



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEFORMACIONES DE FIBRACIONES CORRUGADAS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
GERARDO SOSA GARCAMARÍN

DIRECTOR DE LA TESINA
PABLO SUÁREZ SERRATO
(INSTITUTO DE MATEMÁTICAS)

MÉXICO, D. F. (22.02.2013).



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Teoría de Singularidades	1
1.1. (s, r) -estabilidad.	
Clasificación de desdoblamientos $(1, 1)$ -estables.	1
2. Fibraciones Singulares	10
2.1. Singularidades y fibraciones	10
2.2. Deformaciones de fibraciones corrugadas	13
2.2.1. Deformación de creación	13
2.2.2. Deformación de unión	14
2.2.3. Deformación de giro	16
2.2.4. Deformación de corrugación	17
2.2.5. Deformaciones genéricas de fibraciones corrugadas	20

Prefacio

¡Las 4 variedades son rarísimas!

Las variedades de dimensión 4 son muy peculiares e interesantes. Por ejemplo, esta es la única dimensión en la que una variedad topológica puede tener una infinidad de estructuras diferenciables diferentes. Si la dimensión de la variedad es menor entonces existe una única estructura diferenciable sobre ella; si es mayor entonces existe a lo más un número finito de estructuras distintas. De hecho, las cosas son todavía un poco más interesantes. A la fecha, no se conoce ninguna 4 variedad diferenciable para la cual sólo exista un número finito de estructuras suaves diferentes (no se diga una única). Además existen variedades que poseen un continuo de estructuras diferenciables diferentes, por ejemplo la variedad más simple en que podemos pensar $\mathbb{R}^4$. Este tipo de hechos convierten al estudio de las variedades 4 dimensionales un tema muy interesante y activo. Con esta meta, la definición de invariantes sobre los espacios ha sido una herramienta increíblemente útil (en todas dimensiones) y en especial el invariante de Seiberg-Witten ha demostrado ser una herramienta muy poderosa para distinguir estructuras lisas de variedades. La guía del viajero del mundo de 4 variedades simplemente conexas escrita por Scorpan [11] presenta una excelente introducción a estos temas y se exhorta a los lectores interesados a consultarlo.

Por otro lado, la definición y el cálculo de este invariante es algo complicado y es natural el desear recuperarlo en una manera geométrica y más manipulable. El primer resultado exitoso en esta dirección fue gracias a Taubes. El demostró en 1996 que el invariante de Seiberg-Witten es equivalente a su invariante de Gromov en el caso de variedades simplécticas [12]. Los posteriores esfuerzos para extender este resultado han consistido en dotar a las 4 variedades con estructuras que asimilan haces fibrados sobre superficies; estas estructuras se conocen como fibraciones singulares. En 2004 Usher [13] fue capaz de demostrar que la cuenta estándar de superficies, un invariante definido por Donaldson y Smith [4] para variedades con fibraciones de Lefschetz (un ejemplo de fibración singular), es equivalente al invariante de Seiberg-Witten. Finalmente, esto se ha tratado de extender en el mundo no simpléctico por Perutz usando fibraciones quebradas, otro modelo de fibración singular, con su análisis de invariantes de apareamiento Lagrangiano [10]. Estas ideas han sido hasta ahora la motivación principal para el estudio de la estructura de las fibraciones singulares sobre las 4 variedades.

La diferencia entre las fibraciones singulares y los haces fibrados reside básicamente en que a las primeras se les permite tener fibras con autointersecciones, que llamamos fibras singulares. Asimismo, las fibraciones singulares son también una generalización de funciones Morse. Recordemos que una función Morse es un mapeo que va de una variedad n dimensional a los números reales con valores críticos no degenerados. Estas funciones nos ayudan a estudiar la topología de las variedades analizando sus puntos críticos, véase por ejemplo [8]. Una fibración singular será un mapeo de una 4 variedad a $\mathbb{R}^2$ con condiciones especiales en su conjunto de valores críticos. El tipo de fibración singular será determinado por el tipo de valores críticos que le permitamos tener.

Recientemente una serie de interesantes resultados indican que una estructura natural sobre las 4 variedades son las fibraciones quebradas. A saber, uno de ellos es que en toda 4 variedad suave y orientable existe una fibración quebrada. Esto fue demostrado por Lekili en [6], y también por su cuenta usando diferentes técnicas por Baykur en [3] y por Akbulut y Karakurt en [1]. Cabe remarcar que la demostración de Lekili es sorprendentemente sencilla y se apoya en el trabajo anterior de Gay y Kirby [5]. Estos resultados nos dan una gran motivación para el estudio de las fibraciones quebradas, ya que es una herramienta moderna que ha probado ser efectiva en el estudio de las 4 variedades. Es interesante el investigar qué otra información podemos recuperar trabajando con ellas. Como consecuencia fue muy importante empezar la tarea de clasificar las fibraciones quebradas que existen sobre una variedad y [6] es un trabajo innovador donde se comenzó la labor, esta es la razón central por la cual el tema es de nuestro interés.

En este escrito se estudia un tipo de fibraciones singulares. La sección 2.1 se dedica a definir y explicar el tipo de singularidades y fibraciones que utilizaremos. En particular, desarrollamos explícitamente parte del trabajo del turco Yanki Lekili [6] en fibraciones corrugadas. En [6] el autor presenta 4 deformaciones elementales de fibraciones corrugadas, la sección 2.2 describe a fondo estas deformaciones. El adjetivo elementales es

causa de lo siguiente, es posible realizar cualquier deformación de fibraciones corrugadas como una secuencia finita de las deformaciones elementales. Este es el teorema 18 en 2.2.5 y para demostrarlo se necesita teoría clásica de singularidades y estabilidad. En §1 presentamos la teoría y resultados de la $(1, 1)$ -estabilidad desarrollada por Wassermann [15] que necesitaremos para realizar la prueba. En específico, calcularemos los desdoblamientos $(1, 1)$ -estables de un germen de funciones arbitrario, por lo tanto clasificándolos. Aquí demostraremos que es natural trabajar con las fibraciones corrugadas ya que las fibraciones corrugadas puras son estables bajo perturbaciones pequeñas mientras que las fibraciones quebradas no lo son. Lekili mostró que es posible deformar una fibración quebrada en una fibración corrugada pura y viceversa. Esto nos permite trabajar con mapeos estables, modificarlos con nuestra lista de deformaciones y regresar finalmente a las fibraciones quebradas y así obtener una manera para clasificar fibraciones quebradas equivalentes.

Capítulo 1

Teoría de Singularidades

1.1. (s, r) -estabilidad.

Clasificación de desdoblamientos $(1, 1)$ -estables.

Al comienzo de esta sección se definen las ideas de (s, r) -equivalencia y (s, r) -estabilidad. Estos conceptos fueron desarrollados por Wassermann en [15] con el fin de generalizar el trabajo de Thom y Mather de r -equivalencia.

La noción clásica de estabilidad y equivalencia de funciones define una equivalencia entre funciones como simplemente equivalencia bajo cambios de coordenadas. Siendo un poco más específicos, clásicamente dos funciones f y $g: X \rightarrow Y$ se consideran equivalentes si existen difeomorfismos h_1, h_2 tales que $h_1 f = g h_2$. Clásicamente se dice que f es estable si para toda perturbación f_t con $f_0 = f$ existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\tau < \epsilon$ tenemos que f_0 y f_τ son equivalentes. Saliendo del terreno clásico, René Thom presentó en los 60's una muy famosa lista conocida como *las siete catástrofes elementales*. Esta lista es una clasificación de desdoblamientos estables (para dimensiones bajas) de gérmenes de funciones que está basada en una idea de equivalencia de gérmenes más específica. Sin embargo, con el tiempo se descubrió que para ciertas aplicaciones físicas, la relación de equivalencia que utiliza (r -equivalencia) es tosca. Como resultado Wassermann ('75) en su artículo [15] desarrolló una teoría de estabilidad de desdoblamientos basada en una noción más fina de equivalencia (la (s, r) -equivalencia).

En esta teoría se maneja de una manera especial ciertos parámetros de los desdoblamientos de gérmenes. La razón por la que esto es importante para nosotros es por que, como veremos adelante, la (s, r) -equivalencia respeta la estructura de producto en los espacios que vamos a trabajar. Específicamente, analizamos perturbaciones de familias unidimensionales de mapeos de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y nos gustaría encontrar equivalencias entre estos mapeos que respeten a los parámetros con los que estamos parametrizando a las perturbaciones y a la familia de mapeos. En breve, la (s, r) -estabilidad nos dice que cualquier s -perturbación suficientemente pequeña de una r -familia de mapeos va a quedar en la clase de equivalencia de la r familia en la que estaba. En su artículo, Wassermann también clasifica los $(1, 3)$ y $(3, 1)$ -desdoblamientos de gérmenes y da herramientas suficientes para lograr clasificar todos los (s, r) -desdoblamientos estables de gérmenes para s, r dadas. El fin de la sección se enfoca en demostrar la clasificación de los $(1, 1)$ -desdoblamientos estables. Las referencias para esta sección son la teoría general de Wassermann [15] y en [6] Yanki Lekili trabaja el caso cuando $r = s = 1$. Para este caso en específico también puede consultarse [16] de Williams. También por completez pueden consultarse [7] y [14].

Por último hay que señalar que con el fin de mantener este texto corto, utilizaremos varios de los lemas, corolarios y alguna que otra definición de [14] sin enunciarlos aquí. No obstante, se da una buena introducción a la teoría y se enuncian los lemas, teoremas y corolarios que nos parecen más importantes y que utilizaremos principalmente. Sin más retraso presentamos la teoría.

Notación. Denotamos por $\mathcal{E}(n, m)$ al conjunto de gérmenes en $0 \in \mathbb{R}^n$ de funciones diferenciables que van de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Si $m = 1$, entonces denotamos al conjunto de gérmenes de funciones como $\mathcal{E}(n)$. El conjunto de

gérmenes es un espacio vectorial y un algebra asociativa con las operaciones heredadas de $\mathbb{R}$. Los gérmenes en $\mathcal{E}(n)$ para los que sus representantes cumplen que $f(0) = 0$ forman un ideal máximo del anillo $\mathcal{E}(n)$; a este ideal lo denotamos con $\mathfrak{m}(n)$.

Observación. En el texto no hacemos distinción en la notación cuando nos referimos a un germen $f \in \mathcal{E}(n, m)$ o a alguna función representante de este germen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Notación. Nos referimos a $L(n) = \{\phi \in \mathcal{E}(n, n) \mid \phi(0) = 0 \text{ y } \phi \text{ es no singular en } 0\}$. Es posible dotar a $L(n)$ con una estructura de grupo tomando como producto la composición de funciones; a este grupo lo llamamos el grupo de gérmenes de difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ en 0. A continuación damos varias definiciones básicas.

Definición 1 ($\{k\}$ -desdoblamiento). Sea $g \in \mathfrak{m}(n)$. Un k -desdoblamiento de g es un germen $G \in \mathcal{E}(n+k)$ tal que $G|_{\mathbb{R}^n} = g$.

Observación. Podemos pensar en un k -desdoblamiento de un germen $g \in \mathfrak{m}(n)$ como una familia k dimensional de gérmenes n dimensionales que contiene a g en $0 \in \mathbb{R}^k$.

Definición 2. Sea $f \in \mathfrak{m}(s+r+n)$. Al germen f le asociamos otro germen $f_{ext} \in \mathcal{E}(s+r+n, s+r+1)$ definido así:

$$f_{ext}(v, u, x) = (v, u, f(v, u, x)) \text{ para } v \in \mathbb{R}^s, u \in \mathbb{R}^r \text{ y } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

A continuación, la definición de equivalencia que utilizaremos.

Definición 3 ((s, r) -equivalencia). Sean $f, g \in \mathfrak{m}(s+r+n)$. Diremos que f y g son (s, r) -equivalentes si existen gérmenes de difeomorfismos $\mathcal{A} \in L(s+r+n)$, $\mathcal{B} \in L(s+r+1)$, $\mathcal{C} \in L(s+r)$ y $\mathcal{D} \in L(s)$ tales que hacen conmutar al siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^{s+r+n} & \xrightarrow{f_{ext}} & \mathbb{R}^{s+r+1} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^{s+r} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}^s \\ \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{C} & & \downarrow \mathcal{D} \\ \mathbb{R}^{s+r+n} & \xrightarrow{g_{ext}} & \mathbb{R}^{s+r+1} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^{s+r} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}^s \end{array}$$

En el diagrama $p : \mathbb{R}^{s+r} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{s+r}$ y $q : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ son las proyecciones en la primera componente.

Observación.

- i) Una equivalencia entre f y g es un cuarteto $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \in L(n+r+s) \times L(1+r+s) \times L(r+s) \times L(s)$ que cumple (3).
- ii) Nótese¹ que si $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^s$ y $\tau \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(v)$ y que

$$\mathcal{C}(v, u) = (\mathcal{D}(v), c(v, u)) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$$

para algún $c \in \mathcal{E}(s+r, r)$. Y aún más, se tiene que

$$\mathcal{B}(v, u, \tau) = (\mathcal{D}(v), c(v, u), b(v, u, \tau)) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$$

para algún germen $b \in \mathcal{E}(s+r+1)$ y

$$\mathcal{A}(v, u, x) = (\mathcal{D}(v), c(v, u), a(v, u, x)) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$$

¹En esta sección tomaremos esta convención para las coordenadas $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^s$, $y \in \mathbb{R}^d$ y $s, t \in \mathbb{R}$.

para algún germen $a \in \mathcal{E}(s+r+n, n)$. Esto nos hace ver que con esta definición de equivalencia las coordenadas de u y v son tratadas de manera especial. En efecto, al realizar el cambio de coordenadas las nuevas coordenadas $v \in \mathbb{R}^s$ dependen solo de las viejas coordenadas $v \in \mathbb{R}^s$ y las nuevas coordenadas $u \in \mathbb{R}^r$ dependen sólo de las anteriores $u \in \mathbb{R}^r$ y $v \in \mathbb{R}^s$. En cambio las nuevas coordenadas de $\mathbb{R}^n$ son función de todas las coordenadas anteriores $(v, u, x) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$.²

III) Claramente está es una relación de equivalencia de los gérmenes en $\mathfrak{m}(s+r+n)$.

Wassermann define tres tipos de estabilidad para gérmenes de funciones. Dos de estas definiciones (estabilidad fuerte y débil) son topológicas y geométricas; *grosso modo* nos dicen que si “movemos poco” un germen estable, los gérmenes perturbados serán (s, r) -equivalentes al germen inicial. La tercera definición, la estabilidad infinitesimal, es una condición algebraica. Uno de los teoremas más importantes (y complicados) de esta teoría demuestra que estos tres tipos de estabilidad son equivalentes y esto es un punto clave ya que para demostrar una idea topológica o geométrica de estabilidad nos es suficiente corroborar alguna condición algebraica, lo cual es generalmente más sencillo. Tomando en cuenta este último comentario diremos que un germen es (s, r) -estable si es fuerte, débil o infinitesimalmente (s, r) -estable. Lekili en [6] expone de manera accesible el caso cuando $r = s = 1$ que es el que necesitaremos, así que adoptaremos varias convenciones de su notación. Aunque se intentará seguir presentando la teoría de manera general donde esto no implique extendernos demasiado.

Notación. Sea $\mathcal{E}(s, t, x, y, z) = \mathcal{E}(5)$, $\mathcal{E}(s, t) = \mathcal{E}(2)$ y $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}(1)$. Es decir, dejamos que las variables nos digan con que parámetros estamos trabajando.

Ahora la definición de $(1, 1)$ -estabilidad infinitesimal.

Definición 4 ($(1, 1)$ -estabilidad infinitesimal). Sea $f \in \mathfrak{m}(s, t, x, y, z)$ y definimos $f_{ext}: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con (1.1). Entonces f es $(1, 1)$ -estable infinitesimalmente si

$$\mathcal{E}(s, t, x, y, z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle_{\mathcal{E}(s, t, x, y, z)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{\mathcal{E}(s, t)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle_{\mathcal{E}(s)} + f_{ext}^* \mathcal{E}(3). \quad (1.2)$$

Nota. En la definición pasada cuando ponemos $\left\langle \frac{\partial f}{\partial y^{i^1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{i^k}} \right\rangle_{\mathcal{E}(k)}$ nos referimos al $\mathcal{E}(k)$ -submódulo de $\mathcal{E}(n)$ generado por $\left\{ \frac{\partial f}{\partial y^{i^1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{i^k}} \right\} \in \mathcal{E}(n)$, para $k \leq n$.

El siguiente es un corolario de Wassermann de su mismo teorema 3.6. Este resultado facilita bastante el cálculo de la condición (1.2) y lo utilizaremos más adelante.

Corolario 5. Sea $f \in \mathfrak{m}(s+r+n)$ un germen que desdobra a $\eta \in \mathfrak{m}(n)$. Sea η finito determinado³ y escógase $k \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\mathfrak{m}(n)^k \subset \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \eta}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}(n)}$. Además supóngase que $\eta \in \mathfrak{m}(n)^d$ para algún $1 \leq d \leq k$ y sea p el mayor entero tal que $p < \frac{k(s+1)}{d+1}$. Denotemos a $q = k(s+1)$ y $f_0 = f|_{\mathbb{R}^{r+n}}$, entonces f es (s, r) -estable si y sólo si

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(r+n) = & \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}(r+n)} + \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial u_r} \right\rangle_{\mathcal{E}(r)} \\ & + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v_1} \Big|_{\mathbb{R}^{r+n}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial v_s} \Big|_{\mathbb{R}^{r+n}} \right\rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, f_0, \dots, f_0^p \rangle_{\mathcal{E}(r)} \\ & + \mathfrak{m}(n)^{s+1} \mathcal{E}(r+n) + \mathfrak{m}(r+n)^q \end{aligned} \quad (1.3)$$

Y este es el caso especial que necesitaremos.

²Cabe mencionar para evitar confusiones, a pesar de ser algo trivial, que las letras s, r que utilizamos para denotar los parámetros en la definición anterior están en distinto orden de como aparecen en la definición de [15]. El motivo para tomarlas así será evidente más adelante.

³Ver definición 2.15 de [15]

Corolario 6. Sea f como en el corolario anterior. Si $r = s = n = 1$ y $\eta = x^3$ ($\eta = x^4$) entonces las condiciones del Corolario 5 se cumplen y podemos escoger a $k = d = 2$ ($k = d = 3$). Por lo tanto $p = 1$ y $q = 4$ ($q = 6$) y entonces tenemos que f es $(1, 1)$ -estable si y sólo si

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x) = & \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial t} \right\rangle_{\mathcal{E}(t)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{\{s=0\}} \right\rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, f_0 \rangle_{\mathcal{E}(t)} \\ & + \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathfrak{m}(t, x)^{4(6)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Seguimos con unas últimas definiciones.

Definición 7 (Equivalencia de gérmenes). Sean $\eta, \mu \in \mathfrak{m}(n)$. Decimos que η y μ son equivalentes si existen gérmenes de difeomorfismos $A \in L(n)$ y $B \in L(1)$ tales que $\eta = B\mu A$.

Definición 8 (Reducción de gérmenes). Sea $\eta \in \mathfrak{m}(n+d)$ y $\mu \in \mathfrak{m}(n)$ y sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^d$. Decimos que η se reduce a μ si existe una forma cuadrática no degenerada Q en $\mathbb{R}^d$ tal que si $\mu'(x, y) = \mu(x) + Q(y)$ entonces η es equivalente a μ' . Nótese que $\mu' \in \mathfrak{m}(n+d)$.

Definición 9 ($(1, 1)$ -reducción). Sean $g \in \mathfrak{m}(1+1+n+d)$ y $f \in \mathfrak{m}(1+1+n)$. Decimos que g se $(1, 1)$ -reduce a f si existe una forma cuadrática no degenerada Q en $\mathbb{R}^d$ tal que si $f' \in \mathfrak{m}(1+1+n+d)$ es el d -desdoblamiento de f definido por $f'(s, t, x, y) = f(s, t, x) + Q(y)$, entonces g es $(1, 1)$ -equivalente f' .

Nota.

- Si $d > 0$ en la Definición 8 decimos que μ es una reducción propia de η . Y si η no tiene reducción propia entonces decimos que η es irreducible.
- Lo mismo pasa para g y f en la Definición 9 cambiando reducción por $(1, 1)$ -reducción, μ por f y η por g .
- La generalización de la Definición 9 para (s, r) -reducción es la trivial.

Por último damos la definición de la r -estabilidad infinitesimal para $r = 2$, que es la estabilidad que Thom usa en su trabajo. La definimos aquí por completez y para mostrar como es que la (s, r) -estabilidad es que generaliza esta idea.

Definición 10 (2-estabilidad infinitesimal). Sea $f \in \mathfrak{m}(2+n)$ y $f_{ext}: \mathbb{R}^{2+n} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f_{ext}(u, x) = (u, f(u, x))$ para $u \in \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es infinitesimalmente 2-estable si

$$\mathcal{E}(n+2) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}(n+2)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle_{\mathcal{E}(2)} + f_{ext}^* \mathcal{E}(3).$$

Observación. Esta definición es muy parecida a la definición de (s, r) -estabilidad. La diferencia entre ellas es que en esta no distinguimos entre las variables del desdoblamiento $u = (s, t)$. Nótese también que la $(1, 1)$ -estabilidad infinitesimal implica la $\{2\}$ -estabilidad infinitesimal (y en general que la (s, r) -estabilidad implica $\{r+s\}$ -estabilidad).

En lo que resta de esta sección, lo que se quiere hacer es mostrar la clasificación de 2-desdoblamientos de gérmenes en $\mathfrak{m}(n)$ módulo $(1, 1)$ -equivalencia. Esta clasificación fue calculada por Lekili en [6] utilizando un algoritmo que describe Wassermann. Nos apoyaremos en los resultados de [15] y en la demostración del teorema A.3 de [6]. Lekili enuncia el siguiente resultado que es un caso particular de un teorema de Wassermann. Este resultado es fundamental para nuestras intenciones.

Teorema 11. Sea $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ y sean g y $f \in \mathfrak{m}(n+2)$ desdoblamientos $(1, 1)$ -estable y 2-estable, respectivamente, de η . Entonces existe un germen polinomial $p \in \mathfrak{m}(1)$ de grado a lo más 2 tal que g es $(1, 1)$ -equivalente a alguno de estos desdoblamientos:

$$f(t, s + p(t), x) \quad (1.5)$$

$$f(s + p(t), t, x) \quad (1.6)$$

Demostración. El teorema es un caso especial del teorema 4.11 de [15]. Lo único que hay que notar es que como $r = s = 1$ entonces el grado de todos los ξ_i es 0 y como $\xi(0) = 0$ entonces todos son idénticamente 0. Además tenemos que el grupo simétrico es $\{e, (12)\} = S_2 = T$. Por lo tanto las permutaciones sólo son la trivial y transponer t y s . $\square$

En seguida se clasificarán todos los desdoblamiento (1,1)–estables de un germen $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ arbitrario. El método para lograr esto (y más en general, para encontrar todos los desdoblamiento (s,r) –estables de η) es el siguiente. Wassermann en [15] propone un algoritmo para encontrar todos los desdoblamiento de un germen en específico, este algoritmo lo describimos más adelante. Lo crucial en este punto es entender que ya que tenemos un germen específico tenemos una manera (el algoritmo) de calcular todos sus desdoblamiento (s,r) –estables. La dificultad que ahora enfrentamos es que no sabemos inicialmente la forma del germen. Nos gustaría poder saber cuáles son las formas que el germen puede tomar, es decir quisiéramos tener una manera de clasificarlos para después poder encontrar con el algoritmo de Wassermann todos los desdoblamiento (s,r) –estables de cada germen y por lo tanto resolver el problema. Resulta que gracias a la maquinaria desarrollada por Wassermann (Lemas 4.17 - 4.20 de [15]) podemos hacer esto. El argumento es el siguiente.

Primero resaltamos, como se hace en la nota al final de §4 en [15], que si $f \in \mathfrak{m}(s+r+n)$ es un germen que desdobra a $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ no singular, es decir, $\eta \notin \mathfrak{m}(n)^2$ entonces f es (s,r) –estable y (s,r) –equivalente a cualquier otro $\{s+r\}$ –desdoblamiento de η . Sin embargo, nosotros queremos clasificar los desdoblamiento para un germen singular.

Sea f un desdoblamiento (s,r) –estable de un germen $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$. Esto implica que en particular f es $\{s+r\}$ –estable (véase la observación después de la Definición 10). Entonces, es causa del teorema de la lista de las 7 catástrofes de Thom (Teorema 2.26 en [15]) que ocurre sólo una de estas posibilidades

- i) f tiene una singularidad simple. Y en este caso ya terminamos por que f tiene una singularidad de Morse.
- ii) f se reduce (en el sentido de la definición 2.24 de [15]) a un único desdoblamiento g_i de la lista de 7 catástrofes.

Si pasa el caso ii) entonces es trivial ver que el germen η se reduce a un μ_i de la lista. Además sabemos que este μ_i tiene que ser único ya que si η se reduce a μ_i y a μ_j entonces se tiene por el Lema 4.18 que f se (s,r) –reduce a algunos h_i y h_j $\{s+r\}$ –desdoblamiento de μ_i y μ_j y por el Lema 4.17 sabemos que estos desdoblamiento son (s,r) –(y $\{s+r\}$ –)estables. El corolario 2.23 nos dice que f se reduce (en el sentido de la definición 2.24) a h_i y a h_j . Finalmente por el lema 4.19 tenemos que f se reduce en el mismo sentido a algunos g_i y g_j de la lista de Thom, la única manera en que puede pasar esto es si $i = j$ y por lo tanto tenemos que μ_i es único.– Por lo tanto sabemos que η se reduce un único germen μ_i de la lista de Thom. De aquí, el Lema 4.18 nos asegura que f se (s,r) –reduce a un $\{s+r\}$ –desdoblamiento, h_i , de μ_i y se sabe (por el Lema 4.17) que este desdoblamiento es (s,r) –estable. Además el Lema 4.19 nos dice que f también se (s,r) –reduce a cualquier otro $\{s+r\}$ –desdoblamiento de μ_i que sea (s,r) –equivalente a h_i , es decir f se reduce a cualquier representante de la clase de (s,r) –equivalencia de h_i . Por otro lado, el Lema 4.20 asevera que f sólo se reduce a una clase de (s,r) –equivalencia de $\{s+r\}$ –desdoblamiento de μ_i . Para ser más específicos en este punto supongamos que f se (s,r) –reduce a dos $\{s+r\}$ –desdoblamiento, h_i y h_j , de $\mu_i \in \mathfrak{m}(n)^2$. Luego, por hipótesis tenemos que $h_i|_{\mathbb{R}^n} = h_j|_{\mathbb{R}^n} = \mu_i \in \mathfrak{m}(n)^2$ y también sabemos que h_i, h_j son (s,r) –irreducibles porque μ_i lo es, pero la nota del final de §4 en [15] nos dice que esto es equivalente a que $h_k|_{\mathbb{R}^n} \in \mathfrak{m}(n)^3$ para $k = i, j$. Por último podemos aplicar el Lema 4.20 para obtener que h_i y h_j son (s,r) –equivalentes.

Resumiendo, lo que hicimos fue apoyarnos en los Lemas 4.17-4.20 y el corolario 2.23 de [15] y el teorema de la lista de siete catástrofes de Thom para demostrar:

Lema 12. *Sea f es un desdoblamiento (s,r) –estable de un germen $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$. Entonces f tiene una singularidad de Morse o η se reduce a un único germen, μ_i , de la lista de Thom. Además f se (s,r) –reduce a una única clase de (s,r) –equivalencia de $\{s+r\}$ –desdoblamiento de μ_i .*

Regresando al problema inicial, el clasificar todos los desdoblamiento $(s, r) - ((1, 1) -)$ estables de germen $\nu \in \mathfrak{m}(n)$, la primera dificultad que encontramos fue clasificar las formas que podía tomar η . Con el argumento anterior logramos clasificarlos, en efecto demostramos que η se reduce simplemente a un subconjunto de los gérmenes en la lista de Thom. Por lo tanto lo único que falta es encontrar todos los desdoblamiento $(s, r) - ((1, 1) -)$ estables de todos los gérmenes μ_i y así concluimos. Pero para lograr esto, como ya habíamos señalado, existe un algoritmo descrito por Wassermann. El algoritmo es simple y funciona para r, s arbitrarios, este se justifica con el Teorema 11. Sin embargo ahora describimos el caso particular con $s = r = 1$. Sean $s = r = 1$ y $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ fijo, tómesese algún desdoblamiento f , $\{s + r\}$ -estable de η (nótese que para r y s pequeños, nuestro caso, estos están descritos por la lista de Thom). Ahora definimos los desdoblamiento de η dados por (1.5) y (1.6), es decir definimos $H_1(p)(s, t, x) = f(t, s + p(t), x)$ y $H_2(p)(s, t, x) = f(s + p(t), t, x)$ para $s, t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathfrak{m}(1)$ un germen polinomial de grado a lo más 2. Lo siguiente es calcular para cada $H_i(p)$, usando el Corolario 6, qué p 's hacen al desdoblamiento $H_i(p)$ $(1, 1)$ -estable, $i = 1, 2$. El Teorema 11 nos asegura que el conjunto de todos los $H_i(p)$, $i = 1, 2$ que son $(1, 1)$ -estables contienen representantes de todas las clases de $(1, 1)$ -equivalencia de desdoblamiento $(1, 1)$ -estables de η , por lo tanto con este método podemos determinar lo que buscábamos. Por fin estamos preparados para demostrar,

Teorema 13 (Desdoblamiento $(1, 1)$ -estables). *Sea $f \in \mathfrak{m}(n + 2)$ un desdoblamiento $(1, 1)$ -estable de $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$. Entonces f tiene una singularidad de Morse en 0, o f se $(1, 1)$ -reduce a sólo uno de los siguientes desdoblamiento h_i de los germen ν_i .*

ν_i	h_i
$\nu_0(x) = x^3$	$h_0(s, t, x) = x^3 + tx$
$\nu_1(x) = x^3$	$h_1(s, t, x) = x^3 + t^2x + sx$
$\nu_2(x) = x^3$	$h_2(s, t, x) = x^3 - t^2x + sx$
$\nu_3(x) = x^4$	$h_3(s, t, x) = x^4 + sx^2 + tx$

Demostración. Suponemos que f no tiene una singularidad de Morse, si sí la tuviera hemos terminado. Por el Lema 12 y el Teorema 11 es suficiente calcular, usando el algoritmo descrito por Wassermann, todos los $(1, 1)$ -desdoblamiento de todos los gérmenes μ_i de la lista de Thom. Pero al fijarnos en esta lista notamos que sólo dos gérmenes tienen 2-desdoblamiento 2-estables, los demás sólo tienen r -desdoblamiento con $r > 2$. A saber, esto son los gérmenes $\mu_1 = x^3$ y $\mu_2 = x^4$. Entonces utilizamos el algoritmo en estos dos.

Primero el caso $\mu_1 = x^3$. Para este caso, su desdoblamiento 2-estable es $g_1(x) = x^3 + tx$ y por lo tanto

$$H_1(p)(s, t, x) = x^3 + tx \quad (1.7)$$

$$H_2(p)(s, t, x) = x^3 + (s + at^2 + bt)x \quad (1.8)$$

El desdoblamiento (1.7) es h_0 y como veremos adelante es $(1, 1)$ -estable, por lo tanto nos enfocamos en (1.8). Necesitamos ver qué valores $a, b \in \mathbb{R}$ hacen a (1.8) $(1, 1)$ -estable, para esto usamos la ecuación (1.4) que nos da la condición necesaria. Vemos que:

$$\begin{aligned} H_2(p)_0 &= x^3 + (at^2 + bt)x \\ \frac{\partial H_2(p)_0}{\partial x} &= 3x^2 + at^2 + bt \\ \frac{\partial H_2(p)_0}{\partial t} &= x(2at + b) \\ \frac{\partial H_2(p)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= x \end{aligned}$$

Y la condición de estabilidad es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x) &= \langle 3x^2 + at^2 + bt \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \langle x(2at + b) \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \langle x \rangle_{\mathbb{R}} + \\ &\quad \langle 1, x^3 + (at^2 + bt)x \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathfrak{m}(t, x)^4 \end{aligned}$$

Ponemos atención a los siguientes casos, si:

- $a = b = 0$. Entonces tenemos que la condición toma esta forma

$$\mathcal{E}(t, x) = \langle 3x^2 \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \langle x \rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, x^3 \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathfrak{m}(t, x)^4$$

Y es claro que la condición no se cumple. Por ejemplo, no podemos generar el germen de la función xt , ya que los sumandos primero y cuarto tienen términos de x o t al menos cuadráticos. El segundo sumando no depende de t , la primera parte del tercer sumando no depende de x y la segunda tiene términos de orden x^3 . El último término tiene derivadas hasta de tercer orden iguales a cero. Vemos así que si ambos a y b son cero entonces $H_2(p)$ no es $(1, 1)$ -estable.

- $b=0$. En este caso el lado derecho de (1.4) es:

$$\langle 3x^2 + at^2 \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \langle 2axt \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \langle x \rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, x^3 + (at^2)x \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathfrak{m}(t, x)^4$$

Y denotamos a los sumandos así:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \langle 3x^2 + at^2 \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} & \textcircled{4} &= \langle 1, x^3 + (at^2)x \rangle_{\mathcal{E}(t)} \\ \textcircled{2} &= \langle 2axt \rangle_{\mathcal{E}(t)} & \textcircled{5} &= \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) \\ \textcircled{3} &= \langle x \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Por el corolario 3 de [7] o el lema 1.6 de [14] sabemos que para que este conjunto sea igual que $\mathcal{E}(x, t)$ es suficiente ver que podemos generar cualquier polinomio de grado menor o igual que tres en x y t (por que tenemos el término $\mathfrak{m}(t, x)^4$). Notamos entonces que en $\textcircled{4}$ tenemos un término igual a $\mathcal{E}(t)$ que nos da cualquier polinomio en t . De igual manera, cualquier polinomio en x lo podemos obtener con un elemento de $\textcircled{3}$ o de una combinación de elementos en $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{4}$ y $\textcircled{5}$. Por ejemplo, si deseamos obtener el germen de x^2 es posible generarlo con $1/3(3x^2 + at^2) - 1/3at^2$ donde $1/3(3x^2 + at^2) \in \textcircled{1}$ y $1/3at^2 \in \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) = \textcircled{5}$. Por último sólo nos faltan los polinomios con ambas variables, es decir, xt, xt^2, x^2t . El primero lo encontramos en $\textcircled{2}$ y el segundo en $\textcircled{5}$. Mientras que x^2t lo recuperamos de una combinación de gérmenes en $\textcircled{1}$ y $\textcircled{5}$. Por lo tanto hemos demostrado que si $b = 0$ se cumple la condición de estabilidad para $H_2(p)$.

- $a=0$. Ahora el lado derecho de la condición es

$$\langle 3x^2 + bt \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \langle xb \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \langle x \rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, x^3 + btx \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathfrak{m}(t, x)^4.$$

Y denotamos a los sumando de esta manera:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \langle 3x^2 + bt \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} & \textcircled{4} &= \langle 1, x^3 + btx \rangle_{\mathcal{E}(t)} \\ \textcircled{2} &= \langle xb \rangle_{\mathcal{E}(t)} & \textcircled{5} &= \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) \\ \textcircled{3} &= \langle x \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Una vez más tenemos que ver si podemos generar a cualquier polinomio de grado igual o menor que tres en x y t . Otra vez contamos con el término $\mathcal{E}(t)$ que genera todos los polinomios en t . Para los polinomios en x bastan simples combinaciones de gérmenes en $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ y $\textcircled{4}$. El germen del polinomio xt está en $\textcircled{2}$ y xt^2 en $\textcircled{5}$. Finalmente es fácil darse cuenta de que el término tx^2 lo obtenemos con $\textcircled{1}$ y $\mathcal{E}(t)$. Por lo tanto en este caso, $H_2(p)$ también es $(1, 1)$ -estable.

Concluyendo, tenemos que $H_2(p)$ es $(1, 1)$ -estable si y sólo si a o b son distintos de 0. Si $b \neq 0$ entonces tenemos que el germen es $x^3 + (s + at^2 + bt)x$. Podemos hacer el cambio de variable $s' = s$ y $t' = s + at^2 + bt$ y entonces tenemos que el germen $h_0 = x^3 + tx$ es $(1, 1)$ equivalente a $H_2(p)$ y obtenemos que h_0 es $(1, 1)$ -estable. Por el otro lado si $b = 0$ tenemos que $H_2(p) = x^3 + (s + at^2)x$ tomando $t' = \sqrt{|a|}t$ tenemos que $H_2(p)$ es $(1, 1)$ -equivalente a h_1 si a es positivo o a h_2 si es negativo.

Por último notamos que ninguno h_1, h_2 o h_3 son $(1, 1)$ -equivalentes. En efecto, h_1 y h_2 no son $(1, 1)$ -equivalentes ya que ningún cambio de coordenadas puede cambiar el signo de el término cuadrático en t , precisamente por que el cuadrado lo cancela. Ahora, si quisiéramos pasar de h_1 o h_2 a h_0 encontramos que no existe ningún difeomorfismo local que cambie la coordenada t como deseamos ya que necesitaríamos un cambio de coordenadas del tipo $t' = \pm t^2 + s$ pero esto tiene $\partial_t|_{(0,0)} = 0$.

Con esto hemos encontrado una lista con todos los 2-desdoblamientos $(1, 1)$ -estables del germen x^3 que tiene un único representante de cada clase de $(1, 1)$ -equivalencia. Para finalizar nos resta hacer lo mismo con el germen $\mu_2 = x^4$. En este caso el procedimiento es exactamente el mismo. Su desdoblamiento 2-estable es $g_2(s, t, x) = x^4 + tx^2 + sx$ y con el generamos a:

$$H_1(p)(s, t, x) = x^4 + tx^2 + (s + at^2 + bt)x \quad (1.9)$$

$$H_2(p)(s, t, x) = x^4 + (s + at^2 + bt)x^2 + tx \quad (1.10)$$

- Para (1.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} H_1(p)_0 &= x^4 + tx^2 + (at^2 + bt)x \\ \frac{\partial H_1(p)_0}{\partial x} &= 4x^3 + 2tx + at^2 + bt \\ \frac{\partial H_1(p)_0}{\partial t} &= x^2 + 2atx + bx \\ \frac{\partial H_1(p)}{\partial s}|_{s=0} &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto para que el germen sea $(1, 1)$ -estable tenemos que corroborar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x) &= \langle 4x^3 + 2tx + at^2 + bt \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \langle x^2 + 2atx + bx \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \langle x \rangle_{\mathbb{R}} + \\ &\quad \langle 1, x^4 + tx^2 + (at^2 + bt)x \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \mathbf{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathbf{m}(t, x)^6. \end{aligned}$$

Lo que es necesario es encontrar para que $a, b \in \mathbb{R}$ podemos generar, con el lado derecho de la igualdad menos el término $\mathbf{m}(n)^6$, cualquier polinomio en x y t de grado menor o igual que 5. Trabajando de la misma manera que en el caso pasado, es fácil ver que esto pasa siempre y cuando $b \neq 0$. Ahora bien, por esto sabemos que el mapeo

$$\begin{aligned} F: [0, 1] &\rightarrow \mathbf{m}(2 + n) \\ \tau &\mapsto F(\tau) = x^4 + tx^2 + (s + \tau at^2 + bt)x \end{aligned}$$

es una homotopía estable ⁴ con $F(0) = x^4 + tx^2 + (s + bt)x$ y $F(1) = x^4 + tx^2 + (s + at^2 + bt)x$. Y más aún como $F(1) - F(0) = atx^2 \in \mathbf{m}(n)^2 \mathcal{E}(s, t, x)$ entonces podemos usar el lema 4.9 de [15] para ver que si $H_1(p)$ es $(1, 1)$ -estable entonces es $(1, 1)$ -equivalente a $f(s, t, x) = x^4 + tx^2 + (s + bt)x$. Finalmente tomamos el cambio de variables $t' = s + bt$ y $s' = -s/b$ y vemos que f es $(1, 1)$ -equivalente a $g(s', t', x) = x^4(s' + t'/b)x^2 + t'x$. A su vez veremos más adelante que este desdoblamiento es $(1, 1)$ -equivalente a h_3 .

- Finalmente nos queda calcular cuándo $H_2(p)$ es estable. Para este germen tenemos que,

$$\begin{aligned} H_2(p)_0 &= x^4 + (at^2 + bt)x^2 + tx \\ \frac{\partial H_2(p)_0}{\partial x} &= 4x^3 + 2(at^2 + bt)x + t \\ \frac{\partial H_2(p)_0}{\partial t} &= (2at + b)x^2 + x \\ \frac{\partial H_2(p)}{\partial s}|_{s=0} &= x^2 \end{aligned}$$

⁴Revisar las defunciones 4.3 y 4.4 de [15]

Y por lo tanto para que el germen sea $(1, 1)$ -estable tenemos que corroborar que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t, x) = & \langle 4x^3 + 2(at^2 + bt)x + t \rangle_{\mathcal{E}(t, x)} + \langle (2at + b)x^2 + x \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \langle x^2 \rangle_{\mathbb{R}} + \\ & \langle 1, x^4 + (at^2 + bt)x^2 + tx \rangle_{\mathcal{E}(t)} + \mathfrak{m}(t)^2 \mathcal{E}(t, x) + \mathfrak{m}(t, x)^6.\end{aligned}$$

Trabajando de la misma manera que en el estudio del primer caso encontramos que el desdoblamiento es $(1, 1)$ -estable para todos los valores de a y b . Ahora, notamos entonces que

$$\begin{aligned}F: [0, 1] & \rightarrow \mathfrak{m}(2 + n) \\ \tau & \mapsto F(\tau) = x^4 + (s + \tau at^2 + \tau bt)x^2 + tx\end{aligned}$$

Es una homotopía estable que va de $F(0) = x^4 + sx^2 + tx$ a $F(1) = x^4 + (s + at^2 + bt)x^2 + tx$ y como $F(1) - F(0) = (at^2 + bt)x^2 \in \mathfrak{m}(n)^2 \mathcal{E}(s, t, x)$ una vez más podemos aplicar el lema 4.9 de [15] y concluir que $H_2(p)$ es $(1, 1)$ -equivalente a $f(s, t, x) = x^4 + sx^2 + tx = h_3(s, t, x)$. Nótese que $g(s', t', x) = x^4(s' + t'/b)x^2 + t'x$ es este mismo caso y por lo tanto también es $(1, 1)$ -equivalente a h_3 y con esto concluimos. $\square$

Por último damos la siguiente forma particular del Teorema 13.

Teorema 14 (Deformaciones genéricas). *Sea $f \in \mathfrak{m}(5)$ un germen $(1, 1)$ -estable. Entonces f es $(1, 1)$ -equivalente a sólo uno de los siguientes gérmenes.*

h_i	Nombre
$g_0(s, t, x, y, z) = \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2$	Singularidad de Morse
$g_1(s, t, x, y, z) = x^3 + tx \pm y^2 \pm z^2$	Cúspide
$g_2(s, t, x, y, z) = x^3 + t^2x + sx \pm y^2 \pm z^2$	Deformación de creación
$g_3(s, t, x, y, z) = x^3 - t^2x + sx \pm y^2 \pm z^2$	Deformación de unión
$g_4(s, t, x, y, z) = x^4 + sx^2 + tx \pm y^2 \pm z^2$	Deformación de giro

Demostración. Es directa ya que el Teorema 13 nos dice que f tiene una singularidad de Morse que es g_0 o f se $(1, 1)$ -reduce a sólo uno de los h_i para $i = 0, 1, 2, 3$. Esto quiere decir que existe una forma cuadrática no degenerada, $Q' \in \mathbb{R}^2$, tal que f es $(1, 1)$ -equivalente a $g'_i(s, t, x, y, z) = h_i(s, t, x) + Q'(y, z)$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Pero entonces existe un cambio de coordenadas que sólo depende de y, z en el que Q' se ve como la forma diagonal $Q(x, y) = \pm y^2 \pm z^2$. $\square$

Con estos resultados ahora tenemos las herramientas que necesitaremos para poder demostrar el Teorema principal 18. En la siguiente sección se definen las singularidades y las fibraciones con las que trabajaremos.

Capítulo 2

Fibraciones Singulares

En este capítulo trabajaremos con ciertos tipos de puntos críticos y de fibraciones singulares. La primera sección se enfoca en definir y explicar estos conceptos. En la segunda parte damos una lista de deformaciones de un tipo de estas fibraciones, las fibraciones corrugadas. El objetivo final del capítulo será demostrar que estas deformaciones son completas en cierto sentido.

2.1. Singularidades y fibraciones

Definición 15 (Tipos de singularidades). Sea X una 4 variedad diferenciable y Σ una superficie, ambas cerradas y orientadas. Sea $f: X \rightarrow \Sigma$ una submersión para casi todo $q \in X$ y $p \in X$ un punto singular de f , es decir $rk(D_p f) < 2^1$. Se dice que f tiene una:

- **singularidad de Lefschetz** en p si existen vecindades de p y $f(p)$ (U y V respectivamente) y cartas coordenadas centradas en p y $f(p)$, $(X \supset)U \rightarrow \mathbb{C}^2$ y $(\Sigma \supset)V \rightarrow \mathbb{C}$, que preservan la orientación tales que la representación local del mapeo $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es $(z, w) \mapsto zw$.
- **singularidad de doblez** en p si existen vecindades de p y $f(p)$ (U y V respectivamente) y cartas coordenadas centradas en p y $f(p)$, $(X \supset)U \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $(\Sigma \supset)V \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preservan la orientación tales que la representación local del mapeo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $(t, x, y, z) \mapsto (t, x^2 + y^2 - z^2)$.
- **singularidad de cúspide o cúspide** en p si existen vecindades de p y $f(p)$ (U y V respectivamente) y cartas coordenadas centradas en p y $f(p)$, $(X \supset)U \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $(\Sigma \supset)V \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preservan la orientación tales que la representación local del mapeo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $(t, x, y, z) \mapsto (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$.

Observación.

- I) Las singularidades de Lefschetz están aisladas en X y las singularidades de doblez aparecen en familias unidimensionales; esto es fácil de ver revisando directamente los puntos singulares en los modelos locales. Como veremos adelante, las cúspides siempre están rodeadas por dos arcos de singularidades de doblez.
- II) Podemos ver que los modelos locales de las singularidades de doblez y cúspides son familias de funciones Morse parametrizadas por t . Esto nos indicará que cada vez que crucemos uno de estos arcos singulares la topología de las fibras va a cambiar.

Definición 16 (Fibraciones de Lefschetz, quebradas y corrugadas). Sea X y Σ como en la definición anterior. Sea $f: X \rightarrow \Sigma$ una submersión en el complemento un conjunto $C = Q \cup L$, el conjunto de singularidades. Si L es una unión finita de puntos aislados con singularidades de Lefschetz y Q es una subvariedad de dimensión

¹Denotamos al rango de la aplicación lineal $D_p(f): T_p X \rightarrow T_{f(p)} \Sigma$ por $rk(D_p)$.

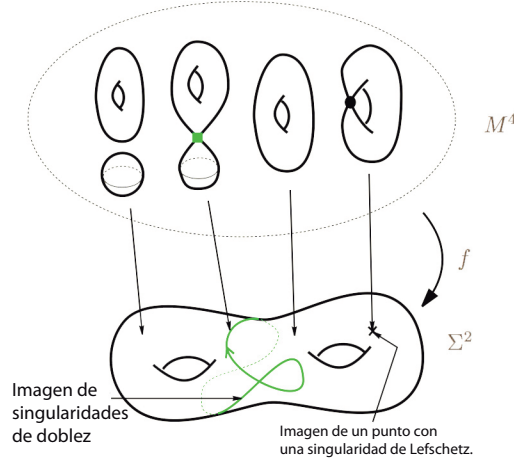


Figura 2.1: Fibración quebrada. Las singularidades de doblez dividen a la base en conjuntos disjuntos y sobre cada punto de singularidades hay fibras con autointersecciones. Imagen de Saeki.

1 en la que cada punto es una singularidad de doblez o una cúspide, entonces a f se le llama una **fibración corrugada**. Si no existen cúspides entonces f es una **fibración quebrada** y más aún si $Q = \emptyset$ entonces a f se le conoce como una **fibración de Lefschetz**.

Nota. Si f es una fibración corrugada en la que $L = \emptyset$, es decir, donde no existen singularidades de Lefschetz entonces llamamos a f una **fibración corrugada pura**.

Observación. Intuitivamente lo que estamos haciendo es parametrizar a la 4 variedad con una superficie. Las fibraciones de Lefschetz son estructuras parecidas a haces fibrados con fibras genéricas Σ_g , una superficie de genero g , para casi todo punto en la base y con un número finito de fibras singulares. Las fibras singulares son fibras con autointersecciones que se obtienen al colapsar algún círculo encajado, el ciclo evanescente, en una fibra regular. Es un hecho ya conocido que la monodromía de la fibra alrededor de una singularidad de Lefschetz es un giro de Dehn a la derecha a lo largo del ciclo evanescente, una demostración de esto se encuentra, por ejemplo, en Auroux y Smith [2]. De la misma manera, informalmente podemos decir que las singularidades dobladas dividen en conjuntos disjuntos a la base sobre los cuales hay fibras genéricas Σ_g . El género de la fibra cambia en ± 1 cada vez que se cruza un arco de singularidades para pasar de un conjunto al otro y también existen fibras con autointersecciones sobre las imágenes de los puntos críticos. Ver la Figura 2.1.

Ahora revisemos un poco más a fondo el modelo local de una cúspide. Sea $p \in X$ una cúspide en una 4 variedad, entonces localmente la fibración corrugada se ve así:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y, z) &\mapsto (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

en estas coordenadas la matriz de la diferencial es:

$$D_q f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3x & 3x^2 - 3t & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Podemos ver que es singular (esto es $rk(D_q f) < 2$) si y solo si $y = z = 0$ y $t = x^2$. Es decir, los puntos críticos son de la forma $C = (t, \pm\sqrt{t}, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ lo cual es una parábola en el plano $y = z = 0$. El conjunto de valores críticos, la imagen de los puntos críticos bajo f , es $VC = \{(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid (\tau, \sigma) = (t, \pm 2t^{3/2}) t \in \mathbb{R}\}$. Este conjunto, es una curva cuya imagen podemos ver en la Figura 2.2.

Si restringimos $f: D^4 \rightarrow D^2$, notamos que los valores críticos dividen a D^2 en dos partes y buscamos cómo son las fibras en estos subconjuntos. Para esto podemos proceder de dos maneras, la primera que revisamos es la analítica. Para obtener la fibra sobre un punto $(\tau, s) \in D^2$ notamos que la preimagen de los puntos con $\tau = \tau_0$ constante está contenida en el plano $t = \tau_0 \cap D^4$. Por lo tanto si nos fijamos en los mapeos $f_{t_0}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por $f_{t_0}(x, y, z) \mapsto s = x^3 - 3xt_0 + y^2 - z^2$ podemos graficar las superficies de nivel para s constante. La segunda manera de visualizar las fibras es con teoría de funciones Morse. Notemos que por la forma en que acabamos de definir a f_{t_0} esta es una familia de funciones Morse parametrizadas por t , excepto cuando $t = 0$. Para convencerse de esta aseveración sólo hay que notar que $Df = (3x^2 - 3t, 2y, -2z)$ con puntos críticos $y = z = 0$ y $x = \pm t^{1/2}$. El determinante del Hessiano en estos

puntos es $|D^2|_{x=\pm t^{1/2}} = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -24x = -24t^{1/2}$. Por lo tanto,

si t es distinto de cero, existen dos puntos críticos no degenerados y f_t es una función Morse. Por definición, viendo el Hessiano, tenemos que $x = t^{1/2}$ es un punto crítico con índice 1 y $x = -t^{1/2}$ es un punto crítico con índice 2. Por la teoría de funciones de Morse, sabemos que $M_s = f^{-1}((-\infty, s)) \in \mathbb{R}^3$ es homotópico para todo $s' < -2t^{3/2}$ ya que no se cruza ningún valor crítico. Al cruzar el primer valor crítico tenemos que si $s_0 < -2t^{3/2} < s_1$ entonces M_{s_1} es homotópica a $M_{s_0} \cup 2$ -asa, esto nos da el toro cortado de un extremo. Finalmente al pasar por el otro valor crítico $s = 2t^{3/2}$ que tiene índice 1, se pega una 1-asa de tal manera que esta se cancela con la 2-asa que habíamos pegado y volvemos al tipo de homotopía que se tenía al empezar (Ver Figura 2.2). Continuamos con la definición de las deformaciones de fibraciones corrugadas. Estas deformaciones serán el ingrediente principal de estudio de la siguiente sección.

Definición 17 (Deformación de fibraciones corrugadas). Una deformación fibraciones corrugadas es una familia uniparamétrica de mapeos, $F_\alpha(x)$, donde F_α es una fibración corrugada excepto para un número finito de valores del parámetro. Es decir, una deformación de fibraciones corrugadas es un mapeo

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \supset I \times X &\rightarrow \Sigma \\ (\alpha, \cdot) &\mapsto F_\alpha := F(\alpha, \cdot) \end{aligned}$$

tal que F_α es una fibración corrugada para $\alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Por varias razones es interesante e importante el clasificar las fibraciones quebradas que existen sobre una 4 variedad. Con este fin, Lekili en [6] propone un método trabajando con fibraciones corrugadas (FC). El motivo para trabajar con ese tipo de fibraciones y no con fibraciones quebradas (FQ) es que, como veremos luego, las FQ no son mapeos estables, en cambio las FC puras sí lo son (en el sentido de que perturbaciones pequeñas de FC puras son FC puras). En el mismo artículo el autor muestra también como pasar y regresar entre una FQ y una FC pura. El método para pasar de una FQ a una FC pura es usando el movimiento de corrugación que mostraremos adelante y para el inverso Lekili muestra una deformación conocida como hundimiento², estas deformaciones fueron muy novedosas en el tema. Con esto en mente, el método propuesto para verificar si dos FQ, f y g , son equivalentes es perturbar estas fibraciones a dos FC, f_c y g_c , y verificar si estas dos FC son equivalentes. Por esto nos gustaría encontrar un conjunto finito de deformaciones de fibraciones corrugadas que nos permitiera “movernos” dentro de clases de equivalencia de FC y así poder decir, en cierto sentido, qué fibraciones son equivalentes con una secuencia de estas deformaciones.

²Por razones espacio no podemos describir esta deformación, que es de hecho una secuencia de las que definiremos en la siguiente sección. Se recomienda leer [6] o [16] para detalles.

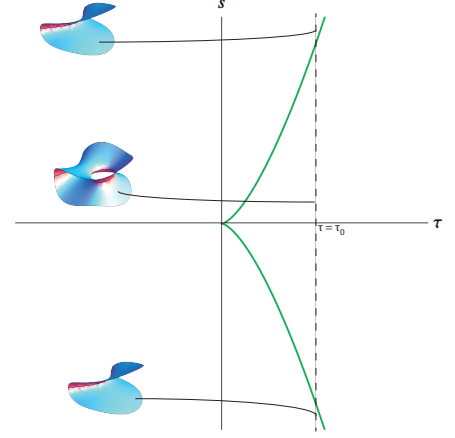


Figura 2.2: En verde la curva de valores críticos del modelo local de cúspide. Se muestran las fibras sobre las distintas regiones.

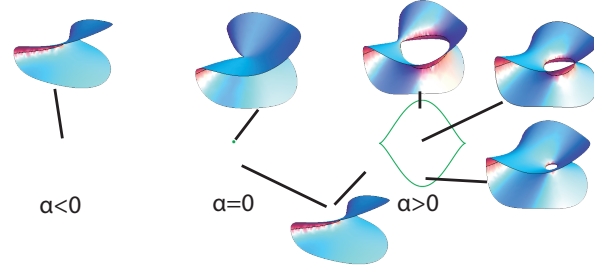


Figura 2.3: Deformación de creación para varios valores de α . En verde los valores singulares.

2.2. Deformaciones de fibraciones corrugadas

Describimos ahora cuatro deformaciones de fibraciones corrugadas que nos permitirán manipular de manera diferente a los modelos locales de fibraciones quebradas y corrugadas y así obtener una infinidad de fibraciones a partir de una inicial.

2.2.1. Deformación de creación

Como el nombre lo indica esta deformación crea dos singularidades de cúspide en una vecindad que era al empezar regular. Consideremos el mapeo

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, t, x, y, z) &\mapsto F_\alpha(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3x(-t^2 + \alpha) + y^2 - z^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

luego se tiene que

$$D_q F_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6tx & 3x^2 + 3(t^2 - \alpha) & 2y & -2z \end{pmatrix}$$

El conjunto de puntos críticos es

$C = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t^2 + x^2 = \alpha \text{ y } y = z = 0\}$. Veamos que en efecto F es una deformación de fibraciones corrugadas, esto lo corroboramos así. Para:

- $\alpha < 0$. No existen puntos críticos y F_α es un haz fibrado regular, por lo tanto una fibración corrugada.
- $\alpha = 0$. El único punto crítico es $0 \in \mathbb{R}^4$ y es degenerado, este no es un tipo de singularidad aceptable para las fibraciones corrugadas.
- $\alpha > 0$. El conjunto de puntos críticos es un círculo en el hiperplano $y = z = 0 \subset \mathbb{R}^4$. En este caso el conjunto de valores singulares es la curva cerrada $VC = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, s) = (t, \pm 2(\alpha - t^2)^{3/2})\}$ (Ver Figura 2.3).

En la parte derecha del diagrama la curva verde es el conjunto VC . Es posible apreciar que en la curva existen dos cúspides unidas por arcos de singularidades de doblez. En efecto, se puede ver (de la misma manera que en el caso del análisis de la singularidad de cúspide) que $F_\alpha(t_0, \cdot, \cdot, \cdot)$ son funciones Morse parametrizadas por t , para todo $t \neq \pm\sqrt{\alpha}$ y por lo tanto existe un cambio de coordenadas que permite ver localmente a estos puntos singulares como singularidades de doblez. Por esto, $F_{\alpha>0}$ es un fibración corrugada.

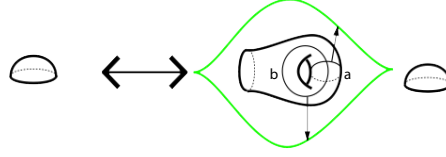


Figura 2.4: Configuración de los ciclos evanescentes de la deformación de creación.

Esto demuestra que en efecto F es una deformación de fibraciones corrugadas.

Al analizar la configuración de las fibras de la misma manera que se hizo para el caso de la singularidad de cúspide, ya sea de manera analítica o usando funciones Morse, vemos que las fibras son de la forma descrita en la Figura 2.3. En la Figura 2.4 podemos ver la configuración de los ciclos evanescentes a y b . El ciclo a desaparece cuando nos acercamos por debajo a VC y el ciclo b desaparece cuando nos acercamos por arriba a la curva singular ($s \rightarrow (2(\alpha - t^2)^{3/2})^-$, $s \rightarrow (2(\alpha - t^2)^{3/2})^+$ respectivamente). Nótese que los ciclos se intersectan transversalmente en un punto. (Esto también puede ser verificado tomando en cuenta que para $\alpha = 1/2, t = 0$, $F_\alpha(0, x, y, z) = (0, x^3 - 3/2x + y^2 - z^2)$ y esta es una función Morse que ya habíamos estudiado). Ver Figura 2.4.

2.2.2. Deformación de unión

La siguiente deformación permite unir dos círculos singulares y obtener como resultado un sólo círculo unido por dos cúspides, como se muestra en la Figura 2.5.

Para describir este movimiento comenzamos con el siguiente modelo local de una fibración quebrada

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y, z) &\mapsto (t, x^3 - 3x + y^2 - z^2) \end{aligned}$$

El conjunto de valores críticos del modelo es la unión de dos líneas horizontales de singularidades de doblez. En cuanto a las fibras, en las zonas superior e inferior estas son homeomorfas a discos y sobre la parte central se tienen superficies homeomorfas a un toro al que se les removi6 un disco, toro rebanado de ahora en adelante. Los ciclos evanescentes en la fibra de genero 1 que se obtienen al acercarse a las lines singulares son tales que se intersectan transversalmente en un sólo punto. Todo esto puede comprobarse haciendo el análisis sobre la fibración análogamente a como fue tratado en la sección pasada. El modelo se muestra en el lado izquierdo de la Figura 2.5.

Definimos ahora la deformación de unión F ,

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, t, x, y, z) &\mapsto F_\alpha(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3x(t^2 - \alpha) + y^2 - z^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Estudiando su comportamiento de la misma manera que para la deformación de creación obtenemos que el conjunto de valores críticos de F_α es

$VC = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, s) = (t, \pm 2(t^2 - \alpha)^{3/2})\}$ y concluimos que para:

- $\alpha < 0$, el conjunto de valores singulares son dos arcos de dobleces y F_α es isotópico a f , por lo tanto es una fibración quebrada. Ver la Figura 2.6.
- $\alpha = 0$, existe un punto crítico degenerado en $0 \in \mathbb{R}^4$ el cual no es un modelo de singularidad permitido para una fibración corrugada. En este valor del parámetro α hay un cambio en el tipo de fibraciones.

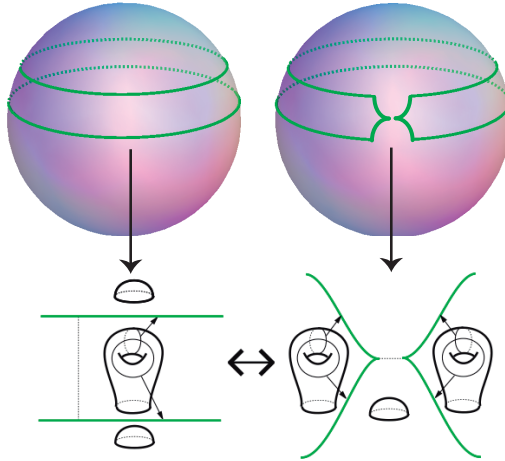


Figura 2.5: Modelo local de la deformación de unión. En la izquierda, valores de α negativos y en la derecha α positivo. (La parte inferior de la imagen pertenece a Saeki.)

- $\alpha > 0$, se obtiene la fibración corrugada con dos cúspides mostrada en la Figura 2.6. Se nota que los ciclos evanescentes en cada fibra de genero 1 se intersectan transversalmente en un sólo punto. Esta fibración es isotópica al modelo que también se ve en la parte derecha de la Figura 2.5.

Por lo tanto F_α sí es una deformación de fibraciones corrugadas. Y su propósito es unir las dos líneas horizontales creando dos singularidades de cúspides.

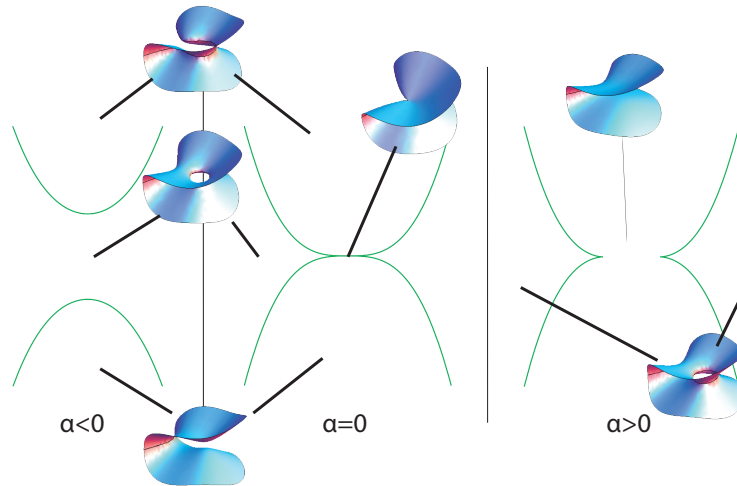


Figura 2.6: Deformación de unión para varios valores de α . En verde los valores singulares.

Por último, en la Figura 2.5 podemos ver la configuración de los ciclos evanescentes sobre las fibras. La configuración es tal que sobre cada fibra los ciclos se intersectan transversalmente en un sólo punto.

2.2.3. Deformación de giro

La tercera deformación que presentamos es la deformación de giro. El nombre del movimiento surge por que pareciera que la deformación hace que se voltee un arco de singularidades dobladas creando dos cúspides y una intersección de la curva de valores críticos. El mapeo que define a la deformación es,

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, t, x, y, z) &\mapsto F_\alpha(t, x, y, z) = (t, x^4 - x^2\alpha + xt + y^2 - z^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como antes, primero revisamos que F es una deformación. El conjunto de puntos críticos en $\mathbb{R}^4$ es

$$C = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid (t, x, y, z) = (-4x^3 + 2x\alpha, x, 0, 0)\}.$$

Nótese que es un encaje para todo α y el conjunto de valores críticos es

$$VC = \{(\tau, s) \in \mathbb{R}^2 \mid (-4x^3 + 2x\alpha, -3x^4 + x^2\alpha)\}.$$

Entonces se puede ver que si:

- $\alpha < 0$, el conjunto de valores críticos, VC , es una curva regular de singularidades de doblez y la fibración es isotópica al modelo local de la fibración quebrada. Ver Figuras 2.7 y 2.8.
- $\alpha = 0$ una vez más aquí existe un punto crítico degenerado. Es aquí donde se da el cambio en la estructura de las fibraciones.
- $\alpha > 0$ VC es una curva de dobleces que contiene dos singularidades de cúspide y más aún, obtenemos una intersección. Por lo tanto para α positivo tenemos una fibración corrugada, que mostramos en la parte derecha de la Figura 2.7. Esta fibración es isotópica al modelo que se muestra en la parte diestra de la Figura 2.8.

Esto demuestra la aseveración.

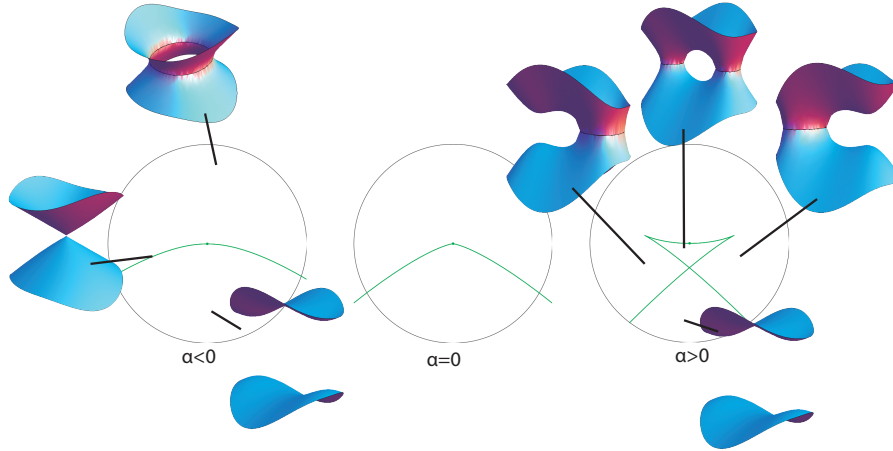


Figura 2.7: Deformación de giro para varios valores de α .

En el diagrama 2.8 se muestra la configuración de los ciclos evanescentes. La fibra sobre la región de género más alto, el interior del triángulo singular, es homeomorfa a un toro al que le hemos removido dos discos. Nos referiremos a esta superficie como el toro doblemente rebanado. Los ciclos a y c son los ciclos que

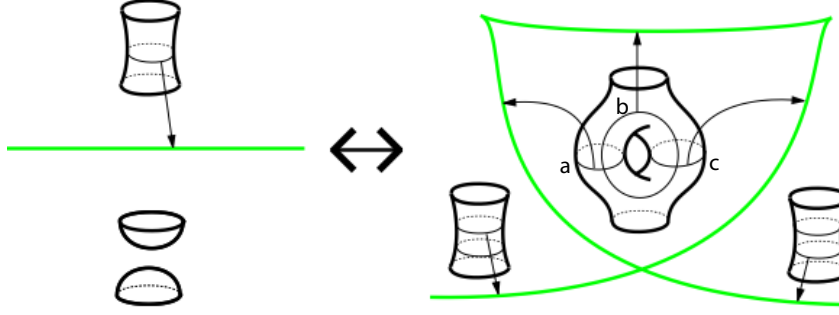


Figura 2.8: La deformación es isotópica a estos modelos. Imagen de Saeki.

desaparecen cuando vamos al arco singular de la izquierda y derecha respectivamente, el ciclo b es el que colapsa cuando nos acercamos a la parte superior de VC . La configuración es tal que las intersecciones de a con b y de b con c son transversales y en un sólo punto. Asimismo los ciclos a y c son disjuntos y no homotópicos. Una manera de corroborar eso puede ser de manera analítica. Fijamos α positivo y una fibra de referencia en la zona de genero más alto, dentro del triángulo. Es posible ver que las fibras para $\tau = \tau_0$ constante está contenidas en $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4 \cap \{t = \tau_0\}$ (las fibras están dadas por la gráfica de $\{z = \pm\sqrt{x^4 - x^2\alpha + xt + y^2 - s}\} = F_t$) y proyectamos en el plano $y = 0$. Posteriormente podemos variar los parámetros t y s para así corroborar que los ciclos son como se muestra. Aún otro método es el siguiente. Al tomar la misma fibra de referencia, observamos que el ciclo b , (el que se vuelve un punto cuando vamos para arriba) intersecta a a y c transversalmente en un punto, esto es por que localmente el modelo de cúspide nos lo garantiza. Ahora bien, podemos darnos cuenta de que los ciclos a y c son disjuntos con el siguiente razonamiento. Cuando nos acercamos al punto de autointersección de VC , g , tanto a como c desaparecen. Como ya se había remarcado, los puntos críticos son un encaje en el espacio total. Es por esto que los puntos a los que convergen los ciclos evanescentes están separados en $\mathbb{R}^4$. Al movernos al interior de VC los ciclos a y b se ensanchan y siguen siendo disjuntos siempre y cuando nos quedemos lo suficientemente cerca de g . Pero esto muestra que para cualquier fibra de referencia los ciclos en efecto son disjuntos. Para concluir, observamos que dado que las fibras sobre la zona inferior son dos discos se tiene que a y c no pueden ser homotópicos, ya que si lo fueran al pasar por la singularidad doble las fibras sobre la zona inferior serían un cilindro y una esfera. Dado que los ciclos tienen las propiedades anteriores se puede dar un difeomorfismo del toro doblemente rebanado que manda esos ciclos a su posición “estándar” como en la Figura 2.8. Esta es la descripción de la deformación de giro.

2.2.4. Deformación de corrugación

Consideremos la siguiente deformación en coordenadas complejas

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, w, z) &\mapsto F_\alpha(w, z) = w^2 + z^2 + \alpha \operatorname{Re}(w) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Con $\operatorname{Re}(w)$ la parte real del número complejo w . Esta última deformación sirve para transformar una singularidad de Lefschetz en tres cúspides unidas por arcos de dobleces, veamos como es que sucede. Bajo la identificación canónica de $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$ donde a $(t, x, y, z) \mapsto (t + ix, y + iz)$ podemos expresar el mapeo de esta manera $F_\alpha(t, x, y, z) = (t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + \alpha t, 2(tx + yz))$. Los resultados de [9] muestran que el mapeo es en efecto una deformación de FC. Notamos que F_0 es el modelo estándar de una singularidad de Lefschetz. Al estudiar la diferencial del mapeo encontramos que para $\alpha > 0$ el conjunto de puntos críticos es $C = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + (t + \frac{\alpha}{4})^2 = (\frac{\alpha}{4})^2, y = z = 0\}$. Es decir, un círculo en el

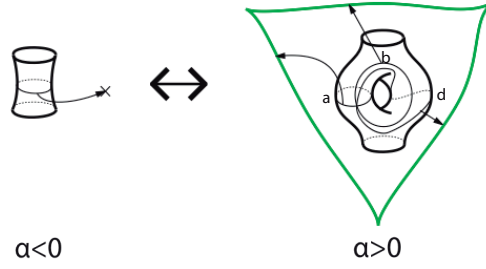


Figura 2.9: Deformación de corrugación para varios valores de α . Imagen de Saeki.

plano $t - x$ de radio $\frac{\alpha}{4}$ con vértice $(-\alpha/4, 0)$. Parametrizando el círculo por $\frac{\alpha}{4}(-1 - \cos(\theta), \sin(\theta))$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ y sustituyendo en F_α vemos que el conjunto de valores críticos es la curva cerrada dada por $VC = \left\{ \left(-\frac{\alpha^2}{8}(1 + \cos(\theta))(2 - \cos(\theta)), -\frac{\alpha^2}{8}(1 + \cos(\theta))\sin(\theta) \right) \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$. Esta curva, con tres cúspides, se muestra en la Figura 2.9.

En la misma imagen también mostramos la estructura de las fibras y la configuración de los ciclos evanescentes. En el exterior de la curva VC tenemos como fibra un disco y sobre la región interior tenemos otra vez fibras homeomorfas al toro doblemente rebanado. Si recordamos como definimos a a , b y c en la Figura 2.8, entonces d es una curva homóloga a $[c + b]$ que pasa por la intersección de a y b transversalmente, donde hemos orientado a b y c de tal manera que $c \cdot b = -1$. Es fácil ver que si a , b y d son tres curvas regulares en el toro doblemente rebanado que se intersectan transversalmente en un punto y tales que si γ es una curva que une las dos componentes de la frontera de la superficie entonces γ intersecta a a, b o d , entonces existe un difeomorfismo del toro doblemente rebanado en si mismo que manda a estas curvas a la posición estándar como en el modelo del lado derecho de la Figura 2.9. Para ver que los ciclos evanescentes en realidad sí cumplen con estas propiedades desarrollamos el ingenioso argumento de Lekili.

La primera aseveración es que podemos pensar a la fibra sobre un punto $u \in \mathbb{C}$ como un doble cubriente ramificado sobre $\mathbb{C}$ que se ramifica en 2 puntos si u está fuera de VC o a lo largo de 4 punto si es que u está dentro de la curva VC . El cubriente al que nos referimos es el siguiente. La fibra sobre $u \in \mathbb{C}$ está determinada por $z^2 = -(w^2 + \alpha \operatorname{Re}(w)) + u$ y utilizamos la proyección sobre la primera coordenada (w) para obtener el doble cubriente ramificado de $\mathbb{C}$ que está ramificado a lo largo de $\{u \in \mathbb{C} \mid 0 = -(w^2 + \alpha \operatorname{Re}(w)) + u\}$ (Figura 2.11). Es decir, para un punto en la fibra de u , $(w, z) \in (F_\alpha)_u \subset \mathbb{C}^2$ definimos el mapeo

$$\begin{aligned} \pi: (F_\alpha)_u &\rightarrow \mathbb{C} \\ (w, z) &\mapsto w \end{aligned}$$

Es fácil ver que en efecto el mapeo es un doble cubriente ya que para $v \in \mathbb{C}$ se tiene que $\pi^{-1}(v) = (v, z) \in (F_\alpha)_u$ con $z = \sqrt{-(v^2 + \alpha \operatorname{Re}(v)) + u}$ lo cual tiene dos soluciones excepto cuando $-(v^2 + \alpha \operatorname{Re}(v)) + u = 0$ que son los puntos donde el cubriente se ramifica. Es útil expresar $u = u_1 + iu_2$ y entonces en coordenadas reales tenemos que los puntos de ramificación son

$$\begin{aligned} t^2 - x^2 + \alpha t &= u_1 \\ 2xt &= u_2 \end{aligned}$$

Tomemos $\alpha = 2$ y un punto de referencia dentro de VC , $u = (u_1, u_2) = (-1/2, 0)$. Ahora tomamos tres segmentos de línea en tres direcciones tales que cada una cruce un lado diferente del “triángulo singular”. Ver Figura 2.10. Los segmentos que utilizamos son

$$\begin{aligned} s_a &= \{(-k/2, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in [1, 3]\} \\ s_b &= \{(-1/2, 2k) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in [0, 1]\} \\ s_d &= \{(-1/2, 2k) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in [-1, 0]\} \end{aligned}$$

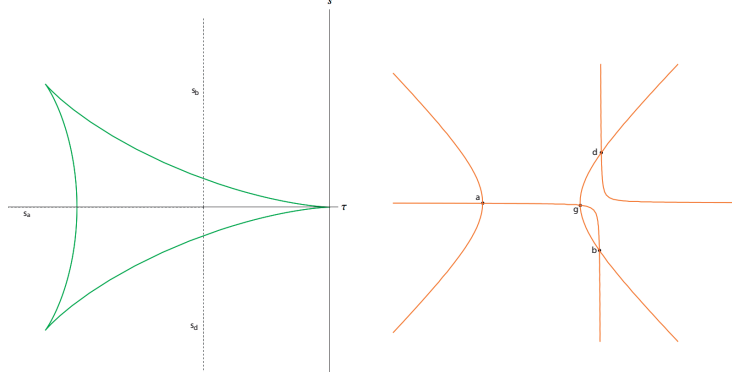


Figura 2.10: Triángulo de singularidades e hipérbolas.

Ahora, para puntos sobre s_a tenemos que los puntos de ramificación están dados por $\{x = 0 \wedge t = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{k}{2}}\}$ y por $\{t = 0 \wedge x = \pm \sqrt{\frac{k}{2}}\}$. La recta cruza la curva singular en $(-1, 0)$ y podemos ver que dentro de VC existen 4 puntos de ramificación, sin embargo conforme k empieza a crecer observamos que los puntos ramificantes correspondientes a $t = 0$ se separan mientras que los que corresponden a $x = 0$ se empiezan a juntar hasta que se vuelven uno solo y luego desaparece cuando hemos salimos de VC . Y por lo tanto fuera de VC sólo tenemos 2 puntos de ramificación (los correspondientes a $t = 0$).

Algo similar pasa cuando volteamos a ver los segmentos s_b y s_d . Los puntos de ramificación se encuentran en la intersección de las hipérbolas $\frac{(t+1)^2 - x^2}{1/2} = 1$ y $xt = k$. La primera hipérbola no varía y la segunda es una hipérbola rotada $\pi/4$ que conforme k crece se separa. Tomando esto en cuenta notamos que una vez más cuando u está dentro de los valores singulares existen cuatro ramificaciones, sobre la singularidad son tres y mientras el punto está fuera de VC son dos los puntos de ramificación. Nótese que las curvas s_b y s_d cruzan los puntos críticos en $(-1/2, \pm \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{8}})$. Ver Figura 2.10. Podemos decir más acerca de los puntos de ramificación; haciendo referencia a la Figura 2.10, cuando $u = (-1/2, 0)$ (nuestro punto de referencia) podemos denotar a los cuatro puntos de ramificación por a, b, d y g . Lo que acabamos de mostrar es que siempre que nos movamos hacia un lado del “triángulo singular” un par de puntos de ramificación, diferentes para cada dirección, se juntan y desaparecen al cruzar la singularidad, mientras que los otros permanecen separados. Específicamente, cuando nos movemos sobre s_a los puntos a y g se acercan, sobre s_b los puntos b y g se juntan y en s_d d y g convergen.

Por último definimos las siguientes rectas,

$$\tilde{\star} = \{\text{línea que une el punto de ramificación } g \text{ con } \star\} \quad \text{para } \star = a, b, c.$$

Notamos que la imagen inversa de cada segmento en doble cubriente es cada ciclo evanescente. Por lo tanto, hemos mostrado que los ciclos evanescentes se intersectan transversalmente en un punto que es exactamente lo que buscábamos. Ver la Figura 2.11.

Observación.

- Podemos observar que de las cuatro deformaciones que hemos definido, las primeras tres cumplen que sobre los valores críticos $rk(D_p f) = 1$. En cuanto a la deformación de corrugación, esta es tal que su diferencial para $\alpha = 0$ se anula en el punto crítico. Este comportamiento hace que la naturaleza de estas deformaciones sea distinta. Trabajando con deformaciones de FC los puntos donde la diferencial del mapeo se desaparece corresponden a deformaciones alrededor de singularidades de Lefschetz.
- A pesar de que veremos que la deformación de corrugación no es estable, esta deformación es bastante importante. La deformación es el método común para deformar a una FQ en una FC pura. En

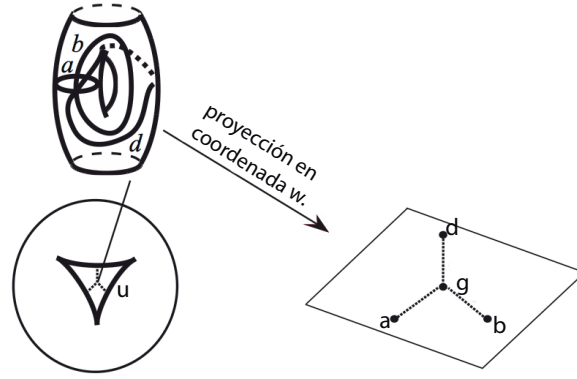


Figura 2.11: La fibra sobre un punto vista como un doble cubriente ramificado. Imagen de Lekili.

efecto, podemos deshacernos de todas las singularidades de Lefschetz usándola. Para realizar la acción contraria, esto es, para deformar una FC en una FQ tenemos que eliminar todas las cúspides de la fibración corrugada. Esto se logra usando una deformación llamada hundimiento que Lekili encontró. En este trabajo por razones de extensión no la describiremos pero este es uno de los resultados más interesantes y trascendentes de [6]. La deformación está descrita en la sección 2 de [6] como una cirugía a la fibración y también al final de la sección 3 descrita ya como una deformación. Para consultar más referencias se puede ver [16].

En lo que resta del trabajo enfocaremos nuestros esfuerzos en probar que las primeras 3 deformaciones que presentamos son genéricas en algún sentido.

2.2.5. Deformaciones genéricas de fibraciones corrugadas

En esta sección probamos que cualquier deformación de fibraciones corrugadas puede ser realizada con una sucesión finita de las deformaciones que acabamos de presentar. Específicamente estamos interesados en probar el siguiente teorema.

Teorema 18 (Deformaciones elementales). *Sean X una 4 variedad diferenciable, orientada y compacta y $F_s: [0, 1] \times X \rightarrow \Sigma$ una deformación de fibraciones corrugadas. Entonces es posible deformar a F_0 hasta F_1 aplicando a F_0 una sucesión de las cuatro deformaciones descritas antes e isotopías dentro de la clase de fibraciones corrugadas.*

Demostración. Observe que sólo estamos interesados en las vecindades de puntos críticos en X , ya que si no existen puntos críticos en una vecindad podemos tomar ahí la isotopía F_s restringida a esa vecindad. Por esto, prestamos atención a las vecindades alrededor de los puntos críticos de F_s . Para empezar notamos que nos podemos deshacer de todas las singularidades de Lefschetz que estén en la deformación. En efecto, sin pérdida de generalidad suponemos que F_0 y F_1 no contienen singularidades de Lefschetz. Ya que si los tuvieran entonces utilizamos el movimiento de corrugación para eliminarlas y nos fijamos en la deformación resultante. Ahora bien, las singularidades de Lefschetz y en general los puntos donde la diferencial de F_{s_0} se anula no son estables, entonces para perturbaciones tan pequeñas como queramos los mapeos perturbados ya no tendrán singularidades de Lefschetz o puntos con diferencial nula. Específicamente, el Teorema 14 nos dice que cualquier perturbación local genérica de una función será $(1, 1)$ -equivalente a alguno de los representantes de gérmenes en la lista, y ningún miembro de la lista es $(1, 1)$ -equivalente al modelo de una singularidad de Lefschetz. Así nos hemos deshecho de las singularidades de Lefschetz para todo $s \in [0, 1]$ y para todo $p \in X$. Esto es, hemos reducido el caso a cuando F_s es una deformación de fibraciones corrugadas

puras, es decir, F_s es una fibración corrugada para todos menos un número finito de los valores de s y además F_s no tiene puntos singulares de Lefschetz o puntos con diferencial nula para ningún s .

Por lo anterior y el teorema de la función inversa podemos asumir que alrededor de un punto crítico $p \in F_{s_0}$ con $s_0 \in [0, 1]$ existen cartas coordenadas tales que el mapeo está localmente dado para, $s \in [s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon]$, por:

$$\begin{aligned} F_s: \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t, x, y, z) &\mapsto (t, f_s(t, x, y, z)) \end{aligned}$$

con $f(0) = d_0 f_{s_0} = 0$.

Hemos reducido el problema al de encontrar que formas puede tomar el mapeo f_s , esto significa que debemos clasificar tales mapeos f_s . Aquí tenemos que detenernos para apreciar un punto importante. Tenemos que observar lo especial de la forma que tienen la función F_s . Está es una familia uniparamétrica de mapeos que van de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que está parametrizada por s . Y a su vez cada uno de estos mapeos es otra familia uniparamétrica de funciones, parametrizada en este caso por t , que van de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por: $f_{s_0, t_0}(x, y, z) = f_{s_0}(t_0, x, y, z)$. Por esto es necesario que al clasificar las funciones f_s utilicemos una noción de equivalencia de funciones que tome esto en cuenta. Esto se logra usando a las coordenadas s y t de una manera especial. Lo que necesitaremos es una noción de equivalencia que sólo permita realizar cambios de coordenadas tales que la nueva coordenada s no dependa de ninguna coordenada antigua t, x, y, z y que la nueva coordenada t no dependa de las antiguas x, y, z . Pero esto es exactamente la noción de la $(1, 1)$ -equivalencia. Y usando esta definición de equivalencia hemos calculado todos los desdoblamientos $(1, 1)$ -estables de gérmenes a los que el germen de f_s se puede reducir y de hecho las formas que f_s puede tomar con los Teoremas 13 y 14. Por lo tanto, el Teorema 14 indica que f_s es $(1, 1)$ -equivalente a sólo un h_i con $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Más aún, ya que F_s es una fibración corrugada para casi todo valor de s entonces f_s es $(1, 1)$ -equivalente a sólo un h_i con $i = 0, 1, 2, 3, 4$ tomando los signos positivos. Estas en efecto son simplemente las deformaciones que definimos y las singularidades de doblez y cúspide. $\square$

Bibliografía

- [1] S. Akbulut, C. Karakurt, *Every 4-manifold is BLF*, J. Gokova Geom. Topol. 2 (2008) 40-82.
- [2] D. Auroux y I. Smith, *Lefschetz pencils, branched covers and symplectic invariants, lectures given at the CIME summer school "Symplectic 4-manifolds and algebraic surfaces"*, Cetraro (Italy), 2003.
- [3] R. I. Baykur, *Existence of broken Lefschetz fibrations*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008) Art. ID rnn101, 15 pp.
- [4] S. Donaldson, I. Smith, *Lefschetz pencils and the canonical class for symplectic four-manifolds*, Topology 42 (2003) 743–785 MR1958528.
- [5] D. T. Gay, R. Kirby, *Constructing Lefschetz-type fibrations on four-manifolds*, Geom. Topol. 11 (2007) 2075–2115 MR2350472.
- [6] Y. Lekili, *Wrinkled fibrations on near-symplectic manifolds*, Geom. Topol. 13 (2009) 277–318 MR2469519 Appendix B by R I Baykur.
- [7] J. Mather, *Stability of C^∞ mapping III, Finitely determined map germs*, Publ Math IHES, 1968, 35: 127-156.
- [8] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.
- [9] B. Morin, *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965) 6503–6506 MR0190944.
- [10] T. Perutz, *Lagrangian matching invariants for fibred four-manifolds. I*, Geom. Topol. 11 (2007) 759–828 MR2302502.
- [11] A. Scorpan, *The wild world of four-manifolds*, American Mathematical Society, 2005.
- [12] C. H. Taubes, *Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4*, J. Differential Geom. 44 (1996) 818–893 MR1438194.
- [13] M. Usher, *The Gromov invariant and the Donaldson–Smith standard surface count*, Geom. Topol. 8 (2004) 565–610 MR2057774.
- [14] G. Wassermann, *Stability of unfoldings*, Springer Lecture Notes in Mathematics 393, Berlin: Springer-Verlag, 1974.
- [15] G. Wassermann, *Stability of unfoldings in space and time*, Acta Math. 135 (1975) 57–128 MR0433497.
- [16] J. Williams, *The h-principle for broken Lefschetz fibrations*, Geom. Topol. 14 (2010) 1015-1061 .