 0\}$ de $\tilde{\mathcal{Z}}$ asociado a cada carácter $(\xi, \mu) \in M(PSO^\diamond)$. Como $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathcal{Z}}$, la función

$$\tilde{\Pi}_{(\xi,\mu)} : \tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(\xi,\mu)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad aI + \tilde{\mathcal{J}}_{(\xi,\mu)} \mapsto a(\xi, \mu),$$

es una representación isométrica de la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(\xi,\mu)}$ en \mathbb{C} . Siguiendo (11.3)–(11.5) construimos las representaciones de la C^* -álgebra \mathcal{A} en el espacio de Hilbert $l^2(G)$ por las fórmulas (12.23) y (12.24). Como \mathcal{A} satisface las condiciones (A1), (A2), (A3₀) del método de trayectoria local, el Teorema 11.1 implica inmediatamente la afirmación del teorema. \square

Observación 12.8. *Reemplazando $M_0 = M(PSO^\diamond) \setminus M_\infty(PSO^\diamond)$ por $M_0 = M(PSO^\diamond)$, deducimos inmediatamente del Teorema 11.1 que el Teorema 12.7 permanece cierto con $\mathfrak{R}_{\tau,\infty}$ reemplazado por $M(PSO^\diamond)$.*

Para cada operador $A = \sum_{g \in F} a_g U_g \in \mathcal{A}^0$ y cada $(\xi, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$ consideremos los operadores funcionales $A_{\xi,\mu} = \sum_{g \in F} a_g(\xi, \mu) U_g \in \mathcal{A}^0$ con coeficientes constantes (ver (12.26)).

El Teorema 12.7 y la Observación 12.8 implican el siguiente corolario.

Corolario 12.9. *Si un operador funcional $A \in \mathcal{A}^0$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, entonces para cada $(\xi, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$ los operadores funcionales $A_{\xi,\mu} \in \mathcal{A}^0$ con coeficientes constantes son invertibles en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ y*

$$\sup_{(\xi,\mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0,1\}} \|(A_{\xi,\mu})^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} < \infty. \quad (12.29)$$

Demostración. Si un operador funcional $A \in \mathcal{A}^0$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, entonces el Teorema 12.7 y la Observación 12.8 implican que para cada $(\xi, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$ los operadores $A_{(\xi,\mu)}$ son invertibles en el espacio $l^2(G)$ y

$$\sup_{(\xi,\mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0,1\}} \|(A_{(\xi,\mu)})^{-1}\|_{\mathcal{B}(l^2(G))} < \infty. \quad (12.30)$$

Por (12.23), para todo $(\zeta, \mu) \in M(PSO^\diamond)$ tenemos que

$$\Pi_{(\zeta,\mu)} A_{\xi,\mu} = \Pi_{(\xi,\mu)} A_{\xi,\mu} = A_{(\xi,\mu)}.$$

De aquí, aplicando otra vez el Teorema 12.7 y la Observación 12.8, deducimos que los operadores funcionales $A_{\xi,\mu}$ con coeficientes constantes son invertibles en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ y (12.29) se cumple. \square

El Corolario 12.9 implica que

$$\|A_{\xi,\mu}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}^2 = r(A_{\xi,\mu}A_{\xi,\mu}^*) \leq r(AA^*) \leq \|AA^*\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} = \|A\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}^2 \quad (12.31)$$

para cada $(\xi, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$, donde $r(A_{\xi,\mu}A_{\xi,\mu}^*)$ y $r(AA^*)$ son radios espectrales de los correspondientes operadores. Por lo tanto para cada par mencionado (ξ, μ) la función $A \rightarrow A_{\xi,\mu}$ se extiende por continuidad al C^* -álgebra homomorfismo de \mathcal{A} en \mathcal{A} , lo cual implica el siguiente hecho.

Observación 12.10. *El Corolario 12.9 permanece válido para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $(\xi, \mu) \in M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\}$.*

13. Estudio de Fredholm de la C^* -álgebra \mathfrak{B}

13.1. Descomposición de la C^* -álgebra \mathfrak{B} y un criterio de Fredholm abstracto asociado

Aquí vamos a descomponer a la C^* -álgebra no local

$$\mathfrak{B} := \text{alg}(\mathfrak{A}, U_G) \subset \mathcal{B} \quad (13.1)$$

generada por todos los operadores $A \in \mathfrak{A}$ y por todos los operadores de desplazamiento unitarios U_h ($h \in \mathbb{R}$) haciendo uso de una medida espectral adecuada, y a obtener un criterio de Fredholm abstracto para los operadores $B \in \mathfrak{B}$. Fijemos una representación isométrica

$$\varphi : \mathfrak{B}^\pi \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi) \quad (13.2)$$

de la C^* -álgebra \mathfrak{B}^π en un espacio de Hilbert abstracto \mathcal{H}_φ .

El grupo $G = \{g_h : h \in \mathbb{R}\}$ posee a ∞ como único punto fijo en común para todo $g \in G$. Consideremos los siguientes subconjuntos de Ω :

$$\Omega_{\mathbb{R},\infty} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond), \quad \Omega_{\infty,\mathbb{R}} := M_\infty(SO^\diamond) \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\diamond), \quad (13.3)$$

$$\Omega_{\infty,\infty} := M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond),$$

donde los conjuntos $\Omega_{\mathbb{R},\infty}$ y $\Omega_{\infty,\mathbb{R}}$ son abiertos en Ω , y el conjunto $\Omega_{\infty,\infty}$ es cerrado en Ω .

$$\tilde{\Omega} = \left(\bigcup_{(\xi,\eta) \in \Omega_0} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi,\eta} \right) \cup \left(M_\infty(SO^\diamond) \times M_\infty(SO^\diamond) \times \{0, 1\} \right)$$

Denotemos por \mathcal{H}_ϕ al espacio de Hilbert concreto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\phi := & \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2) \right) \oplus \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\mathbb{R}}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2) \right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\infty}} l^2(\{0, 1\}, \mathbb{C}^2) \right). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Consideremos la C^* -subálgebra $\phi(\mathfrak{A}^\pi)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ que consiste de los operadores

$$\begin{aligned} \phi(A^\pi) = & \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} \Psi_{\xi,\eta, \cdot}(A)I \right) \oplus \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\mathbb{R}}} \Psi_{\xi,\eta, \cdot}(A)I \right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\infty}} \Psi_{\xi,\eta, \cdot}(A)I \right) \quad \text{para } A \in \mathfrak{A}, \end{aligned} \quad (13.5)$$

donde, para funciones $f_{\xi,\eta} \in l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2)$ dadas por $f_{\xi,\eta} : \mathfrak{M}_{\xi,\eta} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\mu \mapsto f_{\xi,\eta}(\mu)$ los operadores $\Psi_{\xi,\eta,\cdot}(A)I \in \mathcal{B}(l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2))$ actúan por

$$[\Psi_{\xi,\eta,\cdot}(A)f_{\xi,\eta}](\mu) = \Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)f_{\xi,\eta}(\mu) \quad \text{para } \mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \quad (13.6)$$

y para funciones $f_{\xi,\eta} \in l^2(\{0,1\}, \mathbb{C}^2)$ dadas por $f_{\xi,\eta} : \{0,1\} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\mu \mapsto f_{\xi,\eta}(\mu)$ los operadores $\Psi_{\xi,\eta,\cdot}(A)I \in \mathcal{B}(l^2(\{0,1\}, \mathbb{C}^2))$ actúan por

$$[\Psi_{\xi,\eta,\cdot}(A)f_{\xi,\eta}](\mu) = \Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)f_{\xi,\eta}(\mu) \quad \text{para } \mu \in \{0,1\}. \quad (13.7)$$

Por el Corolario 12.4, el homomorfismo

$$\phi : \mathfrak{A}^\pi \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi), \quad A^\pi \mapsto \phi(A^\pi), \quad (13.8)$$

es una representación isométrica de \mathfrak{A}^π en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_ϕ .

Sea $\mathfrak{R}(\Omega)$ la σ -álgebra de todos los subconjuntos de Borel de Ω y sean

$$P_\varphi : \mathfrak{R}(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi), \quad P_\phi : \mathfrak{R}(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi) \quad (13.9)$$

las medidas espectrales asociadas a las representaciones (13.2) y (13.8) de la C^* -álgebra conmutativa unitaria \mathcal{Z}^π en los espacios de Hilbert \mathcal{H}_φ y \mathcal{H}_ϕ , respectivamente, y que satisfacen las relaciones análogas a (11.7). Sea

$$\mathfrak{R}_G(\Omega) := \{\Delta \in \mathfrak{R}(\Omega) : \beta_g(\Delta) = \Delta \text{ para todo } g \in G\}, \quad (13.10)$$

donde los homeomorfismos $\beta_g : \Omega \rightarrow \Omega$ para $g \in G$ están definidos por (12.15). Observemos que

$$\Omega = \Omega_{\mathbb{R},\infty} \cup \Omega_{\infty,\mathbb{R}} \cup \Omega_{\infty,\infty}, \quad (13.11)$$

donde los conjuntos diferentes $\Omega_{\mathbb{R},\infty}$, $\Omega_{\infty,\mathbb{R}}$ y $\Omega_{\infty,\infty}$ dados por (13.3) pertenecen a $\mathfrak{R}_G(\Omega)$. Además, para la representación (13.8) se ve fácilmente que

$$P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty}) = I \oplus 0 \oplus 0, \quad P_\phi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}}) = 0 \oplus I \oplus 0 \quad (13.12)$$

$$P_\phi(\Omega_{\infty,\infty}) = 0 \oplus 0 \oplus I, \quad (13.13)$$

donde 0 e I son, respectivamente, el operador cero y el operador identidad en los espacios de Hilbert

$$\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2), \quad \bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\mathbb{R}}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2), \quad \bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\infty}} l^2(\{0,1\}, \mathbb{C}^2).$$

Introduzcamos las C^* -subálgebras de $\varphi(\mathfrak{B}^\pi)$ asociadas a la descomposición (13.11). Denotemos por

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty} := \text{alg} \{P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi), P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(U_g^\pi) : A \in \mathfrak{A}, g \in G\} \quad (13.14)$$

a la C^* -subálgebra de la C^* -álgebra $\mathcal{B}(P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi)$ generada por los operadores $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi)$ ($A \in \mathfrak{A}$) y $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(U_g^\pi)$ ($g \in G$). Análogamente definimos a las C^* -subálgebras

$$\mathfrak{B}_{\infty,\mathbb{R}} := \text{alg} \{P_\varphi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}})\varphi(A^\pi), P_\varphi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}})\varphi(U_g^\pi) : A \in \mathfrak{A}, g \in G\}, \quad (13.15)$$

$$\mathfrak{B}_{\infty,\infty} := \text{alg} \{P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(A^\pi), P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(U_g^\pi) : A \in \mathfrak{A}, g \in G\} \quad (13.16)$$

de $\mathcal{B}(P_\varphi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}})\mathcal{H}_\varphi)$ y $\mathcal{B}(P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi)$, respectivamente.

Como los conjuntos (13.3) en (13.11) pertenecen a la colección $\mathfrak{R}_G(\Omega)$ dada por (13.10), y los conjuntos $\Omega_{\mathbb{R},\infty}$, $\Omega_{\infty,\mathbb{R}}$ son abiertos y por lo tanto las proyecciones espectrales correspondientes no son cero debido al Lema 11.2, deducimos inmediatamente de la Proposición 11.3 el siguiente resultado.

Teorema 13.1 (Criterio de Fredholm abstracto para \mathfrak{B}). *Un operador $B \in \mathfrak{B}$ es de Fredholm en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si*

- (i) *el operador $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi$;*
- (ii) *el operador $P_\varphi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\infty,\mathbb{R}})\mathcal{H}_\varphi$;*
- (iii) *para $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty}) \neq 0$, el operador $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi$.*

13.2. Un símbolo de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$

En esta subsección y en la siguiente, usando el método de trayectoria local, establecemos un criterio de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$ dada por (13.14). Para este fin primero obtenemos un símbolo de invertibilidad para la C^* -subálgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty} := P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(\mathfrak{A}^\pi)$ de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$ que consiste de los operadores $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi)$ ($A \in \mathfrak{A}$).

Consideremos el espacio de Hilbert \mathcal{H}_ϕ dado por (13.4) y su subespacio $P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\phi$ el cual es isométricamente isomorfo al espacio de Hilbert $\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2)$ debido a (13.12).

Junto con la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty} := P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(\mathfrak{A}^\pi)$ consideremos a la C^* -álgebra

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R},\infty} := P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(\mathfrak{A}^\pi) \subset \mathcal{B}\left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2)\right)$$

que consiste de los operadores $P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi)$ ($A \in \mathfrak{A}$). Comparando las imágenes de la medidas espectrales (13.9) obtenemos lo siguiente.

Teorema 13.2. *La función dada por*

$$P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi) \mapsto P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A} \quad (13.17)$$

es un C^ -álgebra isomorfismo de la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ sobre la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R},\infty}$.*

Demostración. De acuerdo al Lema 11.5, para el conjunto abierto de Borel $\Omega_{\mathbb{R},\infty} \subset \Omega$ y para cada $A \in \mathfrak{A}$, tenemos las igualdades

$$\|P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})} \|\varphi(Z^\pi A^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}, \quad (13.18)$$

$$\|P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)} = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})} \|\phi(Z^\pi A^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)}, \quad (13.19)$$

donde el conjunto $\mathcal{Z}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})$ consiste de los operadores $Z \in \mathcal{Z}$ para los cuales la transformada de Gelfand de la clase lateral Z^π es una función real $z(\cdot, \cdot) \in C(\Omega)$ con valores en $[0, 1]$ y con soporte contenido en la cerradura del conjunto $\Omega_{\mathbb{R},\infty}$. Como φ y ϕ son representaciones isométricas de la C^* -álgebra \mathfrak{A}^π , las partes derechas de (13.18) y (13.19) son iguales, y por eso

$$\|P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} = \|P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)} \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A}. \quad (13.20)$$

Como $\Omega_{\mathbb{R},\infty} \in \mathfrak{A}(\Omega)$, se sigue de (11.8) que

$$\begin{aligned} P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi) &= P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi)P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty}), \\ P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi) &= P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi)P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty}). \end{aligned}$$

De aquí, la igualdad (13.20) puede escribirse en la forma

$$\|P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi)\|_{\mathcal{B}(P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi)} = \|P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi)\|_{\mathcal{B}(P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\phi)}$$

para todo $A \in \mathfrak{A}$, lo cual implica que la función (13.17) es un *-isomorfismo isométrico bien definido de la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ sobre la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$. \square

De acuerdo al Lema 11.2(iv), para el conjunto de Borel abierto $\Omega_{\mathbb{R},\infty} \in \mathfrak{A}_G(\Omega)$, el conjunto correspondiente $\tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$ definido por (11.10) coincide con la cerradura $\bar{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$ de $\Omega_{\mathbb{R},\infty}$ y por eso, en vista de la topología del conjunto Ω inducida por la topología producto de $M(SO^\circ) \times M(SO^\circ)$, tenemos que

$$\tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty} = \Omega_{\mathbb{R},\infty} \cup \Omega_{\infty,\infty}. \quad (13.21)$$

Denotemos por $\tilde{\mathfrak{Z}}_{\mathbb{R},\infty}$ a la C^* -subálgebra de $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R},\infty}$ generada por todos los operadores $P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(Z^\pi)$ ($Z \in \mathfrak{Z}$). Como \mathfrak{Z}^π es una C^* -subálgebra central de \mathfrak{A}^π , deducimos de (11.8) y el Lema 11.2(ii) que la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{Z}}_{\mathbb{R},\infty}$ es una C^* -subálgebra central de $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R},\infty}$, y el espacio de ideales maximales $M(\tilde{\mathfrak{Z}}_{\mathbb{R},\infty})$ de $\tilde{\mathfrak{Z}}_{\mathbb{R},\infty}$ coincide con el conjunto $\tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$. Junto con el conjunto $\tilde{\Omega}$ dado por (12.5), consideremos el conjunto

$$\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty} := \left(\bigcup_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} \{(\xi,\eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi,\eta} \right) \cup \left(\Omega_{\infty,\infty} \times \{0,1\} \right) \subset \tilde{\Omega}.$$

Denotemos por $B(\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}, \mathbb{C}^{2 \times 2})$ a la C^* -álgebra de todas las funciones acotadas de $\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$ con valores en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Lema 13.3. *Sea $\Psi(A)|_{\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}}$ la restricción de la función matricial $\Psi(A)$, dada para $A \in \mathfrak{A}$ por el Teorema 12.3, al conjunto $\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$. Entonces la función*

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R},\infty} \rightarrow B(\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(A^\pi) \mapsto \Psi(A)|_{\hat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}}$$

es un C^ -álgebra homomorfismo isométrico.*

Demostración. Por (13.5) y (13.12), la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R},\infty} = P_\phi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\phi(\mathfrak{A}^\pi)$ que consiste de los operadores

$$\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} \Psi_{\xi,\eta,\cdot}(A)I \in \mathcal{B} \left(\bigoplus_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2) \right)$$

para $A \in \mathfrak{A}$, donde los operadores $\Psi_{\xi,\eta,\cdot}(A)I \in \mathcal{B}(l^2(\mathfrak{M}_{\xi,\eta}, \mathbb{C}^2))$ actúan por la regla (13.6), es *-isomorfa isométricamente a la C^* -álgebra de las funciones matriciales que son las restricciones

$$\Psi(A) : \bigcup_{(\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} \{(\xi,\eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi,\eta} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

para todo $A \in \mathfrak{A}$, la cual, a su vez, es *-isomorfa isométricamente a la C^* -álgebra de las funciones matriciales

$$\Psi(A)|_{\widehat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}} : \widehat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

En efecto, $\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)$ para $\mu \in \{0,1\}$ es una matriz diagonal para cada pareja $(\xi,\eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$ y cada $A \in \mathfrak{A}$ (ver (12.7)), y sus entradas $[\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)]_{1,1}$ y $[\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)]_{2,2}$ para todo $(\xi,\eta,\mu) \in \Omega_{\infty,\infty} \times \{0,1\}$ se pueden aproximar, debido a (12.7) y a la topología de Gelfand de Ω , por las entradas correspondientes de las matrices $\Psi_{\zeta,\eta,\mu}(A)$ donde $\zeta \in \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} M_{\tau}(SO^{\circ})$ y τ pertenece a la semi-vecindad derecha de ∞ en el caso de $[\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)]_{1,1}$ y a la semi-vecindad izquierda de ∞ en el caso de $[\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)]_{2,2}$. De aquí,

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}, (\xi,\eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}} \|\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)\|_{sp} = \sup_{(\xi,\eta,\mu) \in \widehat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}} \|\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)\|_{sp} \quad (A \in \mathfrak{A})$$

donde $\|\cdot\|_{sp}$ es la norma espectral. □

Combinando el Teorema 13.2 y el Lema 13.3 obtenemos inmediatamente un símbolo de invertibilidad para el álgebra abstracto $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ (ver (13.22) dado abajo).

Teorema 13.4. *La función*

$$\text{Sym}_{\mathbb{R},\infty} : \mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty} \rightarrow B(\widehat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^{\pi}) \mapsto \Psi(A)|_{\widehat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}}, \quad (13.22)$$

es un C^* -álgebra homomorfismo isométrico. Para cada $A \in \mathfrak{A}$ el operador $P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^{\pi})$ es invertible en el espacio $P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_{\varphi}$ si y solo si

$$\det(\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)) \neq 0 \quad \text{para todo } (\xi,\eta,\mu) \in \widehat{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}.$$

13.3. Un criterio de invertibilidad para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$

Aplicando el método de trayectoria local expuesto en la Sección 11, establecemos aquí un criterio de invertibilidad para los operadores $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$.

Ahora consideremos la C^* -subálgebra $\mathcal{Z}_{\mathbb{R},\infty}$ de $\mathcal{B}(P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_{\varphi})$ generada por todos los operadores $P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(Z^{\pi})$ ($Z \in \mathcal{Z}$). Por el Teorema 13.2, $\mathcal{Z}_{\mathbb{R},\infty} \cong \widetilde{\mathcal{Z}}_{\mathbb{R},\infty}$. De aquí $\mathcal{Z}_{\mathbb{R},\infty}$ es una subálgebra central de $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ y $M(\mathcal{Z}_{\mathbb{R},\infty}) = \widetilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$, con $\widetilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$ dada por (13.21).

Observemos que la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$ puede ser vista como $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty} = \text{alg}(\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}, U_{\mathbb{R},\infty}(G))$, la C^* -álgebra generada por $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ y el rango de la representación unitaria

$$U_{\mathbb{R},\infty} : G \rightarrow \mathcal{B}(P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_{\varphi}), \quad g \mapsto U_{g,\mathbb{R},\infty} := P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(U_g^{\pi}).$$

Para cada $g \in G$, la función

$$\alpha_{g,\mathbb{R},\infty} : P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^{\pi}) \mapsto U_{g,\mathbb{R},\infty}(P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^{\pi}))U_{g,\mathbb{R},\infty}^*$$

es un *-automorfismo de las C^* -álgebras $\mathcal{Z}_{\mathbb{R},\infty}$ y $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ porque

$$U_{g,\mathbb{R},\infty}(P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^{\pi}))U_{g,\mathbb{R},\infty}^* = P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(U_g^{\pi}A^{\pi}(U_g^{\pi})^*)$$

y la función (12.13) es un *-automorfismo de las C^* -álgebras \mathcal{Z}^{π} y \mathfrak{A}^{π} . Así, la condición (A1) del método de trayectoria local se satisface para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$. La condición (A2) también

se cumple. Cada *-automorfismo $\alpha_{g,\mathbb{R},\infty}$ ($g \in G$) induce en el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{Z}_{\mathbb{R},\infty}) = \tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$ el homeomorfismo

$$\beta_{g,\mathbb{R},\infty} : \tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty} \rightarrow \tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}, \quad (\xi, \eta) \mapsto \beta_g(\xi, \eta), \quad (13.23)$$

donde β_g está dado por (12.15) y, para $g \neq e$ (el desplazamiento identidad), $\beta_{g,\mathbb{R},\infty}$ tiene a $\Omega_{\infty,\infty}$ como el conjunto de sus puntos fijos.

Sea $\mathcal{P}_{\mathbb{R},\infty} := \mathcal{P}_{\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}}$ el conjunto de los estados puros de la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$. Por la Sección 11, $\mathcal{P}_{\mathbb{R},\infty} = \bigcup_{(\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}} \mathcal{P}_{(\xi,\eta)}$, donde $\mathcal{P}_{(\xi,\eta)} := \{\rho \in \mathcal{P}_{\mathbb{R},\infty} : \text{Ker } \rho \supset J_{(\xi,\eta)}\}$ y $J_{(\xi,\eta)}$ para $(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$ es el ideal bilateral cerrado más pequeño de $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}$ que contiene al conjunto

$$\{P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(Z^\pi) : Z \in \mathcal{Z}, \Gamma(Z^\pi)(\xi, \eta) = 0_{2 \times 2}\}.$$

Como $\Omega_{\infty,\infty}$ es el conjunto de puntos fijos de todos los homeomorfismos $\beta_{g,\mathbb{R},\infty}$ ($g \in G \setminus \{e\}$), para verificar el cumplimiento de la condición (A3) del método de trayectoria local para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty}$, solo necesitamos probar la aproximación (en la topología *débil) a los estados puros $\rho \in \mathcal{P}_{(\xi,\eta)}$, con $(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$, por estados puros en $\mathcal{P}_{(\xi,\eta)}$, con $(\xi, \eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}$. En este caso $M_0 = \Omega_{\mathbb{R},\infty}$ en (A3).

Aplicando el Teorema 13.4 deducimos las dos afirmaciones siguientes.

(i) Para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_{\mathbb{R},\infty}$, la función

$$\tilde{\pi}_{(\xi,\eta)} : P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi) + J_{(\xi,\eta)} \mapsto \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}} \Psi_{\xi,\eta,\mu}(A) \quad (13.24)$$

es un C^* -álgebra isomorfismo entre las C^* -álgebras $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}/J_{(\xi,\eta)}$ y la C^* -subálgebra $\{\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}} \Psi_{\xi,\eta,\mu}(A) : A \in \mathfrak{A}\}$ de $\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{M}_{\xi,\eta}} \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

(ii) Para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$, la función

$$\tilde{\pi}_{(\xi,\eta)} : P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi) + J_{(\xi,\eta)} \mapsto \text{diag}\{\Psi_{\xi,\eta,0}(A), \Psi_{\xi,\eta,1}(A)\}, \quad (13.25)$$

es un C^* -álgebra isomorfismo entre las C^* -álgebras $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}/J_{(\xi,\eta)}$ y la C^* -subálgebra $\{\text{diag}\{\Psi_{\xi,\eta,0}(A), \Psi_{\xi,\eta,1}(A)\} : A \in \mathfrak{A}\}$ de $\mathbb{C}^{4 \times 4}$.

Como el conjunto $\mathcal{P}_{(\xi,\eta)}$ ($(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega}_{\mathbb{R},\infty}$) está en biyección con el conjunto $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}/J_{(\xi,\eta)}}$ de los estados puros de $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}/J_{(\xi,\eta)}$ (ver, p. ej., [22, Teorema 2.11.8(i)]) y como las matrices $\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)$ para $A \in \mathfrak{A}$ y $(\xi, \eta, \mu) \in \Omega_{\infty,\infty} \times \{0, 1\}$ son diagonales, concluimos de (13.25) que para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$ la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}/J_{(\xi,\eta)}$ es conmutativa y por eso su conjunto de estados puros $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty}/J_{(\xi,\eta)}}$ consiste de cuatro funcionales lineales multiplicativos cuyos valores coinciden con las entradas de la diagonal de las matrices $\Psi_{\xi,\eta,0}(A)$ y $\Psi_{\xi,\eta,1}(A)$. De aquí, para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$,

$$\mathcal{P}_{(\xi,\eta)} = \{\rho_{\xi,\eta,0}^{(1)}, \rho_{\xi,\eta,0}^{(2)}, \rho_{\xi,\eta,1}^{(1)}, \rho_{\xi,\eta,1}^{(2)}\},$$

donde los estados puros $\rho_{\xi,\eta,\mu}^{(j)}$ para $j = 1, 2$ y $\mu \in \{0, 1\}$ están dados por

$$\rho_{\xi,\eta,\mu}^{(j)} : \mathfrak{A}_{\mathbb{R},\infty} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(A^\pi) \mapsto [\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)]_{j,j}, \quad (13.26)$$

y $[\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)]_{j,j}$ es la (j, j) -entrada de la matriz $\Psi_{\xi,\eta,\mu}(A)$. Fijemos $(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$ y $\mu \in \{0, 1\}$. Por la prueba del Lema 13.3, de (13.26) se sigue que cada vecindad abierta de $\rho_{\xi,\eta,\mu}^{(1)}$ y $\rho_{\xi,\eta,\mu}^{(2)}$

en la topología *débil contiene, respectivamente, un estado puro $\rho_{\zeta, \eta, \mu}^{(1)}$, donde $\zeta \in M_\tau(SO^\circ)$ y $\tau \in \mathbb{R}$ está a la derecha de $-\infty$, y un estado puro $\rho_{\zeta, \eta, \mu}^{(2)}$, donde $\zeta \in M_\tau(SO^\circ)$ y $\tau \in \mathbb{R}$ está a la izquierda de $+\infty$. Por lo tanto, la condición (A3) también se cumple para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}, \infty}$.

Para cada (ξ, η, μ) en el conjunto

$$\mathfrak{N}_{\mathbb{R}, \infty} := \bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\mathbb{R}, \infty}} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta},$$

consideremos la representación

$$\pi_{\xi, \eta, \mu} : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}, \infty} \rightarrow \mathcal{B}(l^2(G, \mathbb{C}^2)) \quad (13.27)$$

dada en los generadores de la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}, \infty}$ por

$$\begin{aligned} [\pi_{\xi, \eta, \mu}(P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\varphi((aI)^\pi))f](g) &= [\Psi_{\xi, \eta, \mu}((a \circ g)I)]f(g), \\ [\pi_{\xi, \eta, \mu}(P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\varphi((W^0(b))^\pi))f](g) &= [\Psi_{\xi, \eta, \mu}(W^0(b))]f(g), \\ [\pi_{\xi, \eta, \mu}(P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\varphi(U_h^\pi))f](g) &= f(gh), \end{aligned} \quad (13.28)$$

donde $a, b \in PSO^\circ$, $g, h \in G$ y $f \in l^2(G, \mathbb{C}^2)$.

Fijemos un punto $\tau \in \mathbb{R}$ e introduzcamos los conjuntos

$$\Omega_{\tau, \infty} := M_\tau(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ), \quad \mathfrak{N}_{\tau, \infty} := \bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\tau, \infty}} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta}. \quad (13.29)$$

Teorema 13.5. *Fijemos $\tau \in \mathbb{R}$. Para cada $B \in \mathfrak{B}$, el operador*

$$B_{\mathbb{R}, \infty} := P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\varphi(B^\pi) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}, \infty}$$

es invertible en el espacio $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\mathcal{H}_\varphi$ si y solo si para todo $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$ los operadores $\pi_{\xi, \eta, \mu}(B_{\mathbb{R}, \infty})$ son invertibles en el espacio $l^2(G, \mathbb{C}^2)$ y

$$\sup_{(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}} \|(\pi_{\xi, \eta, \mu}(B_{\mathbb{R}, \infty}))^{-1}\|_{\mathcal{B}(l^2(G, \mathbb{C}^2))} < \infty. \quad (13.30)$$

Demostración. El conjunto $\mathfrak{N}_{\tau, \infty}$ dado por (13.29) contiene exactamente un punto en cada G -órbita definida en el conjunto $\Omega_{\mathbb{R}, \infty} \subset \tilde{\Omega}_{\mathbb{R}, \infty}$ por el grupo $\{\beta_{g, \mathbb{R}, \infty} : g \in G\}$ de homeomorfismos dados por (13.23). Así, para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$, comenzando con las representaciones (13.24)–(13.25), siguiendo (11.4)–(11.5) y tomando en cuenta el hecho de que los espacios de Hilbert $l^2(G, \mathbb{C}^4)$ y $l^2(G, \mathbb{C}^2) \oplus l^2(G, \mathbb{C}^2)$ son isométricamente isomorfos, obtenemos la familia de representaciones (13.27) indexada por los puntos del conjunto $\mathfrak{N}_{\tau, \infty}$. Como las condiciones (A1)–(A3) se cumplen para la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}, \infty}$, el Teorema 11.1 implica la afirmación del teorema. \square

13.4. La C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$

En esta subsección encontraremos un criterio de invertibilidad para los operadores en la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}} = P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(\mathfrak{B}^\pi)$ representada en la forma (13.15).

Teorema 13.6. *La función dada por*

$$P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(A^\pi) \mapsto P_\phi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\phi(A^\pi) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A} \quad (13.31)$$

es un C^* -álgebra isomorfismo de la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\infty, \mathbb{R}} := P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(\mathfrak{A}^\pi)$ sobre la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{A}}_{\infty, \mathbb{R}} := P_\phi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\phi(\mathfrak{A}^\pi)$.

Demostración. Como $\Omega_{\infty, \mathbb{R}}$ es un subconjunto abierto de Ω y las C^* -álgebras $\varphi(\mathfrak{A}^\pi)$ y $\phi(\mathfrak{A}^\pi)$ son *-isomorfas isométricamente, aplicando el Lema 11.5 deducimos por analogía con el Teorema 13.2 que

$$\|P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(A^\pi)\| = \|P_\phi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\phi(A^\pi)\| \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A}. \quad (13.32)$$

Esto implica que (13.31) es un *-isomorfismo isométrico bien definido de la C^* -álgebra $\mathfrak{A}_{\infty, \mathbb{R}}$ sobre la C^* -álgebra $\tilde{\mathfrak{A}}_{\infty, \mathbb{R}}$. \square

Junto con el conjunto $\tilde{\Omega}$ dado por (12.5), consideremos el conjunto

$$\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}} := \left(\bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta} \right) \cup \left(\Omega_{\infty, \infty} \times \{0, 1\} \right) \subset \tilde{\Omega}.$$

Denotemos por $B(\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2 \times 2})$ a la C^* -álgebra de todas las funciones en $\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}$ acotadas con valores en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Como el espacio de Hilbert $P_\phi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\mathcal{H}_\phi$ es isomorfo isométricamente al espacio de Hilbert $\bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi, \eta}, \mathbb{C}^2)$, obtenemos inmediatamente de (13.5) y (13.12) el siguiente resultado por analogía con el Lema 13.3.

Lema 13.7. *Sea $\Psi(A)|_{\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}}$ la restricción de la función matricial $\Psi(A)$, dada para $A \in \mathfrak{A}$ por el Teorema 12.3, al conjunto $\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}$. Entonces la función*

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbb{R}, \infty} \rightarrow B(\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad P_\phi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\phi(A^\pi) \mapsto \Psi(A)|_{\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}}$$

es un C^* -álgebra homomorfismo isométrico.

El Teorema 13.6 y el Lema 13.7 implican lo siguiente.

Teorema 13.8. *La función*

$$\text{Sym}_{\infty, \mathbb{R}} : \mathfrak{A}_{\infty, \mathbb{R}} \rightarrow B(\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2 \times 2}), \quad P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(A^\pi) \mapsto \Psi(A)|_{\hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}}, \quad (13.33)$$

es un C^* -álgebra homomorfismo isométrico. Para cada $A \in \mathfrak{A}$ el operador $P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(A^\pi)$ es invertible en el espacio $P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\mathcal{H}_\varphi$ si y solo si

$$\det(\Psi_{\xi, \eta, \mu}(A)) \neq 0 \quad \text{para todo } (\xi, \eta, \mu) \in \hat{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}.$$

Siguiendo el Lema 11.5 definimos el conjunto

$$\mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}}) := \left\{ Z \in \mathcal{Z} : \text{supp } z(\cdot, \cdot) \subset \tilde{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}, z(\xi, \eta) \in [0, 1] \text{ para todo } (\xi, \eta) \in \Omega \right\}, \quad (13.34)$$

donde $z(\cdot, \cdot) \in C(\Omega)$ es la transformada de Gelfand de la clase lateral Z^π , $\text{supp } z(\cdot, \cdot)$ es el soporte de $z(\cdot, \cdot)$, y $\tilde{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}} = \Omega_{\infty, \mathbb{R}} \cup \Omega_{\infty, \infty}$ es la cerradura en Ω del conjunto $\Omega_{\infty, \mathbb{R}}$ dado por (13.3).

Sea e_h la función dada por $e_h(x) = e^{ihx}$ para todo $h, x \in \mathbb{R}$. Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}} = \bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi, \eta}, \mathbb{C}^2)$ e introduzcamos la C^* -álgebra

$$\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi) := \text{alg} \left\{ \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A^\pi), \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi) : A \in \mathfrak{A}, g \in G \right\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}}) \quad (13.35)$$

generada por los operadores $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A^\pi)$ ($A \in \mathfrak{A}$) y $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)$ ($g \in G$) donde

$$\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A^\pi) := \bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} \Psi_{\xi, \eta, \cdot}(A)I, \quad \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi) := \bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} e^{ih\eta}I. \quad (13.36)$$

Observemos que la función $g \mapsto \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)$ es una representación unitaria del grupo G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}}$, el operador adjunto $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)^*$ es igual a $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_{g^{-1}}^\pi)$, y $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A^\pi)\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)^* = \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A^\pi)$ para todo $g \in G$ y todo $A \in \mathfrak{A}$ debido a (13.36). En consecuencia, la C^* -álgebra $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi)$ es la cerradura de la C^* -álgebra compuesta por las sumas finitas de la forma $\sum_g \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A_g^\pi)\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)$ donde $A_g \in \mathfrak{A}$.

Teorema 13.9. *La función*

$$P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi \left(\sum_{g \in F} A_g^\pi U_g^\pi \right) \mapsto \sum_{g \in F} \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A_g^\pi)\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi), \quad (13.37)$$

donde F es un subconjunto finito de G y $A_g \in \mathfrak{A}$ para $g \in F$, se extiende a un C^* -álgebra isomorfismo de la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$ sobre la C^* -álgebra $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi)$ dada por (13.35).

Demostración. Fijemos un operador $B \in \mathfrak{B}$ de la forma $B = \sum_{g \in F} A_g U_g$, donde F es un subconjunto finito de G y $A_g \in \mathfrak{A}$ para $g \in F$. Consideremos la clase lateral $B^\pi = \sum_{g \in F} A_g^\pi U_g^\pi$ y pongamos $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi) := \sum_{g \in F} \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A_g^\pi)\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi)$. Como el conjunto $\Omega_{\infty, \mathbb{R}}$ es abierto y como $P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(B^\pi) = \varphi(B^\pi)P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$, deducimos similarmente al Lema 11.5 que

$$\|P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(B^\pi)\|_{\mathcal{B}(H_\varphi)} = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})} \|\varphi(B^\pi Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(H_\varphi)}, \quad (13.38)$$

donde $\mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$ es el conjunto (13.34).

Consideremos el conjunto $C_0(\overline{\mathbb{R}}) = \{v \in C(\overline{\mathbb{R}}) : v(\pm\infty) = 0\}$. Para cada función $v \in C_0(\overline{\mathbb{R}})$, se sigue que $W^0(v) \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$. Más aún, $\mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}}) = \{W^0(v) : v \in C_0(\overline{\mathbb{R}})\}$. Para cada $h \in \mathbb{R}$, el operador $U_{g_h} W^0(v) = W^0(e_h)W^0(v) = W^0(e_h v)$ también pertenece a $\mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$ porque la función $e_h v$ está en $C_0(\overline{\mathbb{R}})$. En consecuencia, para cada $Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$ y cada $B \in \mathfrak{B}$, concluimos que la clase lateral $B^\pi Z^\pi$ pertenece a la C^* -álgebra \mathfrak{A}^π . De aquí, para cada $Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$, de (13.5) y (13.36), obtenemos que $\phi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi Z^\pi) = \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi)\phi_{\infty, \mathbb{R}}(Z^\pi)$ donde $\phi_{\infty, \mathbb{R}} : \mathfrak{A}^\pi \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})$ es la restricción de la representación ϕ (ver (13.4)–(13.8)) al espacio $\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}} = \bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi, \eta}, \mathbb{C}^2)$ considerado como un subespacio de Hilbert invariante de \mathcal{H}_ϕ . Por eso, aplicando (13.32) y (13.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \|P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(B^\pi Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(H_\varphi)} &= \|P_\phi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\phi(B^\pi Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(H_\phi)} \\ &= \|\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi)\phi_{\infty, \mathbb{R}}(Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})}. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Como para todo $Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$,

$$P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(B^\pi Z^\pi) = \varphi(B^\pi)P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(Z^\pi) = \varphi(B^\pi Z^\pi),$$

deducimos de las igualdades (13.38)–(13.39) que

$$\begin{aligned}
\sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})} \|\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi) \phi_{\infty, \mathbb{R}}(Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})} &= \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})} \|P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}}) \varphi(B^\pi Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} \\
&= \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})} \|\varphi(B^\pi Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} \\
&= \|P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}}) \varphi(B^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)}. \tag{13.40}
\end{aligned}$$

Consideremos la representación idéntica π_0 de la C^* -álgebra unitaria $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi)$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}}$. Por (13.36), $\phi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathcal{Z}^\pi)$ es una C^* -subálgebra central de $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi)$ con la misma unidad. Claramente, el espacio de ideales maximales de $\phi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathcal{Z}^\pi)$ coincide con $\tilde{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}$. Como $\Omega_{\infty, \mathbb{R}}$ es un subconjunto abierto de $\tilde{\Omega}_{\infty, \mathbb{R}}$ y como la correspondiente proyección espectral $P_{\pi_0}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})$ es el operador identidad en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}}$, concluimos del Lema 11.5 que

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})} &= \|P_{\pi_0}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}}) \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})} \\
&= \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})} \|\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi) \phi_{\infty, \mathbb{R}}(Z^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})},
\end{aligned}$$

lo cual junto con (13.40) implican que

$$\|P_\varphi(\Omega_{\infty, \mathbb{R}}) \varphi(B^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)} = \|\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})} \tag{13.41}$$

para toda suma finita $B^\pi = \sum_{g \in F} A_g^\pi U_g^\pi \in \mathfrak{B}^\pi$ con $A_g^\pi \in \mathfrak{A}^\pi$. Como el conjunto de tales sumas finitas es denso en \mathfrak{B}^π y como (13.41) se cumple, entonces la función (13.37) se extiende de forma única a un C^* -álgebra isomorfismo de $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$ sobre $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi)$. \square

Cada clase lateral B^π de la C^* -álgebra \mathfrak{B}^π es el límite de una sucesión de clases laterales de la forma $B_n^\pi = \sum_{g \in F_n} A_{g,n}^\pi U_g^\pi$ donde $A_{g,n}^\pi \in \mathfrak{A}^\pi$ y g corre sobre subconjuntos finitos F_n de G ($n \in \mathbb{N}$). Entonces de acuerdo al Teorema 13.9 el operador $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi)$ en la C^* -álgebra $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^\pi)$ tiene la forma

$$\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{g \in F_n} \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(A_{g,n}^\pi) \Psi_{\infty, \mathbb{R}}(U_g^\pi),$$

donde el $*$ -homomorfismo $\Psi_{\infty, \mathbb{R}} : \mathfrak{B}^\pi \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})$ es una extensión del $*$ -homomorfismo $\phi_{\infty, \mathbb{R}} : \mathfrak{A}^\pi \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})$ a la C^* -álgebra \mathfrak{B}^π debido a (13.5) y (13.36). Así, poniendo $h_g = h$ para desplazamientos $g = g_h \in G$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(B^\pi) &= \bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} B_{\infty, \mathbb{R}}(\xi, \eta, \cdot) I \in \mathcal{B}\left(\bigoplus_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} l^2(\mathfrak{M}_{\xi, \eta}, \mathbb{C}^2)\right), \\
B_{\infty, \mathbb{R}}(\xi, \eta, \cdot) : \mathfrak{M}_{\xi, \eta} &\rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \mu \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{g \in F_n} [\Psi_{\xi, \eta, \mu}(A_{g,n}^\pi)] e^{ih_g \eta}. \tag{13.42}
\end{aligned}$$

En consecuencia, para cada (ξ, η, μ) en el conjunto

$$\mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}} := \bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta},$$

obtenemos la representación

$$\sigma_{\xi, \eta, \mu} : \mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \tag{13.43}$$

dada en los generadores de la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$ por

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi, \eta, \mu}(P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi((aI)^{\pi}))f &= [\Psi_{\xi, \eta, \mu}(aI)]f, \\ \sigma_{\xi, \eta, \mu}(P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi((W^0(b))^{\pi}))f &= [\Psi_{\xi, \eta, \mu}(W^0(b))]f, \\ \sigma_{\xi, \eta, \mu}(P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(U_{g_h}^{\pi}))f &= e^{ih\eta}f,\end{aligned}\tag{13.44}$$

donde $a, b \in PSO^{\diamond}$, $g_h \in G$ y $f \in \mathbb{C}^2$.

Tomando en cuenta la cerradura de la inversión de las C^* -álgebras $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$ y $\Psi_{\infty, \mathbb{R}}(\mathfrak{B}^{\pi})$ en las C^* -álgebras $\mathcal{B}(P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\mathcal{H}_{\varphi})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\infty, \mathbb{R}})$, respectivamente, obtenemos inmediatamente del Teorema 13.9 y (13.42)–(13.44), un criterio de invertibilidad para los operadores en la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$.

Teorema 13.10. *Para cada $B \in \mathfrak{B}$, el operador $B_{\infty, \mathbb{R}} := P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\varphi(B^{\pi}) \in \mathfrak{B}_{\infty, \mathbb{R}}$ es invertible en el espacio $P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \mathbb{R}})\mathcal{H}_{\varphi}$ si y solo si para todo $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}$ los operadores $\sigma_{\xi, \eta, \mu}(B_{\infty, \mathbb{R}})$ son invertibles en el espacio \mathbb{C}^2 y*

$$\sup_{(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}} \|(\sigma_{\xi, \eta, \mu}(B_{\infty, \mathbb{R}}))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)} < \infty.\tag{13.45}$$

13.5. La C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \infty}$ y su influencia

En esta subsección demostraremos que para cada $B \in \mathfrak{B}$ la invertibilidad del operador $P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\varphi(B^{\pi})$ en el espacio de Hilbert $P_{\varphi}(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\mathcal{H}_{\varphi}$ implica la invertibilidad de los operadores $P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\varphi(B^{\pi})$ en el espacio de Hilbert $P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\mathcal{H}_{\varphi}$. Esto significa que la condición (iii) en el Teorema 13.1 es superflua.

Consideremos la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \infty} = P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\varphi(\mathfrak{B}^{\pi})$ (ver (13.16)) donde $\Omega_{\infty, \infty}$ está dado por (13.3). Como $\Omega_{\infty, \infty} \in \mathfrak{R}_G$ y, por el Teorema 12.6, $\Omega_{\infty, \infty}$ es un conjunto de puntos fijos para los homeomorfismos β_g ($g \in G \setminus \{e\}$), deducimos que la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \infty}$ es conmutativa. Consideremos su C^* -subálgebra central $\mathcal{Z}_{\infty, \infty} := P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\varphi(\mathcal{Z}^{\pi})$ y apliquemos el principio local de Allan-Douglas local con respecto a $M(\mathcal{Z}_{\infty, \infty})$. Si $Z^{\pi} \in \mathcal{Z}^{\pi}$ y

$$\min_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \infty}} |[\Gamma(Z^{\pi})](\xi, \eta)| > 0,$$

entonces $|[\Gamma(Z^{\pi})](\xi, \eta)| > 0$ en la cerradura \bar{V} de una vecindad abierta V de $\Omega_{\infty, \infty}$ en Ω . De aquí, como $P_{\varphi}(V)\varphi(\mathcal{Z}^{\pi}) \cong C(\bar{V})$ y el isomorfismo está dado por $P_{\varphi}(V)\varphi(\mathcal{Z}^{\pi}) \mapsto z(\cdot, \cdot)|_{\bar{V}}$ donde $z(\cdot, \cdot)|_{\bar{V}}$ es la restricción de la transformada de Gelfand $\Gamma(\mathcal{Z}^{\pi})$ a \bar{V} (ver Subsección 11.2), concluimos que el operador $P_{\varphi}(V)\varphi(\mathcal{Z}^{\pi})$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_{\varphi}(V)\mathcal{H}_{\varphi}$. Esto implica que el operador $P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\varphi(\mathcal{Z}^{\pi})$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\mathcal{H}_{\varphi}$. En consecuencia, probamos lo siguiente.

Proposición 13.11. $M(\mathcal{Z}_{\infty, \infty}) \subset \Omega_{\infty, \infty}$.

Sea $\mathcal{J}_{\xi, \eta}$ el ideal bilateral cerrado minimal de la C^* -álgebra $\mathfrak{B}_{\infty, \infty}$ que contiene al ideal maximal $(\xi, \eta) \in M(\mathcal{Z}_{\infty, \infty})$, y consideremos a $\mathfrak{B}_{\infty, \infty}/\mathcal{J}_{\xi, \eta}$. Por el principio local de Allan-Douglas tenemos lo siguiente.

Lema 13.12. *El operador $B_{\infty, \infty} = P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\varphi(B^{\pi})$ es invertible en el espacio $P_{\varphi}(\Omega_{\infty, \infty})\mathcal{H}_{\varphi}$ si y solo si para cada $(\xi, \eta) \in M(\mathcal{Z}_{\infty, \infty})$ la clase lateral $B_{\infty, \infty} + \mathcal{J}_{\xi, \eta}$ es invertible en el álgebra cociente $\mathfrak{B}_{\infty, \infty}/\mathcal{J}_{\xi, \eta}$.*

Con cada operador $B = \sum_{g \in F} D_g U_g \in \mathfrak{B}^0$ de la forma (12.20), donde $D_g \in \mathfrak{A}^0$ y F es un subconjunto finito de G , y con cada $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ asociamos dos operadores funcionales $A_\eta^\pm \in \mathcal{A}^0$ dados por

$$\begin{aligned} A_\eta^+ &= \sum_{g \in F} [\Psi \cdot, \eta, 1(D_g)]_{1,1} U_g = \sum_{g \in F} [\Psi \cdot, \eta, 0(D_g)]_{2,2} U_g, \\ A_\eta^- &= \sum_{g \in F} [\Psi \cdot, \eta, 0(D_g)]_{1,1} U_g = \sum_{g \in F} [\Psi \cdot, \eta, 1(D_g)]_{2,2} U_g, \end{aligned} \quad (13.46)$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} \xi &\mapsto [\Psi_{\xi, \eta, 1}(D_g)]_{1,1}, & \xi &\mapsto [\Psi_{\xi, \eta, 0}(D_g)]_{2,2}, \\ \xi &\mapsto [\Psi_{\xi, \eta, 0}(D_g)]_{1,1}, & \xi &\mapsto [\Psi_{\xi, \eta, 1}(D_g)]_{2,2} \end{aligned}$$

están en PSO^0 y para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$[\Psi_{\xi, \eta, 1}(D_g)]_{1,1} = [\Psi_{\xi, \eta, 0}(D_g)]_{2,2}, \quad [\Psi_{\xi, \eta, 0}(D_g)]_{1,1} = [\Psi_{\xi, \eta, 1}(D_g)]_{2,2}. \quad (13.47)$$

Teorema 13.13. *Si $B \in \mathfrak{B}^0$ está escrito en la forma (12.20) y el operador $B_{\mathbb{R}, \infty} := P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\mathcal{H}_\varphi$, entonces para cada $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ los operadores funcionales A_η^\pm dados por (13.46) son invertibles en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Fijemos $\tau \in \mathbb{R}$. Sea $B \in \mathfrak{B}^0$ el operador representado en la forma (12.20) y sea $B_{\mathbb{R}, \infty}$ operador invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\mathcal{H}_\varphi$. Entonces, por el Teorema 13.5, los operadores $\pi_{(\xi, \eta, \mu)}(B_{\mathbb{R}, \infty})$ para todo $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$ son invertibles en el espacio de Hilbert $l^2(G, \mathbb{C}^2)$ y se cumple la condición (13.30). En particular, los operadores $\pi_{(\xi, \eta, \mu)}(B_{\mathbb{R}, \infty})$ son invertibles en el espacio $l^2(G, \mathbb{C}^2)$ para todo $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ y todo $(\xi, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$, donde $\mathfrak{N}_{\tau, \infty} = M_\tau(SO^\circ) \times \{0, 1\}$ debido a (12.27). Se ve fácilmente de (13.28), (12.7), (13.46) y (12.24) que para cada $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$ y cada $\xi \in M_\tau(SO^\circ)$,

$$\begin{aligned} \pi_{(\xi, \eta, 0)}(B_{\mathbb{R}, \infty}) &= \text{diag}\{(A_\eta^-)_{(\xi, 1)}, (A_\eta^+)_{(\xi, 0)}\}, \\ \pi_{(\xi, \eta, 1)}(B_{\mathbb{R}, \infty}) &= \text{diag}\{(A_\eta^+)_{(\xi, 1)}, (A_\eta^-)_{(\xi, 0)}\}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

En consecuencia, la invertibilidad de los operadores $\pi_{(\xi, \eta, \mu)}(B_{\mathbb{R}, \infty})$ en el espacio $l^2(G, \mathbb{C}^2)$ para todo $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$ implica, debido a (13.48), la invertibilidad de los operadores $(A_\eta^+)_{(\xi, \mu)}$ y $(A_\eta^-)_{(\xi, \mu)}$ en el espacio $l^2(G)$ para todo $(\xi, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$ y todo $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$. Más aún, deducimos de (13.30) y (13.48) que se cumple la condición (12.28) para todos los operadores funcionales A_η^\pm definidos por (13.46). Entonces, por el Teorema 12.7, los operadores funcionales A_η^\pm son invertibles en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ para todo $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$. \square

Además, deducimos del Teorema 13.13 que para cada operador $B \in \mathfrak{B}^0$ con operador invertible $B_{\mathbb{R}, \infty}$ y cada $\eta \in M_\infty(SO^\circ)$,

$$\begin{aligned} \|A_\eta^\pm\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}^2 &= r(A_\eta^\pm (A_\eta^\pm)^*) \leq r(B_{\mathbb{R}, \infty} B_{\mathbb{R}, \infty}^*) \\ &= \|B_{\mathbb{R}, \infty}\|_{\mathcal{B}(P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R}, \infty})\mathcal{H}_\varphi)}^2 \leq \|B\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto las funciones $B \mapsto B_{\mathbb{R},\infty} \mapsto A_\eta^\pm$ se extienden por continuidad a los C^* -álgebra homomorfismos $\nu_\eta^\pm : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}_{\mathbb{R},\infty} \rightarrow \mathcal{A}$, y por eso el Teorema 13.13 permanece cierto para todo $B \in \mathfrak{B}$. Así, tomando en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} (A_\eta^+)_{\xi,1} &= \sum_{g \in F} [\Psi_{\xi,\eta,1}(D_g)]_{1,1} U_g, & (A_\eta^+)_{\xi,0} &= \sum_{g \in F} [\Psi_{\xi,\eta,0}(D_g)]_{2,2} U_g, \\ (A_\eta^-)_{\xi,1} &= \sum_{g \in F} [\Psi_{\xi,\eta,0}(D_g)]_{1,1} U_g, & (A_\eta^-)_{\xi,0} &= \sum_{g \in F} [\Psi_{\xi,\eta,1}(D_g)]_{2,2} U_g \end{aligned} \quad (13.49)$$

para $B \in \mathfrak{B}^0$ y todo $\xi, \eta \in M_\infty(SO^\circ)$, las cuales se siguen de (13.46), obtenemos el siguiente resultado debido al Teorema 13.13 y el Corolario 12.9 con la Observación 12.10.

Corolario 13.14. *Si $B \in \mathfrak{B}$ y el operador $B_{\mathbb{R},\infty} := P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi$, entonces para cada $(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty,\infty}$ y cada $\mu \in \{0, 1\}$ los operadores funcionales $(A_\eta^\pm)_{\xi,\mu}$ dados por (13.49) son invertibles en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, y por eso los operadores $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi((A_\eta^\pm)_{\xi,\mu})$ son invertibles en el espacio $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi$.*

Teorema 13.15. *Si $B \in \mathfrak{B}$ y el operador $B_{\mathbb{R},\infty} = P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi$, entonces el operador $B_{\infty,\infty} := P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(B^\pi)$ es invertible en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi$.*

Demostración. Sea $u_+ \in C(\overline{\mathbb{R}})$, $u_+(+\infty) = 1$ y $u_+(-\infty) = 0$, y sea $u_- = 1 - u_+$. Por la Proposición 13.11, $M(\mathcal{Z}_{\infty,\infty}) \subset \Omega_{\infty,\infty}$. Se puede ver que para cada operador $B \in \mathfrak{B}$ y cada $(\xi, \eta) \in M(\mathcal{Z}_{\infty,\infty})$ la clase lateral $B_{\infty,\infty} + \mathcal{J}_{\xi,\eta}$ tiene la forma

$$\begin{aligned} B_{\infty,\infty} + \mathcal{J}_{\xi,\eta} &= P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi[(A_\eta^+)_{\xi,1}(u_-W^0(u_-)) + (A_\eta^+)_{\xi,0}(u_+W^0(u_-)) \\ &\quad + (A_\eta^-)_{\xi,1}(u_-W^0(u_+)) + (A_\eta^-)_{\xi,0}(u_+W^0(u_+))] + \mathcal{J}_{\xi,\eta}. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Por el Corolario 13.14, la invertibilidad del operador $B_{\mathbb{R},\infty}$ en el espacio de Hilbert $P_\varphi(\Omega_{\mathbb{R},\infty})\mathcal{H}_\varphi$ implica la invertibilidad de todos los operadores $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi((A_\eta^\pm)_{\xi,\mu})$ en el espacio $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi$. Tomando una sucesión de conjuntos abiertos $\Delta_n \subset \Omega$ tales que $\bigcap_n \Delta_n = \Omega_{\infty,\infty}$, se puede probar fácilmente que

$$P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(u_+u_-) = P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(W^0(u_+u_-)) = 0. \quad (13.51)$$

Como los operadores

$$P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(u_\pm I), \quad P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(W^0(u_\pm)), \quad P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi(U_g) \quad (g \in G)$$

conmutan a pares, deducimos de (13.51) que para cada $(\xi, \eta) \in M(\mathcal{Z}_{\infty,\infty})$ la clase lateral

$$\begin{aligned} P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\varphi[((A_\eta^+)_{\xi,1})^{-1}(u_-W^0(u_-)) + ((A_\eta^+)_{\xi,0})^{-1}(u_+W^0(u_-)) \\ + ((A_\eta^-)_{\xi,1})^{-1}(u_-W^0(u_+)) + ((A_\eta^-)_{\xi,0})^{-1}(u_+W^0(u_+))] + \mathcal{J}_{\xi,\eta} \end{aligned} \quad (13.52)$$

es el inverso de la clase lateral (13.50). Finalmente, aplicando el Lema 13.12, obtenemos la invertibilidad del operador $B_{\infty,\infty}$ en el espacio $P_\varphi(\Omega_{\infty,\infty})\mathcal{H}_\varphi$. \square

14. Cálculo simbólico y un criterio de Fredholm para la C^* -álgebra \mathfrak{B}

Sea G el grupo conmutativo de todas las traslaciones $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($h \in \mathbb{R}$). Consideremos la C^* -álgebra

$$\mathfrak{B} := \text{alg}(aI, W^0(b), U_g : a, b \in PSO^\circ, g \in G) \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})),$$

generada por todos los operadores de multiplicación aI con funciones a en \mathbb{R} lentamente oscilatorias a trozos, por los operadores de convolución $W^0(b)$ ($b \in PSO^\circ$) y por todos los desplazamientos U_g ($g \in G$).

Fijemos $\tau \in \mathbb{R}$ y consideremos los conjuntos

$$\Omega_{\tau, \infty} = M_\tau(SO^\circ) \times M_\infty(SO^\circ), \quad \mathfrak{N}_{\tau, \infty} = \bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\tau, \infty}} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta}.$$

Para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$, introducimos la representación

$$\Phi_{\xi, \eta, \mu} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(l^2(G, \mathbb{C}^2)), \quad B \mapsto \pi_{(\xi, \eta, \mu)}(B_{\mathbb{R}, \infty}) \quad (14.1)$$

dada en los generadores de la C^* -álgebra \mathfrak{B} de acuerdo a (13.27)–(13.28) por

$$\begin{aligned} [\Phi_{\xi, \eta, \mu}(aI)f](g) &= \text{diag}\{(a \circ g)(\xi^+), (a \circ g)(\xi^-)\}f(g), \\ [\Phi_{\xi, \eta, \mu}(W^0(b))f](g) &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu \end{bmatrix} f(g), \\ [\Phi_{\xi, \eta, \mu}(U_h)f](g) &= f(gh), \end{aligned} \quad (14.2)$$

donde $a, b \in PSO^\circ$, $c(\xi^+) = c(\xi, 1)$ y $c(\xi^-) = c(\xi, 0)$ son los valores de la transformada de Gelfand de $c \in PSO^\circ$ en los puntos $(\xi, 1), (\xi, 0) \in M(PSO^\circ)$, $g, h \in G$, y $f \in l^2(G, \mathbb{C}^2)$.

Ahora consideremos los conjuntos

$$\Omega_{\infty, \mathbb{R}} = M_\infty(SO^\circ) \times \bigcup_{t \in \mathbb{R}} M_t(SO^\circ), \quad \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}} = \bigcup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\infty, \mathbb{R}}} \{(\xi, \eta)\} \times \mathfrak{M}_{\xi, \eta}.$$

Para cada $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}$, introducimos la representación

$$\Phi_{\xi, \eta, \mu} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2), \quad B \mapsto \sigma_{\xi, \eta, \mu}(B_{\infty, \mathbb{R}}), \quad (14.3)$$

dada en los generadores de la C^* -álgebra \mathfrak{B} de acuerdo a (13.43)–(13.44) por

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi, \eta, \mu}(aI)f &= \text{diag}\{a(\xi^+), a(\xi^-)\}f, \\ \Phi_{\xi, \eta, \mu}(W^0(b))f &= \begin{bmatrix} b(\eta^+)\mu + b(\eta^-)(1 - \mu) & [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) \\ [b(\eta^+) - b(\eta^-)]\varrho(\mu) & b(\eta^+)(1 - \mu) + b(\eta^-)\mu \end{bmatrix} f, \\ \Phi_{\xi, \eta, \mu}(U_h)f &= e^{ih\eta}f, \end{aligned} \quad (14.4)$$

donde $a, b \in PSO^\circ$, $h \in G$, y $f \in \mathbb{C}^2$.

Finalmente, combinando los Teoremas 13.1, 13.5, 13.10 y 13.15, obtenemos el siguiente criterio de Fredholm para los operadores B en la C^* -álgebra \mathfrak{B} .

Teorema 14.1. *Un operador $B \in \mathfrak{B}$ es de Fredholm en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- (i) *para cualquier (equivalentemente, algún) $\tau \in \mathbb{R}$ y todo $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}$ los operadores $\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B)$ son invertibles en el espacio $l^2(G, \mathbb{C}^2)$ y*

$$\sup_{(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}} \|(\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B))^{-1}\|_{\mathcal{B}(l^2(G, \mathbb{C}^2))} < \infty;$$

- (ii) *para todo $(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}$ los operadores $\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B)$ son invertibles en el espacio \mathbb{C}^2 y*

$$\sup_{(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}} \|(\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B_{\infty, \mathbb{R}}))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)} < \infty.$$

Fijemos $\tau \in \mathbb{R}$ y consideremos la función de operadores $\Phi(B)$ definida en $\mathfrak{N}_{\tau, \infty} \cup \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}$ por $(\xi, \eta, \mu) \mapsto \Phi_{\xi, \eta, \mu}(B)$, donde los operadores $\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B)$ están dados por (14.1)–(14.4), y equipémosla con

$$\|\Phi(B)\| = \max \left\{ \sup_{(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\tau, \infty}} \|\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B)\|_{\mathcal{B}(l^2(G, \mathbb{C}^2))}, \sup_{(\xi, \eta, \mu) \in \mathfrak{N}_{\infty, \mathbb{R}}} \|\Phi_{\xi, \eta, \mu}(B)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)} \right\}.$$

La función de operadores $\Phi(B)$ es referida como el *símbolo* del operador $B \in \mathfrak{B}$. Claramente, el conjunto $\Phi(\mathfrak{B}) := \{\Phi(B) : B \in \mathfrak{B}\}$ es una C^* -álgebra, y la función $\Phi : B \mapsto \Phi(B)$ es un C^* -álgebra homomorfismo de la C^* -álgebra \mathfrak{B} sobre la C^* -álgebra $\Phi(\mathfrak{B})$ con kernel $\text{Ker } \Phi = \mathcal{K}$. Por lo tanto $\mathfrak{B}^\pi \cong \Phi(\mathfrak{B})$. Haciendo uso de este cálculo simbólico, el Teorema 14.1 puede reescribirse en la siguiente forma.

Teorema 14.2. *Un operador $B \in \mathfrak{B}$ es de Fredholm en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si su símbolo $\Phi(B)$ es invertible.*

Referencias

- [1] A. Antonevich: Linear Functional Equations. Operator Approach. *Birkhäuser Verlag, Basel* (1996).
- [2] A. Antonevich, A. Lebedev: Functional Differential Equations: I. C^* -theory. *Longman Scientific & Technical* (1994).
- [3] M.A. Bastos, A. Bravo, Yu.I. Karlovich: Convolution type operators with symbols generated by slowly oscillating and piecewise continuous matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications* **147** (2004), 151–174.
- [4] M.A. Bastos, A. Bravo, Yu.I. Karlovich: Symbol calculus and Fredholmness for a Banach algebra of convolution type operators with slowly oscillating and piecewise continuous data. *Math. Nachr.* **269–270** (2004), 11–38.
- [5] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich: C^* -algebras of integral operators with piecewise slowly oscillating coefficients and shifts acting freely. *Integral Equations and Operator Theory* **55** (2006), 19–67.
- [6] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich: Spectral measures in C^* -algebras of singular integral operators with shifts. *J. Funct. Analysis* **242** (2007), 86–126.

- [7] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich: C^* -algebras of Singular Integral Operators with Shifts Having the Same Nonempty Set of Fixed Points. *Complex Analysis and Operator Theory* **2** (2008), 241-272.
- [8] M. A. Bastos, C. A. Fernandes, Yu. I. Karlovich: A nonlocal C^* -algebra of singular integral operators with shifts having periodic points. *Integral Equations and Operator Theory* **71** (2011), 509–534.
- [9] M.A. Bastos, Yu.I. Karlovich, B. Silbermann: Toeplitz operators with symbols generated by slowly oscillating and semi-almost periodic matrix functions. *Proc. London Math. Soc.* (3) **89** (2004), 697–737.
- [10] J. Bergh, J. Löfström: Interpolation Spaces. An Introduction. *Springer, Berlin* (1976).
- [11] A. Böttcher, I. Gohberg, Yu. Karlovich, N. Krupnik, S. Roch, B. Silbermann, I. Spitkovsky: Banach algebras generated by N idempotents and applications. *Operator Theory: Advances and Applications* **90** (1996), 19–54.
- [12] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich: Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators. *Birkhäuser Verlag, Basel* (1997).
- [13] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, V. S. Rabinovich: Mellin pseudodifferential operators with slowly varying symbols and singular integral on Carleson curves with Muckenhoupt weights. *Manuscripta Math.* **95** (1998), 363-376.
- [14] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, V.S. Rabinovich: The method of limit operators for one-dimensional integrals with slowly oscillating data. *J. Operator Theory* **43** (2000), 171–198.
- [15] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, B. Silbermann: Singular integral equations with PQC coefficients and freely transformed argument. *Math. Nachr.* **166** (1994), 113–133.
- [16] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, I.M. Spitkovsky: Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. *Birkhäuser Verlag, Basel* (2002).
- [17] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, I.M. Spitkovsky: The C^* -algebra of singular integral operators with semi-almost periodic coefficients. *J. Funct. Anal.* **204** (2003) 445–484.
- [18] A. Böttcher, B. Silbermann: Analysis of Toeplitz Operators. 2nd edition. *Springer, Berlin* (2006).
- [19] A. Bötcher, I. M. Spitkovsky: Wiener-Hopf integral operators with PC symbols on spaces with Muckenhoupt weight. *Revista Matemática Iberoamericana* **9** (1993), 257-279.
- [20] A. Bötcher, I. M. Spitkovsky: Pseudodifferential operators with heavy spectrum. *Integral Equations and Operator Theory* **19** (1994), 251-269.
- [21] O. Bratteli, D.W. Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. I: C^* - and W^* -algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States. *Springer, New York* (1979).
- [22] J. Dixmier: C^* -Algebras. *North-Holland, Amsterdam* (1977).
- [23] R. V. Duduchava: Integral equations of convolution type with discontinuous coefficients. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR* **92**, (1978), 281–284 [Russian].
- [24] R.V. Duduchava: Integral Equations with Fixed Singularities. *B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig* (1979).

- [25] T. Finck, S. Roch, B. Silberman: Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra. *Math. Nachrichten* **162** (1993), 167–185.
- [26] J.B. Garnett: Bounded Analytic Functions. *Academic Press, New York* (1981).
- [27] I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov: Commutative normed rings. *Bronx, N. Y., Chelsea Pub. Co.* (1964).
- [28] I. Gohberg, I. A. Feldman: Convolution Equations and Projection Methods for Their Solutions. Transl. of Math. Monographs, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* **41** (1974). Russian original: Nauka, Moscow, 1971.
- [29] I. Gohberg, N. Krupnik: One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. Vols. I and II. *Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin* (1992).
- [30] L. Grafakos: Classical and Modern Fourier Analysis. *Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ* (2004).
- [31] F.P. Greenleaf: Invariant Means on Topological Groups and Their Representations. *Van Nostrand-Reinhold, New York* (1969).
- [32] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden: Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227–251.
- [33] Yu.I. Karlovich: The local-trajectory method of studying invertibility in C^* -algebras of operators with discrete groups of shifts. *Soviet Math. Dokl.* **37** (1988), No. 2, 407–412.
- [34] Yu.I. Karlovich: C^* -algebras of operators of convolution type with discrete groups of shifts and oscillating coefficients. *Soviet Math. Dokl.* **38** (1989), No. 2, 301–307.
- [35] Yu.I. Karlovich: On algebras of singular integral operators with discrete groups of shifts in L_p -spaces. *Soviet Math. Dokl.* **39** (1989), No. 1, 48–53.
- [36] Yu.I. Karlovich: Algebras of convolution type operators with discrete groups of shifts and oscillating coefficients. *Doctoral dissertation, Math. Institute, Georgian Academy of Sciences, Tbilisi* (1991).
- [37] Yu.I. Karlovich: An algebra of pseudodifferential operators with slowly oscillating symbols. *Proc. London Math. Soc.* (3) **92** (2006), 713–761.
- [38] Yu.I. Karlovich: A local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^* -algebras. *Operator Theory: Advances and Applications* **170** (2007), 137–166.
- [39] Yu.I. Karlovich: Pseudodifferential operators with compound slowly oscillating symbols. *Operator Theory: Advances and Applications* **171** (2007), 189–224.
- [40] Yu.I. Karlovich: Algebras of pseudo-differential operators with discontinuous symbols. *Operator Theory: Advances and Applications* **172** (2007), 207–233.
- [41] Yu.I. Karlovich: Nonlocal singular integral operators with slowly oscillating symbols. *Operator Theory: Advances and Applications* **181** (2008), 229–261.
- [42] Yu. I. Karlovich: An algebra of shift-invariant singular integral operators with slowly oscillating data and its application to operators with a Carleman shift. In: “Analysis, Partial Differential Equations and Applications. The Vladimir Maz’ya Anniversary Volume”. *Operator Theory: Advances and Applications* **193** (2009), 81–95.
- [43] Yu.I. Karlovich: Boundedness and compactness of pseudodifferential operators with non-regular symbols on weighted Lebesgue spaces, *submitted*.

- [44] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, A. B. Lebre: Invertibility of functional operators with slowly oscillating non-Carleman shifts. *Operator Theory: Advances and Applications* **142** (2003), 147–174.
- [45] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, A. B. Lebre: Sufficient conditions for Fredholmness of singular integral operators with shifts and slowly oscillating data. *Integr. Equ. Oper. Theory* **70** (2011), 451–483.
- [46] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, A. B. Lebre: Necessary conditions for Fredholmness of singular integral operators with shifts and slowly oscillating data. *Integr. Equ. Oper. Theory* **71** (2011), 29–53.
- [47] Yu.I. Karlovich, V.G. Kravchenko: An algebra of singular integral operators with piecewise-continuous coefficients and a piece-wise-smooth shift on a composite contour. *Math. USSR Izvestiya* **23** (1984), 307–352.
- [48] Yu. I. Karlovich, I. Loreto Hernández: On convolution type operators with piecewise slowly oscillating data. In: Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics. The Vladimir Rabinovich Anniversary Volume. *Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Basel*, **228** (2013), 185–207.
- [49] Yu. I. Karlovich, I. Loreto Hernández: Algebras of convolution type operators with piecewise slowly oscillating data. I: Local and structural study. *Integral Equations and Operator Theory*, **74** (2012), 377–415.
- [50] Yu. I. Karlovich, I. Loreto Hernández: Algebras of convolution type operators with piecewise slowly oscillating data. II: Local spectra and Fredholmness. *Integral Equations and Operator Theory*, **75** (2013), 49–86.
- [51] Yu.I. Karlovich, J. Loreto Hernández: Wiener-Hopf operators with semi-almost periodic matrix symbols on weighted Lebesgue spaces. *Integral Equations and Operator Theory* **62** (2008), 85–128.
- [52] Yu. I. Karlovich, J. Loreto Hernández: Wiener-Hopf Operators with Slowly Oscillating Matrix Symbols on Weighted Lebesgue Spaces. *Integr. equ. theory* **64** (2009), 203-237.
- [53] Yu.I. Karlovich, E. Ramírez de Arellano: A shift-invariant algebra of singular integral operators with oscillating coefficients. *Integral Equations and Operator Theory* **39** (2001), 441-474.
- [54] Yu.I. Karlovich, E. Ramírez de Arellano: Singular integral operators with fixed singularities on weighted Lebesgue spaces. *Integral Equations and Operator Theory* **48** (2004), 331–363.
- [55] Yu.I. Karlovich, B. Silbermann: Local Method for Nonlocal Operators on Banach Spaces. *Operator Theory: Advances and Applications* **135** (2002), 235–247.
- [56] Yu.I. Karlovich, B. Silbermann: Fredholmness of singular integral operators with discrete subexponential groups of shifts on Lebesgue spaces. *Math. Nachr.* **272** (2004), 55–94.
- [57] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustyl'nik, P.E. Sobolevskii: Integral Operators in Spaces of Summable Functions. *Nauka, Moscow*, 1966 (Russian); English transl.: Noordhoff I.P., Leyden, 1976.
- [58] S. G. Krein: Linear Equations in Banach Spaces. *Birkhäuser, Boston* (1982). Original en Ruso: GITTL, Moscow 1956.

- [59] P.S. Muhly, J. Xia: Calderón-Zygmund operators, local mean oscillation and certain automorphisms of the Toeplitz algebra. *Amer. J. Math.* **117** (1995) 1157–1201.
- [60] G.J. Murphy: *C*-Algebras and Operator Theory*. Academic Press, Boston (1990).
- [61] M.A. Naimark: Normed Algebras. *Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands* (1972).
- [62] I. P. Natanson: Theory of Functions of a Real Variable. *Frederick Ungar Publishing Co., New York* (1955).
- [63] S. C. Power: Fredholm Toeplitz operators and slow oscillation. *Can. J. Math.* **32** (1980), 1058-1071.
- [64] S.C. Power: Hankel Operators on Hilbert Space. *Pitman Research Notes in Math.* **64**, Pitman, Boston, (1982).
- [65] S. Prössdorf: Some Classes of Singular Equations. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam* (1978).
- [66] V.S. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann: Limit Operators and Their Applications in Operator Theory. *Operator Theory: Advances and Applications* **150**, Birkhäuser, Basel, (2004).
- [67] S. Roch, P.A. Santos, B. Silbermann: Non-commutative Gelfand Theories. A Tool-kit for Operator Theorists and Numerical Analysts. *Springer, London* (2011).
- [68] S. Roch, B. Silbermann: Algebras of Convolution Operators and Their Image in the Calkin Algebra. *Report R-Math-05/90, Akad. Wiss. DDR, Karl Weierstrass Institut f. Mathematik, Berlin* (1990).
- [69] W. Rudin: Functional Analysis. 2nd edition, *McGraw-Hill Inc., New York* (1991).
- [70] I.B. Simonenko: A new general method of studying operator equations of the type of singular integral equations. I, II. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **29** (1965), 567–586; 757–782.
- [71] I. B. Simonenko, Chin Ngok Min: Local Method in the Theory of One-Dimensional Singular Integral Equations with Piecewise Continuous Coefficients. Noetherity. *University Press, Rostov on Don* (1986), [Ruso].
- [72] E. M. Stein: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ* (1970).
- [73] E.M. Stein: Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ* (1993).
- [74] D. Sarason: Functions of vanishing mean oscillation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **207** (1975), 391–405.
- [75] D. Sarason: Toeplitz operators with piecewise quasicontinuous symbols. *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 817–838.
- [76] R. Schneider: Integral equations with piecewise continuous coefficients in L^p -spaces with weight. *J. Integral Equations* **9**, (1985), 135–152.
- [77] M.E. Taylor: Pseudodifferential Operators. *Princeton University Press, Princeton, NJ* (1981).