



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA**

**SOBRE LA CONDICIÓN DE SER CONJUNTO PARA
RETÍCULAS DE PRERRADICALES**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

SILVIA CLAUDIA GAVITO TICOZZI

TUTOR PRINCIPAL

DR. ROGELIO FERNÁNDEZ-ALONSO GONZÁLEZ
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. FRANCISCO RAGGI CÁRDENAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DRA. MARTHA TAKANE IMAY
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS ó UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D.F., FEBRERO DE 2013

Agradecimientos

El cierre de un ciclo suele traer consigo una mirada en retrospectiva en la que se agolpan en la mente las experiencias vividas en el transcurso del mismo, los aprendizajes y escollos hallados en el camino y, especialmente, todos los seres, sin cuya ayuda habría sido imposible su culminación. Así, ante la proximidad de la conclusión de una etapa tan significativa para mí, desde el punto de vista académico y personal, es menester expresar mi más sincero reconocimiento a todos los que me han guiado y acompañado generosa y activamente a lo largo de esta travesía.

En primera instancia, doy gracias a Dios por todas las bendiciones y alegrías con las que me ha colmado y por el privilegio de coincidir con personas extraordinarias, entre las cuales destacan las que cito a continuación.

Mi maravillosa familia merece aquí una mención especial. Quisiera aprovechar esta oportunidad para agradecer una vez más a mis padres, Paola y José Luis, mis pilares fundamentales, por su inmenso cariño, su incondicional apoyo y su continua preocupación por mi bienestar. Gracias también a ti, Alessandra, por tu enorme generosidad, solidaridad, complicidad y, en especial, por aceptarme tal como soy, en fin, gracias por ser la mejor de las hermanas y mi mejor amiga. *Colgo l'occasione per ringraziare la mia cara nonnina Giannina, che è un gran esempio per me, per la comprensione e l'interesse che ha sempre mostrato per ogni scelta che ho fatto, per il suo enorme affetto, e per trasmettermi la sua gioia di vivere. Vorrei ringraziare pure due persone che, nonostante siano già partite, sono sempre presenti nel nostro cuore: grazie nonno Virginio e zio Giovanni, ci mancate tanto.* Todo mi cariño y gratitud para ustedes.

Deseo manifestar mi más profundo agradecimiento al Dr. Rogelio Fernández-Alonso, quien representa para mí un gran ejemplo de calidad humana y académica, por brindarme de nueva cuenta la invaluable oportunidad de trabajar bajo su dirección, así como por su gran disponibilidad e incommensurable apoyo, su paciencia y generosidad ilimitadas, sus siempre acertadas recomendaciones y el cuidado que siempre pone en transmitir con increíble claridad sus conocimientos e ideas. Como ya lo he mencionado en otra ocasión, excluyendo los inevitables

errores, cuyo crédito asumo por completo, este trabajo es, indudablemente, también suyo.

Deseo agradecer, asimismo, a cada uno de mis muy distinguidos sinodales, no sólo por su gran disposición para revisar esta tesis (que, de manera innegable, se ha visto mejorada notablemente tras pasar por sus manos), sino por sus oportunas correcciones, sugerencias y opiniones. Agradezco al Dr. José Ríos por su gran gentileza, por el respaldo que me ha brindado a lo largo de mis estudios de posgrado y, en particular, por sus precisiones en relación a los antecedentes del concepto de teoría de torsión. Quisiera expresar mi agradecimiento a la Dra. Bertha Tomé por su pronta y muy minuciosa revisión de esta tesis, así como por sus inestimables recomendaciones. Agradezco de igual modo a la Dra. Martha Takane, no sólo por aceptar ser miembro de mi comité de tutores, sino por su gran amabilidad y ayuda en todos los momentos en los que la requerí y, en particular, por las agradables y muy nutritivas sesiones sostenidas en el Instituto de Matemáticas de la Unidad Cuernavaca. Un especial reconocimiento merece el Dr. Francisco Marmolejo por su enorme disponibilidad y por la ingente cantidad de atención y tiempo que dedicó a la discusión y lectura de este trabajo, que ciertamente se vio favorecido por sus muy valiosas aportaciones. Tal es el caso de las demostraciones de la Proposición 1.116 y del Lema 2.4 (sólo por mencionar algunas), mucho más claras y elegantes que las correspondientes demostraciones presentadas en la versión previa de esta tesis, así como la generalización de la Proposición 3.6.

Difícilmente este objetivo habría podido ser alcanzado sin la generosa y desinteresada contribución de la Dra. Dolors Herbera, de la Universidad Autónoma de Barcelona, quien, durante su visita a nuestro país en el año 2010, nos sugirió el contraejemplo que protagoniza el Capítulo 3 de este trabajo, así como del muy talentoso M. en C. Henry Chimal-Dzul, inigualable compañero de viaje en la génesis y el desarrollo de esta investigación y coautor de la publicación que la acompaña. Del mismo modo, este trabajo no habría sido el mismo sin la providencial intervención del Dr. Hugo Rincón, quien tuvo la amabilidad de proporcionarme los artículos de J. M. Harper, H. Rubin y J. E. Rubin sobre las equivalencias del Axioma de Elección (para clases), así como del Dr. Leonardo

Salmerón, cuya asesoría fue decisiva para la comprensión de algunos resultados acerca de representaciones de carcajes.

Sin duda, la asistencia al Seminario del grupo de Teoría de Anillos de la UNAM ha sido una experiencia sumamente enriquecedora y placentera para mí, además de representar la mayor fuente de inspiración de este trabajo. Es por ello que no quisiera dejar pasar este momento para agradecer, en primera lugar, a su fundador, el Dr. Francisco Raggi, por su infinita generosidad al concederme el honor de presenciar brillantes sesiones, perlas de novedosas ideas matemáticas (en una atmósfera desenfadada y lúdica), así como por el inmerecido privilegio de permitirme pertenecer a su grupo de muy destacados investigadores, como lo son los doctores José Ríos, Rogelio Fernández-Alonso, Hugo Rincón y Carlos Signoret, a quienes también hago extensiva (de nueva cuenta) mi mayor gratitud y reconocimiento.

Por su parte, también el Seminario de Anillos de la UAM-Iztapalapa, dirigido por el Dr. Rogelio Fernández-Alonso, ha resultado una experiencia muy positiva, estimulante y beneficiosa para mí. Envío mi agradecimiento a sus muy notables y diligentes integrantes, los M. en C. Janeth Magaña y Erwin Cerda, por la oportunidad de asistir a sus exposiciones y de seguir aprendiendo, y por hacerme sentir parte del grupo.

Un agradecimiento especial a las profesoras M. en C. Soledad Arriaga, Dra. Guadalupe Gaytán, M. en C. Itxel Popoca (quienes, junto con la M. en C. Janeth Magaña, son mis compañeras de cubículo en la UAM-I) y M. en C. Cecilia Hernández, por su gran calidez y por compartir conmigo horas de sosiego que me ayudaron a sentirme más tranquila en el momento de reintegrarme al trabajo docente, así como a las doctoras Rosa María Flores y Laura Hidalgo, por sus muy apreciables sugerencias y por el interés que siempre mostraron hacia el progreso de mis estudios de posgrado.

Una mención honorífica para ti, Manuel, por estar siempre presente en los días luminosos y, lo que es más difícil, en los sombríos.

Agradezco a los miembros de mi Comité Tutor durante mi estancia en la entonces Unidad Morelia del Instituto de Matemáticas: el Dr. Roberto Martínez,

el Dr. Gerardo Raggi y el Dr. Ernesto Vallejo, por la oportunidad, las enseñanzas y el apoyo recibidos en el período 2008-2009.

Finalmente, y no por ello menos importante, agradezco al CONACyT la beca que me permitió realizar mis estudios y desarrollar este trabajo de tesis y, a la UNAM, por brindarme el apoyo, la motivación y el ambiente propicio para la consecución de esta meta.

Sobre la condición de ser conjunto para retículas de prerradicales

Silvia Claudia Gavito Ticozzi

Tesis doctoral

Director: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González

Índice general

Introducción	5
Capítulo 1. Preliminares	9
1. Anillos y módulos	9
2. Descomposición de anillos	24
3. Algunos anillos específicos	26
4. Prerradicales	37
5. Álgebras de carcaj y representaciones	58
Capítulo 2. Antecedentes e indicios	69
1. Algunos anillos p -pequeños y artinianos	69
2. Una clase de anillos p -grandes	84
Capítulo 3. Un anillo artiniano y p -grande	99
Capítulo 4. Anillos p -pequeños	107
1. Módulos principales	107
2. Anillos conmutativos	116
3. Particiones de R -Mod	121
Algunas preguntas y problemas abiertos	135
Apéndice A. <i>Copos</i> y grandes retículas	139
1. <i>Copos</i> y retículas	139
2. Algunos aspectos de la Teoría de Conjuntos	143
3. Grandes retículas	145
Apéndice B. Categorías y funtores	147
Apéndice C. Homología	155

4	Índice general	
Notaciones y abreviaturas		163
Índice alfabético		169
Bibliografía		181

Introducción

El estudio de los prerradicales tiene su origen en las teorías de torsión, introducidas formalmente por S. E. Dickson en [14], y, en especial, en las teorías de torsión hereditarias, estudiadas de manera cabal por J. S. Golan en [27] y [28], siendo su motivación la noción de localización en el caso de anillos no conmutativos.¹ Sin embargo, son los matemáticos checos L. Bican, P. Jambor, T. Kepka y P. Nėmec, inicialmente también interesados en las teorías de torsión, los primeros en manifestar la necesidad de proveer un precedente de la teoría general de los prerradicales, así como de investigar más profundamente las propiedades de estos subfuntores del funtor identidad sobre la categoría de R -módulos izquierdos, con R un anillo asociativo, con elemento unitario y no necesariamente conmutativo. De hecho, en el prefacio de su libro [7], los autores, haciendo referencia a esta última teoría, afirman: “... pronto nos percatamos de que muchos resultados pueden ser formulados y resultar incluso más lúcidos dentro del lenguaje más general de prerradicales. Por este motivo, comenzamos sistemáticamente a estudiar las características básicas de prerradicales en una categoría de módulos dada y su relación con las propiedades del anillo subyacente”.

En nuestro país, los doctores Francisco Raggi y José Ríos se convierten en los años 80 en los pioneros en la investigación de las teorías de torsión desde un punto de vista reticular, a los que, a lo largo de esa década y la siguiente, se suman los doctores Hugo A. Rincón, Carlos E. Signoret y Rogelio Fernández-Alonso, conformando así el grupo de Teoría de Anillos de la UNAM. Posteriormente, a partir del año 2000, dicho grupo, encabezado por el Dr. Francisco Raggi, toma la iniciativa de estudiar las propiedades reticulares de los prerradicales sobre un

¹Cabe señalar que, como lo precisó el Dr. José Ríos, los antecedentes del concepto de teoría de torsión se remontan a los trabajos de P. Gabriel ([25]), J.-M. Maranda ([43]), J. P. Jans ([37]) y E. A. Walker - C. Walker ([58]), entre otros.

anillo. Este esfuerzo resulta ser muy prolífico y de él emanan numerosos trabajos y artículos de investigación. Desde este enfoque, un problema de sumo interés dentro de la teoría de prerradicales consiste en describir a la *gran* retícula de prerradicales sobre un anillo R , denotada por $R\text{-pr}$, donde el adjetivo “gran” se emplea para indicar que $R\text{-pr}$ es en general una clase, no necesariamente un conjunto. Tal descripción se conoce para algunas clases de anillos, como los semisimples (véase [47]), los locales uniseriales y, en consecuencia, los artinianos principales (véase [21]). En estos casos, así como en el de los anillos conmutativos de tipo de representación finita (véase [22]), $R\text{-pr}$ resulta ser un conjunto finito. Por su parte, las álgebras de Artin de tipo de representación finito cuyo carcaj de Gabriel (o carcaj ordinario) no es del tipo \mathbb{A}_n aportan ejemplos de anillos cuya retícula de prerradicales es un conjunto no finito (véase [22]).

Dentro de este contexto, una pregunta natural, aunque difícil de responder, es ¿para cuáles clases de anillos la gran retícula $R\text{-pr}$ resulta ser un conjunto (finito o no), en cuyo caso diremos que R es *p-pequeño*?, y, como la contraparte obligada a esta pregunta, ¿bajo qué condiciones del anillo R es $R\text{-pr}$ una clase propia?

Con respecto a la primera interrogante, tras una rápida inspección a los casos particulares de los anillos antes mencionados se reconoce de inmediato una propiedad en común: todos ellos son artinianos. Es este indicio la motivación que originalmente nos guía a buscar una relación entre las condiciones del anillo de ser artiniano y ser *p-pequeño*.

En lo que concierne a la segunda pregunta, en [19] se presentan algunos resultados que derivan en la existencia de una cadena de prerradicales sobre el anillo de los enteros \mathbb{Z} , la cual se encuentra en correspondencia biunívoca con la clase de todos los ordinales. En particular, lo anterior prueba que \mathbb{Z} no es *p-pequeño*. Tomando como punto de partida dichos resultados, en [20] se define una clase más general de anillos, llamados *radicales*, cuya retícula de prerradicales no es un conjunto. Una subclase de los anillos radicales está formada por ciertos anillos que cumplen una condición que emula el comportamiento de \mathbb{Z} , llamada *coincidentalidad*. Entre las propiedades que satisfacen estos últimos anillos destaca la de no ser artinianos.

La existencia de una clase de anillos R no artinianos tales que R -pr es una clase propia refuerza nuestra búsqueda e incluso nos indujo a plantear inicialmente la conjetura: *un anillo R es artiniano si, y sólo si, R es p -pequeño*. Si bien más tarde se verifica que no todo anillo artiniano es p -pequeño (véase el Capítulo 3 del presente trabajo), aún persiste la sospecha de que un anillo p -pequeño debería cumplir alguna condición de cadena finita.

El propósito de este trabajo es presentar un panorama general con la descripción de los avances realizados y de las líneas de investigación que se han generado en miras de resolver la conjetura anterior, a lo que en algunas ocasiones nos referiremos como “nuestra meta”. Para tal fin, se ha dividido en cuatro capítulos. A continuación se expone brevemente el contenido sintético de cada uno de ellos.

Tal como su título lo sugiere, el primer capítulo tiene la finalidad de establecer los requisitos de anillos, módulos y representaciones, necesarios para abordar los capítulos sucesivos. Cabe mencionar que, con la intención de no extender demasiado este capítulo de conceptos y resultados preliminares, consideramos pertinente complementarlo con una serie de apéndices, localizados al final del trabajo, los cuales incluyen la notación, terminología y propiedades elementales de conjuntos parcialmente ordenados, categorías y homología a los que se hace referencia a lo largo del mismo.

El segundo capítulo es básicamente una reseña de las clases de anillos cuyas retículas de prerradicales ya han sido estudiadas en diversos artículos. Este capítulo consta de dos secciones: la primera de ellas comprende las clases de anillos artinianos y p -pequeños que se mencionan al inicio de esta introducción; mientras que en la segunda se presenta una subclase de la clase de los anillos radicales, constituida por anillos que no son ni artinianos ni p -pequeños; a saber, cierta subclase de los anillos coiniciales, referidos anteriormente.

Por su parte, el tercer capítulo se ocupa de exhibir un ejemplo de anillo artiniano cuya retícula de prerradicales es una clase propia, para lo cual la segunda sección del Capítulo 2 resulta crucial. Con lo anterior, una de las implicaciones de la conjetura que dio origen a esta investigación es derribada.

Finalmente, en el Capítulo 4 se aborda la implicación restante de nuestra conjetura inicial; es decir, R anillo p -pequeño \Rightarrow R anillo artiniano. De hecho,

la intención de este capítulo es, partiendo de la condición de un anillo de ser p -pequeño y, quizás, añadiendo alguna propiedad o restricción adicional, comenzar a tender un puente hacia la condición de cadena descendente del mismo. Para ello, puesto que resulta que la condición de un anillo de ser p -pequeño tiene un estrecho vínculo con la existencia de un módulo llamado *módulo principal*, los objetos de estudio del capítulo son precisamente los módulos principales. Los distintos enfoques o líneas de investigación seguidos para explorar las propiedades de un módulo principal son expuestos en tres secciones. En la primera de ellas se da una construcción de módulo principal asociado a un anillo p -pequeño y se proveen ejemplos de módulos principales, así como algunas propiedades de los mismos desde un punto de vista modular. En la segunda sección se considera el caso restringido en que el anillo es conmutativo y se ofrece, para este caso, una caracterización de los módulos principales usando una herramienta funtorial² presentada por B. Huisgen-Zimmermann en su muy completa reseña [36]. Por su parte, en la Sección 3 se estudian dos relaciones de equivalencia sobre la clase de R -módulos izquierdos, inspiradas en la construcción de un módulo principal incluida en la Sección 1 de este capítulo, que inducen particiones de esta clase. Dichas particiones arrojan más propiedades de los módulos principales, las cuales, combinadas con un resultado de J. A. Beachy y W. D. Blair que aparece en [5], nos aproximan a la condición del anillo de ser artiniano.

Este trabajo finaliza con una lista de preguntas y problemas relacionados con la condición de un anillo de ser (o no) p -pequeño, que hemos acumulado durante el proceso de elaboración del mismo y que aún siguen abiertos, junto con una serie de comentarios y consideraciones cuya finalidad es proporcionar al lector una noción acerca de las conjeturas y dificultades existentes, así como algunas ideas y referencias para intentar resolverlos. De esta manera, el presente trabajo representa el prelude de un proyecto que nos proponemos continuar a futuro.

²introducida, de manera independiente, por L. Gruson y C. U. Jensen en [31] y por W. Zimmermann en [60]

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es introducir las definiciones y propiedades básicas relativas a anillos y módulos, prerradicales, carcajes y representaciones, así como algunos ejemplos, a los que nos referiremos en el presente trabajo. Aprovechamos también para establecer gran parte de la notación y terminología que usaremos en el transcurso del mismo. A excepción de algunos resultados de especial interés para el desarrollo de los capítulos siguientes (como los correspondientes a la teoría de prerradicales), omitimos la demostración de gran parte de los teoremas clásicos, particularmente de la Teoría de Módulos y de la Teoría de Representaciones, toda vez que este material puede hallarse en la literatura.¹

En lo sucesivo, haremos libre uso de la notación, terminología y generalidades de conjuntos parcialmente ordenados (*copos*) y (*grandes*) retículas, categorías y funtores y del Álgebra Homológica, incluidas en los Apéndices A, B y C, respectivamente.

1. Anillos y módulos

En adelante, **todos los anillos que consideramos son asociativos con elemento unitario** (1). Asumimos las definiciones de (sub)anillo, ideal, anillo cociente, (sub)módulo y módulo cociente, así como las de homomorfismos de anillos y módulos, junto con sus propiedades básicas (tales como los teoremas de isomorfismo de Noether), limitándonos a presentar exclusivamente aquellas que resultan imprescindibles para la exposición de los resultados de este trabajo.

Sean R y S dos anillos. Un R -módulo izquierdo (derecho) M es *unitario* si $1x = x$ ($x1 = x$) para cada $x \in M$. Denotamos por $R\text{-Mod}$ a la clase de todos los R -módulos izquierdos unitarios y, por $\text{Mod-}S$, a la clase de todos los S -módulos

¹Para una consulta más detallada de los temas tratados en este capítulo, remitimos al lector a las excelentes referencias [1], [2] y [3].

derechos unitarios. Asimismo, se denota por R - S -Mod a la clase de todos los R - S -bimódulos; es decir, los R -módulos izquierdos M que son simultáneamente S -módulos derechos y tales que $r(xs) = (rx)s$ para cualesquiera $r \in R$, $s \in S$ y $x \in M$. Si $M \in R$ -Mod (respectivamente, $M \in \text{Mod-}S$, $M \in R$ - S -Mod), en algunas ocasiones escribiremos ${}_R M$ (respectivamente, M_S , ${}_R M_S$) para precisar la lateralidad del módulo M . En particular, denotaremos por ${}_R R$ (R_R) al módulo regular izquierdo (derecho); esto es, el anillo R visto como R -módulo izquierdo (derecho). En lo sucesivo, a menos que se mencione lo contrario, todos los módulos en consideración son izquierdos. Dado $M \in R$ -Mod, adoptamos la convención de denotar a un submódulo N de M como $N \leq M$. Algunos ejemplos de submódulos a los que nos referiremos frecuentemente a lo largo del trabajo son presentados a continuación. Para cada $M \in R$ -Mod existen los submódulos triviales M y $\{0\}$ (el cual suele denotarse simplemente por 0). Si $\{N_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos de M , entonces la *suma* $\sum_{i \in I} N_i = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mid x_k \in N_{i_k}, i_k \in I \text{ para cada } k \in \{1, \dots, n\}\}$ y la *intersección* $\bigcap_{i \in I} N_i := \{x \in M \mid x \in N_i \text{ para cada } i \in I\}$ son submódulos de M . Dado un homomorfismo de R -módulos (o R -homomorfismo) $f : M \rightarrow N$, el *núcleo de f* , $Nu(f)$, es el submódulo de M definido como $Nu(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$, mientras que la *imagen de f* , denotada indistintamente por $Im(f)$ o por $f(M)$, es el submódulo de N dado por $Im(f) = f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$. Si $N' \leq N$, entonces la *imagen inversa de N' bajo f* es el submódulo de M denotado y definido por $f^{-1}(N') = \{x \in M \mid f(x) \in N'\}$. Los submódulos del módulo regular ${}_R R$ (R_R) son sus ideales izquierdos (derechos), que se suelen denotar como ${}_R I \leq R$ ($I_R \leq R$).

Sea M un R -módulo. Un submódulo K de M se llama *esencial* en M si $K \cap L \neq 0$ para todo $0 \neq L \leq M$. Si $M \neq 0$, entonces M se dice *uniforme* si todos sus submódulos distintos de cero son esenciales en M . Un submódulo K de M se llama *superfluo* en M si $K + L \neq M$ para todo $L \leq M$, con $L \neq M$.

Como es usual, dados $M, N \in R$ -Mod, denotamos por $\text{Hom}_R(M, N)$ al conjunto de todos los R -homomorfismos $f : M \rightarrow N$. Un homomorfismo $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ es un *monomorfismo* (respectivamente, *epimorfismo*, *isomorfismo*) si f es inyectivo (respectivamente, suprayectivo, biyectivo). Se dice que los R -módulos M y N son *isomorfos* si existe un isomorfismo $M \rightarrow N$, en cuyo caso

se escribe $M \cong N$. Si $N \leq M$, un monomorfismo (epimorfismo) notable es la *inclusión natural* (*proyección natural*), usualmente denotada por $i : N \hookrightarrow M$ ($p : M \rightarrow M/N$) o por $N \xrightarrow{i} M$. Se reserva la notación id_M para el isomorfismo identidad $M \rightarrow M$. En general, denotamos indistintamente a un monomorfismo $g \in \text{Hom}_R(N, M)$ por $g : N \rightarrow M$ o por $0 \rightarrow N \xrightarrow{g} M$. Por su parte, denotamos a un epimorfismo $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ por $h : M \rightarrow N$, o bien, por $M \xrightarrow{h} N \rightarrow 0$. Un *monomorfismo* $f : M \rightarrow N$ se dice *esencial* si $\text{Im}(f)$ es esencial en N . Un *epimorfismo* $f : M \rightarrow N$ es *superfluo* si $\text{Nu}(f)$ es superfluo en M . Dado $L \in R\text{-Mod}$ ($\text{Mod-}R$), un *endomorfismo* de L es un R -homomorfismo izquierdo (derecho) $f : L \rightarrow L$. Como en [1], dado $M \in R\text{-Mod}$, denotamos por $\text{End}^r(M)$ al anillo de endomorfismos de M operando por la derecha. En este caso, se escribe $(ax)f = a((x)f)$ para cada endomorfismo $f : M \rightarrow M$ y para cualesquiera $x \in M$ y $a \in R$. Similarmente, para cada $N \in \text{Mod-}R$, se denota por $\text{End}^l(N)$ al anillo de endomorfismos de N operando por la izquierda, en cuyo caso se escribe $g(xa) = (g(x))a$ para cada endomorfismo $g : N \rightarrow N$ y para cualesquiera $x \in N$ y $a \in R$. Existen isomorfismos de anillos $\lambda : R \rightarrow \text{End}^l(R_R)$ tal que $(\lambda(a))(x) = ax$ y $\rho : R \rightarrow \text{End}^r({}_R R)$ tal que $(x)(\rho(a)) = xa$.

Presentamos a continuación un resultado auxiliar bien conocido.

LEMA 1.1. ([1, Proposición 4.5]) *Sea M un R -módulo. Para cada $x \in M$ consideremos los homomorfismos $d_x : R \rightarrow M$ tales que, para cada $r \in R$, $d_x(r) = rx$. Entonces $\text{Hom}_R(R, M) = \{d_x \mid x \in M\}$.*

Una sucesión de R -módulos y R -homomorfismos

$$\cdots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \rightarrow \cdots$$

es *exacta* si $\text{Nu}(f_n) = \text{Im}(f_{n-1})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Una *sucesión exacta corta* es cualquier sucesión exacta de la forma $E : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$. Se dice que la sucesión exacta corta E se *escinde* si g es un epimorfismo que se escinde; es decir, si existe un R -homomorfismo $g' : M \rightarrow L$ tal que $gg' = id_M$ (o, equivalentemente, si f es un monomorfismo que se escinde; esto es, si existe un R -homomorfismo $f' : L \rightarrow N$ tal que $f'f = id_N$).

Para cada $M \in R\text{-Mod}$, sea $\mathcal{S}(M) := \{N \subseteq M \mid N \leq M\}$. Es bien sabido que $\langle \mathcal{S}(M), \leq, \sum, \cap \rangle$ resulta una retícula completa (con elemento mayor M y elemento menor el submódulo 0), mejor conocida como la *retícula de submódulos de M* .

Ahora bien, cuando usamos el término *ideal*, en lugar del de *ideal izquierdo (derecho)*, significa que el ideal en cuestión es bilateral. Dado $M \in R\text{-Mod}$, un ideal de R sobresaliente es el *anulador izquierdo de M en R* , $(0 : M) := \{r \in R \mid rx = 0 \text{ para cada } x \in M\}$.² Si $x \in M$, entonces el *anulador izquierdo de x en R* es el ideal izquierdo $(0 : x) := \{r \in R \mid rx = 0\}$.³ Dados I un ideal izquierdo de un anillo R y $a \in R$, otro ideal izquierdo notable es el *ideal trasladado de I a través de a* , denotado y definido como $(I : a) := \{r \in R \mid ra \in I\}$. Por otra parte, dado un ideal derecho $I_R \leq R$, un miembro notable de la retícula $\mathcal{S}(M)$ es el *anulador derecho de I en M* , definido como $\mathbf{r}_M(I) = \{x \in M \mid rx = 0 \text{ para cada } r \in I\}$. $M \in R\text{-Mod}$ es *cíclico* si $M = Rx = \{rx \mid r \in R\}$ para algún $x \in M$. Todo ideal (izquierdo, derecho, bilateral) cíclico de un anillo se dice *principal*. Un resultado bien conocido relativo a los módulos cíclicos es el siguiente:

PROPOSICIÓN 1.2. ([1, Corolario 3.9]) *Un R -módulo M es cíclico si, y sólo si, M es isomorfo a un cociente de ${}_R R$. Si $M = Rx$ para algún $x \in M$, entonces $M \cong R/(0 : x)$.*

En lo subsecuente, al referirnos a un *dominio entero* asumiremos que es conmutativo. Si R es un dominio no conmutativo, diremos que R no tiene divisores de cero; tal es el caso de la Proposición 2.39.

Sean Z un dominio entero y $M \in Z\text{-Mod}$. El *submódulo de torsión* de M se define como $T(M) = \{x \in M \mid (0 : x) \neq 0\}$. Se dice que M es *de torsión* si $T(M) = M$ y que M es *libre de torsión* si $T(M) = 0$. Un submódulo N de M es *divisible* si $rN := \{ry \mid y \in N\} = N$ para cada $0 \neq r \in Z$; es decir, si dados $0 \neq r \in Z$ y $x \in N$ existe $y \in N$ tal que $ry = x$.

1.1. Suma y producto directos de módulos. Sean N, K submódulos de un R -módulo M . Se dice que M es la *suma directa (interna)* de N y K

²En algunos textos se denota a este ideal de R por $\text{ann}_R(M)$ o por $\mathbf{l}_R(M)$.

³También se denota a este ideal izquierdo de R como $\text{ann}_R(x)$.

si $N + K = M$ y $N \cap K = 0$. En este caso, se escribe $M = N \oplus K$. Una consecuencia inmediata es que todo elemento $x \in M = N \oplus K$ se escribe de manera única como $x = n + k$, con $n \in N$, $k \in K$. Un submódulo N de M es un *sumando directo* de M si existe $K \leq M$ tal que $M = N \oplus K$ (en tal caso, el submódulo K también es sumando directo de M y se suele decir que N y K son *sumandos directos complementarios*). Claramente los submódulos triviales 0 y M son sumandos directos del módulo M . Si $M \neq 0$, entonces se llama *inescindible* en caso de que 0 y M sean sus únicos sumandos directos.

La definición de suma directa interna puede generalizarse para una familia arbitraria de submódulos de un módulo dado como sigue. Decimos que una familia de R -módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ es *independiente* si, para cada $i \in I$, se tiene que $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = 0$. Dados $M \in R\text{-Mod}$ y $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{S}(M)$, si $M = \sum_{i \in I} M_i$ y $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia independiente, entonces se dice que M es la *suma directa* (interna) de $\{M_i\}_{i \in I}$ y se escribe $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Como consecuencia de la definición anterior, cada $0 \neq x \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ tiene una representación única como $x = m_1 + \cdots + m_r$ para alguna $r \geq 1$, con $0 \neq m_k \in M_{i_k}$ e $i_k \in I$ para cada $k \in \{1, \dots, r\}$.

Dada $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, el módulo resultante de considerar el producto cartesiano de dicha familia, con las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas componente a componente, se llama el *producto directo* de $\{M_i\}_{i \in I}$ y se denota por $\prod_{i \in I} M_i$. En particular, si $M_i = M$ para todo $i \in I$, entonces se escribe $M^I = \prod_{i \in I} M_i$. Si $I = \emptyset$, $\prod_{\emptyset} M_i = 0 = M^\emptyset$.

Para cada $j \in I$ se tiene un epimorfismo $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$, al que llamamos (j -ésima) *proyección canónica* del producto directo $\prod_{i \in I} M_i$ en M_j , tal que, para cada $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$, $\pi_j(x) = x(j) = x_j$.

La propiedad fundamental del producto directo, conocida como la *propiedad universal del producto*, se enuncia en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.3. ([1, Proposición 6.1]) *Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$. Sea $N \in R\text{-Mod}$ y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de homomorfismos $f_i : N \rightarrow M_i$ para cada $i \in I$. Entonces existe un único homomorfismo $f : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ tal que $\pi_i f = f_i$ para cada $i \in I$, donde π_i es la proyección canónica del producto directo $\prod_{i \in I} M_i$ en*

M_i . Es decir, el siguiente diagrama conmuta para cada $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xleftarrow{\pi_i} & \prod_{i \in I} M_i \\
 f_i \uparrow & \circlearrowleft & \nearrow f \\
 N & &
 \end{array}$$

OBSERVACIÓN 1.4. *El único homomorfismo $f : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ al que se refiere la proposición anterior está dado como sigue. Para cada $x \in N$, se define $f(x) \in \prod_{i \in I} M_i$ componente a componente por $\pi_i f(x) = f_i(x)$ para cada $i \in I$. Luego, como tanto π_i como f_i son homomorfismos para cada $i \in I$, f define un homomorfismo de N a $\prod_{i \in I} M_i$. El homomorfismo f , usualmente denotado por $\prod_I f_i$, se caracteriza por la propiedad $\pi_j(\prod_I f_i) = f_j$ para cada $j \in I$.*

De la observación anterior se sigue la útil propiedad que presentamos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.5. ([1, Corolario 6.2]) *Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$. Sea $N \in R\text{-Mod}$ y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de homomorfismos $f_i : N \rightarrow M_i$ para cada $i \in I$. Entonces $Nu(\prod_I f_i) = \bigcap_I Nu(f_i)$.*

Dados $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$ y $x \in \prod_{i \in I} M_i$, se define el *soporte* de x como el conjunto $sop(x) = \{i \in I \mid x(i) = x_i \neq 0\}$. La *suma directa (externa)* de $\{M_i\}_{i \in I}$ es el submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$ definido como $\bigoplus_{i \in I} M_i = \{x \in \prod_{i \in I} M_i \mid sop(x) \text{ es finito}\}$.⁴ En caso de que $M_i = M$ para todo $i \in I$, se escribe $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Claramente, si el conjunto de índices I es finito, se tiene que $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Para cada $j \in I$ se tiene un monomorfismo $\iota_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ tal que, para cada $x \in M_j$, $\iota_j(x)(i) = \delta_{ij}x$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Dado $j \in I$, el homomorfismo ι_j recibe el nombre de (j -ésima) *inclusión canónica* de M_j en la suma directa $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Enunciemos ahora la *propiedad universal de la suma directa* (externa):

⁴En algunas ocasiones se denota por $\dot{\bigoplus}_{i \in I} M_i$ a la suma directa externa para distinguirla de la suma directa interna.

PROPOSICIÓN 1.6. ([1, Proposición 6.7]) Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$. Sea $N \in R\text{-Mod}$ y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una clase de R -homomorfismos $f_i : M_i \rightarrow N$ para cada $i \in I$. Entonces existe un único homomorfismo $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ tal que $f \iota_i = f_i$ para cada $i \in I$, donde ι_i es la inclusión canónica de M_i en la suma directa $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para cada $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xrightarrow{\iota_i} & \bigoplus_{i \in I} M_i \\
 \downarrow f_i & \circlearrowleft & \swarrow f \\
 N & &
 \end{array}$$

OBSERVACIÓN 1.7. El homomorfismo $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ al que hace referencia la proposición anterior se define de la siguiente manera. Para cada $x = (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$, $f(x) = \sum_I f_i(x_i)$. Nótese que la definición anterior tiene sentido en vista de que $\text{sop}(x)$ es finito. Se suele escribir $f = \bigoplus_I f_i$.

La siguiente proposición se obtiene de inmediato a partir de la observación previa.

PROPOSICIÓN 1.8. ([1, Proposición 6.8]) Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$. Sea $N \in R\text{-Mod}$ y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una clase de R -homomorfismos $f_i : M_i \rightarrow N$ para cada $i \in I$. Si $f = \bigoplus_I f_i$, entonces $f \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) = \sum_I f_i(M_i)$.

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado técnico:

LEMA 1.9. Sean $M, M', N, N' \in R\text{-Mod}$. Supongamos que $M' \leq M$ y que $h : N' \rightarrow N$ es un R -homomorfismo. Sea $\mathcal{H} := \text{Hom}_R(N, M)$. Si $M' = \sum_{f \in \mathcal{H}} f h(N')$, entonces existe un epimorfismo $g : \bigoplus_{\mathcal{H}} N' \rightarrow M'$ que hace conmutar el siguiente diagrama para cada $f \in \mathcal{H}$:

(*)

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{\mathcal{H}} N' & \xrightarrow{g} & M' & \xrightarrow{i'} & M \\
 \uparrow \iota_f & \nearrow f' & & \nearrow & \\
 N' & & & & \\
 \downarrow h & \nearrow f & & & \\
 N & & & &
 \end{array}$$

donde i' es la inclusión natural, f' es la correstricción del morfismo fh a su imagen y el morfismo ι_f es la inclusión canónica de N' en $\bigoplus_{f \in \mathcal{H}} N'$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, notemos primero que, si $M' = \sum_{f \in \mathcal{H}} fh(N')$, entonces $fh(N') \leq M'$ para cada $f \in \mathcal{H}$; es decir, $f' : N' \rightarrow M'$ para cada $f \in \mathcal{H}$. Luego, por la propiedad universal de la suma directa, enunciada en la Proposición 1.6, existe un único R -homomorfismo $g : \bigoplus_{f \in \mathcal{H}} N' \rightarrow M'$ tal que $g\iota_f = f'$ para cada $f \in \mathcal{H}$, esto es, el siguiente diagrama conmuta para cada $f \in \mathcal{H}$:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mathcal{H}} N' & \xrightarrow{g} & M' \\ \iota_f \uparrow & \circlearrowleft & \nearrow f' \\ N' & & \end{array}$$

Más aún, por hipótesis y en virtud de la Observación 1.7 y de la Proposición 1.8, $M' = \sum_{f \in \mathcal{H}} fh(N') = \sum_{f \in \mathcal{H}} f'(N') = g(\bigoplus_{\mathcal{H}} N')$, de donde g es un epimorfismo. Finalmente, puesto que, por definición, $i'f' = fh$ para cada $f \in \mathcal{H}$, la conmutatividad del diagrama (*) se verifica, con lo que concluimos la demostración. \square

1.2. Módulos proyectivos e inyectivos. Un R -módulo P es *proyectivo* si para todo $f \in \text{Hom}_R(P, N)$ y para todo epimorfismo $g \in \text{Hom}_R(M, N)$ existe $h \in \text{Hom}_R(P, M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow h & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es decir, $gh = f$.

Por su parte, dado $E \in R\text{-Mod}$, se dice que E es *inyectivo* si para todo $f \in \text{Hom}_R(N, E)$ y para todo monomorfismo $g \in \text{Hom}_R(N, M)$ existe $h \in \text{Hom}_R(M, E)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow f & \swarrow h & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

es decir, $hg = f$.

Denotamos por \mathcal{E} a la clase de todos los R -módulos (izquierdos) inyectivos. Una pareja (E, i) es una *cápsula inyectiva* de M si E es un R -módulo inyectivo e $i \in \text{Hom}_R(M, E)$ es un monomorfismo esencial. En la práctica, se considera al monomorfismo esencial i asociado a una cápsula inyectiva como la inclusión natural, por lo que suele omitirse al hacer referencia a la misma.

Presentamos enseguida un resultado bien conocido:

TEOREMA 1.10. ([1, Teorema 18.10]) *Todo módulo tiene una cápsula inyectiva. Ésta es única salvo isomorfismo.*

Al ser cualesquiera dos cápsulas inyectivas de un R -módulo M isomorfas, se suele hablar de *la* cápsula inyectiva de M . Bajo esta convención, denotaremos por EM a la cápsula inyectiva de un R -módulo M .

PROPOSICIÓN 1.11. ([1, Proposición 18.2]) *Productos directos y sumandos directos de módulos inyectivos son inyectivos.*

1.3. Generar y cogenerar, la traza y el rechazo. Sea \mathcal{U} una clase de R -módulos. Un R -módulo M es (finitamente) *generado* por \mathcal{U} si existe un epimorfismo $\bigoplus_I U_i \rightarrow M \rightarrow 0$, con $\{U_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{U} para algún conjunto (finito) I . En caso de que $\mathcal{U} = \{U\}$, se dice que U genera (finitamente) a M , lo cual implica la existencia de un epimorfismo $U^{(I)} \rightarrow M \rightarrow 0$ para algún conjunto (finito) I . Dualmente, un R -módulo M es (finitamente) *cogenerado* por \mathcal{U} si existe un monomorfismo $0 \rightarrow M \rightarrow \prod_I U_i$, con $\{U_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{U} para algún conjunto (finito) I . Si $\mathcal{U} = \{U\}$, se dice que U cogenera (finitamente) a M , de donde existe un monomorfismo $0 \rightarrow M \rightarrow U^I$ para algún conjunto (finito) I . Se suele denotar por $\text{Gen}(\mathcal{U})$ a la clase de todos los R -módulos generados por \mathcal{U} y, por $\text{Cog}(\mathcal{U})$, a la clase de todos los R -módulos cogenerados por \mathcal{U} . Si $\mathcal{U} = \{U\}$, se denota por $\text{Gen}(U)$ ($\text{Cog}(U)$) a la clase generada (cogenerada) por el módulo U .

Un R -módulo G es un *generador de $\text{Gen}(\mathcal{U})$* si $\text{Gen}(\mathcal{U}) = \text{Gen}(G)$. Por su parte, un R -módulo C es un *cogenerador de $\text{Cog}(\mathcal{U})$* si $\text{Cog}(\mathcal{U}) = \text{Cog}(C)$. Un generador (cogenerador) de la clase $R\text{-Mod}$ se llama simplemente un *generador* (*cogenerador*).

Recordemos que un R -módulo es *simple* si es distinto de 0 y sus únicos submódulos son los triviales.

LEMA 1.12. (*Lema de Schur*)

Sean $S, T \in R\text{-Mod}$ y sea $f : S \rightarrow T$ un R -homomorfismo distinto de cero.

- (1) Si S es simple, entonces f es un monomorfismo.
- (2) Si T es simple, entonces f es un epimorfismo.
- (3) Si tanto S como T son simples, entonces f es un isomorfismo.

Es un hecho bien conocido que existe una correspondencia biunívoca entre las clases de isomorfismo de R -módulos simples y la clase de ideales izquierdos máximos de R . Si elegimos exactamente un representante de cada clase de isomorfismo de R -módulos simples, obtenemos un conjunto completo e irredundante.⁵ Denotamos por $R\text{-simp}$ a dicho conjunto.

La siguiente proposición muestra la existencia de cogeneradores en $R\text{-Mod}$.

PROPOSICIÓN 1.13. ([1, Corolario 18.16]) Sea $C_0 := \bigoplus_{R\text{-simp}} ES$. Entonces C_0 es un cogenerador de $R\text{-Mod}$. Más aún, para $C \in R\text{-Mod}$ son equivalentes las siguientes condiciones:

- (a) C es un cogenerador.
- (b) ES es isomorfo a un sumando directo de C para cada $S \in R\text{-simp}$.
- (c) C_0 es isomorfo a un submódulo de C .

En vista de la proposición anterior, se suele llamar a $C_0 = \bigoplus_{R\text{-simp}} ES$ el *cogenerador mínimo* en $R\text{-Mod}$. A continuación presentamos más ejemplos de generadores y cogeneradores.

EJEMPLO 1.14. ([1, Teorema 8.1 y ejemplos 8.2, 8.3]) Algunos ejemplos que ilustran los conceptos de generar y cogenerar son los siguientes:

- (1) Sea $A \in \mathbb{Z}\text{-Mod}$. Entonces $\{\mathbb{Z}_n \mid n > 1\}$ genera a A si, y sólo si, A es de torsión. Por su parte, \mathbb{Q} cogenera a A si, y sólo si, A es libre de torsión.
- (2) Sea $M \in R\text{-Mod}$. El anillo R genera a M y $\prod_{R\text{-simp}} ES$ cogenera a M .

Una propiedad notable de los módulos finitamente cogenerados es la siguiente.

⁵Véase la Sección 3 del Apéndice A.

PROPOSICIÓN 1.15. ([1, Proposición 18.18]) *Un R -módulo M es finitamente cogenerado si, y sólo si, $EM \cong ES_1 \oplus \cdots \oplus ES_n$ para algún conjunto finito $\{S_1, \dots, S_n\}$ de R -módulos simples.*

Sea \mathcal{U} una clase de R -módulos y sea $M \in R\text{-Mod}$. La *traza* de M respecto a \mathcal{U} es el submódulo de M definido y denotado por:

$$Tr_{\mathcal{U}}(M) := \sum \{f(U) \mid f \in \text{Hom}_R(U, M), U \in \mathcal{U}\}.$$

Por su parte, el *rechazo* de M respecto a \mathcal{U} es el submódulo de M dado por:

$$Rej_{\mathcal{U}}(M) := \bigcap \{Nu(g) \mid g \in \text{Hom}_R(M, U), U \in \mathcal{U}\}.$$

En palabras, la traza de M respecto a \mathcal{U} es el mayor submódulo L de M tal que $L \in \text{Gen}(\mathcal{U})$ y el rechazo de M respecto a \mathcal{U} es el menor submódulo K de M tal que $M/K \in \text{Cog}(\mathcal{U})$. Como consecuencia directa de lo anterior se tiene la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.16. ([1, Corolario 8.13]) *Sea \mathcal{U} una clase de R -módulos y sea $M \in R\text{-Mod}$. Entonces:*

- (1) $M \in \text{Gen}(\mathcal{U})$ si, y sólo si, $Tr_{\mathcal{U}}(M) = M$.
- (2) $M \in \text{Cog}(\mathcal{U})$ si, y sólo si, $Rej_{\mathcal{U}}(M) = 0$.

Presentamos enseguida algunas propiedades notables de la traza y el rechazo.

PROPOSICIÓN 1.17. ([1, Proposición 8.16]) *Sea \mathcal{U} una clase de R -módulos. Dados $M, N \in R\text{-Mod}$ y $h \in \text{Hom}_R(M, N)$, se cumple lo siguiente:*

- (1) $h(Tr_{\mathcal{U}}(M)) \leq Tr_{\mathcal{U}}(N)$.
- (2) $h(Rej_{\mathcal{U}}(M)) \leq Rej_{\mathcal{U}}(N)$.

El resultado que presentamos a continuación se sigue de la Proposición 1.16.

PROPOSICIÓN 1.18. *Sea \mathcal{U} una clase de R -módulos y sea $M \in R\text{-Mod}$. Entonces:*

- (1) $Tr_{\mathcal{U}}(Tr_{\mathcal{U}}(M)) = Tr_{\mathcal{U}}(M)$.
- (2) $Rej_{\mathcal{U}}(M/Rej_{\mathcal{U}}(M)) = 0$.

OBSERVACIÓN 1.19. *Sea \mathcal{U} una clase de R -módulos y sea V un conjunto completo e irredundante de representantes de clases de isomorfismo de \mathcal{U} . Entonces, dado $M \in R\text{-Mod}$, se tiene que $\text{Tr}_{\mathcal{U}}(M) = \text{Tr}_V(M)$ y $\text{Rej}_{\mathcal{U}}(M) = \text{Rej}_V(M)$.*

En particular, si \mathcal{U} es la clase de todos los R -módulos simples, entonces la traza y el rechazo de M respecto a \mathcal{U} corresponden a dos submódulos de M de fundamental importancia, mejor conocidos como el *zoclo* y el *radical* (de Jacobson) de M , respectivamente. Se suele denotar por $\text{Zoc}(M)$ al zoclo de M y, por $\text{Rad}(M)$, al radical de M . Como consecuencia inmediata del Lema de Schur se obtiene la siguiente caracterización de los mismos.

PROPOSICIÓN 1.20. ([1, Propositiones 9.7 y 9.13]) *Sea $M \in R\text{-Mod}$. Entonces:*

- (1) $\text{Zoc}(M) = \sum\{S \leq M \mid S \text{ es simple}\}$.
- (2) $\text{Rad}(M) = \bigcap\{K \leq M \mid K \text{ es máximo en } M\}$.

En el caso específico del radical (de Jacobson) del anillo, denotado como $\text{Rad}({}_R R)$ o, simplemente, por J , éste resulta ser un ideal muy notable de R . De hecho, existen múltiples caracterizaciones del mismo (véase, por ejemplo, [1, Teorema 15.3]), de las cuales se sigue que $\text{Rad}({}_R R) = \text{Rad}(R_R)$.

1.4. Módulos artinianos y noetherianos. Un *copo* $\langle P, \leq \rangle$ satisface la *condición de cadena ascendente* si para toda cadena $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ en P existe $n \geq 1$ tal que $a_n = a_{n+i}$ para cada $i \geq 1$. De manera dual, invirtiendo el sentido de las desigualdades en la cadena anterior, se define la *condición de cadena descendente* sobre el *copo* P . Equivalentemente, el *copo* P satisface la condición de cadena ascendente (descendente) si todo conjunto no vacío de P tiene un elemento máximo (mínimo).

Un R -módulo M es *artiniano* (*noetheriano*) si la retícula $\mathcal{S}(M)$ satisface la condición de cadena descendente (ascendente).

A continuación presentamos caracterizaciones para los módulos noetherianos y artinianos.

PROPOSICIÓN 1.21. ([1, Proposición 10.9]) *Para $M \in R\text{-Mod}$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (a) M es noetheriano.
- (b) Todo submódulo de M es finitamente generado.
- (c) Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento máximo.

PROPOSICIÓN 1.22. ([1, Proposición 10.10]) Para $M \in R\text{-Mod}$ son equivalentes las siguientes condiciones:

- (a) M es artiniiano.
- (b) Todo módulo cociente de M es finitamente cogenerado.
- (c) Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento mínimo.

Algunas propiedades de los módulos artinianos y noetherianos se presentan en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.23. ([1, Proposición 10.12 y Corolario 10.13]) Sea $M \in R\text{-Mod}$. Se cumplen las siguientes propiedades.

- (1) Sea $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $R\text{-Mod}$. Entonces M es artiniiano (noetheriano) si, y sólo si, K y N son artinianos (noetherianos).
- (2) Sean $M_1, M_2, \dots, M_n \in R\text{-Mod}$ tales que $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$. Entonces M es artiniiano (noetheriano) si, y sólo si, M_i es artiniiano (noetheriano) para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Un anillo R se llama *artiniiano izquierdo (derecho)* si ${}_R R$ (R_R) es artiniiano. De manera similar, un anillo R se llama *noetheriano izquierdo (derecho)* si ${}_R R$ (R_R) es noetheriano. Enseguida enunciamos caracterizaciones para los anillos artinianos y noetherianos.

PROPOSICIÓN 1.24. ([1, Proposición 10.18]) Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) R es artiniiano izquierdo (derecho).
- (b) R tiene un generador artiniiano.
- (c) Todo $M \in R\text{-Mod}$ ($M \in \text{Mod-}R$) finitamente generado es artiniiano.
- (d) Todo $M \in R\text{-Mod}$ ($M \in \text{Mod-}R$) finitamente generado es finitamente cogenerado.

PROPOSICIÓN 1.25. ([1, Proposición 10.19]) *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *R es noetheriano izquierdo (derecho).*
- (b) *R tiene un generador noetheriano.*
- (c) *Todo $M \in R\text{-Mod}$ ($M \in \text{Mod-}R$) finitamente generado es noetheriano.*
- (d) *Todo submódulo de un módulo izquierdo (derecho) finitamente generado es finitamente generado.*

Una *serie de composición* para un R -módulo M es una cadena $0 = M_0 < M_1 < \dots < M_n = M$ en $R\text{-Mod}$ tal que M_i/M_{i-1} es un módulo simple para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Al entero n se le llama la *longitud* de la serie de composición.

PROPOSICIÓN 1.26. ([1, Proposición 11.1]) *Un R -módulo M tiene serie de composición si, y sólo si, M es artiniiano y noetheriano.*

Sea $M \in R\text{-Mod}$ y supongamos que $0 = M_0 < M_1 < \dots < M_n = M$ y $0 = N_0 < N_1 < \dots < N_p = M$ son series de composición para M . Se dice que las dos series son *equivalentes* si $n = p$ y existe una permutación s de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que el módulo cociente M_i/M_{i-1} es isomorfo al módulo $N_{s(i)}/N_{s(i)-1}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

TEOREMA 1.27. (*Teorema de Jordan-Hölder*)

Si un módulo M tiene una serie de composición, entonces cualquier par de series de composición para M son equivalentes.

TEOREMA 1.28. (*Hopkins-Levitzki*)

Todo anillo artiniiano izquierdo es noetheriano izquierdo.

1.5. Equivalencia de Morita. Dados dos anillos R y S , se dice que son *Morita equivalentes* si las categorías $R\text{-Mod}$ y $S\text{-Mod}$ son equivalentes; es decir, si existen funtores $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ tales que los funtores GF y FG son naturalmente isomorfos a los funtores identidad en $R\text{-Mod}$ y en $S\text{-Mod}$, respectivamente.

TEOREMA 1.29. ([1, 21.1 y Lema 21.3]) *Sean R y S anillos Morita equivalentes. Sean $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ equivalencias inversas,*

con isomorfismos naturales $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{S\text{-Mod}}$ y $\eta : 1_{R\text{-Mod}} \rightarrow GF$. Entonces, para cada $M \in R\text{-Mod}$ y para cada $N \in S\text{-Mod}$, existen isomorfismos de grupos abelianos $\phi_{MN} : \text{Hom}_R(M, GN) \rightarrow \text{Hom}_S(FM, N)$ y $\theta_{MN} : \text{Hom}_S(FM, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, GN)$, definidos de la siguiente manera. Para cada $f \in \text{Hom}_R(M, GN)$, $\phi_{MN}(f) = \varepsilon_N F(f)$ y, para cada $g \in \text{Hom}_S(FM, N)$, $\theta_{MN}(g) = G(g)\eta_M$. El isomorfismo natural η determina una pareja de \mathbb{Z} -isomorfismos similar a ϕ_{MN} y θ_{MN} .

Sea R un anillo y sea $n \geq 1$. Denotamos por $\mathbb{M}_n(R)$ al anillo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en R . A continuación se presenta un ejemplo bien conocido de anillos equivalentes según Morita.

PROPOSICIÓN 1.30. ([1, Corolario 22.6]) *Sea R un anillo y sea $n \geq 1$. Entonces R y $\mathbb{M}_n(R)$ son Morita equivalentes.*

La siguiente proposición reúne algunas de las propiedades más notables de los anillos Morita equivalentes.

PROPOSICIÓN 1.31. ([1, Proposiciones 21.4 - 21.8]) *Sean R y S anillos y sea $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ una equivalencia de categorías. Entonces F preserva:*

- (1) *sucesiones exactas cortas (que se escinden);*
- (2) *productos y sumas directas;*
- (3) *módulos proyectivos e inyectivos;*
- (4) *generadores y cogeneradores;*
- (5) *monomorfismos (esenciales) y epimorfismos (superfluos);*
- (6) *cápsulas inyectivas;*
- (7) *módulos simples, artinianos y noetherianos, finitamente (co)generados e inescindibles.*

Sea $f : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos y sea $M \in S\text{-Mod}$. Entonces se induce en M una estructura de R -módulo via la multiplicación por escalares dada por $rx = f(r)x$ para cada $r \in R$ y para cada $x \in M$. En tal caso, se suele denotar por ${}_R M$ y ${}_S M$ al módulo M , visto como R -módulo y como S -módulo, respectivamente, y se tiene que $\mathcal{S}({}_S M) \subseteq \mathcal{S}({}_R M)$. En el caso particular

de la proyección natural $\pi_I : R \rightarrow R/I$ para un ideal I de R , si $N \in R\text{-Mod}$ e $I \subseteq (0 : N)$, se cumple que $\mathcal{S}({}_R N) = \mathcal{S}({}_{R/I} N)$.

OBSERVACIÓN 1.32. *Si R y S son anillos isomorfos, entonces R y S son Morita equivalentes. De hecho, si $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ son los funtores que representan la equivalencia entre las categorías $R\text{-Mod}$ y $S\text{-Mod}$, entonces $F({}_R M) = {}_S M$ para cada R -módulo M y $G({}_S N) = {}_R N$ para cada S -módulo N .*

2. Descomposición de anillos

Sea R un anillo. Un elemento $r \in R$ es *central* si $rs = sr$ para cada $s \in R$. El *centro* de R , denotado por $\mathcal{Z}(R)$, es el conjunto de todos los elementos centrales de R y es un subanillo de R . Un elemento $e \in R$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Dos idempotentes $e, f \in R$ son *ortogonales* si $ef = fe = 0$. Se dice que $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq R$ es un *conjunto completo de idempotentes ortogonales* si los elementos e_i son idempotentes y ortogonales (dos a dos)⁶ y, además, cumplen la condición $1 = e_1 + \dots + e_n$. Un idempotente $e \in R$ se llama *primitivo* si e no puede escribirse como una suma de la forma $e = e_1 + e_2$, con e_1, e_2 idempotentes ortogonales distintos de cero de R .

OBSERVACIÓN 1.33. ([1, 1.16 y pág. 98]) *Sean R un anillo y $e \in R$ un idempotente central. Entonces $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ tiene estructura de anillo con elemento unitario e . Más aún, se verifican las igualdades $Re = eR = eRe$.*

PROPOSICIÓN 1.34. [1, Proposición 7.6] *Sean I_1, \dots, I_n ideales distintos de cero de un anillo R . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) ${}_R R = \bigoplus_{i=1}^n I_i$.
- (b) *Como grupo abeliano, R es la suma directa de I_1, \dots, I_n .*
- (c) *Existe un conjunto completo de idempotentes ortogonales y centrales $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq R$, tales que $I_i = Re_i = e_i Re_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

OBSERVACIÓN 1.35. ([1, pág. 98]) *Sean R_1, \dots, R_n anillos y sea R el anillo que resulta de considerar el producto cartesiano $R_1 \times \dots \times R_n$ o $\prod_{i=1}^n R_i$, con*

⁶es decir, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, para $i, j = 1, \dots, n$

las operaciones definidas componente a componente. Para cada $j = 1, \dots, n$, sea $\iota_j : R_j \rightarrow R$ la j -ésima inyección canónica. Entonces, dado $j \in \{1, \dots, n\}$, el anillo $\iota_j(R_j)$ es isomorfo al anillo R_j . Además, ${}_R R = \bigoplus_{j=1}^n \iota_j(R_j)$, donde $\iota_1(R_1), \dots, \iota_n(R_n)$ son ahora vistos como ideales de R . En este caso, los idempotentes centrales asociados son precisamente $\iota_1(1_{R_1}), \dots, \iota_n(1_{R_n})$, con 1_{R_i} el elemento unitario del anillo R_i para cada $i = 1, \dots, n$.

Sea R un anillo. Si $R = R_1 \times \dots \times R_n$ para algunos anillos R_1, \dots, R_n , se suele llamar a $R_1 \times \dots \times R_n$ una *descomposición de anillos* de R . El anillo R se llama *inescindible* (como anillo) si no admite una descomposición de anillos con más de un factor. Equivalentemente, R es inescindible si, y sólo si, los únicos idempotentes centrales de R son 0 y 1.

Como consecuencia de la última proposición se tiene la observación que presentamos enseguida.

OBSERVACIÓN 1.36. Sean R_1, \dots, R_n ideales distintos de cero de un anillo R . Si ${}_R R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$, entonces cada $M \in R\text{-Mod}$ tiene la descomposición canónica $M = \bigoplus_{i=1}^n e_i M$, con $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq R$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales.

La siguiente proposición, cuya demostración es inmediata, nos será muy útil más adelante.

PROPOSICIÓN 1.37. Sean R_1, \dots, R_n ideales distintos de cero de un anillo R y sea ${}_R R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$. Por la Proposición 1.34, existe un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales $\{e_1, \dots, e_n\}$ en R , tales que $R_i = Re_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Luego, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que, si $M_i \in R_i\text{-Mod}$, entonces, para cada $j = 1, \dots, n$,

$$e_j M_i = \begin{cases} M_i, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

como R -módulos.

3. Algunos anillos específicos

En esta sección se introducen varias clases de anillos ampliamente conocidos, a los que haremos referencia más adelante, así como algunas de sus propiedades más representativas. Tal es el caso de los anillos semisimples, los anillos locales uniseriales y los anillos hereditarios, de los cuales nos ocuparemos en el Capítulo 2, así como de los anillos puros semisimples. Relacionados con esta última clase de anillos se encuentran ciertos funtores, llamados *p-funtores*, que han resultado ser de gran utilidad para nuestros propósitos, como se puede apreciar en la Sección 2 del Capítulo 4. Finalmente, dedicamos una pequeña subsección a los anillos de matrices triangulares formales, cuyas propiedades nos permiten exhibir el ejemplo del cual trata el Capítulo 3.

3.1. Anillos semisimples. Un R -módulo M se llama *semisimple* si $M = \sum\{S \leq M \mid S \text{ simple}\}$. Como consecuencia inmediata de la Proposición 1.20 se tiene la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 1.38. *Un R -módulo M es semisimple si, y sólo si, $Zoc(M) = M$.*

PROPOSICIÓN 1.39. ([1, Lema 9.2]) *Sean R un anillo y $M \in R\text{-Mod}$. Si M es semisimple, entonces existe una familia independiente $\{S_i\}_{i \in I}$ de submódulos de M simples tales que $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$.*

PROPOSICIÓN 1.40. ([1, Proposición 9.4]) *Si $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta en $R\text{-Mod}$ y M es un módulo semisimple, entonces tanto K como N son módulos semisimples.*

OBSERVACIÓN 1.41. *Una propiedad sobresaliente de $R\text{-simp}$, cuya prueba es inmediata a partir del Lema de Schur, es que sus elementos son “homológicamente independientes”; es decir, dados $S, T \in R\text{-simp}$, $S \neq T$, se cumple que $\text{Hom}_R(S, T) = 0$.*

OBSERVACIÓN 1.42. *Sea ${}_R J$ un ideal izquierdo máximo de R . Entonces $S := R/J$ es un R -módulo simple tal que $\bigcap_{a \in R} (J : a) = (0 : S)$, ya que, dado $a \in R$, $(J : a)$ coincide con el anulador izquierdo en R de $a + J \in R/J$. Más aún, si*

I es un ideal de R tal que $I \leq J$, para cada $a \in R$ se tiene que $I \leq (I : a)$. Luego, puesto que $(I : a) \leq (J : a)$ para todo $a \in R$, se sigue de lo anterior que $I = \bigcap_{a \in R} (J : a) = (0 : S)$.

Decimos que un anillo R es *simple* si sus únicos ideales son 0 y R . Se dice que R es *semisimple izquierdo* si el módulo regular ${}_R R$ es semisimple. De manera análoga se definen los anillos semisimples derechos.

OBSERVACIÓN 1.43. *Si R es un anillo semisimple izquierdo, entonces R es una suma de un número finito de ideales izquierdos simples o mínimos, pues los submódulos de ${}_R R$ son sus ideales izquierdos y R es un anillo con 1. Se sigue de lo anterior que $|R\text{-simp}| = n$ para algún $n \geq 1$.*

PROPOSICIÓN 1.44. ([1, Proposición 13.5]) *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

- (a) R es simple y artiniano izquierdo.
- (b) R es simple y artiniano derecho.
- (c) R es simple y ${}_R R$ es semisimple.
- (d) R es simple y R_R es semisimple.

TEOREMA 1.45. (*Wedderburn-Artin*)

Un anillo R es semisimple izquierdo (derecho) si, y sólo si, es un producto directo finito de anillos simples artinianos izquierdos (derechos).

OBSERVACIÓN 1.46. *Como consecuencia del Teorema de Wedderburn-Artin y de la Proposición 1.44, todo anillo semisimple izquierdo es semisimple derecho. En vista de lo anterior, se suele prescindir de los adjetivos “izquierdo” y “derecho” al hacer referencia a dichos anillos.*

COROLARIO 1.47. *Todo anillo semisimple es artiniano izquierdo (derecho).*

Si bien todo anillo semisimple resulta artiniano, en algunos textos se suele llamar a estos anillos *semisimples artinianos* para distinguirlos de otras interpretaciones (véase, por ejemplo, [52, pág. 169]).

PROPOSICIÓN 1.48. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) R es semisimple.
- (b) Todo R -módulo es semisimple.
- (c) Toda sucesión exacta corta se escinde.
- (d) Todo R -módulo es inyectivo.
- (e) Todo R -módulo es proyectivo.
- (f) $R \cong \prod_{i=1}^m \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$, donde D_i es anillo con división y $n_i \geq 1$ para cada $i = 1, \dots, m$.

OBSERVACIÓN 1.49. La condición (f) de la proposición anterior es el famoso Teorema de Estructura de Wedderburn-Artin.

Un resultado muy celebrado de Barbara Osofsky que caracteriza a los anillos semisimples es el siguiente:

TEOREMA 1.50. [46] Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :

- (a) R es un anillo semisimple.
- (b) Todo R -módulo finitamente generado es inyectivo.
- (c) Todo R -módulo cíclico es inyectivo.

3.2. Anillos locales uniseriales y artinianos principales. Recordemos que un anillo es *local* si tiene un único ideal izquierdo máximo. Las siguientes definiciones se encuentran en las referencias [17], [21] y [22]. Un anillo es *completamente primario* si es un anillo local y artiniano izquierdo (o derecho). Un anillo R es *primario* si $R \cong \mathbb{M}_n(S)$, con S un anillo completamente primario. Un anillo *uniserial izquierdo generalizado* es un anillo artiniano izquierdo R con la propiedad de que todo ideal izquierdo principal inescindible de R tiene una única serie de composición como R -módulo izquierdo. Un anillo *uniserial izquierdo* es un anillo uniserial izquierdo generalizado tal que es producto directo finito de anillos primarios. Un anillo *uniserial* es un anillo uniserial tanto izquierdo como derecho. Un anillo R es *artiniano principal*⁷ si R es un anillo artiniano izquierdo y derecho y R es un anillo de ideales principales izquierdos y derechos. Un anillo es *casi-Frobenius* si R es un anillo artiniano tal que todo ideal izquierdo y derecho

⁷o artiniano de ideales principales

es un anulador. Se dice que un anillo R es *de Köthe* si todo R -módulo izquierdo y derecho es una suma directa de submódulos cíclicos.

En [38], G. Köthe prueba el siguiente resultado:

TEOREMA 1.51. *Todo anillo uniserial es un anillo de Köthe.*

El siguiente teorema ofrece algunas caracterizaciones de los anillos uniseriales.

TEOREMA 1.52. [17, Teorema 4.1] *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) R es uniserial.
- (b) R es un anillo artiniano principal.
- (c) R es un anillo de ideales principales izquierdos y casi-Frobenius.
- (d) R es uniserial izquierdo y casi-Frobenius.

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente resultado:

COROLARIO 1.53. *Sea R un anillo local uniserial. Entonces la retícula de ideales izquierdos (derechos) de R es una cadena finita $0 = J^n < J^{n-1} < \dots < J^2 < J < R$, donde J es el radical de Jacobson de R y $n \geq 1$.*

OBSERVACIÓN 1.54. *Nótese que la cadena a la que hace referencia el corolario anterior es precisamente la (única) serie de composición (de longitud n) tanto de ${}_R R$ como de R_R . Luego, gracias al corolario anterior, es posible hacer un refinamiento del Teorema 1.51.*

COROLARIO 1.55. [21, Corolario 3.2] *Sea R un anillo local uniserial. Entonces todo R -módulo es isomorfo a una suma directa de ideales de R .*

DEMOSTRACIÓN. En vista del Teorema 1.51, basta con probar que todo R -módulo cíclico es isomorfo a un ideal de R . Así, sea Rx un módulo cíclico. Entonces $(0 : x) = J^s$ para algún $0 \leq s \leq n$. Ahora, como R es un anillo de ideales principales, $J^{n-s} = Ry$ para algún $y \in R$. Por lo tanto, $J^s = (0 : J^{n-s}) = (0 : y)$, de donde $Rx \cong Ry = J^{n-s}$. \square

Los anillos del tipo \mathbb{Z}_{p^n} , donde p es un número primo y $n \geq 1$, proveen ejemplos familiares de anillos locales uniseriales.

3.3. Anillos puros semisimples. En la subsección anterior presentamos la definición de los anillos de Köthe. Una generalización de esta clase de anillos, propuesta por el Dr. Rogelio Fernández-Alonso, es la siguiente. Dado un conjunto de R -módulos izquierdos (derechos) \mathcal{I} , un anillo R es \mathcal{I} -Köthe izquierdo (derecho) si todo R -módulo izquierdo (derecho) es isomorfo a una suma directa de R -módulos en \mathcal{I} . Un anillo R es \mathcal{I} -Köthe si es \mathcal{I} -Köthe izquierdo y derecho. Además de los anillos de Köthe, los anillos semisimples y los locales uniseriales son algunos ejemplos de anillos \mathcal{I} -Köthe para algún conjunto de R -módulos \mathcal{I} .

De acuerdo con [13], un monomorfismo $f : N \rightarrow M$ en R -Mod es *puro* si el morfismo inducido $id_L \otimes f : L \otimes_R N \rightarrow L \otimes_R M$ es inyectivo para cada $L \in \text{Mod-}R$. Una sucesión exacta corta $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \rightarrow 0$ en R -Mod es *pura exacta* si el monomorfismo f es puro. Por su parte, $M \in R$ -Mod se llama *puro inyectivo* si el funtor $\text{Hom}_R(-, M)$ preserva la exactitud de sucesiones exactas puras. Se puede construir una teoría homológica basada en resoluciones inyectivas puras, en analogía con las teorías homológicas usuales. En particular, tiene sentido considerar la *dimensión inyectiva pura* de un módulo y de este modo definir la *dimensión global pura* de un anillo R como el supremo de las dimensiones inyectivas puras de sus R -módulos izquierdos. Se dice que un anillo R es *puro semisimple izquierdo* si la dimensión pura global izquierda de R es cero. Equivalentemente, un anillo R es puro semisimple izquierdo si toda sucesión pura exacta en R -Mod se escinde.

Ahora, consideremos el sistema de ecuaciones:

$$(\S) \quad \sum_{j \in J} r_{ij} X_j = m_i, \quad (i \in I),$$

donde $(r_{ij})_{i \in I, j \in J}$ es una matriz con entradas en R , con $|J| < \infty$ y tal que $m_i \in M$ para cada $i \in I$. Se dice que el sistema (§) es *finitamente soluble en M* si, para cada $I' \subseteq I$ finito, el subsistema $\sum_{i \in I'} r_{ij} X_j = m_i$, con $i \in I'$, es soluble en M . Siguiendo a [36], $M \in R$ -Mod es *algebraicamente compacto* si cualquier sistema de la forma (§) y finitamente soluble en M tiene una solución global en M . Finalmente, un R -módulo M es Σ -*algebraicamente compacto* si toda suma directa de copias de M es algebraicamente compacto.

Sea R un anillo tal que todo R -módulo izquierdo (derecho) es una suma directa de módulos finitamente generados. Nos referiremos a dichos anillos como *F.G.-Köthe izquierdos (derechos)*. Claramente todo anillo F.G.-Köthe izquierdo (derecho) es \mathcal{I} -Köthe izquierdo (derecho), con \mathcal{I} un conjunto completo e irredundante de representantes de módulos finitamente generados. Más aún, como consecuencia del siguiente teorema (específicamente, del inciso (b)), las clases de anillos \mathcal{I} -Köthe izquierdos (derechos) y F.G.-Köthe izquierdos (derechos) coinciden.

Dados un anillo R y un cardinal κ , se dice que un R -módulo M es κ -generado si existe un conjunto $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$, con $|I| = \kappa$, que genera a M .

TEOREMA 1.56. ([36, Teorema 13]) *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *Todo R -módulo izquierdo es una suma directa de módulos finitamente generados.*
- (b) *Existe un cardinal \aleph tal que todo R -módulo izquierdo es una suma directa de módulos \aleph -generados.*
- (c) *Todo R -módulo izquierdo es una suma directa de módulos inescindibles.*
- (d) *Todo R -módulo izquierdo es algebraicamente compacto.*

COROLARIO 1.57. *Todo anillo \mathcal{I} -Köthe izquierdo es F.G.-Köthe izquierdo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que R es un anillo \mathcal{I} -Köthe izquierdo, con $\mathcal{I} \subseteq R\text{-Mod}$. Consideremos el conjunto de cardinales $\mathcal{I}^* = \{|M| \mid M \in \mathcal{I}\}$. Nótese que \mathcal{I}^* está acotado superiormente; es decir, existe un cardinal \aleph tal que $\kappa \leq \aleph$ para cada $\kappa \in \mathcal{I}^*$ (de lo contrario, los cardinales formarían un conjunto). Se sigue que todo R -módulo izquierdo es una suma directa de módulos \aleph -generados, de donde, por el teorema anterior, se concluye que R es F.G.-Köthe izquierdo. \square

TEOREMA 1.58. ([36, Teorema 1]) *Para $M \in R\text{-Mod}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *M es puro inyectivo.*
- (b) *M es algebraicamente compacto.*

TEOREMA 1.59. ([36, Teorema 10]) *Para $M \in R\text{-Mod}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *Existe un cardinal \aleph tal que todo producto directo de copias de M es una suma directa de módulos \aleph -generados.*
- (b) *M es Σ -algebraicamente compacto.*

En resumen:

COROLARIO 1.60. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *R es \mathcal{I} -Köthe izquierdo.*
- (b) *R es F.G.-Köthe izquierdo.*
- (c) *Existe un cardinal \aleph tal que todo R -módulo izquierdo es una suma directa de módulos \aleph -generados.*
- (d) *Todo R -módulo izquierdo es una suma directa de módulos inescindibles.*
- (e) *Todo R -módulo izquierdo es algebraicamente compacto.*
- (f) *Todo R -módulo izquierdo es Σ -algebraicamente compacto.*
- (g) *Todo R -módulo izquierdo es puro inyectivo.*
- (h) *R es puro semisimple izquierdo.*

COROLARIO 1.61. *Todo anillo puro semisimple izquierdo es un anillo F.G.-Köthe izquierdo.*

La siguiente proposición nos ofrece un camino alternativo para intentar llegar a nuestra meta, a partir de condiciones aparentemente más débiles que las recopiladas en el resultado anterior.

PROPOSICIÓN 1.62. ([35, Observación 7]) *Sea R un anillo. Si tanto R como $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ son Σ -algebraicamente compactos como R -módulos izquierdos, entonces R es artiniiano izquierdo.*

OBSERVACIÓN 1.63. *En [10, Teorema 4.4], S. U. Chase, generalizando un resultado de I. S. Cohen e I. Kaplansky establecido en [12], prueba que todo anillo F.G.-Köthe (equivalentemente, puro semisimple izquierdo) es artiniiano izquierdo. Cabe mencionar que las clases de anillos F.G.-Köthe y artiniianos izquierdos no coinciden. De hecho, C. Ringel construyó un ejemplo de anillo artiniiano*

(izquierdo y derecho) cuya dimensión global pura es estrictamente mayor que cero.⁸

3.3.1. *p-Funtores.* Una interesante caracterización para los módulos Σ -algebraicamente compactos involucra a los siguientes funtores.⁹

DEFINICIÓN 1.64. Un p-functor sobre $R\text{-Mod}$ es un subfunctor P del funtor que olvida $R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ tal que:

- (i) Para cada $M \in R\text{-Mod}$, $P(M) \leq M$.
- (ii) Para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$, $f(P(M)) \leq P(N)$.
- (iii) Para cada familia $\{M_i\}_{i \in I}$ en $R\text{-Mod}$, $P(\prod_{i \in I} M_i) = \prod_{i \in I} P(M_i)$.

DEFINICIÓN 1.65. Una matriz punteada sobre R es una pareja (\mathcal{A}, α) , donde \mathcal{A} es una matriz $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ tal que $a_{ij} \in R$, $|J| < \infty$ y $\alpha \in J$. Ahora bien, dada una matriz punteada (\mathcal{A}, α) , se define el p -functor $[\mathcal{A}, \alpha] : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ (llamado funtor matricial) como sigue. Para cada $M \in R\text{-Mod}$, el subgrupo $[\mathcal{A}, \alpha](M)$ es la α -ésima proyección del conjunto solución en M del siguiente sistema homogéneo:

$$(\S\S) \quad \sum_{j \in J} a_{ij} X_j = 0 \text{ para cada } i \in I.$$

Es decir,

$$[\mathcal{A}, \alpha](M) = \{m \in M \mid \exists \text{ una solución } (m_j) \in M^J \text{ del sistema } (\S\S) \text{ con } m_\alpha = m\}.$$

OBSERVACIÓN 1.66. ([36, Observación 3]) Dado un funtor matricial $[\mathcal{A}, \alpha] : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$, se tiene que $[\mathcal{A}, \alpha] = \text{Hom}_R(P, -)(p)$ para algunos $P \in R\text{-Mod}$ y $p \in P$, donde, para cada $M \in R\text{-Mod}$, $\text{Hom}_R(P, M)(p) = \{f(p) \mid f \in \text{Hom}_R(P, M)\}$. Recíprocamente, todo funtor de la forma $\text{Hom}_R(P, -)(p)$ es un funtor matricial para alguna matriz \mathcal{A} .

⁸Véase la observación de la página 707 en [35].

⁹Véase [36, Teorema 6].

3.4. Anillos hereditarios. Un anillo R es *hereditario izquierdo* si todo ideal izquierdo es proyectivo. Algunos ejemplos bien conocidos de anillos hereditarios izquierdos son los anillos semisimples, los dominios de ideales principales, entre otros.

El teorema que se presenta a continuación describe el comportamiento de los funtores Ext sobre los anillos hereditarios.¹⁰

TEOREMA 1.67. ([51, Ejercicio 9.3, Teorema 9.5, Corolario 9.6]) *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) R es hereditario izquierdo.
- (b) $\text{lpD}(R) \leq 1$, donde $\text{lpD}(R)$ denota la dimensión proyectiva global izquierda del anillo R .
- (c) $\text{Ext}_R^n(M, N) = 0$ para cualesquiera $M, N \in R\text{-Mod}$ y para todo $n \geq 2$.

Como consecuencia del Teorema 1.67 tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 1.68. *Sea R un anillo hereditario izquierdo con centro $\mathcal{Z}(R)$. Sean $M \in R\text{-Mod}$, S un subanillo de $\mathcal{Z}(R)$, $z \in S$ y $\mu_z^M : M \rightarrow M$ la multiplicación por z ; es decir, tal que, para cada $x \in M$, $\mu_z^M(x) = zx$. Si μ_z^M es un monomorfismo, entonces, para cada $N \in R\text{-Mod}$, $(\mu_z^M)^* : \text{Ext}_R(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R(M, N)$ es un epimorfismo de S -módulos. En particular, si S es un dominio entero y $\mu_z^M : M \rightarrow M$ es un monomorfismo para cada $z \in S$ (es decir, M es libre de torsión como un S -módulo), entonces $\text{Ext}_R(M, N)$ es un S -módulo divisible para cada $N \in R\text{-Mod}$ en virtud de la Proposición C.6.*

3.5. Anillos de matrices triangulares formales. Dados dos anillos R , S y un R - S -bimódulo M , es posible construir un nuevo anillo $\Lambda = \begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$ como sigue.

¹⁰Véase el Apéndice C.

DEFINICIÓN 1.69. ([29, Ejercicio 1C]) Sean R y S anillos y sea $M \in R$ - S -Mod. Se denota por $\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$ al grupo abeliano $S \oplus M \oplus R$, donde las ternas (s, x, r) de $S \oplus M \oplus R$ se escriben como matrices formales $\begin{pmatrix} s & 0 \\ x & r \end{pmatrix}$.

OBSERVACIÓN 1.70. ([29, Ejercicio 1C, incisos (a) y (c)])

1. Las reglas usuales de suma y multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ x & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s' & 0 \\ x' & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + s' & 0 \\ x + x' & r + r' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ x & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' & 0 \\ x' & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ss' & 0 \\ xs' + rx' & rr' \end{pmatrix}$$

inducen en $\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$ una estructura de anillo.

2. El conjunto $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \mid x \in M \right\} \subseteq \begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$ es un ideal de

$\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$. Más aún, bajo el isomorfismo de grupos abelianos natural entre M y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$, resulta que los R -submódulos izquierdos (S -submódulos derechos, R - S -sub-bimódulos) de M están en correspondencia con los

ideales izquierdos (ideales derechos, ideales) de $\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$ contenidos en

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Notemos que las proyecciones canónicas $\pi_S : \Lambda \rightarrow S$ y $\pi_R : \Lambda \rightarrow R$ tales que $\pi_S \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ x & r \end{pmatrix} \right) = s$ y $\pi_R \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ x & r \end{pmatrix} \right) = r$ son homomorfismos de anillos. Luego, tanto R como S son Λ -módulos. Más aún, al ser π_R y π_S homomorfismos de anillos suprayectivos, resulta que $\mathcal{S}_{(R)R} = \mathcal{S}_{(\Lambda)R}$ y $\mathcal{S}_{(S)S} = \mathcal{S}_{(\Lambda)S}$.

DEFINICIÓN 1.71. Un anillo de matrices triangulares (inferiores) formales es uno de la forma $\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$, descrito en la observación anterior.

El siguiente teorema caracteriza a los anillos de matrices triangulares formales que son artinianos.

TEOREMA 1.72. ([3, Proposición III.2.1]) *Sea $\Lambda = \begin{pmatrix} S & 0 \\ M & R \end{pmatrix}$, donde R y S son anillos y $M \in R\text{-}S\text{-Mod}$.*

- (a) Λ es artiniano izquierdo si, y sólo si, R y S son artinianos izquierdos y M es un R -módulo izquierdo finitamente generado.
- (b) Λ es artiniano derecho si, y sólo si, R y S son artinianos derechos y M es un S -módulo derecho finitamente generado.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el inciso (a); la verificación del inciso (b) es similar. Supongamos primero que Λ es artiniano izquierdo. De la Observación 1.70, 3., y de la Proposición 1.24 se sigue que R y S son artinianos izquierdos. Por otro lado, en vista del Teorema de Hopkins-Levitzki, Λ es también noetheriano izquierdo, de modo que, en virtud de la Proposición 1.21 y de la Observación 1.70, 2., $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ es finitamente generado como Λ -módulo. Luego, por hipótesis

y por la Proposición 1.25, ocurre que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \in \Lambda\text{-Mod}$ es noetheriano, lo cual, de nuevo por la Observación 1.70, 2., implica que M es un R -módulo izquierdo noetheriano. Finalmente, de la Proposición 1.21 se deduce que $M \in R\text{-Mod}$ es finitamente generado.

Para la recíproca, supongamos ahora que R y S son artinianos izquierdos y que M es un R -módulo izquierdo finitamente generado. Entonces, por la Observación 1.70, 3., R y S son artinianos como Λ -módulos izquierdos. Notemos que $\Lambda' := \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ es un subanillo de Λ que es isomorfo a $S \times R$, de manera que Λ' es también un Λ -módulo artiniano por la Proposición 1.23, (2). Por otro lado, puesto que, por hipótesis, R es artiniano izquierdo y M es un R -módulo izquierdo finitamente generado, se sigue de la Proposición 1.24 que M es artiniano como

R -módulo. Luego, por la Observación 1.70, 2., el ideal $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ es artiniiano como Λ -módulo. Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda' \rightarrow 0$$

Entonces, en virtud de lo anterior y de la Proposición 1.23, (1), Λ es artiniiano izquierdo, con lo que concluimos la demostración. \square

4. Prerradicales

Un *prerradical* sobre el anillo R es un subfunctor¹¹ del functor identidad sobre la categoría $R\text{-Mod}$; es decir, un prerradical sobre R es un functor $\sigma : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ tal que $\sigma(M) \leq M$ para cada $M \in R\text{-Mod}$ y, para cada $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$. Se denota por $R\text{-pr}$ a la clase de todos los prerradicales sobre R .

Existe un orden parcial natural en $R\text{-pr}$ dado por $\sigma \preceq \tau$ si $\sigma(M) \leq \tau(M)$ para cada $M \in R\text{-Mod}$. Con el orden parcial anterior, en $R\text{-pr}$ las operaciones reticulares de disyunción (o supremo) y conjunción (o ínfimo) están dadas como sigue: $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$ y $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$ para cada $M \in R\text{-Mod}$. Las operaciones reticulares anteriores pueden generalizarse para subclases arbitrarias de prerradicales, por lo que $R\text{-pr}$ resulta ser una *gran* retícula completa.¹² Los elementos mayor y menor de $R\text{-pr}$ son los funtores identidad y cero en $R\text{-Mod}$, denotados por $\widehat{1}$ y $\widehat{0}$, respectivamente. Otros ejemplos de prerradicales son los siguientes. Dada una clase de R -módulos \mathcal{U} , consideremos a los funtores $Tr_{\mathcal{U}}(-) : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ y $Rej_{\mathcal{U}}(-) : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ que a cada R -módulo M le asignan, respectivamente, la traza de M respecto a \mathcal{U} , $Tr_{\mathcal{U}}(M)$, y el rechazo de M respecto a \mathcal{U} , $Rej_{\mathcal{U}}(M)$. Entonces, por definición y en vista de la Proposición 1.17, tanto $Tr_{\mathcal{U}}(-)$ como $Rej_{\mathcal{U}}(-)$ son prerradicales sobre R . En particular, los funtores $Zoc(-) = Tr_{R\text{-simp}}(-)$ y $Rad(-) = Rej_{R\text{-simp}}(-)$ ¹³ que asignan a cada módulo su zoclo y su radical, respectivamente, son prerradicales.

¹¹véase el Apéndice B

¹²Véase el Apéndice A.

¹³ver la Observación 1.19

En R -pr existen además dos operaciones llamadas el *producto* (denotado por “ \cdot ”) y *coproducto* (denotado “ $:$ ”), definidas como sigue: para cada $M \in R\text{-Mod}$, $(\sigma \cdot \tau)(M) = \sigma(\tau(M))$ y $(\sigma : \tau)(M)$ es tal que $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$. Se dice que $\sigma \in R\text{-pr}$ es *idempotente* si $\sigma\sigma := \sigma \cdot \sigma = \sigma$; es decir, si σ es idempotente con respecto a la operación producto de R -pr. Dualmente, decimos que $\sigma \in R\text{-pr}$ es *radical* si σ es idempotente respecto al coproducto de R -pr; es decir, si $(\sigma : \sigma) = \sigma$, o, equivalentemente, si $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ para cada $M \in R\text{-Mod}$. Claramente, $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son radicales idempotentes. Por otra parte, de la Proposición 1.18 se sigue que, dada una clase de R -módulos \mathcal{U} , $Tr_{\mathcal{U}}(-)$ es un prerradical idempotente y $Rej_{\mathcal{U}}(-)$ es un radical.

Sea \mathcal{OR} la clase de todos los ordinales. Definimos a continuación las *potencias* de un prerradical. Para $\gamma \in \mathcal{OR}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$, el prerradical σ^γ se define recursivamente como sigue: $\sigma^0 = \widehat{1}$, $\sigma^{\gamma+1} = \sigma\sigma^\gamma$ y $\sigma^\eta = \bigwedge\{\sigma^\gamma \mid \gamma \in \mathcal{OR}, \gamma < \eta\}$ si η es un ordinal límite. Nótese que si γ y η son ordinales tales que $\gamma < \eta$, entonces $\sigma^\eta \preceq \sigma^\gamma$. De lo anterior resulta que $\widehat{\sigma} := \bigwedge\{\sigma^\gamma \mid \gamma \in \mathcal{OR}\}$ es el mayor prerradical idempotente menor o igual que σ . Las *copotencias* de un prerradical σ , denotadas por $\sigma^{(\gamma)}$, con $\gamma \in \mathcal{OR}$, se definen de manera similar: $\sigma^{(0)} = \widehat{0}$, $\sigma^{(\gamma+1)} = (\sigma^{(\gamma)} : \sigma)$ y $\sigma^{(\eta)} = \bigvee\{\sigma^{(\gamma)} \mid \gamma \in \mathcal{OR}, \gamma < \eta\}$ si η es un ordinal límite. En este caso, se tiene que $\overline{\sigma} := \bigvee\{\sigma^{(\gamma)} \mid \gamma \in \mathcal{OR}\}$ es el menor radical mayor o igual que σ .

La proposición que presentamos enseguida se refiere a la distributividad del producto y del coproducto de prerradicales respecto a conjunciones y disyunciones arbitrarias.

PROPOSICIÓN 1.73. [47, Teorema 8, 2.] *Dados \mathbf{I} una clase de índices, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{I}} \subseteq R\text{-pr}$ y $\tau \in R\text{-pr}$, se tiene que:*

- (1) $\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathbf{I}} \sigma_\alpha \right) \tau = \bigwedge_{\alpha \in \mathbf{I}} (\sigma_\alpha \tau).$
- (2) $\left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{I}} \sigma_\alpha \right) \tau = \bigvee_{\alpha \in \mathbf{I}} (\sigma_\alpha \tau).$
- (3) $\left(\tau : \bigwedge_{\alpha \in \mathbf{I}} \sigma_\alpha \right) = \bigwedge_{\alpha \in \mathbf{I}} (\tau : \sigma_\alpha).$
- (4) $\left(\tau : \bigvee_{\alpha \in \mathbf{I}} \sigma_\alpha \right) = \bigvee_{\alpha \in \mathbf{I}} (\tau : \sigma_\alpha).$

Por su parte, el resultado que se presenta a continuación ilustra las propiedades de cerradura de las clases de prerradicales idempotentes y radicales: en el primer caso, bajo disyunciones arbitrarias; en el segundo, bajo conjunciones arbitrarias.

PROPOSICIÓN 1.74. ([7, Proposición I.4.7]) *Las clases de prerradicales idempotentes son cerradas bajo supremos arbitrarios; las clases de radicales lo son bajo ínfimos arbitrarios.*

La siguiente propiedad se verifica directamente.

PROPOSICIÓN 1.75. [6, Proposición 1,(ii)] *Para cada $\sigma \in R\text{-pr}$, si $M, N \in R\text{-Mod}$ son tales que $N \leq M$, entonces $(\sigma(M) + N)/N \leq \sigma(M/N)$.*

PROPOSICIÓN 1.76. [6, Proposición 7] *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$ un radical y sean $N, M \in R\text{-Mod}$ tales que $N \leq \sigma(M)$. Entonces $\sigma(M/N) = \sigma(M)/N$.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior se sigue que $\sigma(M)/N \leq \sigma(M/N)$. Consideremos la proyección $p : M/N \rightarrow M/N / \sigma(M)/N$. Por las propiedades de los prerradicales y por el tercer teorema de isomorfismo de Noether se tiene que $\sigma(M/N) / \sigma(M)/N = p(\sigma(M/N)) \leq \sigma \left(M/N / \sigma(M)/N \right) \cong \sigma(M/\sigma(M))$. Ahora, como σ es radical, $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$, de donde $\sigma(M/N) = \sigma(M)/N$. \square

De las proposiciones 1.74 y 1.76 se sigue que las potencias de un radical son también radicales, como lo establece la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.77. *Si $\sigma \in R\text{-pr}$ es un radical, entonces, para cada $\gamma \in \mathcal{OR}$, σ^γ también es un radical.*

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción transfinita sobre γ . Claramente, como $\sigma^0 = \widehat{1}$, se tiene que σ^0 es radical. Supongamos ahora que σ^η es radical y veamos que $\sigma^{\eta+1}$ también lo es. Sea $M \in R\text{-Mod}$. Por la Proposición 1.76 se sigue que $\sigma^\eta(M/\sigma^{\eta+1}(M)) = \sigma^\eta(M)/\sigma^{\eta+1}(M)$. Luego, $\sigma^{\eta+1}(M/\sigma^{\eta+1}(M)) = \sigma(\sigma^\eta(M/\sigma^{\eta+1}(M))) = \sigma(\sigma^\eta(M)/\sigma^{\eta+1}(M)) = \sigma(\sigma^\eta(M)/\sigma(\sigma^\eta(M))) = 0$ por ser σ un radical. Por lo tanto, $\sigma^{\eta+1}$ es un radical.

Finalmente, supongamos que η es un ordinal límite y que σ^γ es un radical para todo ordinal $\gamma < \eta$. Por definición, $\sigma^\eta = \bigwedge \{ \sigma^\gamma \mid \gamma \in \mathcal{OR}, \gamma < \eta \}$, de donde, por la Proposición 1.74, σ^η es un radical. \square

La siguiente proposición describe el comportamiento de los prerradicales bajo sumas y productos directos.

PROPOSICIÓN 1.78. ([6, Proposición 2]) Sean $\sigma \in R\text{-pr}$ y $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, entonces:

$$(1) \sigma \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) = \bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i).$$

$$(2) \sigma \left(\prod_{i \in I} M_i \right) \leq \prod_{i \in I} \sigma(M_i).$$

DEMOSTRACIÓN. (1). Para cada $j \in I$, sean $\iota_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\iota'_j : \sigma(M_j) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i)$ las inclusiones canónicas y sean $\pi_j : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ las proyecciones canónicas. Dado $j \in I$, se tiene que $\pi_j(\sigma(\bigoplus_{i \in I} M_i)) \leq \sigma(M_j)$. Sea $x = (x_i)_{i \in I} \in \sigma(\bigoplus_{i \in I} M_i) \leq \bigoplus_{i \in I} M_i$. Se sigue que $x_j = \pi_j(x) \in \sigma(M_j)$ para cada $j \in I$, de donde $x \in \bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i)$. Por tanto, $\sigma(\bigoplus_{i \in I} M_i) \leq \bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i)$. Para la otra desigualdad, observemos que, como consecuencia de la Proposición 1.6, existe un único homomorfismo $f : \bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i) \rightarrow \sigma(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $j \in I$:

$$\begin{array}{ccc} \sigma(M_j) & \xrightarrow{\iota'_j} & \bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i) \\ \sigma(\iota_j) \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow f \\ \sigma \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) & & \end{array}$$

En virtud de lo anterior y de la Observación 1.7 resulta que $\bigoplus_{i \in I} \sigma(M_i) \leq \sigma(\bigoplus_{i \in I} M_i)$, con lo que se tiene la igualdad.

Para la demostración de (2) se aplica un argumento similar al de la primera parte de la prueba de (1). \square

A continuación se presentan diversas propiedades de cerradura para clases en $R\text{-Mod}$, a algunas de las cuales nos referiremos en el transcurso de este trabajo.

DEFINICIÓN 1.79. Sea \mathcal{C} una clase no vacía de R -módulos. Se dice que \mathcal{C} es cerrada bajo:

1. cocientes si, dado $M \in R\text{-Mod}$, con $M \in \mathcal{C}$, se tiene que $M/N \in \mathcal{C}$ para todo $N \leq M$.

2. submódulos si, dado $M \in R\text{-Mod}$, con $M \in \mathcal{C}$, se tiene que $N \in \mathcal{C}$ para todo $N \leq M$.
3. epimorfismos si, dado un epimorfismo $f : M \twoheadrightarrow N$ de R -módulos, con $M \in \mathcal{C}$, se tiene que $N \in \mathcal{C}$.
4. monomorfismos si, dado un monomorfismo $f : N \hookrightarrow M$ de R -módulos, con $M \in \mathcal{C}$, se tiene que $N \in \mathcal{C}$.
5. isomorfismos si, dado un isomorfismo $f : M \rightarrow N$, con $M \in \mathcal{C}$, se tiene que $N \in \mathcal{C}$.
6. sumas directas si, dada una familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de R -módulos, con $M_i \in \mathcal{C}$ para cada $i \in I$, se tiene que $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{C}$.
7. productos directos si, dada una familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de R -módulos, con $M_i \in \mathcal{C}$ para cada $i \in I$, se tiene que $\prod_{i \in I} M_i \in \mathcal{C}$.
8. cápsulas inyectivas si, para cada $M \in \mathcal{C}$, se cumple que $EM \in \mathcal{C}$.
9. extensiones si, para cada sucesión exacta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ en $R\text{-Mod}$, con $N, L \in \mathcal{C}$, se tiene que $M \in \mathcal{C}$.

OBSERVACIÓN 1.80. Nótese que una clase de R -módulos \mathcal{C} es cerrada bajo epimorfismos (monomorfismos) si, y sólo si, \mathcal{C} es cerrada bajo cocientes (submódulos) e isomorfismos.

Enseguida se introducen ciertas clases de módulos definidas mediante las propiedades anteriores.

DEFINICIÓN 1.81. Sea \mathcal{T} una clase no vacía en $R\text{-Mod}$. Se dice que \mathcal{T} es una clase de pretorsión si es cerrada bajo sumas directas y epimorfismos. Se llama a \mathcal{T} una clase prelibre de torsión si es cerrada bajo productos directos y monomorfismos. Una clase de pretorsión en $R\text{-Mod}$ se llama hereditaria si es cerrada bajo monomorfismos. Una clase prelibre de torsión se llama hereditaria (cohereditaria) si es cerrada bajo cápsulas inyectivas (epimorfismos). Por su parte, una clase de torsión es una clase de pretorsión cerrada bajo extensiones, mientras que una clase libre de torsión es una clase prelibre de torsión que es cerrada bajo extensiones.

Como en [47], para cada $\sigma \in R\text{-pr}$, sea $\overline{\mathbb{T}}_\sigma = \{ \sigma(M) \mid M \in R\text{-Mod} \}$.

OBSERVACIÓN 1.82. *Nótese que $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$ es una clase cerrada bajo isomorfismos. Asimismo, por la Proposición 1.78, $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$ es siempre cerrada bajo sumas directas. Más aún, por la Proposición 1.76, si σ es un radical, $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes.*

El resultado auxiliar que presentamos a continuación nos ofrece un criterio para decidir si un prerradical es $\widehat{0}$.

LEMA 1.83. [47, Lema 6] *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Si $\sigma(ES) = 0$ para cada $S \in R\text{-simp}$, entonces $\sigma = \widehat{0}$.*

DEMOSTRACIÓN. En vista del Ejemplo 1.14, para cada $M \in R\text{-Mod}$ existe un monomorfismo $f : M \hookrightarrow (\prod_{R\text{-simp}} ES)^X$ para algún conjunto X . Luego, por la definición de prerradical y por la Proposición 1.78, se tiene que $f(\sigma(M)) \leq \sigma((\prod_{R\text{-simp}} ES)^X) \leq (\prod_{R\text{-simp}} \sigma(ES))^X = 0$. Por lo tanto, $\sigma(M) = 0$. Concluimos que $\sigma = \widehat{0}$. \square

Como en [47], para cada $\sigma \in R\text{-pr}$, sean $\mathbb{T}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$ y $\mathbb{F}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = 0\}$.

El siguiente resultado de la Teoría de Torsión es bien conocido.

PROPOSICIÓN 1.84. [55, Proposición VI.1.4] *Sea R un anillo. Entonces hay una correspondencia biunívoca entre prerradicales idempotentes y clases de pre-torsión en $R\text{-Mod}$, dada por $\sigma \mapsto \mathbb{T}_\sigma$. De manera dual, existe una correspondencia biunívoca entre radicales y clases prelibres de torsión en $R\text{-Mod}$, dada por $\sigma \mapsto \mathbb{F}_\sigma$.*

Un prerradical sobre el anillo R es *exacto izquierdo* si como funtor sobre $R\text{-Mod}$ es exacto izquierdo. La proposición que se presenta a continuación da condiciones equivalentes para esta clase de prerradicales que resultan de especial interés para nuestros propósitos, como se verá en el Capítulo 4.

PROPOSICIÓN 1.85. [55, Proposición VI.1.7] *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) σ es exacto izquierdo.
- (b) Para cada $M \in R\text{-Mod}$ y para cada $N \leq M$, $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$.
- (c) σ es idempotente y \mathbb{T}_σ es cerrada bajo monomorfismos.

A la luz de la definición de clase de pretorsión hereditaria, el siguiente resultado se obtiene de inmediato a partir de la proposición anterior.

COROLARIO 1.86. [55, Corolario VI.1.8] *Sea R un anillo. Entonces existe una correspondencia biunívoca entre prerradicales exactos izquierdos y clases de pretorsión hereditarias en $R\text{-Mod}$.*

Un prerradical $\sigma \in R\text{-pr}$ se dice *t-radical* si $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para cada $M \in R\text{-Mod}$.

PROPOSICIÓN 1.87. *Sea R un anillo. Existe una correspondencia biunívoca entre t-radicales y clases de prelibres de torsión cohereditarias en $R\text{-Mod}$.*

OBSERVACIÓN 1.88. *Todo prerradical exacto izquierdo es idempotente y todo t-radical es radical.*

La siguiente proposición, que exhibe propiedades de cerradura de las clases de prerradicales recientemente definidos, se prueba directamente a partir de las definiciones de los mismos.

PROPOSICIÓN 1.89. ([7, Proposición I.4.7]) *Las clases de prerradicales exactos izquierdos son cerradas bajo ínfimos arbitrarios, mientras que las clases de t-radicales son cerradas bajo supremos arbitrarios.*

Un submódulo N de un R -módulo M se llama *totalmente invariante* si $f(N) \leq N$ para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow M$. En tal caso, se suele escribir $N \leq_{fi} M$. Denotamos por $\mathcal{S}_{fi}(M)$ a la retícula de submódulos totalmente invariantes de M . Un par de ejemplos importantes de submódulos totalmente invariantes son los siguientes. Dado $S \in R\text{-simp}$, se sigue que S es totalmente invariante en su cápsula inyectiva, ES . Por su parte, los submódulos totalmente invariantes del anillo R son precisamente sus ideales (bilaterales).

Los siguientes tipos de prerradicales, conocidos como prerradicales *alfa* y *omega*, son de gran importancia.

DEFINICIÓN 1.90. *Sean $M \in R\text{-Mod}$ y $N \leq_{fi} M$. Dado $K \in R\text{-Mod}$, los prerradicales α_N^M y ω_N^M se definen como sigue:*

$$\alpha_N^M(K) := \sum \{f(N) \mid f \in \text{Hom}_R(M, K)\},$$

$$\omega_N^M(K) := \bigcap \{g^{\leftarrow}(N) \mid g \in \text{Hom}_R(K, M)\}.$$

OBSERVACIÓN 1.91. De la definición anterior se sigue, en particular, que $\alpha_0^M = \widehat{0}$ y $\omega_M^M = \widehat{1}$ para cada $M \in R\text{-Mod}$.

La siguiente propiedad de los prerradicales alfa y omega nos será de utilidad en la Sección 1 del Capítulo 4.

PROPOSICIÓN 1.92. Sean $M, M', N, N' \in R\text{-Mod}$ tales que $N \leq_{fi} M$ y $N' \leq_{fi} M'$. Sean $i_N : N \hookrightarrow M, i_{N'} : N' \hookrightarrow M'$ las inclusiones naturales. Supongamos que existen R -isomorfismos $f : M \rightarrow M'$ y $g : N \rightarrow N'$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ i_N \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow i_{N'} \\ N & \xrightarrow{g} & N' \end{array}$$

Entonces $\alpha_N^M = \alpha_{N'}^{M'}$ y $\omega_N^M = \omega_{N'}^{M'}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $L \in R\text{-Mod}$. Por definición de prerradical alfa, se tiene que $\alpha_N^M(L) = \sum \{h(N) \mid h \in \text{Hom}_R(M, L)\}$. Luego, por la conmutatividad del diagrama anterior y en vista de que tanto f como g son isomorfismos, $\alpha_N^M(L) = \sum \{h(i_N(N)) \mid h \in \text{Hom}_R(M, L)\} = \sum \{h(f^{-1}i_{N'}g(N)) \mid h \in \text{Hom}_R(M, L)\} = \sum \{hf^{-1}(i_{N'}(N')) \mid h \in \text{Hom}_R(M, L)\} = \sum \{hf^{-1}(N') \mid hf^{-1} \in \text{Hom}_R(M', L)\} \leq \alpha_{N'}^{M'}(L)$. De manera similar se verifica que $\alpha_{N'}^{M'}(L) \leq \alpha_N^M(L)$. Por lo tanto, $\alpha_N^M = \alpha_{N'}^{M'}$.

Por su parte, por la definición de prerradical omega, se tiene que $\omega_N^M(L) = \bigcap \{k^{\leftarrow}(N) \mid k \in \text{Hom}_R(L, M)\} = \bigcap \{k^{\leftarrow}(i_N(N)) \mid k \in \text{Hom}_R(L, M)\}$, de donde, al ser el diagrama anterior conmutativo y ya que f y g son isomorfismos, se sigue que $\omega_N^M(L) = \bigcap \{k^{\leftarrow}(f^{-1}i_{N'}g(N)) \mid k \in \text{Hom}_R(L, M)\} = \bigcap \{k^{\leftarrow}(f^{-1}i_{N'}(N')) \mid k \in \text{Hom}_R(L, M)\} = \bigcap \{k^{\leftarrow}(f^{-1}(N')) \mid k \in \text{Hom}_R(L, M)\} = \bigcap \{(fk)^{\leftarrow}(N') \mid fk \in \text{Hom}_R(L, M')\} \geq \omega_{N'}^{M'}(L)$. Análogamente, $\omega_{N'}^{M'}(L) \geq \omega_N^M(L)$. Por lo tanto, $\omega_N^M = \omega_{N'}^{M'}$. \square

OBSERVACIÓN 1.93. *De hecho, en principio, los prerradicales α_N^M y ω_N^M pueden ser definidos para todo submódulo N de un módulo M ; sin embargo, en caso de ser N totalmente invariante, resulta que $\alpha_N^M(M) = N$ y $\omega_N^M(M) = N$.¹⁴*

OBSERVACIÓN 1.94. *Notemos que, dados $M, K \in R\text{-Mod}$, $\alpha_M^M(K) = \text{Tr}_M(K)$ y $\omega_0^M(K) = \text{Rej}_M(K)$. Más aún, dada una clase de R -módulos \mathcal{U} , se sigue de lo anterior que $\text{Tr}_{\mathcal{U}}(K) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U^U(K) = (\bigvee_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U^U)(K)$ y $\text{Rej}_{\mathcal{U}}(K) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \omega_0^U(K) = (\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \omega_0^U)(K)$. En particular, $\text{Zoc}(K) = (\bigvee_{S \in R\text{-simp}} \alpha_S^S)(K)$ y $\text{Rad}(K) = (\bigwedge_{S \in R\text{-simp}} \omega_0^S)(K)$.*

La propiedad que presentamos a continuación se sigue de inmediato a partir de la definición de prerradical alfa y omega.

LEMA 1.95. [47] *Dado $M \in R\text{-Mod}$, si $K, N \leq_{fi} M$ son tales que $K \leq N$, entonces $\alpha_K^M \preceq \alpha_N^M$ y $\omega_K^M \preceq \omega_N^M$.*

PROPOSICIÓN 1.96. ([7, Proposición I.6.2]) *Sean $M, N \in R\text{-Mod}$. Entonces $N \leq_{fi} M$ si, y sólo si, existe $\sigma \in R\text{-pr}$ tal que $\sigma(M) = N$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es consecuencia inmediata de la Observación 1.93. Para la suficiencia, supongamos que $N = \sigma(M)$, con $\sigma \in R\text{-pr}$, y sea $f \in \text{Hom}_R(M, M)$. Entonces, como $f(N) = f(\sigma(M)) \leq \sigma(M) = N$, se tiene que N es submódulo totalmente invariante de M . \square

PROPOSICIÓN 1.97. ([47, Proposición 5]) *Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces $\sigma(M) = N$ si, y sólo si, $N \leq_{fi} M$ y $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $L \in R\text{-Mod}$, si $N = \sigma(M)$ y $f \in \text{Hom}_R(M, L)$, se tiene que $f(N) = f(\sigma(M)) \leq \sigma(L)$, de donde $\alpha_N^M(L) \leq \sigma(L)$. Por otra parte, si $g \in \text{Hom}_R(L, M)$, entonces $g(\sigma(L)) \leq \sigma(M) = N$. Luego, $\sigma(L) \leq g^{\leftarrow}(g(\sigma(L))) \leq g^{\leftarrow}(\sigma(M)) = g^{\leftarrow}(N)$, lo cual implica que $\sigma(L) \leq \omega_N^M(L)$. Por lo tanto, $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$. Recíprocamente, si $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$, entonces, por la Observación 1.93, se sigue que $N = \alpha_N^M(M) \leq \sigma(M) \leq \omega_N^M(M) = N$; es decir, $N = \sigma(M)$, con lo que concluimos la demostración. \square

¹⁴Véase ([7, I.6]).

De la proposición anterior se sigue que, si $M \in R\text{-Mod}$ y N es un submódulo totalmente invariante de M , entonces α_N^M y ω_N^M son, respectivamente, el menor y el mayor prerradicales que mandan a M en N . El siguiente resultado nos dice que todo prerradical se describe en términos de los prerradicales alfa y omega.

PROPOSICIÓN 1.98. ([49, Observación 1]) *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces:*

- (1) $\sigma = \bigvee \{\alpha_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod}\}$.
- (2) $\sigma = \bigwedge \{\omega_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la igualdad (1), toda vez que la igualdad (2) se verifica de manera dual. Sea $M \in R\text{-Mod}$. Por la Proposición 1.97, se tiene que $\alpha_{\sigma(M)}^M \preceq \sigma$, de donde $\bigvee_{R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^M \preceq \sigma$. Por otro lado, si $L \in R\text{-Mod}$, de la Observación 1.93 se sigue que $\sigma(L) = \alpha_{\sigma(L)}^L(L) \leq (\bigvee_{R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^M)(L)$; es decir, $\sigma \preceq \bigvee_{R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^M$. Concluimos que $\sigma = \bigvee_{R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^M$. \square

La siguiente propiedad caracteriza al funtor identidad sobre la categoría $R\text{-Mod}$ como prerradical.

PROPOSICIÓN 1.99. *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces $\sigma(R) = R$ si, y sólo si, $\sigma = \widehat{1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\sigma(R) = R$ y sea $M \in R\text{-Mod}$. En vista del Lema 1.1, se tiene que $\alpha_{\sigma(R)}^R(M) = \sum \{f(\sigma(R)) \mid f \in \text{Hom}_R(R, M)\} = \sigma(R)M$. Luego, por la Proposición 1.97, $M = RM = \sigma(R)M = \alpha_{\sigma(R)}^R(M) \leq \sigma(M)$. Por otra parte, siempre se cumple que $\sigma(M) \leq M$ por la definición de prerradical. Por lo tanto, $\sigma(M) = M$; es decir, $\sigma = \widehat{1}$. La recíproca es clara. \square

PROPOSICIÓN 1.100. [47, Teorema 7] *La gran retícula de prerradicales sobre el anillo R es atómica y coatómica.¹⁵ De hecho,*

- (1) $\{\alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-simp}\}$ es el conjunto de átomos de $R\text{-pr}$.
- (2) $\{\omega_I^R \mid I \text{ es un ideal máximo de } R\}$ es el conjunto de coátomos de $R\text{-pr}$.

DEMOSTRACIÓN. (1). Sea $S \in R\text{-simp}$ y sea $\tau \in R\text{-pr}$ tal que $\tau \prec \alpha_S^{ES}$. Luego, por la Proposición 1.97, $\tau(ES) = 0$. Sea $S' \in R\text{-simp}$, con $S' \neq S$, entonces $\tau(ES') \leq \alpha_S^{ES}(ES') = 0$. Se sigue del Lema 1.83 que $\tau = \widehat{0}$. Por tanto,

¹⁵Véase la Sección 1 del Apéndice A.

α_S^{ES} es un átomo en R -pr. Ahora, sea $\sigma \in R$ -pr tal que $\sigma \neq \widehat{0}$. Entonces, nuevamente por el Lema 1.83, existe $S \in R$ -simp tal que $\sigma(ES) \neq 0$. Se sigue que $S \leq \sigma(ES)$. Luego, por el Lema 1.95 y por la Proposición 1.97, $\alpha_S^{ES} \preceq \alpha_{\sigma(ES)}^{ES} \preceq \sigma$, con lo que concluimos la prueba de (1).

(2). Sea I un ideal máximo de R y sea $\tau \in R$ -pr tal que $\omega_I^R \prec \tau$. Entonces, por la Proposición 1.97, se tiene que $I < \tau(R)$. Luego, como $\tau(R)$ es un ideal de R e I es un ideal máximo, debe ocurrir que $\tau = \widehat{1}$ en virtud de la Proposición 1.99. Se sigue que ω_I^R es un coátomo de R -pr. Ahora, sea $\sigma \in R$ -pr, con $\sigma \neq \widehat{1}$. De nuevo por la Proposición 1.99, $\sigma(R) \neq R$, y, por tanto, debe existir un ideal máximo I de R tal que $\sigma(R) \leq I$. Por el Lema 1.95 y por la Proposición 1.97 se sigue que $\sigma \preceq \omega_{\sigma(R)}^R \preceq \omega_I^R$, con lo que concluimos la demostración. \square

Algunas clases especiales de prerradicales pueden describirse en términos de prerradicales alfa y omega, como se presenta a continuación.

TEOREMA 1.101. ([48, Proposición 2.1]) *Dado $\sigma \in R$ -pr, se tiene que:*

- (1) σ es idempotente si, y sólo si, $\sigma = \bigvee \{ \alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_\sigma \}$.
- (2) σ es un radical si, y sólo si, $\sigma = \bigwedge \{ \omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_\sigma \}$.
- (3) σ es exacto izquierdo si, y sólo si, $\sigma = \bigwedge \{ \omega_{\sigma(Q)}^Q \mid Q \in \mathcal{E} \}$, donde \mathcal{E} denota la clase de todos los R -módulos izquierdos inyectivos.
- (4) σ es un radical exacto izquierdo si, y sólo si, $\sigma = \bigwedge \{ \omega_0^Q \mid Q \in \mathcal{E} \cap \mathbb{F}_\sigma \}$.
- (5) σ es un t -radical si, y sólo si, $\sigma = \alpha_{\sigma(R)}^R$.

DEMOSTRACIÓN. (1). Sea σ un prerradical idempotente. Por la Proposición 1.97, si $M \in R$ -Mod es tal que $\sigma(M) = M$, entonces se tiene que $\alpha_M^M \preceq \sigma$. Se sigue que $\bigvee \{ \alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_\sigma \} \preceq \sigma$. Por otra parte, si $L \in R$ -Mod, entonces, como σ es idempotente, $\sigma(\sigma(L)) = \sigma(L)$. Ahora bien, consideremos la inclusión natural $\sigma(L) \hookrightarrow L$. De la Observación 1.93 se sigue que $\sigma(L) = \alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)}(\sigma(L)) \leq \alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)}(L)$, de donde $\sigma \preceq \bigvee \{ \alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_\sigma \}$, lo que prueba la igualdad. Recíprocamente, para cada $M \in R$ -Mod, se sigue de la Observación 1.94 y de la Proposición 1.18,(1), que $\alpha_M^M = Tr_M(-)$ es idempotente. Luego, por la Proposición 1.74, $\sigma = \bigvee \{ \alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_\sigma \}$ es idempotente.

(2). Sea σ un radical. De nuevo por la Proposición 1.97, para cada $M \in R$ -Mod tal que $\sigma(M) = 0$ se tiene que $\sigma \preceq \omega_0^M$. Luego, $\sigma \preceq \bigwedge \{ \omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_\sigma \}$.

Por otro lado, dado $L \in R\text{-Mod}$, como σ es radical, se sigue que $\sigma(L/\sigma(L)) = 0$. Consideremos ahora la proyección natural $L \xrightarrow{p} L/\sigma(L)$. Entonces $\omega_0^{L/\sigma(L)}(L) \leq Nu(p) = \sigma(L)$, de donde $\bigwedge \{ \omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_\sigma \} \preceq \sigma$, con lo que se tiene la igualdad. Para la suficiencia, sea $M \in R\text{-Mod}$. Se sigue de la Observación 1.94 y de la Proposición 1.18,(2), que $\omega_0^M = Rej_M(-)$ es radical, de donde, por la Proposición 1.74, $\sigma = \bigwedge \{ \omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_\sigma \}$ es radical.

(3). Sea σ un prerradical exacto izquierdo y sea $Q \in \mathcal{E}$. Una vez más por la Proposición 1.97, se tiene que $\sigma \preceq \omega_{\sigma(Q)}^Q$. Por tanto, $\sigma \preceq \bigwedge \{ \omega_{\sigma(Q)}^Q \mid Q \in \mathcal{E} \}$. Por otra parte, por la Proposición 1.85, para cada $L \in R\text{-Mod}$ se cumple que $\sigma(L) = L \cap \sigma(EL) = i^\leftarrow(\sigma(EL))$, donde $L \xrightarrow{i} EL$ es la inclusión en la cápsula inyectiva. Luego, $\omega_{\sigma(EL)}^{EL}(L) \leq \sigma(L)$, de donde $\bigwedge \{ \omega_{\sigma(Q)}^Q \mid Q \in \mathcal{E} \} \preceq \sigma$, con lo que se verifica la igualdad. Ahora supongamos que $\sigma = \bigwedge \{ \omega_{\sigma(Q)}^Q \mid Q \in \mathcal{E} \}$. Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ tales que $N \leq M$ y sea $Q \in \mathcal{E}$. La contención $\omega_{\sigma(Q)}^Q(N) \subseteq N \cap \omega_{\sigma(Q)}^Q(M)$ es clara. Ahora, sea $x \in N \cap \omega_{\sigma(Q)}^Q(M)$. Entonces $x \in g^\leftarrow(\sigma(Q))$ para cualquier $g \in \text{Hom}_R(M, Q)$. Sea $f \in \text{Hom}_R(N, Q)$. Como Q es inyectivo, existe $h \in \text{Hom}_R(M, Q)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ & \uparrow f & \nearrow h \\ N & \hookrightarrow & M \end{array}$$

Se sigue que $x \in h^\leftarrow(\sigma(Q))$; esto es, $f(x) = h(x) \in \sigma(Q)$, pues $x \in N$. Luego, $x \in f^\leftarrow(\sigma(Q))$, de donde $x \in \omega_{\sigma(Q)}^Q(N)$. Por lo tanto, $N \cap \omega_{\sigma(Q)}^Q(M) \subseteq \omega_{\sigma(Q)}^Q(N)$. Finalmente, en vista de la Proposición 1.89, concluimos que $\sigma = \bigwedge \{ \omega_{\sigma(Q)}^Q \mid Q \in \mathcal{E} \}$ es exacto izquierdo.

(4). Sea σ un radical exacto izquierdo y sea $Q \in \mathcal{E}$. Luego, si $\sigma(Q) = 0$, por la Proposición 1.97 se tiene que $\sigma \preceq \omega_0^Q$. Por tanto, $\sigma \preceq \bigwedge \{ \omega_0^Q \mid Q \in \mathcal{E} \cap \mathbb{F}_\sigma \}$. Por otra parte, dado $L \in R\text{-Mod}$, como σ es radical, se sigue que $\sigma(L/\sigma(L)) = 0$. Sea $Q_0 := EL/\sigma(L)$, la cápsula inyectiva de $L/\sigma(L)$. Ya que σ es exacto izquierdo, se tiene que $L/\sigma(L) \cap \sigma(Q_0) = \sigma(L/\sigma(L)) = 0$, de donde, al ser $L/\sigma(L)$ esencial en Q_0 , se sigue que $\sigma(Q_0) = 0$. Consideremos la proyección natural $L \xrightarrow{p} L/\sigma(L)$ y la inclusión $L/\sigma(L) \xrightarrow{i} Q_0$. Entonces, $\omega_0^{Q_0}(L) \leq Nu(ip) = \sigma(L)$. Por lo tanto,

$\bigwedge \left\{ \omega_0^Q \mid Q \in \mathcal{E} \cap \mathbb{F}_\sigma \right\} \preceq \sigma$, lo que prueba la igualdad. Para la suficiencia, dado $Q \in \mathcal{E}$, se tiene que ω_0^Q es un radical, por ser $\omega_0^Q = \text{Rej}_Q(-)$ en virtud de la Observación 1.94. Además, si $\sigma(Q) = 0$, entonces $\omega_0^Q = \omega_{\sigma(Q)}^Q$, que, por el inciso (3), es exacto izquierdo. Finalmente, por las proposiciones 1.74 y 1.89, $\bigwedge \left\{ \omega_0^Q \mid Q \in \mathcal{E} \cap \mathbb{F}_\sigma \right\}$ es radical exacto izquierdo, siendo la clase de radicales exactos izquierdos cerrada bajo ínfimos arbitrarios.

(5). Sea σ un t -radical. Recordemos que, por el Lema 1.1, para cada $M \in R\text{-Mod}$, $\alpha_{\sigma(R)}^R(M) = \sum \{f(\sigma(R)) \mid f \in \text{Hom}_R(R, M)\} = \sum \{d_x(\sigma(R)) \mid x \in M\} = \sigma(R)M$. Luego, $\sigma(M) = \alpha_{\sigma(R)}^R(M)$. Recíprocamente, si $\sigma = \alpha_{\sigma(R)}^R$, entonces, para cada $M \in R\text{-Mod}$, $\sigma(M) = \alpha_{\sigma(R)}^R(M) = \sigma(R)M$, con lo que concluimos la demostración. \square

Un anillo R se dice *cosemisimple* o un V -anillo¹⁶ si todo R -módulo simple es inyectivo. El siguiente teorema, localizado en [47], aporta una caracterización de esta última clase de anillos en términos de los átomos de sus (grandes) retículas de prerradicales. Cabe resaltar que el Teorema 2.5 que aparece en el siguiente capítulo y que también forma parte del artículo [47], ofrece una suerte de caracterización “dual” para el caso de los anillos semisimples.

TEOREMA 1.102. ([47, Teorema 15]) *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

- (a) R es V -anillo.
- (b) Todo átomo de R -pr es idempotente.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Si R es un V -anillo, entonces $S = ES$ para cada $S \in R\text{-simp}$. Luego, $\alpha_S^{ES} = \alpha_S^S$ para cada $S \in R\text{-simp}$, de donde, en vista de la Proposición 1.100 y del teorema anterior, todo átomo de R -pr es idempotente.

(b) \Rightarrow (a). Sea $S \in R\text{-simp}$. Por hipótesis, α_S^{ES} es un prerradical idempotente. Luego, en virtud de la Observación 1.93, $S = \alpha_S^{ES}(ES) = (\alpha_S^{ES}(\alpha_S^{ES}(ES))) =$

¹⁶en honor a O. E. Villamayor. De hecho, fue Villamayor quien probó que un anillo R es V -anillo si, y sólo si, todo ideal izquierdo de R es la intersección de ideales izquierdos máximos de R . Más caracterizaciones y propiedades de los V -anillos pueden encontrarse en el Capítulo 7 de [18], así como en el Ejercicio 10 del Capítulo 13 de [1].

$\alpha_S^{ES}(S)$; es decir, $S = \sum\{f(S) \mid f \in \text{Hom}_R(ES, S)\}$. Por tanto, existe un homomorfismo distinto de cero $f : ES \rightarrow S$. Se afirma que f es monomorfismo. En efecto, si $Nu(f) \neq 0$, entonces $Nu(f) \cap S \neq 0$ por la esencialidad de S en ES , de donde $Nu(f) = S$ al ser S un módulo simple. De lo anterior se sigue que f es el homomorfismo cero, una contradicción. En consecuencia, $Nu(f) = 0$, lo que prueba la afirmación. Concluimos que $S \cong ES$. \square

La siguiente propiedad será usada de manera reiterada en adelante.

PROPOSICIÓN 1.103. ([50, Proposición 1.2]) Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ y $\{N_i\}_{i \in I}$ familias de R -módulos izquierdos tales que $N_i \leq M_i$ para cada $i \in I$. Sean $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $N' = \prod_{i \in I} N_i$ y $M' = \prod_{i \in I} M_i$.

(1) Si $N \leq_{f_i} M$, entonces $N_i \leq_{f_i} M_i$ para cada $i \in I$ y $\alpha_N^M = \bigvee_{i \in I} \alpha_{N_i}^{M_i}$.

(2) Si $N' \leq_{f_i} M'$, entonces $N_i \leq_{f_i} M_i$ para cada $i \in I$ y $\omega_{N'}^{M'} = \bigwedge_{i \in I} \omega_{N_i}^{M_i}$.

DEMOSTRACIÓN. (1). Para la primera parte, supongamos que $N \leq_{f_i} M$. Sea $j \in I$ y sea $f_j : M_j \rightarrow M_j$ un R -homomorfismo. Sea $f : M \rightarrow M$ tal que $f := \bigoplus_{k \in I} h_k$, donde $h_j = f_j$ y $h_k = 0$ para $k \neq j$. Sea $x \in N_j$. Como $N \leq_{f_i} M$ por hipótesis, se sigue que $f \iota_j(x) \in N$, donde $\iota_j : M_j \rightarrow M$ es la j -ésima inclusión canónica. Luego, $f_j(x) = h_j(x) = \pi_j f \iota_j(x) \in N_j$, donde $\pi_j : M \rightarrow M_j$ es la j -ésima proyección canónica. Por lo tanto, $N_j \leq_{f_i} M_j$. Probemos ahora la segunda parte de (1). Sea $L \in R\text{-Mod}$ y sea $g \in \text{Hom}_R(M, L)$. Entonces $g(N) = \sum_{k \in I} g \iota_k(N_k) \leq \sum_{k \in I} \alpha_{N_k}^{M_k}(L)$, de donde $\alpha_N^M(L) \leq \bigvee_{i \in I} \alpha_{N_i}^{M_i}(L)$. Por tanto, $\alpha_N^M \preceq \bigvee_{i \in I} \alpha_{N_i}^{M_i}$. Para la desigualdad restante, sea $k \in I$ y sea $g_k : M_k \rightarrow L$ un R -homomorfismo. Entonces $g_k(N_k) = g_k \pi_k(N) \leq \alpha_N^M(L)$. Por consiguiente, $\alpha_{N_k}^{M_k}(L) \leq \alpha_N^M(L)$. Se sigue que $\alpha_{N_k}^{M_k} \preceq \alpha_N^M$ para cada $k \in I$, de donde $\bigvee_{i \in I} \alpha_{N_i}^{M_i} \preceq \alpha_N^M$. Concluimos que $\alpha_N^M = \bigvee_{i \in I} \alpha_{N_i}^{M_i}$.

(2). La prueba es dual a la de (1). \square

El siguiente teorema establece una correspondencia entre los prerradicales sobre anillos Morita equivalentes.¹⁷

¹⁷La demostración completa y detallada de este resultado forma parte del proyecto de tesis doctoral de la M. en C. Janeth A. Magaña Zapata, véase [42].

TEOREMA 1.104. ([7, Proposición I.9.2]) Sean R, S anillos Morita equivalentes. Entonces existe un isomorfismo de (grandes) retículas $\varphi : R\text{-pr} \rightarrow S\text{-pr}$.

OBSERVACIÓN 1.105. El isomorfismo φ al que se refiere el teorema anterior se define como sigue. Sean $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ los funtores que representan la equivalencia entre las categorías $R\text{-Mod}$ y $S\text{-Mod}$, con isomorfismos naturales $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{S\text{-Mod}}$ y $\eta : 1_{R\text{-Mod}} \rightarrow GF$. Dados $\tau \in R\text{-pr}$, $N \in S\text{-Mod}$ y la inclusión natural $i_N : \tau(GN) \hookrightarrow GN$, se define $[\varphi(\tau)](N) := \varepsilon_N F(i_N)(F\tau(GN)) = \text{Im}(\varepsilon_N F(i_N))$.¹⁸

Como se menciona en la Observación 1.93, los prerradicales α_N^M y ω_N^M , presentados en la Definición 1.90, pueden ser definidos para todo submódulo N de M ; es decir, prescindiendo de la condición adicional $N \leq_{fi} M$. Sin embargo, es importante enfatizar que en este último caso no se cumplen las igualdades $\alpha_N^M(M) = N$ y $\omega_N^M(M) = N$. Tomando en cuenta esta aclaración, es posible presentar la definición de los prerradicales alfa y omega como sigue.

DEFINICIÓN 1.106. Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y $h : N \rightarrow M$ un R -homomorfismo. Se define el prerradical $(\alpha_N^M)_h$ como sigue. Sea $K \in R\text{-Mod}$, entonces:

$$(\alpha_N^M)_h(K) := \sum \{fh(N) \mid f \in \text{Hom}_R(M, K)\}.$$

OBSERVACIÓN 1.107. De la definición anterior se sigue de inmediato que $(\alpha_N^M)_h \in R\text{-pr}$. Nótese que si $N \leq M$ e $i : N \hookrightarrow M$ es la inclusión natural, entonces $\alpha_N^M = (\alpha_N^M)_i$. Por simplicidad, en caso de que el R -homomorfismo $h : N \rightarrow M$ sea monomorfismo, escribiremos α_N^M en lugar de $(\alpha_N^M)_h$.

Antes de presentar una propiedad de los prerradicales antes definidos, introducimos una definición.

DEFINICIÓN 1.108. Sean $M, N, L \in R\text{-Mod}$ y sean $h : N \rightarrow M$ y $h' : L \rightarrow M$ R -homomorfismos. Decimos que h y h' son equivalentes si existe un isomorfismo

¹⁸Con el fin de simplificar la notación, escribimos $\varepsilon_N F(i_N)(F\tau(GN))$ en lugar de $\varepsilon_N F(i_N)(F(\tau(GN)))$. Aplicaremos esta convención de suprimir paréntesis en los resultados siguientes de esta sección.

$\bar{h} : N \rightarrow L$ tal que $h = h' \bar{h}$; es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h} & M \\ \bar{h} \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow h' \\ L & & \end{array}$$

En tal caso, escribimos $h \underset{\bar{h}}{\approx} h'$ o, simplemente, $h \approx h'$.

LEMA 1.109. Sean $M, N, L \in R\text{-Mod}$ y sean $h : N \rightarrow M$ y $h' : L \rightarrow M$ R -homomorfismos tales que $h \underset{\bar{h}}{\approx} h'$. Entonces $(\alpha_N^M)_h = (\alpha_L^M)_{h'}$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea $K \in R\text{-Mod}$. Entonces, por las definiciones 1.106 y 1.108, $(\alpha_N^M)_h(K) = \sum \{fh(N) \mid f \in \text{Hom}_R(M, K)\} = \sum \{fh' \bar{h}(N) \mid f \in \text{Hom}_R(M, K)\} = \sum \{fh'(L) \mid f \in \text{Hom}_R(M, K)\} = (\alpha_L^M)_{h'}(K)$. \square

A la luz de la Definición 1.106 y de la Observación 1.107, el objetivo de la siguiente proposición es mostrar que el isomorfismo de retículas φ , al que hace referencia el Teorema 1.104, preserva los prerradicales alfa introducidos en la Definición 1.106.

PROPOSICIÓN 1.110. Sean R y S dos anillos Morita equivalentes y consideremos el isomorfismo de (grandes) retículas $\varphi : R\text{-pr} \rightarrow S\text{-pr}$, definido en la Observación 1.105. Entonces, dados $N, M \in R\text{-Mod}$ y un R -homomorfismo $h : N \rightarrow M$, se cumple que $\varphi((\alpha_N^M)_h) = (\alpha_{FN}^{FM})_{F(h)}$, donde $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ es la equivalencia entre las categorías $R\text{-Mod}$ y $S\text{-Mod}$.¹⁹

DEMOSTRACIÓN. Sean $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ los funtores que representan la equivalencia entre las categorías $R\text{-Mod}$ y $S\text{-Mod}$, con isomorfismos naturales $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{S\text{-Mod}}$ y $\eta : 1_{R\text{-Mod}} \rightarrow GF$. Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y sea $h : N \rightarrow M$ un R -homomorfismo. Veamos que $\varphi((\alpha_N^M)_h) = (\alpha_{FN}^{FM})_{F(h)}$. Notemos primero que $(\alpha_{FN}^{FM})_{F(h)}$ tiene sentido como un prerradical sobre S en virtud de la Definición 1.106. Sea $L \in S\text{-Mod}$. Por un lado,

$$(i) \quad (\alpha_{FN}^{FM})_{F(h)}(L) = \sum \{g(F(h)(FN)) \mid g \in \text{Hom}_S(FM, L)\}.$$

¹⁹Una versión más general de este resultado aparece en el proyecto de tesis doctoral de la M. en C. Janeth A. Magaña Zapata, véase [42].

Por otra parte, por definición, $[\varphi((\alpha_N^M)_h)](L) := \varepsilon_L F(i_L)(F(\alpha_N^M)_h(GL))$ (véase la Observación 1.105). Sea $\mathcal{H}' := \text{Hom}_R(M, GL)$. Como $(\alpha_N^M)_h(GL) = \sum_{f \in \mathcal{H}'} fh(N)$, se sigue del Lema 1.9 la existencia de un epimorfismo $g : \bigoplus_{f \in \mathcal{H}'} N \rightarrow (\alpha_N^M)_h(GL)$ tal que, para cada $f \in \mathcal{H}'$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{\mathcal{H}'} N & \xrightarrow{g} & (\alpha_N^M)_h(GL) & \xrightarrow{i_L} & GL \\
 \iota_f \uparrow & \nearrow f' & & \nearrow & \\
 N & & & & \\
 h \downarrow & \searrow f & & & \\
 M & & & &
 \end{array}$$

donde i_L es la inclusión natural, f' es la correstricción de fh a su imagen y el morfismo ι_f es la inclusión canónica de N en $\bigoplus_{f \in \mathcal{H}'} N$.

Ahora, en virtud de los incisos (2) y (5) de la Proposición 1.31, al aplicar el funtor F al diagrama anterior para cada $f \in \mathcal{H}'$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigoplus_{\mathcal{H}'} FN & \xrightarrow{\cong} & F(\bigoplus_{\mathcal{H}'} N) & \xrightarrow{F(g)} & F(\alpha_N^M)_h(GL) & \xrightarrow{F(i_L)} & FGL \\
 & \nwarrow i_f & \uparrow F(\iota_f) & \nearrow F(f') & & \nearrow & \\
 & & FN & & & & \\
 & & \downarrow F(h) & \searrow F(f) & & & \\
 & & FM & & & &
 \end{array}$$

para cada $f \in \mathcal{H}'$, donde $F(g)$ es un epimorfismo y el morfismo i_f es la inclusión canónica de FN en $\bigoplus_{\mathcal{H}'} FN$. Luego, de la Observación 1.7 y de la Proposición 1.8 se sigue que $F(\alpha_N^M)_h(GL) = \sum_{\mathcal{H}'} F(f')(FN)$, de donde, por la conmutatividad del último diagrama, $F(i_L)(F(\alpha_N^M)_h(GL)) = \sum_{\mathcal{H}'} F(i_L)F(f')(FN) = \sum_{\mathcal{H}'} F(f)F(h)(FN)$. Por lo tanto,

$$(ii) \quad [\varphi((\alpha_N^M)_h)](L) = \sum \{ \varepsilon_L F(f)(F(h)(FN)) \mid f \in \text{Hom}_R(M, GL) \}.$$

Finalmente, tras comparar las expresiones (i) y (ii) anteriores, se concluye la afirmación de la proposición como consecuencia del Teorema 1.29. \square

OBSERVACIÓN 1.111. Sean R y S anillos y sea $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ una equivalencia de categorías. Si $M, N \in R\text{-Mod}$ son tales que $N \leq_{fi} M$, entonces $N = \tau(M)$ para algún $\tau \in R\text{-pr}$ por la Proposición 1.96. Sea $j : \tau(M) \hookrightarrow M$ la inclusión natural. Se sigue de la Proposición 1.31,(5), que $F(j) : F\tau(M) \rightarrow FM$ es un monomorfismo. Luego, en virtud de la proposición anterior y de la Observación 1.107, $\varphi(\alpha_N^M) = \varphi(\alpha_{\tau(M)}^M) = \alpha_{F\tau(M)}^{FM}$.

El siguiente corolario nos ofrece una manera alternativa de describir a las imágenes bajo el isomorfismo φ de los prerradicales alfa presentados en la Definición 1.90.

COROLARIO 1.112. Sean R y S anillos Morita equivalentes y consideremos el isomorfismo de (grandes) retículas $\varphi : R\text{-pr} \rightarrow S\text{-pr}$, definido en la Observación 1.105. Entonces, dados $M \in R\text{-Mod}$ y $\tau \in R\text{-pr}$, se cumple que $\varphi(\alpha_{\tau(M)}^M) = \alpha_{[\varphi(\tau)](FM)}^{FM}$, donde $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ es la equivalencia entre las categorías $R\text{-Mod}$ y $S\text{-Mod}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $M \in R\text{-Mod}$ y $\tau \in R\text{-pr}$. Consideremos las equivalencias inversas entre sí $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$, así como los isomorfismos naturales $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{S\text{-Mod}}$ y $\eta : 1_{R\text{-Mod}} \rightarrow GF$. Sea $i_{FM} : \tau(GFM) \hookrightarrow GFM$ la inclusión natural. Notemos primero que $[\varphi(\tau)](FM)$ es isomorfo al S -módulo $F\tau(M)$. En efecto, como $\varepsilon_{FM} : FGFM \rightarrow FM$, $\eta_M : M \rightarrow GFM$ son isomorfismos y $F(i_{FM}) : F\tau(GFM) \rightarrow FGFM$ es un monomorfismo (ver Proposición 1.31,(5)), se sigue de la Observación 1.105 que $[\varphi(\tau)](FM) := \varepsilon_{FM}F(i_{FM})(F\tau(GFM)) \cong F\tau(GFM) \cong F\tau(M)$. Sean $\bar{i} : [\varphi(\tau)](FM) \hookrightarrow FM$ y $j : \tau(M) \hookrightarrow M$ las inclusiones naturales. Entonces $\bar{i} \approx F(j)$, de donde $\alpha_{[\varphi(\tau)](FM)}^{FM} = (\alpha_{[\varphi(\tau)](FM)}^{FM})_{\bar{i}} = (\alpha_{F\tau(M)}^{FM})_{F(j)} = \alpha_{F\tau(M)}^{FM}$ por el Lema 1.109 y en virtud de la Observación 1.107. A partir de lo anterior y de la Observación 1.111 se concluye que $\varphi(\alpha_{\tau(M)}^M) = \alpha_{F\tau(M)}^{FM} = \alpha_{[\varphi(\tau)](FM)}^{FM}$, que es lo que se quería verificar. \square

Dados un R -homomorfismo de anillos $f : R \rightarrow S$ y dos prerradicales $\tau \in R\text{-pr}$ y $\sigma \in S\text{-pr}$, es posible construir nuevos prerradicales sobre R y sobre S como se muestra a continuación.

DEFINICIÓN 1.113. [7, I.8] Sea $f : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Dados $\tau \in R\text{-pr}$ y $\sigma \in S\text{-pr}$, se definen los prerradicales $f[\tau], f\{\tau\}$ sobre S y $\{\sigma\}f, [\sigma]f$ sobre R como sigue:

- (1) Sea $N \in S\text{-Mod}$. Definimos $(f[\tau])(N) := S\tau(N)$; es decir, el S -submódulo de N generado por $\tau(N)$.
- (2) Sea $N \in S\text{-Mod}$. Definimos $(f\{\tau\})(N) := \{x \in N \mid Sx \leq \tau(N)\}$; esto es, el mayor S -submódulo de N contenido en $\tau(N)$.
- (3) Sea $M \in R\text{-Mod}$. Se define $(\{\sigma\}f)(M) := \{x \in M \mid x = g(1_S), g \in \sigma(\text{Hom}_R({}_R S, {}_R M))\}$, donde 1_S denota el elemento unitario del anillo S .
- (4) Sea $M \in R\text{-Mod}$. Se define $([\sigma]f)(M) := \{x \in M \mid (1_S \otimes x) \in \sigma(S \otimes_R M)\}$.

OBSERVACIÓN 1.114. Nótese que los prerradicales $f[\tau], f\{\tau\}, \{\sigma\}f$ y $[\sigma]f$ antes presentados están bien definidos. En particular, dado $M \in R\text{-Mod}$, se tiene una estructura de S -módulo izquierdo en el grupo abeliano $S_R \otimes_R M$, mediante la acción $s(t \otimes x) = st \otimes x$ para cualesquiera $s, t \in S$ y para todo $x \in M$. Asimismo, se puede dotar al grupo abeliano $\text{Hom}_R({}_R S, {}_R M)$ de estructura de S -módulo izquierdo, por medio de la acción $sg(t) := g(ts)$ para cada par de elementos $s, t \in S$ y para todo $g \in \text{Hom}_R({}_R S, {}_R M)$.

PROPOSICIÓN 1.115. [7, I.2, Ejercicios I.2.E4 y I.8.E7] Si $f : R \rightarrow S$ es un homomorfismo de anillos suprayectivo, entonces, dados $\sigma \in S\text{-pr}$ y $M \in R\text{-Mod}$, $(\{\sigma\}f)(M) = \sigma(v_f(M))$, donde $v_f(M)$ es el anulador (derecho) de $Nu(f)$ en M ; es decir $v_f(M) := \mathbf{r}_M(Nu(f)) = \{x \in M \mid Nu(f)x = 0\} = \{x \in M \mid rx = 0 \text{ para cada } r \in Nu(f)\}$.

PROPOSICIÓN 1.116. Sean R_1, \dots, R_n ideales distintos de cero de un anillo R tales que $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales de R . Para cada $i = 1, \dots, n$, sea $\pi_i : R \rightarrow R_i$ la i -ésima proyección canónica. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Para cada $i = 1, \dots, n$, $Nu(\pi_i) = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n R e_j$.
- (2) Dado $M \in R\text{-Mod}$, se tiene que $v_{\pi_i}(M) = e_i M$ para cada $i = 1, \dots, n$.

DEMOSTRACIÓN. (1). La condición se sigue de inmediato de la Proposición 1.34.

(2). Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $M \in R\text{-Mod}$. Si $x \in v_{\pi_i}(M)$, entonces $Nu(\pi_i)x = 0$. Sea $r_0 := e_1 + \dots + e_{i-1} + e_{i+1} + \dots + e_n$. Por la condición (1), $r_0 \in Nu(\pi_i)$. De lo anterior y del hecho de que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales de R se sigue que $x = (e_1 + \dots + e_n)x = e_i x + r_0 x = e_i x \in e_i M$. Por lo tanto, $v_{\pi_i}(M) \subseteq e_i M$. Para la otra contención, sea $x \in e_i M$. Entonces $x = e_i x_i$ para algún $x_i \in M$. Sea $r \in Nu(\pi_i)$. Nuevamente por (1), $r = r_1 e_1 + \dots + r_{i-1} e_{i-1} + r_{i+1} e_{i+1} + \dots + r_n e_n$ para algunos $r_j \in R$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Luego, puesto que $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq R$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales, se tiene que $rx = 0$; es decir, $x \in v_{\pi_i}(M)$. Por lo tanto, $e_i M \subseteq v_{\pi_i}(M)$, con lo que concluimos la demostración. \square

El lema que se presenta a continuación reúne algunas propiedades de los prerradicales presentados en la Definición 1.113 que nos serán de utilidad para probar el siguiente teorema.

LEMA 1.117. ([7, Ejercicios I.8.E2., I.8.E6. y I.8.E7.]) *Sea $f : R \rightarrow S$ un R -homomorfismo de anillos suprayectivo. Sean $\tau \in R\text{-pr}$ y $\sigma \in S\text{-pr}$. Entonces:*

- (1) $f\{\tau\} = f[\tau]$.
- (2) $\tau \preceq [f[\tau]]f$.
- (3) $\{f\{\tau\}\}f \preceq \tau$.
- (4) *Dados $\tau_1, \tau_2 \in R\text{-pr}$, se tiene que $f[\tau_1 \vee \tau_2] = f[\tau_1] \vee f[\tau_2]$.*

Cabe mencionar que las propiedades (2) y (3) del lema anterior se cumplen aun cuando el homomorfismo de anillos f no es suprayectivo.

TEOREMA 1.118. [7, Proposición I.9.1] *Sean R_1, \dots, R_n ideales distintos de cero de un anillo R tales que $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$. Sea $\pi_i : R \rightarrow R_i$ la i -ésima proyección canónica para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces existe un isomorfismo $\bar{\varphi}_n : R\text{-pr} \rightarrow R_1\text{-pr} \times \dots \times R_n\text{-pr}$ entre la (gran) retícula de prerradicales sobre R y el producto de las (grandes) retículas sobre R_i , definido como $\bar{\varphi}_n(\tau) := (\pi_1[\tau], \dots, \pi_n[\tau])$ para cada $\tau \in R\text{-pr}$, cuya inversa $\bar{\psi}_n : R_1\text{-pr} \times \dots \times R_n\text{-pr} \rightarrow R\text{-pr}$ está dada por*

$$\overline{\psi}_n((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) := \bigvee_{i=1}^n \{\sigma_i\}\pi_i = \bigwedge_{i=1}^n [\sigma_i]\pi_i \text{ para cualquier } (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in R_1\text{-pr} \times \dots \times R_n\text{-pr}.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que las asignaciones $\overline{\varphi}_n$ y $\overline{\psi}_n$ están bien definidas y que ambas preservan el orden en virtud de la definición de producto de retículas (véase la subsección 1.1 del Apéndice A). Luego, tanto $\overline{\varphi}_n$ como $\overline{\psi}_n$ son homomorfismos de clases parcialmente ordenadas o *clapos*. Veamos ahora que $\overline{\varphi}_n$ es un morfismo biyectivo con inversa $\overline{\psi}_n$. Sea $\tau \in R\text{-pr}$. Por un lado, se tiene que $\tau \preceq [\pi_i[\tau]]\pi_i$ para cada $i = 1, \dots, n$ por el inciso (2) del Lema 1.117. Por otra parte, en vista de los incisos (1) y (3) del mismo lema, tenemos que $\{\pi_i[\tau]\}\pi_i = \{\pi_i\{\tau\}\}\pi_i \preceq \tau$. Por tanto, $\overline{\psi}_n\overline{\varphi}_n(\tau) = \bigvee_{i=1}^n \{\pi_i[\tau]\}\pi_i \preceq \tau \preceq \bigwedge_{i=1}^n [\pi_i[\tau]]\pi_i = \overline{\psi}_n\overline{\varphi}_n(\tau)$, de donde $\overline{\psi}_n\overline{\varphi}_n(\tau) = \tau$.

Consideremos ahora un elemento $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in R_1\text{-pr} \times \dots \times R_n\text{-pr}$. A partir de las definiciones de los morfismos $\overline{\varphi}_n$ y $\overline{\psi}_n$ obtenemos que $\overline{\varphi}_n\overline{\psi}_n((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = (\pi_1[\bigvee_{i=1}^n \{\sigma_i\}\pi_i], \dots, \pi_n[\bigvee_{i=1}^n \{\sigma_i\}\pi_i]) = (\bigvee_{i=1}^n \pi_1[\{\sigma_i\}\pi_i], \dots, \bigvee_{i=1}^n \pi_n[\{\sigma_i\}\pi_i])$ por el inciso (4) del lema anterior. Ahora, sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y sea $M_j \in R_j\text{-Mod}$. Por definición, se tiene que $(\pi_j[\{\sigma_i\}\pi_i])(M_j)$ es el R_j -submódulo de M_j generado por $(\{\sigma_i\}\pi_i)(M_j)$. Ahora bien, en virtud de la Proposición 1.115, $(\{\sigma_i\}\pi_i)(M_j) = \sigma_i(v_{\pi_i}(M_j))$, de donde, como consecuencia de las proposiciones 1.37 y 1.116, $(\{\sigma_i\}\pi_i)(M_j) = \sigma_i(e_i M_j) = \sigma_i(\delta_{ij} M_j)$. De lo anterior se obtiene que:

$$(\pi_j[\{\sigma_i\}\pi_i])(M_j) = \begin{cases} \sigma_i(M_j), & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\overline{\varphi}_n\overline{\psi}_n((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Finalmente, puesto que tanto $\overline{\varphi}_n$ como $\overline{\psi}_n$ resultan ser isomorfismos de *clapos*, concluimos, en vista de la Proposición A.2, que dichos morfismos son también isomorfismos de (grandes) retículas. \square

Para profundizar en las definiciones y propiedades de los prerradicales, remitimos al lector a las referencias [6], [7], [47], [48], [49], [50] y [55].

5. Álgebras de carcaj y representaciones

Introducimos a continuación un poco de terminología y algunas propiedades fundamentales de la Teoría de Representaciones, más concretamente, de la teoría de carcajes. Dicha información se localiza en las referencias [2], [3] y [11].

Sea K un campo. Una K -álgebra es un anillo A que tiene una estructura de K -espacio vectorial compatible con la multiplicación de A ; es decir, tal que $k(ab) = (ak)b = a(kb) = (ab)k$ para todo $k \in K$ y para cualesquiera $a, b \in A$. Si A y B son K -álgebras, entonces un homomorfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ se dice un *homomorfismo de K -álgebras* si f es una K -aplicación lineal. Si f es además biyectivo, se llama un *isomorfismo de K -álgebras* y se escribe $A \cong B$. Dada una K -álgebra A , se define la K -álgebra opuesta de A , denotada por A^{op} , como la K -álgebra cuyo conjunto subyacente y cuya estructura de espacio vectorial son precisamente los de A , pero cuya multiplicación $*$ está dada por $a * b = ba$ para cualesquiera $a, b \in A$. Una K -álgebra es *de dimensión finita* si como K -espacio vectorial tiene dimensión finita. Asimismo, una K -álgebra es *hereditaria izquierda* si como anillo es hereditario izquierdo. Supongamos que A es una K -álgebra con un conjunto completo de elementos idempotentes ortogonales primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$. La K -álgebra A se llama *básica* en caso de que $Ae_i \not\cong Ae_j$ si $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ son tales que $i \neq j$.

Un *carcaj* es un grafo orientado, conexo y finito. Más precisamente, un carcaj consiste de un conjunto Q_0 cuyos elementos son llamados *vértices* y otro conjunto Q_1 de elementos llamados *flechas*, junto con dos funciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su vértice inicial $s(\alpha)$ y su vértice final $t(\alpha)$. Una flecha $\alpha \in Q_1$ con vértice inicial $a = s(\alpha)$ y vértice final $b = t(\alpha)$ se denota usualmente por $\alpha : a \rightarrow b$, o bien, por $a \xrightarrow{\alpha} b$.

Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y sean $a, b \in Q_0$. Un *camino de longitud $k \geq 1$* con vértice inicial a y vértice final b es una sucesión $(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k|b)$, donde $\alpha_i \in Q_1$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y se tiene que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y, finalmente, $t(\alpha_k) = b$. A cada $a \in Q_0$ se asocia un camino de longitud cero, llamado *camino trivial* o *estacionario*, al que se denota $e_a = (a||a)$. Un camino de longitud $k \geq 1$ se llama *ciclo* si sus vértices inicial y

final coinciden. Un carcaj se llama *acíclico* en caso de que no contenga ciclos. Un ejemplo de carcaj acíclico es el *carcaj de Kronecker*, el cual puede visualizarse como sigue: $a \begin{matrix} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{matrix} b$. Nos referiremos a este carcaj más adelante.

Dado un campo K , se define el *álgebra del carcaj* Q , denotada por KQ , también conocida como el *álgebra de caminos* (asociada al carcaj Q), como la K -álgebra cuyo K -espacio vectorial subyacente tiene por base el conjunto de todos los caminos en Q y tal que el producto de dos caminos está dado por la “concatenación” o “yuxtaposición” de los mismos en caso de que tenga sentido y cero en caso contrario.

PROPOSICIÓN 1.119. ([2, Corolario II.1.5]) *Sean K un campo y Q un carcaj. El elemento $\sum_{a \in Q_0} e_a$ es la identidad de KQ y la familia $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales para KQ .*

Dados un campo K y un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, definimos la categoría $\text{Rep}_K(Q)$ como sigue. Cada uno de los objetos de $\text{Rep}_K(Q)$, llamados *representaciones de Q* , consiste de un conjunto de K -espacios vectoriales $\{V_a \mid a \in Q_0\}$, junto con otro conjunto de K -aplicaciones lineales $\{\varphi_\alpha : V_a \rightarrow V_b \mid \alpha \in Q_1, s(\alpha) = a, t(\alpha) = b\}$. Tal representación se denota $(V_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ o, simplemente, (V_a, φ_α) . Por su parte, un *morfismo de representaciones* $f : (V_a, \varphi_\alpha) \rightarrow (V'_a, \varphi'_\alpha)$ es un conjunto de K -aplicaciones lineales $f = \{f_a : V_a \rightarrow V'_a \mid a \in Q_0\}$, compatibles con las funciones φ_α ; es decir, para cada $a \xrightarrow{\alpha} b \in Q_1$ se tiene que $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$, o, equivalentemente, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$(\ddagger) \quad \begin{array}{ccc} V_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & V_b \\ f_a \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_b \\ V'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & V'_b \end{array}$$

Una representación $V = (V_a, \varphi_\alpha)$ de Q es *de dimensión finita* si cada K -espacio vectorial V_a ($a \in Q_0$) es de dimensión finita.

Sean $V = (V_a, \varphi_\alpha)$ y $V' = (V'_a, \varphi'_\alpha)$ dos objetos en $\text{Rep}_K(Q)$. Se dice que V es un *subobjeto* de V' si $V_a \subseteq V'_a$ para cada $a \in Q_0$ y φ_α es la restricción de φ'_α al subconjunto V_a para cada $\alpha \in Q_1$. Por otra parte, se define la *suma directa* de V

y V' como el objeto $W = (W_a, \phi_\alpha)$ de $\text{Rep}_K(Q)$ tal que $W_a = V_a \oplus V'_a$ para cada $a \in Q_0$ y $\phi_\alpha = \varphi_\alpha \oplus \varphi'_\alpha$ para cada $\alpha \in Q_1$. Una representación (V_a, φ_α) de Q se llama *inescindible* si no es isomorfa a la suma directa de dos representaciones de Q distintas de cero.

Se suele denotar por $\text{rep}_K(Q)$ a la categoría de todas las representaciones de dimensión finita de Q y, por $\text{indrep}_K(Q)$, a un conjunto completo e irredundante de representantes de clases de isomorfismo de objetos inescindibles de $\text{rep}_K(Q)$, los cuales pueden elegirse de manera que, para cada $V \in \text{indrep}_K(Q)$, se tenga que, dado $a \in Q_0$, $V_a = 0$, o bien, $V_a = K^m$ para algún $m \geq 1$.

El siguiente teorema nos da la manera de “traducir” de módulos sobre un álgebra de carcaj a representaciones del carcaj y viceversa.

TEOREMA 1.120. ([2, Corolario III.1.7]) *Sean K un campo y Q un carcaj. Entonces las categorías $\text{Rep}_K(Q)$ y $KQ\text{-Mod}$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F' : \text{Rep}_K(Q) \rightarrow KQ\text{-Mod}$ el funtor definido como sigue. En objetos, dada una representación $V := (V_a, \varphi_\alpha)$, $F'(V) = \bigoplus_{a \in Q_0} V_a$. Es claro que $F'(V)$ es un K -espacio vectorial. Dotamos a $F'(V)$ de estructura de KQ -módulo de la siguiente manera. Sea $x = (x_a)_{a \in Q_0} \in \bigoplus_{a \in Q_0} V_a$ y sea w un camino en Q . Si w es un camino trivial; es decir, $w = e_a$ para algún $a \in Q_0$, entonces se define el producto wx como:

$$(wx)_c := \begin{cases} x_a & \text{si } c = a; \\ 0 & \text{si } c \neq a. \end{cases}$$

Si, por el contrario, $w = (a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|b)$ es un camino de longitud $l \geq 1$ con vértice inicial a y vértice final b , consideramos la K -aplicación lineal $\varphi_w := \varphi_{\alpha_l} \cdots \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_1} : V_a \rightarrow V_b$ y se define:

$$(wx)_c := \begin{cases} \varphi_w(x_a) & \text{si } c = b; \\ 0 & \text{si } c \neq b. \end{cases}$$

En otras palabras, wx es el elemento de $F'(V) = \bigoplus_{a \in Q_0} V_a$ cuya única coordenada distinta de cero es $(wx)_b = \varphi_w(x_a) \in V_b$ y el producto se extiende linealmente. No es difícil verificar que, con la acción antes definida, $\bigoplus_{a \in Q_0} V_a$

resulta ser un KQ -módulo. Enseguida definimos el functor F' en morfismos. Sea $f : (V_a, \varphi_a) \rightarrow (V'_a, \varphi'_a)$ un morfismo de representaciones en $\text{Rep}_K(Q)$. Entonces f es un conjunto de K -aplicaciones lineales, $\{f_a : V_a \rightarrow V'_a \mid a \in Q_0\}$, que son compatibles con las funciones φ_a . Queremos construir un morfismo de KQ -módulos $F'(f) : F'(V_a, \varphi_a) \rightarrow F'(V'_a, \varphi'_a)$. Sean $V := (V_a, \varphi_a)$ y $V' := (V'_a, \varphi'_a)$. Puesto que $F'(V) = \bigoplus_{a \in Q_0} V_a$ y $F'(V') = \bigoplus_{a \in Q_0} V'_a$, existe una K -aplicación lineal $g := \bigoplus_{a \in Q_0} f_a : F'(V) \rightarrow F'(V')$. Sea $F'(f) := g$. Afirmamos que $F'(f)$ es un KQ -homomorfismo de módulos. Sea w un camino con vértice inicial a y con vértice final b en Q y sea $x \in \bigoplus_{a \in Q_0} V_a$. Entonces $g(wx) = f_b(\varphi_w(x_a)) = \varphi'_b f_a(x_a) = wg(x)$ por la conmutatividad del diagrama (\dagger), lo que prueba nuestra afirmación. Por tanto, el functor F' está bien definido.

Construimos a continuación un functor $G' : KQ\text{-Mod} \rightarrow \text{Rep}_K(Q)$. Sea V un KQ -módulo. Se define $G'(V) = (V_a, \varphi_a)$, donde $V_a := e_a V$ para cada $a \in Q_0$ y, dada $a \xrightarrow{\alpha} b \in Q_1$, $\varphi_a : V_a \rightarrow V_b$ está dada como sigue. Sea $x \in V_a$, entonces $x = e_a x'$ para algún $x' \in V$. Se define $\varphi_a(x) := \alpha x = e_b \alpha e_a x'$. Puesto que V es un KQ -módulo, se sigue que φ_a es una K -aplicación lineal. Luego, $G'(V) \in \text{Rep}_K(Q)$. Ahora, sea $f : V \rightarrow V'$ un homomorfismo de KQ -módulos. Nos interesa definir un morfismo $G'(f) : G'(V) \rightarrow G'(V')$ en $\text{Rep}_K(Q)$. Observemos que, si $a \in Q_0$ y $x = e_a x' \in e_a V = V_a$, entonces $f(x) = f(e_a x') = f(e_a^2 x') = e_a f(e_a x') \in e_a V' = V'_a$. Por tanto, la restricción de f a V_a es una K -aplicación lineal $f_a : V_a \rightarrow V'_a$. Sea, pues, $G'(f) = \{f_a : V_a \rightarrow V'_a \mid a \in Q_0\}$. Sólo resta por probar que, para cada flecha $a \xrightarrow{\alpha} b$ en Q , conmuta el diagrama (\dagger). Para tal fin, sea $x \in V_a$. En vista de lo anterior, $f_b \varphi_a(x) = f_b(\alpha x) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha f_a(x) = \varphi'_b f_a(x)$, de donde, en efecto, $G'(f)$ es un morfismo de representaciones. Así, también el functor G' tiene sentido.

Finalmente, se prueba directamente que se tienen isomorfismos naturales $G'F' \rightarrow 1_{\text{Rep}_K(Q)}$ y $1_{KQ\text{-Mod}} \rightarrow F'G'$. De hecho, como se afirma en [11, Teoremas 4.3.1 y 4.3.2], dichos isomorfismos naturales son “casi la identidad”. En efecto, si $V := (V_a, \varphi_a) \in \text{Rep}_K(Q)$, entonces $G'F'(V) = (V'_a, \varphi'_a)$, con $V'_a = e_a(F'(V)) = V_a \oplus (\bigoplus_{b \neq a} 0)$. Por su parte, si $V \in KQ\text{-Mod}$, entonces $F'G'(V) = \bigoplus_{a \in Q_0} e_a V \cong V$ via el isomorfismo $t_V : V \rightarrow \bigoplus_{a \in Q_0} e_a V$ dado por $t_V(v) = (e_a v)_{a \in Q_0}$ para cada $v \in V$, con lo que concluimos la demostración. \square

Dentro de las técnicas de la Teoría de Representaciones, un hecho bien conocido es que, dado un carcaj conexo, finito y acíclico Q , el álgebra de caminos KQ siempre se puede pensar como un anillo de matrices triangulares formales (véase, por ejemplo, [2, Lema I.1.12]). En el caso particular del carcaj de Kronecker, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.121. ([2, Ejemplo II.1.13]) *Sean K un campo y Q el carcaj de Kronecker. Entonces existe un isomorfismo de K -álgebras*

$$KQ \cong \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{pmatrix},$$

donde K^2 es considerado como un K - K -bimódulo de manera natural; es decir, para cualesquiera $a, b, x, y \in K$, $a(x, y) = (ax, ay)$ y $(x, y)b = (xb, yb)$.

5.1. Álgebras de Artin de tipo de representación finito. Presentamos una breve reseña con las definiciones y resultados relativos a las álgebras de Artin de tipo de representación finito (junto con las referencias en donde pueden ser localizados) a los que apelaremos en la Sección 1.4 del Capítulo 2. Puesto que una exposición exhaustiva de los temas que aparecen en esta subsección rebasa el propósito del presente trabajo, nos permitimos de nuevo remitir al lector interesado en profundizar en los mismos a los textos [2] y [3].

DEFINICIÓN 1.122. *Se dice que un anillo R es de tipo de representación finito si es artiniano izquierdo y si existe un número finito de R -módulos izquierdos inescindibles finitamente generados (salvo isomorfismo).*

Dado un anillo R , $R\text{-ind}$ denota un conjunto completo e irredundante de representantes de clases de isomorfismo de R -módulos izquierdos inescindibles finitamente generados.

OBSERVACIÓN 1.123. *Si el carcaj Q es acíclico, las equivalencias inversas F' y G' definidas en el Teorema 1.120 definen una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $R\text{-ind}$ e $\text{indrep}_K(Q)$.*

OBSERVACIÓN 1.124. *En [16], D. Eisenbud y P. Griffith prueban que la condición de tipo de representación finito es simétrica; es decir, un anillo R es de tipo*

de representación finito si es artiniario derecho y el número de clases de isomorfismo de R -módulos derechos inescindibles finitamente generados es finito.

El concepto de K -álgebra, con K un campo, definido al inicio de esta sección, se generaliza como sigue. Sea R un anillo conmutativo y artiniario. Una R -álgebra es un anillo Λ que tiene estructura de R -módulo compatible con la multiplicación de Λ .

DEFINICIÓN 1.125. ([3]) Sea R un anillo conmutativo y artiniario. Se dice que una R -álgebra Λ es una R -álgebra de Artin o, simplemente, un álgebra de Artin, si Λ es finitamente generada como R -módulo.

TEOREMA 1.126. (Auslander - Ringel - Tachikawa, 1974) Sea Λ un álgebra de Artin de tipo de representación finito; es decir, como anillo, Λ es de tipo de representación finito. Entonces todo Λ -módulo es una suma directa de Λ -módulos inescindibles finitamente generados.

OBSERVACIÓN 1.127. Nótese que, en virtud del teorema anterior, las álgebras de Artin de tipo de representación finito Λ son anillos \mathcal{I} -Köthe, con $\mathcal{I} = R$ -ind.

A continuación presentamos el famoso Teorema de Gabriel, enunciado en [26], el cual establece la existencia de una correspondencia biunívoca entre álgebras hereditarias básicas de dimensión finita e inescindibles sobre un campo algebraicamente cerrado y carcajes finitos conexos sin ciclos orientados.

TEOREMA 1.128. (Gabriel, 1972)
Sea K un campo algebraicamente cerrado y sea Λ una K -álgebra (inescindible y básica) de dimensión finita. Entonces existen un carcaj conexo y finito Q y un ideal finitamente generado $I < KQ$ tal que $\Lambda \cong KQ/I$. Más aún, si Λ es hereditaria, entonces Q es acíclico y se cumple que $I = 0$.

El carcaj Q al que hace referencia el Teorema de Gabriel está determinado de manera única por la K -álgebra Λ y se llama el *carcaj de Gabriel*²⁰ de Λ .

²⁰O carcaj ordinario

El célebre resultado que presentamos a continuación caracteriza a las álgebras de Artin hereditarias de tipo de representación finito en términos de su carcaj de Gabriel asociado.

TEOREMA 1.129. ([3, Teorema VIII.5.5]) *Sea K un campo algebraicamente cerrado y sea Λ una K -álgebra (inescindible y básica) de dimensión finita. Sea Q el carcaj de Gabriel de Λ y supongamos que Λ es hereditaria; es decir, $\Lambda \cong KQ$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) Λ es de tipo de representación finito.
- (b) Q es de tipo Dynkin; es decir, la gráfica subyacente a Q corresponde a uno de los siguientes diagramas:

$$\mathbb{A}_n : \quad a_1 \text{ --- } a_2 \text{ --- } a_3 \text{ --- } \cdots \text{ --- } a_{n-1} \text{ --- } a_n$$

$$\mathbb{D}_n : \quad \begin{array}{c} a_1 \\ \diagdown \\ a_3 \text{ --- } a_4 \text{ --- } \cdots \text{ --- } a_{n-1} \text{ --- } a_n \\ \diagup \\ a_2 \end{array}$$

$$\mathbb{E}_6 : \quad \begin{array}{c} a_3 \\ | \\ a_4 \text{ --- } a_5 \text{ --- } a_6 \\ | \\ a_1 \text{ --- } a_2 \text{ --- } a_4 \end{array}$$

$$\mathbb{E}_7 : \quad \begin{array}{c} a_3 \\ | \\ a_4 \text{ --- } a_5 \text{ --- } a_6 \text{ --- } a_7 \\ | \\ a_1 \text{ --- } a_2 \text{ --- } a_4 \end{array}$$

$$\mathbb{E}_8 : \quad \begin{array}{c} a_3 \\ | \\ a_4 \text{ --- } a_5 \text{ --- } a_6 \text{ --- } a_7 \text{ --- } a_8 \\ | \\ a_1 \text{ --- } a_2 \text{ --- } a_4 \end{array}$$

OBSERVACIÓN 1.130. ([2, VII, pág. 243 y Teorema VII.5.10]) *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico y sea A una K -álgebra. Entonces $A \cong KQ$ si, y sólo si, A es hereditaria. Más aún, si $A = KQ$, entonces A es de tipo de representación finito si, y sólo si, la gráfica subyacente a Q corresponde a uno de los diagramas de Dynkin listados en el teorema anterior.*

Antes de proseguir, necesitamos hacer una pausa para introducir algunos conceptos que nos serán de utilidad para probar el teorema principal de la subsección 1.3.1 de este capítulo; a saber, los de morfismo irreducible y radical de $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ para un álgebra de Artin Λ .

Sean M, N módulos. Un homomorfismo $f : M \rightarrow N$ se llama *morfismo irreducible* si f no es un monomorfismo que se escinde ni un epimorfismo que se escinde y, siempre que $f = kh$ para algunos homomorfismos $h : M \rightarrow X$ y $k : X \rightarrow N$ y para algún módulo X , ocurre que h es un monomorfismo que se escinde o k es un epimorfismo que se escinde.

Sea Λ un álgebra de Artin y sean $M, N \in \Lambda\text{-Mod}$. Se define el *radical* de $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$, denotado por $\text{rad}_\Lambda(M, N)$, como $\text{rad}_\Lambda(M, N) = \{f \in \text{Hom}_\Lambda(M, N) \mid hfg \text{ no es un isomorfismo para cualesquiera } X \in \Lambda\text{-ind, } g : X \rightarrow M, h : N \rightarrow X\}$.

PROPOSICIÓN 1.131. ([3, Ejercicio V.7]) *Sean M, N dos módulos inescindibles no isomorfos sobre un álgebra de Artin Λ . Entonces $\text{rad}_\Lambda(M, N) = \text{Hom}_\Lambda(M, N)$.*

PROPOSICIÓN 1.132. ([3, Teorema V.7.8]) *Sea Λ un álgebra de Artin de tipo de representación finito y sean $M, N \in \Lambda\text{-Mod}$ y $f \in \text{rad}_\Lambda(M, N)$. Entonces se tiene que f es una suma de composiciones de morfismos irreducibles entre módulos inescindibles.*

El *carcaj de Auslander-Reiten* de un álgebra de Artin Λ , usualmente denotado por Γ_Λ , registra la información de la categoría de Λ -módulos finitamente generados, $\Lambda\text{-mod}$. Este carcaj se define como sigue. Los vértices de Γ_Λ son las clases de isomorfismo $[M]$, con $M \in \Lambda\text{-ind}$, y hay una flecha entre dos vértices $[M]$ y $[N]$ de Γ_Λ si existe un morfismo irreducible $f : M \rightarrow N$.

Dada un álgebra de Artin Λ , el *dual transpuesto*, $D\text{Tr} : \Lambda\text{-mod} \rightarrow \Lambda\text{-mod}$, es la composición de dos dualidades: el funtor $\text{Tr} : \Lambda\text{-mod} \rightarrow \Lambda^{\text{op}}\text{-mod}$, llamado el funtor *transpuesto* o *transposición* (ver [2, IV.2] y [3, IV.1]), y el funtor contravariante *dual* o *dualidad* $D : \Lambda^{\text{op}}\text{-mod} \rightarrow \Lambda\text{-mod}$ (véase [3, II.3]).

Sea Λ un álgebra de Artin hereditaria. $M \in \Lambda\text{-ind}$ se dice *preproyectivo* si existe $n \geq 0$ tal que $(D\text{Tr})^n(M) \in \Lambda\text{-ind}$ es un módulo proyectivo distinto de cero. Por su parte, $M \in \Lambda\text{-ind}$ es *preinyectivo* si existe $n \geq 0$ tal que $(\text{Tr}D)^n(M) \in \Lambda\text{-ind}$ es un módulo inyectivo distinto de cero. Un Λ -módulo arbitrario se llama

preproyectivo (preinyectivo) si es isomorfo a una suma directa de Λ -módulos preproyectivos (preinyectivos) inescindibles.

PROPOSICIÓN 1.133. [3, Proposición VIII.1.13] *Las siguientes condiciones son equivalentes para un álgebra de Artin hereditaria Λ :*

- (a) Λ es de tipo de representación finito.
- (b) Todo Λ -módulo es preproyectivo.
- (c) Todo Λ -módulo es preinyectivo.

PROPOSICIÓN 1.134. [2, Lema VIII.2.7] *Sea Λ una K -álgebra sobre un campo algebraicamente cerrado K y sea M un Λ -módulo preproyectivo (o preinyectivo) inescindible. Entonces $\text{End}^r(M) \cong K$.*

Como consecuencia de las dos últimas proposiciones se tiene el siguiente corolario.

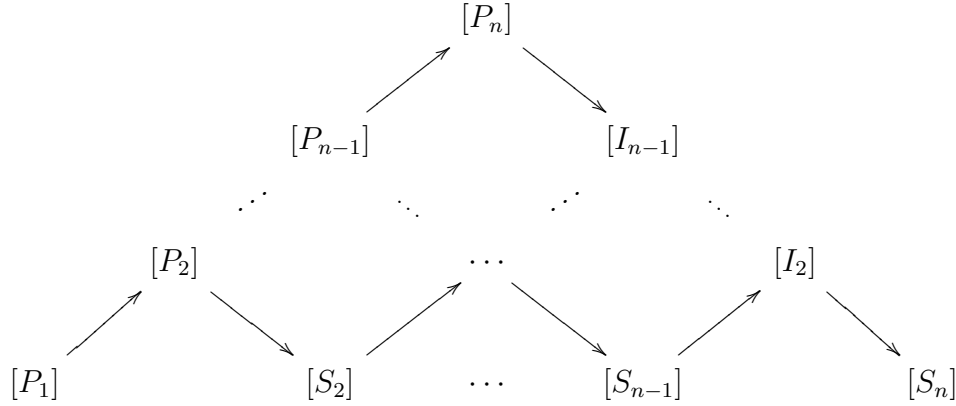
COROLARIO 1.135. *Sea K un campo algebraicamente cerrado y sea $\Lambda = KQ$, con Q un diagrama de tipo Dynkin. Si $M \in \Lambda\text{-ind}$, entonces todo submódulo de M es totalmente invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \in \Lambda\text{-ind}$ y sea $\text{End}^r({}_\Lambda M)$ el anillo de endomorfismos de M operando por la derecha. Primero notemos que, por la definición de K -álgebra, existe un monomorfismo de anillos $f : K \rightarrow \Lambda$, tal que $f(k) = k1$ para cada $k \in K$, de manera que K actúa centralmente en Λ . Luego, M es un K -módulo. Por otro lado, en virtud de las proposiciones 1.133 y 1.134, existe un isomorfismo de anillos $\text{End}^r({}_\Lambda M) \rightarrow K$, de donde M es un $\text{End}^r({}_\Lambda M)$ -módulo. Por lo tanto, todo submódulo de M es totalmente invariante, con lo que concluimos la demostración. \square

EJEMPLO 1.136. *Sea $\Lambda = KQ$, donde K es un campo algebraicamente cerrado y Q es el carcaj de tipo Dynkin \mathbb{A}_n , con la orientación canónica:*

$$a_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} a_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1$$

Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de Λ es el siguiente (ver el Capítulo 7 de [3] para los detalles).



donde $\{P_1, \dots, P_n\}$ es un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de Λ -módulos proyectivos inescindibles y, para cada $i = 2, \dots, n$, $S_i = P_i/\text{Rad}(P_i)$ e $I_i = P_n/\text{Rad}^i(P_n)$.

Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un carcaj finito. La *forma cuadrática de Tits* de Q es una función $q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que, para cada $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$,

$$q_Q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{i, j \in Q_0} d_{ij} x_i x_j$$

donde d_{ij} es el número de flechas de i a j en Q_1 . Una *raíz positiva* de q_Q es un elemento $x \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ tal que $x_i \geq 0$ y $q_Q(x) = 1$.

Sea Λ una K -álgebra de Artin hereditaria de tipo de representación finito sobre un campo algebraicamente cerrado K . Sea Q el carcaj de Gabriel de Λ y sea q_Q la forma cuadrática de Tits de Q . Existe una correspondencia biunívoca entre los Λ -módulos inescindibles y las raíces positivas de q_Q y, también, como se establece en la siguiente proposición, hay una correspondencia biunívoca entre los elementos inescindibles de $\text{rep}_K(Q)$ y las raíces positivas de q_Q .

PROPOSICIÓN 1.137. [9] *Sea Λ un álgebra de Artin hereditaria de tipo de representación finito sobre un campo algebraicamente cerrado K , con carcaj de Gabriel asociado Q . Si q_Q es la forma cuadrática de Tits de Q y \mathcal{R}_Q^+ denota el conjunto de raíces positivas de q_Q , entonces la función $\underline{\epsilon} : \text{indrep}_K(Q) \rightarrow \mathcal{R}_Q^+$, tal*

que, para cada $V = (V_a, \varphi_a) \in \text{indrep}_K(Q)$, $\underline{\epsilon}(V) = (\dim_K(V_a))_{a \in Q_0}$ (donde, para cada $a \in Q_0$, $\dim_K(V_a)$ es la dimensión del K -espacio vectorial V_a) es biyectiva.

Para los detalles de la prueba de la proposición anterior, remitimos al lector a [**3**, Teorema VIII.6.3].

Antecedentes e indicios

Este capítulo tiene como objetivo exhibir algunas clases de anillos cuyas retículas de prerradicales ya han sido investigadas (y, en algunos casos, completamente descritas), que fueron nuestro punto de partida y principal motivación para estudiar la conexión entre las siguientes condiciones de un anillo R :

- (i) R es artiniiano.
- (ii) R -pr es un conjunto.

Para tal fin, el capítulo ha sido dividido en dos secciones. En la primera sección se presentan diversas clases de anillos que satisfacen las condiciones (i) y (ii) anteriores, mientras que en la segunda sección se introduce una clase de anillos que no cumplen ninguna de ellas.

1. Algunos anillos p -pequeños y artinianos

En esta sección incluimos una lista de ejemplos de anillos sobre los cuales la retícula de prerradicales es un conjunto (en algunos casos, finito; en otros, no finito) y que tienen la propiedad de ser todos artinianos. Dichas clases de anillos han sido estudiadas desde el punto de vista de prerradicales en [47], [48], [21] y [22].

Para abreviar, introducimos una terminología que designa a los anillos R tales que R -pr es un conjunto.

DEFINICIÓN 2.1. *Decimos que un anillo R es p -pequeño si R -pr es un conjunto.*

1.1. Anillos semisimples. Comenzamos por el caso de los anillos semisimples y, en concreto, con una notable caracterización de esta clase de anillos en términos de su retícula de prerradicales, presentada en [47].

TEOREMA 2.2. ([47, Teorema 11]) *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

- (a) R es semisimple.
- (b) R -pr es una retícula booleana finita.
- (c) $\widehat{\mathcal{I}} = \bigvee \{\alpha_S^S \mid S \in R\text{-simp}\} = \text{Zoc}(-)$.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Probaremos que las retículas $\mathcal{P}(R\text{-simp})$ y R -pr son isomorfas, donde $\mathcal{P}(R\text{-simp})$ denota el conjunto potencia de $R\text{-simp}$. Sea $\varphi : \mathcal{P}(R\text{-simp}) \rightarrow R\text{-pr}$ tal que, para cada $A \in \mathcal{P}(R\text{-simp})$, $\varphi(A) = \bigvee_{S \in A} \alpha_S^S$. Claramente el morfismo φ está bien definido. Veamos ahora que φ es biyectiva. Para la inyectividad, sean $A, B \subseteq R\text{-simp}$ tales que $A \neq B$. Sea $T \in B \setminus A$. Entonces, para cada $S \in A$, $\alpha_S^S(T) = 0$ por la Observación 1.41. Luego, por un lado, $(\varphi(A))(T) = (\bigvee_{S \in A} \alpha_S^S)(T) = \sum_{S \in A} \alpha_S^S(T) = 0$. Por otra parte, de la Observación 1.93 se sigue que $T = \alpha_T^T(T) \leq (\bigvee_{S \in B} \alpha_S^S)(T) = (\varphi(B))(T)$. Por lo tanto, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ como prerradicales, de donde φ es inyectiva. Ahora, para la suprayectividad de φ , sea $\sigma \in R\text{-pr}$ y sea $A_\sigma := \{S \in R\text{-simp} \mid \alpha_S^S \preceq \sigma\}$. Se afirma que, dado $S \in R\text{-simp}$,

$$\sigma(S) = \begin{cases} S, & \text{si } S \in A_\sigma; \\ 0, & \text{si } S \notin A_\sigma. \end{cases}$$

En efecto, si $S \in A_\sigma$, entonces, por la Observación 1.93, $S = \alpha_S^S(S) \leq \sigma(S)$. Por otro lado, de la definición de prerradical se tiene que $\sigma(S) \leq S$, de donde $\sigma(S) = S$. Supongamos ahora que $S \notin A_\sigma$. Entonces debe ocurrir que $\sigma(S) = 0$, ya que, de lo contrario, $\sigma(S) = S$ al ser S un R -módulo simple. Luego, nuevamente por la Proposición 1.97, $\alpha_S^S \preceq \sigma$, lo que es una contradicción. Ahora, recordemos que, por la Proposición 1.98, $\sigma = \bigvee \{\alpha_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod}\}$. Por otro lado, en vista de la Proposición 1.39, para cada $M \in R\text{-Mod}$, resulta que $M = \bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_{S,M})}$, donde, para cada $S \in R\text{-simp}$, $S^{(X_{S,M})}$ designa a la suma directa de cardinal $X_{S,M}$ copias de S , con $|X_{S,M}| \geq 0$ para cada $S \in R\text{-simp}$. Se sigue de la Proposición 1.78 que $\sigma(M) = \sigma(\bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_{S,M})}) = \bigoplus_{R\text{-simp}} (\sigma(S))^{(X_{S,M})}$ para cada $M \in R\text{-Mod}$, de manera que $\sigma = \bigvee \left\{ \alpha_{\bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_{S,M})}}^{\bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_{S,M})}} \mid M \in R\text{-Mod} \right\} =$

$\bigvee_{M \in R\text{-Mod}} \left(\bigvee_{S \in R\text{-simp}} \alpha_{(\sigma(S))^{(X_S, M)}}^{S^{(X_S, M)}} \right) = \bigvee_{S \in \mathcal{A}} \alpha_{\sigma(S)}^S$ para algún $\mathcal{A} \subseteq R\text{-simp}$ en virtud de la Proposición 1.103. Por lo anterior y en vista de la afirmación, si $A'_\sigma := A_\sigma \cap \mathcal{A}$, entonces $\sigma = \left(\bigvee_{S \in A'_\sigma} \alpha_{\sigma(S)}^S \right) \vee \left(\bigvee_{S \notin A'_\sigma} \alpha_{\sigma(S)}^S \right) = \bigvee_{S \in A'_\sigma} \alpha_{\sigma(S)}^S = \varphi(A'_\sigma)$. Por lo tanto, φ es suprayectiva. Concluimos que φ es un morfismo biyectivo.

A continuación, veamos que φ es un morfismo de orden. Sean $A, B \subseteq R\text{-simp}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces, claramente, $\varphi(A) = \bigvee_{S \in A} \alpha_S^S \preceq \bigvee_{S \in B} \alpha_S^S = \varphi(B)$. Recíprocamente, por un razonamiento similar al aplicado para probar la inyectividad de φ , si $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ para algunos $A, B \subseteq R\text{-simp}$ y $A \not\subseteq B$, entonces existe $S \in A \setminus B$. Luego, para cada $T \in B$, $\alpha_T^T(S) = 0$, de donde, por un lado, $(\varphi(B))(S) = 0$ y, por otra parte, $S = \alpha_S^S(S) \leq (\varphi(A))(S)$, en contradicción con nuestra suposición de que $\varphi(A) \leq \varphi(B)$. Concluimos que, dados $A, B \subseteq R\text{-simp}$, $A \subseteq B$ si, y sólo si, $\varphi(A) \leq \varphi(B)$; es decir, φ es un isomorfismo de *copos* y, en virtud de la Proposición A.2, φ es también un isomorfismo de retículas.

Finalmente, la condición (b) del teorema se sigue del hecho de que $\mathcal{P}(R\text{-simp})$ es una retícula booleana. Más aún, de lo anterior resulta que si $|R\text{-simp}| = n$ para algún $n \geq 1$, entonces $R\text{-pr}$ es una retícula finita, de cardinalidad 2^n .

(b) \Rightarrow (c). Supongamos que $R\text{-pr}$ es una retícula booleana. Como $R\text{-pr}$ es una (gran) retícula completa y atómica, se sigue del comentario posterior a la Proposición A.4¹ y de la Proposición 1.100 que, dado $\sigma \in R\text{-pr}$, $\sigma = \bigvee \{ \alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-simp}, \alpha_S^{ES} \preceq \sigma \}$. En particular, $\hat{1} = \bigvee \{ \alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-simp} \}$. Luego, dado $S' \in R\text{-simp}$, se tiene que $ES' = (\bigvee_{R\text{-simp}} \alpha_S^{ES})(ES') = \sum_{R\text{-simp}} \alpha_S^{ES}(ES') = S'$. Por lo tanto, $ES = S$ para todo $S \in R\text{-simp}$. Concluimos que $\hat{1} = \bigvee \{ \alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-simp} \} = \bigvee \{ \alpha_S^S \mid S \in R\text{-simp} \} = \text{Zoc}(-)$ por la Observación 1.94.

(c) \Rightarrow (a). Por hipótesis, $\text{Zoc}(M) = M$ para cada $M \in R\text{-Mod}$, de donde todo R -módulo es semisimple por la Observación 1.38. Se sigue del Teorema 1.48 que R es semisimple. \square

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se obtiene el siguiente:

COROLARIO 2.3. *Todo anillo semisimple es p -pequeño.*

¹la prueba de este hecho se puede extender a grandes retículas (véase la Sección 3 del Apéndice A)

Estamos por presentar otra interesante caracterización de los anillos semisimples en términos de preradicales que también aparece en [47]. Para la prueba de dicho resultado, al que nos referiremos en el Capítulo 4, se requiere el siguiente lema.

LEMA 2.4. *Dado un anillo R , sea $\sigma := \omega_I^R \in R\text{-pr}$, con I un ideal máximo de R . Si σ es un t -radical, entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) $\sigma = \omega_0^{R/I}$.
- (2) Existe $S \in R\text{-simp}$ tal que $\sigma = \omega_0^S$.
- (3) El anillo R/I es semisimple.
- (4) Existe un homomorfismo $f : R/I \rightarrow R$ tal que $f(R/I)$ es un submódulo semisimple de R y $f(R/I) \not\subseteq I$.

DEMOSTRACIÓN. (1). Por un lado, se tiene que $\omega_0^{R/I}(R) = \bigcap \{Nu(g) \mid g \in \text{Hom}_R(R, R/I)\}$. Luego, considerando la proyección natural $p_I : R \rightarrow R/I \in \text{Hom}_R(R, R/I)$, se cumple que $\omega_0^{R/I}(R) \leq I$, lo cual implica que $\omega_0^{R/I} \preceq \omega_I^R = \sigma$ en virtud de la Proposición 1.97. Por otro lado, puesto que $\sigma = \omega_I^R$ es, por hipótesis, un t -radical, se sigue de la Observación 1.88 que es también un radical. Luego, por la Proposición 1.76, $\omega_I^R(R/I) = 0$, de donde, nuevamente por la Proposición 1.97, $\sigma = \omega_I^R \preceq \omega_0^{R/I}$. Por lo tanto, $\omega_0^{R/I} = \omega_I^R = \sigma$.

(2). Sea ${}_R J$ un ideal izquierdo máximo de R tal que $I \leq J$. Entonces, por la Observación 1.42, $S := R/J$ es un R -módulo simple. Ahora, como $\sigma = \omega_I^R$ es un t -radical por hipótesis, se tiene que $\sigma(S) = \omega_I^R(S) = \omega_I^R(R)S = I(R/J) = 0$, de donde $\sigma = \omega_I^R \preceq \omega_0^S$ por la Proposición 1.97. Más aún, al ser ω_I^R un coátomo de $R\text{-pr}$ en vista de la Proposición 1.100 (y toda vez que, claramente, $\omega_0^S \neq \widehat{1}$), debe ocurrir que $\sigma = \omega_0^S$.

(3). En virtud de (2), existe un R -módulo simple S tal que $\sigma(S) = \omega_0^S(S) = 0$ por la Observación 1.93. Luego, por (1), debe ocurrir también que $\omega_0^{R/I}(S) = 0$. Lo anterior implica la existencia de un monomorfismo $S \rightarrow (R/I)^X$ para algún conjunto X ; es decir, existe un monomorfismo $S \hookrightarrow (R/I)$. Así, R/I es un anillo simple que contiene un ideal izquierdo simple. En consecuencia, $\text{Zoc}(R/I) \neq 0$, de donde, al ser $\text{Zoc}(R/I)$ un ideal de R/I , $\text{Zoc}(R/I) = R/I$. Por lo tanto, R/I es un anillo semisimple.

(4). De (1) se sigue que $\omega_I^R(R/I) = 0$. Luego, existe un homomorfismo $f : R/I \rightarrow R$ tal que $f^{-1}(I) \subsetneq R/I$; esto es, existe $a + I \in R/I$ tal que $f(a + I) \notin I$. Se sigue de lo anterior y de la Proposición 1.40 que $f(R/I)$ es un submódulo semisimple de R tal que $f(R/I) \not\subseteq I$. \square

TEOREMA 2.5. ([47, Teorema 13]) *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

- (a) R es semisimple.
- (b) Todo coátomo de R -pr es t -radical.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). En vista del Teorema 2.2, R -pr es una retícula booleana, de donde, para cada $\sigma \in R$ -pr, existe un único $\sigma^c \in R$ -pr tal que $\sigma \vee \sigma^c = \hat{1}$ y $\sigma \wedge \sigma^c = \hat{0}$. Luego, por un lado, ${}_R R = \sigma(R) \oplus \sigma^c(R)$ y, para cada $M \in R$ -Mod, $M = \sigma(M) \oplus \sigma^c(M)$. Por otro lado, se tiene también que $M = \sigma(R)M \oplus \sigma^c(R)M$ para cada $M \in R$ -Mod en virtud de la Proposición 1.34 y de la Observación 1.36. Lo anterior implica que $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para cada $M \in R$ -Mod. Se sigue que todo prerradical es un t -radical. En particular, todo coátomo de R -pr lo es.

(b) \Rightarrow (a). Si $\text{Zoc}(R) \neq R$, entonces existe un ideal máximo $I \leq R$ tal que $\text{Zoc}(R) \leq I$. Consideremos el prerradical $\sigma := \omega_I^R$. Entonces σ es un coátomo de R -pr por la Proposición 1.100, de donde, por hipótesis, σ es un t -radical. Luego, en virtud del Lema 2.4, (4), existe un homomorfismo $f : R/I \rightarrow R$ tal que $f(R/I)$ es un submódulo semisimple de R y $f(R/I) \not\subseteq I$. Se sigue que $f(R/I) \leq \text{Zoc}(R) \leq I$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\text{Zoc}(R) = R$, lo cual implica, por la Proposición 1.99, que $\text{Zoc}(-) = \hat{1}$. Concluimos de la Proposición 2.2 que R es un anillo semisimple. \square

1.2. Anillos locales uniseriales. Consideramos a continuación el caso de los anillos locales uniseriales, definidos en la subsección 3.3 del Capítulo anterior. Observemos que, como consecuencia del Corolario 1.55 y del hecho de que los prerradicales preservan sumas directas, cualquier prerradical sobre un anillo local uniserial está completamente determinado por su comportamiento sobre los ideales del anillo. Más aún, cualquiera de estos prerradicales tiene la restricción

dada por la siguiente proposición. Para ser consistentes con la notación usada en [21], en adelante denotaremos a los ideales de un anillo local uniserial R (con serie de composición $0 = J^n < J^{n-1} < \dots < J^2 < J < R$, donde J es el radical de Jacobson de R) por $I_i := J^{n-i}$ para cada $0 \leq i \leq n$.

PROPOSICIÓN 2.6. [21, Proposición 3.1] *Sea R un anillo local uniserial con serie de composición de longitud n y sea $\sigma \in R$ -pr. Sea $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Si $\sigma(I_k) = I_r$ para algún $r \in \{0, 1, \dots, k\}$, entonces $\sigma(I_{k+1}) = I_r$ o bien $\sigma(I_{k+1}) = I_{r+1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\sigma(I_k) = I_r$ y $\sigma(I_{k+1}) = I_s$. Entonces $I_r \leq I_s$. Por otro lado, al ser R un anillo de ideales principales, se tiene que $I_{n-1} = J = Rz$ para algún $z \in R$, donde J es el radical de Jacobson de R . Consideremos el R -homomorfismo $f : I_{k+1} \rightarrow I_k$ tal que $f(x) = xz$. No es difícil verificar que, para cada $i \in \{n-k-1, \dots, n-1\}$, se cumple $f(J^i) = J^{i+1}$. Luego, $I_{s-1} = f(I_s) = f(\sigma(I_{k+1})) \leq \sigma(I_k) = I_r$. Concluimos que $I_s = I_r$ ó $I_s = I_{r+1}$. \square

DEFINICIÓN 2.7. *Para cada $n \geq 1$ se define el conjunto de sucesiones binarias de longitud n , denotado por B_n , como el conjunto $\{0, 1\}^n$, donde $0, 1 \in \mathbb{Z}$.*

DEFINICIÓN 2.8. *Dado $n \geq 1$, se define un orden parcial sobre el conjunto B_n de la siguiente manera. Sean $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in B_n$, entonces $a \leq b$ si $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$.*

PROPOSICIÓN 2.9. *Dado $n \geq 1$, el copo $\langle B_n, \leq \rangle$ antes definido resulta ser una retícula, con supremo e ínfimo descritos como sigue:*

(1) $a \vee b = (c_1, \dots, c_n)$, donde $c_1 = \max\{a_1, b_1\}$ y, para cada $k \in \{2, \dots, n\}$,

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{si } \max \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i \right\} = \max \left\{ \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i \right\}; \\ 1, & \text{si } \max \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i \right\} \neq \max \left\{ \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i \right\}. \end{cases}$$

(2) $a \wedge b = (d_1, \dots, d_n)$, donde $d_1 = \min\{a_1, b_1\}$ y, para cada $k \in \{2, \dots, n\}$,

$$d_k = \begin{cases} 0, & \text{si } \min \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i \right\} = \min \left\{ \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i \right\}; \\ 1, & \text{si } \min \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i \right\} \neq \min \left\{ \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i \right\}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $a, b \in B_n$. Aplicando inducción sobre k , se verifica que si $a \vee b = (c_1, \dots, c_n)$ y $a \wedge b = (d_1, \dots, d_n)$, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^k c_i = \max \left\{ \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i \right\}$ y $\sum_{i=1}^k d_i = \min \left\{ \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k b_i \right\}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. En vista de lo anterior, se sigue de inmediato que $a \vee b$ y $a \wedge b$ satisfacen las propiedades de supremo e ínfimo, respectivamente, de a y b en B_n . \square

PROPOSICIÓN 2.10. [21, Proposición 4.1] *Sea R un anillo local uniserial con serie de composición de longitud n . Entonces $R\text{-pr}$ y B_n son retículas isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos la función $\phi_n : R\text{-pr} \rightarrow B_n$, tal que, para toda $\sigma \in R\text{-pr}$, $\phi_n(\sigma) = (a_1, \dots, a_n)$, donde:

$$a_k := \begin{cases} 0, & \text{si } \sigma(I_k) = \sigma(I_{k-1}); \\ 1, & \text{si } \sigma(I_k) \neq \sigma(I_{k-1}) \end{cases}$$

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$.

Definimos también la función $\psi_n : B_n \rightarrow R\text{-pr}$, tal que, dado $(a_1, \dots, a_n) \in B_n$,

$$\psi_n(a_1, \dots, a_n) := \bigvee_{k=1}^n \alpha_{I_{\sum_{i=1}^k a_i}}^{I_k}.$$

Notemos en primer lugar que ambas funciones están bien definidas. Presentamos enseguida una observación importante. Sea $\sigma \in R\text{-pr}$ tal que $\sigma(I_1) = I_{j_1}$, $\sigma(I_2) = I_{j_2}$, \dots , $\sigma(I_n) = I_{j_n}$, con $j_k \in \{0, 1, \dots, n\}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. De la Proposición 2.6 se sigue que $j_k = j_{k-1}$ ó $j_k = j_{k-1} + 1$ para cada $j_k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que $\phi_n(\sigma) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_n$. Entonces, se tiene que $\sum_{i=1}^k a_i = j_k$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Probaremos por inducción sobre k esta aseveración. Claramente $a_1 = j_1$. Supongamos que $\sum_{i=1}^{k-1} a_i = j_{k-1}$ para $k > 2$. Si $j_k = j_{k-1}$, entonces $a_k = 0$ y se tiene que

$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k = j_{k-1} + 0 = j_{k-1} = j_k$. Si, por el contrario, $j_k = j_{k-1} + 1$, entonces $a_k = 1$ y tenemos que $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k = j_{k-1} + 1 = j_k$.

Afirmamos que ϕ_n es una función biyectiva con inversa ψ_n . En efecto, sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces, se sigue de la Proposición 1.98 que $\sigma = \bigvee \{ \alpha_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod} \}$. Ahora, por el Corolario 1.55, cada $M \in R\text{-Mod}$ se escribe como $M = I_1^{(X_1)} \oplus \cdots \oplus I_n^{(X_n)}$, donde, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, $I_k^{(X_k)}$ designa a la suma directa de cardinal X_k copias de I_k . Por tanto,

$$\sigma = \bigvee \left\{ \alpha_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod}, M = I_1^{(X_1)} \oplus \cdots \oplus I_n^{(X_n)} \right\},$$

donde $\sigma(M) = (\sigma(I_1))^{(X_1)} \oplus \cdots \oplus (\sigma(I_n))^{(X_n)}$. Luego, por la Proposición 1.103,

$$\sigma = \bigvee \left\{ \bigvee_{k=1}^n \alpha_{(\sigma(I_k))^{(X_k)}}^{I_k^{(X_k)}} \mid M \in R\text{-Mod}, M = I_1^{(X_1)} \oplus \cdots \oplus I_n^{(X_n)} \right\} = \bigvee_{k=1}^n \alpha_{\sigma(I_k)}^{I_k}.$$

Supongamos que $\sigma(I_1) = I_{j_1}$, $\sigma(I_2) = I_{j_2}$, \dots , $\sigma(I_n) = I_{j_n}$, con $j_k \in \{0, 1, \dots, n\}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, y que $\phi_n(\sigma) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_n$. De la última observación se sigue que $\psi_n(\phi_n(\sigma)) = \psi_n(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{k=1}^n \alpha_{I_{j_k}}^{I_k} = \bigvee_{k=1}^n \alpha_{\sigma(I_k)}^{I_k} = \sigma$. Concluimos que $\psi_n \phi_n = 1_{R\text{-pr}}$.

Por otro lado, si $a = (a_1, \dots, a_n) \in B_n$, entonces se tiene que $\psi_n(a)(I_k) = I_{\sum_{i=1}^k a_i} := I_{j_k}$, con $j_k = j_{k-1}$ ó $j_k = j_{k-1} + 1$ para cada $j_k \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que $\phi_n(\psi_n(a)) = (b_1, \dots, b_n)$. Entonces, si $j_k = j_{k-1}$ se sigue que $b_k = 0 = a_k$. De manera similar, si $j_k = j_{k-1} + 1$, $b_k = 1 = a_k$. Por lo tanto, $\phi_n(\psi_n(a)) = (a_1, \dots, a_n) = a$. Se concluye que $\phi_n \psi_n = 1_{B_n}$, con lo que se prueba la afirmación.

Veamos que ϕ_n es un homomorfismo de *copos* que preserva el orden. Sean $\sigma, \tau \in R\text{-pr}$ tales que $\sigma(I_k) = I_{j_k}$ y $\tau(I_k) = I_{j'_k}$, con $j_k, j'_k \in \{0, 1, \dots, n\}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que $\phi_n(\sigma) = a = (a_1, \dots, a_n)$ y $\phi_n(\tau) = b = (b_1, \dots, b_n)$. Si $\sigma \preceq \tau$, entonces, por la observación previa, $I_{\sum_{i=1}^k a_i} = I_{j_k} = \sigma(I_k) \leq \tau(I_k) = I_{j'_k} = I_{\sum_{i=1}^k b_i}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Se sigue que $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$; es decir, $\phi_n(\sigma) = a \leq b = \phi_n(\tau)$.

Probemos ahora que también ψ_n es un homomorfismo de *copos* que preserva el orden. Sean $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in B_n$ tales que $a \leq b$. Entonces

$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, de donde, en virtud del Lema 1.95, $\alpha_{\sum_{i=1}^k a_i}^{I_k} \preceq \alpha_{\sum_{i=1}^k b_i}^{I_k}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Se sigue que $\psi_n(a) \preceq \psi_n(b)$.

Luego, tanto ϕ_n como ψ_n son isomorfismos de *copos* y, por la Proposición A.2, ϕ_n y ψ_n son isomorfismos de retículas, con lo que concluimos la demostración. \square

La siguiente proposición nos ofrece una útil descripción de los elementos en las retículas B_n que corresponden a los prerradicales $\alpha_{I_r}^{I_m}$ y $\omega_{I_r}^{I_m}$ en R -pr, con R un anillo local uniserial con serie de composición de longitud n .

PROPOSICIÓN 2.11. [21, Proposición 6.1] Sean $n \geq 1$ y $0 \leq r \leq m \leq n$. Entonces:

(1) $\phi_n(\alpha_{I_r}^{I_m}) = (a_1, \dots, a_n)$, donde:

$$a_k := \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq k \leq m - r; \\ 1, & \text{si } m - r < k \leq m; \\ 0, & \text{si } m < k \leq n. \end{cases}$$

(2) $\phi_n(\omega_{I_r}^{I_m}) = (b_1, \dots, b_n)$, donde:

$$b_k := \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq k \leq r; \\ 0, & \text{si } r < k \leq m; \\ 1, & \text{si } m < k \leq n. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\alpha_r^m(I_k) = I_{j_k}$, con $j_k \in \{0, \dots, n\}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Ya hemos visto que $j_k = \sum_{i=1}^k a_i$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, sean m, r tales que $0 \leq r \leq m \leq n$. Notemos que $a := (a_1, \dots, a_n)$, tal como ha sido definida en (1), es el menor elemento de B_n tal que $j_m = r$. En efecto, si existe $c := (c_1, \dots, c_n) \in B_n$ tal que $c < a$ y $\sum_{i=1}^m c_i = r$, entonces necesariamente $c_k = 0$ para $1 \leq k \leq m - r$ y $\sum_{i=1}^l c_i < \sum_{i=1}^l a_i$ para alguna $l \in \{m - r + 1, \dots, m - 1\}$. Entonces $c_i = 0$ y, como $a_k = 1$ para $k \in \{m - r + 1, \dots, m - 1\}$, se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{l+1} c_i < \sum_{i=1}^{l+1} a_i$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{l+(m-l-1)} c_i < \sum_{i=1}^{l+(m-l-1)} a_i$$

$$r = \sum_{i=1}^m c_i < \sum_{i=1}^m a_i = r,$$

una contradicción. Por lo tanto, $\psi_n(a)$ es el menor $\sigma \in R\text{-pr}$ tal que $\sigma(I_m) = I_{j_m} = I_r$. En virtud de la Proposición 1.97 se concluye que $\psi_n(a) = \alpha_{I_r}^{I_m}$, de donde $\phi_n(\alpha_{I_r}^{I_m}) = a$.

Por su parte, $b := (b_1, \dots, b_n)$ es el mayor elemento de B_n tal que $j_m = r$. De lo contrario, existiría $d := (d_1, \dots, d_n) \in B_n$ tal que $b < d$ y $\sum_{i=1}^m d_i = r$, de donde $d_k = 1$ para $1 \leq k \leq r$ y $\sum_{i=1}^l b_i < \sum_{i=1}^l d_i$ para alguna $l \in \{r+1, \dots, m-1\}$. Entonces $d_l = 1$ y, dado que $b_k = 0$ para $k \in \{m-r+1, \dots, m-1\}$, por un argumento similar al empleado en el caso anterior se llega a la contradicción:

$$r = \sum_{i=1}^m b_i < \sum_{i=1}^m d_i = r.$$

Luego, $\psi_n(b)$ es el mayor $\sigma \in R\text{-pr}$ tal que $\sigma(I_m) = I_{j_m} = I_r$. Nuevamente por la Proposición 1.97 se concluye que $\psi_n(b) = \omega_{I_r}^{I_m}$; es decir, $\phi_n(\omega_{I_r}^{I_m}) = b$, con lo que se verifican las expresiones (1) y (2). \square

TEOREMA 2.12. ([21, Teorema 5.1]) *Sea R un anillo local uniserial con serie de composición de longitud n . Entonces $R\text{-pr}$ es una retícula distributiva y finita, de cardinalidad 2^n .*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la Proposición 2.10, es claro que $|R\text{-pr}| = 2^n$. Consideremos el producto cartesiano $(\mathbf{n} + \mathbf{1})^n$ de la cadena $(\mathbf{n} + \mathbf{1}) = \{0, 1, \dots, n\}$ de $n + 1$ elementos. Por lo visto en el Ejemplo A.6, $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ es una retícula, con el orden, supremo e ínfimo heredados de \mathbb{N} y $(\mathbf{n} + \mathbf{1})^n$ resulta ser también una retícula, con el orden, supremo e ínfimo dados componente a componente.

Definimos la función $\nu : B_n \rightarrow (\mathbf{n} + \mathbf{1})^n$ como:

$$\nu(a_1, \dots, a_n) := (a_1, \dots, \sum_{i=1}^k a_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_i).$$

Claramente ν está bien definida. Más aún, no es difícil verificar que ν es una función inyectiva que además satisface que para cada $a, b \in B_n$, $a \leq b \Leftrightarrow \nu(a) \leq \nu(b)$. En efecto, sean $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in B_n$, entonces $a \leq b$ si, y sólo si, $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, lo cual, a su vez, equivale a que $\nu(a) = (a_1, \dots, \sum_{i=1}^k a_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_i) \leq (b_1, \dots, \sum_{i=1}^k b_i, \dots, \sum_{i=1}^n b_i) = \nu(b)$. Se tiene que ν es un homomorfismo de *copos* inyectivo sobre su imagen, $\nu(B_n)$. Luego, de la Proposición A.2 se sigue que la retícula B_n es isomorfa a una subretícula de $(\mathbf{n} + \mathbf{1})^n$. Por lo tanto, como $(\mathbf{n} + \mathbf{1})^n$ es una retícula distributiva, también B_n lo es. Concluimos que R -pr es una retícula distributiva, de nuevo, por la Proposición 2.10. \square

COROLARIO 2.13. *Si R es un anillo local uniserial, entonces R es p -pequeño.*

1.3. Anillos artinianos principales. Una conclusión similar a la del corolario anterior se obtiene para la retícula de prerradicales sobre un anillo artiniano principal.

TEOREMA 2.14. *Sea R un anillo artiniano principal. Entonces R -pr es una retícula distributiva y finita, de cardinalidad 2^k para algún $k \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si R es un anillo artiniano principal, entonces, por el Teorema 1.52, R es un anillo uniserial. Luego, $R = \prod_{i=1}^m \mathbb{M}_{r_i}(R_i)$, con $r_i \geq 1$ y R_i anillo local uniserial para cada $i = 1, \dots, m$. Se sigue de las proposiciones 1.30, 1.104 y 1.118 que R -pr es isomorfa como retícula al producto de retículas $R_{1\text{-pr}} \times \dots \times R_{m\text{-pr}}$. Por lo tanto, R -pr es una retícula distributiva y finita. Más aún, si R_i tiene serie de composición de longitud n_i para cada $i = 1, \dots, m$, entonces R -pr tiene cardinalidad $2^{\sum_{i=1}^m n_i}$. \square

COROLARIO 2.15. *Si R es un anillo artiniano principal, entonces R es p -pequeño.*

1.4. Álgebras de Artin de tipo de representación finito. Los resultados que se presentan en esta subsección aparecen en [22].

Sean R un anillo, \mathcal{I} un conjunto de R -módulos izquierdos y $N \in \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$, donde, para cada $X \in \mathcal{I}$, $\mathcal{S}(X)$ denota la retícula de submódulos de X . Por simplicidad, se escribirá N_X en vez de $N(X)$. El siguiente concepto, propuesto por el Dr. Rogelio Fernández-Alonso, generaliza el de submódulo totalmente invariante.

DEFINICIÓN 2.16. *Sea $N \in \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$. N es un conjunto \mathcal{I} -compatible de submódulos si, para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{I}$ y para cada homomorfismo $f : X \rightarrow Y$, se tiene que $f(N_X) \leq N_Y$.*

La familia de todos los conjuntos \mathcal{I} -compatibles de submódulos es denotada por $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$. Dicha familia resulta una subretícula completa de $\prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$.

La siguiente observación se sigue de inmediato de la definición de conjunto \mathcal{I} -compatible.

OBSERVACIÓN 2.17. *Si $N \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$, entonces $N_X \leq_{f_i} X$ para cada $X \in \mathcal{I}$.*

LEMA 2.18. *Si $N \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$, entonces $(\bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{N_X}^X)(Y) = N_Y$ para cada $Y \in \mathcal{I}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y \in \mathcal{I}$. Por un lado, ya que $N \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$, se sigue de la definición de prerradical alfa que $\alpha_{N_X}^X(Y) \leq N_Y$. Luego, $(\bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{N_X}^X)(Y) \leq N_Y$. Por otra parte, en virtud de la Observación 1.93 y de la observación anterior, se tiene que $N_Y = \alpha_{N_Y}^Y(Y) \leq (\bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{N_X}^X)(Y)$, con lo que se concluye la demostración. \square

Como consecuencia del lema precedente se tiene la siguiente caracterización de conjunto \mathcal{I} -compatible que resulta muy útil.

COROLARIO 2.19. *Sea $N \in \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $N \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$.
- (b) Existe $\sigma \in R\text{-pr}$ tal que $\sigma(X) = N_X$ para cada $X \in \mathcal{I}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Esta implicación corresponde al lema anterior.

(b) \Rightarrow (a). Sean $X, Y \in \mathcal{I}$ y sea $f : X \rightarrow Y$ un homomorfismo. Entonces, por hipótesis y por la definición de prerradical, $f(N_X) = f(\sigma(X)) \leq \sigma(Y) = N_Y$, de donde N es un conjunto \mathcal{I} -compatible de submódulos. \square

TEOREMA 2.20. *Todo anillo \mathcal{I} -Köthe es p -pequeño.*

DEMOSTRACIÓN. Se definen las asignaciones $\lambda_R : R\text{-pr} \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$ y $\mu_R : \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X) \rightarrow R\text{-pr}$ como sigue. Dado $\sigma \in R\text{-pr}$, sea $\lambda_R(\sigma)$ el conjunto \mathcal{I} -compatible tal que $\lambda_R(\sigma)_X = \sigma(X)$ para cada $X \in \mathcal{I}$ (véase el corolario anterior). Por su parte, para cada $N = (N_X)_{X \in \mathcal{I}} \in \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$, sea $\mu_R(N) := \bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{N_X}^X$.

Observemos que tanto λ_R como μ_R están bien definidas. Afirmamos que $\mu_R \lambda_R = 1_{R\text{-pr}}$; es decir, λ_R es una asignación inyectiva. En efecto, sea $\sigma \in R\text{-pr}$, entonces $\sigma = \bigvee_{M \in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^M$ por la Proposición 1.98. Ahora bien, notemos que en la expresión anterior el R -módulo $M = 0$ no contribuye significativamente, ya que $\alpha_{\sigma(0)}^0 = \alpha_0^0 = \widehat{0}$. Así, sin pérdida de generalidad, podemos escribir $\sigma = \bigvee \{\alpha_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod}, M \neq 0\}$. Sea $M \in R\text{-Mod}$ tal que $M \neq 0$. Entonces, $M = \bigoplus_{X \in \mathcal{I}} X^{(J_{X,M})}$, con $|J_{X,M}| \geq 0$ para cada $X \in \mathcal{I}$ (al ser R un anillo \mathcal{I} -Köthe). Luego, combinando las proposiciones 1.78 y 1.103 y simplificando, se obtiene que $\sigma = \bigvee_{X \in \mathcal{H}} \alpha_{\sigma(X)}^X$, con $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{I} \mid |J_{X,M}| > 0\}$, de donde $\sigma \preceq \bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{\sigma(X)}^X = \mu_R(\lambda_R(\sigma))$. Por otro lado, por la Proposición 1.97, siempre se tiene que $\mu_R(\lambda_R(\sigma)) = \bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{\sigma(X)}^X \preceq \sigma$, con lo que se verifica nuestra afirmación. Finalmente, al ser \mathcal{I} un conjunto y al ser $\mathcal{S}(M)$ también un conjunto para cada $M \in \mathcal{I}$, se concluye que $R\text{-pr}$ es un conjunto. \square

Como consecuencia de la proposición previa se obtiene la siguiente propiedad notable de los anillos puros semisimples izquierdos (\mathcal{I} -Köthe).

COROLARIO 2.21. *Sea R un anillo \mathcal{I} -Köthe. Si \mathcal{I} es un conjunto finito y $\mathcal{S}(X)$ es finito para cada $X \in \mathcal{I}$, entonces $R\text{-pr}$ es un conjunto finito.*

COROLARIO 2.22. *Los anillos semisimples, locales uniseriales, artinianos principales, así como las álgebras de Artin de tipo de representación finito son p -pequeños.*

Un hecho interesante es que la función λ_R definida en la prueba del Teorema 2.20 induce un isomorfismo entre las retículas $R\text{-pr}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$, como se verá en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.23. *Sea R un anillo \mathcal{I} -Köthe. Entonces las retículas $R\text{-pr}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$ son isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero la función $\lambda_R : R\text{-pr} \rightarrow \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X)$ definida para demostrar el Teorema 2.20. Notemos que $Im(\lambda_R) = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$. Ahora, sea $\lambda'_R : R\text{-pr} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$ la correstricción de λ_R a su imagen. Se sigue de la definición de orden en $R\text{-pr}$ que el morfismo λ'_R preserva el orden. Examinemos a continuación la función $\mu_R : \prod_{X \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(X) \rightarrow R\text{-pr}$. Sea μ'_R la restricción de μ_R a la subretícula $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$. Por el Lema 1.95, también μ'_R es un morfismo de orden. Ahora, siguiendo la prueba del Teorema 2.20 se verifica que $\mu'_R \lambda'_R = 1_{R\text{-pr}}$. Por otro lado, dado $N = (N_X)_{X \in \mathcal{I}} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R$, se tiene que $\mu'_R(N) = \bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{N_X}^X$, de donde, para cada $Y \in \mathcal{I}$, $\lambda'_R(\mu'_R(N))_Y = (\bigvee_{X \in \mathcal{I}} \alpha_{N_X}^X)(Y) = N_Y$ en virtud del Lema 2.18. Por lo tanto, $\lambda'_R \mu'_R = 1_{\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^R}$. Finalmente, en vista de la Proposición A.2 se tiene que los morfismos λ_R y μ_R son isomorfismos de retículas (inversos entre sí), con lo que concluimos la demostración. \square

De hecho, en el caso particular de las K -álgebras de carcaj (o de caminos) de tipo de representación finito Λ , con K un campo algebraicamente cerrado, los conjuntos \mathcal{I} -compatibles de submódulos y, por tanto, los prerradicales sobre Λ , se determinan a partir del carcaj de Auslander-Reiten asociado a Λ , como se muestra en el siguiente corolario.

COROLARIO 2.24. *Sea K un campo algebraicamente cerrado y sea $\Lambda = KQ$, con Q un diagrama de tipo Dynkin. Sea $N \in \prod_{X \in \Lambda\text{-ind}} \mathcal{S}(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $N \in \mathcal{C}_{\Lambda\text{-ind}}^{\Lambda}$.
- (b) *Para cualesquiera $X, Y \in \Lambda\text{-ind}$ y para todo morfismo irreducible $f : X \rightarrow Y$, se tiene que $f(N_X) \leq N_Y$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Esta implicación es inmediata a partir de la definición de conjunto \mathcal{I} -compatible de submódulos.

(b) \Rightarrow (a). Sean $X, Y \in \Lambda\text{-ind}$ y sea $f : X \rightarrow Y$ un Λ -homomorfismo. Si $X = Y$, entonces, por el Corolario 1.135, se tiene que $N_X \leq_{f_i} X$ para cada $X \in \Lambda\text{-ind}$; de donde, $f(N_X) \leq N_X$. Si, por el contrario, $X \neq Y$, de la Proposición 1.131 se sigue que $f \in \text{rad}_{\Lambda}(X, Y)$, por lo que, en virtud de la Proposición 1.132, f es una suma de composiciones de morfismos irreducibles entre módulos inescindibles,

digamos $f = \sum_{i=1}^n h_i$ para algún $n \geq 1$, donde, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, $h_i = f_i^r \cdots f_i^1$ para algún $r \geq 1$, con f_i^j morfismo irreducible entre módulos inescindibles para cada $j = 1, \dots, r$; esto es,

$$X = X_0 \xrightarrow{f_i^1} X_1 \xrightarrow{f_i^2} \cdots \xrightarrow{f_i^{r-1}} X_{r-1} \xrightarrow{f_i^r} X_r = Y$$

$\xrightarrow{\quad h_i \quad}$

con $X_j \in \Lambda\text{-ind}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Ahora bien, por hipótesis, cada f_i^j cumple la propiedad $f_i^j(N_{X_{j-1}}) \leq N_{X_j}$. Luego, aplicando inducción sobre j se verifica fácilmente que $h_i(N_X) \leq N_Y$. Finalmente, como consecuencia de lo anterior se tiene que $f(N_X) = (\sum_{i=1}^n h_i)(N_X) = \sum_{i=1}^n h_i(N_X) \leq N_Y$. Concluimos que $N \in \mathcal{C}_{\Lambda\text{-ind}}^\Lambda$. \square

1.4.1. Una clase de anillos p -pequeños cuya retícula de prerradicales es un conjunto no finito. Ya hemos visto que las álgebras de Artin de tipo de representación finito son ejemplos de anillos p -pequeños. El teorema que se presenta a continuación establece que dentro de las K -álgebras de carcaj (o de caminos) de tipo de representación finita, con K un campo algebraicamente cerrado, sólo aquellas cuyo diagrama de Dynkin asociado es de la forma \mathbb{A}_n tienen retícula de prerradicales finita.

TEOREMA 2.25. ([22, Teorema 5.4]) *Sea Λ un álgebra de Artin hereditaria y de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado K . Sea Q el carcaj de Gabriel de Λ . Supongamos que Λ es de tipo de representación finito, de manera que Q es un diagrama de tipo Dynkin. Entonces $\Lambda\text{-pr}$ es finita si, y sólo si, Q es del tipo \mathbb{A}_n .*

DEMOSTRACIÓN. Para la necesidad, supongamos que el carcaj Q no es del tipo \mathbb{A}_n . Se tienen los siguientes casos, suponiendo que los vértices de Q están numerados como en el Teorema 1.129. Si Q es del tipo \mathbb{D}_n ($n \geq 4$), entonces la forma cuadrática de Tits de Q es $q_Q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1x_3 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i x_{i+1}$ y $x = (1, 1, 2, 1, \dots, 1)$ es una raíz positiva de q_Q . Si Q es del tipo \mathbb{E}_6 , entonces $q_Q(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_4 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_5x_6$ y $x = (1, 1, 1, 2, 1, 1)$ es una raíz positiva de q_Q . Por su parte, si Q es del tipo \mathbb{E}_7 , entonces $x =$

$(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$ una raíz positiva de $q_Q(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_4 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_5x_6 - x_6x_7$. Similarmente, en caso de que Q sea del tipo \mathbb{E}_8 , se tiene que $x = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$ una raíz positiva de $q_Q(x) = \sum_{i=1}^8 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_4 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_5x_6 - x_6x_7 - x_7x_8$. Luego, por la Proposición 1.137, se sigue la existencia de $(V_\alpha, \varphi_\alpha) \in \text{indrep}_K(Q)$ tal que $V_l = K^2$ y $V_i = K$ para $i \neq l$, donde $l = 3$ si Q es del tipo \mathbb{D}_n y $l = 4$ si Q es del tipo \mathbb{E}_n , para $n = 6, 7, 8$. Se afirma que en cualquiera de estos casos existe un conjunto infinito de subobjetos de la representación $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$. Notemos que, puesto que K es un campo infinito, existe un conjunto infinito de subespacios $\{W_j\}_{j \in I}$ de dimensión 1 del espacio vectorial K^2 . Para cada $j \in I$, se define un subobjeto $(V_\alpha^j, \varphi_\alpha^j)$ de $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ como sigue. En cualquier caso, $V_l^j := W_j$. Ahora, si $\alpha \in Q_1$ es tal que $t(\alpha) = l$, entonces se define $V_{s(\alpha)}^j := 0$. Por su parte, si $\beta \in Q_1$ es tal que $s(\alpha) = l$, entonces se define $V_{t(\beta)}^j := K$. Si Q es del tipo \mathbb{E}_n , para $n = 6, 7, 8$, entonces se define $V_1^j := V_2^j$. Finalmente, en cualquier caso, $V_i^j := V_{l+1}^j$ para cada $i > l + 1$. Por su parte, para cada $\alpha \in Q_1$, φ_α^j es la correspondiente restricción de φ_α . No es difícil verificar que, en efecto, $\{(V_\alpha^j, \varphi_\alpha^j)\}_{j \in I}$ es un conjunto infinito de subobjetos de $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$. Luego, debe existir $X \in \Lambda\text{-ind}$ tal que $\mathcal{S}(X)$ es infinita, de donde, por el Corolario 1.135, $\mathcal{S}_{fi}(X) = \mathcal{S}(X)$ es infinita. Lo anterior implica que $\Lambda\text{-pr}$ es un conjunto no finito en vista de la Proposición 1.97. Por lo tanto, si $\Lambda\text{-pr}$ es un conjunto finito, entonces Q debe ser del tipo \mathbb{A}_n .

La suficiencia es consecuencia de la Proposición 2.23, del Ejemplo 1.136 y del Corolario 2.24. \square

2. Una clase de anillos p -grandes

Decimos que un anillo R es p -grande si no es p -pequeño; es decir, si $R\text{-pr}$ es una clase propia. El propósito de esta sección es presentar una clase de anillos p -grandes (no artinianos). El contenido de la misma forma parte del artículo [20], publicado en enero de 2011.

Comenzamos por introducir los conceptos de módulo radical y anillo radical. Más adelante se prueba que los anillos radicales constituyen una clase de anillos p -grandes. Para tal fin, se usa la misma técnica que la empleada por T. H. Fay, E. P. Oxford y G. L. Walls en [19] para grupos abelianos, la cual consiste en

la construcción de una cadena de prerradicales sobre \mathbb{Z} que se encuentra en correspondencia con la clase de todos los ordinales, \mathcal{OR} .

DEFINICIÓN 2.26. Sea $M \in R\text{-Mod}$. Decimos que M es un módulo radical si existen $L \in R\text{-Mod}$ y un radical $\sigma \in R\text{-pr}$, $\sigma \neq \widehat{1}$, tales que $M = \sigma(L)$.

DEFINICIÓN 2.27. Un anillo R es radical izquierdo (derecho) si el módulo regular ${}_R R$ (R_R) es un módulo radical.

PROPOSICIÓN 2.28. ([20, Proposición 4.4]) Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) R es un anillo radical izquierdo.
- (b) Existe un radical $\sigma \in R\text{-pr}$, $\sigma \neq \widehat{1}$, tal que $\overline{\mathbb{T}}_\sigma = R\text{-Mod}$.
- (c) Todo $M \in R\text{-Mod}$ es un módulo radical.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Por hipótesis, existe un radical $\widehat{1} \neq \sigma \in R\text{-pr}$ tal que ${}_R R \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$. Sea $M \in R\text{-Mod}$. Al ser R generador de $R\text{-Mod}$, existe un epimorfismo $R^{(X)} \twoheadrightarrow M$ para algún conjunto de índices X . Luego, como $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$ es una clase cerrada bajo epimorfismos y sumas directas en vista de la Observación 1.82, se sigue que $M \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$, de donde $R\text{-Mod}$ es una subclase de $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$. Concluimos que $\overline{\mathbb{T}}_\sigma = R\text{-Mod}$.

Las implicaciones (b) \Rightarrow (c) y (c) \Rightarrow (a) son claras. \square

DEFINICIÓN 2.29. Sean $M \in R\text{-Mod}$, $x \in M$ y $\sigma \in R\text{-pr}$. Se define la σ -altura de x en M , denotada por $h(x, \sigma, M)$, como el mayor ordinal γ tal que $x \in \sigma^\gamma(M)$, si tal ordinal existe. En caso contrario, se define $h(x, \sigma, M) = \infty$.

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la definición anterior.

OBSERVACIÓN 2.30. ([20, Observación 6.2]) Sean $\sigma \in R\text{-pr}$, $M, N \in R\text{-Mod}$, $x \in M$ y $\gamma \in \mathcal{OR}$. Entonces:

- (1) $x \in \sigma^\gamma(M)$ si, y sólo si, $h(x, \sigma, M) \geq \gamma$.
- (2) Si $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ y $h(x, \sigma, M) \geq \gamma$, entonces $h(f(x), \sigma, N) \geq \gamma$.

TEOREMA 2.31. ([20, Teorema 6.3]) *Sea $\sigma \in R$ -pr un radical y sea $\{M_n\}_{n \geq 1}$ una familia en R -Mod tal que, para cada $n \geq 1$, se cumple que $\sigma(M_{n+1}) = M_n$. Entonces, para cada $\gamma \in \mathcal{OR}$ y para cada $n \geq 1$, existe $M(\gamma, n) \in R$ -Mod tal que $\sigma^\gamma(M(\gamma, n)) = M_n$.*

DEMOSTRACIÓN. Se procede por inducción transfinita sobre γ . Para cada $n \geq 1$, sea $M(0, n) = M_n$. Supongamos que $M(\gamma, n)$ ha sido definido para cada $n \geq 1$, de manera que $\sigma^\gamma(M(\gamma, n)) = M_n$. Para $n \geq 1$, se define $M(\gamma + 1, n) = M(\gamma, n+1)$. Nótese que $\sigma^{\gamma+1}(M(\gamma+1, n)) = \sigma(\sigma^\gamma(M(\gamma+1, n))) = \sigma(\sigma^\gamma(M(\gamma, n+1))) = \sigma(M_{n+1}) = M_n$. Ahora, sea η un ordinal límite y supongamos que $M(\gamma, n)$ ha sido definido para cada $\gamma < \eta$ y $n \geq 1$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow M_n \hookrightarrow M(\gamma, n) \rightarrow M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n)) \rightarrow 0,$$

la cual induce la exactitud de la siguiente sucesión:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\gamma < \eta} M_n \hookrightarrow \bigoplus_{\gamma < \eta} M(\gamma, n) \rightarrow \bigoplus_{\gamma < \eta} (M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n))) \rightarrow 0$$

Sea $\nabla : \bigoplus_{\gamma < \eta} M_n \rightarrow M_n$ el morfismo codiagonal y sea $M(\eta, n)$ el correspondiente coproducto fibrado tal que $M_n \leq M(\eta, n)$ y que completa el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma < \eta} M_n & \hookrightarrow & \bigoplus_{\gamma < \eta} M(\gamma, n) & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma < \eta} (M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n))) \longrightarrow 0 \\ & & \nabla \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M_n & \hookrightarrow & M(\eta, n) & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma < \eta} (M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n))) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ahora bien, en virtud de las proposiciones 1.78 y 1.76, así como de la Observación 1.77, $\sigma^\eta(\bigoplus_{\gamma < \eta} (M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n)))) = \bigoplus_{\gamma < \eta} \sigma^\eta((M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n)))) \leq \bigoplus_{\gamma < \eta} \sigma^\gamma((M(\gamma, n)/\sigma^\gamma(M(\gamma, n)))) = 0$. De lo anterior y de la Proposición 1.75 se sigue que $(\sigma^\eta(M(\eta, n)) + M_n)/M_n \leq \sigma^\eta(M(\eta, n)/M_n) = 0$. Luego, $\sigma^\eta(M(\eta, n)) \leq M_n$. Para la desigualdad restante, sea $x \in M_n = \sigma^\gamma(M(\gamma, n))$. Para cada ordinal γ tal que $\gamma < \eta$, consideremos la inclusión canónica $\iota_\gamma : M_n \rightarrow \bigoplus_{\gamma < \eta} M_n$. Entonces, por la Observación 2.30, $h(\iota_\gamma(x), \sigma, \bigoplus_{\delta < \eta} M(\delta, n)) \geq \gamma$. Considerando el diagrama anterior y la Observación 2.30,(2), se tiene que $h(x, \sigma, M(\eta, n)) \geq \gamma$,

ya que $\nabla(\iota_\gamma(x)) = x$ para cada ordinal γ . Por lo tanto, $h(x, \sigma, M(\eta, n)) \geq \gamma$ para cada ordinal $\gamma < \eta$, de donde $h(x, \sigma, M(\eta, n)) \geq \eta$; es decir, $x \in \sigma^\eta(M(\eta, n))$. Concluimos que $\sigma^\eta(M(\eta, n)) = M_n$ para el ordinal límite η , con lo que finaliza la prueba. \square

Estamos ahora en condiciones de construir una clase de preradicales no cardinable. Para ello, necesitamos primero la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.32. *Sean $M \in R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$. La σ -longitud de M , denotada por $l(\sigma, M)$, es el menor ordinal λ tal que $\sigma^\lambda(M) = \sigma^{\lambda+1}(M)$. Nótese que este ordinal siempre existe, pues $\{\sigma^\lambda(M)\}_{\lambda \in \mathcal{OR}}$ es una cadena descendente de submódulos de M , y M es un conjunto.*

TEOREMA 2.33. ([20, Teorema 6.5]) *Si R es un anillo radical izquierdo, entonces R es un anillo p -grande.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, $R \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$ para algún radical $\hat{1} \neq \sigma \in R\text{-pr}$. Lo anterior implica que $M \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$ para cada $M \in R\text{-Mod}$ en virtud de la Proposición 2.28. Luego, existe una familia $\{M_n\}_{n \geq 1}$ en $R\text{-Mod}$ tal que $M_1 = R$ y $\sigma(M_{n+1}) = M_n$ para cada $n \geq 1$. Ahora, como consecuencia del Teorema 2.31, para cada $n \geq 1$ y para todo $\gamma \in \mathcal{OR}$, existe $M(\gamma, n) \in R\text{-Mod}$ tal que $\sigma^\gamma(M(\gamma, n)) = M_n$. En particular, para cada ordinal γ , $\sigma^\gamma M(\gamma, 1) = M_1 = R$, de donde, por la Proposición 1.76 y la Observación 1.77, $\sigma^\gamma(M(\gamma, 1)/R) = \sigma^\gamma(M(\gamma, 1))/R = 0$. Se sigue que $l(\sigma, M(\gamma, 1)/R) \leq \gamma$. Afirmamos que $l(\sigma, M(\gamma, 1)/R) = \gamma$. En caso contrario, existiría un ordinal $\eta < \gamma$ tal que $\sigma^\eta(M(\gamma, 1)/R) = 0$; esto es, $\sigma^\eta(M(\gamma, 1)) = R$. Así, $\sigma(R) = \sigma(\sigma^\eta(M(\gamma, 1))) = \sigma^{\eta+1}(M(\gamma, 1)) \geq \sigma^\gamma(M(\gamma, 1)) = M_1 = R$. Luego, por la Proposición 1.99, se tendría que $\sigma = \hat{1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\sigma^\eta(M(\gamma, 1)/R) \neq 0$ para todo $\eta < \gamma$; es decir, $l(\sigma, M(\gamma, 1)/R) = \gamma$.

Ahora, sea $N_\gamma := M(\gamma, 1)/R$ para cada ordinal γ y consideremos la cadena $\{\sigma^\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{OR}}$. En vista de lo anterior, para cada $\gamma \in \mathcal{OR}$, $l(\sigma, N_\gamma) = \gamma$. Sean $\delta, \eta \in \mathcal{OR}$, con $\delta < \eta$. Por la Definición 2.32, se tiene que $\sigma^\delta(N_\eta) \neq \sigma^\eta(N_\eta)$, lo cual implica que $\sigma^\delta \neq \sigma^\eta$. Concluimos que $\{\sigma^\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{OR}}$ es una clase propia en $R\text{-pr}$; es decir, R es un anillo p -grande. \square

Sea Z un dominio entero. Siguiendo la notación de [24], sea dM la unión de todos los submódulos divisibles de M , el cual resulta ser un submódulo de M . Si $dM = 0$, entonces el Z -módulo M se llama *reducido*. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\bar{e}_n = (r_1, r_2, \dots) \in Z^{\mathbb{N}}$ tal que $r_n = 1$ y $r_i = 0$ si $i \neq n$. Como en [15], llamamos a un Z -módulo libre de torsión M *escaso* (o magro)² si, para cada Z -homomorfismo $\eta : Z^{\mathbb{N}} \rightarrow M$, se tiene que $\eta(\bar{e}_n) \neq 0$ sólo para un número finito de $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente proposición ofrece una condición equivalente para que un módulo sea escaso.

PROPOSICIÓN 2.34. *Sea Z un dominio entero y sea $M \in Z\text{-Mod}$ libre de torsión. Un Z -módulo M es escaso si, y sólo si, para cada familia numerable de Z -módulos $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para cada Z -homomorfismo $\eta : \prod_{i=1}^{\infty} N_i \rightarrow M$ existe $j \geq 1$ tal que $\eta(\prod_{i=j}^{\infty} N_i) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la necesidad; la suficiencia es clara. Seguimos la prueba de un resultado similar para grupos abelianos de S. V. Rychkov y B. Thome.³ Supongamos que M es escaso y que existe una familia de Z -módulos $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ y un Z -homomorfismo $\eta : \prod_{i=1}^{\infty} N_i \rightarrow M$ tal que $\eta(\prod_{i=j}^{\infty} N_i) \neq 0$ para cada $j \geq 1$. Luego, existe una sucesión $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos distintos tales que $y_j \in \prod_{i=j}^{\infty} N_i$ y $\eta(y_j) \neq 0$ para cada $j \geq 1$. Nótese que cada y_j puede verse como un elemento de $\prod_{i=1}^{\infty} N_i$ haciendo $y_j = (y_j^{(1)}, y_j^{(2)}, \dots)$, con $y_j^{(k)} = 0$ si $k < j$. Sea $\varphi : Z^{\mathbb{N}} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} N_i$, definida por $\varphi(r_1, r_2, \dots) = (\sum_{i=1}^{\infty} r_i y_i^{(1)}, \sum_{i=1}^{\infty} r_i y_i^{(2)}, \dots)$ para cada $(r_1, r_2, \dots) \in Z^{\mathbb{N}}$. Observemos que las sumas que intervienen en la definición de φ son finitas, de donde φ es una función bien definida. Más aún, claramente φ es un Z -homomorfismo. En consecuencia, como M es escaso, se sigue que $\eta(y_j) = (\eta\varphi)(\bar{e}_j) = 0$ para todos excepto un número finito de los $j \in \mathbb{N}$, lo que contradice nuestra elección de los elementos y_j . \square

PROPOSICIÓN 2.35. *Sea Z un dominio entero y sea M un Z -módulo libre de torsión y numerable. Si M es reducido, entonces M es escaso.*

²en inglés, *slender*

³Véase [54, Proposición 1.1].

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos la prueba de E. Sasiada, presentada en [23, Proposición 94.2]. Sea M un Z -módulo libre de torsión, numerable y reducido. Supongamos que M no es escaso. Sea $\eta : Z^{\mathbb{N}} \rightarrow M$ un Z -homomorfismo tal que $\eta(\overline{e_n}) \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En vista de que M es reducido, se tiene que $\bigcap_{r \in Z \setminus \{0\}} rM = 0$. Sea $k_1 = 1$. Puesto que $\eta(\overline{e_1}) \neq 0$, existe $0 \neq k_2 \in Z$ tal que $\eta(k_1 \overline{e_1}) \notin k_2 M$. Notemos que $k_1 k_2 \eta(\overline{e_2}) \neq 0$ al ser M libre de torsión. Luego, existe $0 \neq k_3 \in Z$ tal que $\eta(k_1 k_2 \overline{e_2}) \notin k_3 M$. De esta manera, podemos construir una sucesión k_1, k_2, \dots de elementos en $Z \setminus \{0\}$ tales que $\eta(k_1 k_2 \cdots k_n \overline{e_n}) \notin k_{n+1} M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea A el conjunto de elementos $(r_1, r_2, \dots) \in Z^{\mathbb{N}}$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 0$ ó $r_n = k_1 k_2 \cdots k_n$. Entonces $|A| = 2^{\aleph_0}$, de donde existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \neq a_2$ y $\eta(a_1) = \eta(a_2)$. Sea $a = a_1 - a_2$. Si $a = (s_1, s_2, \dots)$, entonces $a \neq 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 0$ ó $s_n = \pm k_1 k_2 \cdots k_n$. Sea n_0 el primer índice tal que $s_{n_0} \neq 0$. Entonces $\eta(s_{n_0} \overline{e_{n_0}}) \notin k_{n_0+1} M$. Por otro lado, $\eta(s_{n_0} \overline{e_{n_0}}) = \eta(a) - \eta(0, \dots, 0, s_{n_0+1}, \dots) = -\eta(0, \dots, 0, s_{n_0+1}, \dots) \in k_{n_0+1} M$, lo cual es una contradicción. Concluimos que M es escaso. \square

PROPOSICIÓN 2.36. *Sea R un anillo y sea Z un dominio entero tal que Z es un subanillo de $\mathcal{Z}(R)$. Si M es un Z -módulo escaso y $\eta : R^{\mathbb{N}} \rightarrow M$ es un Z -homomorfismo tal que $\eta(R^{(\mathbb{N})}) = 0$, entonces $\eta = 0$. En otras palabras, $\text{Hom}_Z(R^{\mathbb{N}}/R^{(\mathbb{N})}, M) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo [15, Lema 2], supongamos que $\eta \neq 0$. Sea $x = (x_n)_{n \geq 1} \in R^{\mathbb{N}}$ tal que $\eta(x) \neq 0$. Sea $\varphi : R^{\mathbb{N}} \rightarrow R^{\mathbb{N}}$ definida como $\varphi((y_n)_{n \geq 1}) = (x_i \sum_{k=1}^i y_k)_{i \geq 1}$. Se verifica directamente que φ es un Z -homomorfismo. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea ϵ_n el elemento de $R^{\mathbb{N}}$ cuya n -ésima coordenada es 1 y cuyas coordenadas restantes son 0. Entonces $\eta\varphi : R^{\mathbb{N}} \rightarrow M$ es un Z -homomorfismo tal que $\eta\varphi(\epsilon_n) = \eta(0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots) \neq 0$ para cada $n \geq 1$. Tomando $R_i = R$ para cada $i \geq 1$, se sigue que $\eta(\prod_{i=n}^{\infty} R_i) \neq 0$ para cada $n \geq 1$, lo que contradice la Proposición 2.34. \square

Nos preparamos para exhibir una subclase de la clase de anillos radicales, la cual involucra a la siguiente clase de anillos. Recordemos que, dado un anillo R , denotamos por $\mathcal{S}(R)$ ($\mathcal{S}(R_R)$) a la retícula de ideales izquierdos (derechos) de R y, por $\mathcal{Z}(R)$, al centro de R .

DEFINICIÓN 2.37. Sean Z un dominio entero y R un anillo que no sea anillo con división. Decimos que R es un anillo Z -coinitial izquierdo (derecho) si:

1. Z es un subanillo de R tal que $Z \subseteq \mathcal{Z}(R)$.
2. $\{nR \mid n \in Z\} \setminus \{0\}$ es coinitial⁴ en el copo $\mathcal{S}({}_R R) \setminus \{0\}$ ($\mathcal{S}(R_R) \setminus \{0\}$), donde, para cada $n \in Z$, nR es el ideal principal de R generado por el elemento n ; es decir, $nR = \{nr \mid r \in R\}$.

Decimos que R es Z -coinitial si es Z -coinitial derecho e izquierdo.

Nótese que todo dominio entero Z que no sea anillo con división es Z -coinitial. De la definición previa se siguen de inmediato las siguientes caracterizaciones de anillo Z -coinitial.

PROPOSICIÓN 2.38. ([20, Proposición 3.2]) Para un anillo R y un dominio entero Z tal que es subanillo de $\mathcal{Z}(R)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) R es Z -coinitial izquierdo.
- (b) Para cada $0 \neq_R I \leq R$, se tiene que $Z \cap I \neq 0$.
- (c) Para cada $x \in R \setminus \{0\}$, existen $a \in R$ y $n \in Z \setminus \{0\}$ tales que $ax = n$.
- (d) Para cada $0 \neq_R I \leq R$, R/I es un Z -módulo de torsión.

A continuación se prueban algunas propiedades de los anillos Z -coinales, usando la útil proposición anterior.

PROPOSICIÓN 2.39. ([20, Proposición 3.4]) Si R es un anillo Z -coinitial izquierdo, con Z un dominio entero, entonces:

- (1) R es R -módulo izquierdo uniforme.
- (2) R no tiene divisores de cero.
- (3) Z tiene un elemento que no es invertible en R .
- (4) R es un Z -módulo libre de torsión.
- (5) $\bigcap_{n \in Z \setminus \{0\}} nR = 0$. En particular, R es un Z -módulo reducido.
- (6) Si R es numerable, entonces R es un Z -módulo escaso.

Las condiciones (2) - (6) se cumplen también si R es un anillo Z -coinitial derecho.

⁴véase la Sección 1 del Apéndice A

DEMOSTRACIÓN. (1). Sean $0 \neq {}_R I, {}_R J \leq R$. Como R es Z -coinitial izquierdo, existen $n, m \in Z \setminus \{0\}$ tales que $nR \leq I$ y $mR \leq J$. Por lo tanto, $0 \neq nmR \leq nR \cap mR \leq I \cap J$.

(2). Sean $x, y \in R \setminus \{0\}$. Entonces existen $a, b \in R$ y $n, m \in Z \setminus \{0\}$ tales que $ax = n$ y $by = m$. Luego, $(ba)(xy) = b(ax)y = bny = byn = mn \neq 0$, de donde $xy \neq 0$.

(3). Supongamos que todo elemento distinto de cero de Z es invertible en R . Sea $x \in R \setminus \{0\}$. Entonces existen $a \in R$ y $n \in Z \setminus \{0\}$ tales que $ax = n$. Luego, como n es invertible, también lo es x . Pero entonces R resulta un anillo con división, lo que es una contradicción.

(4). Esta propiedad es consecuencia inmediata de (2).

(5). Sea $I = \bigcap_{n \in Z \setminus \{0\}} nR$ y supongamos que $I \neq 0$. Entonces existe $n_0 \in Z \setminus \{0\}$ tal que $n_0R \leq I$, de donde $n_0R = I$. Sea $m \in Z \setminus \{0\}$. Luego, $n_0mR = n_0R$; es decir, $n_0 = n_0mx$ para algún $x \in R$. Por lo tanto, $n_0(mx - 1) = 0$ y, ya que R no tiene divisores de cero por (2), se concluye que m es invertible en R , lo cual contradice la condición (3). Concluimos que $\bigcap_{n \in Z \setminus \{0\}} nR = 0$.

(6). La afirmación se sigue de la Proposición 2.35 y del hecho de que R es reducido por (5). \square

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que ningún anillo Z -coinitial izquierdo es artiniiano izquierdo. Este hecho se prueba en el siguiente corolario.

COROLARIO 2.40. ([20, Corolario 3.5]) *Si R es un anillo Z -coinitial izquierdo para algún dominio entero Z , entonces R no tiene ideales mínimos. En particular, R no es artiniiano izquierdo.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si I es un ideal izquierdo mínimo de R , entonces, como el módulo regular R es uniforme izquierdo por la Proposición 2.39,(1), debe ocurrir que $I \leq J$ para cada $0 \neq {}_R J \leq R$. Luego, $I \subseteq \bigcap_{n \in Z \setminus \{0\}} nR = 0$, lo cual contradice la condición (5) de la Proposición 2.39. \square

En adelante, denotamos por $(_)^*$ al funtor Hom contravariante, $\text{Hom}_R(_, R)$.

Las siguientes dos proposiciones generalizan los resultados establecidos por R. Mines en [44] y probados en [19, Teorema 3.6].

PROPOSICIÓN 2.41. ([20, Proposición 5.2]) *Sea R un anillo. Sea $M \in R\text{-Mod}$ tal que $R \leq M$ y sea $f : R \rightarrow M$ la inclusión natural. Supongamos que M/R es cogenerado por R . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $\omega_0^R(M) = R$.
- (b) $f^* : M^* \rightarrow R^*$ es el homomorfismo cero.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Supongamos que $\omega_0^R(M) = R$. Sea $\phi \in M^*$. Entonces $f^*(\phi) = \phi f = 0$, ya que $R \leq \text{Nu}(\phi)$, por definición del preradical omega.

(b) \Rightarrow (a). Supongamos ahora que $f^* = 0$. Para cada $\phi \in M^*$ se tiene que $\phi f = f^*(\phi) = 0$, de donde $R \leq \text{Nu}(\phi)$. Así, $R \leq \omega_0^R(M)$. Por otra parte, por hipótesis y en virtud de la Proposición 1.16 y de la Observación 1.94, se tiene que $\omega_0^R(M/R) = 0$. Luego, por la Proposición 1.76, $\omega_0^R(M)/R = \omega_0^R(M/R) = 0$ al ser ω_0^R un radical. Por lo tanto, $\omega_0^R(M) = R$. \square

OBSERVACIÓN 2.42. ([20, Observación 5.3]) *Notemos que $R^* = \text{End}^r({}_R R)$ y que existe un isomorfismo de anillos $\rho : R \rightarrow \text{End}^r({}_R R)$. En consecuencia, si Z es un dominio entero, R es Z -coinitial izquierdo (derecho) si, y sólo si, R^* es Z -coinitial izquierdo (derecho). Notemos también que, si $f \in \text{Hom}_R(R, M)$, entonces $\text{Im}(f^*) = \{k \in \text{End}^r({}_R R) \mid k \text{ se factoriza a través de } f\}$ es un ideal derecho de R^* (recordar que, en $\text{End}^r({}_R R)$, kh significa que k actúa primero).*

PROPOSICIÓN 2.43. ([20, Proposición 5.4]) *Sea R un anillo Z -coinitial derecho. Sea $M \in R\text{-Mod}$ tal que $R \leq M$ y sea $f : R \rightarrow M$ la inclusión natural. Para la sucesión exacta $E : 0 \rightarrow R \xrightarrow{f} M \rightarrow M/R \rightarrow 0$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $f^* : M^* \rightarrow R^*$ es el homomorfismo cero.
- (b) $[E] \in \text{Ext}_R(M/R, R)$ es Z -libre de torsión.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Procedemos por contrapuesta. Supongamos que $n[E] = 0$ para algún $n \in Z \setminus \{0\}$. El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
E : & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & M/R & \longrightarrow & 0 \\
& & & \mu_n^R = n \text{id}_R \downarrow & & \alpha \downarrow & & \parallel & & \\
\mu_n^R E : & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \longrightarrow & M/R & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

conmuta y tiene renglones exactos para algún $M_1 \in R\text{-Mod}$ y para algunos R -homomorfismos f_1 y α . Ahora bien, $\mu_n^R E$ se escinde ya que $[\mu_n^R E] = n[E] = 0$. Luego, existe un R -homomorfismo $g_1 : M_1 \rightarrow R$ tal que $g_1 f_1 = \text{id}_R$. Finalmente, como $n \neq 0$, se tiene que $f^*(g_1 \alpha) = g_1 \alpha f = \mu_n^R \neq 0$. Por lo tanto, $f^* \neq 0$.

(b) \Rightarrow (a). Procedemos también por contraposición. Supongamos que $f^* \neq 0$. En virtud de la observación anterior, $\text{Im}(f^*)$ es un ideal derecho de R^* , el cual es también un anillo Z -coincial derecho, de manera que existe $n \in Z \setminus \{0\}$ tal que $\mu_n^R = n \text{id}_R \in \text{Im}(f^*)$; es decir, $(\mu_n^R)^*(\text{id}_R) = \mu_n^R = f^*(\mu')$ para algún $\mu' \in M^*$. Consideremos nuevamente un diagrama conmutativo como el anterior. Al aplicar el functor $(_)^*$ a este diagrama y al incorporar los correspondientes morfismos de conexión δ y δ_1 de las sucesiones largas de homología obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (M/R)^* & \longrightarrow & M_1^* & \xrightarrow{f_1^*} & R^* & \xrightarrow{\delta_1} & \text{Ext}_R(M/R, R) \\
& & \parallel & & \alpha^* \downarrow & & (\mu_n^R)^* \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & (M/R)^* & \longrightarrow & M^* & \xrightarrow{f^*} & R^* & \xrightarrow{\delta} & \text{Ext}_R(M/R, R),
\end{array}$$

Ahora, como $\delta_1(\text{id}_R) = \delta(\mu_n^R)^*(\text{id}_R) = \delta f^*(\mu') = 0$, se sigue que $\text{id}_R \in \text{Nu}(\delta_1) = f_1^*(M_1^*)$, de donde existe $g_1 \in M_1^*$ tal que $g_1 f_1 = f_1^* g_1 = \text{id}_R$. Por lo tanto, la extensión $\mu_n^R E$ se escinde; es decir, $n[E] = 0$. Concluimos que $[E]$ es un elemento de Z -torsión en $\text{Ext}_R(M/R, R)$. \square

Como consecuencia de las proposiciones 2.41 y 2.43, para concluir que un anillo Z -coincial R es radical izquierdo basta construir un elemento Z -libre de torsión en algún grupo de extensiones $\text{Ext}(P, R)$, con $P \in \text{Cog}(R)$. Nos enfocaremos en el caso en que $P = R^{\mathbb{N}}$.

PROPOSICIÓN 2.44. ([20, Proposición 3.5]) *Sea R un anillo Z -coincial izquierdo o derecho. Si R es hereditario izquierdo, entonces $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ es un Z -módulo divisible.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.39,(4), R y, por tanto, $R^{\mathbb{N}}$ son Z -módulos libres de torsión. Se sigue del Corolario 1.68 que $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ es un Z -módulo divisible. \square

En [45, Teorema 8], R. J. Nunke describe la estructura del grupo abeliano $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$. Usando algunas ideas de los resultados de Nunke, se prueba que, bajo las hipótesis de la Proposición 2.44, $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R) \neq 0$ cuando R es un anillo numerable. Luego, usando el hecho de que $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ es divisible en este caso, se construye un elemento Z -libre de torsión.

PROPOSICIÓN 2.45. ([20, Proposición 5.6]) *Sea R un anillo Z -coincial izquierdo, hereditario izquierdo y numerable. Entonces $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P := R^{\mathbb{N}}$. Veamos primero que $|P^*| \leq \aleph_0$. Para ello, sea $\Phi : R^{(\mathbb{N})} \rightarrow P^*$ la función que envía cada $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in R^{(\mathbb{N})}$ al R -homomorfismo $\Phi_y : R^{\mathbb{N}} \rightarrow R$ tal que, para cada $z \in R^{\mathbb{N}}$, $\Phi_y(z) = \sum_{n \in \text{sop}(y)} \pi_n(z)y_n$, donde $\text{sop}(y)$ denota el soporte de y en $R^{(\mathbb{N})}$ y los morfismos π_n son las proyecciones canónicas. Probaremos que Φ es suprayectiva. Sea $\varphi \in P^*$. En particular, φ es un Z -homomorfismo y, en virtud de la Proposición 2.39,(6), R es un Z -módulo escaso al ser R un anillo numerable. Se sigue de la Proposición 2.34 que el conjunto $\{n \geq 0 \mid \varphi(\epsilon_n) \neq 0\}$ es finito, donde ϵ_n denota el elemento de P cuya n -ésima coordenada es 1 y cuyas otras coordenadas son 0. Sea $\{n \geq 0 \mid \varphi(\epsilon_n) \neq 0\} = \{n_1, \dots, n_r\}$. Sea $\eta = \varphi - \sum_{i=1}^r \varphi \iota_{n_i} \pi_{n_i}$, donde, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, los morfismos ι_{n_i} denotan inclusiones canónicas. Por la Proposición 2.36, se cumple que $\eta = 0$. Luego, $\varphi = \sum_{i=1}^r \varphi \iota_{n_i} \pi_{n_i}$. Más aún, si $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in P$, entonces, para cada $i = 1, \dots, r$, se tiene que $(\varphi \iota_i \pi_i)(z) = \varphi \iota_i(z_i) = \varphi(z_i \epsilon_i) = z_i \varphi(\epsilon_i) = \pi_i(z) \varphi(\epsilon_i)$. Así, $\varphi(z) = \sum_{i=1}^r \pi_{n_i}(z) \varphi(\epsilon_{n_i})$. Por lo tanto, Φ es suprayectiva, de donde $|P^*| \leq |R^{(\mathbb{N})}| = |R| = \aleph_0$, que es lo que se quería verificar.

Ahora bien, por la Proposición 2.39,(5), R es un Z -módulo reducido, por lo que R no es un Z -módulo divisible. Luego, existe $m \in Z \setminus \{0\}$ tal que $mR \neq R$. Más aún, mR no es un sumando directo de R ya que, de nuevo por la Proposición 2.39,(1), R es un Z -módulo uniforme izquierdo. Se sigue que la sucesión exacta corta $0 \rightarrow R \xrightarrow{\mu_m^R} R \rightarrow R/mR \rightarrow 0$ no se escinde, lo cual implica que $\text{Ext}_R(R/mR, R) \neq 0$. Afirmamos que $|\text{Ext}_R(P/mP, R)| \geq 2^{\aleph_0}$. En

efecto, al ser R hereditario izquierdo, el monomorfismo $0 \rightarrow (R/mR)^{(\mathbb{N})} \rightarrow (R/mR)^{\mathbb{N}}$ induce un epimorfismo $\text{Ext}_R((R/mR)^{\mathbb{N}}, R) \rightarrow \text{Ext}_R((R/mR)^{(\mathbb{N})}, R) \rightarrow 0$. Puesto que $(\text{Ext}_R(R/mR, R))^{\mathbb{N}} \cong \text{Ext}_R((R/mR)^{(\mathbb{N})}, R)$, de lo anterior se sigue que $|\text{Ext}_R((R/mR)^{\mathbb{N}}, R)| \geq |(\text{Ext}_R(R/mR, R))^{\mathbb{N}}| \geq 2^{\aleph_0}$. Finalmente, en vista de que $P/mP \cong (R/mR)^{\mathbb{N}}$, se concluye que $|\text{Ext}_R(P/mP, R)| \geq 2^{\aleph_0}$.

Consideremos ahora la sucesión exacta $0 \rightarrow P \xrightarrow{\mu_R^P} P \rightarrow P/mP \rightarrow 0$ en $R\text{-Mod}$, la cual induce la exactitud de la sucesión larga de homología $0 \rightarrow (P/mP)^* \rightarrow P^* \rightarrow P^* \rightarrow \text{Ext}_R(P/mP, R) \rightarrow \text{Ext}_R(P, R) \rightarrow \text{Ext}_R(P, R) \rightarrow 0$. Si $\text{Ext}_R(P, R) = 0$, entonces se tendría un epimorfismo $P^* \rightarrow \text{Ext}_R(P/mP, R) \rightarrow 0$, pero, por lo visto anteriormente, $|\text{Ext}_R(P/mP, R)| > |P^*|$, lo que daría una contradicción. Por lo tanto, debe ocurrir que $\text{Ext}_R(P, R) \neq 0$. \square

PROPOSICIÓN 2.46. ([20, Proposición 5.7]) *Sea R un anillo Z -coincial izquierdo, hereditario izquierdo y numerable. Entonces $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ tiene un elemento Z -libre de torsión.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos por demostrar la existencia de una familia independiente infinita $\{T_n\}_{n \geq 1}$ de R -submódulos of $R^{\mathbb{N}}$ tal que $T_n \cong R^{\mathbb{N}}$ para cada $n \geq 1$. Sea $\mathfrak{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ el conjunto de números primos. Para cada $n \geq 1$, sean $A_n = \{p_n^k \mid k \geq 1\}$ y $T_n = \{z \in R^{\mathbb{N}} \mid \text{sop}(z) \subseteq A_n\}$. Entonces $T_n \cong R^{A_n} \cong R^{\mathbb{N}}$ para cada $n \geq 1$. Sea $z \in T_k \cap (\sum_{n \neq k} T_n)$. Luego, $\text{sop}(z) \subseteq A_k$. Por otro lado, $z = z_1 + \dots + z_m$, con $z_i \in T_{n_i}$ y $n_i \neq k$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Se sigue que $\text{sop}(z) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \text{sop}(z_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_{n_i}$. Por tanto, $\text{sop}(z) \subseteq A_k \cap (\bigcup_{i=1}^m A_{n_i}) = \emptyset$; es decir, $z = 0$.

A continuación, construimos un elemento Z -libre de torsión en $(\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R))^{\mathbb{N}}$. Por la Proposición 2.45, existe $0 \neq x_1 \in \text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$. Ahora, como $Z \subseteq R$ es numerable, podemos suponer que $Z \setminus \{0\} = \{z_1 = 1, z_2, \dots\}$. Luego, ya que $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ es Z -divisible en virtud de la Proposición 2.44, existe $x_2 \in \text{Ext}_R(P, R)$ tal que $z_2 x_2 = x_1$. De esta manera, podemos construir una sucesión $x_1 = x, x_2, \dots$ en $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} x_{n+1} = x_n$ para algún $x_{n+1} \in \text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$. Se sigue que $x = (x_1, x_2, \dots) \in (\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R))^{\mathbb{N}}$ es Z -libre de torsión.

Finalmente, consideremos la sucesión exacta $0 \rightarrow \bigoplus_{n \geq 1} T_n \xrightarrow{i} R^{\mathbb{N}}$. Como R es hereditario izquierdo y en vista de que

$$(\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R))^{\mathbb{N}} \cong \prod_{n \geq 1} \text{Ext}_R(T_n, R) \cong \text{Ext}_R\left(\bigoplus_{n \geq 1} T_n, R\right),$$

se verifica la exactitud de la sucesión $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R) \xrightarrow{(i)^*} (\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R))^{\mathbb{N}} \rightarrow 0$. Luego, al ser $(i)^*$ un epimorfismo, existe $w \in \text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$ tal que $(i)^*(w) = x$. Más aún, como $x \in (\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R))^{\mathbb{N}}$ es Z -libre de torsión, se sigue que w es un elemento Z -libre de torsión en $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$, con lo que concluimos la demostración. \square

TEOREMA 2.47. ([20, Teorema 5.8]) *Sea R un anillo numerable, Z -coincial y hereditario izquierdo. Entonces R es un anillo radical izquierdo.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, en vista de la Proposición 2.46, existe una sucesión exacta $E : 0 \rightarrow R \xrightarrow{f} M \rightarrow R^{\mathbb{N}} \rightarrow 0$ tal que $[E]$ es un elemento Z -libre de torsión en $\text{Ext}_R(R^{\mathbb{N}}, R)$. Luego, por la Proposición 2.43, se tiene que $f^* : M^* \rightarrow R^*$ es el homomorfismo cero. Ahora, como $M/R \cong R^{\mathbb{N}}$ es cogenerado por R , se sigue de la Proposición 2.41 que $\omega_0^R(M) = R$. Finalmente, al ser ω_0^R un radical, se concluye que R es un anillo radical izquierdo. \square

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se verifica el siguiente corolario:

COROLARIO 2.48. *Sea R un anillo numerable, Z -coincial y hereditario izquierdo. Entonces R es un anillo p -grande.*

Hacemos énfasis en el hecho de que los anillos a los que se refiere el corolario anterior son p -grandes y no artinianos. El propósito del siguiente capítulo es presentar un ejemplo de anillo artiniiano y p -grande.

EJEMPLO 2.49. \mathbb{Z} *satisface todas las condiciones del corolario anterior. De hecho, como R . J. Nunke probó en [45], $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ tiene un elemento de orden infinito. Usando este hecho, T. H. Fay, E. P. Oxford y G. L. Walls demuestran en [19] la existencia de un grupo abeliano G tal que $\omega_0^{\mathbb{Z}}(G) = \mathbb{Z}$ y construyen*

explícitamente la cadena de radicales que se encuentra en correspondencia con \mathcal{OR} .

El siguiente ejemplo es de especial interés para el siguiente capítulo.

EJEMPLO 2.50. *Sea K un campo numerable y considérese el anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes en K , $K[x]$. Es claro que $K[x]$ es un anillo $K[x]$ -coinitial y hereditario, toda vez que es un dominio de ideales principales. Luego, el anillo $K[x]$ cumple todas las condiciones del último corolario y, por tanto, es p -grande.*

Finalizamos este capítulo haciendo énfasis en ciertas construcciones de anillos que resultan ser p -grandes como consecuencia del último corolario, así como de las proposiciones 1.30, 1.104 y 1.118.

EJEMPLO 2.51. ([20, Observación 7.1]) *Sea R un anillo numerable, Z -coinitial y hereditario izquierdo. Un anillo S es p -grande si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:*

- (1) *S es Morita equivalente a R ; en particular, si $S = \mathbb{M}_n(R)$ para algún $n > 1$.*
- (2) *$S = \prod_{i=1}^n R_i$, con $R_j = R$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Para una lista más extensa de ejemplos de anillos p -grandes, remitimos al lector a la sección final de [20].

Un anillo artiniiano y p -grande

Sea K un campo y consideremos el anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes en K , $K[x]$. Sea \mathfrak{H} la categoría cuyos objetos son parejas de la forma $\langle V, h \rangle$, donde V es un K -espacio vectorial y $h : V \rightarrow V$ es un K -endomorfismo lineal, y cuyos morfismos son K -aplicaciones lineales $f : V \rightarrow V'$ tales que $fh = h'f$; es decir, conmuta el siguiente diagrama:

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & V \\ f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f \\ V' & \xrightarrow{h'} & V' \end{array}$$

La importancia de la categoría \mathfrak{H} , antes introducida, se aprecia especialmente en la siguiente proposición, en la que se prueba la existencia de un isomorfismo entre \mathfrak{H} y la categoría de módulos sobre el anillo $K[x]$.

PROPOSICIÓN 3.1. ([2, Ejemplo I.2.6]) *Las categorías $K[x]$ -Mod y \mathfrak{H} son isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Se define el functor $H_1 : K[x]\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{H}$ de la siguiente manera. En objetos, para cada $V \in K[x]\text{-Mod}$, $H_1(V) := \langle V, h \rangle$, donde V es el K -espacio vectorial subyacente y $h : V \rightarrow V$ es tal que $h(v) := xv$ para cada $v \in V$. En morfismos, para cada $f \in \text{Hom}_{K[x]}(V, V')$, $H_1(f) := f$. Se tiene que el functor H_1 está bien definido. En efecto, por un lado, es claro que el morfismo h es un K -endomorfismo lineal del K -espacio vectorial V . Por otro lado, si $f : V \rightarrow V'$ es un $K[x]$ -homomorfismo, entonces, en vista del párrafo previo a la Observación 1.32 y ya que existe un monomorfismo $K \hookrightarrow K[x]$, se sigue que f es también un K -homomorfismo; es decir, f es una K -aplicación lineal. Finalmente, para verificar la conmutatividad del diagrama (\dagger) , sea $v \in V$. Entonces, por la definición de h y al ser f un $K[x]$ -homomorfismo, $fh(v) = f(h(v)) = f(xv) = xf(v)$. Por su parte,

$h'f(v) = h'(f(v)) = xf(v)$ por definición de h' . Por lo tanto, $fh(v) = h'f(v)$. Concluimos que $fh = h'f$, que es lo que restaba por revisar.

Ahora, sea $H_2 : \mathfrak{H} \rightarrow K[x]\text{-Mod}$ el funtor definido como sigue. En objetos, para cada $\langle V, h \rangle \in \mathfrak{H}$, $H_2(\langle V, h \rangle) := V$, con la acción $K[x] \times V \rightarrow V$ definida por $(\lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_nx^n)v := \lambda_0v + \lambda_1h(v) + \cdots + \lambda_nh^n(v)$. En morfismos, para cada f en \mathfrak{H} , $H_2(f) := f$. El funtor H_2 está bien definido. Verificaremos a continuación la afirmación previa. Por un lado, notemos que $h^n \in \text{End}_K(V)$ para cada $n \geq 1$. Luego, no es difícil verificar que $H_2(\langle V, h \rangle)$, con la acción antes definida, resulta ser un $K[x]$ -módulo para cada $\langle V, h \rangle \in \mathfrak{H}$. Por otra parte, sea f un morfismo en \mathfrak{H} . Entonces f es una K -aplicación lineal y, dados $v \in V$ y $\lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_nx^n \in K[x]$, se tiene que $H_2(f)[(\lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_nx^n)v] = f(\lambda_0v + \lambda_1h(v) + \cdots + \lambda_nh^n(v)) = f(\lambda_0v) + f(\lambda_1h(v)) + \cdots + f(\lambda_nh^n(v)) = \lambda_0f(v) + \lambda_1f(h(v)) + \cdots + \lambda_nf(h^n(v))$ por definición de la acción sobre V . Ahora, también se verifica fácilmente por inducción sobre n que $fh^n = (h')^nf$ para cada $n \geq 1$ por la conmutatividad del diagrama (\dagger). Así, $H_2(f)[(\lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_nx^n)v] = \lambda_0f(v) + \lambda_1f(h(v)) + \cdots + \lambda_nf(h^n(v)) = \lambda_0f(v) + \lambda_1h'(f(v)) + \cdots + \lambda_n(h')^n(f(v)) = (\lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_nx^n)f(v) = (\lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_nx^n)(H_2(f))(v)$ por definición de la acción sobre V' . Concluimos que $H_2(f)$ es un $K[x]$ -homomorfismo.

Por último, a partir de las definiciones de los funtores H_1 y H_2 se verifica directamente que $H_1H_2 = 1_{\mathfrak{H}}$ y $H_2H_1 = 1_{K[x]\text{-Mod}}$, con lo que concluimos la demostración.¹ \square

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea Q el carcaj de Kronecker. La categoría \mathfrak{H} es equivalente a una subcategoría plena de $KQ\text{-Mod}$.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba consta de dos etapas: primero veremos que \mathfrak{H} es isomorfa a una subcategoría plena \mathfrak{C} de $\text{Rep}_K(Q)$ y posteriormente probaremos

¹Cabe mencionar que, como lo hizo notar la Dra. Martha Takane, el anillo $K[x]$ es isomorfo a la K -álgebra de carcaj KQ_0 , con

$$Q_0 = a \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \alpha$$

por lo que, en virtud de la Observación 1.32 y del Teorema 1.120, la categoría $K[x]\text{-Mod}$ resulta ser equivalente (de hecho, isomorfa) a la categoría $\text{Rep}_K(Q_0)$, la cual coincide precisamente con la categoría \mathfrak{H} . No obstante, consideramos pertinente incluir la demostración de este hecho.

que \mathfrak{C} es equivalente a una subcategoría plena \mathfrak{D} de KQ -Mod. Para la primera parte, definimos el functor $H : \mathfrak{H} \rightarrow \text{Rep}_K(Q)$ como sigue: dado $\langle V, h \rangle \in \mathfrak{H}$, $H(\langle V, h \rangle) = (V_a, \varphi_\alpha)_{V_a \in \{V\}, \varphi_\alpha \in \{id_V, h\}}$, donde $id_V : V \rightarrow V$ denota a la K -aplicación lineal identidad, y, para cada morfismo $f : V \rightarrow V' \in \mathfrak{H}$, $H(f) = f$. Como consecuencia de lo anterior se tiene que $\mathfrak{C} := H(\mathfrak{H})$ es una subcategoría plena de $\text{Rep}_K(Q)$ que resulta ser isomorfa a la categoría \mathfrak{H} . Para la segunda parte, se define un functor $G : \mathfrak{C} \rightarrow KQ$ -Mod tal que, para cada $(V_a, \varphi_\alpha)_{V_a \in \{V\}, \varphi_\alpha \in \{id_V, h\}} \in \mathfrak{C}$, $G((V_a, \varphi_\alpha)) = V \times V$, con la suma usual (componente a componente) y con la multiplicación por escalares (camino) dada como sigue: para cada $x = (v, w) \in V \times V$, $e_a \cdot x = (v, 0)$, $e_b \cdot x = (0, w)$, $id_V \cdot x = (id_V(w), 0) = (w, 0)$ y $h \cdot x = (h(w), 0)$ y, para cada morfismo $f : V \rightarrow V' \in \mathfrak{C}$, $G(f) = f'$, donde $f' : V \times V \rightarrow V' \times V'$ es tal que $f' = f \oplus f$. Sea $\mathfrak{D} := G(\mathfrak{C})$. Definimos ahora un functor $F : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ tal que, para cada $V \times V \in \mathfrak{D}$, $F(V \times V)$ es la representación cuyo conjunto de K -espacios vectoriales es $\{V_a, V_b\}$ y cuyo conjunto de K -aplicaciones lineales es $\{\varphi_{id_V}, \varphi_h\}$, donde $V_a = e_a \cdot V \cong V$, $V_b = e_b \cdot V \cong V$ y $\varphi_{id_V}, \varphi_h : V_b \rightarrow V_a$ son tales que $\varphi_{id_V}(x) = e_a id_V \cdot x$ y $\varphi_h(x) = e_a h \cdot x$ para cada $x \in V_b$. Se sigue que $FG \simeq 1_{\mathfrak{C}}$ y $GF \simeq 1_{\mathfrak{D}}$. Ahora, por el Teorema 1.120 se tiene que existen funtores $F' : \text{Rep}_K(Q) \rightarrow KQ$ -Mod y $G' : KQ$ -Mod $\rightarrow \text{Rep}_K(Q)$ tales que $F'G' \simeq 1_{\text{Rep}_K(Q)}$ y $G'F' \simeq 1_{KQ\text{-Mod}}$. Nótese que, de hecho, los funtores F y G son las restricciones de los funtores F' y G' a las categorías \mathfrak{D} y \mathfrak{C} , respectivamente. En consecuencia, \mathfrak{D} es subcategoría plena de KQ -Mod, con lo que concluimos la demostración. \square

De las proposiciones 3.1 y 3.2 se tienen los siguientes corolarios.

COROLARIO 3.3. *Sea Q el carcaj de Kronecker. La categoría $K[x]$ -Mod es equivalente a una subcategoría plena de KQ -Mod.*

COROLARIO 3.4. *Sea Q el carcaj de Kronecker. Existe un functor fiel y pleno $H' : K[x]$ -Mod $\rightarrow KQ$ -Mod. Dicho functor es inyectivo en objetos y preserva monomorfismos. Más aún, H' preserva inclusiones y submódulos totalmente invariantes.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte del resultado se sigue del corolario previo y de las proposiciones B.1 y B.2. De hecho, refiriéndonos a los funtores definidos en las pruebas de las proposiciones 3.1 y 3.2, resulta que $H' = EGHH_1$, donde E es el funtor inclusión² de \mathfrak{D} a KQ -Mod.

A partir de la definición de H' se sigue de inmediato la inyectividad de dicho funtor en objetos, así como su propiedad de preservar monomorfismos.

Verifiquemos que H' preserva submódulos. Sean $V, W \in K[x]$ -Mod tales que $W \leq V$. Entonces $H_1(W) = \langle W, h' \rangle$, donde W es visto como subespacio vectorial de V y h' es la restricción del K -endomorfismo lineal $h : V \rightarrow V$ al subespacio W . Ahora, tras aplicar el funtor H a la imagen bajo el funtor H_1 de W obtenemos la representación $(V_\alpha, \varphi_\alpha)_{V_\alpha \in \{W\}, \varphi_\alpha \in \{id_W, h'\}}$ de Q . En vista de lo anterior y de la definición del funtor G , resulta que $H'(W) = G(HH_1(W)) = W \times W$, con la suma usual heredada de $V \times V$ y con la multiplicación por escalares (caminos) dada como sigue: para cada $x = (u, w) \in W \times W$, $e_ax = (u, 0)$, $e_bx = (0, w)$, $id_Wx = (w, 0)$ y $h'x = (h'(w), 0)$. Se verifica directamente que $W \times W$, con la acción antes presentada (que no es más que la restricción de la acción de KQ sobre $V \times V$ a $W \times W$), resulta ser un submódulo del KQ -módulo $H'(V) = V \times V$. Por lo tanto, $H'(W) \leq H'(V)$.

Por último, probemos que el funtor H' preserva submódulos totalmente invariantes. Sea $N \in K[x]$ -Mod y sea N' un submódulo totalmente invariante de N . Notemos que, para cada $K[x]$ -endomorfismo $g : N \rightarrow N$, si g' es la restricción de g a N' , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N \\ i_N \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow i_N \\ N' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

donde i_N es la inclusión natural. Ahora, sea $f : H'(N) \rightarrow H'(N)$ un KQ -endomorfismo. Entonces, al ser H' un funtor pleno, existe un $K[x]$ -endomorfismo $g : N \rightarrow N$ tal que $H'(g) = f$. Luego, en vista de que $g(N') \leq N'$ y de que H'

²véase el Apéndice B

preserva inclusiones, se sigue la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H'(N) & \xrightarrow{H'(g)} & H'(N) \\ \uparrow H'(i_N) & \circlearrowleft & \uparrow H'(i_N) \\ H'(N') & \xrightarrow{H'(g')} & H'(N') \end{array}$$

donde $H'(i_N)$ es la inclusión natural. Por lo tanto, $f(H'(N')) = H'(g)(H'(N')) \leq H'(N')$; es decir, $H'(N')$ es un submódulo totalmente invariante de $H'(N)$, con lo que concluimos la demostración. \square

OBSERVACIÓN 3.5. *Nótese que, de hecho, en la última parte de la prueba del resultado anterior se muestra que todo funtor pleno que preserve inclusiones también preserva submódulos totalmente invariantes.*

El funtor H' al que alude el corolario anterior induce un morfismo de orden inyectivo entre las (grandes) retículas de prerradicales sobre los anillos $K[x]$ y KQ , con Q el carcaj de Kronecker. La afirmación anterior se desprende de la siguiente proposición, enunciada de manera más general.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sean R y S anillos y sea $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ un funtor pleno, inyectivo en objetos y que preserve monomorfismos. Entonces existe una asignación inyectiva $\phi : R\text{-pr} \rightarrow S\text{-pr}$ que preserve el orden.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi : R\text{-pr} \rightarrow S\text{-pr}$ tal que, para cada $\sigma \in R\text{-pr}$,

$$\phi(\sigma) := \bigvee_{N \in R\text{-Mod}} \left(\alpha_{F(\sigma(N))}^{F(N)} \right)_{F(i_N)},$$

donde $i_N : \sigma(N) \hookrightarrow N$ es la inclusión natural. Notemos que la asignación ϕ está bien definida y preserva el orden. A continuación probaremos que ϕ es inyectiva. Sean $\sigma, \tau \in R\text{-pr}$, con $\sigma \neq \tau$. Entonces existe $N_0 \in R\text{-Mod}$ tal que $\sigma(N_0) \neq \tau(N_0)$. Afirmamos que:

$$\left(\bigvee_{N \in R\text{-Mod}} \left(\alpha_{F(\sigma(N))}^{F(N)} \right)_{F(i_N)} \right) (F(N_0)) = F(i_{N_0})(F(\sigma(N_0))).$$

En efecto, por un lado, dado $N \in R\text{-Mod}$, se tiene que:

$$\left(\alpha_{F(\sigma(N))}^{F(N)} \right)_{F(i_N)} (F(N_0)) = \sum \{ f(F(i_N)(F(\sigma(N)))) \mid f \in \text{Hom}_S(F(N), F(N_0)) \}.$$

Sea $f \in \text{Hom}_S(F(N), F(N_0))$. Por la plenitud de F existe $g \in \text{Hom}_R(N, N_0)$ tal que $F(g) = f$. Ahora, de la definición de prerradical se sigue la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N_0 \\ i_N \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow i_{N_0} \\ \sigma(N) & \xrightarrow{g'} & \sigma(N_0) \end{array}$$

donde g' es la restricción g a $\sigma(N)$. Luego, también el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(N) & \xrightarrow{F(g)} & F(N_0) \\ F(i_N) \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow F(i_{N_0}) \\ F(\sigma(N)) & \xrightarrow{F(g')} & F(\sigma(N_0)) \end{array}$$

En consecuencia, se tiene que $f(F(i_N)(F(\sigma(N)))) = F(g)F(i_N)(F(\sigma(N))) \leq F(i_{N_0})(F(\sigma(N_0)))$. Así, $\left(\alpha_{F(\sigma(N))}^{F(N)}\right)_{F(i_N)}(F(N_0)) \leq F(i_{N_0})(F(\sigma(N_0)))$ para cada $N \in R\text{-Mod}$, de donde, $\bigvee_{N \in R\text{-Mod}} \left(\alpha_{F(\sigma(N))}^{F(N)}\right)_{F(i_N)}(F(N_0)) \leq F(i_{N_0})(F(\sigma(N_0)))$. Para la desigualdad restante, en virtud de la Definición 1.106, $F(i_{N_0})(F(\sigma(N_0))) \leq \left(\alpha_{F(\sigma(N_0))}^{F(N_0)}\right)_{F(i_{N_0})}(F(N_0)) \leq \left(\bigvee_{N \in R\text{-Mod}} \left(\alpha_{F(\sigma(N))}^{F(N)}\right)_{F(i_N)}\right)(F(N_0))$, con lo que queda probada nuestra afirmación.

Una afirmación completamente análoga se tiene para el prerradical τ .

Una vez verificada nuestra afirmación, notemos que, ya que F es inyectivo en objetos, $F(\sigma(N_0)) \neq F(\tau(N_0))$. Además, como F preserva monomorfismos, $F(i_{N_0})(F(\sigma(N_0))) \neq F(i_{N_0})(F(\tau(N_0)))$. De lo anterior se sigue que $\phi(\sigma) \neq \phi(\tau)$. Concluimos que la asignación ϕ es inyectiva. \square

COROLARIO 3.7. *Sea Q el carcaj de Kronecker. Existe una asignación inyectiva $\phi : K[x]\text{-pr} \rightarrow KQ\text{-pr}$ que preserva el orden.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se obtiene de inmediato a partir del Corolario 3.4 y de la proposición anterior. \square

Como consecuencia del Teorema 1.72 y de la Proposición 1.121, si Q es el carcaj de Kronecker, el álgebra KQ es un anillo artiniano (izquierdo y derecho).

Ahora bien, sea K un campo numerable (tómese, por ejemplo, $K = \mathbb{Q}$). Entonces, como vimos en el Ejemplo 2.50, $K[x]$ no es un anillo p -pequeño, de donde, en virtud del Corolario 3.7, KQ tampoco es p -pequeño.

En resumen:

COROLARIO 3.8. *Si Q es el carcaj de Kronecker, entonces KQ es un anillo artiniano y p -grande.³*

³Este ejemplo fue sugerido por la Dra. Dolors Herbera, de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Anillos p -pequeños

En el capítulo precedente se mostró que no todo anillo artiniiano es p -pequeño. A este punto, en miras de investigar la implicación que queda pendiente, a saber, R anillo p -pequeño $\Rightarrow R$ anillo artiniiano, enfocaremos nuestra atención en la condición de un anillo de ser p -pequeño, la cual, como veremos en la primera sección de este capítulo, está estrechamente relacionada con la existencia de un módulo que determina a todos los prerradicales sobre el anillo, llamado *módulo principal*. En base a lo anterior, en el presente capítulo estudiaremos algunas características y cualidades de los módulos principales asociados a un anillo p -pequeño. Para tal propósito, el capítulo se divide en tres secciones. En la primera sección se describen los módulos principales para la mayor parte de las clases de anillos presentados en la Sección 1 del Capítulo 2, junto con algunas de sus propiedades. En la segunda, se aborda el caso restringido en que el anillo en consideración es conmutativo y se ofrece, para este caso, una caracterización de los módulos principales usando el funtor matricial $\text{Hom}_R(P, -)$, al que se hace referencia en la Observación 1.66. Finalmente, en la Sección 3 de este capítulo se obtienen más propiedades y caracterizaciones de los módulos principales por medio de ciertas particiones de la clase $R\text{-Mod}$, las cuales, en vista de un resultado de J. A. Beachy y W. D. Blair, nos aproximan a la condición del anillo de ser artiniiano.

1. Módulos principales

Sean R un anillo y $\sigma \in R\text{-pr}$. Definimos el siguiente preorden en $R\text{-Mod}$: $M \preceq_\sigma N$ si $\alpha_{\sigma(M)}^M \preceq \alpha_{\sigma(N)}^N$. El preorden anterior induce de manera natural una relación de equivalencia \sim_σ en $R\text{-Mod}$ tal que $M \sim_\sigma N$ si $\alpha_{\sigma(M)}^M = \alpha_{\sigma(N)}^N$. Sea $X_\sigma := R\text{-Mod} / \sim_\sigma$. Para cada $M \in R\text{-Mod}$, denotamos por $[M]_\sigma$ a la clase $\{N \in R\text{-Mod} \mid N \sim_\sigma M\}$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean R un anillo p -pequeño y $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces la partición X_σ es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la asignación $X_\sigma \rightarrow R\text{-pr}$ dada por $[M]_\sigma \mapsto \alpha_{\sigma(M)}^M$ para cada $[M]_\sigma \in X_\sigma$. Claramente dicha asignación está bien definida y es inyectiva. Luego, si $R\text{-pr}$ es un conjunto, también lo es X_σ . \square

PROPOSICIÓN 4.2. *Sean R un anillo p -pequeño y $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces existe $M_\sigma \in R\text{-Mod}$ tal que $\sigma = \alpha_{\sigma(M_\sigma)}^{M_\sigma}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Axioma de Elección Global,¹ existe una función de elección $\varphi : X_\sigma \rightarrow R\text{-Mod}$, de modo que, en virtud de las proposiciones 1.98 y 1.103, $\sigma = \bigvee \{\alpha_{\sigma(M)}^M \mid M \in R\text{-Mod}\} = \bigvee \{\alpha_{\sigma(\varphi(X))}^{\varphi(X)} \mid X \in X_\sigma\} = \alpha_{\sigma(\bigoplus_{X \in X_\sigma} \varphi(X))}^{\bigoplus_{X \in X_\sigma} \varphi(X)}$. Tomando $M_\sigma := \bigoplus_{X \in X_\sigma} \varphi(X)$ se sigue la proposición. \square

OBSERVACIÓN 4.3. *Sea R un anillo p -pequeño y sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Supóngase que $\varphi, \psi : X_\sigma \rightarrow R\text{-Mod}$ son dos funciones de elección distintas. Si $M_\sigma := \bigoplus_{X \in X_\sigma} \varphi(X)$ y $N_\sigma := \bigoplus_{Y \in X_\sigma} \psi(Y)$, entonces se cumple que $[M_\sigma]_\sigma = [N_\sigma]_\sigma$; es decir, la construcción del módulo en la Proposición 4.2 no depende de la función de elección.*

DEFINICIÓN 4.4. *Sea $\overline{M} \in R\text{-Mod}$. Se dice que \overline{M} es módulo principal si $\tau = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$ para cada $\tau \in R\text{-pr}$.*

TEOREMA 4.5. *Sea R un anillo p -pequeño. Entonces existe $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ tal que \overline{M} es módulo principal.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.2, para cada $\sigma \in R\text{-pr}$ existe $M_\sigma \in R\text{-Mod}$ tal que $\sigma = \alpha_{\sigma(M_\sigma)}^{M_\sigma}$. Definimos $\overline{M} := \bigoplus_{\sigma \in R\text{-pr}} M_\sigma$. Sea $\tau \in R\text{-pr}$. Por un lado, siempre se cumple que $\alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}} \preceq \tau$ por las propiedades de los prerradicales alfa. Por otra parte, de la definición de \overline{M} se tiene que $\overline{M} := M_\tau \oplus M'$, con $M' = \bigoplus \{M_\sigma \mid \sigma \in R\text{-pr}, \sigma \neq \tau\}$. Luego, por la Proposición 1.103, $\tau = \alpha_{\tau(M_\tau)}^{M_\tau} \preceq \alpha_{\tau(M_\tau)}^{M_\tau} \vee \alpha_{\tau(M')}^{M'} = \alpha_{\tau(M_\tau \oplus M')}^{M_\tau \oplus M'} = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$. Por lo tanto, $\tau = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$, con lo que concluimos la demostración. \square

¹véase la Sección 3 del Apéndice A

Más adelante veremos que la existencia de un R -módulo principal es, de hecho, condición suficiente para que el anillo R sea p -pequeño.

El siguiente lema nos da una manera de obtener nuevos módulos principales a partir de uno dado.

LEMA 4.6. *Sea $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ un módulo principal y sea $M_0 \in R\text{-Mod}$ tal que \overline{M} es sumando directo de M_0 . Entonces M_0 es módulo principal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Por hipótesis, $M_0 = \overline{M} \oplus L$ para algún $L \in R\text{-Mod}$. Luego, $\sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} \preceq \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} \vee \alpha_{\sigma(L)}^L = \alpha_{\sigma(\overline{M} \oplus L)}^{\overline{M} \oplus L} = \alpha_{\sigma(M_0)}^{M_0} \preceq \sigma$ por la Proposición 1.103, de donde $\sigma = \alpha_{\sigma(M_0)}^{M_0}$. Concluimos que M_0 es módulo principal. \square

OBSERVACIÓN 4.7. *En particular, la clase de módulos principales de un anillo es cerrada bajo extensiones que se escinden.*

A continuación se presenta una caracterización de anillo semisimple en términos de sus módulos principales.

TEOREMA 4.8. *Para un anillo R son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (a) R es semisimple.
- (b) $\overline{M}_0 = \bigoplus \{S \mid S \in R\text{-simp}\}$ es módulo principal.
- (c) ${}_R R$ es módulo principal.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Leftrightarrow (b). Si R es un anillo semisimple, entonces R es p -pequeño por el Corolario 2.3. Luego, en vista del Teorema 4.5, existe un módulo principal $\overline{M} \in R\text{-Mod}$, con $\overline{M} := \bigoplus_{\sigma \in R\text{-pr}} M_\sigma$ para algunos $M_\sigma \in R\text{-Mod}$. Ahora, al ser R semisimple, se sigue de la Proposición 1.39 que $\overline{M} = \bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_S)}$, con $|X_S| \geq 0$ para cada $S \in R\text{-simp}$. Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. En virtud de lo anterior y de la Proposición 1.103, se tiene que $\sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \alpha_{\sigma(\bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_S)})}^{\bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_S)}} = \bigvee_{R\text{-simp}} \alpha_{\sigma(S^{(X_S)})}^{S^{(X_S)}}$; es decir, $\sigma = \bigvee_{S \in \mathcal{A}} \alpha_{\sigma(S)}^S = \alpha_{\sigma(\bigoplus_{\mathcal{A}} S)}^{\bigoplus_{\mathcal{A}} S}$, con $\mathcal{A} = \{S \in R\text{-simp} \mid |X_S| > 0\}$, de donde $\bigoplus_{S \in \mathcal{A}} S$ es un módulo principal. Finalmente, como consecuencia del Lema 4.6 resulta que también $\overline{M}_0 = \bigoplus \{S \mid S \in R\text{-simp}\}$ es módulo principal. Para la recíproca, supongamos ahora que $\overline{M}_0 = \bigoplus \{S \mid S \in R\text{-simp}\}$ es

módulo principal. Entonces, para cada $\sigma \in R\text{-pr}$ se tiene que $\sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M_0})}^{\overline{M_0}} = \alpha_{\sigma(S)}^{\oplus_{R\text{-simp}} S} = \bigvee_{R\text{-simp}} \alpha_{\sigma(S)}^S$ por las proposiciones 1.78 y 1.103. En particular, $\widehat{1} = \bigvee_{R\text{-simp}} \alpha_S^S = \text{Zoc}(-)$. Se sigue del Teorema 2.2 que R es un anillo semisimple.

(a) \Leftrightarrow (c). Si R es un anillo semisimple, entonces existe un monomorfismo $\bigoplus_{R\text{-simp}} S \rightarrow R$ que se escinde. Ahora bien, ya probamos que la condición del anillo de ser semisimple es equivalente a que $\bigoplus_{R\text{-simp}} S$ sea módulo principal de R . Luego, por el Lema 4.6, el módulo regular ${}_R R$ también lo es. Recíprocamente, si ${}_R R$ es módulo principal, entonces $\sigma = \alpha_{\sigma(R)}^R$ para todo $\sigma \in R\text{-pr}$; es decir, todo $\sigma \in R\text{-pr}$ es t -radical. En particular, todo coátomo de $R\text{-pr}$ es t -radical. Se sigue del Teorema 2.5 que R es semisimple.² \square

Estamos ahora en condiciones de exhibir módulos principales de una clase más general de anillos; a saber, la de los anillos \mathcal{I} -Köthe, definidos en la subsección 3.3 del Capítulo 1.

PROPOSICIÓN 4.9. *Sea R un anillo \mathcal{I} -Köthe izquierdo. Entonces $\overline{M} = \bigoplus_{N \in \mathcal{I}} N$ es módulo principal de R .*

DEMOSTRACIÓN. Sea R un anillo \mathcal{I} -Köthe izquierdo. Por el Teorema 2.20, R es p -pequeño. Se sigue del Teorema 4.5 que existe un módulo principal $\overline{M} := \bigoplus_{\sigma \in R\text{-pr}} M_\sigma$, con $M_\sigma \in R\text{-Mod}$ para cada $\sigma \in R\text{-pr}$. Por otro lado, todo $M \in R\text{-Mod}$ es una suma directa de módulos en \mathcal{I} ; en particular, $\overline{M} = \bigoplus_{N \in \mathcal{I}} N^{(Y_N)}$, con $|Y_N| \geq 0$ para cada $N \in \mathcal{I}$. Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. En virtud de lo anterior y de la Proposición 1.103, $\sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \alpha_{\sigma(\bigoplus_{N \in \mathcal{I}} N^{(Y_N)})}^{\bigoplus_{N \in \mathcal{I}} N^{(Y_N)}} = \bigvee_{N \in \mathcal{I}} \alpha_{\sigma(N^{(Y_N)})}^{N^{(Y_N)}}$; es decir, $\sigma = \bigvee_{N \in \mathcal{G}} \alpha_{\sigma(N)}^N = \alpha_{\sigma(\bigoplus_{\mathcal{G}} N)}^{\bigoplus_{\mathcal{G}} N}$, donde $\mathcal{G} = \{N \in \mathcal{I} \mid |Y_N| > 0\}$. Por lo tanto, $\bigoplus_{N \in \mathcal{G}} N$ es un módulo principal. Finalmente, como consecuencia del Lema 4.6, también $\bigoplus_{N \in \mathcal{I}} N$ es módulo principal, con lo que concluimos la demostración. \square

El resultado anterior proporciona diversos ejemplos de módulos principales.

²Esta caracterización fue conjeturada y probada por los doctores Francisco Raggi, José Ríos, Hugo Rincón y Rogelio Fernández-Alonso, durante una sesión del Seminario de Anillos de la UNAM.

EJEMPLO 4.10. *Sea R un anillo, entonces:*

- (1) *Si R es un anillo de Köthe, $\overline{M}_1 = \bigoplus_{M \in \mathcal{I}} M$, con $\mathcal{I} = \{R/J \mid_R J \leq R\}$, es módulo principal de R .*
- (2) *Si R es un anillo semisimple, $\overline{M}_2 = \bigoplus_{M \in \mathcal{I}} M$, con $\mathcal{I} = R\text{-simp}$, es módulo principal de R .*
- (3) *Si R es un anillo local uniserial, $\overline{M}_3 = \bigoplus_{M \in \mathcal{I}} M$, con \mathcal{I} el conjunto de ideales izquierdos (y derechos) de R , es módulo principal de R .*
- (4) *Si R es un álgebra de Artin de tipo de representación finito, entonces $\overline{M}_4 = \bigoplus_{M \in \mathcal{I}} M$, con $\mathcal{I} = R\text{-ind}$, es módulo principal de R .*
- (5) *Si R es un anillo puro semisimple y $R\text{-fn.gen.}$ es un conjunto completo e irredundante de representantes de clases de isomorfismo de R -módulos izquierdos finitamente generados, entonces $\overline{M} = \bigoplus \{M \mid M \in R\text{-fn.gen.}\}$ es módulo principal de R .*

De hecho, los módulos principales en el caso de los anillos semisimples y los anillos locales uniserials presentados en el ejemplo anterior (incisos (2) y (3), respectivamente) resultan ser los menores u “óptimos”, en el sentido de que en la descomposición de todo módulo principal para dichas clases de anillos deben aparecer **todos** los elementos del conjunto \mathcal{I} correspondiente, como veremos en las siguientes proposiciones.

PROPOSICIÓN 4.11. *Sea R un anillo semisimple. Las siguientes condiciones son equivalentes para $\overline{M} \in R\text{-Mod}$:*

- (a) *\overline{M} es módulo principal.*
- (b) *$\overline{M} = \bigoplus \{S^{(X_S)} \mid S \in R\text{-simp}\}$, con $|X_S| > 0$ para cada $S \in R\text{-simp}$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Supongamos que $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ es módulo principal y que existe $T \in R\text{-simp}$ tal que T no es sumando directo de \overline{M} ; es decir, $\overline{M} = \bigoplus_{R\text{-simp}} S^{(X_S)}$, con $|X_S| \geq 0$ para cada $S \in R\text{-simp}$ y $|X_T| = 0$. Sea $\sigma := \alpha_T^T \in R\text{-pr}$. Luego, para cada $S \in R\text{-simp}$, $S \neq T$, se tiene que $\sigma(S) = \alpha_T^T(S) = 0$ por la Observación 1.41. En virtud de lo anterior y de la Proposición 1.78, $\sigma(\overline{M}) = \sigma(\bigoplus \{S^{(X_S)} \mid S \in R\text{-simp}, S \neq T\}) = \bigoplus \{(\sigma(S))^{(X_S)} \mid S \in R\text{-simp}, S \neq T\} = 0$.

Finalmente, al ser \overline{M} módulo principal, $\alpha_T^T = \sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \alpha_0^{\overline{M}} = \widehat{0}$ por la Observación 1.91, lo cual es una contradicción.

(b) \Rightarrow (a). Es consecuencia del Teorema 4.8 y del Lema 4.6. \square

PROPOSICIÓN 4.12. *Sea R un anillo local uniserial con serie de composición $0 = I_0 < I_1 < I_2 < \cdots < I_{n-1} < I_n = R$, $n \geq 1$. Para $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (a) \overline{M} es módulo principal.
- (b) $\overline{M} = \bigoplus_{i=1}^n I_i^{(X_i)}$, con $|X_i| > 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Sea \overline{M} un módulo principal de R y supongamos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que I_j no es sumando directo de \overline{M} ; es decir, $\overline{M} = \bigoplus_{i=1}^n I_i^{(X_i)}$, con $|X_i| \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $|X_j| = 0$ en vista del Corolario 1.55 y de nuestra suposición. Sea $\sigma := \alpha_{I_j}^{I_j} \in R\text{-pr}$. Por la Proposición 1.78 se tiene que $\sigma(\overline{M}) = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\sigma(I_i))^{(X_i)}$. Luego, como \overline{M} es módulo principal y

en virtud de la Proposición 1.103, $\sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_{(\sigma(I_i))^{(X_i)}}^{I_i^{(X_i)}} = \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_{\sigma(I_i)}^{I_i}$. Por otra parte, de la Proposición 2.11 se sigue que $\sigma(I_k) = I_k$ para $k \in \{1, \dots, j\}$ y $\sigma(I_k) = I_j$ para $k \in \{j+1, \dots, n\}$. Como consecuencia de lo anterior y aplicando las proposiciones 2.9 y 2.10 se verifica que:

$$\sigma = \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_{\sigma(I_i)}^{I_i} = \bigvee_{i=1}^{j-1} \alpha_{I_i}^{I_i} \vee \bigvee_{i=j+1}^n \alpha_{I_j}^{I_i} = \alpha_{I_{j-1}}^{I_{j-1}} \vee \alpha_{I_j}^{I_{j+1}} = \alpha_{I_{j-1}}^{I_{j-1}},$$

lo cual es una contradicción.

(b) \Rightarrow (a). Esta implicación se sigue de inmediato a partir del Teorema 4.9 (tomando $\mathcal{I} = \{I_i \mid i = 1, \dots, n\}$) y del Lema 4.6. \square

Los resultados anteriores generan una pregunta abierta para el caso de los anillos puros semisimples (anillos \mathcal{I} -Köthe).³

La siguiente proposición nos dice que los módulos principales se preservan bajo equivalencia de Morita.

³Véase el capítulo *Algunas preguntas y problemas abiertos*, al final del presente trabajo.

PROPOSICIÓN 4.13. Sean R y S anillos y sea $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ una equivalencia de categorías. Si \overline{M} es un módulo principal de R , entonces $F(\overline{M})$ es un módulo principal de S .

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.104, sabemos de la existencia de un isomorfismo de (grandes) retículas $\varphi : R\text{-pr} \rightarrow S\text{-pr}$. Sea $\sigma \in S\text{-pr}$. Entonces existe $\tau \in R\text{-pr}$ tal que $\varphi(\tau) = \sigma$. Ahora, si \overline{M} es un módulo principal de R , $\tau = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$. Luego, en virtud del Corolario 1.112, $\sigma = \varphi(\tau) = \varphi(\alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}) = \alpha_{[\varphi(\tau)](F\overline{M})}^{F\overline{M}} = \alpha_{\sigma(F\overline{M})}^{F\overline{M}}$; es decir, $F(\overline{M})$ es módulo principal de S . \square

Por su parte, el teorema que presentamos a continuación nos da una descripción del módulo principal en el caso de una descomposición de anillos.

TEOREMA 4.14. Sean R_1, \dots, R_n ideales distintos de cero de un anillo R tales que ${}_R R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales de R . Supongamos que \overline{M}_i es módulo principal de R_i (visto como anillo) para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces $\overline{M} := \bigoplus_{i=1}^n \overline{M}_i$ es módulo principal de R .

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que \overline{M}_i tiene estructura de R -módulo izquierdo para cada $i = 1, \dots, n$, de manera que $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ por el comentario previo a la Observación 1.32. Sea $\pi_i : R \rightarrow R_i$ la i -ésima proyección canónica para cada $i = 1, \dots, n$. Sea $\tau \in R\text{-pr}$. Veamos que $\tau = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$. Por un lado, en virtud del Teorema 1.118, existe $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in R_1\text{-pr} \times \dots \times R_n\text{-pr}$ tal que $\tau = \overline{\psi}_n((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = \bigvee_{i=1}^n \{\sigma_i\}\pi_i$. Además, al ser \overline{M}_i módulo principal de R_i para cada $i = 1, \dots, n$, se tiene que $\sigma_i = \alpha_{\sigma_i(\overline{M}_i)}^{\overline{M}_i}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Sea $N \in R\text{-Mod}$. Por la Proposición 1.115, para cada $i = 1, \dots, n$, $(\{\sigma_i\}\pi_i)(N) = \sigma_i(v_{\pi_i}(N))$, donde $v_{\pi_i}(N)$ es el anulador (derecho) de $Nu(\pi_i)$ en N . Más aún, en vista de la Proposición 1.116,(2), $v_{\pi_i}(N) = e_i N$ para cada $i = 1, \dots, n$. De lo anterior se sigue que $\tau(N) = (\bigvee_{i=1}^n \{\sigma_i\}\pi_i)(N) = \sum_{i=1}^n (\{\sigma_i\}\pi_i)(N) = \bigoplus_{i=1}^n \sigma_i(e_i N) = \bigoplus_{i=1}^n \alpha_{\sigma_i(\overline{M}_i)}^{\overline{M}_i}(e_i N)$.

Por otra parte, en virtud de la Observación 1.36, $\overline{M} = \bigoplus_{i=1}^n e_i \overline{M}$ y $N = \bigoplus_{j=1}^n e_j N$. En adición, por un argumento similar al utilizado en el párrafo previo para la descripción de $\tau(N)$, se deduce que $\tau(\overline{M}) = \bigoplus_{i=1}^n \sigma_i(e_i \overline{M})$. Luego,

$\alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}(N) = \alpha_{\bigoplus_{i=1}^n e_i \overline{M}}^{\bigoplus_{i=1}^n e_i \overline{M}} \left(\bigoplus_{j=1}^n e_j N \right) = \left(\bigvee_{i=1}^n \alpha_{\sigma_i(e_i \overline{M})}^{e_i \overline{M}} \right) \left(\bigoplus_{j=1}^n e_j N \right)$ por la Proposición 1.103. Nótese que, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, cualquier R -homomorfismo $f : e_i \overline{M} \rightarrow e_j N$ es el homomorfismo cero, de donde $\alpha_{\sigma_i(e_i \overline{M})}^{e_i \overline{M}}(e_j N) = 0$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$. Como consecuencia de lo anterior y de la Proposición 1.78, se tiene que $\alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}(N) = \left(\bigvee_{i=1}^n \alpha_{\sigma_i(e_i \overline{M})}^{e_i \overline{M}} \right) \left(\bigoplus_{j=1}^n e_j N \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_{\sigma_i(e_i \overline{M})}^{e_i \overline{M}} \left(\bigoplus_{j=1}^n e_j N \right) = \bigoplus_{i=1}^n \alpha_{\sigma_i(e_i \overline{M})}^{e_i \overline{M}}(e_i N)$.

Ahora bien, observemos que $e_i \overline{M} \cong \overline{M}_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. En efecto, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $e_i \overline{M} = e_i \left(\bigoplus_{i=1}^n \overline{M}_i \right) = 0 \times \dots \times 0 \times \overline{M}_i \times 0 \times \dots \times 0 \cong \overline{M}_i$ en virtud de la Proposición 1.37.

Finalmente, en vista de la observación anterior, se sigue de la Proposición 1.92 que $\tau(N) = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}(N)$. Concluimos que $\tau = \alpha_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$; es decir, \overline{M} es módulo principal de R . \square

COROLARIO 4.15. *Sean R_1, \dots, R_n anillos y sea $R := R_1 \times \dots \times R_n$. Si \overline{M}_j es módulo principal de R_j para cada $j = 1, \dots, n$, entonces $\overline{M} := \bigoplus_{j=1}^n \overline{M}_j$ es módulo principal de R .*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, sea $\iota_j : R_j \rightarrow R$ la j -ésima inyección canónica. Por la Observación 1.35, se tiene que ${}_R R = \bigoplus_{j=1}^n \iota_j(R_j)$, donde cada $\iota_j(R_j)$ es considerado como ideal de R , y, además, $\iota_j(R_j) \cong R_j$ (como anillos) para todo $j = 1, \dots, n$. Luego, en virtud de la Observación 1.32, \overline{M}_j es módulo principal de $\iota_j(R_j)$ (visto como módulo sobre $\iota_j(R_j)$) para cada $j = 1, \dots, n$. Sea $\tau \in R$ -pr. En vista de lo anterior y del Teorema 4.14, se sigue que $\tau = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}$, con lo que concluimos la demostración. \square

Estamos ahora en condiciones de dar una descripción de módulo principal de un anillo artiniiano principal. Sea R uno de tales anillos. Entonces, por el Teorema 1.52, $R = \prod_{i=1}^m \mathbb{M}_{r_i}(R_i)$ para algún $m \geq 1$, con $r_i \geq 1$ y R_i un anillo local uniserial para cada $i = 1, \dots, m$. Ahora, en virtud de la Proposición 1.30, existe una equivalencia de categorías $F_i : R_i\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{M}_{r_i}(R_i)\text{-Mod}$ para cada $i = 1, \dots, m$. Supongamos que cada anillo R_i tiene serie de composición $0 = I_0^i < I_1^i < \dots < I_{n_i}^i = R_i$, con $n_i \geq 1$ para cada $i = 1, \dots, m$. De la Proposición 4.12 se sigue que, para todo $i = 1, \dots, m$, $\overline{M}_i \in R_i\text{-Mod}$ es módulo principal si

y sólo si $\overline{M}_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} I_j^{i(X_j)}$, con $|X_j| > 0$ para cada $j \in 1, \dots, n_i$. Luego, como consecuencia de la Proposición 4.13 y del Corolario 4.15, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.16. *Sea R un anillo artiniiano principal. Entonces, haciendo referencia al párrafo anterior, $\bigoplus_{i=1}^m F_i(\bigoplus_{j=1}^{n_i} I_j^{i(X_j)})$ es módulo principal de R .*

Una propiedad sobresaliente de un módulo principal $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ es la existencia de una correspondencia biunívoca entre prerradicales sobre el anillo R y submódulos totalmente invariantes de \overline{M} , como se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 4.17. *Sea $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ un módulo principal. Entonces la (gran) retícula $R\text{-pr}$ es isomorfa a la retícula $\mathcal{S}_{fi}(\overline{M})$. En particular, R es p -pequeño.*

DEMOSTRACIÓN. Se definen las asignaciones $\varepsilon_{\overline{M}} : R\text{-pr} \rightarrow \mathcal{S}_{fi}(\overline{M})$ y $\delta_{\overline{M}} : \mathcal{S}_{fi}(\overline{M}) \rightarrow R\text{-pr}$ como $\varepsilon_{\overline{M}}(\sigma) := \sigma(\overline{M})$ para cada $\sigma \in R\text{-pr}$ y $\delta_{\overline{M}}(N) := \alpha_N^{\overline{M}}$ para cada submódulo totalmente invariante N de \overline{M} , respectivamente. Entonces, dado $N \leq_{fi} \overline{M}$, $(\varepsilon_{\overline{M}} \delta_{\overline{M}})(N) = \alpha_N^{\overline{M}}(\overline{M}) = N$. Por su parte, dado $\sigma \in R\text{-pr}$, $(\delta_{\overline{M}} \varepsilon_{\overline{M}})(\sigma) = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \sigma$, al ser \overline{M} módulo principal. Luego, $(\varepsilon_{\overline{M}} \delta_{\overline{M}}) = 1_{\mathcal{S}_{fi}(\overline{M})}$ y $(\delta_{\overline{M}} \varepsilon_{\overline{M}}) = 1_{R\text{-pr}}$. Finalmente, ya que tanto $\varepsilon_{\overline{M}}$ como $\delta_{\overline{M}}$ preservan el orden, se sigue que ambos morfismos son isomorfismos de retículas (inversos entre sí) en vista de la Proposición A.2. \square

OBSERVACIÓN 4.18. *La asignación $\varepsilon_{\overline{M}}$ definida en la prueba de la Proposición 4.17 es suprayectiva aun cuando $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ no sea módulo principal. Sin embargo, nótese que para verificar que $(\delta_{\overline{M}} \varepsilon_{\overline{M}}) = 1_{R\text{-pr}}$ sí se requiere que \overline{M} sea módulo principal.*

Como consecuencia del Teorema 4.5 y de la Proposición 4.17 se obtiene la caracterización de anillo p -pequeño que se presenta enseguida.

COROLARIO 4.19. *Un anillo R es p -pequeño si, y sólo si, existe $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ módulo principal.*

Ahora bien, de la Proposición 4.17 se sigue que si dos prerradicales aplicados a un módulo principal coinciden, entonces son iguales. Lo anterior nos lleva a la siguiente caracterización de módulo principal.

COROLARIO 4.20. $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ es módulo principal si, y sólo si, $\tau = \omega_{\tau(\overline{M})}^{\overline{M}}$ para cada $\tau \in R\text{-pr}$.

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es consecuencia inmediata del comentario previo. Para la suficiencia, sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Aplicando la hipótesis al prerradical $\alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}$, se tiene que $\alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \omega_{\alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}(\overline{M})}^{\overline{M}} = \omega_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \sigma$, con lo que concluimos la demostración. \square

La definición que se presenta enseguida aparece en [50].

DEFINICIÓN 4.21. Un R -módulo inyectivo E se llama inyectivo principal si $\sigma = \omega_{\sigma(E)}^E$ para cada $\sigma \in R\text{-pr}$ exacto izquierdo.

Un hecho interesante es que la cápsula inyectiva de un módulo principal resulta ser un inyectivo principal, como se establece en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.22. Si $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ es módulo principal, entonces $E\overline{M}$ es inyectivo principal.

DEMOSTRACIÓN. Sea σ un prerradical exacto izquierdo sobre R . La desigualdad $\sigma \preceq \omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}}$ siempre se cumple por las propiedades de los prerradicales omega. Para la desigualdad restante, sea i la inclusión $\overline{M} \hookrightarrow E\overline{M}$. Entonces se tiene que $\omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}}(\overline{M}) = \bigcap \{g^{\leftarrow}(\sigma(E\overline{M})) \mid g \in \text{Hom}_R(\overline{M}, E\overline{M})\} \leq i^{\leftarrow}(\sigma(E\overline{M})) = \sigma(E\overline{M}) \cap \overline{M} = \sigma(\overline{M})$ por la Proposición 1.85. Luego, $\omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}}(\overline{M}) \leq \sigma(\overline{M}) \leq \omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}}(\overline{M})$; es decir, $\sigma(\overline{M}) = \omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}}(\overline{M})$. Por otra parte, como \overline{M} es módulo principal, $\sigma = \omega_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}$ por el Corolario 4.20. De lo anterior y de las propiedades de los prerradicales omega se sigue que $\omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}} \preceq \omega_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \sigma$. Por lo tanto, $\sigma = \omega_{\sigma(E\overline{M})}^{E\overline{M}}$, con lo que concluimos la demostración. \square

2. Anillos conmutativos

En esta sección nos dedicamos a examinar la clase particular de los anillos p -pequeños conmutativos. En relación al problema que nos planteamos originalmente, comenzamos presentando el caso más simple: el de los anillos conmutativos cuya retícula de prerradicales es finita.

PROPOSICIÓN 4.23. *Sea R un anillo conmutativo tal que R -pr es un conjunto finito. Entonces R es artiniiano.*

DEMOSTRACIÓN. Sea R -trad la clase de todos los t -radicales. Notemos que, en vista del Teorema 1.101, (5), R -trad es, de hecho, un conjunto, toda vez que se encuentra en correspondencia biunívoca con la retícula de ideales de R . En efecto, existe un isomorfismo de retículas $\varphi_t : R\text{-trad} \rightarrow \mathcal{S}_{fi}(R)$, definido como $\varphi_t(\sigma) = \sigma(R)$ para cada t -radical σ , cuyo morfismo inverso $\psi_t : \mathcal{S}_{fi}(R) \rightarrow R\text{-trad}$ viene dado por $\psi_t(I) = \alpha_I^R$ para cada ideal I de R . Ahora, por hipótesis, R es conmutativo, de donde $\mathcal{S}_{fi}(R) = \mathcal{S}(R)$. Luego, si R -pr es un conjunto finito, entonces claramente $\mathcal{S}(R)$ satisface la condición de cadena descendente, con lo que concluimos la demostración. \square

OBSERVACIÓN 4.24. *Nótese que partiendo de la petición de que R -trad satisfaga la condición de cadena descendente como copo, por un razonamiento similar al de la prueba de la proposición anterior, se obtiene la misma conclusión para R conmutativo.*

En general, como es de esperarse, aun restringiéndonos al caso conmutativo, el estudio de las condiciones de cadena de un anillo R si R -pr es un conjunto no finito (o, más generalmente, si R -trad no cumple la condición de cadena descendente como *copo*) resulta más interesante y, por tanto, de mayor complejidad. Nuestro propósito a este punto es proponer algunas condiciones equivalentes a la propiedad de un R -módulo de ser principal (estrechamente vinculada con el hecho de que el anillo R sea p -pequeño), mismas que involucran al p -functor referido en la Observación 1.66. Para tal fin, iniciamos con una observación de especial relevancia para todo el desarrollo posterior.

OBSERVACIÓN 4.25. *Si R es un anillo conmutativo, entonces, para cada $M \in R\text{-Mod}$ y para todo $x \in M$, el p -functor $\sigma_M^x := \text{Hom}_R(M, -)(x)$ es un prerradical sobre R . Más aún, si R es p -pequeño, entonces $\sigma_M^x = \alpha_{\sigma_M^x(\overline{M})}^{\overline{M}}$ para algún módulo principal \overline{M} de R . En consecuencia, para cada $N \in R\text{-Mod}$, se sigue que $\sigma_M^x(N) = \alpha_{\sigma_M^x(\overline{M})}^{\overline{M}}(N) = \sum \{f(\sigma_M^x(\overline{M})) \mid f \in \text{Hom}_R(\overline{M}, N)\} =$*

$\sum_{f \in \text{Hom}_R(\overline{M}, N)} \sum_{y \in \sigma_M^x(\overline{M})} f(y) = \sum_{y \in \sigma_M^x(\overline{M})} \text{Hom}_R(\overline{M}, N)(y)$. Por lo tanto, $\sigma_M^x = \bigvee_{y \in \sigma_M^x(\overline{M})} \text{Hom}_R(\overline{M}, -)(y)$.

En vista de la observación anterior se tienen los siguientes resultados. Sean R un anillo p -pequeño y conmutativo y sea \overline{M} un R -módulo principal.

PROPOSICIÓN 4.26. *Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y sea $h \in \text{Hom}_R(M, N)$. Entonces para todo $x \in M$ existe $n \geq 1$ tal que $h(x) = \sum_{i=1}^n f_i^x g_i^x(x)$, con $g_i^x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M})$ y $f_i^x \in \text{Hom}_R(\overline{M}, N)$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : M \rightarrow N$ un homomorfismo de R -módulos y sea $x \in M$. Ya que $h(x) \in \sigma_M^x(N) = \text{Hom}_R(M, N)(x)$, se sigue de la observación anterior que $h(x) = \sum_{i=1}^n f_i^x(y_i)$ para algún $n \geq 1$, con $f_i^x \in \text{Hom}_R(\overline{M}, N)$ y $y_i \in \sigma_M^x(\overline{M}) = \text{Hom}_R(M, \overline{M})(x)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Luego, $h(x) = \sum_{i=1}^n f_i^x(g_i^x(x))$, con $g_i^x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M})$ para cada $i = 1, \dots, n$, con lo que concluimos la demostración. \square

COROLARIO 4.27. *Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y sea $h \in \text{Hom}_R(M, N)$. Entonces para todo $x \in M$ existe $n \geq 1$ tal que $h(x) = F_x G_x(x)$, con $G_x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M}^n)$ y $F_x \in \text{Hom}_R(\overline{M}^n, N)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : M \rightarrow N$ un homomorfismo de R -módulos y sea $x \in M$. Por la Proposición 4.26, existen $n \geq 1$ y $f_i^x \in \text{Hom}_R(\overline{M}, N)$, $g_i^x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M})$, $i = 1, \dots, n$, tales que $h(x) = \sum_{i=1}^n f_i^x g_i^x(x)$. Los morfismos g_i^x inducen un único morfismo $G_x : M \rightarrow \overline{M}^n$ por la propiedad universal del producto, de manera que, para cada $i = 1, \dots, n$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \xleftarrow{\pi_i} & \overline{M}^n \\ g_i^x \uparrow & \nearrow & \uparrow G_x \\ M & & \end{array}$$

donde π_i denota la i -ésima proyección canónica para cada $i = 1, \dots, n$.

Asimismo, los morfismos f_i^x inducen un único morfismo $F_x : \overline{M}^n \rightarrow M$ que hace conmutar el siguiente diagrama en vista de la propiedad universal del coproducto:

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \xrightarrow{\iota_i} & \overline{M}^n \\ f_i^x \downarrow & \swarrow F_x & \\ M & & \end{array}$$

donde ι_i denota la i -ésima inclusión canónica para cada $i = 1, \dots, n$.

Finalmente, como $G_x(x) = \sum_{i=1}^n \iota_i \pi_i G_x(x)$, se sigue de lo anterior que $F_x G_x(x) = \sum_{i=1}^n F_x \iota_i \pi_i G_x(x) = \sum_{i=1}^n f_i^x g_i^x(x) = h(x)$, que es lo que se quería verificar. \square

COROLARIO 4.28. *Para todo $M \in R\text{-Mod}$ y para todo $x \in M$ existe $n \geq 1$ tal que $x = F_x G_x(x)$, con $G_x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M}^n)$ y $F_x \in \text{Hom}_R(\overline{M}^n, M)$.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue como caso particular del corolario anterior, tomando $N := M$ y $h := id_M$. \square

COROLARIO 4.29. *Todo $M \in R\text{-Mod}$ cíclico es sumando directo de \overline{M}^n para alguna $n \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = Rx$ un R -módulo cíclico. Por el corolario anterior, existen $n \geq 1$ y $G_x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M}^n)$, $F_x \in \text{Hom}_R(\overline{M}^n, M)$ tales que $x = F_x G_x(x)$. Sea $y \in M$, entonces $y = rx$ para algún $r \in R$. Luego, $y = rx = rF_x G_x(x) = F_x G_x(rx) = F_x G_x(y)$. Por lo tanto, $id_M = F_x G_x$. Concluimos que M es sumando directo de \overline{M}^n . \square

El siguiente resultado se deduce de inmediato como caso particular del corolario anterior.

COROLARIO 4.30. *Todo R -módulo simple es sumando directo de \overline{M} .*

Un hecho notable es que la Proposición 4.26 es, de hecho, equivalente al Corolario 4.28. Más sorprendente aún resulta que ambos resultados caracterizan a un módulo principal si R es un anillo conmutativo y p -pequeño, como lo afirma el siguiente teorema.

TEOREMA 4.31. *Sea R un anillo conmutativo y p -pequeño. Para $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (a) \overline{M} es módulo principal.
- (b) Dados $M, N \in R\text{-Mod}$, para todo $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ y para todo $x \in M$ existe $n \geq 1$ tal que $h(x) = \sum_{i=1}^n f_i^x g_i^x(x)$, con $g_i^x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M})$ y $f_i^x \in \text{Hom}_R(\overline{M}, N)$ para cada $i = 1, \dots, n$.
- (c) Para todo $M \in R\text{-Mod}$ y para todo $x \in M$ se tiene que existe $n \geq 1$ tal que $x = \sum_{i=1}^n f_i^x g_i^x(x)$, con $g_i^x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M})$ y $f_i^x \in \text{Hom}_R(\overline{M}, M)$ para cada $i = 1, \dots, n$.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). La implicación se sigue de la Observación 4.25 y de la Proposición 4.26.

(b) \Rightarrow (c). Se sigue de inmediato, toda vez que la condición (c) es un caso particular de la condición (b), tomando $N := M$ y $h := id_M$.

(c) \Rightarrow (a). Sea $\sigma \in R\text{-pr}$ y sea $M \in R\text{-Mod}$. La desigualdad $\alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}(M) \leq \sigma(M)$ se verifica siempre en virtud de la Proposición 1.97. Para la desigualdad restante, sea $x \in \sigma(M)$. Por hipótesis, existe $n \geq 1$ tal que $x = \sum_{i=1}^n f_i^x(g_i^x(x))$, con $g_i^x \in \text{Hom}_R(M, \overline{M})$ y $f_i^x \in \text{Hom}_R(\overline{M}, M)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Ahora, como $x \in \sigma(M)$, se sigue de la definición de prerradical que $g_i^x(x) \in \sigma(\overline{M})$ para cada $i = 1, \dots, n$. Luego, por la definición de prerradical alfa, $x \in \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}(M)$. Por lo tanto, $\sigma(M) \leq \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}(M)$. Concluimos que $\sigma = \alpha_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}$; es decir, \overline{M} es módulo principal de R . \square

A partir de los resultados anteriores se obtiene una nueva caracterización de anillo semisimple para el caso conmutativo.

TEOREMA 4.32. *Sea R un anillo conmutativo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) R es semisimple.
- (b) R tiene un módulo principal inyectivo.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Sea R un anillo semisimple. Como R es p -pequeño, existe un módulo principal $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ en virtud del Teorema 4.5. Por otro lado, al ser R semisimple, todo R -módulo es inyectivo; en particular, \overline{M} es inyectivo.

(b) \Rightarrow (a). Sea $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ un módulo principal. Por el Corolario 4.29, todo R -módulo cíclico es sumando directo de \overline{M}^n para alguna $n \geq 1$. Luego, si \overline{M} es inyectivo, entonces se tiene además que todo R -módulo cíclico es inyectivo por la Proposición 1.11, de donde, en vista del Teorema 1.50, R es semisimple.⁴ \square

3. Particiones de $R\text{-Mod}$

En la Sección 1 de este capítulo definimos un preorden \preceq_σ para cada $\sigma \in R\text{-pr}$ que induce una relación de equivalencia \sim_σ en $R\text{-Mod}$. Uno de los propósitos de esta sección es presentar algunas de las propiedades de las particiones $X_\sigma = R\text{-Mod}/\sim_\sigma$, con $\sigma \in R\text{-pr}$.

OBSERVACIÓN 4.33. *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$. El preorden \preceq_σ induce un orden parcial en la partición X_σ . Denotamos también por \preceq_σ a este orden parcial inducido. Luego, en vista de la Proposición 4.1, si R es un anillo p -pequeño, entonces X_σ resulta ser un conjunto parcialmente ordenado o copo.*

Dado $\sigma \in R\text{-pr}$, se definen las clases de R -módulos \mathcal{C}_σ y \mathcal{C}^σ como sigue:

$$\mathcal{C}_\sigma := \{K \in R\text{-Mod} \mid \sigma = \alpha_{\sigma(K)}^K\};$$

$$\mathcal{C}^\sigma := \{K \in R\text{-Mod} \mid \sigma = \omega_{\sigma(K)}^K\}.$$

En virtud de la observación anterior se obtiene la primera parte del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.34. *Sea R un anillo p -pequeño y sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces $\langle X_\sigma, \preceq_\sigma \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, con elemento menor \mathbb{F}_σ y elemento mayor la clase \mathcal{C}_σ . Más aún, X_σ resulta una retícula completa.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que, por la Proposición 4.2, existe $M_\sigma \in R\text{-Mod}$ tal que $\mathcal{C}_\sigma = [M_\sigma]_\sigma$. Luego, de la Proposición 1.97 se sigue que $\alpha_{\sigma(N)}^N \preceq \sigma = \alpha_{\sigma(M_\sigma)}^{M_\sigma}$ para cada $N \in R\text{-Mod}$, de donde $[N]_\sigma \preceq_\sigma [M_\sigma]_\sigma = \mathcal{C}_\sigma$ para cada $[N]_\sigma \in X_\sigma$. Por lo tanto, \mathcal{C}_σ es el elemento mayor de X_σ . Por su parte, observemos que $\mathbb{F}_\sigma = [0]_\sigma$. En efecto, $M \in \mathbb{F}_\sigma$ si, y sólo si, $\sigma(M) = 0$ si, y sólo si, $\alpha_{\sigma(M)}^M =$

⁴Este resultado fue probado, con un argumento distinto, por el Dr. Francisco Raggi y, posteriormente, también de manera independiente, por el Dr. José Ríos.

$\alpha_0^M = \widehat{0} = \alpha_{\sigma(0)}^0$, lo cual, a su vez, es equivalente a que $M \in [0]_\sigma$. Ahora, es claro que $\widehat{0} = \alpha_{\sigma(0)}^0 \preceq \alpha_{\sigma(N)}^N$ para cada $N \in R\text{-Mod}$, de donde $\mathbb{F}_\sigma = [0]_\sigma \preceq_\sigma [N]_\sigma$ para cada $[N]_\sigma \in X_\sigma$. Por consiguiente, $\mathbb{F}_\sigma = [0]_\sigma$ es el elemento menor de X_σ . Se sigue que $\langle X_\sigma, \preceq_\sigma \rangle$ es un *copo* acotado. Más aún, como consecuencia de la definición del orden parcial en X_σ , resulta que en X_σ existen supremos arbitrarios, descritos de la siguiente manera. Sea $\{[N_i]_\sigma\}_{i \in I}$ una familia en X_σ . Entonces $\bigvee_{i \in I} [N_i]_\sigma = [\bigoplus_{i \in I} N_i]_\sigma$. Verificaremos a continuación la afirmación anterior. Por un lado, se tiene que, para cada $i \in I$, $\alpha_{\sigma(N_i)}^{N_i} \preceq \bigvee_{i \in I} \alpha_{\sigma(N_i)}^{N_i} = \alpha_{\bigoplus_I \sigma(N_i)}^{\bigoplus_I N_i} = \alpha_{\sigma(\bigoplus_I N_i)}^{\bigoplus_I N_i}$ en vista de las proposiciones 1.78 y 1.103. Se sigue que $[\bigoplus_{i \in I} N_i]_\sigma$ es cota superior de $\{[N_i]_\sigma\}_{i \in I}$. Ahora, supongamos que existe $L \in R\text{-Mod}$ tal que $\alpha_{\sigma(N_i)}^{N_i} \preceq \alpha_{\sigma(L)}^L$ para cada $i \in I$. Entonces $\alpha_{\sigma(\bigoplus_I N_i)}^{\bigoplus_I N_i} = \bigvee_{i \in I} \alpha_{\sigma(N_i)}^{N_i} \preceq \alpha_{\sigma(L)}^L$, con lo que queda probada nuestra afirmación. Finalmente, como consecuencia de la Proposición A.3, resulta que X_σ es una retícula completa. \square

Con base en la proposición anterior se tiene el siguiente resultado:

COROLARIO 4.35. *Sea R un anillo p -pequeño y sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces los elementos de X_σ cumplen la propiedad de cerradura bajo sumas directas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \in R\text{-Mod}$ y sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$ tal que $M_i \sim_\sigma M$ para cada $i \in I$. Entonces $[\bigoplus_{i \in I} M_i]_\sigma = \bigvee_{i \in I} [M_i]_\sigma = \bigvee_{i \in I} [M]_\sigma = [M]_\sigma$. \square

De manera dual, dados un anillo R y $\sigma \in R\text{-pr}$, el preorden en $R\text{-Mod}$ dado por $M \preceq^\sigma N$ si $\omega_{\sigma(M)}^M \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$ induce naturalmente una relación de equivalencia \sim^σ en $R\text{-Mod}$ y un orden parcial en la partición $R\text{-Mod}/\sim^\sigma$. Bajo el supuesto adicional de que R es p -pequeño, se sigue que $X^\sigma := R\text{-Mod}/\sim^\sigma$ es un conjunto, de donde X^σ resulta ser un conjunto parcialmente ordenado o *copo*. De hecho, X^σ resulta ser una semirretícula, como veremos en la siguiente proposición. Denotamos por $[M]^\sigma$ a la clase $\{N \in R\text{-Mod} \mid N \sim^\sigma M\}$ y, por \preceq^σ , al orden parcial inducido en X^σ .

PROPOSICIÓN 4.36. *Sea R un anillo p -pequeño y sea $\sigma \in R\text{-pr}$. Entonces $\langle X^\sigma, \preceq^\sigma \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, con elemento mayor \mathbb{T}_σ y elemento menor la clase \mathcal{C}^σ . Además, X^σ es una semirretícula.*

DEMOSTRACIÓN. Como R es un anillo p -pequeño, se sigue del Teorema 4.5 que existe $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ módulo principal. En virtud del Corolario 4.20, se tiene que, en particular, $\sigma = \omega_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}}$. Así, $\mathcal{C}^\sigma = [\overline{M}]^\sigma$. Luego, por la Proposición 1.97, $\omega_{\sigma(\overline{M})}^{\overline{M}} = \sigma \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$ para cada $N \in R\text{-Mod}$, de donde $\mathcal{C}^\sigma = [\overline{M}]^\sigma \preceq^\sigma [N]^\sigma$ para cada $[N]^\sigma \in X^\sigma$. En consecuencia, \mathcal{C}^σ es el elemento menor de X^σ . Por otro lado, observemos que $\mathbb{T}_\sigma = [0]^\sigma$. En efecto, $M \in \mathbb{T}_\sigma$ si, y sólo si, $\sigma(M) = M$ si, y sólo si, $\omega_{\sigma(M)}^M = \omega_M^M = \widehat{1} = \omega_{\sigma(0)}^0$, lo cual equivale a que $M \in [0]^\sigma$. Ahora, claramente, para cada $N \in R\text{-Mod}$, $\omega_{\sigma(N)}^N \preceq \omega_{\sigma(0)}^0 = \widehat{1}$. Se sigue que $[N]^\sigma \preceq^\sigma [0]^\sigma = \mathbb{T}_\sigma$ para cada $[N]^\sigma \in X^\sigma$. Por consiguiente, $\mathbb{T}^\sigma = [0]^\sigma$ es el elemento mayor de X^σ . Por lo tanto, $\langle X^\sigma, \preceq^\sigma \rangle$ es un *copo* acotado. Más aún, como consecuencia de la definición del orden parcial en X^σ , resulta que el ínfimo de cualesquiera dos elementos de X^σ existe y se describe como sigue. Sean $[M]^\sigma, [N]^\sigma \in X^\sigma$, entonces $[M]^\sigma \wedge [N]^\sigma = [M \times N]^\sigma$. Para verificarlo, notemos que, por una parte, $\omega_{\sigma(M \times N)}^{M \times N} = \omega_{\sigma(M) \times \sigma(N)}^{M \times N} = \omega_{\sigma(M)}^M \wedge \omega_{\sigma(N)}^N \preceq \omega_{\sigma(M)}^M$ por las proposiciones 1.78 y 1.103. Similarmente, $\omega_{\sigma(M \times N)}^{M \times N} \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$. Ahora, supongamos que existe $L \in R\text{-Mod}$ tal que $\omega_{\sigma(L)}^L \preceq \omega_{\sigma(M)}^M$ y $\omega_{\sigma(L)}^L \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$. Entonces $\omega_{\sigma(L)}^L \preceq \omega_{\sigma(M)}^M \wedge \omega_{\sigma(N)}^N = \omega_{\sigma(M \times N)}^{M \times N}$. Lo anterior implica que $[M \times N]^\sigma$ es la mayor cota inferior de $[M]^\sigma$ y $[N]^\sigma$, que es lo que había que verificar. Concluimos que X^σ es una semirretícula. \square

OBSERVACIÓN 4.37. Cabe destacar que la partición X_σ resulta una retícula completa para todo $\sigma \in R\text{-pr}$, con supremo arbitrario descrito por $\bigvee_{i \in I} [M_i]_\sigma = [\bigoplus_{i \in I} M_i]_\sigma$ para cada familia $\{[M_i]_\sigma\}_{i \in I} \subseteq X_\sigma$. La verificación de este hecho depende fuertemente de que los preradicales preservan sumas directas. Al no contar con la propiedad correspondiente para productos directos, sino con una versión “más débil” (ver Proposición 1.78), en principio sólo podemos concluir que X^σ es, en general, una semirretícula y que, para cada familia $\{[M_i]^\sigma\}_{i \in I} \subseteq X^\sigma$, $[\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$ es una cota inferior de $\{[M_i]^\sigma\}_{i \in I}$, de donde $[\prod_{i \in I} M_i]^\sigma \preceq^\sigma \bigwedge_{i \in I} [M_i]^\sigma$. Por el mismo motivo, tampoco contamos con un resultado dual al Corolario 4.35. Ahora bien, en el caso específico de $\sigma = \widehat{0}$, X^σ sí resulta ser una retícula completa, con ínfimo arbitrario dado por $\bigwedge [M_i]^{\widehat{0}} = [\prod_{i \in I} M_i]^{\widehat{0}}$ para cada $\{[M_i]^{\widehat{0}}\}_{i \in I}$ en $X^{\widehat{0}}$. En efecto, de lo anterior se sigue que, dada una familia $\{[M_i]^{\widehat{0}}\}_{i \in I} \subseteq X^{\widehat{0}}$, $[\prod_{i \in I} M_i]^{\widehat{0}}$ es una cota inferior de $\{[M_i]^{\widehat{0}}\}_{i \in I}$. Supongamos que existe $L \in R\text{-Mod}$

tal que $[L]^{\widehat{0}}$ es cota inferior de $\{[M_i]^{\widehat{0}}\}_{i \in I}$. Entonces $\omega_0^L \preceq \bigwedge_{i \in I} \omega_0^{M_i} = \omega_0^{\prod_{i \in I} M_i}$ en virtud de las proposiciones 1.78 y 1.103. Concluimos, en vista de la Proposición A.3, que $X^{\widehat{0}}$ es una retícula completa.

Como consecuencia de las definiciones de las clases \mathcal{C}_σ y \mathcal{C}^σ se sigue de inmediato otra caracterización de módulo principal.

PROPOSICIÓN 4.38. *Sea R un anillo p -pequeño. Las siguientes condiciones son equivalentes para $\overline{M} \in R\text{-Mod}$:*

- (a) \overline{M} es módulo principal.
- (b) $\overline{M} \in \bigcap_{\tau \in R\text{-pr}} \mathcal{C}_\tau$.
- (c) $\overline{M} \in \bigcap_{\tau \in R\text{-pr}} \mathcal{C}^\tau$.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Leftrightarrow (b). Se sigue de inmediato de la definición de módulo principal de un anillo y de la definición de las clases \mathcal{C}_σ , con $\sigma \in R\text{-pr}$.

(a) \Leftrightarrow (c). Se sigue de inmediato en vista del Corolario 4.20 y de la definición de las clases \mathcal{C}^σ , con $\sigma \in R\text{-pr}$. \square

A continuación se presentan algunos casos particulares de las clases \mathcal{C}_σ y \mathcal{C}^σ .

PROPOSICIÓN 4.39. *Sean R un anillo p -pequeño y $\sigma \in R\text{-pr}$.*

- (1) Si $\sigma = \widehat{0}$, entonces $\mathcal{C}_\sigma = R\text{-Mod}$.
- (2) Si σ es un átomo, entonces $\mathcal{C}_\sigma = X_\sigma \setminus \mathbb{F}_\sigma$.
- (3) Si $\sigma = \widehat{1}$, entonces \mathcal{C}_σ consiste de todos los generadores de $R\text{-Mod}$.

DEMOSTRACIÓN. (1). Sea $\sigma = \widehat{0}$. Entonces $\mathcal{C}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \widehat{0} = \alpha_0^M\} = R\text{-Mod}$. Observemos que, en este caso, $\mathcal{C}_\sigma = \mathbb{F}_\sigma = [0]_\sigma$.

(2). Notemos primero que, en general, dado $\sigma \in R\text{-pr}$, con $\sigma \neq \widehat{0}$, se cumple que $\mathbb{F}_\sigma \subseteq X_\sigma \setminus \mathcal{C}_\sigma$. En efecto, si $K \in R\text{-Mod}$ es tal que $\sigma(K) = 0$, entonces $\alpha_{\sigma(K)}^K = \alpha_0^K = \widehat{0} \neq \sigma$, de donde $K \notin \mathcal{C}_\sigma$. Ahora, sea σ un átomo en $R\text{-pr}$. Entonces se cumple, además, que $X_\sigma \setminus \mathcal{C}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\sigma$. Verificaremos la última afirmación por contrapuesta. Si $K \notin \mathbb{F}_\sigma$, entonces $\widehat{0} \neq \alpha_{\sigma(K)}^K \preceq \sigma$ por la Proposición 1.97. Luego, al ser σ un átomo, debe ocurrir que $\alpha_{\sigma(K)}^K = \sigma$, es decir, $K \in \mathcal{C}_\sigma$. Concluimos que $X_\sigma \setminus \mathcal{C}_\sigma = \mathbb{F}_\sigma$ si σ es un átomo.

(3). Sea $\sigma = \widehat{1}$. Entonces $\mathcal{C}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \widehat{1} = \alpha_M^M\}$. Ahora, en virtud de la Observación 1.94 y de la Proposición 1.16, dado $M \in R\text{-Mod}$, se tiene que $\widehat{1} = \alpha_M^M$ si, y sólo si, $\alpha_M^M(N) = N$ para cada $N \in R\text{-Mod}$ si, y sólo si, M genera a N para cada $N \in R\text{-Mod}$, con lo que concluimos la demostración. \square

Dualmente:

PROPOSICIÓN 4.40. *Sean R un anillo p -pequeño y $\sigma \in R\text{-pr}$.*

- (1) *Si $\sigma = \widehat{1}$, entonces $\mathcal{C}^\sigma = R\text{-Mod}$.*
- (2) *Si σ es un coátomo, entonces $\mathcal{C}^\sigma = X_\sigma \setminus \mathbb{T}_\sigma$.*
- (3) *Si $\sigma = \widehat{0}$, entonces \mathcal{C}^σ consta de todos los cogeneradores de $R\text{-Mod}$.*

OBSERVACIÓN 4.41. *Sean R un anillo p -pequeño. De los ejemplos anteriores se sigue que, en particular, todo módulo principal es generador y cogenerador de $R\text{-Mod}$.*

En los resultados siguientes estudiamos algunas propiedades de las particiones $X_{\widehat{1}}$ y $X^{\widehat{0}}$.

PROPOSICIÓN 4.42. *Sea R un anillo p -pequeño. Existe una correspondencia biunívoca entre:*

- (1) $X_{\widehat{1}}$ y la clase de todos los prerradicales idempotentes sobre el anillo R .
Más aún, dicha correspondencia es un isomorfismo de retículas.
- (2) $X^{\widehat{0}}$ y la clase de todos los radicales sobre el anillo R . *Más aún, dicha correspondencia es un isomorfismo de retículas.*

DEMOSTRACIÓN. (1). Sea $R\text{-idem}$ la clase de todos los prerradicales idempotentes sobre el anillo R . Como R es p -pequeño, $R\text{-idem}$ es, de hecho, un conjunto. Sea $\delta : X_{\widehat{1}} \rightarrow R\text{-idem}$ tal que $\delta([M]_{\widehat{1}}) = \alpha_M^M$ para cada $[M]_{\widehat{1}} \in X_{\widehat{1}}$. Es claro que δ es una función bien definida e inyectiva. Veamos ahora que δ es suprayectiva. Sea $\tau \in R\text{-idem}$. Entonces, por el Teorema 1.101 y por un argumento similar al aplicado en la prueba de la Proposición 4.2, se obtiene que $\tau = \bigvee \{\alpha_M^M \mid M \in R\text{-Mod} \text{ y } \tau(M) = M\} = \alpha_{M_{\widehat{1}}}^{M_{\widehat{1}}}$, con $M_{\widehat{1}} \in R\text{-Mod}$. Luego, $\delta([M_{\widehat{1}}]_{\widehat{1}}) = \tau$. Por lo tanto, la función δ es biyectiva. Más aún, de la definición del orden en $X_{\widehat{1}}$ se sigue de inmediato que $[M]_{\widehat{1}} \preceq_{\widehat{1}} [N]_{\widehat{1}}$ si, y sólo si, $\alpha_M^M \preceq \alpha_N^N$.

Concluimos, en vista de la Proposición A.2 y de la Proposición 4.34, que δ es un isomorfismo de retículas.

(2). Sea R -rad la clase de todos los radicales sobre el anillo R . Como R es p -pequeño, R -rad es un conjunto. Sea $\varrho : X^{\widehat{0}} \rightarrow R$ -rad tal que $\varrho([M]^{\widehat{0}}) = \omega_0^M$ para cada $[M]^{\widehat{0}} \in X^{\widehat{0}}$. Claramente, ϱ resulta una función bien definida e inyectiva. Para verificar la suprayectividad, tomemos $\tau \in R$ -rad. Entonces, por el Teorema 1.101, $\tau = \bigwedge \{\omega_0^M \mid M \in R\text{-Mod y } \tau(M) = 0\}$. Ahora, por el Axioma de Elección, existe una función de elección $\psi : X^{\widehat{0}} \rightarrow R\text{-Mod}$ tal que, por las proposiciones 1.78 y 1.103, $\tau = \bigwedge \{\omega_0^{\psi(X)} \mid X \in X^{\widehat{0}}\} = \omega_0^{M^{\widehat{0}}}$, donde $M^{\widehat{0}} := \prod_{X \in X^{\widehat{0}}} \psi(X)$. Se tiene, pues, que $\varrho([M^{\widehat{0}}]^{\widehat{0}}) = \tau$. Finalmente, de la definición del orden en $X^{\widehat{0}}$ se sigue de inmediato que $[M]^{\widehat{0}} \preceq^{\widehat{0}} [N]^{\widehat{0}}$ si, y sólo si, $\omega_0^M \preceq \omega_0^N$. Concluimos, en vista de la Proposición A.2 y de la última parte de la Observación 4.37, que ϱ es un isomorfismo de retículas. \square

PROPOSICIÓN 4.43. *Sea R un anillo p -pequeño y sea $S \in R$ -simp. Entonces $[S]_{\widehat{1}}$ es un átomo de la retícula $X_{\widehat{1}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[M]_{\widehat{1}} \neq [0]_{\widehat{1}}$ y supongamos que $[M]_{\widehat{1}} \preceq_{\widehat{1}} [S]_{\widehat{1}}$. Entonces, por la definición de orden en $X_{\widehat{1}}$, $\alpha_M^M \preceq \alpha_S^S$. Luego, $M = \alpha_M^M(M) \leq \alpha_S^S(M) \leq M$; es decir, $\alpha_S^S(M) = M$. Notemos que, como $M \neq 0$, $\alpha_S^S(M) = \sum \{S' \leq M \mid S' \cong S\} \cong S^{(Y)}$ para algún conjunto Y . Se sigue que $M \cong S^{(Y)}$. Por tanto, en vista del Corolario 4.35, concluimos que $[M]_{\widehat{1}} = [S]_{\widehat{1}}$. \square

A partir de la proposiciones 4.42 y 4.43 se verifica de inmediato el siguiente corolario.

COROLARIO 4.44. *Sea R un anillo p -pequeño. Entonces la clase $\mathcal{A}_{id} := \{\alpha_S^S \mid S \in R\text{-simp}\}$ consta de átomos del conjunto de preradicales idempotentes, R -idem.*

Volviendo a nuestra meta, el siguiente resultado de J. A. Beachy y W. D. Blair caracteriza a los anillos artinianos izquierdos en términos de ciertas clases de pretorsión.

PROPOSICIÓN 4.45. ([5, Corolario 3.3]) *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *R es artiniiano izquierdo.*
- (b) *Toda clase de pretorsión hereditaria de $R\text{-Mod}$ es cerrada bajo productos directos.*

Luego, por el Corolario 1.86, el resultado que se presenta enseguida es consecuencia inmediata de la Proposición 4.45.

COROLARIO 4.46. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *R es artiniiano izquierdo.*
- (b) *Para todo $\sigma \in R\text{-pr}$ exacto izquierdo, \mathbb{T}_σ es cerrada bajo productos directos.*

Por su parte, la siguiente proposición caracteriza a las clases de pretorsión \mathbb{T}_σ , con $\sigma \in R\text{-pr}$ idempotente, que son cerradas bajo productos directos.

PROPOSICIÓN 4.47. *Sean R un anillo y $\sigma \in R\text{-pr}$ idempotente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *\mathbb{T}_σ es cerrada bajo productos directos.*
- (b) *Para cada familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, $\sigma(\prod_{i \in I} M_i) = \prod_{i \in I} \sigma(M_i)$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Supongamos que la clase \mathbb{T}_σ es cerrada bajo productos directos. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia en $R\text{-Mod}$. La desigualdad $\sigma(\prod_{i \in I} M_i) \leq \prod_{i \in I} \sigma(M_i)$ siempre se cumple por la Proposición 1.78. Ahora, si σ es idempotente, entonces $\sigma(M_i) \in \mathbb{T}_\sigma$ para cada $i \in I$. Luego, por hipótesis, $\prod_{i \in I} \sigma(M_i) \in \mathbb{T}_\sigma$. Notemos que $\prod_{i \in I} \sigma(M_i) \leq \prod_{i \in I} M_i$. Así, $\prod_{i \in I} \sigma(M_i) = \sigma(\prod_{i \in I} \sigma(M_i)) \leq \sigma(\prod_{i \in I} M_i)$. Concluimos que $\sigma(\prod_{i \in I} M_i) = \prod_{i \in I} \sigma(M_i)$.

(b) \Rightarrow (a). Sea $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. Entonces $\prod_{i \in I} N_i = \prod_{i \in I} \sigma(N_i) = \sigma(\prod_{i \in I} N_i)$ por hipótesis, de donde $\prod_{i \in I} N_i \in \mathbb{T}_\sigma$. Por lo tanto, \mathbb{T}_σ es cerrada bajo productos directos. \square

El corolario que se presenta a continuación sirve de enlace entre la proposición anterior y las particiones antes definidas (concretamente, X^σ).

COROLARIO 4.48. Sean R un anillo p -pequeño y $\sigma \in R$ -pr idempotente. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) \mathbb{T}_σ es cerrada bajo productos directos.
- (b) Para cada familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, $\sigma(\prod_{i \in I} M_i) = \prod_{i \in I} \sigma(M_i)$.
- (c) Para cada familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, $\bigwedge_{i \in I} [M_i]^\sigma = [\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$.
- (d) Para cada $M \in R\text{-Mod}$, $[M]^\sigma$ es cerrada bajo productos directos.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Esta implicación está contemplada en la Proposición 4.47.

(b) \Rightarrow (c). Por la Observación 4.37, para cada familia $\{[M_i]^\sigma\}_{i \in I} \subseteq X^\sigma$, $[\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$ es una cota inferior de $\{[M_i]^\sigma\}_{i \in I}$. Sea $[L]^\sigma \in X^\sigma$ tal que $[L]^\sigma \preceq^\sigma [M_i]^\sigma$ para cada $i \in I$. Entonces $\omega_{\sigma(L)}^L \preceq \omega_{\sigma(M_i)}^{M_i}$ para cada $i \in I$, de donde $\omega_{\sigma(L)}^L \preceq \bigwedge_{i \in I} \omega_{\sigma(M_i)}^{M_i} = \omega_{\prod_{i \in I} \sigma(M_i)}^{\prod_{i \in I} M_i} = \omega_{\sigma(\prod_{i \in I} M_i)}^{\prod_{i \in I} M_i}$ por la Proposición 1.103 y por hipótesis. Se sigue de lo anterior que $[\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$ es la mayor cota inferior de $\{[M_i]^\sigma\}_{i \in I}$; es decir, $\bigwedge_{i \in I} [M_i]^\sigma = [\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$.

(c) \Rightarrow (d). Sea $M \in R\text{-Mod}$ y sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq [M]^\sigma$. Entonces $[M_i]^\sigma = [M]^\sigma$ para cada $i \in I$. Luego, $[M]^\sigma = \bigwedge_{i \in I} [M_i]^\sigma = [\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$ por hipótesis. Concluimos que $[M]^\sigma$ es cerrada bajo productos directos.

(d) \Rightarrow (a). La implicación se sigue de inmediato, ya que, si toda clase en X^σ es cerrada bajo productos directos, entonces, en particular, $\mathbb{T}_\sigma = [0]^\sigma$ cumple tal propiedad de cerradura. \square

OBSERVACIÓN 4.49. Notemos que la condición (c) del corolario anterior equivale a que la semirretícula X^σ sea una retícula completa para $\sigma \in R$ -pr idempotente.

En virtud de los resultados anteriores y ya que todo prerradical exacto izquierdo es idempotente, para concluir que el anillo R es artiniiano bastaría probar alguna de las condiciones equivalentes del Corolario 4.48, considerando $\sigma \in R$ -pr exacto izquierdo. Lo anterior probaría también que X^σ es una retícula completa cuando $\sigma \in R$ -pr es exacto izquierdo (véase Observación 4.37).

Cabe mencionar que es precisamente la construcción canónica de un módulo principal, presentada en la Proposición 4.2, la motivación inicial para la definición

de las dos particiones de $R\text{-Mod}$ estudiadas en esta sección. Dichas particiones han probado ser una herramienta muy provechosa para explorar la condición del anillo de ser p -pequeño, si bien tienen interés por sí mismas.

3.1. Módulos σ -cogenerados. Sean R un anillo y $\sigma \in R\text{-pr}$. Con el propósito de estudiar más a fondo la partición X^σ , se define la siguiente clase de módulos, tomando como modelo el concepto de clase cogenerada por un módulo M , $\text{Cog}(M)$.

DEFINICIÓN 4.50. *Sea $M \in R\text{-Mod}$. La clase de módulos σ -cogenerados por M se define como:*

$$\sigma\text{-Cog}(M) = \{N \in R\text{-Mod} \mid \sigma(N) = \omega_{\sigma(M)}^M(N)\}.$$

OBSERVACIÓN 4.51. *Nótese que, en efecto, $\widehat{0}\text{-Cog}(M) = \text{Cog}(M)$.*

La siguiente proposición resulta sumamente útil, toda vez que relaciona la noción de módulo σ -cogenerado con el orden de la partición X^σ .

PROPOSICIÓN 4.52. *Sean $M \in R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$. Las siguientes condiciones son equivalentes para $N \in R\text{-Mod}$:*

- (a) $N \in \sigma\text{-Cog}(M)$.
- (b) $\omega_{\sigma(M)}^M \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$.
- (c) $[M]^\sigma \preceq^\sigma [N]^\sigma$.
- (d) *Si $Y := \text{Hom}_R(N, M)$, entonces existe un homomorfismo $G_{N,M} : N \rightarrow M^Y$ tal que $\sigma(N) = G_{N,M}^\leftarrow((\sigma(M))^Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) \Leftrightarrow (b). Si $N \in \sigma\text{-Cog}(M)$, entonces $\omega_{\sigma(M)}^M(N) = \sigma(N)$, de donde $\omega_{\sigma(M)}^M \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$ por la Proposición 1.97. Recíprocamente, si $\omega_{\sigma(M)}^M \preceq \omega_{\sigma(N)}^N$, entonces $\omega_{\sigma(M)}^M(N) \leq \omega_{\sigma(N)}^N(N) = \sigma(N)$. Por otra parte, notemos que para todo $f \in \text{Hom}_R(N, M)$ se cumple que $\sigma(N) \leq f^\leftarrow(\sigma(M))$ en virtud de la definición de prerradical. Luego, $\sigma(N) \leq \omega_{\sigma(M)}^M(N)$. Por lo tanto, $\sigma(N) = \omega_{\sigma(M)}^M(N)$; es decir, $N \in \sigma\text{-Cog}(M)$.

(b) \Leftrightarrow (c). Se sigue de inmediato de la definición de orden en X^σ .

(a) \Leftrightarrow (d). En efecto, $N \in \sigma\text{-Cog}(M)$ si, y sólo si, $\omega_{\sigma(M)}^M(N) = \sigma(N)$ si, y sólo si, $\sigma(N) = \bigcap \{g^\leftarrow(\sigma(M)) \mid g \in \text{Hom}_R(N, M)\}$. Sea $Y = \text{Hom}_R(N, M)$. Por la

propiedad universal del producto directo, existe un único morfismo $G_{N,M} : N \rightarrow M^Y$ tal que, para cada $g \in Y$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\pi_g} & M^Y \\ g \uparrow & \nearrow G_{N,M} & \\ N & & \end{array}$$

donde π_g denota la proyección canónica. Luego, en vista de la propiedad universal del producto y de la Observación 1.4, la condición $\sigma(N) = \bigcap \{g^{\leftarrow}(\sigma(M)) \mid g \in \text{Hom}_R(N, M)\}$ es equivalente a que $\sigma(N) = G_{N,M}^{\leftarrow}((\sigma(M))^Y)$, con lo que concluimos la demostración. \square

Como consecuencia directa de la proposición anterior, se obtiene una manera alternativa de describir a la clase de módulos σ -cogenerados. Dicha descripción se presenta en el siguiente corolario.

COROLARIO 4.53. *Para $M \in R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$,*

$$\sigma\text{-Cog}(M) = \bigcup \{[N]^\sigma \in X^\sigma \mid [M]^\sigma \preceq^\sigma [N]^\sigma\}.$$

Presentamos a continuación algunas propiedades de la clase σ -cogenerada por un módulo.

PROPOSICIÓN 4.54. *Sean $M \in R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$. La clase $\sigma\text{-Cog}(M)$ es cerrada bajo sumas directas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \sigma\text{-Cog}(M)$. Entonces $\omega_{\sigma(M)}^M(\bigoplus_{i \in I} N_i) = \bigoplus_{i \in I} \omega_{\sigma(M)}^M(N_i) = \bigoplus_{i \in I} \sigma(N_i) = \sigma(\bigoplus_{i \in I} N_i)$ por hipótesis y por la Proposición 1.78. Por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} N_i \in \sigma\text{-Cog}(M)$. \square

La siguiente proposición nos da una pauta acerca de la distribución de los elementos de X^σ , bajo el supuesto adicional de que el prerradical σ es exacto izquierdo.

PROPOSICIÓN 4.55. *Sean $N, M \in R\text{-Mod}$ tales que existe un monomorfismo $h : N \rightarrow M$ y sea σ un prerradical exacto izquierdo. Entonces $[M]^\sigma \preceq^\sigma [N]^\sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que h es la inclusión natural $i : N \hookrightarrow M$. Luego, $i^\leftarrow(\sigma(M)) = N \cap \sigma(M) = \sigma(N)$ al ser $\sigma \in R\text{-pr}$ exacto izquierdo. De lo anterior se sigue que $\omega_{\sigma(M)}^M(N) = \bigcap \{g^\leftarrow(\sigma(M)) \mid g \in \text{Hom}_R(N, M)\} \leq \sigma(N)$. Por otra parte, para todo $f \in \text{Hom}_R(N, M)$, se cumple que $\sigma(N) \leq f^\leftarrow(\sigma(M))$ por la definición de preradical. Luego, $\sigma(N) \leq \omega_{\sigma(M)}^M(N)$. Por lo tanto, $\sigma(N) = \omega_{\sigma(M)}^M(N)$. Concluimos que $[M]^\sigma \preceq^\sigma [N]^\sigma$ en virtud de la Proposición 4.52. \square

Como consecuencia de las proposiciones 4.52 y 4.55, se verifica el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.56. *Sean $M \in R\text{-Mod}$ y σ un preradical exacto izquierdo. Entonces $\sigma\text{-Cog}(M)$ es cerrada bajo monomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : K \rightarrow L$ un monomorfismo de R -módulos. Entonces, por la proposición anterior, $[L]^\sigma \preceq^\sigma [K]^\sigma$. Supongamos que $L \in \sigma\text{-Cog}(M)$. Se sigue de la Proposición 4.52 que $[M]^\sigma \preceq^\sigma [L]^\sigma$. Luego, $[M]^\sigma \preceq^\sigma [K]^\sigma$, lo cual implica, de nuevo por la Proposición 4.52, que $K \in \sigma\text{-Cog}(M)$. Concluimos que $\sigma\text{-Cog}(M)$ es cerrada bajo monomorfismos. \square

También, en virtud de las proposiciones 4.52 y 4.55, así como de la Proposición 4.54, se tiene la siguiente propiedad de cerradura de los elementos de X^σ .

PROPOSICIÓN 4.57. *Sean $M \in R\text{-Mod}$ y σ un preradical exacto izquierdo. Entonces $[M]^\sigma$ es cerrada bajo sumas directas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia en $[M]^\sigma$. Entonces $[M]^\sigma = [N_i]^\sigma$ para cada $i \in I$, de donde $N_i \in \sigma\text{-Cog}(M)$ para cada $i \in I$ por la Proposición 4.52. Luego, en vista de la Proposición 4.54 y, una vez más, de la Proposición 4.52, $[M]^\sigma \preceq^\sigma [\bigoplus_{i \in I} N_i]^\sigma$. Ahora, si además $\sigma \in R\text{-pr}$ es exacto izquierdo, considerando los monomorfismos $\iota_i : N_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i$ para cada $i \in I$, se sigue de la Proposición 4.55 que $[\bigoplus_{i \in I} N_i]^\sigma \preceq^\sigma [M]^\sigma$. Concluimos que $[M]^\sigma = [\bigoplus_{i \in I} N_i]^\sigma$, que es lo que había que verificar. \square

Finalmente, en vista de la definición y de las propiedades de la σ -cogeneración, podemos intercalar una nueva condición que involucra este concepto dentro del Corolario 4.48, para $\sigma \in R\text{-pr}$ exacto izquierdo.

COROLARIO 4.58. *Sea R un anillo p -pequeño y sea $\sigma \in R$ -pr exacto izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) \mathbb{T}_σ es cerrada bajo productos directos.
- (b) Para cada familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, $\sigma(\prod_{i \in I} M_i) = \prod_{i \in I} \sigma(M_i)$.
- (c) Para cada familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$, $\bigwedge_{i \in I} [M_i]^\sigma = [\prod_{i \in I} M_i]^\sigma$.
- (d) Para cada $M \in R\text{-Mod}$, $\sigma\text{-Cog}(M)$ es cerrada bajo productos directos.
- (e) Para cada $M \in R\text{-Mod}$, $[M]^\sigma$ es cerrada bajo productos directos.

DEMOSTRACIÓN. Las equivalencias entre las condiciones (a), (b), (c) y (e) se siguen del Corolario 4.48 y del hecho de que todo prerradical exacto izquierdo es idempotente.

(c) \Rightarrow (d). Sea $M \in R\text{-Mod}$ y sea $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \sigma\text{-Cog}(M)$. Por la Proposición 4.52, $[M]^\sigma \preceq^\sigma [N_i]^\sigma$ para cada $i \in I$, de donde $[M]^\sigma$ es cota inferior de $\{[N_i]^\sigma\}_{i \in I}$. Luego, por hipótesis, $[M]^\sigma \preceq^\sigma \bigwedge_{i \in I} [N_i]^\sigma = [\prod_{i \in I} N_i]^\sigma$. Concluimos que $\prod_{i \in I} N_i \in \sigma\text{-Cog}(M)$, de nuevo, por la Proposición 4.52.

(d) \Rightarrow (e). Sea $M \in R\text{-Mod}$ y sea $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq [M]^\sigma$. Entonces $[N_i]^\sigma = [M]^\sigma$ para cada $i \in I$. Luego, en vista de la Proposición 4.52 y de la hipótesis, se sigue que $\prod_{i \in I} N_i \in \sigma\text{-Cog}(M)$, de donde $[M]^\sigma \preceq^\sigma [\prod_{i \in I} N_i]^\sigma$. Por otro lado, como σ es exacto izquierdo, de la Proposición 4.55 se tiene que $[\prod_{i \in I} N_i]^\sigma \preceq^\sigma [M]^\sigma$. Por lo tanto, $[M]^\sigma = [\prod_{i \in I} N_i]^\sigma$. Concluimos que $[M]^\sigma$ es cerrada bajo productos directos. \square

Sería muy útil encontrar más caracterizaciones del orden en X^σ , como las presentadas en la Proposición 4.52, que confluyan en alguna de las condiciones del Corolario 4.58 para $\sigma \in R$ -pr exacto izquierdo.

Generalizar la cogeneración con respecto a un módulo a una relativa a un prerradical tiene interés *per se*; de hecho, la Definición 4.52 se puede dualizar, de manera natural, como sigue:

DEFINICIÓN 4.59. *Sea $M \in R\text{-Mod}$ y sea $\sigma \in R$ -pr. Se define y se denota a la clase de módulos que σ -cogeneran a M como:*

$$\sigma\text{-Cog}^{-1}(M) = \{N \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = \omega_{\sigma(N)}^N(M)\}.$$

De la definición anterior se sigue que, dados $M \in R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$,

$$\sigma\text{-Cog}^{-1}(M) = \bigcup \{ [N]^\sigma \in X^\sigma \mid [N]^\sigma \preceq^\sigma [M]^\sigma \}.$$

Un hecho curioso acerca de la clase $\sigma\text{-Cog}^{-1}(M)$ es que ésta sí resulta ser cerrada bajo productos directos, de donde, en particular, la clase \mathcal{C}^σ es cerrada bajo productos directos, aun cuando el prerradical σ no sea exacto izquierdo (véase Corolario 4.58). Lo anterior da una pequeña idea de la fertilidad de las líneas de investigación introducidas en este capítulo.

Algunas preguntas y problemas abiertos

Concluimos este trabajo con una lista de preguntas, surgidas en el transcurso de la elaboración del mismo, que aún permanecen abiertas y cuyas respuestas ayudarían, por una parte, a proponer una generalización de los resultados presentados en [20], pero, más aún (así lo esperamos), a tener una comprensión más profunda acerca de la condición de un anillo de ser p -pequeño y, en fin, a resolver de manera general la conjetura que nos planteamos inicialmente.

Algunas de estas preguntas vienen acompañadas de comentarios, implicaciones y consideraciones que dan cuenta de la información que, en relación a las mismas, ya existe, así como de los esfuerzos y avances realizados en miras de darles respuesta.

Anillos p -grandes

1. ¿Es la condición de coincialidad simétrica? Más precisamente, dado un dominio entero Z , ¿es todo anillo Z -coincial izquierdo un anillo Z -coincial derecho? ⁵
2. ¿Se puede prescindir de la numerabilidad del anillo R en el Teorema 2.47?
3. ¿Es posible sustituir la condición de coincialidad del anillo por otra, por ejemplo, sobre un anillo no necesariamente conmutativo?
4. ¿Existe un ejemplo de anillo radical que no sea coincial? ⁶
5. Dar un ejemplo de anillo p -grande que no sea anillo radical, si existe.

Con respecto al problema 5, cabe mencionar que el Dr. Francisco Raggi propuso la conjetura de que la retícula de prerradicales sobre el anillo conmutativo

⁵El M. en C. Henry Chimal Dzul tiene la conjetura de que la respuesta a esta pregunta es negativa.

⁶Esta pregunta fue planteada por el Dr. Carlos Signoret, durante una sesión del Seminario de Anillos de la UAM - Iztapalapa, a cargo del Dr. Rogelio Fernández-Alonso.

$\mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2$, mejor conocido como *la extensión trivial de \mathbb{Z}_2 por $(\mathbb{Z}_2)^2$* (ver [55, Ejercicios I.9 y I.10]), es una clase propia. Por su parte, el Dr. Rogelio Fernández-Alonso tiene una conjetura similar para la clase de anillos conmutativos presentada en [59, Teorema 2] por R. B. Warfield, Jr. Un indicio a favor de dichas conjeturas se encuentra en la caracterización debida a R. Fernández-Alonso y D. Herbera para los anillos conmutativos R tales que R -pr es finita (véase [22]), la cual establece que esta última condición se cumple si, y sólo si, R es artiniiano principal (equivalentemente, R es de tipo de representación finita). Como consecuencia del resultado anterior, tanto la retícula de prerradicales sobre $\mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2$ como la retícula de prerradicales sobre un anillo del tipo de Warfield son no finitas; la primera, al no ser $\mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2$ un anillo uniserial y la segunda, toda vez que los anillos propuestos por Warfield no son de tipo de representación finito. Luego, los anillos de las conjeturas de Raggi y Fernández-Alonso resultan buenos candidatos para el problema 5. Más aún, de verificarse las conjeturas antes enunciadas, los anillos implicados aportarían nuevos ejemplos de anillos artinianos y p -grandes.

Anillos p -pequeños

1. Dar una caracterización de módulo principal para el caso de los anillos puros semisimples (anillos \mathcal{I} -Köthe), como las de los anillos semisimples y locales uniserials enunciadas en las proposiciones 4.11 y 4.12. En particular, ¿es cierto que todo módulo principal de un anillo \mathcal{I} -Köthe contiene una copia de cada elemento del conjunto \mathcal{I} ?
2. ¿Coincide la clase de anillos p -pequeños con la de los anillos puros semisimples?
3. En caso de que la respuesta a la pregunta anterior sea negativa, ¿es posible dar una descripción de un módulo principal para anillos p -pequeños que no sean puros semisimples; es decir, para anillos que no cuenten con una “descomposición global”?
4. Dados R un anillo p -pequeño y $\sigma \in R$ -pr, ¿qué otros módulos pertenecen a la clase \mathcal{C}^σ , además del R -módulo M_σ construido en la prueba de la Proposición 4.2? Con respecto a este último módulo, cabe preguntarse si

es realmente destacado; es decir, ¿cumple M_σ alguna propiedad especial? Y, yendo un poco más lejos, ¿habrá otra forma de obtener un módulo principal para el anillo R ?

5. Sean R un anillo p -pequeño y R -idem el conjunto de los prerradicales idempotentes sobre el anillo R . Consideremos la clase \mathcal{A}_{id} , definida en el Corolario 4.44. ¿Consta \mathcal{A}_{id} de la totalidad de los átomos de R -idem?, ¿es R -idem una retícula atómica? ¿Qué se puede decir al respecto para la retícula de radicales, R -rad? Más generalmente, dado $\sigma \in R$ -pr, ¿es X_σ una retícula atómica?
6. Encontrar más caracterizaciones del orden en X^σ , como las presentadas en la Proposición 4.52.

En relación a las interrogantes planteadas en el inciso 5 anterior, notemos que si partimos de un anillo p -pequeño y conmutativo R y la retícula de t -radicales sobre R , R -trad, resulta ser atómica, entonces el anillo R debe ser artiniano en virtud de la Observación 4.24.

Con respecto al problema 6, como ya se ha mencionado, para concluir que el anillo R es artiniano partiendo de la hipótesis de que R es p -pequeño, bastaría probar alguna de las condiciones equivalentes del Corolario 4.48, considerando $\sigma \in R$ -pr exacto izquierdo. Desafortunadamente, en nuestra experiencia, esta faena ha resultado complicada, especialmente al intentar dualizar las propiedades de las particiones X_σ a las particiones X^σ para $\sigma \in R$ -pr. La principal dificultad estriba en el hecho de que los prerradicales preservan sumas directas; no así, en general, productos directos.

Por otro lado, dado un anillo R p -pequeño y conmutativo, se sigue de inmediato de la Proposición 1.24 y de la Observación 4.41 que si existe un módulo principal $\overline{M} \in R$ -Mod artiniano, entonces R es un anillo artiniano.⁷ Supongamos la condición un poco menos restrictiva de la existencia de un módulo principal $\overline{M} \in R$ -Mod finitamente cogenerado (*casi-artiniano* en el sentido de Beachy; *finitamente encajado* (en inglés, *finitely embedded (f.e.)*) de acuerdo a Vámos, véanse [4] y [57]). Entonces, en vista del Corolario 4.29 y de [1, Ejercicio 10.3],

⁷Esta propiedad se cumple aun cuando R no sea conmutativo.

en particular, para todo ideal I de R , R/I sería finitamente cogenerado como módulo sobre sí mismo (es decir, R/I sería un *anillo casi-artiniano izquierdo*, siguiendo a [4]), de donde, en virtud de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 4.60. [4, Proposición 5] *Un anillo es artiniano izquierdo si, y sólo si, R/I es un anillo casi-artiniano izquierdo para cada ideal I de R .*

se concluiría que R es artiniano izquierdo.

Más aún, como observaron los doctores José Ríos y Rogelio Fernández-Alonso durante una sesión reciente del Seminario de Anillos de la UNAM, si el módulo principal $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ es finitamente cogenerado, entonces, en vista de las proposiciones 1.13 y 1.15 se deduce que $\overline{M} = ES_1 \oplus \cdots \oplus ES_n$, con $S_i \in R\text{-simp}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Luego, si R es un anillo conmutativo, se sigue del Teorema 4.32 que R es semisimple.

De hecho, se llega a la misma conclusión prescindiendo de la condición de conmutatividad del anillo R . En efecto, por lo visto en el párrafo anterior y en virtud de la Proposición 1.103 y del Corolario 4.20, dado $\sigma \in R\text{-pr}$, se obtiene que $\sigma = \bigwedge_{i=1}^n \omega_{\sigma(ES_i)}^{ES_i}$. Luego, por la Proposición 1.89, todo $\sigma \in R\text{-pr}$ es exacto izquierdo; en particular, todo átomo de $R\text{-pr}$ es idempotente por la Observación 1.88. En vista del Teorema 1.102, lo anterior implica que R es V -anillo, de donde $\overline{M} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, con $S_i \in R\text{-simp}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Finalmente, del Teorema 4.8 se concluye que R es un anillo semisimple.

En resumen, si R es un anillo p -pequeño y $\overline{M} \in R\text{-Mod}$ es módulo principal finitamente cogenerado, entonces R es semisimple.

El resultado anterior pone en evidencia que la petición de que un módulo principal sea finitamente cogenerado es aún muy severa.

Copos y grandes retículas

Para la conveniencia del lector, en este apéndice incluimos la notación, terminología y propiedades básicas relativas a conjuntos parcialmente ordenados, retículas y grandes retículas, así como algunas nociones de la Teoría de Conjuntos, a las que hacemos referencia en este trabajo. Para una exposición más detallada que incluya las pruebas de los resultados que aquí se presentan recomendamos los textos [8], [30], [34], [55] y [56].

1. *Copos y retículas*

En términos generales, un *conjunto* es un objeto que satisface los axiomas del sistema ZFE (es decir, el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel, junto con el Axioma de Elección).¹

Una relación reflexiva y transitiva “ \leq ” sobre un conjunto P es un *preorden*. También se suele llamar preorden a la pareja $\langle P, \leq \rangle$. Si la relación anterior es además antisimétrica, entonces se dice que “ \leq ” es un *orden parcial*. En este último caso, se llama a la pareja $\langle P, \leq \rangle$ un *conjunto parcialmente ordenado* o, simplemente, un *copo*. Todo preorden induce de manera natural un orden parcial de la siguiente manera. Dado un preorden $\langle P, \leq \rangle$, definimos sobre P la relación de equivalencia dada por $a \sim b$ si $(a \leq b)$ y $(b \leq a)$. Sea $[a]_{\sim} := \{c \in P \mid a \sim c\}$. Se define la relación “ \leq_{\sim} ” sobre el conjunto cociente P / \sim como $[a]_{\sim} \leq_{\sim} [b]_{\sim}$ si $a \leq b$. Se sigue que $\langle P / \sim, \leq_{\sim} \rangle$ es un *copo*.

Un *copo* $\langle C, \leq \rangle$ en el que cualesquiera dos elementos son comparables (es decir, $a \leq b$ o $b \leq a$ para cualquier par de elementos $a, b \in C$) se llama *conjunto linealmente (totalmente) ordenado* o *cadena*. En tal caso, se dice que el orden parcial “ \leq ” es un *orden lineal* o *total*. Si C es un conjunto finito, se define la

¹Véase, por ejemplo, [34, Capítulo 12].

longitud de $\langle C, \leq \rangle$ como $|C| - 1$, donde $|C|$ denota la cardinalidad del conjunto C .²

NOTACIÓN A.1. Sea $\langle P, \leq \rangle$ un copo y sean $a, b \in P$. A lo largo de este trabajo denotamos por $a \geq b$ a la expresión $b \leq a$. Asimismo, se usa la notación $a < b$ ($b > a$) para abreviar la condición $a \leq b$, $a \neq b$ ($a \geq b$, $a \neq b$).

Sean $\langle P, \leq \rangle$ un copo y $Q \subseteq P$. Se dice que Q es *coinitial* (en P) si para cada $x \in P$ existe $y \in Q$ tal que $y \leq x$. Un elemento $q \in Q$ es el elemento *mayor* (*menor*) de Q si $a \leq q$ ($q \leq a$) para todo $a \in Q$. Un elemento $q' \in Q$ es un elemento *máximo* (*mínimo*) de Q en caso de que no exista $a \in Q$ tal que $q' \leq a$ ($a \leq q'$). Un elemento $p \in P$ es una *cota superior* (*cota inferior*) de Q si $a \leq p$ ($p \leq a$) para todo $a \in Q$. Si el conjunto de cotas superiores (inferiores) de Q tiene elemento mayor (menor), se llama a dicho elemento el *supremo* (*ínfimo*) de Q . Se dice que $\langle P, \leq \rangle$ es un *copo acotado* si tiene elemento mayor $\mathbf{1}$ y elemento menor $\mathbf{0}$. Dado un copo acotado, un elemento $r \in P$ se llama *átomo* (*coátomo*) si $r \neq \mathbf{0}$ ($r \neq \mathbf{1}$) y no existe $a \in P$ tal que $\mathbf{0} < a < r$ ($r < a < \mathbf{1}$).

Observemos que si $\langle C, \leq \rangle$ es una cadena y $Q \subseteq C$, entonces $m \in Q$ es elemento mayor (menor) de Q si, y sólo si, m es un elemento máximo (mínimo) de Q . En este caso, escribimos $m = \text{máx } Q$ ($m = \text{mín } Q$).

Sean $\langle P, \leq \rangle$ y $\langle P', \leq' \rangle$ copos. Una función $f : P \rightarrow P'$ es un *morfismo de orden* u *homomorfismo de copos* si preserva el orden; esto es, si cumple que, para cualesquiera $a, b \in P$, si $a \leq b$, entonces $f(a) \leq' f(b)$. Una función biyectiva $g : P \rightarrow P'$ es un *isomorfismo de copos* si, para cualesquiera $a, b \in P$, $a \leq b$ si, y sólo si, $g(a) \leq' g(b)$. Sea $h : P \rightarrow P'$ una función biyectiva. Se verifica fácilmente que h es un isomorfismo de copos si, y sólo si, tanto h como su inversa h^{-1} preservan el orden.

Un copo $\langle L, \leq \rangle$ es una *semirretícula* si para cada $a, b \in L$ existe el supremo de $\{a, b\}$ (denotado por $a \vee b$) o el ínfimo de $\{a, b\}$ (denotado por $a \wedge b$). El copo $\langle L, \leq \rangle$ es una *retícula* si para cada $a, b \in L$ existen $a \vee b$ y $a \wedge b$. Se sigue por inducción que en una retícula cualquier conjunto no vacío finito tiene supremo e ínfimo. Una *subretícula* de una retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es un subconjunto K de L

²Para las definiciones de cardinal y cardinalidad, véase la Sección 2 de este apéndice.

tal que para cada $a, b \in K$ se tiene que $a \vee b \in K$ y $a \wedge b \in K$. Decimos que la retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es *completa* si, para cada subconjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de L , existen el supremo y el ínfimo de $\{a_i\}_{i \in I}$ (denotados por $\bigvee_{i \in I} a_i$ y $\bigwedge_{i \in I} a_i$, respectivamente).

Sean $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle L', \leq', \vee', \wedge' \rangle$ dos retículas. Una función $f : L \rightarrow L'$ es un *homomorfismo de retículas* si $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$ para cualesquiera $a, b \in L$. Si la función f es además biyectiva, entonces f es un *isomorfismo de retículas*. En tal caso, se dice que las retículas $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle L', \leq', \vee', \wedge' \rangle$ son *isomorfas*. Es claro que todo isomorfismo de retículas es un isomorfismo de *copos*. Más aún, como el supremo y el ínfimo se obtienen a partir de la definición del orden, también resulta que todo isomorfismo de *copos* es un isomorfismo de retículas, como lo afirma el siguiente resultado. En general, adoptamos la convención de denotar a una retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ simplemente por su conjunto subyacente, L , a menos que sea importante especificar el orden, supremo e ínfimo asociados a la misma.

PROPOSICIÓN A.2. ([55, Proposición III.1.1]) *Sean L y L' dos retículas. Una función $f : L \rightarrow L'$ es un isomorfismo de copos si, y sólo si, f es un isomorfismo de retículas.*

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que una retícula tenga supremos e ínfimos arbitrarios.

PROPOSICIÓN A.3. [55, Proposición III.1.2] *Si L es un copo y todo subconjunto de L tiene supremo (ínfimo), entonces L es una retícula completa.*

Una retícula L es *distributiva* si, para cualesquiera $a, b, c \in L$, se tiene que $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ (o, equivalentemente, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$). Sea L una retícula con elemento menor $\mathbf{0}$ y elemento mayor $\mathbf{1}$. L se llama *atómica* (*coatómica*) si para cada $a \in L$, $a \neq \mathbf{0}$ ($a \neq \mathbf{1}$), existe un átomo (coátomo) $r \in L$ tal que $r \leq a$ ($a \leq r$). Dados $a, b \in L$, se dice que a es un *complemento* de b si $a \wedge b = \mathbf{0}$ y $a \vee b = \mathbf{1}$. Decimos que L es una retícula *complementada* si todos sus elementos tienen un complemento. Una retícula *booleana* es una retícula complementada y distributiva. No es difícil verificar que en una retícula booleana

cada elemento tiene un único complemento (véase, por ejemplo, [30, Lema I.6.1] o [55, Proposición III.4.4]). El ejemplo por antonomasia de retícula booleana es el siguiente. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia de A . Entonces $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq, \cup, \cap \rangle$ forma una retícula distributiva y complementada cuyo elemento menor es el conjunto vacío, \emptyset , y cuyo elemento mayor es el propio conjunto A .

PROPOSICIÓN A.4. ([55, Proposición III.4.5]) *Si L es una retícula completa booleana, entonces las siguientes identidades se cumplen para una familia arbitraria $\{a_i\}_{i \in I}$ y para un elemento c en L :*

$$(1) \left(\bigvee_I a_i \right) \wedge c = \bigvee_I (a_i \wedge c).$$

$$(2) \left(\bigwedge_I a_i \right) \vee c = \bigwedge_I (a_i \vee c).$$

Como consecuencia de la proposición anterior, en una retícula completa, booleana y atómica todo elemento es el supremo de los átomos que se encuentran por debajo de éste. Dualmente, en una retícula completa, booleana y coatómica todo elemento es el ínfimo de los coátomos que se encuentran por encima de él.

1.1. Producto de retículas. Muchas retículas importantes pueden ser representadas de manera más conveniente como combinaciones aritméticas de retículas más pequeñas si se usa una generalización de las operaciones suma, producto y exponenciación. Nosotros nos restringiremos a hablar de las dos últimas.

DEFINICIÓN A.5. *Dadas dos retículas $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \leq', \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$,³ se define el producto $L \times L'$ como el conjunto:*

$$L \times L' := \{(a, a') \mid a \in L, a' \in L'\}.$$

Si definimos el orden “ \preceq ” en $L \times L'$ como:

$$(a, a') \preceq (b, b') \Leftrightarrow (a \leq b \text{ y } a' \leq' b'),$$

resulta que $\langle L \times L', \preceq \rangle$ es un copo. Más aún, se tiene que $L \times L'$ es una retícula, con el supremo y el ínfimo dados, de manera natural, por:

³Para evitar confusiones, en esta definición distinguimos mediante la notación a los supremos e ínfimos de L y L' .

- (1) $(a, a') \vee (b, b') = (a \vee_L b, a' \vee_{L'} b')$.
- (2) $(a, a') \wedge (b, b') = (a \wedge_L b, a' \wedge_{L'} b')$.

La definición anterior se puede generalizar para el producto de n retículas, $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$, con $n \geq 1$. En caso de que $L_i = L$ para cada $i = 1, \dots, n$, denotamos al producto de retículas $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$ por L^n . Más aún, la definición de producto de retículas se extiende de manera natural para una familia $\{L_i\}_{i \in I}$ de retículas. En este último caso, denotamos por $\prod_{i \in I} L_i$ al producto de los elementos de dicha familia.

EJEMPLO A.6. *Presentamos un ejemplo al cual hacemos referencia en la subsección 1.2 del Capítulo 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ al conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$. Claramente, $\mathbf{n} + \mathbf{1}$, con el orden heredado de los enteros, es una cadena. Más aún, $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ resulta ser una retícula, con el supremo e ínfimo dados de la siguiente manera. Para cualesquiera $k, l \in \mathbf{n} + \mathbf{1}$, $k \vee l = \max\{k, l\}$ y $k \wedge l = \min\{k, l\}$. Luego, en vista de la definición anterior, para cada $m \geq 1$, $(\mathbf{n} + \mathbf{1})^m$ es una retícula, con el orden, supremo e ínfimo dados componente a componente; esto es, para cualesquiera $(k_1, \dots, k_m), (l_1, \dots, l_m) \in (\mathbf{n} + \mathbf{1})^m$,*

- (1) $(k_1, \dots, k_m) \preceq (l_1, \dots, l_m) \Leftrightarrow k_i \leq l_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.
- (2) $(k_1, \dots, k_m) \vee (l_1, \dots, l_m) = (p_1, \dots, p_m)$, con $p_i = \max\{k_i, l_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.
- (3) $(k_1, \dots, k_m) \wedge (l_1, \dots, l_m) = (p'_1, \dots, p'_m)$, con $p'_i = \min\{k_i, l_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

De hecho, se verifica directamente que $(\mathbf{n} + \mathbf{1})^m$ es una retícula distributiva para cada $m \geq 1$.

2. Algunos aspectos de la Teoría de Conjuntos

Un conjunto S es un *ordinal* si es transitivo (es decir, si todo elemento de S es un subconjunto de S) y bien ordenado por la relación de pertenencia “ \in ” (esto es, (S, \in) es un conjunto linealmente ordenado y todo subconjunto no vacío de S tiene un elemento menor).

Denotamos a los ordinales mediante las letras griegas γ, δ, η . Un ordinal γ se llama *sucesor* si $\gamma = 0$ o bien $\gamma = \eta + 1$ para algún ordinal η . De lo contrario, se dice que γ es un ordinal *límite*.

Siguiendo a [56, 4.1], se dice que dos conjuntos X, Y son *equipotentes* si existe una función biyectiva $f : X \rightarrow Y$. En tal caso, se abrevia $X \approx Y$. De acuerdo a [56, Definición VII.3.8], un conjunto X es un *número cardinal* o, simplemente, un *cardinal* si, y sólo si, X es un ordinal y, para cada ordinal γ , si $X \approx \gamma$, entonces $X = \gamma$ o bien $X \in \gamma$. Se suele denotar a un cardinal mediante la letra griega κ . Usando el Axioma de Elección, se puede probar que todo conjunto X tiene asociado un número cardinal, comúnmente designado como la *cardinalidad de X* y denotado por $|X|$. Dos números cardinales destacados son los de \mathbb{N} (y de todos los conjuntos numerables) y \mathbb{R} (o del continuo), que se denotan, respectivamente, por $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ y $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Se entiende por *clase* una colección de conjuntos x que satisfacen una fórmula dada (propiedad) $P(x)$. Todo conjunto X puede ser considerado como una clase, a saber, $X = \{x \mid x \in X\}$. Sin embargo, no toda clase es un conjunto.⁴ En este último caso, se dice que la clase en consideración es una *clase propia* o que es una *clase no cardinable*. Un hecho bien conocido acerca de los ordinales y de los cardinales es que constituyen clases propias. Denotamos por \mathcal{OR} a la clase de todos los ordinales.

El Principio de Inducción y el Teorema de Recursión son, indudablemente, herramientas fundamentales para probar propiedades de los números naturales y para construir funciones cuyo dominio es \mathbb{N} . Estos resultados se generalizan a la clase \mathcal{OR} como sigue.

TEOREMA A.7. ([34, Teorema IV.4.3]) (*Principio de inducción transfinita*)
Sea $P(x)$ una propiedad. Supongamos que:

1. $P(0)$ se cumple.
2. Para cada $\gamma \in \mathcal{OR}$, si $P(\gamma)$ se cumple, entonces $P(\gamma + 1)$ se cumple.
3. Para todo ordinal límite $\gamma \neq 0$, si $P(\eta)$ se cumple para cada $\eta < \gamma$, entonces $P(\gamma)$ se cumple.

⁴Por la paradoja de Russell, $\{x \mid x \notin x\}$ no es un conjunto.

Entonces $P(\gamma)$ se cumple para todo $\gamma \in \mathcal{OR}$.

TEOREMA A.8. ([56, Teorema VII.1.7]) (*Teorema de recursión transfinita*)
Sean x cualquier objeto, G cualquier conjunto y δ un ordinal distinto de cero.
Existe una única F tal que cumple las siguientes propiedades:

1. F es una función sobre δ .
2. $F(0) = x$.
3. Para cada $\eta \in \mathcal{OR}$ tal que $\eta + 1 < \delta$,⁵ $F(\eta + 1) = G(F(\eta))$.
4. Para cada $\eta < \delta$,⁶ si η es un ordinal límite, entonces $F(\eta) = \bigcup_{\gamma \in \eta} F(\gamma)$.

3. Grandes retículas

Gran parte de los conceptos de la Teoría de Conjuntos, tales como los de contención, unión, intersección, producto cartesiano, relación (de orden y de equivalencia) e incluso el de función, pueden extenderse a clases que no necesariamente son conjuntos. Esta afirmación tiene una justificación desde un punto de vista axiomático dentro del Sistema de von Neumann-Bernays-Gödel (o Teoría de Clases) ([18], pág. 9 y [40], pág. 23), en el que el objeto primitivo es la clase. En este contexto más general, podemos hablar de *clase parcialmente ordenada* o *clapo*,⁷ llamando a una clase parcialmente ordenada que cumple las propiedades de retícula una *gran retícula*.

Asimismo, dentro de la Teoría de Clases, el *Axioma de Elección Global*⁸ es una variante más fuerte que el Axioma de Elección, el cual se aplica tanto a clases propias como a conjuntos. En palabras, dicho axioma establece que *existe*

⁵es decir, $\eta + 1 \in \delta$

⁶esto es, $\eta \in \delta$

⁷También es posible definir una clase parcialmente ordenada como una categoría C (véase el Apéndice B) tal que para cada $A, A' \in C$ existe un único morfismo $f : A \rightarrow A'$, en cuyo caso se escribe $A \leq A'$, y que cumple las siguientes propiedades:

1. Para toda $A \in C$, $A \leq A$.
2. Para cada $A, A', A'' \in C$, si $A \leq A'$ y $A' \leq A''$, entonces $A \leq A''$.

(Ver [18], pág. 239).

⁸en inglés, *Axiom of Global Choice*

una función de elección definida sobre cualquier clase de conjuntos no vacíos⁹ o, equivalentemente, que toda colección de clases no vacías tiene una función de elección.¹⁰

Una aplicación del Axioma de Elección Global es la siguiente. Sea \sim una relación de equivalencia sobre una clase C . Una subclase S de C que sea conjunto es un *conjunto completo e irredundante de representantes de la relación \sim* si para cada $s \in S$ existe un único $s' \in S$ tal que $s \sim s'$. El Axioma de Elección Global garantiza la existencia de tal conjunto de representantes para cada relación de equivalencia que induzca una partición que resulte ser un conjunto.

Para una exposición detallada acerca del Axioma de Elección para clases y sus formulaciones equivalentes, sugerimos consultar las magníficas referencias [32], [39, Capítulo V] y [53].

⁹Siendo más cuidadosos, en este caso se debería hablar de una “asignación” o “funcional” de elección, toda vez que su dominio no es un conjunto; sin embargo, en la práctica, suele usarse el término “función de elección” aun en esta situación más general.

¹⁰La idea detrás de esta última versión del Axioma de Elección consiste en que es posible restringir las “elecciones” en cada clase a cierta subclase de conjuntos en la clase. Esta subcolección resulta ser un conjunto.

Apéndice B

Categorías y funtores

En este apéndice presentamos el lenguaje categórico empleado a lo largo de este trabajo. El lector podrá encontrar las pruebas de los resultados que aquí aparecen en las referencias [33], [40] y [51].

Una *categoría* \mathfrak{C} consiste de una clase no vacía de *objetos*, $Ob(\mathfrak{C})$, y una clase no vacía de *morfismos*, $Mor(\mathfrak{C})$, con las siguientes propiedades:

1. Para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$, existe un conjunto $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ en $Mor(\mathfrak{C})$ que cumple la condición $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) = Mor_{\mathfrak{C}}(D, E)$ si, y sólo si, $A = D$ y $B = E$.
2. Para cada terna de objetos $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$, existe una función $\circ : Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) \times Mor_{\mathfrak{C}}(B, C) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(A, C)$, llamada *composición*, tal que $(g, f) \mapsto f \circ g$ para cada $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y para cada $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C)$, que satisface las propiedades que presentamos a continuación:
 - (i) Para todo objeto A en $Ob(\mathfrak{C})$ existe un morfismo $id_A \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, A)$ tal que, para cualesquiera $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, A)$, se tiene que $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$. Se suele llamar al morfismo id_A el *morfismo identidad* en A .
 - (ii) Si $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C)$ y $h \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, D)$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; es decir, la composición es asociativa.

Para abreviar, si $C \in Ob(\mathfrak{C})$ y $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$, en ocasiones escribiremos $C \in \mathfrak{C}$ y $f : A \rightarrow B$.

Una de las categorías más simples es *Conj*, cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones de un conjunto a otro. Dado un anillo R , un ejemplo de categoría de especial interés para nosotros es la categoría de R -módulos izquierdos (derechos), en la que los morfismos son los R -homomorfismos de

módulos y la composición coincide con la composición de funciones. Denotaremos a dicha categoría también por $R\text{-Mod}$ ($\text{Mod-}R$). En particular, si $R = \mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ denota a la categoría de grupos abelianos. De manera similar se definen las categorías de otras estructuras algebraicas, tales como grupos, anillos, etc. Otros ejemplos interesantes de categorías son presentados enseguida.

Sea \mathfrak{C} una categoría. Se define la *categoría opuesta* de \mathfrak{C} , \mathfrak{C}^{op} , como aquella que satisface $Ob(\mathfrak{C}^{op}) = Ob(\mathfrak{C})$, $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) = Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(B, A)$ para cualesquiera $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ y cuya composición \circ' está dada por $g \circ' f = f \circ g$, donde “ \circ ” denota la composición en \mathfrak{C} . Una categoría \mathfrak{C}' es una *subcategoría* de \mathfrak{C} si $Ob(\mathfrak{C}')$ es una subclase de $Ob(\mathfrak{C})$, $Mor_{\mathfrak{C}'}(A', B') \subseteq Mor_{\mathfrak{C}}(A', B')$ para cualesquiera $A', B' \in Ob(\mathfrak{C}')$, la composición en \mathfrak{C}' es la misma que la de \mathfrak{C} y, finalmente, para cada objeto $A' \in \mathfrak{C}'$, el morfismo identidad en $Mor_{\mathfrak{C}'}(A', A')$ coincide con el morfismo identidad en $Mor_{\mathfrak{C}}(A', A')$. Una subcategoría \mathfrak{C}' de \mathfrak{C} se dice *plena* si $Mor_{\mathfrak{C}'}(A', B') = Mor_{\mathfrak{C}}(A', B')$ para cualesquiera $A', B' \in Ob(\mathfrak{C}')$. Un ejemplo de subcategoría plena de particular interés es el siguiente. Sea $R\text{-mod}$ la categoría de R -módulos izquierdos finitamente generados. Entonces $R\text{-mod}$ es una subcategoría plena de $R\text{-Mod}$.

Dadas dos categorías \mathfrak{C} y \mathfrak{D} , se define su *producto* $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ como la categoría cuyos objetos son parejas de la forma (C, D) , con $C \in Ob(\mathfrak{C})$ y $D \in Ob(\mathfrak{D})$, y cuyos morfismos $h : (C, D) \rightarrow (C', D')$ son parejas $h = (h_1, h_2)$, donde $h_1 \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, C')$ y $h_2 \in Mor_{\mathfrak{D}}(D, D')$. La composición \circ en $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ se define por $(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ_{\mathfrak{C}} h_1, g_2 \circ_{\mathfrak{D}} h_2)$ para cualesquiera $h_1 \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, C')$, $g_1 \in Mor_{\mathfrak{C}}(C', C'')$, $h_2 \in Mor_{\mathfrak{D}}(D, D')$ y $g_2 \in Mor_{\mathfrak{D}}(D', D'')$, donde “ $\circ_{\mathfrak{C}}$ ” y “ $\circ_{\mathfrak{D}}$ ” denotan las composiciones en \mathfrak{C} y \mathfrak{D} , respectivamente. Esta definición se puede extender por inducción a un producto finito de categorías.

Sea \mathfrak{C} una categoría y sean $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$. Un morfismo $u : A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} es un *monomorfismo* si para cada $C \in Ob(\mathfrak{C})$ y para cada par de morfismos $f, g \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, A)$ tales que $u \circ f = u \circ g$, se tiene que $f = g$. Un morfismo $p : A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} es un *epimorfismo* si para cada $C \in Ob(\mathfrak{C})$ y para cada par de morfismos $f, g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C)$ tales que $f \circ p = g \circ p$, se tiene que $f = g$. Un morfismo $u : A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} es un *isomorfismo* si existe un morfismo $v : B \rightarrow A$

tal que $uv = id_B$ y $vu = id_A$. En este caso, el morfismo v está unívocamente determinado por u y se llama el *inverso* de u (denotado por u^{-1}). Si existe un isomorfismo $u : A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} se dice que los objetos A y B son *isomorfos* en \mathfrak{C} , en cuyo caso se escribe $A \cong B$. Se verifica fácilmente que todo isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo, si bien la recíproca no se cumple en cualquier categoría (por ejemplo, en la categoría de anillos).

Dada una categoría \mathfrak{C} , un objeto $I \in Ob(\mathfrak{C})$ se llama *inicial* en \mathfrak{C} si, para cada objeto $C \in \mathfrak{C}$, existe sólo un morfismo $I \rightarrow C$. Un objeto $T \in Ob(\mathfrak{C})$ se llama *terminal* en \mathfrak{C} si, para cada objeto $C \in \mathfrak{C}$, existe sólo un morfismo $C \rightarrow T$. Un *objeto cero* en \mathfrak{C} es un objeto a la vez inicial y terminal en \mathfrak{C} .

Dadas \mathfrak{C} y \mathfrak{D} dos categorías, definimos un *funtor covariante* $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ como una regla que asocia:

1. A cada objeto $C \in Ob(\mathfrak{C})$, un objeto $F(C) = D \in \mathfrak{D}$.
2. A cada morfismo $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, C')$, un morfismo $F(f) \in Mor_{\mathfrak{D}}(F(C), F(C'))$, que cumple las siguientes propiedades:
 - (i) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,
 - (ii) $F(id_C) = id_{F(C)}$.

De manera dual, se define un *funtor contravariante* como sigue. Dadas \mathfrak{C} y \mathfrak{D} dos categorías, un *funtor contravariante* $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ es una regla que asocia:

1. A cada objeto $C \in Ob(\mathfrak{C})$, un objeto $F(C) = D \in \mathfrak{D}$.
2. A cada morfismo $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, C')$, un morfismo $F(f) \in Mor_{\mathfrak{D}}(F(C'), F(C))$, que cumple las siguientes propiedades:
 - (i) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$,
 - (ii) $F(id_C) = id_{F(C)}$.

Presentamos enseguida algunos ejemplos de funtores.

- (1) Dada una categoría \mathfrak{C} , el *funtor identidad* sobre \mathfrak{C} , $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, que asigna a cada objeto y a cada morfismo de \mathfrak{C} los mismos objeto y morfismo, es claramente un funtor covariante.
- (2) Sea \mathfrak{C} una categoría y sea \mathfrak{D} una categoría con objeto cero, 0 . Se define el *funtor cero* de la categoría \mathfrak{C} a la categoría \mathfrak{D} como el funtor $0_{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ que a cada objeto de \mathfrak{C} le asocia el objeto $0 \in Ob(\mathfrak{D})$ y a cada morfismo en

\mathfrak{C} le asocia el morfismo $0 \rightarrow 0$ en \mathfrak{D} . Claramente, este funtor es covariante y contravariante.

- (3) Si \mathfrak{C} es una categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones entre los conjuntos respectivos, se puede definir un funtor $F : \mathfrak{C} \rightarrow \text{Conj}$, tal que $F(C) = C$ para cada $C \in \mathfrak{C}$ y $F(f) = f$ para cada morfismo f en \mathfrak{C} . Como el papel de este funtor es simplemente “olvidar” cualquier estructura adicional de los objetos y morfismos de \mathfrak{C} , se le suele llamar *funtor que olvida* o *funtor olvidadizo*. Existen funtores que olvidan $\mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \text{Conj}$ (que suprime la operación de suma y la aditividad de los morfismos), $An \rightarrow \text{Conj}$, donde An denota la categoría de los anillos (el cual suprime las operaciones de suma y producto, así como la preservación de la suma y el producto de los morfismos), entre otros. Del mismo modo, hay funtores olvidadizos $An \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ (que olvida la operación de producto), $R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ (que olvida la acción del anillo R), por mencionar algunos.
- (4) Sea \mathfrak{C} una subcategoría de la categoría \mathfrak{D} y sea $E : \text{Mor}(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathfrak{D})$ la (asignación) inclusión. Entonces E induce un funtor covariante de la categoría \mathfrak{C} a la categoría \mathfrak{D} , que denotamos también por $E : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$, llamado el *funtor inclusión de \mathfrak{C} a \mathfrak{D}* .
- (5) Dado $M \in R\text{-Mod}$, denotamos por $\text{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ al *funtor Hom covariante*, que manda a cada $N \in R\text{-Mod}$ en $\text{Hom}_R(M, N)$ y a cada $f \in \text{Hom}_R(N, N')$ al morfismo $\text{Hom}_R(M, f) : \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N')$, denotado por f_* , tal que, para cada $h \in \text{Hom}_R(M, N)$, $f_*(h) = fh$.
- De manera similar, dado $M \in R\text{-Mod}$, denotamos por $\text{Hom}_R(-, M) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ al *funtor Hom contravariante* que envía a cada $N \in R\text{-Mod}$ en $\text{Hom}_R(N, M)$ y a cada $f \in \text{Hom}_R(N, N')$ al morfismo inducido $f^* := \text{Hom}_R(f, M) : \text{Hom}_R(N', M) \rightarrow \text{Hom}_R(N, M)$ tal que, para cada $h \in \text{Hom}_R(N', M)$, $f^*(h) = hf$.
- (6) Dado $N \in R\text{-Mod}$, el funtor $F := - \otimes_R N : \text{Mod-}R \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$, tal que, para cada $M \in \text{Mod-}R$, $F(M) = M \otimes_R N$ (el *producto tensorial*

de M y N)¹ y, para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow M'$ en $\text{Mod-}R$, $F(f) = f \otimes id_N$, es covariante. Similarmente, dado $M \in \text{Mod-}R$, se define el funtor covariante $G := M \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ como sigue. Para cada $N \in R\text{-Mod}$, $G(N) = M \otimes_R N$ y, para cada R -homomorfismo $g : N \rightarrow N'$ en $R\text{-Mod}$, $G(g) = id_M \otimes g$.

Sean \mathfrak{C} y \mathfrak{D} subcategorías plenas de $R\text{-Mod}$ y sea $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ un funtor *covariante*. Si, para cada sucesión exacta corta $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ en \mathfrak{C} , la sucesión $0 \rightarrow F(K) \rightarrow F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow 0$ ($F(K) \rightarrow F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow 0$) es exacta en \mathfrak{D} , entonces se dice que F es un *funtor exacto izquierdo (derecho)*. Si, por el contrario, $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ es un funtor *contravariante*, se llama a F *funtor exacto izquierdo (derecho)* en caso de que, para cada sucesión exacta corta $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ en \mathfrak{C} , la sucesión $0 \rightarrow F(N) \rightarrow F(M) \rightarrow F(K) \rightarrow 0$ ($F(N) \rightarrow F(M) \rightarrow F(K) \rightarrow 0$) sea exacta. Es un hecho bien conocido que los funtores Hom (covariante y contravariante) son exactos izquierdos, mientras que los funtores covariantes $- \otimes_R N$ y $M \otimes_R -$, con $N \in R\text{-Mod}$ y $M \in \text{Mod-}R$, son exactos derechos. Un funtor entre categorías de módulos es *exacto* si es exacto izquierdo y derecho.

Sean \mathfrak{A} , \mathfrak{B} y \mathfrak{C} categorías y sean $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ funtores. Se define la *composición* de los funtores F y G , $GF : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$, de manera natural como sigue. Para cada objeto $A \in \mathfrak{A}$, $GF(A) = G(F(A))$, y, para cada $f \in \text{Mor}_{\mathfrak{A}}(A, A')$, $GF(f) = G(F(f))$.

Sean \mathfrak{C} y \mathfrak{D} dos categorías y sea $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ un funtor covariante. Se dice que F es *denso* si, para cada objeto $D \in \text{Ob}(\mathfrak{D})$, existe un objeto $C \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ tal que $F(C) \cong D$. Dados $C, C' \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, consideremos la función $F_{C,C'} : \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, C') \rightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(F(C), F(C'))$, dada por $F_{C,C'}(f) = F(f)$ para cada $f \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, C')$. Decimos que F es *pleno* si la función $F_{C,C'}$ es suprayectiva para cada $C, C' \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ y que F es *fiel* en caso de que la función $F_{C,C'}$ sea inyectiva para cada $C, C' \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$. Finalmente, decimos que el funtor F es *inyectivo en objetos* si manda objetos distintos de \mathfrak{C} en objetos distintos de \mathfrak{D} .

¹para la definición y propiedades de este grupo abeliano, ver [1, Sección 19], o bien, [51, Capítulo I]

PROPOSICIÓN B.1. ([33, Proposición 12.11] *La composición de funtores plenos (respectivamente, fieles, densos) es un funtor pleno (respectivamente, fiel, denso).*

PROPOSICIÓN B.2. ([33, Proposición 12.12] *Una subcategoría de una categoría es plena si, y sólo si, el funtor inclusión es pleno.*

Sean \mathfrak{C} y \mathfrak{D} dos categorías y sean $F, G : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ dos funtores. Una *transformación natural* t de F a G , que denotamos por $t : F \rightarrow G$, consta de una clase de morfismos $\{t_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \text{Ob}(\mathfrak{C})}$ en \mathfrak{D} , tal que, para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} , $G(f)t_A = t_B F(f)$; es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{t_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{t_B} & G(B) \end{array}$$

Si se cumple, además, que para cada $A \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ el morfismo t_A es un isomorfismo en \mathfrak{D} , se llama a t una *equivalencia natural* o *isomorfismo natural* de funtores. En este último caso, se dice que los funtores F y G son (*naturalmente*) *equivalentes* o (*naturalmente*) *isomorfos* y se escribe $F \simeq G$.

Un funtor covariante $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ se dice una *equivalencia de categorías* si existe un funtor $G : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ y equivalencias naturales $FG \simeq 1_{\mathfrak{D}}$, $GF \simeq 1_{\mathfrak{C}}$. En tal caso, se dice que F y G son equivalencias inversas entre sí. Si existe una equivalencia de categorías $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ se dice que las *categorías* \mathfrak{C} y \mathfrak{D} son *equivalentes*. En particular, si $FG = 1_{\mathfrak{D}}$ y $GF = 1_{\mathfrak{C}}$, entonces decimos que las *categorías* \mathfrak{C} y \mathfrak{D} son *isomorfas*.

TEOREMA B.3. [3, Teorema I.1.2] *Dos categorías \mathfrak{C} y \mathfrak{D} son equivalentes si, y sólo si, existe un funtor fiel, pleno y denso $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$.*

Un funtor $D : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ contravariante es una equivalencia de categorías si el funtor covariante inducido $\overline{D} : \mathfrak{C}^{op} \rightarrow \mathfrak{D}$ es una equivalencia de categorías. En tal caso, se dice que D es una *dualidad*.

Sean $F, G : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ funtores. Decimos que F es un *subfuntor* del funtor G si existe una transformación natural $t : F \rightarrow G$ tal que, para cada $M \in$

R -Mod, se tiene que $F(M) \leq G(M)$ y el homomorfismo $t_M : F(M) \rightarrow G(M)$ es la inclusión.²

Una nota final en cuanto a la notación: en aras de la simplicidad, a lo largo de esta tesis, dados un functor $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ y un objeto $C \in \mathfrak{C}$, en ocasiones, como es habitual, escribimos FC , en vez de $F(C)$, para indicar el objeto de la categoría \mathfrak{D} asociado a C bajo el functor F . Tal es el caso de, por ejemplo, el Teorema 1.29, la Observación 1.105 y la Proposición 1.110.

²El concepto de subfunctor se puede definir de manera más general dentro de una categoría con subobjetos e inclusiones; por ejemplo, en una categoría concreta.

Apéndice C

Homología

Finalmente, este apéndice incluye algunos conceptos homológicos bien conocidos (junto con su notación y ciertas propiedades), tales como los de producto y coproducto fibrados, extensiones de módulos y funtores Ext, por mencionar algunos, a los que apelamos en algunas secciones de este trabajo, particularmente en la Sección 2 del Capítulo 2. Dichos conceptos pueden localizarse en cualquier libro de Álgebra Homológica; tal es el caso de las referencias [41] y [51].

Sean $f : X \rightarrow Z$ y $g : Y \rightarrow Z$ morfismos en una categoría \mathfrak{C} . El *producto fibrado* o *cuadrado cartesiano*¹ de f y g consta de un objeto P y una pareja de morfismos $\varphi : P \rightarrow X$ y $\psi : P \rightarrow Y$ en \mathfrak{C} tales que $f\varphi = g\psi$, con la siguiente propiedad universal. Si $\varphi' : P' \rightarrow X$ y $\psi' : P' \rightarrow Y$ son morfismos en \mathfrak{C} tales que $f\varphi' = g\psi'$, entonces existe un único morfismo $h : P' \rightarrow P$ en \mathfrak{C} tal que $\varphi' = \varphi h$ y $\psi' = \psi h$, como se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 P' & & & & \\
 \searrow^{\varphi'} & & & & \\
 & \xrightarrow{h} & P & \xrightarrow{\varphi} & X \\
 \searrow^{\psi'} & & \downarrow \psi & & \downarrow f \\
 & & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

De manera dual se define el *coproducto fibrado* (suma fibrada) o *cuadrado cocartesiano*² de dos morfismos $f : Z \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow Y$ en una categoría \mathfrak{C} como una tripleta (Q, ϕ, γ) , donde Q es un objeto y $\phi : X \rightarrow Q$, $\gamma : Y \rightarrow Q$ son morfismos en \mathfrak{C} tales que $\phi f = \gamma g$ y que cumplen la siguiente propiedad universal. Si $\phi' : X \rightarrow Q'$ y $\gamma' : Y \rightarrow Q'$ son morfismos en \mathfrak{C} tales que $\phi' f = \gamma' g$, entonces

¹en inglés, *pullback*

²en inglés, *pushout*

existe un único morfismo $h : Q \rightarrow Q'$ en \mathfrak{C} tal que $\phi' = h\phi$ y $\gamma' = h\gamma$, como se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{f} & X \\
 g \downarrow & & \downarrow \phi \\
 Y & \xrightarrow{\gamma} & Q \\
 & \searrow \gamma' & \downarrow \phi' \\
 & & Q'
 \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled h points from Q to Q' in the original diagram.)

En la categoría de R -módulos existen tanto el producto fibrado como la suma fibrada, como se afirma en las siguientes proposiciones.

PROPOSICIÓN C.1. ([51, Ejercicio 2.46]) Sean $f : N \rightarrow M$, $g : L \rightarrow M$ homomorfismos de R -módulos. Sea $P := \{(y, z) \in N \oplus L \mid f(y) = g(z)\}$ y sean $\varphi : P \rightarrow N$, $\psi : P \rightarrow L$ tales que $\varphi(y, z) := y$, $\psi(y, z) := z$ para cada $(y, z) \in P$. Entonces (P, φ, ψ) es un producto fibrado en $R\text{-Mod}$.

PROPOSICIÓN C.2. ([51, Ejercicio 2.29]) Sean $f : M \rightarrow N$, $g : M \rightarrow L$ homomorfismos de R -módulos. Sea $Q := (N \oplus L)/K$, con $K = \{(f(x), -g(x)) \mid x \in M\}$, y sean $\phi : N \rightarrow Q$, $\gamma : L \rightarrow Q$ tales que $\phi(y) := (0, y) + K$ para cada $y \in N$ y $\gamma(z) := (z, 0) + K$ para cada $z \in L$. Entonces (Q, ϕ, γ) es un coproducto fibrado en $R\text{-Mod}$.

Sea $M \in R\text{-Mod}$. Una *resolución proyectiva* de M es una sucesión exacta $\cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, con P_n proyectivo para cada $n \geq 0$. De manera similar, una *resolución inyectiva* de M es una sucesión exacta $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots \rightarrow E^n \rightarrow \cdots$ en la cual E^n es inyectivo para cada $n \geq 0$. Como se muestra en [51, Teoremas III.3.8 y III.3.28], todo R -módulo tiene una resolución proyectiva y una resolución inyectiva. La *dimensión proyectiva* de M , denotada por $\text{pd}(M)$ como en [51], mide qué tanto se aleja el módulo M de ser proyectivo. Esta dimensión es definida como sigue. Decimos que $\text{pd}(M) \leq n$ si existe una resolución proyectiva $0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. En tal caso, si n es el menor entero positivo para el cual se cumple la condición anterior, se define $\text{pd}(M) = n$. De lo contrario, se define $\text{pd}(M) = \infty$. La *dimensión*

proyectiva global izquierda del anillo R , denotada por $\text{lpD}(R)$ siguiendo a [51], se define como $\text{lpD}(R) = \sup\{\text{pd}(M) \mid M \in R\text{-Mod}\}$. Similarmente, usando resoluciones inyectivas, se define la *dimensión inyectiva* de un R -módulo y la *dimensión inyectiva (global) izquierda* del anillo R .

Un *complejo de cadena* es una sucesión de R -módulos y R -homomorfismos $C_\bullet : \cdots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} M_n \xrightarrow{\delta_n} M_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \rightarrow M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} 0$, con $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\delta_n \delta_{n+1} = 0$ para cada n . Por su parte, un *complejo de cocadena* es una sucesión de R -módulos y R -homomorfismos $C^\bullet : 0 \xrightarrow{\delta^0} M^0 \xrightarrow{\delta^1} M^1 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \rightarrow M^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} M^n \xrightarrow{\delta^n} M^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$, con $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\delta^{n+1} \delta^n = 0$ para cada n . En particular, toda sucesión exacta es un complejo de cadena y un complejo de cocadena. Dado un complejo de cadena C_\bullet , se define la *homología de grado n* como el cociente $H_n(C_\bullet) = \text{Nu}(\delta_n) / \text{Im}(\delta_{n+1})$. Dualmente, dado un complejo de cocadena C^\bullet , se define la *cohomología de grado n* como el cociente $H^n(C^\bullet) = \text{Nu}(\delta^{n+1}) / \text{Im}(\delta^n)$.

Dado $N \in R\text{-Mod}$, se define el funtor contravariante $\text{Ext}_R^m(-, N) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ para cada $m \geq 0$ a continuación. Sea $M \in R\text{-Mod}$ y sea $P_\bullet : \cdots \rightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$ una resolución proyectiva de M . Consideremos el complejo de cocadena en $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ que resulta de aplicar el funtor contravariante $\text{Hom}_R(-, N)$ al complejo de cadena $P_\bullet^M : \cdots \rightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$: $\text{Hom}_R(P_\bullet^M, N) : 0 \rightarrow \text{Hom}_R(P_0, N) \xrightarrow{d_1^*} \text{Hom}_R(P_1, N) \xrightarrow{d_2^*} \text{Hom}_R(P_2, N) \xrightarrow{d_3^*} \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(P_{m+1}, N) \xrightarrow{d_m^*} \text{Hom}_R(P_m, N) \xrightarrow{d_{m+1}^*} \text{Hom}_R(P_{m+1}, N) \rightarrow \cdots$.

Sea $\text{Ext}_R^m(M, N) := H^m(\text{Hom}_R(P_\bullet^M, N))$. Resulta que la definición anterior tiene sentido ya que, salvo isomorfismo, no depende de la elección de la resolución proyectiva de M .

Ahora, sea $f : M \rightarrow M'$ un homomorfismo de R -módulos y sea

$$P'_\bullet : \cdots \rightarrow P'_m \xrightarrow{d'_m} P'_{m-1} \cdots \rightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M' \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M' . Entonces se puede probar la existencia de un diagrama conmutativo (en vista del *Teorema de Comparación*, ver [51, Teorema

VI.6.9]) como el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_m & \xrightarrow{d_m} & P_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_m & & \downarrow f_{m-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\
 \cdots & \longrightarrow & P_m & \xrightarrow{d'_m} & P_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & M' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

el cual induce a su vez un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P'_0, N) & \xrightarrow{d_1'^*} & \text{Hom}_R(P'_1, N) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_0^* & & \downarrow f_1^* & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, N) & \xrightarrow{d_1^*} & \text{Hom}_R(P_1, N) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P'_m, N) & \xrightarrow{d_{m+1}'^*} & \text{Hom}_R(P'_{m+1}, N) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_m^* & & \downarrow f_{m+1}^* & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_m, N) & \xrightarrow{d_{m+1}^*} & \text{Hom}_R(P_{m+1}, N) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Se sigue que $f_m^*(\text{Nu}(d_{m+1}'^*)) \subseteq \text{Nu}(d_{m+1}^*)$ y que $f_m^*(\text{Im}(d_m'^*)) \subseteq \text{Im}(d_m^*)$, de donde el homomorfismo de grupos abelianos f_m^* induce un homomorfismo $(f)^* := \text{Ext}_R^m(f, N) : \text{Ext}_R^m(M', N) \rightarrow \text{Ext}_R^m(M, N)$ en $\mathbb{Z}\text{-Mod}$, el cual no depende de la elección de la familia $\{f_m\}_{m \geq 1}$.

TEOREMA C.3. ([51, Teoremas VII.7.4 y VII.7.5]) *Sea $N \in R\text{-Mod}$. Se cumple lo siguiente:*

- (1) *Los funtores $\text{Ext}_R^0(-, N)$ y $\text{Hom}_R(-, N)$ son naturalmente equivalentes.*
- (2) *Cualquier sucesión exacta corta $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$ en $R\text{-Mod}$ induce una sucesión exacta larga $0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(L, N) \rightarrow \text{Hom}_R(K, N) \xrightarrow{\delta_1} \text{Ext}_R^1(P, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(L, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(K, N) \rightarrow \cdots \xrightarrow{\delta_m} \text{Ext}_R^m(P, N) \rightarrow \text{Ext}_R^m(L, N) \rightarrow \text{Ext}_R^m(K, N) \xrightarrow{\delta_{m+1}} \text{Ext}_R^{m+1}(P, N) \rightarrow \cdots$.*

Se suele llamar a la sucesión exacta larga a la que se refiere el inciso (2) del teorema anterior *sucesión larga de homología* y, a los morfismos δ_n , *morfismos de conexión* de la sucesión.

Como es bien sabido, los funtores Ext, antes definidos, se comportan como el functor Hom con respecto a sumas y productos directos. Enunciamos dicha propiedad en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN C.4. ([51, Teoremas 7.13 y 7.14]) Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y sea $\{K_i\}_{i \in I} \subseteq R\text{-Mod}$. Entonces, para cada $n \geq 1$, se tiene que:

$$(1) \text{Ext}_R^n \left(\bigoplus_{i \in I} K_i, N \right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^n(K_i, N).$$

$$(2) \text{Ext}_R^n \left(M, \prod_{i \in I} K_i \right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^n(M, K_i).$$

Una sucesión exacta corta $E : 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ en $R\text{-Mod}$ se llama una *extensión* de N por M . Dadas E, E' extensiones, un *morfismo* $\Gamma : E \rightarrow E'$ es una tripleta $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ de R -homomorfismos tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} E : & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \Gamma \downarrow & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ E' : & & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En particular, si $N' = N$ y $M' = M$, se dice que las extensiones E y E' son *congruentes* o *equivalentes* si existe un morfismo $(id_N, \beta, id_M) : E \rightarrow E'$. En tal caso, el homomorfismo central β es un isomorfismo,³ de manera que la congruencia de extensiones es una relación de equivalencia. Se denota a la clase de equivalencia de una extensión E por $[E]$ y, por $\text{Ext}_R(M, N)$, al conjunto de todas las clases de equivalencia de extensiones de N por M . Un elemento notable de $\text{Ext}_R(M, N)$ es $0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus M \rightarrow M \rightarrow 0$. Dado $M \in R\text{-Mod}$, se define el *morfismo diagonal* $\Delta = \Delta_M : M \rightarrow M \oplus M$ como $\Delta(x) = (x, x)$. Por su parte, dado $N \in R\text{-Mod}$ se define el *morfismo codiagonal* $\nabla = \nabla_N : N \oplus N \rightarrow N$ como $\nabla(y, y') = y + y'$. Sean $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$. Otra forma de escribir la suma $f + g$ es $\nabla_N(f \oplus g)\Delta_M$. Sean $E_1 : 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ y $E_2 : 0 \rightarrow N' \rightarrow L' \rightarrow M' \rightarrow 0$ dos extensiones. Se define su suma directa como la extensión $E_1 \oplus E_2 : 0 \rightarrow N \oplus N' \rightarrow L \oplus L' \rightarrow M \oplus M' \rightarrow 0$.

³esta afirmación se sigue como consecuencia del *Lema de los cinco* (en inglés, *Five Lemma*). Véase [51, Lema III.3.32].

Sea $E : 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ una extensión del módulo N por el módulo M . Dados $N' \in R\text{-Mod}$ y un R -homomorfismo $\alpha : N \rightarrow N'$, consideremos el diagrama:

$$E : \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & & & \downarrow id_M \\ & & N' & & & & M \end{array}$$

Entonces existe un diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$E : \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow id_M \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\gamma} & Q & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde (Q, ϕ, γ) es el cuadrado cocartesiano de los homomorfismos f y α . Se llama a la extensión $0 \rightarrow N' \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ que completa el diagrama anterior la *adjunción por la izquierda de α a E* y se denota por αE .

Dualmente, dados $M' \in R\text{-Mod}$ y un R -homomorfismo $\gamma : M' \rightarrow M$, el diagrama:

$$E : \quad \begin{array}{ccccccc} & & N & & M' & & \\ & & id_N \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

admite un diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$E : \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & P & \xrightarrow{\varphi} & M' \longrightarrow 0 \\ & & & & \psi \downarrow & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde (P, φ, ψ) es el cuadrado cartesiano de los homomorfismos γ y g . Se llama a la extensión $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M' \rightarrow 0$ que completa el diagrama anterior la *adjunción por la derecha de γ a E* y se denota por $E\gamma$.

TEOREMA C.5. ([40, Teorema 2.1] y [51, Teorema VII.7.21]) *Dados $M, N \in R\text{-Mod}$, el conjunto $\text{Ext}_R(M, N)$ de todas las clases de equivalencia de extensiones de N por M es un grupo abeliano bajo la suma de Baer, dada por $[E_1] + [E_2] =$*

$[\nabla_N(E_1 \oplus E_2)\Delta_M]$ para cada $[E_1], [E_2] \in \text{Ext}_R(M, N)$. La clase de la extensión $0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus M \rightarrow M \rightarrow 0$ es el elemento neutro de este grupo, que denotaremos simplemente por 0 . Finalmente, el inverso de cualquier elemento $[E] \in \text{Ext}_R(M, N)$, denotado por $-[E]$, es $[(-id_N)E] = [E(-id_M)]$. Más aún, se cumple que $\text{Ext}_R^1(M, N) \cong \text{Ext}_R(M, N)$ como grupos abelianos.

Si $\alpha \in \text{Hom}_R(N, N')$, entonces, para cada $K \in R\text{-Mod}$, denotamos por $(\alpha)_* : \text{Ext}_R(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R(K, N')$ al \mathbb{Z} -homomorfismo inducido tal que $(\alpha)_*([E]) = [\alpha E]$ para cada $[E] \in \text{Ext}_R(K, N)$. De manera similar, si $\gamma \in \text{Hom}_R(M, M')$, para cada $K \in R\text{-Mod}$, denotamos por $(\gamma)^* : \text{Ext}_R(M, K) \rightarrow \text{Ext}_R(M', K)$ al \mathbb{Z} -homomorfismo inducido tal que $(\gamma)^*([E]) = [E\gamma]$ para cada $[E] \in \text{Ext}_R(M, K)$.

Para cada $z \in \mathcal{Z}(R)$ y para cada $M \in R\text{-Mod}$, denotaremos por $\mu_z^M : M \rightarrow M$ al R -endomorfismo de M tal que, para cada $x \in M$, $\mu_z^M(x) = zx$, mejor conocido como la *multiplicación por z* . Ahora bien, si S es un subanillo de $\mathcal{Z}(R)$, entonces $\text{Ext}_R(M, N)$ resulta un S -módulo de la manera siguiente. Dados $[E] \in \text{Ext}_R(M, N)$ y $z \in S$, $z[E]$ es la clase de equivalencia de $\mu_z^N E \equiv E\mu_z^M$. En otras palabras, $(\mu_z^N)_*([E]) = (\mu_z^M)^*([E])$ (para los detalles, remitimos al lector al Capítulo 7 de [51]).

PROPOSICIÓN C.6. ([51, Ejercicio 7.3]) *Sea Z un dominio entero y sea $M \in Z\text{-Mod}$.*

- (1) *M es libre de torsión si, y sólo si, μ_z^M es un monomorfismo para cada $z \in Z \setminus \{0\}$.*
- (2) *M es divisible si, y sólo si, μ_z^M es un epimorfismo para cada $z \in Z \setminus \{0\}$.*

Notaciones y abreviaturas

Como es usual en la mayor parte de la bibliografía matemática, denotamos por:

- \in , al símbolo de pertenencia;
- \Rightarrow (\Leftrightarrow), a la implicación (equivalencia) lógica;
- ∞ , al infinito;
- \emptyset , al conjunto vacío;
- $P \subseteq Q$, al subconjunto P de Q ;
- $P \setminus Q$, a la diferencia de los conjuntos P y Q ;
- $\mathcal{P}(Q)$, al conjunto potencia del conjunto Q ;
- \mathbb{N} , al conjunto de los números naturales: $\{0, 1, \dots\}$;
- \mathbb{Z} , al conjunto de los números enteros;
- \mathbb{Z}_m , al conjunto de los enteros módulo m : $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$;
- \mathbb{Q} , al conjunto de los números racionales;
- fg , para designar la composición de las funciones f y g .

Asimismo, adoptamos la convención de superponer una diagonal a un símbolo para indicar la negación de su condición; v.gr. : \neq , \notin , $\not\subseteq$, etc.

Finalmente, en el transcurso del trabajo figuran las notaciones, símbolos y abreviaturas siguientes (junto con la página en la que aparece su significado):

$R\text{-Mod}, \text{Mod-}S, R\text{-}S\text{-Mod}$	9
${}_R M, M_S, {}_R M_S$	10
${}_R R, R_R$	10
$N \leq M$	10
$\sum_{i \in I} N_i$	10
$\bigcap_{i \in I} N_i$	10

$Nu(f), Im(f) (f(M)), f^{-1}(N')$	10
$Hom_R(M, N)$	10
$M \cong N$	11
$N \xrightarrow{i} M$	11
id_M	11
$0 \rightarrow N \rightarrow M (N \twoheadrightarrow M)$	11
$M \rightarrow N \rightarrow 0 (M \twoheadrightarrow N)$	11
$End^r(M), End^l(N)$	11
d_x	11
$\mathcal{S}(M)$	12
$(0 : M), (0 : x)$	12
$(I : a)$	12
$r_M(I)$	12
Rx	12
$T(M)$	12
rN	12
$N \oplus K, \bigoplus M_i$	13
$\prod_{i \in I} M_i, M^I$	13
π_j	13
$\prod_I f_i$	14
$sop(x), M^{(I)}$	14
ι_j	14
δ_{ij}	14
$\bigoplus_I f_i$	15
\mathcal{E}	17
EM	17
$Gen(\mathcal{U}), Cog(\mathcal{U})$	17
$R\text{-simp}$	18
$Tr_{\mathcal{U}}(M), Rej_{\mathcal{U}}(M)$	19
$Zoc(M), Rad(M)$	20
$Rad({}_R R) (J)$	20

$\mathbb{M}_n(R)$	23
π_I	24
$\mathcal{Z}(R)$	24
eRe	24
$R_1 \times \cdots \times R_n$ ($\prod_{i=1}^n R_i$)	24
$(\mathcal{A}, \alpha), [\mathcal{A}, \alpha]$	33
$\text{Hom}_R(P, -)(p)$	33
$R\text{-pr}$	37
$\widehat{0}, \widehat{1}$	37
$\sigma \preceq \tau, \sigma \vee \tau, \sigma \wedge \tau$	37
$\sigma \cdot \tau$ ($\sigma\tau$), $(\sigma : \tau)$	38
σ^γ	38
$\widehat{\sigma}$	38
$\sigma^{(\gamma)}$	38
$\bar{\sigma}$	38
$\overline{\mathbb{T}}_\sigma$	41
$\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma$	42
$N \leq_{f_i} M$	43
$\mathcal{S}_{f_i}(M)$	43
α_N^M, ω_N^M	43
$(\alpha_N^M)_h$	51
$h \approx_{\overline{h}} h'$ ($h \approx h'$)	52
$f[\tau], f\{\tau\}, \{\sigma\}f, [\sigma]f$	55
A^{op}	58
$Q_0, Q_1, s, t : Q_0 \rightarrow Q_1$	58
$e_a = (a a)$	58
KQ	59
$\text{Rep}_K(Q)$	59
(V_a, φ_a)	59
$\text{rep}_k(Q), \text{indrep}_K(Q)$	60
$R\text{-ind}$	62
$\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$	64

$\text{rad}_\Lambda(M, N)$	65
q_Q	67
B_n	74
\mathcal{C}_I^R	80
$h(x, \sigma, M)$	85
$l(\sigma, M)$	87
dM	88
$(-)^*$	91
$K[x]$	99
\mathfrak{H}	99
$M \preceq_\sigma N, \sim_\sigma, X_\sigma, [M]_\sigma$	107
$\mathcal{C}_\sigma, \mathcal{C}^\sigma$	121
$M \preceq^\sigma N, \sim^\sigma, X^\sigma, [M]^\sigma$	122
\mathcal{A}_{id}	126
$\sigma\text{-Cog}(M)$	129
$\sigma\text{-Cog}^{-1}(M)$	132
$ C $	140
mín, máx	140
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$	140
$\bigvee_{i \in I} a_i, \bigwedge_{i \in I} a_i$	141
$L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n, L^n$	143
$\mathbf{n} + \mathbf{1}$	143
\mathcal{OR}	144
<i>Conj</i>	147
\mathfrak{C}^{op}	148
$R\text{-mod}$	148
$\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$	148
$1_{\mathfrak{C}}, 0_{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}}$	149
$- \otimes_R N$	150
$M \otimes_R -$	151
$GF : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$	151
$F \simeq G$	152

$\text{pd}(M)$	156
$l\text{pD}(R)$	157
$H_n(C_\bullet), H^n(C^\bullet)$	157
$\text{Ext}_R^m(-, N)$	157
$[E], \text{Ext}_R(M, N), \Delta_M, \nabla_N$	159
μ_z^M	161

Índice alfabético

adjunción por la izquierda (derecha) de un morfismo, 160

álgebra o K -álgebra, 58

 básica, 58

 de Artin, 63

 de dimensión finita, 58

 hereditaria izquierda, 58

 opuesta, 58

anillo(s)

 artiniano izquierdo (derecho), 21

 principal, 28

 casi-Frobenius, 28

 centro de, 24

 completamente primario, 28

 cosemisimple, 49

 de Köthe, 29

 de matrices triangulares (inferiores) formales, 36

 de tipo de representación finito, 62

 descomposición, 25

F.G.-Köthe izquierdo (derecho), 31

 hereditario izquierdo, 34

T-Köthe izquierdo (derecho), 30

 inescindible, 25

 local, 28

p -grande, 84

p -pequeño, 69

- primario, 28
- puro semisimple izquierdo, 30
- radical izquierdo (derecho), 85
- semisimple izquierdo, 27
- simple, 27
- uniserial, 28
 - izquierdo (generalizado), 28
- V -anillo, *véase anillo cosemisimple*
- átomo (coátomo), 140
- Axioma de Elección (Global), 145
- cadena, 139
 - longitud de, 140
- camino(s), 58
 - acíclico, 59
 - álgebra de, 59
 - ciclo, 58
 - de longitud k , 58
- cápsula inyectiva, 17
- carcaj, 58
 - álgebra de, 59
 - de Auslander-Reiten, 65
 - de Gabriel, 63
 - de Kronecker, 59
 - de tipo Dynkin, 64
 - flechas, 58
 - forma cuadrática de Tits de, 67
 - raíz positiva de, 67
 - representaciones de, 59
 - de dimensión finita, 59
 - inescindibles, 60
 - morfismo de, 59

- subobjeto de, 59
- suma directa, 59
- vértices, 58
- cardinal, 144
- cardinalidad, 144
- categoría(s), 147
 - equivalencia de, 152
 - equivalentes, 152
 - isomorfias, 152
 - opuesta, 148
 - producto de, 148
- clase, 144
 - cerrada bajo
 - cápsulas inyectivas, 41
 - cocientes, 40
 - epimorfismos, 41
 - extensiones, 41
 - isomorfismos, 41
 - monomorfismos, 41
 - productos directos, 41
 - submódulos, 41
 - sumas directas, 41
 - de pretorsión, 41
 - hereditaria, 41
 - de torsión, 41
 - libre de torsión, 41
 - parcialmente ordenada o *clapo*, 145
 - prelibre de torsión, 41
 - (co)hereditaria, 41
 - propia o no cardinable, 144
- cogenerador mínimo, 18

cohomología de grado n , 157

complejo de (co)cadena, 157

condición de cadena ascendente (descendente), 20

conjunto(s)

- completo de idempotentes ortogonales, 24

- completo e irredundante de representantes, 146

- de sucesiones binarias, 74

- equipotentes, 144

- \mathcal{I} -compatible, 80

- linealmente (totalmente) ordenado, 139

- parcialmente ordenado(s) o *copo(s)*, 139

 - acotado, 140

 - coincial, 140

 - condición de cadena ascendente (descendente) sobre, 20

 - homomorfismo de, 140

 - isomorfismo de, 140

cota superior (inferior), 140

cuadrado (co)cartesiano, 155

dimensión

- global pura de un anillo, 30

- inyectiva de un módulo, 157

- inyectiva (global) izquierda de un anillo, 157

- inyectiva pura de un módulo, 30

- proyectiva de un módulo, 156

- proyectiva (global) izquierda de un anillo, 157

dualidad, 152

dual transpuesto, 65

elemento(s)

- anulador izquierdo de, 12

- central, 24

- idempotente(s), 24

- primitivo, 24
- ortogonales, 24
- máximo (mínimo), 140
- mayor (menor), 140
- σ -altura de, 85
- soporte de, 14
- extensiones
 - congruentes o equivalentes, 159
- funtor(es), 149
 - cero, 149
 - composición, 151
 - contravariante, 149
 - covariante, 149
 - denso, 151
 - equivalencia natural de, 152
 - exacto, 151
 - exacto izquierdo, 151
 - fiel, 151
 - Hom 150
 - identidad, 149
 - inclusión, 150
 - inyectivo en objetos, 151
 - isomorfismo natural de, 152
 - matricial, 33
 - (naturalmente) equivalentes o (naturalmente) isomorfos, 152
 - p -funtor, 33
 - pleno, 151
 - que olvida u olvidadizo, 150
 - transformación natural de, 152
- homología de grado n , 157
- ideal

- anulador derecho de, 12
 - principal, 12
 - trasladado, 12
- Lema de Schur, 18
- matriz punteada, 33
- módulo(s)
 - algebraicamente compacto (Σ -algebraicamente compacto), 30
 - anulador izquierdo de, 12
 - artiniano, 20
 - bimódulos, 10
 - cíclico, 12
 - de torsión, 12
 - divisible, 12
 - escaso, 88
 - esencial, 10
 - familia independiente de, 13
 - (finitamente) (co)generado, 17
 - generador, cogenerador 17
 - homológicamente independientes, 26
 - inescindible, 13
 - intersección de, 10
 - inyectivo, 16
 - principal, 116
 - isomorfos, 10
 - κ -generado, 31
 - libre de torsión, 12
 - magro, *véase módulo escaso*
 - noetheriano, 20
 - preproyectivo (preinyectivo), 65
 - principal, 108
 - producto directo de, 13

- propiedad universal del, 13
 - proyectivo, 16
 - puro inyectivo, 30
 - que σ -cogenera a un módulo, 132
 - radical, 85
 - rechazo de, 19
 - reducido, 88
 - regular izquierdo (derecho), 10
 - semisimple, 26
 - σ -cogenerado por un módulo, 129
 - σ -longitud de, 87
 - simple, 18
 - suma de, 10
 - directa (interna), 12
 - directa (externa), 14
 - propiedad universal de, 14
 - sumando directo de, 13
 - superfluo, 10
 - traza de, 19
 - uniforme, 10
 - unitario, 9
- morfismo(s), 147
- (co)diagonal, 159
 - composición de, 147
 - de conexión, 158
 - epimorfismo, 148
 - homomorfismo(s)
 - epimorfismo, 10
 - superfluo, 11
 - endomorfismo, 11
 - equivalentes, 50

- imagen de, 10
- imagen inversa bajo, 10
- inclusión natural, 11
- inclusión canónica, 14
- isomorfismo, 10
- monomorfismo, 10
 - esencial, 11
 - puro, 30
- núcleo de, 10
- proyección natural, 11
- proyección canónica, 13
- identidad, 147
- irreducible, 65
- isomorfismo, 148
- monomorfismo, 148
- multiplicación por z , 161
- objeto(s), 147
 - cero, 149
 - inicial, 149
 - isomorfos, 149
 - terminal, 149
- orden,
 - lineal o total, 139
 - morfismo de, *véase homomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados*
 - parcial, 139
- ordinal, 143
 - límite, 144
 - sucesor, 144
- preorden, 139
- prerradical(es), 37
 - alfa, 43

- (co)potencias, 38
 - (co)producto, 38
 - exacto izquierdo, 42
 - idempotente, 38
 - ínfimo de, 37
 - omega, 43
 - orden parcial, 37
 - radical, 38
 - supremo de, 37
 - t -radical, 43
- Principio de inducción transfinita, 144
- producto
- fibrado, *véase cuadrado cartesiano*
- radical (de Jacobson), 20
- de $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$, 65
- rechazo, 19
- representaciones de carcaj, 59
- morfismos de, 59
 - suma directa, 59
- resolución
- inyectiva, 156
 - proyectiva, 156
- retícula(s), 140
- atómica (coatómica), 141
 - booleana, 141
 - complementada, 141
 - completa, 141
 - de submódulos, 12
 - gran, 145
 - homomorfismo de, 141

- isomorfias, 141
- isomorfismo de, 141
- producto de, 142
- semirretícula, 140
- serie de composición, 22
 - equivalentes, 22
 - longitud, 22
- sistema finitamente soluble, 30
- subcategoría, 148
 - plena, 148
- subfunctor, 152
- submódulo
 - de torsión, 12
 - totalmente invariante, 43
- subretícula, 141
- sucesión exacta, 11
 - corta, 11
 - pura exacta, 30
 - que se escinde, 11
- sucesión larga de homología, 158
- suma
 - de Baer, 160
 - fibrada, *véase cuadrado cocartesiano*
- Teorema de
 - Auslander - Ringel - Tachikawa, 63
 - Gabriel, 63
 - Hopkins - Levitzki, 22
 - Jordan - Hölder, 22
 - Osofsky, 28
 - recursión transfinita, 145

Wedderburn - Artin, 27

traza, 19

zoclo, 20

Bibliografía

- [1] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [2] I. Assem, D. Simson y A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Vol. I, London Mathematical Society Student Texts (65), (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [3] M. Auslander, I. Reiten y S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (36), (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [4] J. A. Beachy, On Quasi-Artinian Rings, *J. London Math. Soc.* **3** (1971) 449–452.
- [5] J. A. Beachy y W. D. Blair, Finitely annihilated modules and orders in artinian rings, *Comm. Algebra* **6(1)** (1978) 1–34.
- [6] L. Bican, P. Jambor, T. Kepka y P. Nĕmec, Preradicals, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **15(1)** (1974) 75–83.
- [7] L. Bican, T. Kepka y P. Nĕmec, *Rings, Modules and Preradicals*, (Marcel Dekker, New York, 1982).
- [8] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications (XXV), (New York, 1948).
- [9] K. Bongartz, Algebras and quadratic forms, *J. London Math. Soc.* **2(28)** (1983) 461–469.
- [10] S. U. Chase, Direct product of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97(3)** (1960) 457–473.
- [11] C. Cibils, F. Larrión y L. Salmerón. *Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones*, Monografías del Instituto de Matemáticas (XI), (UNAM, 1982).

- [12] I. S. Cohen e I. Kaplansky, Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules, *Math. Zeitschr.* **54(2)** (1951) 97–101.
- [13] P. M. Cohn, On the free product of associative rings, *Math. Zeitschr.* **71** (1959) 380–398.
- [14] S. Dickson, A torsion theory for abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* **121** (1966) 223–235.
- [15] R. Dimitric, Slender modules over domains, *Comm. Algebra.* **11(15)** (1983) 1685–1700.
- [16] D. Eisenbud y P. Griffith, The structure of serial rings, *Pacific J. Math.* **36** (1971) 109–121.
- [17] C. Faith, On Köthe Rings, *Math. Ann.* **164** (1966) 207–212.
- [18] C. Faith, *Algebra: Rings, Modules and Categories*, Vol. I, (Springer-Verlag, Berlin, 1981).
- [19] T. H. Fay, E. P. Oxford y G. L. Walls, Preradicals in abelian groups, *Houston J. Math.* **8(1)** (1982) 39–52.
- [20] R. Fernández-Alonso, H. Chimal-Dzul y S. Gavito, A class of rings for which the lattice of preradicals is not a set, *Int. Electron. J. Algebra* **9** (2011) 38–60.
- [21] R. Fernández-Alonso y S. Gavito, The lattice of preradicals over local uniserial rings, *J. Algebra Appl.* **5(6)** (2006) 731–746.
- [22] R. Fernández-Alonso y D. Herbera, Finite lattices of preradicals over finite representation type rings, en proceso.
- [23] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. II, (Academic Press, New York, 1970).
- [24] L. Fuchs y L. Salce, *Modules over Valuation Domains*, Pure and Applied Mathematics, (Marcel Dekker, New York, 1985).
- [25] P. Gabriel, Des catégories Abéliennes, *Bull. Soc. Math. France.* **90** (1962) 323–448.
- [26] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscr. Math.* **6** (1972) 71–103.
- [27] J. Golan, *Localization of Noncommutative rings*, Pure and Applied Mathematics, (Marcel Dekker, New York, 1975).
- [28] J. Golan, *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics (29), (Longman Scientific and Technical, Great Britain, 1986).

- [29] K. R. Goodearl y R. B. Warfield, Jr., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society Student Texts (16), (Cambridge University Press, Great Britain, 1989).
- [30] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, (Birkhäuser Verlag, Basel, 2003).
- [31] L. Gruson y C. U. Jensen, Modules algébriquement compacts et foncteurs $\varprojlim^{(i)}$, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **276** (1974) 1651–1653.
- [32] J. M. Harper y J. E. Rubin, Variations of Zorn’s Lemma, Principles of Cofinality, and Hausdorff’s Maximal Principle. Part II: Class Forms, *Notre Damm Journal of Formal Logic* **XVIII (1)** (1977) 151–163.
- [33] H. Herrlich y G. E. Strecker, *Category Theory, An Introduction*, (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, 1973).
- [34] K. Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*, segunda edición, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics (85), (Marcel Dekker, Inc., 1984).
- [35] B. Huisgen-Zimmermann y W. Zimmermann, On the sparsity of representations of rings of pure global dimension zero, *Trans. Amer. Math. Soc.* **320** (1990) 695–711.
- [36] B. Huisgen-Zimmermann, Purity, Algebraic Compactness, Direct Sum Decompositions, and Representation Type, *Infinite Length Modules*, Bielefeld, 1998; Krause, Ringel eds; Birkhauser: Basel, 2000; 331–367.
- [37] J. P. Jans, Some aspects of torsion, *Pacific J. Math.* **15(4)** (1965) 1249–1259.
- [38] G. Köthe, Verallgemeinerte abelsche gruppen mit hyperkomplexen operatorenring, *Math. Z.* **39** (1934) 31–44.
- [39] A. Levy, *Basic Set Theory*, (Springer-Verlag, 1979).
- [40] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, (Springer-Verlag, New York, 1971).
- [41] S. Mac Lane, *Homology*, (Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995).
- [42] J. A. Magaña Zapata, *Conejiones de Galois entre retículas de prerradicales inducidas por adjunciones de funtores*, proyecto de tesis doctoral. Director de proyecto: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González, (UAM-I, 2011).

- [43] J.-M. Maranda, Injective structures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964) 98–135.
- [44] R. Mines, *Radicals and torsion free groups*, Seminar Notes, (New Mexico State University, Las Cruces, 1971).
- [45] R. J. Nunke, Slender Groups, *Acta Sci. Math. Szeiged* **23** (1962) 67–73.
- [46] B. L. Osofsky, Rings all of whose finitely generated modules are injective, *Pacific J. Math.* **14** (1964) 645–650.
- [47] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C. Signoret, The lattice structure of preradicals, *Comm. Algebra* **30(3)** (2002) 1533–1544.
- [48] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C. Signoret, The lattice structure of preradicals II: Partitions, *J. Algebra Appl.* **1(2)** (2002) 201–214.
- [49] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C. Signoret, The lattice structure of preradicals III: operators, *J. Pure Appl. Alg.* **190** (2004) 251–265.
- [50] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón y R. Fernández-Alonso, Basic Preradicals and Main Injective Modules, *J. Algebra Appl.* **8(1)** (2009) 1–16.
- [51] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, (Academic Press, Orlando, Florida, 1979).
- [52] L. H. Rowen, *Ring Theory*, Vol. I, Pure and Applied Mathematics (27), (Academic Press, London, 1988).
- [53] H. Rubin y J. E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice*, Vol. II, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (116), (North Holland, Amsterdam, 1985).
- [54] S. V. Rychokov y B. Thome, Slender Groups and Related Concepts, *Comm. Algebra.* **14(2)** (1986) 333–387.
- [55] B. Stenström, *Rings of Quotients*, (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [56] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, (Dover Publications Inc., New York, 1972).
- [57] P. Vámos, The dual of the notion of “finitely generated”, *J. London Math. Soc.* **43** (1968) 643–646.
- [58] E. A. Walker y C. Walker, Quotient categories and ring of quotients, *Rocky Mountain J. Math.* **2** (1972) 513–555.

- [59] R. B. Warfield, Jr., Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* **25** (1970) 167–172.
- [60] W. Zimmermann, Rein Injektive direkte Summen von Moduln, *Comm. Algebra* **5** (1977) 1083–1117.