



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

# **POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **UNA EXTENSIÓN DEL JUEGO DE REPARTICIÓN DE FICHAS A MATROIDES REGULARES**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A**

**JESÚS PACHECO MENDOZA**

**DIRECTOR DE LA TESIS: DOCTOR CRIEL MERINO LÓPEZ**

**MÉXICO, D.F.**

**ENERO, 2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Durante el desarrollo de este trabajo muchas fueron las personas que me apoyaron para lograr su culminación. En primer lugar, quiero agradecer el apoyo que me brindó el Dr. Criel Merino López durante la dirección de este trabajo de tesis, por su paciencia durante su desarrollo, por compartirme sus conocimientos y su experiencia en esta área de las matemáticas.

A mis sinodales de tesis por sus valiosas sugerencias que me permitió mejorar este trabajo. También quiero agradecer a Marcelino Ramírez Ibáñez por compartir sus conocimientos de Látex y su experiencia sin el cual no hubiera sido posible avanzar en la escritura de la tesis.

Agradezco a mi universidad, la UNAM, por darme la oportunidad de superarme profesionalmente.

Finalmente, quiero agradecer a todos los profesores que tuve el honor de conocer durante mis cursos de maestría y que recibí de ellos sus conocimientos y su apoyo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. El polinomio de Tutte</b>	<b>5</b>
1.1. Matroides . . . . .	5
1.1.1. Conjuntos independientes . . . . .	5
1.1.2. Axiomas de rango . . . . .	7
1.1.3. Axiomas de circuitos . . . . .	9
1.1.4. Axiomas de bases . . . . .	11
1.2. Dualidad . . . . .	12
1.2.1. Menores . . . . .	13
1.3. Matroides regulares . . . . .	15
1.4. Polinomio de Tutte . . . . .	18
1.5. Ejemplos de polinomio de Tutte . . . . .	21
<b>2. El juego de repartición de fichas</b>	<b>25</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	25
2.1.1. El juego de Björner, Lovász y Shor . . . . .	25
2.1.2. El juego de Norman Biggs . . . . .	26
2.2. Juego de repartición de fichas . . . . .	27
2.3. Greedoide con repetición . . . . .	31
2.4. Configuraciones críticas del juego de repartición de fichas . . . . .	33
2.5. Función generadora . . . . .	35
2.6. El grupo crítico de una gráfica . . . . .	41
<b>3. Una extensión del juego</b>	<b>47</b>
3.1. Teoría de retículas . . . . .	47
3.2. El espacio de cocircuitos . . . . .	50
3.3. La retícula entera de cocircuitos . . . . .	52

3.4.	Sistemas de juego . . . . .	55
3.5.	Un proceso de repartición de fichas general . . . . .	60
3.6.	El proceso de repartición de fichas cónico . . . . .	63
3.6.1.	Grupo de las configuraciones críticas de un proceso de repartición de fichas . . . . .	67
3.7.	Un juego para matroides regulares . . . . .	68
3.8.	Conclusiones . . . . .	71
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>73</b>
4.1.	Un sistema de juego para el matroide regular $\mathbf{R}_{10}$ . . . . .	73
4.1.1.	Un proceso de repartición de fichas para el matroide regular $\mathbf{R}_{10}$ . . . . .	75
4.2.	Un sistema de juego para el matroide regular $M^*(K_{3,3})$ . . . . .	77
4.3.	Algunos resultados del juego cónico . . . . .	78
4.4.	Conclusiones . . . . .	83

# Introducción

El objetivo de esta tesis es mostrar una generalización del juego de repartición de fichas a matroides regulares de manera parcial, [20] y un intento de generalizar este juego de manera total. Para ello, la tesis se organizó de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 se define el concepto de matroide y se dedica una sección especial a los matroides regulares, ya que es la clase de matroide que se manejará en la tesis. Finalmente, se define el polinomio de Tutte tanto en el caso gráfico como en matroides y se muestran polinomios de Tutte de algunos matroides con los que se trabajan en el último capítulo de la tesis.

En el Capítulo 2, se muestra el juego de repartición de fichas en el caso gráfico y se reproduce la demostración de la conjetura de Norman Biggs de [17]. Este es el resultado que se intentó generalizar al caso de matroides regulares en el Capítulo 4. Para finalizar, se dedica la última sección a un grupo muy importante relacionado con el juego de repartición de fichas, el grupo crítico.

En el Capítulo 3 se muestra un intento parcial para generalizar el juego de repartición de fichas a matroides regulares que aparece en [20]. A este juego se le conoce como juego de repartición de fichas cónico. Para tal fin, en la primera sección se da una introducción a la teoría de retículas. Esto permitirá definir el juego del mismo modo que se hizo en el caso gráfico pero sin usar la noción de vértice.

Finalmente, en el Capítulo 4 se muestra un sistema de juego para los matroides regulares  $\mathbf{R}_{10}$  y  $M^*(K_{3,3})$ . En el primero se satisface la conjetura de Norman Biggs y en el segundo falla. También se prueba una proposición donde se ve la necesidad de una propiedad que caracteriza al juego de repartición de fichas cónico del Capítulo 3.



# Capítulo 1

## El polinomio de Tutte

El polinomio de Tutte es un polinomio en dos variables  $x, y$ , que tiene importantes evaluaciones en gráficas y matroides, tales como el polinomio cromático [9] y la función generadora de las configuraciones críticas [18], por mencionar algunas. En este capítulo daremos la definición y algunos ejemplos de polinomio de Tutte en gráficas y en matroides. Antes, introduciremos algunos conceptos básicos de matroides necesarios tanto para este capítulo como para el resto de este trabajo.

### 1.1. Matroides

Un matroide se puede caracterizar usando cualquiera de sus sistemas de axiomas (conjuntos independientes, bases, circuitos, función rango, etc),[21]. Aquí exhibiremos los axiomas de conjuntos independientes, circuitos y función rango. La exposición de los conceptos está basada en [21].

#### 1.1.1. Conjuntos independientes

**Definición 1.1.** *Un matroide es un par ordenado  $(E, \mathcal{I})$  donde  $E$  es un conjunto finito e  $\mathcal{I}$  es una colección de subconjuntos de  $E$  que satisfacen las siguientes propiedades:*

$$I1 \quad \emptyset \in \mathcal{I}$$

$$I2 \quad \text{Si } X \in \mathcal{I} \text{ y } Y \subseteq X \text{ entonces } Y \in \mathcal{I}$$

**I3** Si  $I_1$  e  $I_2$  están en  $\mathcal{I}$  y  $|I_1| < |I_2|$  entonces existe un elemento  $e$  de  $I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$

Los elementos de  $\mathcal{I}$  se llaman *conjuntos independientes* y cualquier subconjunto de  $E$  que no esté en  $\mathcal{I}$  se llama *dependiente*. El conjunto  $E$  se llama *conjunto base del matroide* y en ocasiones será denotado por  $E(M)$ .

**Definición 1.2.** Dos matroides  $M_1$  y  $M_2$  son isomorfos si existe una biyección  $\phi : E(M_1) \rightarrow E(M_2)$  tal que para todo  $X \subseteq E(M_1)$ , tenemos que  $X$  es independiente en  $M_1$  si y sólo si  $\phi(X)$  es independiente en  $E(M_2)$ .

**Ejemplo 1.1 (Matroide vectorial).** Sea  $A$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos como conjunto base a  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  y diremos que  $X \in \mathcal{I}$  si y sólo si las columnas etiquetadas por los elementos de  $X$  son linealmente independientes. Se puede verificar que  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide. Explícitamente tenemos que

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}\}$$

En general, si las columnas de una matriz  $A$  de  $r \times n$  son etiquetadas por los elementos de  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , entonces  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide llamado *matroide vectorial* o *matroide columna*, donde  $X \in \mathcal{I}$  si y sólo si las columnas etiquetadas por los elementos de  $X$  son linealmente independientes. Este tipo de matroides se denotan por  $M[A]$  o bien  $M(A)$ .

**Ejemplo 1.2 (Matroide gráfico).** Sea  $G$  una gráfica con  $E$  su conjunto de aristas. Diremos que  $X \in \mathcal{I}$  si y sólo si  $X$  es un bosque. Así,  $(E, \mathcal{I})$  es un matroide llamado *matroide de ciclos* y lo denotamos por  $M(G)$ . Si un matroide es isomorfo a un matroide de ciclos se le llama *matroide gráfico*.

Basándonos en la gráfica de la Figura 1.1 tenemos que  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  e

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}\}$$

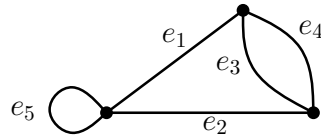
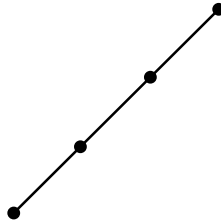


Figura 1.1: Gráfica del Ejemplo 1.2 y Ejemplo 1.4

**Ejemplo 1.3 (Matroide uniforme).** Dados  $r, n \in \mathbb{Z}$ , donde  $0 \leq r \leq n$ , definimos  $U_{r,n} = (E, \mathcal{I})$ , donde  $E$  es un conjunto de  $n$  elementos y  $X \in \mathcal{I}$  si y sólo si  $|X| \leq r$ . Es decir, un conjunto independiente es cualquier subconjunto de  $E$  de cardinalidad menor o igual que  $r$ . Entonces  $U_{r,n}$  es un matroide llamado *matroide uniforme*. En particular  $U_{2,4}$  es llamado la línea de 4 puntos y su representación geométrica se muestra en la Figura 1.2.

Figura 1.2: Representación geométrica de  $U_{2,4}$ 

### 1.1.2. Axiomas de rango

La función rango definida en matroides es similar a la función rango definida en espacios vectoriales. La definiremos a continuación para matroides.

**Definición 1.3.** La función rango de un matroide  $M = (E, \mathcal{I})$  es una función  $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  definido por

$$r(A) = \max\{|X| : X \subseteq A, X \in \mathcal{I}\}$$

para cualquier subconjunto  $A$  de  $E$

El rango de un matroide  $M$  es el rango del conjunto  $E$  y es denotado por  $r(M)$ .

**Proposición 1.1 (Axiomas de rango).** Una función  $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  es la función rango de un matroide sobre  $E$  si y sólo si para cualquier par de subconjuntos  $X, Y$  de  $E$  se cumple:

$$\mathbf{R1} \quad 0 \leq r(X) \leq |X|.$$

$$\mathbf{R2} \quad \text{Si } X \subseteq Y \text{ entonces } r(X) \leq r(Y)$$

$$\mathbf{R3} \quad r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$$

*Demostración.* Ver [21] □

Dada una gráfica  $G$ , consideremos el matroide gráfico  $M(G) = (E(G), \mathcal{I})$ , donde el conjunto base del matroide  $E(G)$ , es el conjunto de aristas de la gráfica  $G$  y  $V(G)$  es su conjunto de vértices. Para cualquier subconjunto  $A \subseteq E(G)$ , el rango de  $A$  en  $M(G)$  es:

$$r(A) = |V(G)| - \kappa(A)$$

donde  $\kappa(A)$  es el número de componentes en la subgráfica de  $G$  con conjunto de aristas  $A$ . Así el rango del matroide gráfico  $M(G)$  es

$$r(M) = |V(G)| - \kappa(G)$$

donde  $\kappa(G)$  es el número de componentes conexas de  $G$ .

Por lo tanto, si  $G$  es una gráfica conexa de  $n$  vértices, entonces

$$r(M(G)) = n - 1$$

**Ejemplo 1.4.** Sea  $M(G)$  el matroide gráfico que proviene de la gráfica de la Figura 1.1. Tomemos  $A = \{e_3, e_4, e_5\}$ . La subgráfica que se obtiene de  $G$  considerando solo las aristas de  $A$  se muestra en la siguiente Figura 1.3. Como se puede observar  $r(A) = |V(G)| - \kappa(A) = 3 - 2 = 1$  y además el rango del matroide es  $r(M) = 3 - 1 = 2$ .

En el caso de matroides vectoriales  $M[A]$ , la función rango coincide con la función rango definida en espacios vectoriales. Es decir, el rango de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores linealmente independientes.

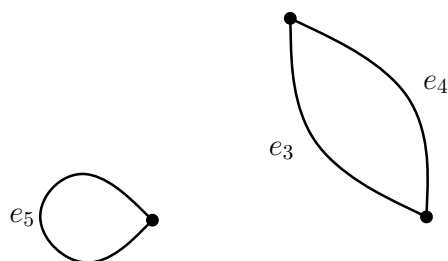


Figura 1.3: Subgráfica de la gráfica de la Figura 1.1

**Ejemplo 1.5.** Sea

$$B = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Considerando el matroide vectorial  $M(B)$ , tomemos  $A = \{e_1, e_3, e_4\}$ . Entonces  $r(A) = 2$ .

### 1.1.3. Axiomas de circuitos

Así como caracterizamos un matroide en términos de sus conjuntos independientes, también podemos caracterizarlo en términos de sus conjuntos dependientes minimales, o también llamados *circuitos*. Establecemos la definición formalmente.

**Definición 1.4.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. Un conjunto  $C \subseteq E$  es un *circuito* si es un conjunto dependiente minimal, es decir,  $C$  es un circuito si y sólo  $C$  es dependiente y  $C - e \in \mathcal{I}$  para todo  $e \in C$ .

De esta definición podemos ver que si  $C$  es un circuito, entonces  $r(C) = |C| - 1$ , ya que cada subconjunto propio de  $C$  es independiente. La siguiente proposición enumera los axiomas de circuitos que caracterizan a un matroide.

**Proposición 1.2 (Axiomas de circuitos).** Una colección de conjuntos  $\mathcal{C}$  es la colección de circuitos de un matroide si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

**C1**  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

**C2** Si  $C_1$  y  $C_2$  son miembros de  $\mathcal{C}$  y  $C_1 \subseteq C_2$ , entonces  $C_1 = C_2$ .

**C3** Si  $C_1$  y  $C_2$  son miembros distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_1 \cap C_2$ , entonces existe un miembro  $C_3$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$ .

*Demostración.* Ver [21]

□

Usaremos  $\mathcal{C}$  para denotar a la colección de circuitos del matroide  $M$ .

**Ejemplo 1.6.** En el caso del matroide uniforme  $U_{r,n}$ , tenemos que:

$$\mathcal{C}(U_{r,n}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r = n \\ \{X \subseteq E : |X| = r + 1\} & \text{si } r < n \end{cases}$$

En el caso del matroide  $U_{2,4}$ , los circuitos son todos los subconjuntos de cardinalidad 3.

Definiremos a continuación un tipo especial de circuitos. Esto permitirá calcular el polinomio de Tutte a matroides de la misma forma que se hizo con gráficas. Estos circuitos son de tamaño 1 y 2.

**Definición 1.5.** *Un elemento  $e$  de un matroide  $M$  es un lazo si y sólo si  $\{e\}$  es un circuito de  $M$ . Dos elementos  $e_1$  y  $e_2$  son paralelos en  $M$  si y sólo si  $\{e_1, e_2\}$  es un circuito en  $M$*

De la definición observamos que si  $e$  es un lazo, entonces  $r(\{e\}) = 0$  y si  $e_1$  y  $e_2$  son elementos en paralelo entonces  $r(\{e_1, e_2\}) = r(\{e_1\}) = r(\{e_2\}) = 1$ .

Cuando tenemos un matroide gráfico  $M(G)$ , los circuitos del matroide son los ciclos de la gráfica  $G$ .

**Ejemplo 1.7.** Consideremos el matroide gráfico  $M(G)$ , donde  $G$  es la gráfica de la Figura 1.4. Observamos que los circuitos del matroide son

$$\mathcal{C}(M(G)) = \{\{e_5\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}\}$$

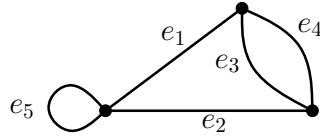


Figura 1.4: Gráfica del matroide del Ejemplo 1.7

### 1.1.4. Axiomas de bases

Así como en espacios vectoriales podemos definir una base, lo mismo sucede con un matroide.

**Definición 1.6.** Una base de un matroide  $M = (E, \mathcal{I})$  es un conjunto independiente maximal en  $M$ . Denotaremos por  $\mathcal{B}$  a la colección de bases de un matroide. Un conjunto  $X$  es generador en  $M$  si y sólo si contiene un base

Del mismo modo tenemos el siguiente resultado, [21].

**Lema 1.1.** Si  $B_1$  y  $B_2$  son bases de un matroide, entonces  $|B_1| = |B_2|$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|B_1| < |B_2|$ . Entonces como  $B_1$  y  $B_2$  son conjuntos independientes tenemos por **I3**, existe  $e \in B_2 - B_1$ , tal que  $B_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ , lo cual contradice la maximalidad de  $B_1$ . Por lo tanto,  $|B_1| \geq |B_2|$ . Del mismo modo obtenemos que  $|B_1| \leq |B_2|$ . Por lo tanto,  $|B_1| = |B_2|$ .  $\square$

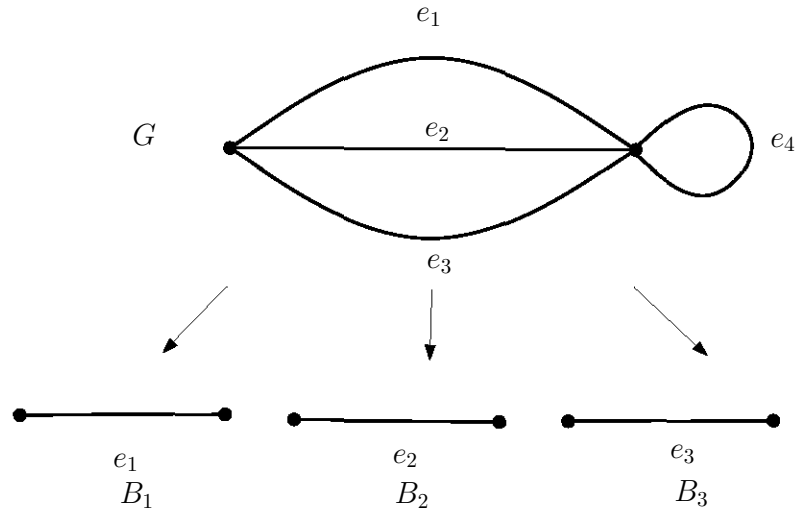
**Proposición 1.3.** Una colección  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $E$  es el conjunto de bases de un matroide sobre  $E$  si y sólo si satisfacen las siguientes condiciones:

**B1**  $\mathcal{B}$  es no vacío

**B1** Si  $B_1, B_2$  y  $x \in B_1 - B_2$ , entonces existe  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 \cup y) - x \in \mathcal{B}$

**Ejemplo 1.8.** En un matroide gráfico  $M(G)$ , donde  $G$  es una gráfica conexa, las bases corresponden a los árboles generadores de  $G$ . En la Figura 1.5, se muestra la gráfica  $G$  y sus tres bases  $B_1 = \{e_1\}$ ,  $B_2 = \{e_2\}$  y  $B_3 = \{e_3\}$ .

**Ejemplo 1.9.** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  sobre  $GF(3)$ . Se puede ver que las bases del matroide  $M(A)$  son todos los subconjuntos de cardinalidad dos de  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Por lo tanto,  $M(A) \cong U_{2,4}$ .

Figura 1.5: Bases del matroide gráfico  $M(G)$ 

## 1.2. Dualidad

Similar al caso de gráficas planas, existe el concepto de dualidad en matroides. Sabemos que una gráfica es plana si y sólo si tiene dual geométrico. La gráfica completa  $K_5$  y la gráfica bipartita  $K_{3,3}$ , no tienen duales geométricos. Este fenómeno no sucede en matroides, donde siempre se puede definir el dual de un matroide.

**Teorema 1.1.** Sea  $\mathcal{B}(M)$  el conjunto de bases de un matroide sobre  $E$ , entonces

$$\{E - B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$$

es el conjunto de bases de un matroide sobre  $E$ , llamado matroide dual de  $M$ .

*Demostración.* Ver [21] □

Al matroide dual de  $M$  lo denotamos por  $M^*$  y de la definición se ve que están relacionadas por  $(M^*)^* = M$ . Dado un matroide gráfico, por dualidad podemos definir un matroide llamado *cográfico*.

**Definición 1.7.** Un matroide  $M$  es *cográfico* si y sólo si  $M^*$  es gráfico.

Como se dijo al inicio, la dualidad en el caso de matroides gráfico está relacionado con el concepto de planaridad.

**Proposición 1.4.** Una gráfica es plana si y sólo si su matroide ciclo es cográfico.

*Demostración.* Ver [21] □

Se saben que los matroides duales,  $M^*(K_5)$  y  $M^*(K_{3,3})$  no son gráficos, ver [21, pag. 90], sin embargo son cográficos. Se enumeran a continuación algunas propiedades que se deducen de la definición de dualidad.

- a. Un subconjunto  $X \subseteq E$  es independiente en  $M^*$  si y sólo si  $E - X$  es generador en  $M$ .
- b. Un elemento  $x \in E$  es un lazo de  $M$  si y sólo si  $x$  pertenece a toda base de  $M^*$ .
- c. El rango de  $M^*$  es  $|E| - r(M)$ . De Aquí, se ve que  $r^*(M) + r(M) = |E|$ . La función rango de  $M^*$  está dada por

$$r^*(A) = |A| - r(E) + r(E - A)$$

para cualquier  $A \subseteq E$ .

A la función  $r^* : E \rightarrow \mathbb{Z}$  se le llama función corango. Una cobase de  $M$  es una base de  $M^*$ ; un cocircuito de  $M$  es un circuito de  $M^*$ . Si  $x$  es un lazo de  $M^*$  entonces  $x$  es un colazo o istmo de  $M$ .

### 1.2.1. Menores

Para definir un *menor* necesitamos definir dos operaciones en matroides: Borrado y contracción de elementos.

#### Borrado de elementos

Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y sea  $T \subset E$ . Tomemos

$$\mathcal{I}|T = \{I \subseteq T \mid I \in \mathcal{I}\}$$

Se puede verificar que  $(T, \mathcal{I}|T)$  es un matroide cuya colección de conjuntos independientes es  $\mathcal{I}|T$ . A este matroide se le conoce como *restricción* de  $M$

a  $T$  o el *borrado* de  $E - T$  de  $M$ . A este matroide lo denotaremos por  $M|T$  o  $M - (E - T)$ . Siguiendo esta notación denotaremos por  $M - X$  al matroide que se obtiene por el borrado de  $X$  de  $M$ .

En particular,  $M - e = (E - \{e\}, \mathcal{I}')$  donde

$$\mathcal{I}' = \{I \subseteq E - \{e\} | I \in \mathcal{I}\}$$

En el caso de matroides vectoriales  $M(A)$ , borrar un elemento  $e$  consiste en borrar la columna de  $A$  correspondiente al elemento  $e$ . Por ejemplo si  $e$  corresponde a la primera columna de  $A$ , entonces  $M - e = M(B)$ , es decir,  $B$  representa al matroide  $M - e$ .

$$A = \left( \begin{array}{c|c} a_1 & \\ \vdots & B \\ a_m & \end{array} \right)$$

### Contracción de elementos

El dual de la operación de borrado se le conoce como *contracción*. Formalmente tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.8.** Para un matroide  $M$  y  $T \subseteq E$ , definimos la *contracción de  $T$  en  $M$*  como:

$$M/T = (M^* - T)^*$$

$M/T$  es un matroide cuyo conjunto base es  $E - T$ . La siguiente proposición, [21], muestra la función rango y su colección de bases para este matroide.

**Proposición 1.5.** Si  $T \subseteq E$ , entonces para todo  $X \subseteq E - T$ :

1.  $r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T)$ .
2.  $\mathcal{B}(M/T) = \{B' \subseteq E - T | B' \cup B_T \in \mathcal{B}(M)\}$  donde  $B_T$  es una base fija arbitraria de  $M|T$ .

En particular, si  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide y  $e \in E$ , entonces tenemos los siguientes casos:

1. Si  $r_M(e) = 0$  ( $e$  es un lazo), entonces  $M/e = M - e$ .

2. Si  $r_M(e) = 1$  entonces definimos  $M/e = (E - e, \mathcal{I}'')$  donde

$$\mathcal{I}'' = \{I \subseteq E - e \mid I \cup e \in \mathcal{I}\}$$

En el caso de un matroide vectorial  $M(A)$ , si  $r(\{e\}) = 1$ , entonces realizando operaciones elementales, podemos suponer que

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & & \cdots & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & A' \end{array} \right)$$

donde la primera columna corresponde a  $e$ .

Entonces para  $X \subseteq E - \{e\}$ ,  $r_{M(A')}(X) = r_M(X \cup \{e\}) - 1$ . Por lo tanto,  $M/e = M(A')$ .

En general, para contraer un elemento en un matroide vectorial, se busca una entrada no cero en la columna correspondiente al elemento  $e$  y se pivotea sobre esa entrada. Posteriormente se elimina la columna y renglón correspondiente al elemento pivote.

**Definición 1.9 (Menor).** *Cualquier matroide  $N$  que puede ser obtenido de un matroide  $M$  por alguna sucesión de contracciones y borrados es llamado un menor de  $M$ .*

Se puede probar que la operación de contracción y borrado conmutan, (ver [21]):

$$(M - X)/Y = (M/Y) - X$$

**Ejemplo 1.10.** En el caso de un matroide gráfico  $M(G)$  con conjunto de aristas  $E(G)$ , borrar un elemento  $e \in E(G)$  corresponde a borrar esa arista de la gráfica y la contracción de una arista  $e$  en  $M(G)$  que no es lazo, corresponde a contraer la arista en  $G$ .

### 1.3. Matroides regulares

Los matroides regulares son los matroides que manejaremos en este trabajo. Por lo que daremos una caracterización de ellos en términos de un tipo especial de matriz llamada *matriz totalmente unimodular*.

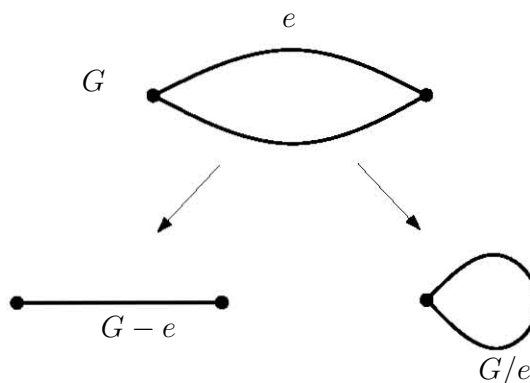


Figura 1.6: Ejemplo de borrado y contracción de  $e$

**Definición 1.10.** Sea  $M$  un matroide.

1.  $M$  es representable sobre un campo  $\mathbb{F}$  si  $M$  es isomorfo a un matroide vectorial del alguna matriz  $A$  sobre un campo  $\mathbb{F}$ , es decir,  $M \cong M[A]$ .
2.  $M$  es binario si  $M$  es representable sobre  $GF(2)$ .
3.  $M$  es ternario si  $M$  es representable sobre  $GF(3)$ .
4.  $M$  es un matroide regular si  $M$  es representable sobre todo campo.

**Definición 1.11 (Matriz débilmente unimodular).** Una matriz  $B$  de  $r \times n$  se dice que es unimodular (o débilmente unimodular) si todas sus submatrices completas (es decir, cualquier submatriz de  $r \times r$ ) tiene determinante 0, +1 o -1.

**Definición 1.12 (Matriz Totalmente Unimodular).** Una matriz  $N$  se dice que es totalmente unimodular si toda submatriz cuadrada de  $N$  tiene determinante 0, +1 o -1.

Por lo tanto, de la definición se observa que las entradas de una matriz totalmente unimodular deben ser 0 o  $\pm 1$ .

**Ejemplo 1.11.** Se puede verificar fácilmente que la siguiente matriz es totalmente unimodular.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema debido a Tutte proporciona dos caracterizaciones de un matroide regular. Una de ellas dice que un matroide regular es representable sobre  $\mathbb{R}$  por una matriz totalmente unimodular.

**Teorema 1.2** (Tutte). Para un matroide  $M$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $M$  es regular.
2.  $M$  es binario y ternario.
3. Existe una matriz totalmente unimodular  $A$  tal que  $M = M_{\mathbb{R}}(A)$ .

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  y sea  $M(A)$  el matroide vectorial de  $A$ . Se sabe (ver [21]), que por medio de operaciones elementales por renglones, la matriz  $A$  se puede reducir a una matriz de la forma  $[I_r|D]$ , donde  $I_r$  es la matriz identidad y  $D$  es una matriz de  $r \times n - r$ . Es claro en este caso que  $r(M) = r$ . A la matriz  $[I_r|D]$  se le llama *representación matricial estándar del matroide  $M$* .

Entonces por el Teorema 1.2, tenemos que un matroide regular tiene una representación totalmente unimodular de la forma  $[I_r|D]$ .

El siguiente teorema aparece en [21, pag. 81] y nos dice cómo es la representación matricial del dual de un matroide vectorial.

**Teorema 1.3.** Si  $M$  es el matroide vectorial de  $[I_r|D]$ , entonces  $M^*$  es el matroide vectorial de  $[-D^T|I_{n-r}]$ .

**Proposición 1.6.** El dual de un matroide regular es también regular.

*Demostración.* Ver [21]

□

Por lo tanto, si  $M$  es un matroide regular con representación totalmente unimodular  $[I_r|D]$ , entonces el matroide dual  $M^*$  es regular y tiene la representación totalmente unimodular  $[-D^T|I_{n-r}]$ .

**Proposición 1.7.** Cualquier menor de un matroide regular es también regular.

*Demostración.* Ver [21]

□

## 1.4. Polinomio de Tutte

Un invariante de isomorfismo de matroides es una función  $f$  sobre la clase de todos los matroides tales que:

$$\text{si } M \cong N \text{ entonces } f(M) = f(N) \quad (1.1)$$

Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. Para cada elemento  $e \in E$ ,

$$f(M) = f(M - e) + f(M/e) \text{ si } e \text{ no es un lazo ni puente} \quad (1.2)$$

$$f(M) = f(M(e))f(M - e) \text{ en cualquier otro caso} \quad (1.3)$$

**Definición 1.13.** *Sea  $H$  una clase de matroides cerrado bajo isomorfismo y bajo la operación de menores. Si  $f$  es una función sobre  $H$  que satisface las ecuaciones 1.1, 1.2 y 1.3 entonces  $f$  es llamado un invariante de Tutte-Grothendieck o un  $T$ - $G$  invariante.*

Se puede dar una definición más general. Sean  $a$  y  $b$  dos números fijos no ceros tales que

$$f(M) = af(M - e) + bf(M/e) \text{ siempre que } e \text{ no sea un lazo ni un puente} \quad (1.4)$$

Los invariantes que satisfacen las ecuaciones 1.3 y 1.4 se llaman  $T - G$  invariantes generalizados.

**Definición 1.14.** *Sea  $(M, E)$  un matroide. Definimos el polinomio de Tutte de  $M$  como*

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subseteq E(M)} (x - 1)^{r(E) - r(A)} (y - 1)^{|A| - r(A)}$$

Se ve claramente que  $T(M; 1, 1)$  es el número de bases del matroides.

**Proposición 1.8.**  $T(M; x, y) = T(M^*; y, x)$

*Demostración.* Sabemos que  $r^*(A) = |A| - r(E) + r(E - A)$  y que  $r^*(E) +$

$r(E) = |E|$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
T(M^*; y, x) &= \sum_{A \subseteq E} (y-1)^{r^*(E)-r^*(A)} (x-1)^{|A|-r^*(A)} \\
&= \sum_{A \subseteq E} (y-1)^{|E-A|-r(E-A)} (x-1)^{r(E)-r(E-A)} \\
&= \sum_{B \subseteq E} (y-1)^{|B|-r(B)} (x-1)^{r(E)-r(B)} \\
&= \sum_{B \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(B)} (y-1)^{|B|-r(B)} \\
&= T(M; x, y)
\end{aligned}$$

□

En el caso de una gráfica, el polinomio de Tutte,  $T(G; x, y)$  se puede definir de manera recursiva usando contracción y borrado de aristas.

**Definición 1.15.** *Sea  $G$  una gráfica y sea  $T(G; x, y)$  su polinomio de Tutte.*

1. Si  $G$  no tiene aristas, entonces  $T(G; x, y) = 1$
2. Si  $e$  es un puente, entonces  $T(G; x, y) = xT(G/e; x, y)$
3. Si  $e$  es un lazo, entonces  $T(G; x, y) = yT(G - e; x, y)$
4.  $T(G; x, y) = T(G - e; x, y) + T(G/e; x, y)$  si  $e$  no es ni un puente ni un lazo

**Ejemplo 1.12.** Sea  $I_2$  la gráfica de dos vértices unidos por dos aristas (ver Figura 1.6). De la figura se puede ver que  $T(I_2; x, y) = x + y$ .

**Ejemplo 1.13.** Sea  $I_3$  la gráfica de dos vértices unidos por tres aristas. La gráfica se muestra en la Figura 1.7. Para cualquier  $e$  tenemos que  $I_3 - e = I_2$  y  $I_3/e$  es una gráfica con dos lazos. Así

$$T(I_3; x, y) = T(I_2; x, y) + y^2 = x + y + y^2$$

.

En general se tiene la siguiente proposición.

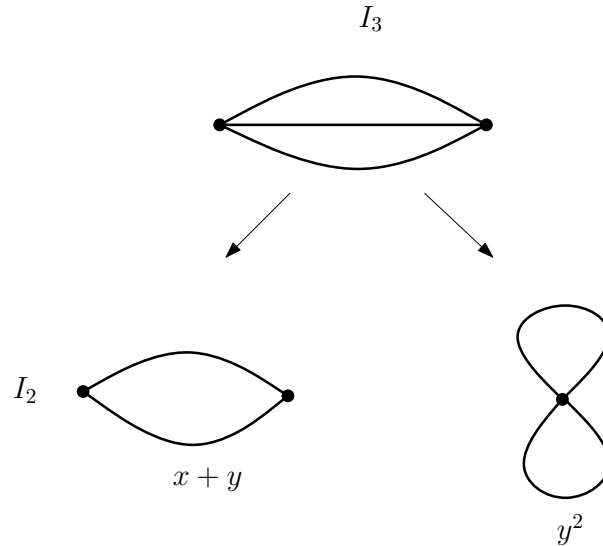


Figura 1.7: Cálculo del polinomio de Tutte de  $I_3$  de manera recursiva

**Proposición 1.9.** Sea  $I_k$  la gráfica de dos vértices unidos por  $k$  aristas (Figura 1.8). Entonces

$$T(I_k; x, y) = x + y + y^2 + \cdots + y^{k-1}$$

*Demostración.* Aplicaremos inducción sobre  $k$ , el número de aristas. Si  $k = 1$ , entonces  $I_1$  es un puente, así,  $T(I_1; x, y) = x$ .

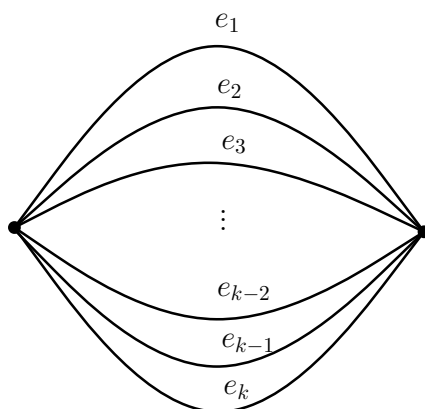
Supongamos que  $T(I_k; x, y) = x + y + y^2 + \cdots + y^{k-1}$ . Consideremos ahora  $I_{k+1}$ . Como observamos en el ejemplo anterior, para cualquier  $e, I_{k+1} - e = I_k$  y que  $I_{k+1}/e$  es una gráfica de  $k$  lazos. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} T(I_{k+1}; x, y) &= T(I_k; x, y) + y^k \\ &= x + y + y^2 + \cdots + y^{k-1} + y^k \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es conocido como *Teorema de la Receta* y afirma que todo T-G invariante  $f$  es una evaluación del polinomio de Tutte tales que  $f(I) = x$  y  $f(L) = y$ , donde  $I$  es un puente y  $L$  es un lazo.

**Teorema 1.4 (Teorema de la Receta).** Sea  $H$  una clase de matroides cerrado bajo la operación de menores y sean  $a$  y  $b$  elementos no ceros de un

Figura 1.8: Gráfica  $I_k$ 

campo  $\mathbb{F}$ . Entonces existe una única función  $f$  de  $H$  en el anillo de polinomios  $\mathbb{F}[x, y]$  que satisfacen las ecuaciones 1.3 y 1.4 y

$$f(I; x, y) = x \text{ y } f(L; x, y) = y \quad (1.5)$$

donde  $I$  es un matroide que consiste de un solo puente y  $L$  es un matroide que consiste de un solo lazo. Además, esta función está dada por

$$f(M; x, y) = a^{|E|-r(E)} b^{r(E)} T(M; \frac{x}{b}, \frac{y}{a}) \quad (1.6)$$

□

## 1.5. Ejemplos de polinomio de Tutte

El Teorema de la Receta, (Teorema 1.4), es de mucha utilidad como se muestra en el siguiente ejemplo tomado de [9]. Se describe aquí sólo para ejemplificar el teorema.

**Ejemplo 1.14 (Orientaciones acíclicas).** Una orientación acíclica de una gráfica  $G$  es una orientación de  $G$  en el que no hay ciclos dirigidos. Sea  $A(G)$  el número de orientaciones acíclicas de  $G$ .

Sea  $e$  una arista de  $G$  que no es lazo ni puente y sean  $u$  y  $v$  los extremos de  $e$ . Particionamos al conjunto  $A$  de orientaciones acíclicas de  $G - e$  en dos subconjuntos  $A_1$  y  $A_2$  donde  $A_1$  consiste de aquellos miembros  $\theta$  de  $A$  para

los cuales  $(G - e)_\theta$  contiene una trayectoria dirigida de  $u$  a  $v$  o  $v$  a  $u$ . Ahora Si  $\theta \in A_1$ , entonces  $(G - e)_\theta$  no puede contener a la vez una trayectoria dirigida de  $u$  a  $v$  y una trayectoria dirigida de  $v$  a  $u$ , ya que lo contrario  $(G - e)_\theta$  tendría un ciclo dirigido.

Por lo tanto, para cada orientación  $\theta$  en  $A_1$ , hay exactamente una orientación de  $e$  que extendera  $\theta$  a una orientación acíclica de  $G$ .

Ahora, si  $\theta \in A_2$ , entonces cada una de las dos orientaciones de  $e$  extiende a  $\theta$  a una orientación acíclica de  $G$ . Puesto que cada orientación acíclica de  $G$  puede ser obtenida exclusivamente de un miembro de  $A$  mediante la asignación de una orientación  $e$ , entonces tenemos que

$$A(G) = |A_1| + 2|A_2|$$

Por otro lado, tenemos que  $A(G - e) = |A_1| + |A_2|$  y  $A(G/e) = |A_2|$ .

Por lo tanto, si  $e$  no es lazo ni puente, entonces

$$A(G) = A(G - e) + A(G/e)$$

Si  $e$  es un puente de  $G$ , entonces  $A(G) = 2A(G - e)$  siempre y cuando  $G$  no consiste de una sola arista. Si  $G$  es una sola arista, entonces  $A(G) = 2$ .

Es claro que si  $G$  tiene un lazo o  $G$  consiste de un sólo lazo, entonces  $A(G) = 0$ .

En resumen, tenemos que:

$$\begin{cases} A(G) = A(G - e) + A(G/e) & \text{si } e \text{ no es lazo ni puente} \\ A(G) = 2A(G - e) & \text{si } e \text{ es un puente} \\ A(G) = 2 & \text{si } G \text{ es un puente} \\ A(G) = 0 & \text{si } G \text{ es un lazo} \end{cases}$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.4 tenemos:

$$A(G) = T(G; 2, 0)$$

**Ejemplo 1.15.** Se muestra en la Figura 1.9 el cálculo del polinomio de Tutte de la gráfica  $K_4$  menos una arista aplicando la definición recursiva. Sumando los monomios que aparecen abajo de la figura obtenemos que

$$T(G; x, y) = x^3 + 2x^2 + x + 2xy + y + y^2$$

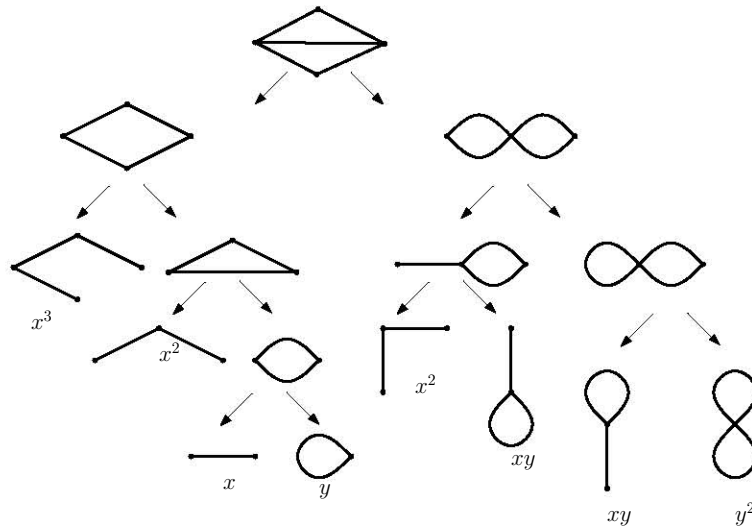


Figura 1.9: Cálculo del polinomio de Tutte de manera recursiva

El polinomio de Tutte de los matroides regulares representados por matrices totalmente unimodulares, se pueden calcular de manera recursiva como se hizo con gráficas [13] usando las operaciones de borrado y contracción de elementos definidas en la página 14 y 15.

**Ejemplo 1.16.** La siguiente matriz representa al matroide  $M^*(K_{3,3})$ , es decir, representa al matroide dual de  $K_{3,3}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El polinomio de Tutte de este matroide es:

$$T(M^*(K_{3,3}); x, y) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x + 6x^2y + 15xy + 9xy^2 + 5y + 11y^2 + 10y^3 + 4y^4 + y^5$$

**Ejemplo 1.17.** El matroide  $M^*(K_5)$  se representa por la siguiente matriz

totalmente unimodular

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Su polinomio de Tutte es:

$$T(M^*(K_5); x, y) = x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 15x^3 + 15x^2 + 6x + 5x^3y + 15x^2y + 20xy + 10xy^2 + 6y + 11y^2 + 6y^3 + y^4$$

**Ejemplo 1.18.** La siguiente matriz representa a un matroide regular llamado  $R_{10}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Su polinomio de Tutte es:

$$T(R_{10}; x, y) = x^5 + 5x^4 + 15x^3 + 20x^2 + 10x + 15x^2y + 30xy + 15xy^2 + 10y + 20y^2 + 15y^3 + 5y^4 + y^5$$

# Capítulo 2

## El juego de repartición de fichas

El juego de repartición de fichas tiene sus orígenes en 1986, cuando Spencer estudiaba el siguiente problema: Dado  $k \in \mathbb{N}$  y  $n$  vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  en  $\mathbb{R}^m$  con  $\|v_i\|_\infty \leq 1$  para  $0 \leq i \leq n$ , ¿existirán  $e_1, e_2, \dots, e_n$  con  $e_i \in \{-1, 1\}$  para  $0 \leq i \leq n$  tal que  $\|\sum_{i=1}^n e_i v_i\|_\infty \leq kn^{\frac{1}{2}}$ ? Su respuesta usa un juego de balance. Se tiene una pila de  $N$  fichas en el centro de una trayectoria grande, en cada movimiento se toman  $\lceil \frac{N}{2} \rceil$  fichas a la derecha y  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  a la izquierda. El juego continúa con estas dos nuevas pilas y así sucesivamente.

En este capítulo expondremos algunos resultados relacionados con el juego de repartición de fichas para gráficas. La versión de juego es la de Norman Biggs, pero permitiremos que las gráficas tengan lazos y aristas paralelas. También exhibiremos la relación de la función generadora de las configuraciones críticas con el polinomio de Tutte. Esta es la conjetura de Norman Biggs y que fue demostrada en [18]. Finalmente, estudiaremos el grupo crítico de una gráfica, cuya extensión será analizada en el siguiente capítulo. La mayor parte de este capítulo está basado en [17].

### 2.1. Antecedentes

#### 2.1.1. El juego de Björner, Lovász y Shor

Björner, Lovász y Shor generalizaron el juego de balance de Spencer para gráficas simples. Ésta consiste en lo siguiente: Se colocan cierta cantidad de fichas en cada vértice de una gráfica simple  $G$ ; un vértice está *listo* si tiene una cantidad de fichas mayor o igual a su grado. Cuando un vértice está *listo*

se puede disparar y el resultado es que se distribuye una ficha a cada uno de sus vecinos. Si una vez disparado el vértice existe otro que está *listo* repetimos el proceso de manera similar.

A este juego se le llama *juego de repartición de fichas*. Ellos se interesaron en la distribución final de fichas después de una sucesión de movimientos que siguieran las reglas y en la duración del proceso.

Decimos que un juego es *legal* si la sucesión de movimientos siguen las reglas del juego. La regla del juego es : *si el vértice  $v$  está listo, entonces dispara  $v$ .*

Se enuncian a continuación la generalización a multigráficas de algunos teoremas que se encuentran en [5].

**Teorema 2.1** (Björner, Lovász y Shor). Dada una multigráfica conexa  $G$  y una distribución inicial de fichas, o cada juego legal puede ser continuado indefinidamente o cada juego legal termina después del mismo número de movimientos con la misma posición final. El número de veces que un vértice es disparado es el mismo en cada juego legal.

**Teorema 2.2** (Björner, Lovász y Shor). Dada una multigráfica y una distribución inicial de  $N$  chips:

1. Si  $N > 2|E(G)| - |V(G)|$ , entonces el juego es infinito.
2. Si  $|E(G)| \leq N \leq 2|E(G)| - |V(G)|$ , entonces existe una configuración inicial que termina después de un número finito de disparos y también una que continúa indefinidamente.
3. Si  $N < |E(G)|$ , entonces el juego es finito.

### 2.1.2. El juego de Norman Biggs

Norman Biggs ideó una nueva versión relacionada con el juego de repartición de fichas de Björner, Lovász y Shor. En este caso también se tiene una gráfica y se asignan fichas a los vértices excepto a un vértice especial al que se le llama  $q$ .

El vértice  $q$  tiene un carga negativa de fichas y es igual al negativo de la cantidad total de fichas en la gráfica. La regla de este nuevo juego es: *el vértice  $q$  se dispara sólo cuando ningún otro vértice está listo*. A este juego lo llamó *juego del dólar* porque se usaron dólares en lugar de fichas, sin embargo, nosotros llamaremos a esta versión del juego *juego de repartición de fichas* y será nuestro objeto de estudio.

## 2.2. Juego de repartición de fichas

Daremos algunas definiciones previas a fin de que esta versión de juego se pueda definir con lazos y aristas paralelas presentes en la gráfica. Por lo que cada vez que usemos el término gráfica asumiremos lazos y aristas paralelas, sin necesidad de usar el término “multigráfica”.

**Definición 2.1.** Sea  $G$  una gráfica y denotemos por  $V(G)$  al conjunto de vértices de  $G$ . Llamaremos  $\text{indeg}(v)$  a dos veces el número de lazos en  $v$  y por  $\text{exdeg}(v)$  al número de aristas que son incidentes en  $v$  pero que no son lazos. Por lo tanto, tenemos que

$$\text{deg}(v) = \text{indeg}(v) + \text{exdeg}(v)$$

donde  $\text{deg}(v)$  denota al grado del vértice  $v$ .

**Definición 2.2 (Configuración).** Sea  $G$  una gráfica y  $q \in V(G)$ .

1. Una configuración  $\theta$  es una función  $\theta : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  donde  $\theta(v) \geq 0$  para todo  $v \neq q$  y  $\theta(q) = -\sum_{v \neq q} \theta(v)$ .
2. Un vértice  $v \neq q$  está listo si  $\theta(v) \geq \text{grado}(v)$  y el vértice  $q$  está listo si cualquier otro vértice no lo está.

Dada una configuración  $\theta$  y un vértice  $w$  listo, al disparar  $w$  obtenemos la nueva configuración  $\theta'$

$$\theta'(v) = \begin{cases} \theta(v) + \nu(v, w) & \text{si } v \neq w \\ \theta(w) - \text{exdeg}(w) & \text{si } v = w \end{cases}$$

Es decir, al disparar el vértice  $w$  se distribuye a cada vecino  $v$  de  $w$  tantas fichas como aristas hay entre  $v$  y  $w$ . Se puede notar en la Figura 2.1 que la existencia de lazos no afecta en la distribución de fichas.

Las reglas de disparo se pueden expresar por medio de una matriz llamada *Matriz de Laplace* de una gráfica, la cual definimos a continuación.

**Definición 2.3.** Para una gráfica  $G$ , su matriz de Laplace  $Q$  se define como la matriz de  $|V(G)| \times |V(G)|$ , cuyas filas y columnas son etiquetadas por los vértices de  $G$  y además:

$$Q_{v,w} = \begin{cases} -\nu(v, w) & \text{si } v \neq w \\ \text{exdeg}(w) & \text{si } v = w \end{cases}$$

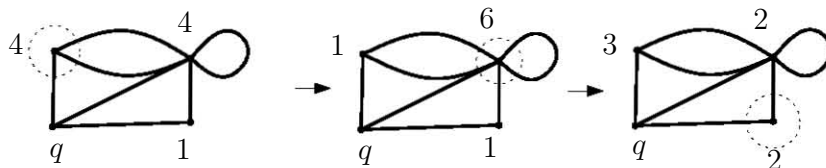


Figura 2.1: Ejemplo de disparo en el juego de repartición de fichas

Una configuración  $\theta$  la podemos considerar como un vector de  $\mathbb{Z}^{|V|}$  indexada por sus vértices. Así, tenemos que disparar el vértice  $w$  equivale a restar de  $\theta$  la columna de  $Q$  correspondiente al vértice  $w$ .

La nueva configuración  $\theta'$  que se obtiene al disparar  $w$  es  $\theta' = \theta - Qe_w$ , donde  $e_w$  es un vector que tiene un 1 en la posición  $w$  y cero en las demás posiciones.

**Ejemplo 2.1.** La matriz de Laplace de la gráfica de la Figura 2.1 es

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por comodidad usaremos vectores filas. Así, en la gráfica tenemos la configuración inicial  $\theta = (4, 4, 1, -9)$ . Al disparar el primer vértice, tenemos

$$\theta' = (4, 4, 1, -9) - Qe_1 = (4, 4, 1, -9) - (3, -2, 0, -1) = (1, 6, 1, -8)$$

**Definición 2.4 (Disparo legal).** Una sucesión legal o un disparo legal para una configuración  $\theta = \theta_1$  es una sucesión  $\sigma$  de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ , tal que  $v_1$  está listo en  $\theta_1$  y en cada momento  $i$ ,  $v_i$  está listo en  $\theta_i$ , donde  $\theta_i$  se obtiene de  $\theta_{i-1}$  al disparar el vértice  $v_{i-1}$ .

Usaremos la notación  $\theta \rightarrow \theta'$  cuando de una configuración  $\theta$  llegamos a otra configuración  $\theta'$  por medio de un disparo legal. Ahora, definimos tres tipos de configuraciones que serán de importancia en el análisis del juego de repartición de fichas.

**Definición 2.5.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica.

1. Una configuración  $\theta$  es estable si para cada vértice  $v \neq q$ , se tiene que  $\theta(v) < \deg(v)$ . Es decir, en una configuración estable el único vértice listo es  $q$ .

2. Supongamos que la gráfica  $G$  no consiste solamente de lazos. Dada una configuración  $\theta$ , si después de un disparo legal de longitud  $k \geq 1$  llegamos a la misma configuración  $\theta$ , decimos que  $\theta$  es una configuración recurrente.
3. Una configuración crítica es una configuración que es estable y recurrente a la vez.

**Ejemplo 2.2.** En la Figura 2.2, se muestra la gráfica completa  $K_3$  con una configuración inicial  $\theta = (1, 1, -2)$ . Esta configuración es estable pues el vértice  $q$  es el único que se puede disparar y además la configuración  $\theta$  es recurrente pues al realizar la sucesión de tres disparos obtenemos la configuración inicial. Por lo tanto, la configuración  $\theta = (1, 1, -2)$  es crítica.

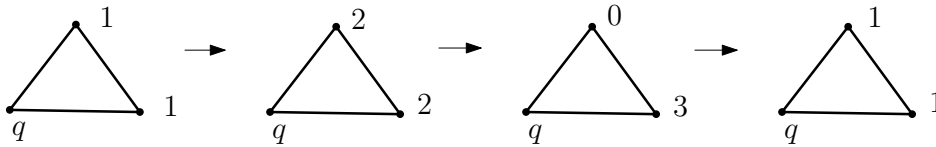


Figura 2.2: Ejemplo de configuración crítica y sucesiones de disparos

El siguiente teorema garantiza que dada cualquier configuración inicial siempre es posible llegar a una configuración crítica por medio de un disparo legal.

**Teorema 2.3.** Dada una gráfica conexa  $G$  y una configuración inicial  $\theta$ , existe un disparo legal que produce una configuración crítica.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa y  $\theta$  una configuración inicial. Comenzamos disparando todos los vértices que sigan las reglas del juego. Probaremos primero que se puede alcanzar una configuración estable, es decir, que en algún momento tenemos que disparar el vértice  $q$ .

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que los vértices de  $V(G) - \{q\}$  se pueden disparar un número infinito de veces sin disparar  $q$ .

Entonces existe un vértice  $w$  que es disparado un número infinito de veces. Dado que solo hay un número finito de fichas, entonces los vecinos de  $w$  también son disparados un número infinito de veces. Como  $G$  es conexa, entonces un vecino de  $q$  también es disparado un número infinito de veces. Esto

significa que hay una pérdida infinita de fichas, lo cual es una contradicción ya que el número de fichas es finito.

Por lo tanto, en algún momento tenemos que disparar  $q$  y llegamos así a una configuración estable.

Ahora, podemos disparar tantas veces  $q$  como sea necesario y comenzar otra vez hasta que alcancemos otra configuración estable y así sucesivamente. Pero el número de configuraciones estables es finito, por lo tanto en algún momento tenemos que repetir una. Sea  $\theta'$  la configuración estable que se repite por primera vez.

Entonces, el disparo legal desde  $\theta$  hasta la primera vez que se obtiene  $\theta'$ , satisface el enunciado del teorema.  $\square$

**Ejemplo 2.3.** En la Figura 2.3, tenemos la configuración inicial  $(4, 3, 5, -12)$ . Supondremos que los vértices están en el orden  $(v_1, v_2, v_3, q)$ . Esta configuración no es estable porque podemos disparar el vértice  $v_1$  o  $v_3$ . Después de realizar 6 disparos obtenemos la configuración  $(2, 1, 3, -6)$  la cual es estable, y además es recurrente pues al realizar 4 disparos adicionales se obtiene nuevamente.

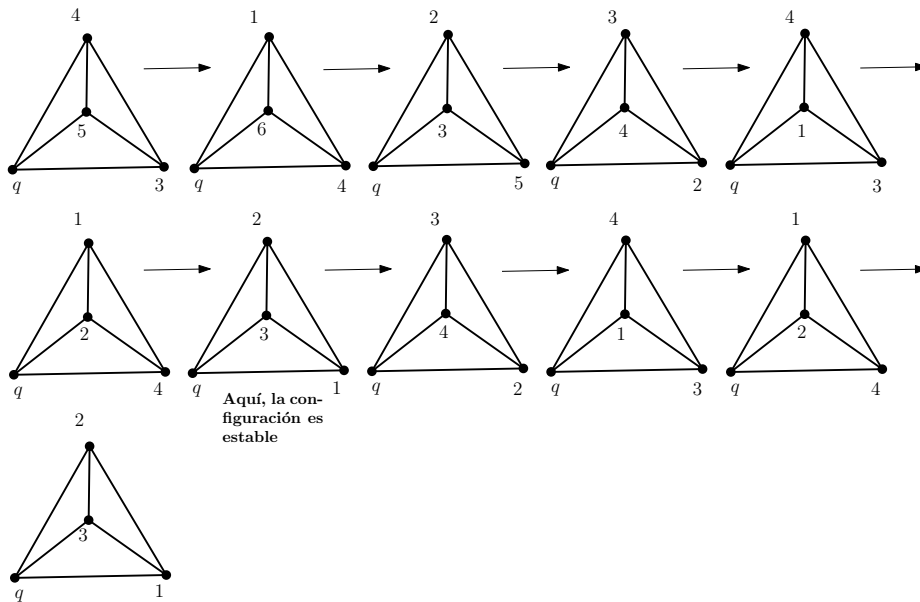


Figura 2.3: Configuración crítica obtenida desde una inicial cualquiera

## 2.3. Greedoide con repetición

Un greedoide se define como una colección de conjuntos ordenados que satisfacen una versión de los axiomas de matroides donde el orden de los conjuntos es importante. Los greedoide con repetición fueron introducidos para permitir que estos conjuntos ordenados tengan repetición de elementos. Daremos en seguida algo de terminología nueva.

**Definición 2.6.** Sea  $E$  un conjunto de cardinalidad  $n$ .

1. Una palabra sobre  $E$  es cualquier sucesión finita de elementos. Denotamos al conjunto de todas las posibles palabras por  $E^*$ .
2. Un lenguaje  $\mathcal{L}$  sobre  $E$  es cualquier subconjunto no vacío de  $E^*$ . Una subpalabra  $v$  de una palabra  $w$  es cualquier subsucesión de  $w$ . Para una palabra  $w$ , denotamos por  $|w|$  la longitud de  $w$  y por  $[w]$  su puntaje, esto es, el vector en  $\mathbb{Z}^n$  el cual es definido por

$$[w]_i = k \text{ si } i \in E \text{ aparece } k \text{ veces en } w$$

Describiremos algunas propiedades que nos permitirán estudiar cierto lenguaje que surge cuando consideramos los disparos legales que nos llevan a una configuración crítica en el juego de repartición de fichas.

**Definición 2.7.** 1. Un lenguaje  $\mathcal{L}$  es izquierdo hereditario si siempre que  $w$  pertenece a  $\mathcal{L}$ , entonces cualquier prefijo de  $w$  pertenece a  $\mathcal{L}$ .

2. El lenguaje  $\mathcal{L}$  es localmente libre si se cumple lo siguiente: Sea  $w \in \mathcal{L}$  y  $x \neq y$  dos elementos de  $E$  tal que  $wx$  y  $wy$  pertenecen a  $\mathcal{L}$  entonces  $wxy$  también pertenece a  $\mathcal{L}$
3. Se dice que el lenguaje  $\mathcal{L}$  es permutable si siempre que  $w$  y  $w'$  sean dos palabras en  $\mathcal{L}$  tal que  $[w] = [w']$  y  $wx \in \mathcal{L}$  para algún  $x \in E$ , entonces se tiene que  $w'x \in \mathcal{L}$

Estas tres propiedades implican que un lenguaje tenga la siguiente propiedad llamada *Propiedad de Intercambio Fuerte*, ST:

**ST** Si  $w$  y  $w'$  pertenecen a  $\mathcal{L}$ , entonces  $w$  contiene una subpalabra  $v$  tal que  $w'v \in \mathcal{L}$  y  $[w'v] = [w] \vee [w']$ , donde para dos vectores  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{Z}^n$ ,  $[a] \vee [b]$  denota el máximo coordenada por coordenada.

Esta propiedad de intercambio fuerte implica una propiedad llamada *Propiedad del greeoide*, GE:

**GE** Si  $w$  y  $w'$  pertenecen a  $\mathcal{L}$  y  $|w| > |w'|$ , entonces existe un elemento  $x$  en  $w$  tal que  $w'x \in \mathcal{L}$ .

Si  $\mathcal{L}$  es solo un lenguaje izquierdo hereditario y satisface la propiedad del greeoide, entonces se dice que  $\mathcal{L}$  es un greeoide con repetición.

Las tres propiedades dadas en la definición son equivalentes a la propiedad de intercambio fuerte.

**Lema 2.1.** Todo lenguaje izquierdo hereditario, permutable y localmente libre tiene la propiedad de intercambio fuerte. Y todo lenguaje con la propiedad de intercambio fuerte es localmente libre y permutable.

**Definición 2.8.** Decimos que una palabra  $w \in \mathcal{L}$  es básica si no es el prefijo de cualquier otra palabra en el lenguaje  $\mathcal{L}$ .

Las palabras básicas son como en el caso de los matroides sus bases. Por la propiedad de greeoide, todas las palabras básicas tienen la misma longitud. Esta longitud común se le llama *rango* del lenguaje. Si no hay palabras básicas en  $\mathcal{L}$ , entonces se dice que su rango es infinito.

### Observaciones

1. Si  $\mathcal{L}$  es un lenguaje izquierdo hereditario y satisface la propiedad (ST), entonces todas las palabras tienen el mismo puntaje.
2. Dos palabras  $w$  y  $w'$  en un lenguaje izquierdo hereditario se dicen que son equivalentes,  $w \sim w'$ , si para cada cadena  $v$  tal que  $wv \in \mathcal{L}$ , entonces se tiene que  $w'v \in \mathcal{L}$ . Las clases de equivalencia de esta relación se llaman *cerrados*.

Se puede asignar una relación de orden al conjunto de cerrados de  $\mathcal{L}$  diciendo que un cerrado  $A$  está metido en un cerrado  $B$ , si cada palabra en  $A$  puede ser extendido a una palabra en  $B$ .

**Lema 2.2.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje izquierdo hereditario, permutable y localmente libre de rango finito, además  $w$  y  $w'$  en  $\mathcal{L}$ . Entonces el cerrado definido por  $w$  está metido en el cerrado definido por  $w'$  si y sólo si  $[w] \leq [w']$ .

En particular,  $w \sim w'$  si y sólo si  $[w] = [w']$ .

## 2.4. Configuraciones críticas del juego de repartición de fichas

El Teorema 2.3 nos permite definir el siguiente lenguaje:

$$\mathcal{L}(\theta) = \{ \sigma \mid \sigma \text{ es un disparo legal que comenzando desde } \theta \text{ se puede extender a un disparo legal que produce una configuración crítica y cualquier configuración producida durante este disparo no es crítica} \}$$

**Lema 2.3.** Para una gráfica  $G$  y una configuración inicial  $\theta$ , el lenguaje  $\mathcal{L}(\theta)$  es localmente libre, permutable e izquierdo hereditario.

*Demostración.* Si  $\sigma \in \mathcal{L}(\theta)$  y  $\sigma'$  es un prefijo de  $\sigma$ , entonces  $\sigma'$  se puede extender a  $\sigma$  y este a su vez a una configuración crítica, ya que  $\sigma \in \mathcal{L}(\theta)$ . Por lo tanto,  $\sigma' \in \mathcal{L}(\theta)$ . Así,  $\mathcal{L}(\theta)$  es izquierdo hereditario.

Si  $\sigma$  y  $\sigma'$  son dos disparos legales con el mismo puntaje, es decir,  $[\sigma] = [\sigma']$ , entonces  $\theta - Q[\sigma] = \theta - Q[\sigma']$ , donde  $Q$  es la matriz de Laplace. Es decir, ambas sucesiones conducen a la misma configuración.

Por lo tanto, si existe un vértice  $w$  tal que  $\sigma w \in \mathcal{L}(\theta)$ , entonces  $\sigma'w$  se puede extender para producir una configuración crítica ya que  $\sigma w$  y  $\sigma'w$  conducen a la misma configuración. Ahora, después del disparo  $\sigma$  no podemos llegar a una configuración crítica, ya que  $\sigma w$  está en el lenguaje, así  $\sigma'$  no puede producir una configuración crítica, luego  $\sigma'w \in \mathcal{L}$ . Por lo tanto el lenguaje es permutable.

Sea  $\sigma \in \mathcal{L}$ . Suponga que existen dos vértices diferentes  $w$  y  $w'$  tal que  $\sigma w$  y  $\sigma w'$  se pueden extender para producir una configuración crítica. Esto implica que  $w, w' \neq q$ , ya que si  $w$  fuera  $q$ , entonces  $w'$  también tiene que ser  $q$ , por las reglas del juego. Esto contradice que  $w \neq w'$ .

Por lo tanto, después del disparo legal  $\sigma$  no podemos llegar a una configuración estable y entonces tampoco a una configuración crítica. Los vértices  $w$  y  $w'$  tienen al menos tantas fichas como sus grados, así podemos disparar ambos y la sucesión  $\sigma w w'$  produce una configuración que puede ser extendida a una configuración crítica, por el Teorema 2.3. Por lo tanto,  $\mathcal{L}(\theta)$  es localmente libre.  $\square$

Según el Teorema 2.3, dada una configuración siempre es posible llegar a una configuración crítica por medio de un disparo legal. El siguiente teorema afirma que esta configuración es única.

**Teorema 2.4.** Para una gráfica  $G$  y una configuración  $\theta$ , existe una única configuración crítica  $c$  tal que  $\theta \rightarrow c$ . En particular si  $\theta$  es crítica, entonces  $\theta = c$ .

*Demostración.* Por el Teorema 2.3, tenemos que  $\mathcal{L}(\theta)$  es no vacío. Este lenguaje tiene como palabras básicas todos los disparos legales que comenzando desde  $\theta$  terminan en una configuración crítica y que no pasan a través de cualquier otra configuración crítica; tomemos una de estas configuraciones, digamos  $c$ .

Por el Lema 2.1, sabemos que  $\mathcal{L}(\theta)$  tiene la Propiedad de Intercambio de greedy, entonces todas las palabras básicas tienen la misma longitud; y también cualesquiera dos palabras básicas son equivalentes, así, por el Lema 2.2, tienen el mismo puntaje y conducen a la misma configuración crítica. Por lo tanto, concluimos que esta configuración crítica  $c$  es única.  $\square$

**Definición 2.9.** Para una configuración crítica  $\theta$ , llamamos sucesiones críticas a las palabras básicas de  $\mathcal{L}(\theta)$ .

**Lema 2.4.** Sea  $G$  una gráfica y  $c$  una configuración crítica. Entonces cualquier sucesión crítica consiste de disparar todos los vértices de  $G$  exactamente una sola vez.

*Demostración.* Para una gráfica  $G$  y una configuración crítica inicial  $c$ , tenemos una sucesión legal que produce la misma configuración inicial. Como  $G$  es conexa, esto significa que cada vértice debe ser disparado al menos una vez, ya que de lo contrario, no disparar un vértice significa no disparar cualquiera de sus vecinos y así sucesivamente. Durante un disparo, una vez que dos fichas viajan a través del lazo, estas fichas se quedan en el vértice del mismo lazo y debido a que  $c$  es una configuración recurrente, estas fichas deberían haber estado ahí desde el inicio. Por lo tanto, para todo  $v \neq q$ ,  $c(v) \geq \text{indeg}(v)$ .

Ahora, construimos la gráfica  $\hat{G}$  a partir de  $G$  eliminando todos los lazos y la configuración  $c'$  a partir de  $c$  definiendo  $c' = c(v) - \text{indeg}(v)$  para todo  $v \neq q$ . Del argumento de arriba  $c' \geq 0$  de donde vemos que  $c'$  es una configuración. Entonces es claro que cualquier sucesión legal de  $c$  en  $G$  es también una sucesión legal de  $c'$  en  $\hat{G}$ . Por lo tanto,  $c$  es una configuración crítica de  $G$  si y sólo si  $c'$  es configuración crítica de  $\hat{G}$ .

El resultado se sigue ahora del caso sin lazos demostrado en [4].  $\square$

## 2.5. Función generadora de las configuraciones críticas del juego de repartición de fichas

Dada una configuración crítica podemos determinar su peso y nivel. Esto permitirá particionar al conjunto de configuraciones críticas por niveles.

**Definición 2.10 (Peso y nivel).** *Para una configuración  $\theta$ , definimos su peso,  $w(\theta)$ , como:*

$$w(\theta) = \sum_{v \neq q} \theta(v)$$

*Si  $\theta$  es una configuración crítica, definimos su nivel como:*

$$\text{nivel}(\theta) = w(\theta) - |E(G)| + \text{deg}(q)$$

Si tenemos una gráfica  $G$  y una configuración estable  $\theta$  del juego de repartición de fichas, se puede obtener una configuración para el juego de repartición de Björner, Lovász y Shor con solo redefinir  $\theta(q) = \text{deg}(q)$ . A esta configuración  $\theta_q$  del juego de repartición de fichas general se le llama *extensión* de  $\theta$ . Esta extensión permitirá aplicar el Teorema 2.2 en la demostración del Teorema 2.5.

**Lema 2.5.** Sea  $G$  una gráfica y  $\theta$  una configuración estable para el juego de repartición de fichas. Si  $\theta$  es crítica, entonces la correspondiente extensión  $\theta_q$  produce un juego de repartición de fichas infinito.

*Demostración.* Sabemos por el Lema 2.4 que  $\theta$  tiene un disparo legal que consiste en disparar cada vértice una sola vez y el vértice  $q$  es el primero en esta sucesión. Esto producirá la misma configuración  $\theta$ . Si nosotros imitamos este disparo para  $\theta_q$ , que tiene suficientes chips para comenzar, llegamos a la misma configuración  $\theta_q$ . Continuamos repitiendo esta sucesión y conseguimos así el disparo infinito.  $\square$

**Teorema 2.5.** Sea  $G$  una gráfica y  $\theta$  una configuración crítica, entonces

$$0 \leq \text{nivel}(\theta) \leq |E(G)| - |V(G)| + 1$$

*Demostración.* Por el Lema 2.5, podemos asociar a  $\theta$  una configuración  $\theta_q$  para el juego de repartición de fichas general que produce un juego infinito, así por el Teorema 2.2 el número total de fichas es al menos  $|E(G)|$ . Como  $\theta_q$  y  $\theta$  tienen el mismo número de fichas en cada vértice excepto en el vértice  $q$ , así que  $w(\theta) + \deg(q) \geq |E(G)|$  y entonces  $nivel(\theta) \geq 0$ .

Para la segunda desigualdad, tenemos que como cada configuración crítica es estable, entonces

$$w(\theta) \leq \sum_{v \neq q} (\deg(v) - 1) = 2|E(G)| - \deg(q) - |V(G)| + 1$$

□

**Definición 2.11 (Función generadora de las configuraciones críticas).** Sea  $G$  una gráfica con vértice especial  $q$ . Definimos la función generadora de las configuraciones críticas como el polinomio:

$$P_q(G; y) = \sum_{i=0}^{|E(G)| - |V(G)| + 1} c_i y^i$$

donde  $c_i$  es el número de las configuraciones críticas de nivel  $i$ . Además,  $c_i = 0$  para  $i > |E(G)| - |V(G)| + 1$

En 1999 Norman Biggs conjeturó que el polinomio de la Definición 2.11 es una evaluación del polinomio de Tutte. Esta conjetura fue demostrada en [18]. Enunciamos el teorema y reproducimos la demostración.

**Teorema 2.6.** Para una gráfica  $G$  y un vértice  $q$ , tenemos que la función generadora de las configuraciones críticas es el polinomio de Tutte de  $G$  a lo largo de la línea  $x = 1$ , es decir,

$$P_q(G; y) = T(G; 1, y)$$

Por lo tanto, el polinomio del lado izquierdo es independiente del vértice especial  $q$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica y  $q \in V(G)$ . Tomemos una arista  $e$  que tiene a  $q$  como uno de sus extremos y sea  $u$  el otro extremo ( $u$  podría ser igual a  $q$ ).

**CASO 1:** Supongamos que  $G$  tiene  $e$  como su única arista. Entonces hay dos posibilidades para  $e$ :

- a) Si  $e$  es un puente, entonces la única configuración crítica  $\theta$  tiene valor cero en  $u$ . Así,  $nivel(\theta) = 0 - |E(G)| + deg(q) = 0$  y obtenemos la igualdad  $P_q(G; y) = 1 = T(G; 1, y)$ .

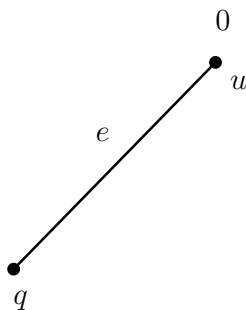


Figura 2.4: Configuración crítica de un puente  $e$

- b) Si  $e$  es un lazo, entonces la única configuración crítica  $\theta$  asigna el valor cero a  $q$ . Luego,  $nivel(\theta) = 0 - |E(G)| + deg = -1 + 2 = 1$  y otra vez obtenemos  $P_q(G; y) = y = T(G; 1, y)$ .

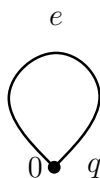


Figura 2.5: Configuración crítica de un lazo  $e$

**CASO 2:** Supongamos que  $G$  tiene al menos dos aristas. Analicemos las posibilidades para  $e$ .

- a) Supongamos que  $e$  es un puente. A partir de una configuración crítica  $\theta'$  de  $G/e$ , podemos obtener una configuración  $\theta$  de  $G$  definiendo  $\theta(w) = \theta'(w)$  para cada  $w \neq u, q$  y  $\theta(u) = deg(u) - 1$ . El valor de  $q$  se determina de acuerdo a la definición. La configuración  $\theta$  es crítica, ya que después de disparar  $q$ , podemos disparar  $u$  y repetir la sucesión crítica de  $\theta'$ . Luego, este mapeo manda una configuración crítica de  $G/e$  a una configuración crítica de  $G$ . Afirmamos que este mapeo

es una biyección. Sea  $\theta$  una configuración crítica de  $G$ . Definamos la configuración  $\theta'$  de  $G/e$  por  $\theta'(w) = \theta(w)$  para cada vértice  $w \neq q$  de  $V(G/e)$ . Si reemplazamos los primeros dos vértices en una sucesión crítica de  $\theta$  (que deben ser  $q$  y  $u$ ), por  $q$ , obtenemos una sucesión crítica para  $\theta'$  y así  $\theta'$  es una configuración crítica. Como a cada configuración crítica de  $G$  debemos asignar un valor de  $\deg(u) - 1$  al vértice  $u$ , el mapeo es una biyección y

$$\begin{aligned}
nível(\theta') &= \sum_{w \neq q, u} \theta'(w) - |E(G/e)| + \deg_{G/e}(q) \\
&= \sum_{w \neq q, u} \theta(w) - (|E(G)| - 1) + (\deg_q(q) + \deg_G(u) - 2) \\
&= \sum_{w \neq q, u} \theta(w) + \deg_G(u) - 1 - |E(G)| + \deg_G(q) \\
&= \sum_{w \neq q} \theta(w) - |E(G)| + \deg_G(q) \\
&= nível(\theta)
\end{aligned}$$

Así, concluimos que los polinomios son iguales

$$P_q(G; y) = P_q(G/e; y) \quad (2.1)$$

- b) Supongamos que la arista  $e$  es un lazo. Por un argumento al caso anterior muestra que si definimos, a partir de una configuración crítica  $\theta'$  de  $G - e$ , una configuración  $\theta$  de  $G$  por  $\theta(w) = \theta'(w)$  para cada  $w \neq q$ , obtenemos una configuración crítica. Este mapeo es una biyección y

$$\begin{aligned}
nível(\theta') &= \sum_{w \neq q} \theta'(w) - |E(G - e)| + \deg_{G-e}(q) \\
&= \sum_{w \neq q} \theta(w) - (|E(G)| - 1) + (\deg_G(q) - 2) \\
&= nível(\theta) - 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los polinomios están relacionado por

$$P_q(G; y) = yP_q(G - e; q) \quad (2.2)$$

**CASO 3:** Supongamos que  $e$  no es ni puente ni un lazo y que  $G$  tiene más de una arista. Particionamos el conjunto de configuraciones críticas de  $G$  en dos conjuntos:  $\mathcal{A}$  el conjunto de las configuraciones críticas  $\theta$  de  $G$  con  $\theta(u) = \deg(u) - 1$  y  $\mathcal{A}'$  el resto de las configuraciones críticas.

Para cada  $\theta \in \mathcal{A}$ , asociamos una configuración crítica  $\theta'$  en  $G/e$  definiendo  $\theta'(w) = \theta(w)$  para todo  $w \neq u, q$ . Para ver que  $\theta'$  es una configuración crítica, tomemos una sucesión crítica para  $\theta$  y como  $\theta(u) = \deg(u) - 1$ , podemos suponer que los dos primeros disparos son  $q$  y luego  $u$ , por el Lema 2.3 que asegura que cualquier disparo legal es localmente libre. Pero después de disparar  $u$ , la situación en los otros vértices es la misma en ambas gráficas, así podemos reproducir el resto de la sucesión en  $G/e$  con el mismo resultado. Por lo tanto, llegamos a la configuración inicial  $\theta'$  y la construcción da una configuración crítica para  $G/e$ .

Esta construcción se puede revertir definiendo, a partir de una configuración crítica  $\theta'$  en  $G/e$ , la configuración en  $G$ ,  $\theta(w) = \theta'(w)$  para todo  $w \neq u$  y  $\theta(u) = \deg(u) - 1$ . Esta configuración es crítica en  $G$  ya que podemos disparar  $q$  y luego  $u$ . Así estamos en la misma situación que cuando disparamos  $q$  en  $G/e$  y de aquí podemos seguir una sucesión crítica de  $\theta'$ ; la configuración final coincide con  $\theta$  en cada vértice diferente de  $u$ . Además, después de disparar  $q$  en  $G$ , el vértice  $u$  tiene  $\deg(u) - 1 + \nu(q, u)$  fichas, después de disparar  $u$ , el vértice  $u$  pierde  $\deg(u)$  fichas y después de disparar todos sus vecinos,  $u$  gana  $\deg(u) - \nu(q, u)$  fichas, así el total final es de  $\deg(u) - 1$  fichas. Por lo tanto,  $\theta$  construida de esta manera es crítica. Luego, tenemos así una biyección y para las correspondientes  $\theta$  y  $\theta'$  tenemos

$$\begin{aligned}
 nivel(\theta) &= \sum_{w \neq q} \theta(w) - |E(G)| + \deg_G(q) \\
 &= \sum_{w \neq q, u} \theta'(w) + \deg_G(u) - 1 - (|E(G/e)| + 1) + \deg_G(q) \\
 &= \sum_{w \neq q, u} \theta'(w) - |E(G/e)| + \deg_{G/e}(q) \\
 &= nivel(\theta')
 \end{aligned}$$

Usando el mismo argumento anterior, los elementos de  $\mathcal{A}'$  pueden ser puestos en una correspondencia biyectiva con las configuraciones críticas de  $G - e$ . Primero, para una configuración crítica  $\theta$  en  $G$ , definimos una configuración  $\theta'$  en  $G - e$  por  $\theta'(w) = \theta(w)$  para todo  $w \neq q$  y notemos que un disparo legal en  $G - e$  es un disparo legal en  $G$ . Después de disparar  $q$ ,  $\theta'(u)$  es uno menos

que  $\theta(u)$ ; pero en compensación  $\deg_{G-e}(u)$  es ahora más pequeño también. Además, para  $\theta$  en  $\mathcal{A}'$  y la correspondiente  $\theta'$ , tenemos:

$$\begin{aligned} nivel(\theta) &= \sum_{w \neq q} \theta(w) - |E(G)| + \deg_G(q) \\ &= \sum_{w \neq q} \theta'(w) - (|E(G-e)| + 1) + (\deg_{G-e}(q) + 1) \\ &= nivel(\theta') \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_q(G; y) = P_q(G-e; y) + P_q(G/e; y) \quad (2.3)$$

Usando este proceso se puede llegar a los dos casos triviales. Ahora, usamos inducción sobre el número de aristas de la gráfica y las recursiones 2.1, 2.2 y 2.3 para aplicar el Teorema de la Receta, 1.4. Por lo tanto tenemos que

$$P_q(G; y) = T(G; 1, y)$$

□

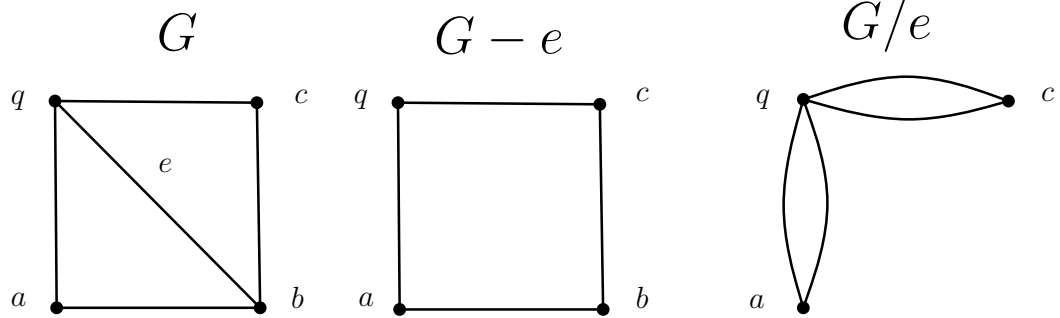


Figura 2.6: Ejemplificación de la prueba del Teorema 2.6

**Ejemplo 2.4.** Consideremos la gráfica completa  $K_4$ . El polinomio de Tutte de  $K_4$  es  $T(K_4; x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3$ . Así, tenemos que

$$P_q(K_4; y) = T(K_4; 1, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3$$

Si proyectamos sobre la entrada correspondiente al vértice  $q$ , podemos considerar las configuraciones críticas como puntos de  $\mathbb{R}^3$ . Estos se muestran, según su nivel, en la Tabla 2.1. Al graficar estos puntos obtenemos la distribución mostrada en la Figura 2.8.

$$\begin{aligned}
 P_q(G; y) &= P_q(G - e; y) + P_q(G/e; y) \\
 y^2 + 3y + 4 &= y + 3 + y^2 + 2y + 1
 \end{aligned}$$

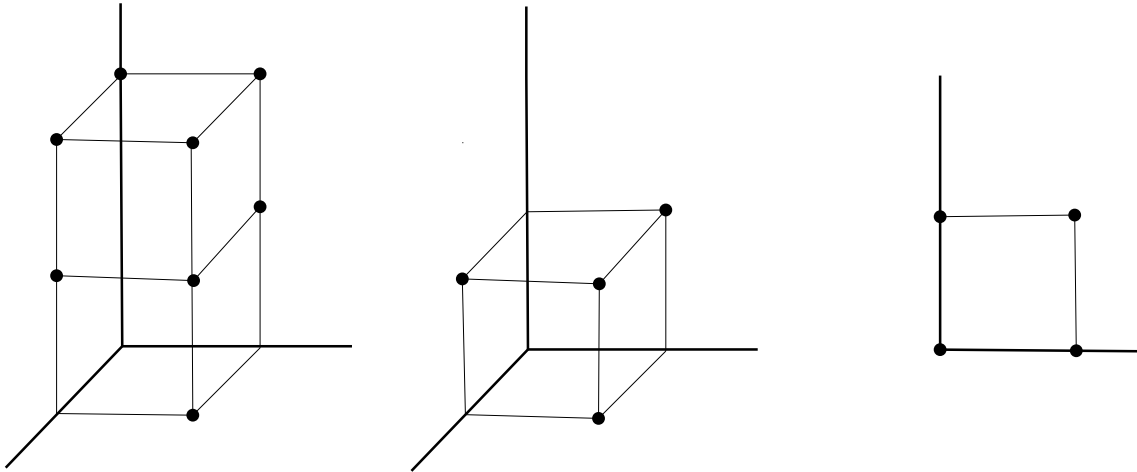


Figura 2.7: Ejemplificación de la prueba del Teorema 2.6

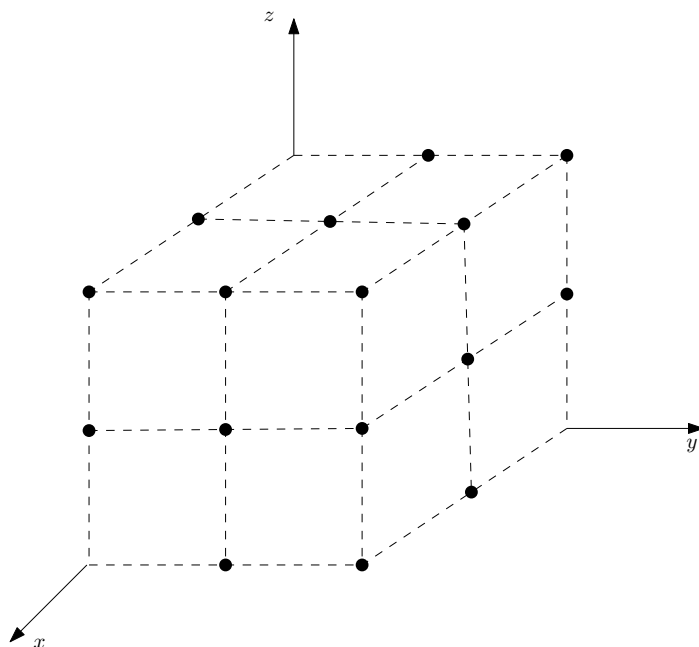
Nivel	Configuraciones críticas de $K_4$					
Cero	(1,0,2)	(1,2,0)	(0,1,2)	(2,1,0)	(0,2,1)	(2,0,1)
Uno	(0,2,2)	(2,0,2)	(2,2,0)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)
Dos	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)			
Tres	(2,2,2)					

Tabla 2.1: Configuraciones críticas de  $K_4$

## 2.6. El grupo crítico de una gráfica

Dada una gráfica  $G$ , la matriz de Laplace  $Q$ , se puede considerar como un homomorfismo:

$$Q : C^0(G, \mathbb{Z}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{Z})$$

Figura 2.8: Configuraciones críticas de  $K_4$  en  $\mathbb{R}^3$ 

donde  $C^0(G, \mathbb{Z})$  es el grupo abeliano de funciones de valores enteros sobre  $V(G)$ .

Sea el homomorfismo

$$\tau : C^0(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definido por  $\tau(F) = \sum_{v \in V(G)} F(v)$ .

Sabemos que  $Q = DD^t$ , donde  $D = (d_{ve})$  es la matriz de incidencia definida por:

$$d_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ es la cabeza de } e \text{ pero no cola;} \\ -1 & \text{si } v \text{ es cola de } e \text{ pero no cabeza;} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

De la definición, se observa que en cada columna de la matriz de incidencia hay exactamente un 1 y un  $-1$ . La matriz de incidencia también se puede considerar un homomorfismo:

$$D : C^1(G, \mathbb{Z}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{Z})$$

donde  $C^1(G, \mathbb{Z})$  es el grupo abeliano de funciones de valores enteros sobre  $E$

Denotaremos por  $Im(Q)$  a la imagen de  $Q$  y por  $ker(\tau)$  al kernel de  $\tau$ . Así, se tiene el siguiente resultado [4].

**Teorema 2.7.**  $Im(Q)$  es un subgrupo de  $ker(\tau)$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\tau Q = 0$ , ya que como se observó anteriormente en cada columna de  $D$  hay exactamente un 1 y un  $-1$ .

Sea  $y \in Im(Q)$ . Entonces  $y = Qx = DD^t$  para algún  $x$ . Entonces  $\tau(y) = \tau DD^t x = \tau D(D^t x) = 0$ . Así, tenemos que  $x \in ker(\tau)$ . Por lo tanto,  $Im(Q)$  es un subgrupo de  $ker(\tau)$ .  $\square$

Como  $ker(\tau)$  es un grupo abeliano, entonces  $Im(Q)$  es un subgrupo normal. Por lo tanto, tiene sentido considerar el grupo cociente  $ker(\tau)/Im(Q)$ .

**Definición 2.12.** Para cada configuración  $\theta$ , denotaremos por  $\gamma(\theta)$  a la única configuración crítica dada por el Teorema 2.4.

Por definición, cualquier configuración  $\theta$  pertenece al kernel de  $\tau$ . Denotemos por  $[\theta]$  a la clase lateral de  $\theta$  con respecto a  $Im(Q)$ .

El siguiente teorema se prueba en [4].

**Teorema 2.8.** La función

$$\eta : ker(\tau)/Im(Q) \rightarrow \mathcal{C}(G)$$

definida por  $\eta([\theta]) = \gamma(\theta)$  es una biyección, donde  $\mathcal{C}(G)$  es el conjunto de las configuraciones críticas.

Con este resultado y usando la operación de grupo en  $ker(\tau)/Im(Q)$ , esto es  $[\theta_1] + [\theta_2] = [\theta_1 + \theta_2]$  y la función  $\eta$ , podemos definir una operación de grupo  $*$  en  $\mathcal{C}(G)$  de la siguiente manera.

Para  $\sigma$  y  $\sigma'$ , dos configuraciones críticas, tenemos que

$$\sigma * \sigma' = \gamma(\sigma + \sigma')$$

Así, al conjunto de configuraciones críticas,  $\mathcal{C}(G)$  de una gráfica conexa  $G$  se le puede dar una estructura de grupo abeliano. Este grupo es conocido como *grupo crítico de  $G$*  [4], *grupo Jacobiano* [2] o también como *grupo de pilas de arena* [12].

Cuando es considerado como  $ker(\tau)/Im(Q)$ , este grupo tiene una presentación que es descrita en [4] de la siguiente manera.

Sea  $\delta_u$  la función en  $C^0(G, \mathbb{Z})$  que toma el valor 1 en el vértice  $u$  y 0 en otro caso. Entonces es claro que la función  $\delta_u - \delta_q$  está en el  $\ker(\tau)$ . Tenemos una configuración crítica asociada a él, que es  $g_u = [\delta_u - \delta_q]$ .

Se demuestra en [4] que  $\{g_u | u \neq q\}$  es un conjunto de generadores para el grupo crítico de  $G$ . Además este conjunto de generadores satisfacen un conjunto de relaciones canónicas. Esta presentación es llamada *presentación de Picard*. En la presentación de Picard hay una relación  $R_v$  para cada vértice  $v \neq q$  en  $G$

$$R_v : \text{exdeg}(v)g_v = \text{indeg}(v)g_v + \sum_{w \neq q} \nu(v, w)g_w$$

Como  $\text{deg}(v) = \text{indeg}(v) + \text{exdeg}(v)$ , entonces sustituyendo en la relación anterior, tenemos:

$$R_q : \sum_{w \neq q} \nu(v, w)g_w = 0$$

Como  $\mathcal{C}(G)$  es un grupo abeliano finitamente generado, tiene una descomposición en suma directa:

$$\mathcal{C}(G) = (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$$

donde los enteros  $n_i$  son conocidos como *factores invariantes* y satisfacen que  $n_i$  divide a  $n_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq r - 1$ .

Para obtener los factores invariantes, primero tomamos una presentación del grupo y construimos una matriz con estas relaciones. Entonces reducimos la matriz a la Forma Normal de Smith. El resultado es una matriz diagonal y los elementos en la diagonal son los factores invariantes.

En el caso del grupo crítico de una gráfica  $G$ , la matriz de relaciones la podemos obtener a partir de la matriz de Laplace  $Q$  de  $G$  eliminando la fila y columna correspondiente a vértice  $q$ .

**Ejemplo 2.5.** Consideremos la gráfica completa  $K_5$ , cuya matriz de Laplace  $Q$  se muestra abajo. Considerando  $q = v_5$  y eliminando la fila y columna  $v_5$ , obtenemos la Forma Normal de Smith  $S$ .

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que  $\mathcal{C}(K_5) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

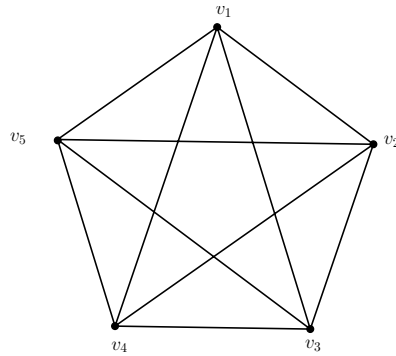


Figura 2.9: Gráfica completa  $K_5$

El grupo de Picard de  $G$  es, salvo isomorfismo de grupos, el mismo que el grupo crítico de  $G$  definido en [4]. El siguiente teorema es probado en [12].

**Teorema 2.9.** Para una gráfica plana  $G$  y cualquiera de sus duales  $G^*$ , el grupo de pilas de arenas de  $G$  y el grupo de pila de arenas de  $G^*$  son isomorfos.

Recientemente hay una gran actividad alrededor de determinar propiedades de estos grupos para ciertas familias de gráficas, por ejemplo gráficas de líneas de gráficas regulares [3], gráficas multipartitas completas [16], árboles regulares [22], la escalera de Möbius [10], además del efecto de operaciones como el producto cartesiano [11, 23] y la adición de vértices apéndice a una gráfica [1].



# Capítulo 3

## Una extensión del juego de repartición de fichas a matroides regulares

El juego de repartición de fichas se ha considerado ampliamente en la teoría de gráficas. Aquí presentamos una generalización a los matroides regulares. Esta extensión es tal que al restringirlo a matroides gráficos se conservan las propiedades del juego de repartición de fichas para gráficas estudiado en el capítulo anterior.

Para ello la noción de vértice se sustituye por la de vector. Así, damos una introducción a la teoría de retículas en la sección 3.1. En esta extensión del juego, el número de las configuraciones críticas es el número de bases del matroide, sin embargo, no se ve claro si existe una relación de la función generadora de las configuraciones críticas del juego con el polinomio de Tutte como la que se mostró en el Teorema 2.6 ya que no es claro cómo definir el nivel de una configuración en esta extensión.

### 3.1. Teoría de retículas

**Definición 3.1.** *Una retícula  $\Lambda$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  tal que:*

1.  $\vec{0} \in \Lambda$
2. Si  $x, y \in \Lambda$  entonces  $x - y \in \Lambda$
3.  $\Lambda$  no tiene puntos de acumulación

Es decir, una retícula es un grupo vectorial discreto en un subespacio  $\mathbb{R}^r$  a través del origen de  $\mathbb{R}^n$ . Una subretícula  $\Gamma$  de  $\Lambda$  es un subconjunto de  $\Lambda$  que también es una retícula. En este caso, tiene sentido considerar el grupo cociente  $\Lambda/\Gamma$ . El orden de este grupo cociente, llamado índice de  $\Gamma$  en  $\Lambda$ , es igual a  $\det(\Gamma)/\det(\Lambda)$ .

**Teorema 3.1.** Toda retícula  $\Lambda$  tiene una  $\mathbb{Z}$ -base,  $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ . Es decir

$$\Lambda = \Lambda(B_1, B_2, \dots, B_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i B_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r \right\}$$

Para representar una base de una retícula usamos una matriz  $B$  de  $r \times n$ , donde los vectores de la base son las filas de la matriz  $B$ .

**Proposición 3.1.** Si  $B$  es una base de una retícula  $\Lambda(B)$  y  $A \in GL(r, \mathbb{Z})$ , es decir,  $A$  es una matriz de  $r \times r$  con coeficientes enteros y  $\det(A) = \pm 1$  entonces  $AB$  también es una base de  $\Lambda(B)$ .

**Proposición 3.2.** Si  $B$  y  $B'$  son dos bases para una retícula  $\Lambda$  entonces existe  $A \in GL(r, \mathbb{Z})$  tal que  $B' = AB$ .

**Definición 3.2.** Dos retículas  $\Lambda(B)$  y  $\Lambda(B')$  cuyas bases están relacionadas por  $B' = ABP$ , donde  $A \in GL(r, \mathbb{Z})$  y  $P$  es una matriz ortogonal ( $PP^t = I_n$ ), se llaman retículas congruentes.

Para dos retículas congruentes  $\Lambda(B)$  y  $\Lambda(B')$ , tenemos

$$|B'(B')^t| = |ABPP^t B^t A^t| = |BB^t|$$

Como se puede observar, la cantidad  $\sqrt{|BB^t|}$  no depende de la base de la retícula  $\Lambda$  y no cambia para cualquier retícula congruente a  $\Lambda(B)$ .

**Definición 3.3.** Sea  $B$  base de una retícula  $\Lambda$ .

1.  $\det(\Lambda) = \sqrt{|BB^t|}$ .
2. A la matriz  $Q = BB^t$  se le llama Matriz Gram de  $\Lambda(B)$ .

**Definición 3.4.** La norma mínima de una retícula  $\Lambda$  es el número

$$\min\{\langle v, v \rangle \mid v \in \Lambda, v \neq \vec{0}\}$$

**Definición 3.5.** Si  $\Lambda$  es una retícula y  $H$  es su espacio generado, entonces el dual  $\Lambda^*$  de  $\Lambda$  se define como:

$$\Lambda^* = \{x \in H \mid \langle x, v \rangle \in \mathbb{Z} \text{ para todo } v \in \Lambda\}$$

El conjunto  $\Lambda^*$  es una retícula. Si  $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$  es una base de  $\Lambda$  entonces los vectores  $\{D_1, D_2, \dots, D_r\}$  definidos por:

$$D_i B_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

forman una base de  $\Lambda^*$ .

De esto se siguen las siguientes propiedades:

1.  $(\Lambda^*)^* = \Lambda$
2.  $\det(\Lambda)\det(\Lambda^*) = 1$

**Definición 3.6.** Sea  $\Lambda = \Lambda(B)$  una retícula. El paralelotopo fundamental de  $\Lambda(B)$  es el conjunto de puntos

$$\theta_1 B_1 + \theta_2 B_2 + \dots + \theta_r B_r, 0 \leq \theta_i < 1$$

El determinante de  $\Lambda$ ,  $\det(\Lambda)$ , es el volumen de cada paralelotopo fundamental.

**Definición 3.7.** Una retícula  $\Lambda$  es entera si y sólo si  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$  para todo  $x, y \in \Lambda$ . Es decir  $\Lambda$  es entera si  $\Lambda \subseteq \Lambda^*$ .

Una retícula es unimodular si es igual a su retícula dual.

**Ejemplo 3.1.**  $\mathbb{Z}^n$  es una retícula. Además,  $\mathbb{Z}^n$  es una retícula unimodular. El determinante de esta retícula es 1. En la Figura 3.1, se muestra la base  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$  y su paralelotopo asociado de la retícula  $\mathbb{Z}^2$ .

Cuando se tiene una retícula entera existe un grupo cociente muy importante llamado *grupo cociente dual*  $\Lambda^*/\Lambda$  cuyo orden es  $(\det(\Lambda))^2$ . Este grupo será estudiado más adelante.

El siguiente resultado aparece en [2] y será de utilidad más adelante.

**Teorema 3.2.** Sean  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  dos subespacios ortogonales de  $\mathbb{R}^n$  no iguales a  $\vec{0}$ , tales que  $\mathbb{R}^n = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Sea  $\pi_{\mathcal{H}_1}$  (respectivamente,  $\pi_{\mathcal{H}_2}$ ) la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathcal{H}_1$  (respectivamente,  $\mathcal{H}_2$ ). Suponga que  $\mathbb{Q}^n = (\mathcal{H}_1 \cap \mathbb{Q}^n) \oplus (\mathcal{H}_2 \cap \mathbb{Q}^n)$ . Sea  $\Lambda$  una retícula entera unimodular. Tomemos  $\Gamma_1 = \Lambda \cap \mathcal{H}_1$  y  $\Gamma_2 = \Lambda \cap \mathcal{H}_2$ . Entonces:

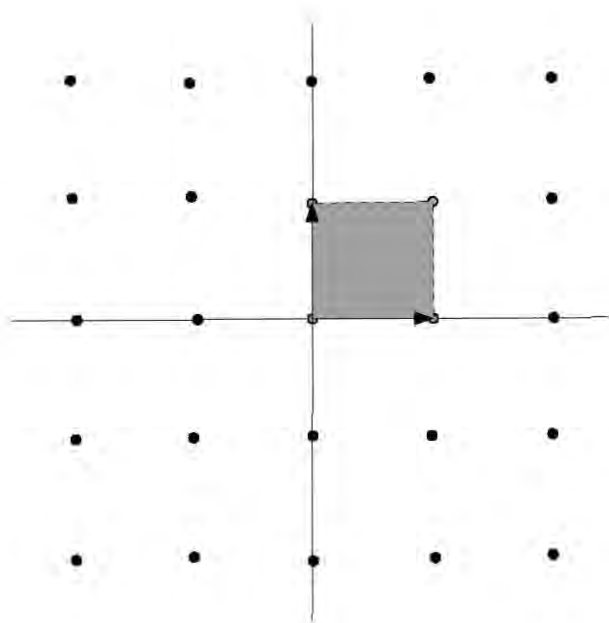


Figura 3.1: La retícula unimodular  $\mathbb{Z}^2$  y su paralelotopo asociado

1.  $\Gamma_1$  es una retícula en  $\mathcal{H}_1$  y  $\Gamma_2$  es una retícula en  $\mathcal{H}_2$
2.  $\Gamma_1^* = \pi_{\mathcal{H}_1}(\Lambda)$  y  $\Gamma_2^* = \pi_{\mathcal{H}_2}(\Lambda)$
3. Los grupos cocientes duales  $\Gamma_1^*/\Gamma_1$  y  $\Gamma_2^*/\Gamma_2$  son isomorfos.

### 3.2. El espacio de cocircuitos de un matroide regular

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $m$  aristas y tomemos una orientación arbitraria de  $G$ . Sabemos que la matriz de incidencia  $B$  de  $G$ , se puede considerar como una transformación lineal,  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Así, el kernel de  $B$  es un espacio vectorial de dimensión  $m - n + 1$  llamado *espacio de ciclos* de  $G$ , [8]. Al complemento ortogonal del espacio de ciclos se le llama espacio de cortes de  $G$ .

Estos conceptos estudiados en teoría de gráficas, (ver [8]), se pueden generalizar en el caso de matroides de la siguiente manera.

Sea  $M$  un matroide binario. La matriz de circuitos  $D(M)$  de  $M$  se define como la matriz de incidencia de circuitos contra elementos. La matriz de cocircuitos  $D^*(M)$  es la matriz de incidencia de cocircuitos contra elementos. Es claro que  $D^*(M) = D(M^*)$ .

**Definición 3.8.** *Un matroide binario  $M$  es orientable si es posible asignar signos negativos a algunas de las entradas no ceros en  $D = D(M)$  y  $D^* = D^*(M)$  para obtener matrices  $\hat{D}$  y  $\hat{D}^*$  de tal manera que el producto escalar de cualquier fila de  $\hat{D}$  con cualquier fila de  $\hat{D}^*$  es cero sobre el anillo  $\mathbb{Z}$ .*

Llamamos a esta signación de las matrices circuito y cocircuito una *orientación* de  $M$ . También al espacio fila de  $\hat{D}$  llamamos *espacio de circuitos orientados* y al espacio de fila de  $\hat{D}^*$  *espacio de cocircuitos orientados* de  $M$ .

El siguiente resultado se debe a Minty, [21].

**Teorema 3.3.** Para un matroide binario  $M$ ,  $M$  es regular si y sólo si  $M$  es orientable

De [21] se sabe que si  $M$  es un matroide regular con una representación matricial totalmente unimodular  $B = [I_r|A]$ , entonces para cada cocircuito  $C$  de  $M$ , el espacio fila de  $B$  contiene una signación del vector de incidencia de  $C$ . También para cada circuito  $C'$  de  $M$  el espacio fila de la matriz totalmente unimodular  $B^* = [-A^t|I_{n-r}]$  contiene una signación del vector de incidencia de  $C'$ . La signación de  $D(M)$  y  $D^*(M)$  por este procedimiento es claramente una orientación de  $M$  ya que cada fila de  $B$  es ortogonal a cada fila de  $B^*$ .

También se puede probar que si tenemos  $\hat{D}$  y  $\hat{D}^*$  una orientación de  $M$ , entonces  $\hat{D}^*$  es una representación real de  $M$ , [21]. Si  $M$  tiene rango  $r$  y  $n$  elementos, entonces podemos encontrar una submatriz  $B$  de  $r \times n$  de  $\hat{D}^*$  de la forma  $B = [I_r|A]$ , escogiendo las filas de  $\hat{D}^*$  correspondientes a los cocircuitos fundamentales de alguna base fija de  $M$  y posiblemente permutando algunas columnas. Como las filas de  $B$  son linealmente independientes, generan el espacio fila de  $\hat{D}^*$  y entonces  $B$  es también una representación real de  $M$  ([21], 6.3). Pero si  $B' = [I_r|A']$  es una representación real de un matroide regular, entonces  $B'$  es totalmente unimodular. Por lo tanto,  $B$  es totalmente unimodular.

Además,  $B^* = [-A^t|I_{n-r}]$  es una representación totalmente unimodular de  $M^*$ , (ver [21]), cuyas filas están contenidas en las filas de  $\hat{D}$  y generan el mismo espacio que  $\hat{D}$ . Esto es debido a que las filas de  $B^*$  son ortogonales a las filas de  $B$  y sus vectores de incidencia son circuitos de  $M$ .

Por lo tanto, si tenemos una orientación de  $M$ ,  $\hat{D}(M)$  y  $\hat{D}^*(M)$ , entonces el espacio fila de  $\hat{D}^*(M)$  es igual al espacio fila de  $B$ , para alguna representación totalmente unimodular de  $M$ , y de manera similar, el espacio fila de  $\hat{D}(M)$  es igual al espacio fila de  $B^*$ , para alguna representación totalmente unimodular de  $M^*$ .

Ahora, dado cualesquiera dos representaciones matriciales totalmente unimodulares  $A$  y  $A'$  de un matroide regular, uno puede transformar una matriz en la otra multiplicando por una matriz  $U \in GL(r, \mathbb{Z})$ , entonces intercambiando columnas o multiplicando algunas columnas por  $-1$ , (ver [21]), tenemos que los espacios fila de  $A$  y  $A'$  son espacios vectoriales isomorfos. Así, los espacios de circuitos y cocircuitos son, salvo isomorfismo, independientes de la orientación particular del matroide. Por lo tanto tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.9 (Espacio de cocircuitos).** *Sea  $M$  un matroide regular. Llamamos espacio de cocircuitos de  $M$  a cualquier espacio particular de cocircuitos orientados de  $M$  y lo denotamos por  $\mathcal{C}(M)$ . Del mismo, llamamos espacio de circuitos de  $M$  a cualquier espacio particular de circuitos orientados de  $M$  y lo denotamos por  $\mathcal{C}^*(M)$*

Solo cuando queramos hacer referencia a una orientación particular, usaremos  $\mathcal{C}(M(B))$  y  $\mathcal{C}^*(M(B))$ .

El espacio de circuito de  $M^*$  es el espacio de cocircuitos de  $M$  y el espacio de cocircuito de  $M^*$  es el espacio de circuitos de  $M$ .

En el caso gráfico, la matriz de incidencia de  $G$  es una representación totalmente unimodular del matroide  $M(G)$  para cualquier orientación de  $G$ , (ver [21]). La última fila de la matriz de incidencia es el negativo de la suma de las filas anteriores, así cuando consideramos la matriz de incidencia menos la última fila entonces el espacio de ciclos de  $G$  es el espacio de circuitos de  $M(G)$  y el espacio de corte de  $G$  es el espacio de cocircuitos de  $M(G)$ .

### 3.3. La retícula entera de cocircuitos de un matroide regular

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $m$  aristas,  $\mathcal{C}$  su espacio de corte y  $\mathcal{C}^*$  su espacio de ciclos. En [2, 14], se tiene que

$$N(G) = \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^n$$

es llamada *la retícula de cortes enteros* y

$$L(G) = \mathcal{C}^* \cap \mathbb{Z}^n$$

es conocida como *la retícula de flujos enteros*.

Estos conceptos se pueden generalizar en el caso de matroides de la siguiente forma.

Sea  $M$  un matroide regular de rango  $r$  con  $n$  elementos y  $B$  una representación totalmente unimodular con  $r$  filas. Es claro que la retícula  $\Lambda(B)$  está contenida en el espacio de cocircuitos de  $M$ ,  $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M(B))$ .

**Definición 3.10.** *Dada cualquier representación totalmente unimodular  $B$  de  $M$ , llamamos a  $\Lambda(B)$  la retícula de cocircuitos de  $M$ .*

La retícula de cocircuitos es independiente de la representación escogida, salvo por congruencia de retículas, ya que como se dijo en la primera sección, para cualquier otra representación del matroide, las retículas resultantes son congruentes. Así, usaremos la notación  $\Lambda(M)$  para referirnos a una retícula de cocircuitos de un matroide regular.

Sabemos que existe una representación totalmente unimodular del matroide dual  $M^*$ , que llamaremos  $B^*$ , tal que cada fila de  $B^*$  es ortogonal a cada fila de  $B$ , (ver [21]). Así, de manera similar que se hizo con gráficas, definimos a la *retícula de circuitos* de  $M$  como  $\Lambda(B^*)$ . Es decir, la retícula de cocircuitos de  $M^*$  es la retícula de circuitos de  $M$ .

El siguiente lema (ver [20]), nos dice que la retícula de cocircuitos consiste de los vectores de valores enteros del espacio de cocircuitos.

**Lema 3.1.** *Sea  $M$  un matroide regular de  $n$  elementos y rango  $r$  con representación totalmente unimodular  $B$  con  $r$  filas. Entonces*

$$\Lambda(B) = \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}(M(B))$$

*Demostración.* Si  $M$  tiene rango 0, entonces  $M$  es una colección de lazos, de donde  $B$  es una fila de ceros. Por lo tanto  $\mathcal{C}(M(B)) = \{\vec{0}\}$  y también tenemos que  $\Lambda(B) = \{\vec{0}\}$ . En este caso es clara la igualdad.

Supongamos que  $r > 0$ . Podemos suponer la representación estándar del matroide  $B = [I_r | A]$ . Entonces es claro que los elementos de  $\Lambda(B)$  son vectores con valores enteros ya que  $B$  tiene como entradas  $-1, 0, 1$ . Por lo tanto,  $\Lambda(B)$  es una subretícula de  $\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}(M(B))$ . Así,  $\Lambda(B) \subseteq \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}(M(B))$

Sea  $a \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}(M(B))$ . Entonces podemos escoger un vector representativo  $\hat{a}$  de la clase lateral de  $a$  en el grupo cociente  $\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}(M(B))/\Lambda(B)$  que está en el paralelotopo fundamental de  $\Lambda(B)$ .

El vector  $\hat{a}$  tiene entradas enteras ya que  $\hat{a} - a \in \Lambda(B)$  y  $a$  es un vector con entradas enteras.

Pero  $\hat{a} = \sum_{i=1}^r \lambda_i B_i$ , con  $0 \leq \lambda_i < 1$ ,  $1 \leq i \leq r$ , donde  $B_i$  es la fila  $i$  de  $B$ . Debido a que  $B$  tiene entradas enteras, esto implica que  $\lambda_i = 0$  para todo  $1 \leq i \leq r$  y  $a \in \Lambda(B)$ . Por lo tanto,  $\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}(M(B)) \subseteq \Lambda(B)$ . De donde concluimos que la igualdad se cumple.  $\square$

El siguiente teorema se demuestra en [20] y es una extensión de un resultado que aparece en [2]. Reproducimos el teorema y su demostración.

**Teorema 3.4.** Sea  $M$  un matroide regular entonces el determinante de la retícula  $\Lambda(M)$  es igual a la raíz cuadrada del número de bases de  $M$ . Por lo tanto, el orden del grupo cociente dual  $\Lambda^*(M)/\Lambda(M)$  es igual al número de bases de  $M$ .

*Demostración.* Sea  $M$  un matroide de rango  $r$ .

Si  $r = 0$ , entonces  $M$  es una colección de lazos. Por lo tanto,  $M$  tiene una base, el conjunto vacío. Pero en este caso,  $\Lambda(M) = \{\vec{0}\}$ , luego tenemos que  $\Lambda^*(M) = \{\vec{0}\}$ . Por lo tanto,  $\Lambda^*(M)/\Lambda(M)$  es el grupo trivial de un solo elemento. Por lo tanto, la afirmación se cumple.

Si  $r > 0$ , tomemos  $B$  una representación totalmente unimodular con  $r$  filas. Sabemos que el determinante de la retícula  $\Lambda(M)$  es igual a la raíz cuadrada del determinante de la matriz Gram  $BB^t$ .

Por el Teorema de Cauchy- Binet, este determinante es igual a

$$|BB^t| = \sum |R|^2$$

donde la suma es sobre todas las submatrices  $R$  de  $r \times r$  de  $B$ . Como  $B$  es totalmente unimodular, tenemos que  $|R|^2 \in \{0, 1\}$ . Si  $|R|^2 = 1$ , entonces el conjunto de columnas de  $R$  corresponden a una base de  $M$  y viceversa. Por lo tanto, la raíz cuadrada del determinante  $|BB^t|$  es igual al número de bases de  $M$ .

Por otro lado, sabemos que el orden del grupo cociente  $\Lambda^*(M)/\Lambda(M)$  es  $(\det(\Lambda))^2$ . Así, el orden de este grupo es el número de bases de  $M$ .  $\square$

Para una gráfica conexa  $G$ , el grupo cociente dual de la retícula de flujos enteros se llama el *Jacobiano* de la gráfica. De manera similar a la Proposición 8 de [2], se tiene la siguiente extensión a matroides regulares (ver [20]).

**Teorema 3.5.** Sea  $M$  un matroide regular. Entonces, los grupos  $\Lambda^*(M)/\Lambda(M)$  y  $\Lambda^*(M^*)/\Lambda(M^*)$  son isomorfos

*Demostración.* Sea  $M$  un matroide regular de rango  $r$  con  $n$  elementos.

Si  $r = 0$ , entonces tenemos la misma situación que en el teorema anterior,  $\Lambda^*(M)/\Lambda(M)$  es el grupo trivial. Por otro lado  $M^*$  tiene rango  $r = n$ , por lo que  $\Lambda(M^*)$  es  $\mathbb{Z}^n$  y por lo tanto,  $\Lambda^*(M^*)$  es  $\mathbb{Z}^n$ . De donde concluimos que  $\Lambda^*(M^*)/\Lambda(M^*)$  también es el grupo trivial. Por lo tanto, la afirmación se cumple en este caso. El caso  $r = n$  se sigue por dualidad.

Si  $0 < r < n$ , tomamos  $B$  una representación totalmente unimodular de  $M$  con  $r$  filas y  $B^*$  una representación totalmente unimodular de  $M^*$  con  $n - r$  filas y tal que cada fila de  $B$  es ortogonal a cada fila de  $B^*$ .

Sea  $\mathcal{H}_1 = \langle B \rangle$  el espacio generado por las filas de  $B$  y  $\mathcal{H}_2 = \langle B^* \rangle$  el espacio generado por las filas de  $B^*$ . Como  $0 < r < n$ ,  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  no son el espacio trivial  $\{\vec{0}\}$ . Tenemos entonces  $\mathbb{R}^n = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Así, un vector  $v \in \mathbb{Q}^n$  tiene una descomposición  $v = v_1 + v_2$ , donde  $v_1$  es la proyección de  $v$  sobre  $\mathcal{H}_1$  y  $v_2$  es la proyección de  $v$  sobre  $\mathcal{H}_2$ . Ahora el resultado se sigue del Teorema 3.2 y Lema 3.1, tomando la retícula entera unimodular  $\mathbb{Z}^n$ , siempre y cuando  $v_1$  y  $v_2$  estén en  $\mathbb{Q}^n$ .

Entonces probaremos que  $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}^n$ . Notemos que  $\langle v_1, B_i \rangle = \langle v, B_i \rangle \in \mathbb{Q}$  ya que cada fila  $B_i$  de  $B$  tiene entradas enteras.

Sea  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\langle nv_1, B_i \rangle = n \langle v_1, B_i \rangle \in \mathbb{Z}$  para todo  $1 \leq i \leq r$ . Entonces  $v'_1 = nv_1 \in \Lambda^*(M(B))$  y así  $v'_1 = \sum_{i=1}^r \lambda_i B'_i$ , donde los  $\lambda_i$  son enteros para  $1 \leq i \leq r$  y  $B'_1, \dots, B'_r$  es una base para  $\Lambda^*(M(B))$ . Entonces basta probar que  $B'_i \in \mathbb{Q}^n$ , para todo  $1 \leq i \leq r$ . Pero esto se cumple ya que los vectores  $B_1, \dots, B_r$  pertenecen a  $\mathbb{Q}^n$ , son linealmente independientes y también pertenecen a  $\Lambda^*(M(B))$ . Luego, por el Teorema de la Forma Normal de Hermite,  $\Lambda^*(M(B))$  tiene una base cuyos elementos son combinaciones racionales de los vectores  $B_1, \dots, B_r$ .  $\square$

### 3.4. Sistemas de juego

En esta sección introduciremos el concepto de sistema de juego que nos permitirá construir una generalización del juego de repartición de fichas para el caso de matroides.

**Definición 3.11.** Sea  $A$  una matriz de  $r \times n$ . Un cono poliédrico,  $C = C(A)$  en  $\mathbb{R}^n$ , con vértice en  $\vec{0}$ , es la intersección de una familia finita de

semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^n$ , dado por

$$\mathcal{H}_i^+ = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, v \rangle \geq 0\}$$

donde  $a_i$  es la fila  $i$  de la matriz  $A$ .

Claramente la familia de semiespacios  $\{\mathcal{H}_i^+ \mid 1 \leq i \leq r\}$  puede ser redundante, o sea, puede contener semiespacios que no son necesarios para determinar el cono. Nosotros consideramos sólo familias de semiespacios que no sean redundantes, es decir, suponemos que

$$\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} \mathcal{H}_i^+ \neq C$$

para cada  $j = 1, \dots, r$ .

Observe, sin embargo que diferentes matrices pueden producir el mismo cono.

**Lema 3.2.** Para cualquier matriz  $A$  de  $r \times n$  y cono  $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ , existe una matriz  $A^*$  tal que  $C(A) = C(A^*)$  y además para cada faceta  $F$  de  $C$ , existe solamente una fila  $a$  de  $A^*$  tal que  $F = \mathcal{H} \cap C$ , donde  $\mathcal{H} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, v \rangle = 0\}$

*Demostración.* Supongamos que  $\langle a_i, v \rangle = 0$ , para  $i < r_0$  y  $\langle a_i, v \rangle \geq 0$  para  $i \geq r_0$ , para todo  $v \in C$  y también para cada  $a_i$  con  $i \geq r_0$ , existe al menos un  $v \in C$  tal que  $\langle a_i, v \rangle > 0$ . Así

$$\langle C \rangle \subseteq \bigcap_{1 \leq i < r_0} \mathcal{H}_i^+$$

donde  $\langle C \rangle$  es el subespacio generado por los vectores en  $C$ , y

$$C = \langle C \rangle \cap \left( \bigcap_{r_0 \leq i \leq r} \mathcal{H}_i^+ \right)$$

Podemos suponer que  $\bigcap_{1 \leq i < r_0} \mathcal{H}_i^+ = \langle C \rangle$ , ya que  $\langle C \rangle$  se puede expresar como una intersección finita de semiespacios (es el kernel de la proyección sobre su espacio ortogonal).

Si consideramos el espacio  $\mathcal{H} = \langle C \rangle$  entonces

$$C = \bigcap_{r_0 \leq i \leq r} (\mathcal{H}_i^+ \cap \mathcal{H})$$

Así,  $C$  es un cono de dimensión completa en  $\mathcal{H}$  y la familia de semiespacios de  $\mathcal{H}$  es irredundante. Se sabe de [15] que  $F_i = C \cap (\mathcal{H}_i^+ \cap \mathcal{H})$  con  $r_0 \leq i \leq r$ , es una faceta de  $C$ , esto es,  $C \cap \mathcal{H}_i^+$  es una faceta de  $C$ . Por lo tanto, podemos encontrar una matriz  $A^*$  de  $r' \times n$  tal que para las primeras  $r'_0$  filas se tiene que  $\langle a, v \rangle = 0$  para todo  $v \in C$ , donde  $0 \leq r'_0 \leq r'$ . También cada una de las filas dejadas define una faceta diferente de  $C$ . □

A la matriz  $A^*$  se le llama *matriz canónica* para el cono  $C(A)$ , tal matriz no es única pero supondremos que  $A = A^*$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  entonces podemos ver que la última fila

de la matriz  $A$  es redundante, así podemos tomar  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  Ambas matrices generan el cono  $C(A)$  mostrado en la Figura 3.2.

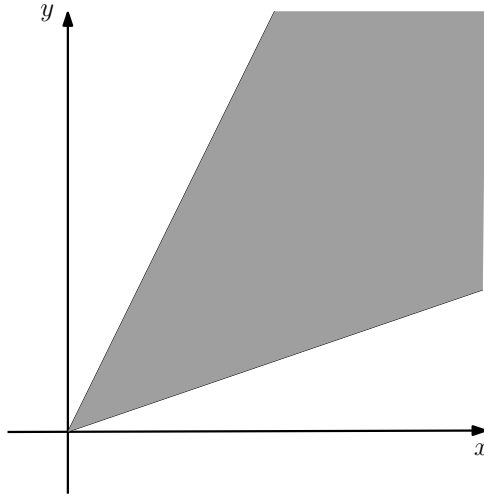


Figura 3.2: Parte del cono  $C(A)$  generado por  $A$  y  $A^*$

**Definición 3.12.** *Un sistema de adición vectorial es un triple  $(C, V, b)$ , donde  $C$  es un cono poliédrico en  $\mathbb{R}^n$  con vértice en el origen,  $V$  es un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $b$  es cualquier vector fijo en  $C$ .*

Un lenguaje de adición vectorial es el conjunto de todas las sucesiones  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de vectores en  $V$  tal que  $b + v_1 + \dots + v_j \in C$  para cada  $1 \leq j \leq k$ .

**Definición 3.13 (Sistema de juego).** Un sistema de juego  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  es un triple ordenado  $(C(A), V, I)$  que consiste en

1. Un cono poliédrico  $C(A)$  en  $\mathbb{R}^n$ .
2. Un conjunto finito de vectores  $V$  en  $\mathbb{R}^n$ . A los elementos de  $V$  se le llaman reglas del juego.
3. Un conjunto  $I \subseteq C(A)$ . A los elementos de  $I$  se les llaman configuraciones iniciales.

A cada sistema de juego le asociamos una familia de lenguajes  $\{\mathcal{L}(b)\}_{b \in I}$ , donde

$$\mathcal{L}(b) = \{v_1 \cdots v_k \mid b + v_1 + \dots + v_j \in C(A), 1 \leq j \leq k, k \in \mathbb{N}\}$$

**Definición 3.14 (Disparo legal).** Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de juego. Un disparo legal con configuración inicial  $b$  es cualquier palabra  $\sigma \in \mathcal{L}(b)$ .

**Definición 3.15 (Subjuego).** Dadas dos matrices  $A$  y  $A'$ , un sistema de juego  $\mathcal{G} = (C(A), V, I)$  sobre  $\mathbb{R}^n$  es un subjuego del sistema de juego  $\mathcal{G}' = (C(A'), V', I')$  sobre  $\mathbb{R}^m$  si existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:

1.  $f(C(A)) \subseteq C(A')$ .
2.  $f(V) \subset V'$  y si  $x, y \in V$  con  $x \neq y$ , entonces  $f(x) \neq f(y)$ .
3.  $f(I) \subseteq I'$ .

Si  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son sistemas de juego y  $\mathcal{G}$  es un subjuego de  $\mathcal{G}'$  determinado por la función lineal  $f$ , sus lenguajes asociados están relacionados por la función  $\hat{f}$  del conjunto de todas las palabras sobre  $V$  al conjunto de todas las palabras sobre  $V'$  definido por  $\hat{f}(x_1 \cdots x_k) = f(x_1) \cdots f(x_k)$ . Esta función satisface la condición  $\hat{f}(\mathcal{L}(b)) \subseteq \mathcal{L}(f(b))$  para todo  $b \in I$ . Además, esta función es solo un reetiquetado del conjunto de símbolos de  $V$ , así que podemos pensar que lenguaje  $\mathcal{L}(b)$  está contenido en el lenguaje  $\mathcal{L}(f(b))$ , para cada  $b \in I$ .

**Definición 3.16.** Decimos que dos sistemas de juego  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son equivalentes si  $\mathcal{G}$  es un subjuego de  $\mathcal{G}'$  y  $\mathcal{G}'$  es un subjuego de  $\mathcal{G}$ .

Esto da una relación de equivalencia entre todos los sistemas de juego.

Usamos este concepto cuando queremos un proceso de juego en matroides regulares que no dependa de la representación totalmente unimodular del matroide.

Se puede ver que si  $\mathcal{G} = (C(A), V, I)$  es un sistema de juego, entonces para cada  $b \in I$ , el lenguaje  $\mathcal{L}(b)$  es izquierdo-hereditario y permutable, [6]. Sin embargo no es localmente libre.

Para garantizar que  $\mathcal{L}(b)$  sea localmente libre, supondremos la siguiente propiedad:

**Propiedad (\*):** Para cada fila  $a$  de  $A$ , existe a lo más un vector  $v \in V$  con  $\langle a, v \rangle < 0$ .

Con esta propiedad se puede probar que el lenguaje es localmente libre (ver [20]).

**Lema 3.3.** Si  $\mathcal{G} = (C(A), V, I)$  es un sistema de juego que satisface la propiedad (\*), entonces para cada  $b \in I$ , el lenguaje  $\mathcal{L}(b)$  es localmente libre.

*Demostración.* Sea  $b \in I$  y  $\sigma = v_1 \cdots v_k \in \mathcal{L}(b)$  tal que  $\sigma x$  y  $\sigma y$  estén en  $\mathcal{L}(b)$  para  $x, y \in V$  con  $x \neq y$ . Probaremos que  $\sigma xy \in \mathcal{L}(b)$ .

Sea  $w = b + V_1 + \cdots + v_k$ . Entonces esto es equivalente a probar que  $w + x + y \in C(A)$ .

Ahora, dada cualquier fila  $a$  de  $A$ ,  $\langle a, x \rangle$  y  $\langle a, y \rangle$  no pueden ser ambos negativos por la propiedad (\*). Supongamos que  $\langle a, x \rangle \geq 0$ . Así

$$\langle a, w + x + y \rangle = \langle a, w + y \rangle + \langle a, x \rangle \geq 0$$

ya que por hipótesis  $\langle a, w + y \rangle \geq 0$ .

Por lo tanto, para cada fila  $a$  de  $A$ , tenemos que  $\langle a, w + x + y \rangle \geq 0$ . Por lo tanto,  $w + x + y \in C(A)$ .  $\square$

### Sistema de juego de Björner, Lovász y Shor

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $Q$  su matriz de Laplace con columnas etiquetadas por los vértices. Consideremos el sistema de juego  $(C(A), V, I)$ , donde  $A$  es la matriz identidad de  $n \times n$ , es decir, el cono es el octante positivo;  $V$  consiste de los vectores columna de la matriz  $-Q$  e  $I$  es el conjunto de puntos enteros en  $C(I_n)$ . Como se puede ver, este sistema de juego satisface la propiedad (\*) y corresponde al juego de repartición de fichas de [5] ya mencionado en el capítulo anterior.

### 3.5. Un proceso de repartición de fichas general

La siguiente definición nos permite generalizar el juego de repartición de fichas de gráficas estudiado en el capítulo anterior.

**Definición 3.17 (Proceso de repartición de fichas).** Si  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$  es un sistema de juego, llamamos al par  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas si se cumple que:

- $\mathcal{G}$  satisface la propiedad (\*).
- $V$  es un conjunto de vectores linealmente independientes.
- $q \in \Lambda(V)$ , donde  $\Lambda(V)$  es la retícula generada por los vectores en  $V$ .
- $I = C(A) \cap \Lambda'$ , donde  $\Lambda'$  es una retícula que contiene a  $\Lambda(V)$  como subretícula.

**Definición 3.18 (Disparo  $q$ -legal).** En un proceso de repartición de fichas  $(\mathcal{G}, q)$ , decimos que  $\sigma \in \mathcal{L}(b)$  es un disparo  $q$ -legal con configuración inicial  $b$  si  $\sigma = v_1 \cdots v_k$  es tal que siempre que  $q = v_j$  para algún  $1 \leq j \leq k$ , entonces  $\sigma' = v_1 \cdots v_{j-1}x$  no pertenece a  $\mathcal{L}(b)$  para cualquier  $x \in V$ , donde si  $j = 1$ ,  $\sigma' = x$ .

Del mismo modo que se hizo anteriormente, asociamos una familia de lenguajes  $\{\mathcal{L}_q(b)\}_{b \in I}$ , donde  $\mathcal{L}_q(b)$  es el conjunto de los disparos  $q$ -legales con configuración inicial  $b$ . El siguiente lema es similar al Lema 2.3.

**Lema 3.4.** Si  $(\mathcal{G}, q)$  es un proceso de repartición de fichas,  $\mathcal{L}_q(b)$  es un lenguaje izquierdo hereditario, localmente libre y permutable.

*Demostración.* Como  $\mathcal{L}(b)$  es izquierdo hereditario, permutable y localmente libre y además  $\mathcal{L}_q(b) \subseteq \mathcal{L}(b)$ , entonces se pueden verificar las propiedades para  $\mathcal{L}_q(b)$ .  $\square$

Del mismo modo que en el caso gráfico, definimos a continuación tres tipos de configuraciones especiales.

**Definición 3.19.** Sea  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas.

1. Un elemento  $b' \in I$  es una configuración final después de un disparo  $q$ -legal  $\sigma$  con configuración inicial  $b$  si  $\sigma = v_1 \cdots v_k$  y  $b' = b + v_1 + \cdots + v_k$ . Esto lo denotamos por  $b \rightarrow b'$ .
2. Una configuración inicial  $b$  es estable si  $\mathcal{L}_q(b)$  tiene a  $q$  como prefijo de cada palabra.
3. Suponga que comenzamos con una configuración inicial  $b$  y que después de un disparo  $q$ -legal  $\sigma = v_1 \cdots v_k$  con  $k \geq 1$  llegamos a la misma configuración inicial  $b$ , entonces decimos que  $b$  es una configuración recurrente.
4. Una configuración inicial es crítica si es estable y recurrente.

Ahora definiremos un lenguaje que será el que estudiaremos en adelante. Sea  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas. Entonces para cada  $b \in I$ , definimos el lenguaje

$$\overline{\mathcal{L}}_q(b) = \{ \sigma \in \mathcal{L}_q(b) \mid \sigma \text{ es un disparo } q\text{-legal que comenzando desde } b \text{ se puede extender a un disparo legal que produce una configuración crítica y para cualquier prefijo propio } v_1 \cdots v_k \text{ de } \sigma, b + v_1 + \cdots + v_k \text{ no es crítica} \}$$

El siguiente lema aparece en [20] y reproducimos su demostración.

**Lema 3.5.** Si  $(\mathcal{G}, q)$  es un proceso de repartición de fichas, entonces  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  es lenguaje izquierdo hereditario, localmente libre y permutable.

*Demostración.* La prueba es similar a la prueba del Lema 2.3. □

**Definición 3.20 (Procesos equivalentes).** Decimos que dos procesos de repartición de fichas,  $(\mathcal{G}, q)$  y  $(\mathcal{G}', q')$ , son equivalentes si los sistemas de juego  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son equivalentes usando las funciones lineales  $f$  y  $g$  y  $f(q) = q'$ ,  $g(q') = q$ .

### Sistema de juego de Norman Biggs

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $Q$  su matriz de Laplace con columnas etiquetadas por los vértices y sea  $v \in V(G)$ . Consideremos el sistema de juego  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , donde  $C(A)$  es generado por

los vectores  $e_i - e_v$  y los  $e_i$ 's son la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  con coordenadas etiquetadas como los vértices de  $G$ .

Aquí,  $V \cup \{q\}$  es el conjunto de vectores columnas de  $-Q$ ,  $q$  es la columna correspondiente al vértice  $v$  e  $I = \mathbb{Z}^n \cap C(A)$ . Una matriz  $A$  para el cono  $C(A)$  es la matriz cuyas dos primeras filas son los vectores  $\vec{1}$  y  $-\vec{1}$ , donde  $\vec{1}$  es el vector cuyas entradas todas son 1. Las siguientes  $n - 1$  filas son los vectores  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , con  $e_i \neq e_v$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro entonces que este sistema de juego satisface la propiedad (\*). Este sistema de juego corresponde al juego de repartición de fichas estudiado en el capítulo 2.

**Ejemplo 3.3.** Consideremos la gráfica completa  $K_5$ . Su matriz de Laplace se muestra abajo

$$Q = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Entonces tomando  $v_5$  como vértice especial, tenemos el sistema de juego  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$ , donde el cono  $C(A)$  es generado por las columnas de la matriz  $T$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y el conjunto de reglas es  $V \cup \{q\} = \{-v_1, -v_2, -v_3, -v_4, q\}$ , con  $q = -v_5$

$I = \mathbb{Z}^5 \cap C(A)$  En este caso, la matriz  $A$  para el cono  $C(A)$  es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que

$$C(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_i \geq 0, i \neq 5\}$$

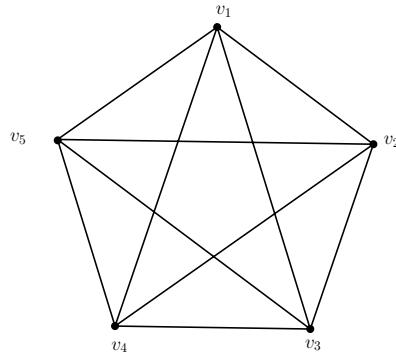


Figura 3.3: Gráfica  $K_5$

Las configuraciones críticas de  $K_5$  son 125 y se muestran por niveles en la Tabla 3.1. Se indica el número de permutaciones por cada grupo.

### 3.6. El proceso de repartición de fichas cónico

Un proceso de repartición de fichas cónico se puede contruir de la siguiente manera. Dada dos retículas  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  en  $\mathbb{R}^n$ , con  $\Lambda$  subretícula de  $\Lambda'$ , podemos construir el proceso de repartición de fichas  $(\mathcal{G}, q)$ , donde  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$ . Tomamos  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$  una base de  $\Lambda$ , como conjunto de reglas.

Configuraciones críticas de $K_5$		
Nivel	Configuración	Número de permutaciones
Cero	(0,1,2,3)	24
Uno	(0,1,3,3)	12
	(0,2,2,3)	12
	(1,1,2,3)	12
Dos	(0,2,3,3)	12
	(1,1,3,3)	6
	(1,2,2,3)	12
Tres	(0,3,3,3)	4
	(1,2,3,3)	12
	(2,2,2,3)	4
Cuatro	(1,3,3,3)	4
	(2,2,3,3)	6
Cinco	(2,3,3,3)	4
Seis	(3,3,3,3)	1

Tabla 3.1: Configuraciones críticas del Ejemplo 3.3

El cono  $C(A)$  será generado por  $\{-v_1, \dots, -v_k\}$ , es decir,

$$C(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i (-v_i) \mid \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k \right\}$$

Este cono tiene  $k$  facetas ya que  $k - 1$  vectores generan una faceta y cualquier faceta se obtiene como una combinación lineal positiva de éstos vectores.

El vector  $q$  será  $\sum_{i=1}^k (-v_i)$  e  $I = \Lambda' \cap C(A)$ . Este sistema de juego satisface la propiedad (\*), ya que para cualquier  $v_i \in V$ , tenemos que  $v_i$  pertenece a  $k - 1$  facetas de  $C(A)$ , así  $\langle a, v_i \rangle < 0$  para exactamente una fila de  $A$ , ya que  $-v_i \in C(A)$ .

Si un proceso de repartición de fichas se puede obtener por este procedimiento, se le llama *juego de repartición de fichas cónico*.

Si  $(\mathcal{G}, q)$  y  $(\mathcal{G}', q')$  son procesos de repartición de fichas cónico obtenidos de las mismas retículas  $\Lambda$  y  $\Lambda'$ , entonces son procesos de repartición de fichas equivalentes.

En un proceso de repartición de fichas general, el conjunto de configuraciones estables podría ser vacío o infinito, por lo que las configuraciones

críticas pueden no existir en el caso general. Pero esto no sucede en el caso de procesos de repartición de fichas cónicos, tal y como lo demuestra el siguiente resultado de [20] cuyo enunciado y demostración se esboza a continuación.

**Teorema 3.6.** Si  $(\mathcal{G}, q)$  es un juego de repartición de fichas cónico, entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- El conjunto de configuraciones estables es finito.
- Para cualquier configuración inicial  $b$ , el lenguaje  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  es no vacío y tiene rango finito.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$  el juego de repartición de fichas cónico, donde  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Podemos suponer que la fila  $i$  de  $A$ ,  $a_i$ , es el vector fila que define la faceta de  $C(A)$  generada por  $V - \{v_i\}$ . Probaremos que el conjunto de configuraciones estables es el conjunto:

$$S = I \cap \{b \in C(A) \mid 0 \leq \langle b, a_i \rangle < \langle -v_i, a_i \rangle, 1 \leq i \leq k\}$$

La configuración inicial  $b$  es estable si y sólo si  $b \in I$  y para todo  $1 \leq i \leq k$ , tenemos que  $b + v_i \notin C(A)$ . Esto sucede si y sólo si  $b \in I$  y para todo  $1 \leq i \leq k$ , existe una fila  $a$  de  $A$  tal que  $\langle a, b + v_i \rangle < 0$ . Es decir,  $b$  es estable si y sólo si  $b \in I$  y para todo  $1 \leq i \leq k$  existe una fila  $a$  de  $A$  tal que  $0 \leq \langle a, b \rangle < \langle a, -v_i \rangle$ . Esta  $a$  tiene que ser la fila  $i$  de  $A$  y así que  $b \in S$

Demostremos la segunda parte. Si  $b$  es cualquier configuración inicial, entonces la regla  $q$  asegura que  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  tiene palabras de longitud infinita. Si  $b' \in C(A)$ , entonces para cada fila  $j$  de  $A$ , digamos  $a_j$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \langle a_j, b' + v_i \rangle &< \langle a_j, b' \rangle && \text{si } i = j \\ \langle a_j, b' + v_i \rangle &= \langle a_j, b' \rangle && \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

Como no podemos tener una sucesión infinita de elementos consecutivos de  $V$ , entonces una palabra de longitud infinita de  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  debe tener el símbolo  $q$  un número infinito de veces. Pero cada vez que usamos  $q$ , significa que hemos llegado a una configuración estable y como hay solamente un número finito de éstas configuraciones, entonces una configuración estable tiene que ser repetida, entonces esta tiene que ser crítica. Por lo tanto,  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  es no vacío. Y como  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  tiene una palabra de longitud finita, entonces  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  tiene rango finito.  $\square$

**Ejemplo 3.4.** Consideremos el proceso de repartición de fichas donde  $\Lambda$  es generada por los vectores  $(-1, -2)$  y  $(-2, -1)$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\Lambda'$  su retícula dual  $\Lambda^*$ . En la Figura 3.4, la región sombreada es parte del cono  $C(A)$  y las  $x$ 's dentro de esta región son las configuraciones iniciales del proceso. Los cuadrados representan elementos de la retícula  $\Lambda$  y los puntos representan los elementos de  $\Lambda^*$ . Los dos vectores con líneas sólidas representan a los vectores  $(1, 2)$  y  $(2, 1)$  y el vector con líneas punteadas corresponde al vector  $q$ .

El paralelogramo rayado dentro del cono contiene las configuraciones estables del proceso.

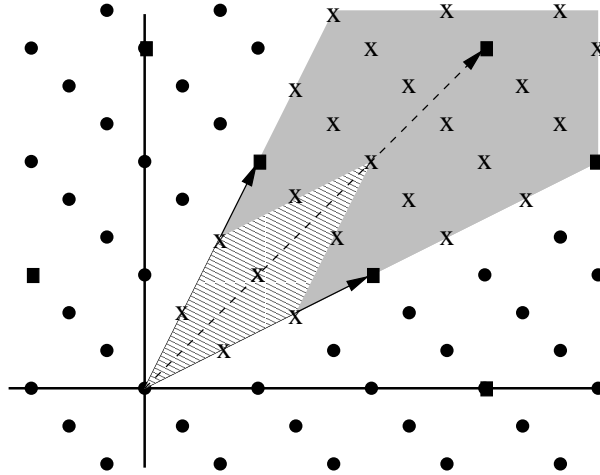


Figura 3.4: Ejemplo de un proceso de repartición de fichas cónico

El siguiente corolario se prueba en [20] y es una extensión del Teorema 2.4.

**Corolario 3.1.** Sea  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas cónico. Entonces para cualquier configuración inicial  $b$ , existe una única configuración crítica  $c$  tal que  $b \rightarrow c$ . En particular, si  $b$  es crítica, entonces  $b = c$ .

*Demostración.* Por el teorema anterior,  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  es no vacío. Este lenguaje tiene como palabras básicas a todos los disparos  $q$ -legales que comenzando desde  $b$  terminan en una configuración crítica y que no pasan a través de alguna otra configuración crítica. Tomemos una de estas,  $c$ .

Por el Lema 3.5 y Lema 2.1,  $\overline{\mathcal{L}}_q(b)$  tiene la propiedad de intercambio fuerte, por lo que todas las palabras básicas tienen la misma longitud y

también cualesquiera dos palabras básicas son equivalentes. Por lo tanto, por el Lema 2.2, tienen el mismo puntaje y por lo tanto conducen a la misma configuración crítica. Así, esta configuración  $c$  es única.  $\square$

### 3.6.1. Grupo de las configuraciones críticas de un proceso de repartición de fichas

Para un proceso de repartición de fichas cónico  $(\mathcal{G}, q)$ , denotamos por  $K(\mathcal{G})$  al conjunto de configuraciones críticas. Dada una configuración inicial  $b$ , usaremos  $\gamma(b)$  para denotar a la única configuración crítica que es garantizada por el Corolario 3.1.

**Lema 3.6.** Sean  $\Lambda \subseteq \Lambda'$  dos retículas de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas cónico obtenido de  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  como se mencionó anteriormente. Entonces la función  $\phi : K(\mathcal{G}) \rightarrow \Lambda'/\Lambda$  definido por  $\phi(c) = [c]_\Lambda$  es una biyección, donde  $[c]_\Lambda$  es la clase lateral de  $c$  en  $\Lambda'/\Lambda$

*Demostración.* Sea  $\{v_1, \dots, v_k\}$  una base para  $\Lambda$ . Supongamos que  $c_1, c_2 \in K(\mathcal{G})$  tal que  $[c_1]_\Lambda = [c_2]_\Lambda$ . Entonces  $c_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$  y  $c_2 = \sum_{i=1}^k \lambda'_i v_i$  con  $\lambda'_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}$  para  $1 \leq i \leq k$ . Pero como  $c_1$  y  $c_2$  están en el cono generado por  $\{-v_1, \dots, -v_k\}$ , podemos suponer que  $\lambda'_i, \lambda_i \leq 0$ , con  $1 \leq i \leq k$ . El vector  $b = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \lambda'_i) v_i$  es una configuración inicial tal que  $b \rightarrow c_1$  y  $b \rightarrow c_2$ . Así, por el corolario anterior,  $c_1 = c_2$ . Por lo tanto,  $\phi$  es inyectiva.

Sea  $[b]_\Lambda \in \Lambda'/\Lambda$ . Podemos escoger un representante  $b$  en el conjunto de configuraciones iniciales ya que el cono de  $\mathcal{G}$  contiene un conjunto abierto no acotado de  $\langle \Lambda \rangle$ , el espacio generado por  $\Lambda$ , que tiene que intersectar a la clase lateral  $[b]_\Lambda$  ya que  $\langle \Lambda \rangle / (b + \Lambda)$  es compacto por definición de grupo vectorial discreto. Entonces  $\gamma(b) = b + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$  con  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  para  $1 \leq i \leq k$  y así  $\phi(\gamma(b)) = [b]_\Lambda$ . Por lo tanto,  $\phi$  es sobre.  $\square$

Igual como se hizo con gráficas [4], en el conjunto de configuraciones críticas podemos definir una operación de grupo  $*$  de la siguiente manera: Si  $c_1$  y  $c_2$  son configuraciones críticas, entonces  $c_1 * c_2$  es la única configuración crítica  $c_3$  tal que  $[c_1]_\Lambda + [c_2]_\Lambda = [c_3]_\Lambda$ . Pero por la prueba del Lema 3.6, tenemos que esta configuración crítica tiene que ser  $\gamma(c_1 + c_2)$ . Por lo tanto  $c_1 * c_2 = \gamma(c_1 + c_2)$ .

Así, se tiene el siguiente teorema (ver [20]).

**Teorema 3.7.**  $\Lambda \subseteq \Lambda'$  dos retículas de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas cónico obtenido de  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  como se mencionó anteriormente. Entonces el conjunto de configuraciones críticas se le puede dar una estructura de grupo abeliano y el orden del grupo es igual al orden del grupo  $\Lambda'/\Lambda$ .

### 3.7. Un juego de repartición de fichas para matroides regulares

Para definir el juego de repartición de fichas de un matroide regular, construiremos un proceso de repartición de fichas cónico de la siguiente manera.

Sea  $M$  un matroide regular. Entonces consideramos la retícula de cocircuitos  $\Lambda(M)$  y su retícula dual  $\Lambda^*(M)$  para construir un proceso de repartición de fichas. Aquí estamos suponiendo una representación totalmente unimodular del matroide regular. Es claro que  $\Lambda(M) \subseteq \Lambda^*(M)$  ya que  $\Lambda(M)$  es una retícula entera. Así, definimos *el juego de repartición de fichas* de un matroide regular  $M$  como este proceso de repartición de fichas cónico así construido.

Sabemos que una representación totalmente unimodular particular  $B$  de  $M$  da una retícula particular  $\Lambda(B)$  en  $C(M(B))$ , pero como se dijo en la primera sección de este capítulo, cualesquiera dos de éstas retículas son congruentes y los espacios que ellos generan están relacionados por un isomorfismo. Así se obtienen procesos de repartición de fichas equivalentes.

El siguiente teorema, (ver [20]), muestra la relación entre el número de configuraciones críticas del juego de repartición de fichas y el número de bases del matroide regular  $M$ .

**Teorema 3.8.** Sea  $M$  un matroide regular. El número de configuraciones críticas del juego de repartición de fichas de  $M$  es igual al número de bases de  $M$

*Demostración.* Por el Teorema 3.7, el número de configuraciones críticas de  $M$  es igual al orden del grupo  $\Lambda^*(M)/\Lambda(M)$  que a su vez es igual al número de bases de  $M$  por el Teorema 3.4.  $\square$

**Ejemplo 3.5.** Consideremos el matroide gráfico que proviene de la gráfica completa  $K_3$ , cuya representación totalmente unimodular  $B$  se muestra en la Figura 3.5.

Construimos el sistema de juego  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup q, I)$  donde

$$V = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

$$q = (-1, -1, 2)$$

$$C(A) = \{\alpha(-1, 0, 1) + \beta(0, -1, 1) \mid \alpha, \beta \geq 0\}$$

$$I = C(A) \cap \Lambda^*$$

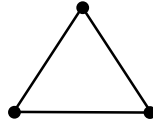
Una base entera para  $\Lambda^*$  es

$$\left\{ \left( \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}$$

Las configuraciones críticas del juego son tres:

$$(0, 0, 0), \left( -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left( -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

y tres son los árboles generadores de  $K_3$ .



$K_3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.5: Gráfica  $K_3$  y la representación unimodular  $B$  de  $M(G)$

**Definición 3.21 (Grupo crítico de un matroide regular).** *Para un matroide regular  $M$ , definimos el grupo crítico de  $M$  como el grupo de las configuraciones críticas de su juego de repartición de fichas.*

El siguiente teorema (ver [20]) es la extensión del Teorema 2.9.

**Teorema 3.9.** Si  $M$  es un matroide regular, entonces el grupo crítico de  $M$  es isomorfo al grupo crítico de  $M^*$

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del Teorema 3.5 □

**Ejemplo 3.6.** Consideremos el matroide regular  $\mathbf{R}_{10}$  cuya representación totalmente unimodular  $B$  se muestra abajo. El número de bases de este matroide es 162.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que la matriz Gram  $Q$  es:

$$Q = BB^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando la Forma Normal de Smith a  $Q$  tenemos:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Así, el grupo crítico del matroide  $\mathbf{R}_{10}$  es  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 3.7.** Otro matroide regular de interés es el matroide regular  $\mathbf{R}_{12}$  cuya representación totalmente unimodular es:

$$B = \begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ I_6 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El número de bases de este matroide es 441 y su matriz Gram es:

$$Q = BB^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Al calcular la Forma Normal de Smith obtenemos:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el grupo crítico asociado a este matroide es  $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ .

### 3.8. Conclusiones

Como se puede notar, el proceso de repartición de fichas cónico proporciona el número de configuraciones críticas correcto, sin embargo no existe una partición por nivel de tal manera que el número de configuraciones de cada nivel corresponda al coeficiente del polinomio de Tutte en  $x = 1$ .

Por otro lado, la propiedad  $\langle a_i, v_i \rangle < 0$  y  $\langle a_i, v_j \rangle = 0$  es interesante en este juego pues permite preservar la alcanzabilidad de una configuración crítica a partir de una configuración inicial cualquiera. Entonces, ¿existirá un juego que satisfaga esta propiedad y que no sea el proceso de repartición cónico?. Quizás analizando otros sistemas de juego haciendo uso de la computadora podría darnos una idea de la condición que permita generalizar el juego de manera correcta.



# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se exponen los resultados obtenidos en un intento por encontrar una extensión total del juego de repartición de fichas a matroides regulares. En la sección 4.1 se expone un ejemplo de sistema de juego similar a la generalización que se usó en el capítulo anterior para el juego de Norman Biggs. Se usa una matriz tipo *Laplaciano* que se obtiene de la representación totalmente unimodular del matroide. Sin embargo, como veremos, este ejemplo tiene ciertos defectos.

Finalmente, se demuestra un resultado del juego de repartición de fichas cónico mostrando la necesidad de una propiedad del juego.

### 4.1. Un sistema de juego para el matroide regular $\mathbf{R}_{10}$

Como ya se mencionó anteriormente, dada una gráfica  $G$ , la matriz de Laplace de  $G$ , denotada por  $Q$ , satisface

$$Q = DD^t$$

donde  $D$  es la matriz de incidencia de la gráfica  $G$ .

En el capítulo anterior (sección 3.5) vimos que el juego de repartición de fichas de Norman Biggs se puede generalizar usando un sistema de juego, donde el conjunto de reglas  $V \cup \{q\}$  son las columnas de la matriz  $-Q$ . Imitando esta construcción se obtuvo un sistema de juego para el matroide regular  $\mathbf{R}_{10}$ .

Sea el matroide regular  $\mathbf{R}_{10}$  cuya representación totalmente unimodular se muestra abajo.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A partir de esta representación totalmente unimodular construimos una matriz  $\widehat{M}$ , similar a la matriz de incidencia. Es decir, la matriz  $\widehat{M}$  es una matriz de  $6 \times 10$  cuyas primeras 5 filas son las mismas que las de la matriz  $M$ . La fila 6 de  $\widehat{M}$  es la suma negativa de las filas anteriores. Por lo tanto, la matriz  $\widehat{M}$  es:

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora, a partir de la matriz  $\widehat{M}$  construimos una matriz similar a la matriz de Laplace a la que denotaremos por  $\widehat{Q}$  y que se obtiene como  $\widehat{Q} = \widehat{M}\widehat{M}^t$ . Así obtenemos

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, considerando el polinomio de Tutte de este matroide visto en el Ejemplo 1.18, tenemos que:

$$T(R_{10}; 1, y) = 51 + 55y + 35y^2 + 15y^3 + 5y^4 + y^5$$

Es deseable entonces, encontrar un sistema de juego que satisfaga las condiciones de la Definición 3.17, que proporcione una partición de las configuraciones críticas del juego por niveles y que la cantidad de configuraciones

de cada nivel corresponda a cada coeficiente del polinomio  $T(R_{10}; 1, y)$ . Con esto se extendería el Teorema 2.6 al caso de matroides regulares.

#### 4.1.1. Un proceso de repartición de fichas para el matroide regular $\mathbf{R}_{10}$

Con la matriz  $\widehat{Q}$  definida y calculada para el matroide  $\mathbf{R}_{10}$  podemos construir un proceso de repartición de fichas *especial*  $(\mathcal{G}, q)$  con  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$ , donde  $V \cup \{q\}$  son las columnas de la matriz  $-\widehat{Q}$ ,  $q$  es la última columna de  $-\widehat{Q}$ , el cono  $C(A)$  es el cono generado por los vectores  $e_i - e_q$ ,  $I = C(A) \cap \mathbb{Z}^6$ .

El juego es *especial* debido a que este sistema de juego no satisface la propiedad (\*). Por lo que no podemos llamarlo *proceso de repartición de fichas* como tal de acuerdo a la Definición 3.17. Esto hace que no podamos trabajar con un lenguaje localmente libre. Llamaremos a este proceso  $(\mathcal{G}, q)$  *proceso de repartición de fichas no abeliano*.

Sin embargo, bajo este sistema de juego podemos definir tres tipos de configuraciones similares a las definidas en el capítulo anterior haciendo ciertas modificaciones.

**Definición 4.1 (Sucesión legal).** *Una sucesión legal para una configuración  $\theta = \theta_1$  es una sucesión de vértices distintos  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que el vértice  $v_i$  está listo en  $\theta_i$ , donde la configuración  $\theta_i$  se obtiene de la configuración  $\theta_{i-1}$  al disparar  $v_{i-1}$ .*

**Definición 4.2 (Configuración estable).** *Una configuración  $\theta$  es estable si en toda sucesión legal  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  se tiene que  $v_1 = q$ . Es decir, el vector  $q$  es el primero que se dispara.*

**Definición 4.3 (Configuración recurrente).** *Una configuración  $\theta = \theta_0$  es recurrente si se tiene una sucesión legal  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que  $\theta_0 = \theta_n$ , donde  $\theta_n$  es la configuración que se obtiene al disparar  $v_n$ .*

**Definición 4.4 (Configuración crítica).** *Una configuración es crítica si es estable y recurrente tal que toda sucesión legal maximal es de tamaño  $n$ , donde  $n$  es el número de elementos de  $V \cup \{q\}$ .*

Tomando en cuenta estos nuevos conceptos, se obtuvo un conjunto de configuraciones críticas correspondientes al sistema de juego  $(\mathcal{G}, q)$  del matroide  $\mathbf{R}_{10}$ . Imitando lo que hicimos en el caso gráfico, proyectamos sobre

la última coordenada de cada configuración, ya que la última coordenada es la suma negativa de las anteriores. Una vez hecho esto, podemos agrupar las configuraciones tomando como criterio de que pertenecen al mismo nivel aquellas que tengan la misma norma 1. Con esto en mente, se observa que la cantidad de configuraciones críticas de los primeros seis grupos corresponden a los coeficientes del polinomio  $T(R_{10}; 1, y)$  como se muestra en la Tabla 4.1.

Configuraciones críticas del matroide $R_{10}$		
Nivel	Configuración	Permutaciones críticas
Cinco	(3,3,3,3,3)	1
Cuatro	(2,3,3,3,3)	5
Tres	(2,2,3,3,3)	10
	(1,3,3,3,3)	5
Dos	(1,2,3,3,3)	20
	(2,2,2,3,3)	10
	(0,3,3,3,3)	5
Uno	(0,2,3,3,3)	20
	(1,2,2,3,3)	30
	(2,2,2,2,3)	5
Cero	(0,2,2,3,3)	30
	(1,2,2,2,3)	20
	(2,2,2,2,2)	1

Tabla 4.1: Configuraciones críticas del matroide  $R_{10}$

Sin embargo, existen otras configuraciones que también son críticas y son de norma inferior a las de nivel cero mostradas en la Tabla 4.1. Estas configuraciones críticas excedentes se muestran en la Tabla 4.2.

Las siguientes propiedades se pueden observar en las configuraciones críticas del juego y se establecen como conjeturas.

**Conjetura 4.1.** Las configuraciones críticas son cerradas hacia arriba. Es decir, si  $d_1$  es una configuración crítica y  $d_2 > d_1$ , entonces también  $d_2$  es una configuración crítica.

**Conjetura 4.2.** Las configuraciones críticas mínimas son todas de la misma norma.

Otras configuraciones críticas del matroide $\mathbf{R}_{10}$		
Nivel	Configuración	Permutaciones críticas
-1	(0,2,2,2,3)	20
	(1,2,2,2,2)	5
	(0,2,1,3,3) (0,2,3,1,3) (0,3,1,2,3)	Se enumeraron las 30 configuraciones de este grupo ya que las 30 configuraciones restantes no son críticas
	(0,3,1,3,2) (0,3,2,1,3) (0,3,3,1,2)	
	(1,2,0,3,3) (1,2,3,0,3) (1,3,0,2,3)	
	(1,3,0,3,2) (1,3,2,0,3) (1,3,3,0,2)	
	(2,0,3,1,3) (2,0,3,3,1) (2,1,3,0,3)	
	(2,1,3,3,0) (2,3,0,3,1) (2,3,1,3,0)	
	(3,0,2,1,3) (3,0,2,3,1) (3,0,3,1,2)	
	(3,0,3,2,1) (3,1,2,0,3) (3,1,2,3,0)	
	(3,1,3,0,2) (3,1,3,2,0) (3,2,0,3,1)	
	(3,2,1,3,0) (3,3,0,2,1) (3,3,1,2,0)	
	-2	(0,2,2,2,2)

Tabla 4.2: Otras configuraciones críticas del matroide  $R_{10}$

## 4.2. Un sistema de juego para el matroide regular $M^*(K_{3,3})$

El juego definido para el matroide regular  $\mathbf{R}_{10}$  en la sección 4.1 funcionó en cierto sentido si ignoramos las configuraciones excedentes. Sin embargo, este juego ya no funciona para el matroide dual de  $K_{3,3}$ , denotado por  $M^*(K_{3,3})$ . Usando la representación matricial del matroide  $M^*(K_{3,3})$  que se obtiene al contraer un elemento del matroide regular  $\mathbf{R}_{10}$  tenemos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Realizando el mismo procedimiento que se usó en el caso del matroide  $\mathbf{R}_{10}$  para obtener  $\widehat{M}$  calculamos  $\widehat{Q}$  y tenemos:

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz  $\widehat{Q}$ , construimos al igual que antes, el juego no abeliano  $(\mathcal{G}, q)$ , donde  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$ ,  $V \cup \{q\}$  consiste de los vectores columna de la matriz  $-\widehat{Q}$ ,  $I = C(A) \cap \mathbb{Z}^5$ . Recordando el polinomio de Tutte,  $T(M^*(K_{3,3}); x, y)$  de este matroide visto en el Ejemplo 1.16, tenemos el polinomio

$$T(M^*(K_{3,3}); 1, y) = 20 + 26y + 20y^2 + 10y^3 + 4y^4 + y^5$$

Como comentamos antes es deseable que el juego particione el conjunto de configuraciones críticas y que los correspondientes coeficientes del polinomio corresponda a la cantidad de configuraciones de cada nivel. Sin embargo, en el caso de este matroide,  $M^*(K_{3,3})$ , ya no se tiene el resultado deseado. En el nivel 1 hay una configuración extra. Esto hace que en el nivel cero haya 6 configuraciones extras. Estas configuraciones se muestran en la Tabla 4.3

En el nivel 1 hay 27 configuraciones y en el nivel cero hay 26. Los coeficientes del polinomio  $T(M^*(K_{3,3}); 1, y)$  son 26 y 20.

### 4.3. Algunos resultados con el juego de repartición de fichas cónico

En el juego de repartición de fichas cónico, se hicieron las siguientes observaciones.

1. La relación que existe entre los vectores del conjunto de reglas  $V$  y los vectores fila de la matriz  $A$  del cono  $C(A)$  es, además de la propiedad (\*), la siguiente propiedad a la que hemos llamado Propiedad (\*\*):

**Propiedad (\*\*):** Para cada  $v \in V$ , existe exactamente una fila  $a$  tal que  $\langle a, v \rangle < 0$ .

Configuraciones críticas del matroide $M^*(K_{3,3})$		
Nivel	Configuración	Permutaciones críticas
Cinco	(3,3,3,3)	1
Cuatro	(2,3,3,3)	4
Tres	(1,3,3,3)	4
	(2,2,3,3)	6
Dos	(0,3,3,3)	4
	(1,2,3,3)	12
	(2,2,2,3)	4
Uno	(0,2,3,3)	12
	(1,3,1,3) (3,1,3,1)	Sólo 2
	(1,2,2,3)	12
	(2,2,2,2)	1
Cero	(0,2,2,3)	12
	(1,2,2,2)	4
	(1,2,1,3) (1,3,1,2) (3,1,2,1) (2,1,3,1)	Sólo 4
	(0,3,3,1)(1,3,3,0)(0,3,1,3)	Sólo
	(1,3,0,3)(3,1,3,0)(3,0,3,1)	6

Tabla 4.3: Configuraciones críticas del matroide  $M^*(K_{3,3})$

2. En el Corolario 3.1, lo que garantiza que exista siempre una configuración crítica alcanzable es que se cumpla la siguiente propiedad:

$$\langle a_i, v_i \rangle < 0$$

$$\langle a_i, v_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j$$

A esta última propiedad la llamaremos **Propiedad (\*\*\*)**.

Si a la matriz  $\widehat{Q}$ , le quitamos la última fila y la última columna, obtenemos la matriz gram  $Q = BB^T$ , donde  $B$  es la representación totalmente unimodular del matroide regular  $M$ . Considerando las filas de la matriz  $-Q$  como conjunto de reglas, podemos construir un sistema de juego, y así un proceso de repartición de fichas. El siguiente resultado muestra que la propiedad (\*\*\*) implica que el proceso de repartición de fichas es el proceso de repartición de fichas cónico.

**Teorema 4.1.** Sea  $\mathcal{G} = (C(A), V \cup \{q\}, I)$  un sistema de juego tal que  $V$  son las filas de la matriz  $-Q = -BB^T$ ,  $q$  es la suma de las filas de la matriz  $Q$ ,  $I = C(A) \cap \mathbb{Z}^n$  y sea  $(\mathcal{G}, q)$  un proceso de repartición de fichas que satisface la propiedad (\*\*) y propiedad (\*\*\*). Entonces  $(\mathcal{G}, q)$  es el proceso de repartición de fichas cónico.

*Demostración.* Sea  $a_i$  la fila  $i$  de la matriz  $A$  del cono  $C(A)$  y  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  son las filas de la matriz  $-Q$ .  $\Lambda(V)$  será la retícula generada por las filas de  $-Q$ . Entonces es claro que  $\Lambda(V) \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Así, resta probar que:

$$C(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i (-v_i) \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Sea  $x \in C(A)$ . Entonces  $\langle x, a_i \rangle \geq 0$  para todo  $i$ . Por otro lado, las filas de la matriz  $Q$  forman una base para  $\mathbb{R}^n$ , por lo que  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , donde  $\alpha_i$  son escalares.

Como  $\langle x, a_i \rangle \geq 0$  y por la propiedad (\*\*\*) tenemos  $\langle a_i, v_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$ , entonces:

$$0 \leq \langle x, a_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, a_i \right\rangle = \alpha_i \langle v_i, a_i \rangle$$

Esto significa que  $\alpha_i \langle v_i, a_i \rangle \geq 0$ . Pero esto implica que  $\alpha_i \leq 0$  ya que  $\langle v_i, a_i \rangle < 0$  por la propiedad (\*\*\*). Pongamos  $\alpha_i = -\lambda_i$ , donde  $\lambda_i \geq 0$ . Por

lo tanto tenemos que:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(-v_i)$$

Por lo tanto,  $C(A) \subseteq \{\sum_{i=1}^n \lambda_i(-v_i) | \lambda_i \geq 0\}$ . La otra contención es clara. Por lo tanto,  $(\mathcal{G}, q)$  es el proceso de repartición de fichas cónico.  $\square$

**Ejemplo 4.1.** Consideremos el matroide  $M^*(K_{3,3})$  y la matriz  $\widehat{Q}$

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Tomemos los vectores fila de la matriz  $-\widehat{Q}$  y proyectemos sobre la última coordenada. Obtenemos así los vectores mostrados abajo

$$v_1 = (-4, 2, -1, -1) \quad v_2 = (2, -4, 2, -1)$$

$$v_3 = (-1, 2, -4, 2) \quad v_4 = (-1, -1, 2, -4)$$

$$q = (4, 1, 1, 4)$$

Construyamos ahora un sistema de juego  $\mathcal{G}$ , tomando como base de la retícula  $\Lambda$  los vectores  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ , que formarán las reglas del juego. El vector  $q$  es  $q = (4, 1, 1, 4)$ . En este caso, la retícula  $\Lambda'$  será  $\mathbb{Z}^4$ . La matriz  $A$  para el cono  $C(A)$  en este caso es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las configuraciones estables deben satisfacer las desigualdades:

$$0 \leq 4b_1 + 2b_2 - b_3 - 2b_4 < 9$$

$$0 \leq 2b_1 + 4b_2 + b_3 - b_4 < 9$$

$$0 \leq -b_1 + b_2 + 4b_3 + 2b_4 < 9$$

$$0 \leq -2b_1 - b_2 + 2b_3 + 4b_4 < 9$$

El orden del grupo  $\mathbb{Z}^4/\Lambda$  es 81. Así tenemos las 81 configuraciones críticas de este juego que se muestran en la Tabla 4.4.

Configuraciones críticas del matroide $M^*(K_{3,3})$				
(-1,2,0,0)	(1,0,0,2)	(2,-2,3,-1)	(2,2,-2,4)	(3,1,-1,4)
(-1,3,-2,2)	(1,0,1,0)	(2,-1,1,1)	(2,2,-1,3)	(3,1,0,3)
(-1,3,-1,1)	(1,0,1,1)	(2,-1,2,0)	(2,2,-1,4)	(3,1,1,3)
(0,0,0,0)	(1,0,2,0)	(2,-1,2,1)	(3,-2,2,0)	(3,2,-2,5)
(0,0,2,-1)	(1,1,-1,2)	(2,0,-1,3)	(3,-2,3,0)	(4,-2,2,1)
(0,1,0,1)	(1,1,-1,3)	(2,0,0,1)	(3,-1,0,2)	(4,-2,2,2)
(0,1,1,0)	(1,1,0,1)	(2,0,0,2)	(3,-1,1,1)	(4,-2,3,1)
(0,2,-2,3)	(1,1,0,2)	(2,0,0,3)	(3,-1,1,2)	(4,-1,0,3)
(0,2,-1,1)	(1,1,1,1)	(2,0,1,1)	(3,-1,2,1)	(4,-1,1,3)
(0,2,0,1)	(1,1,1,2)	(2,0,1,2)	(3,-1,2,2)	(4,-1,2,2)
(0,2,0,2)	(1,1,2,0)	(2,0,2,0)	(3,-1,3,0)	(4,0,0,4)
(0,2,1,1)	(1,2,-2,4)	(2,0,2,1)	(3,0,-1,4)	(5,-2,2,3)
(0,3,-2,3)	(1,2,-1,2)	(2,1,-1,3)	(3,0,0,2)	
(0,3,-1,3)	(1,2,-1,3)	(2,1,0,2)	(3,0,0,3)	
(1,-1,2,0)	(1,2,0,2)	(2,1,0,3)	(3,0,1,2)	
(1,-1,3,-1)	(1,2,0,3)	(2,1,1,1)	(3,0,1,3)	
(1,0,0,1)	(1,3,-2,4)	(2,1,1,2)	(3,0,2,1)	

Tabla 4.4: Las 81 configuraciones críticas del matroide  $M^*(K_{3,3})$

## 4.4. Conclusiones

En el primer intento de encontrar un sistema de juego que generalizara el juego de repartición de fichas del caso gráfico se observó la ausencia de la propiedad (\*) en el juego no abeliano propuesto. A pesar de que esto causa dificultades en el momento de encontrar las configuraciones críticas, sería interesante considerar este tipo de sistemas de juego en la búsqueda de la generalización del mismo, ya que como vimos en el caso de matroide regular  $R_{10}$  funcionó.

El proceso de repartición de fichas cónico satisface las tres propiedades descritas anteriormente y esto le permite generalizar algunos resultados del caso gráfico. Queda la pregunta de si existe un sistema de juego que sólo satisfaga la propiedad (\*) y que permita generalizar el Teorema de Norman Biggs al caso de matroides regulares.



# Bibliografía

- [1] C. A. Alfaro y C. E. Valencia. *On the Sandpile group of the cone of the hypercube*. Preprint, 2010.
- [2] R. Bacher, P. De la Harpe and T. Nagnibeda. *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph*. Preprint, 1996.
- [3] A. Berget, A. Manion, M. Maxwell, A. Potechin, and V. Reiner. *The critical group of a line graph*. Preprint, 2009
- [4] N. Biggs. *Chip firing and the critical group of a graph*. Research Report LSE-CDAM-97-09, CDAM, June 1997.
- [5] A. Björner, L. Lovász and P. W. Shor. *Chip-firing games on graphs*. European J. Combin., 12:283-291, 1991.
- [6] A. Björner and L. Lovász. *Chip firing games on directed graphs*. J. Algebraic Combin., 1:305-328, 1992.
- [7] A. Björner. Homology and shellability of matroids and geometric lattices. In N. White, editor, *Matroid Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, pages 226-283. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [8] J. A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Macmillan.
- [9] T.H. Brylawski and J.G. Oxley. *The Tutte Polynomial and its applications*. En N. White editor, *Matroid Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, páginas 123-125. Cambridge University Press, 1992.

- [10] P. Chen, Y. Hou, and C. Woo. *On the critical group of the Möbius ladder graph*, Australas. J. Combin. 36 (2006) 133-142.
- [11] P. Chen and Y. Hou. *On the critical group of  $P_4 \times C_n$* , Europ. J. Combinatorics 29 (2008) 532-534.
- [12] R. Cori and D. Rossin. *On the sandpile group of a graph*. European J. Combin. 21 (2000), no. 4, 447-459.
- [13] C. De Concini and C. Procesi. *Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines*. Springer 2010.
- [14] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, 2001.
- [15] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers, 1967.
- [16] B. Jacobson, A. Niedermaier, and V. Reiner. *Critical groups for complete multipartite graphs and Cartesian products of complete graphs*. J. Graph Theory 44 (2003) 231-250.
- [17] C. Merino. *The chip firing game*, Discrete Mathematics, 2005.
- [18] C. Merino. *The chip firing game and the Tutte Polynomial*. Annals of Combinatorics, 1(3):253-259, 1997.
- [19] C. Merino. *The chip firing game and matroid complexes*. Discrete Math. Theoret. Compu. Sci., 2001
- [20] C. Merino. *Matroids, the Tutte Polynomial and the chip firing game*. D. Phil., Oxford University, 1999.
- [21] J. G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.
- [22] E. Toumpakari. *On the sandpile group of regular trees*. European J. Combin. 28, no. 3 (2007), 822-842.
- [23] J. Wang and Y. L. Pan. *The critical group of  $C_4 \times C_n$* . Ars Combin. 96 (2010), 129-143.
- [24] Y. Su and D. G. Wagner. *The lattice of integer flows of a regular matroid*. Preprint, 2010.