



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

ESTUDIO DE ARQUIMEDIANIDAD
PARA CÓPULAS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

DIEGO MURADÁS LORENZO

DIRECTOR DE TESIS

JOSÉ MARÍA GONZÁLEZ-BARRIOS MURGUÍA

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

"El agradecimiento es la memoria del corazón."

Jean Massieu

"Es justamente la posibilidad de realizar un sueño
lo que hace que la vida sea interesante."

Paulo Coelho

En la vida hay momentos para reflexionar, acabar la maestría es uno de éstos y me doy cuenta de la importancia que tiene la gente que me rodea, gracias a ellos he logrado concluir esta maestría. Específicamente, le agradezco a Andrea, que ha sido la compañera más cercana en esta etapa de mi vida, su invaluable apoyo y por siempre estar cerca de mi; a mis padres, Manolo y Rosa María, por su amor y todo el esfuerzo que han hecho para formarme como persona; a mis hermanos, Manuel y Estíbaliz, por estar siempre a mi lado; a Samuel, Luis, Javier y Estrella, su apoyo, ejemplo y por lo importantes que son en mi vida y a Enrique Lemus, por todas las mañanas que dedicó a resolverme dudas mientras me preparaba para entrar a la maestría.

También le quiero agradecer al doctor José María González-Barrios por dirigir esta tesis y dedicarme tanto tiempo, al doctor Arturo Erdely por compartir conmigo los simuladores de las familias de cópulas que programó, a la doctora Eliane Regina Rodrigues, a los doctores Alberto Contreras, Eduardo Gutiérrez-Peña y Pablo Padilla por sus valiosas observaciones.

Por último quiero agradecerle al Conacyt por la beca que me permitió realizar esta maestría.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Cópulas	5
1.2. Teorema de Sklar	14
1.3. Cópulas y variables aleatorias	24
1.4. Las cotas de Fréchet-Hoeffding	30
1.5. Cópulas de supervivencia y simetría	32
1.6. Orden	39
1.7. Cópulas multivariadas	41
2. Construcción de Cópulas	53
2.1. Cópulas singulares con soporte prescrito	53
2.2. Sumas ordinales	56
2.3. <i>Shuffles</i> de M	59
3. Cópulas arquimedianas	67
3.1. Definiciones	67
3.2. Propiedades fundamentales	81
3.3. Orden y casos límite	94

3.4. Cópulas arquimedianas multivariadas	100
4. Concordancia	103
4.1. Tau de Kendall	103
4.2. Rho de Spearman	110
5. Asociatividad de cópulas discretas	115
5.1. Definiciones básicas.	115
5.2. Cópulas empíricas, cópulas discretas y permutaciones	126
5.3. Estadística para la asociatividad de una cópula.	127
6. Estadística de idempotentes no triviales	153
6.1. Motivación	153
6.2. Definiciones y simulaciones	157
6.3. Conclusiones	168
A. Simuladores	169
Bibliografía	177

Introducción

Las cópulas fueron introducidas por Abe Sklar en 1959 en el contexto de espacios de probabilidad. Desde entonces se han convertido en una herramienta poderosa para la construcción de funciones de distribución multivariadas, así como en el estudio de dependencia no lineal entre variables aleatorias. Además, en los últimos años sus aplicaciones en disciplinas como: Estadística, Ciencias Actuariales y Finanzas han cobrado importancia, ya que mejoran de manera notable algunos de los modelos matemáticos que se utilizan.

En Finanzas, como lo mencionan Cherubini, et al. [1], las cópulas representan una metodología que se ha convertido en una herramienta importante para estudiar la correlación entre los mercados, factores de riesgo y otras variables en finanzas. Mucho de esto se debe a la evidencia de que los rendimientos de activos financieros no tienen función de distribución normal. Además, Embrechts [3] menciona el hecho de que en las décadas de los ochentas y noventas hubo un desarrollo teórico importante en la gestión de riesgo cuantitativo en finanzas (también en seguros). Esto provocó la creación de nuevos productos, donde las cópulas han sido importantes. Para ver algunas aplicaciones en Seguros ver Frees, et al. [5].

Una clase importante de cópulas son las arquimedianas. Reciben este nombre por Ling [12], debido a una de sus propiedades. Las cópulas arquimedianas son muy importantes, ya que permiten reducir el estudio de cópulas n -dimensionales (o n -cópulas como veremos más adelante) a una función univariada, el generador de la cópula.

En la actualidad (debido a la reducción de dimensionalidad en el estudio de las cópulas arquimedianas) muchas de las aplicaciones a Finanzas y Seguros suponen la arquimedidad de la cópula. A pesar de que la clase de las cópulas arquimedianas es muy amplia, hacer este supuesto puede provocar errores importantes. Lo ideal es que exista una prueba

para saber, dada una muestra aleatoria, si la cópula que supuestamente pertenece a la muestra aleatoria es arquimediana o no.

El objetivo de esta tesis es estudiar la arquimedianeidad de una muestra aleatoria. Este es un problema abierto. Dada una muestra aleatoria, no existe una prueba estadística que permita hacer inferencia para saber si proviene o no de una cópula arquimediana. Utilizando la caracterización dada por Ling [12], sabemos que estas cópulas deben ser asociativas y no deben tocar a la diagonal. En González-Barrios [6], se propone una prueba estadística para la asociatividad. Sin embargo, no existe ninguna prueba estadística para saber si la cópula que generó a la muestra aleatoria tiene o no idempotentes no triviales; el objetivo de esta tesis es proponer una estadística que resuelva este problema.

Utilizando la pruebas estadísticas para la asociatividad, de González-Barrios, y la diagonal, que se propone en esta tesis, buscamos construir una que permitiera hacer inferencia sobre la arquimedianeidad de la muestra aleatoria, pero esto no fue posible. Cómo veremos más adelante, la prueba que se propone resuelve el problema parcialmente; ya que si la prueba acepta que la cópula que generó a la muestra tiene idempotentes no triviales, podemos inferir que la cópula no es arquimediana.

El primer capítulo incluye el material básico. En la primer sección veremos las definiciones de subcópula y cópula; además, demostramos propiedades importantes como las cotas de Fréchet-Hoeffding para subcópulas. En la segunda sección demostramos el Teorema de Sklar, resultado central en la teoría de cópulas. En la siguiente sección estudiaremos a detalle la relación entre la cópulas y las variables aleatorias. En la cuarta sección definimos las cópulas de supervivencia y algunos tipos de simetría. En la siguiente sección definimos un orden parcial en el espacio de las cópulas. Finalmente, en la última sección se extienden los resultados de cópulas para dimensiones mayores a dos.

En el segundo capítulo presentamos algunos de los métodos más importantes para la construcción de cópulas.

En el tercer capítulo definimos un clase de cópulas muy importante para esta tesis, las cópulas arquimedianas. En la primera sección definimos las cópulas arquimedianas, motivando su importancia y definiendo algunas familias de cópulas que son importantes; además, se menciona el Teorema de Ling, un resultado importante que caracteriza a las

cómulas arquimedianas. En la siguiente sección demostramos propiedades importantes de esta clase cómulas; que aclaran el hecho de que trabajar con esta clase cómulas es mucho más sencillo ya que en muchos casos se trabaja con el generador, que es una función univariada.

En cuarto capítulo es una breve introducción a dos medidas de concordancia: la Tau de Kendall y la Rho de Spearman.

Los cuatro primeros capítulos forman el marco teórico de esta tesis y están basados en el libro de Nelsen [17].

El quinto capítulo incluye un estudio sobre la asociatividad de una cópula basándose en una muestra aleatoria. Además, se define una prueba estadística para hacer inferencia sobre esta propiedad.

En el sexto capítulo (donde se encuentra la parte original de la tesis) proponemos una prueba estadística para detectar si la cópula de la cuál se tomó a una muestra aleatoria tiene o no idempotentes no triviales.

Finalmente, en el Apéndice A se encuentran los programas realizados en R para las simulaciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se definen los conceptos básicos de la Teoría de Cópulas, así como sus propiedades básicas. Además, se demuestran resultados importantes como el Teorema de Sklar y las cotas de Fréchet-Hoeffding. El material de este capítulo está basado en Nelsen [17].

1.1. Cópulas

A lo largo de esta tesis denotamos por \mathbb{R} al conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, mientras que $\overline{\mathbb{R}}$ es el conjunto de los reales extendidos $[-\infty, \infty]$ y al plano real extendido lo denotamos por $\overline{\mathbb{R}}^2$. El cuadrado unitario \mathbf{I}^2 es el producto $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} = [0, 1]$.

Definición 1.1.1. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} . Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo cuyos vértices pertenecen a $S_1 \times S_2$ con $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$. Entonces, el **H -volumen de B** o la **H -medida de B** se define como

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (1.1)$$

Definición 1.1.2. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} . Entonces, H es una función **2-creciente** si y sólo si $V_H(B) \geq 0$ para todo rectángulo B cuyos vértices están contenidos en $S_1 \times S_2$.

Notemos que el concepto de función 2-creciente no es equivalente a que la función sea creciente en cada coordenada, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.3. Sea H la función definida en \mathbf{I}^2 mediante $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$. Entonces, H es 2-creciente ya que si tomamos a $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ y definimos a $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ se puede demostrar que $V_H(B) = 2(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \geq 0$. Sin embargo, esta función es decreciente para x cuando $0 \leq y < 1/2$, ya que si se cumple que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, entonces $H(x_2, y) - H(x_1, y) = 2(2y - 1)(x_2 - x_1) < 0$.

Lema 1.1.4. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función 2-creciente de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} . Consideremos a x_1, x_2 en S_1 con $x_1 \leq x_2$ y a y_1, y_2 en S_2 con $y_1 \leq y_2$. Entonces, la función $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es creciente, y lo mismo para la función $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$.

Demostración: Sean y_1, y_2 en S_2 tales que $y_1 \leq y_2$. Sean t_1, t_2 en S_1 tales que $t_1 \leq t_2$ y definamos a $B = [t_1, t_2] \times [y_1, y_2]$. Como H es una función 2-creciente, sabemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq V_H(B) &= H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - H(t_1, y_2) + H(t_1, y_1) \\ &= \left(H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) \right) - \left(H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1) \right), \end{aligned}$$

por lo tanto, la función $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es creciente. Análogamente, se demuestra que la función $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es creciente. ■

Definición 1.1.5. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} . Supongamos que a_1 , el ínfimo de S_1 , pertenece a S_1 y a_2 , el ínfimo de S_2 , pertenece a S_2 . Entonces, H está **fija** si y sólo si para todo (x, y) en $S_1 \times S_2$ se cumple que $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$.

Lema 1.1.6. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función 2-creciente que está fija de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} . Entonces, H es creciente en cada coordenada.

Demostración: Sean a_1 y a_2 los ínfimos de S_1 y S_2 respectivamente. Sabemos por el Lema 1.1.4 que $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ y $s \mapsto H(s, y_2) - H(s, y_1)$ son funciones crecientes para $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$. Si tomamos a $x_1 = a_1$ y $y_1 = a_2$, como H está fija entonces,

$H(a_1, t) = 0 = H(t, a_2)$, por lo tanto $t \mapsto H(x_2, t)$ y $t \mapsto H(t, y_2)$ son funciones crecientes para x_2 en S_1 y y_2 en S_2 . ■

Definición 1.1.7. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} . Supongamos que b_1 , el supremo de S_1 , pertenece a S_1 y b_2 , el supremo de S_2 , pertenece a S_2 . Entonces, decimos que H tiene **marginales**, y las marginales de H son las funciones F y G que se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{dom } F &= S_1 & \text{y} & & F(x) &= H(x, b_2) \text{ para toda } x \text{ en } S_1; \\ \text{dom } G &= S_2 & \text{y} & & G(y) &= H(b_1, y) \text{ para toda } y \text{ en } S_2. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.8. Sea H una función de $[-1, 1] \times [0, \infty]$ en \mathbb{R} dada por

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}.$$

Entonces, H está fija, porque $H(x, 0) = 0 = H(-1, y)$ y tiene marginales

$$\begin{aligned} F(x) &= H(x, \infty) = (x+1)/2 & \text{para toda } x \text{ en } [-1, 1], \\ G(y) &= H(1, y) = 1 - e^{-y} & \text{para toda } y \text{ en } [0, \infty]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Lema 1.1.9. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función 2-creciente de $S_1 \times S_2$ en \mathbb{R} , que está fija y con marginales. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos en $S_1 \times S_2$. Entonces,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|,$$

donde F y G son las marginales de H como en la Definición 1.1.7.

Demostración: Sabemos por la desigualdad del triángulo que

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Supongamos que $x_1 \leq x_2$, por hipótesis H es una función 2-creciente, está fija y tiene marginales por lo que podemos aplicar el Lema 1.1.4 y el Lema 1.1.6, que implican que

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1).$$

Para el caso en el que $x_2 \leq x_1$ se llega a que

$$0 \leq H(x_1, y_2) - H(x_2, y_2) \leq F(x_1) - F(x_2).$$

Por lo tanto, $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$. Análogamente se demuestra que $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(x_2) - G(x_1)|$. ■

Definición 1.1.10. Una **subcópula** es una función C' que cumple las siguientes propiedades:

1. $\text{dom } C' = S_1 \times S_2$, donde S_1, S_2 son subconjuntos de \mathbf{I} y ambos contienen al 0 y al 1;
2. C' está fija y es 2-creciente,
3. para toda u en S_1 y v en S_2 ,

$$C'(u, 1) = u \text{ y } C'(1, v) = v. \quad (1.3)$$

Con esta definición tenemos que si C' es una subcópula, por hipótesis está fija, es 2-creciente y por (1.3) tiene marginales. Entonces, por el Lema 1.1.6, en particular se cumple que

$$0 = C'(u, 0) \leq C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u \leq 1,$$

para todo (u, v) en $S_1 \times S_2$. Por lo tanto, $\text{ran } C'$ está contenido en \mathbf{I} .

Definición 1.1.11. Una **cópula** es una subcópula C cuyo dominio es \mathbf{I}^2 .

Equivalentemente, una cópula es una función de \mathbf{I}^2 en \mathbf{I} con las siguientes propiedades:

1. Para toda u, v en \mathbf{I} ,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (1.4)$$

y

$$C(u, 1) = u \quad \text{y} \quad C(1, v) = v; \quad (1.5)$$

2. Para toda u_1, u_2, v_1, v_2 en \mathbf{I} tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (1.6)$$

Como $C(u, v) = V_C([0, u] \times [0, v])$, se puede ver a $C(u, v)$ como el volumen que la cópula C le asigna al rectángulo $[0, u] \times [0, v]$, por lo que (1.6) es una fórmula para calcular el volumen que C le asigna al rectángulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ en \mathbf{I}^2 , que además resulta ser positivo.

Ejemplo 1.1.12. Sea Π una función de \mathbf{I}^2 en \mathbf{I} tal que para todo (u, v) en \mathbf{I}^2 , $\Pi(u, v) = uv$, entonces Π es una cópula. Para demostrarlo basta ver que cumple (1.6) ya que (1.4) y (1.5) son triviales por la definición de Π . Sean $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, entonces

$$\Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_2, v_1) - \Pi(u_1, v_2) + \Pi(u_1, v_1) = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq 0.$$

A Π se le conoce como la **cópula producto** y su gráfica la podemos ver en la Figura 1.1.

Ejemplo 1.1.13. Sean C_1, \dots, C_n , n cópulas y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números positivos tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Definamos a $C(u, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} , entonces C es cópula. Primero veamos que C cumple las condiciones de frontera,

$$C(0, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(0, v) = 0 \quad \text{y} \quad C(1, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(1, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v = v,$$

para toda v en \mathbf{I} . Análogamente se demuestra que para cualquier u en \mathbf{I} , se cumple que $C(u, 0) = 0$ y $C(u, 1) = u$. Sean u_1, u_2, v_1, v_2 en \mathbf{I} tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, entonces

$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_{C_i}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0,$$

por lo tanto C es cópula.

Teorema 1.1.14. Sea C' una subcópula. Entonces, para toda (u, v) en $\text{dom } C'$,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v). \quad (1.7)$$

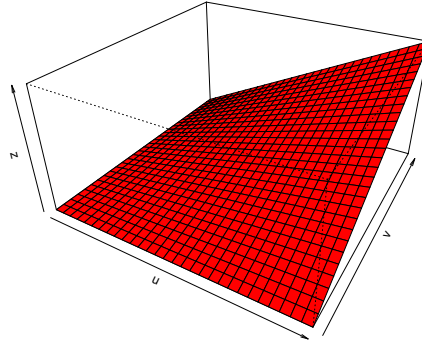


Figura 1.1: Cópula Producto.

Demostración: Sea (u, v) un punto arbitrario en $\text{dom } C'$. Sabemos por el Lema 1.1.6 y (1.3) que $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ y $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$, por lo tanto $C'(u, v) \leq \min(u, v)$. Además, por definición de subcópula $0 \leq C'(u, v) \leq 1$ y

$$\begin{aligned} 0 \leq V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) &= C'(1, 1) - C'(1, v) - C'(u, 1) + C'(u, v) \\ &= 1 - v - u + C'(u, v), \end{aligned}$$

por lo tanto $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$. ■

Notemos que, como toda cópula es subcópula, entonces la desigualdad (1.7) también se cumple para toda cópula. Mas aún, a continuación se demuestra que las cotas son cópulas.

Proposición 1.1.15. Sean $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ y $M(u, v) = \min(u, v)$ para toda (u, v) en \mathbf{I}^2 . Entonces, W y M son cópulas.

Demostración: Sea $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ para toda (u, v) en \mathbf{I}^2 . Primero veamos lo siguiente, como $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$, entonces $-1 \leq u - 1 \leq 0$, $-1 \leq v - 1 \leq 0$, por lo tanto $W(u, 0) = 0 = W(0, v)$. Además, $W(u, 1) = \max(u + 1 - 1, 0) = u$ y $W(1, v) = \max(1 + v - 1, 0) = v$. Hasta ahora tenemos que W cumple con (1.4) y (1.5), por lo tanto basta ver que (1.6) también se cumple.

Sean u_1, u_2, v_1, v_2 en \mathbf{I} con $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, para demostrarlo lo haremos por casos. Primero supongamos que $u_2 + v_2 \leq 1$, entonces

$$W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) = 0.$$

En el segundo caso supongamos que $u_2 + v_2 > 1$, $u_2 + v_1 \leq 1$ y $u_1 + v_2 \leq 1$, entonces

$$W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) = u_2 + v_2 - 1 \geq 0.$$

Para el tercer caso supongamos que $u_2 + v_1 > 1$ y $u_1 + v_2 \leq 1$, esto implica que

$$\begin{aligned} W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 - v_1 + 1 \\ &= v_2 - v_1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Análogamente, para el cuarto caso supongamos que $u_1 + v_2 > 1$ y $u_2 + v_1 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) &= u_2 + v_2 - 1 - u_1 - v_2 + 1 \\ &= u_2 - u_1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Para el quinto caso supongamos que $u_1 + v_2 > 1$, $u_2 + v_1 > 1$ y $u_1 + v_1 \leq 1$, esto implica que

$$\begin{aligned} W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 - v_1 \\ &\quad + 1 - u_1 - v_2 + 1 \\ &= 1 - u_1 - v_1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $u_1 + v_1 > 1$, entonces

$$\begin{aligned} W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 \\ &\quad - v_1 + 1 + u_1 + v_1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, W es cópula.

Para demostrar que M es cópula seguimos el mismo procedimiento; ver que M cumple con (1.4) y (1.5) es sencillo ya que si $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$, entonces $M(u, 0) = 0 = M(0, v)$, $M(u, 1) = u$ y $M(1, v) = v$. Para demostrar que cumple (1.6) nuevamente se hace por

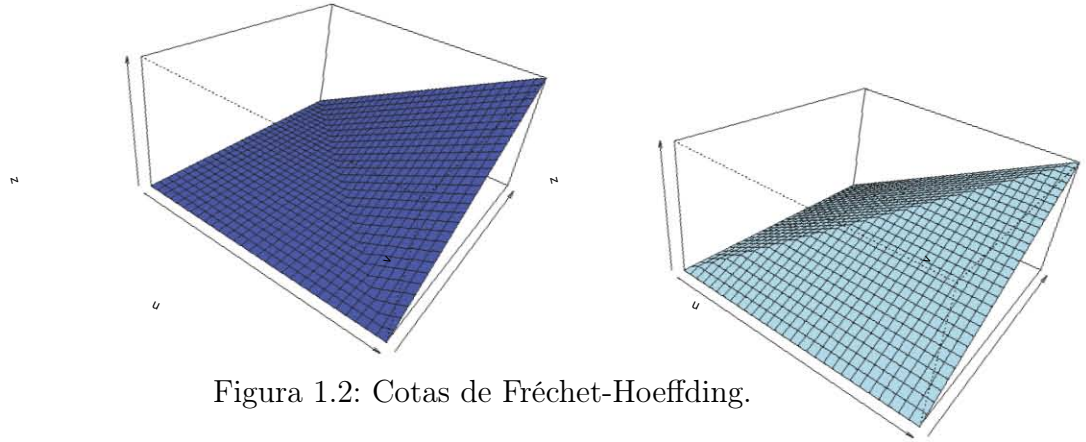


Figura 1.2: Cotas de Fréchet-Hoeffding.

casos. No lo haremos ya que el procedimiento no es complicado y es parecido al de W . ■

Por lo mencionado antes de la Proposición 1.1.15, para toda cópula C y para todo (u, v) en \mathbf{I}^2 tenemos que

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v), \quad (1.8)$$

W y M son las **cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding** respectivamente. En la Figura 1.2 podemos ver las gráficas de las cotas.

Teorema 1.1.16. Sea C' una subcópula. Entonces, para todo $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ en $\text{dom } C'$ se cumple que

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (1.9)$$

Por lo tanto, C' es uniformemente continua en su dominio.

Demostración: Como C' está fija y es 2-creciente sabemos que tiene marginales F y G dadas por $F(u, 1) = u$ y $G(1, v) = v$ para todo (u, v) en $\text{dom } C'$. Por lo tanto la desigualdad es una aplicación directa del Lema 1.1.9. La afirmación de que C' es uniformemente continua se sigue ya que (1.9) implica que C' es Lipschitz y por lo tanto uniformemente continua en $\text{dom } C'$. ■

Definición 1.1.17. Sean C una cópula y a un número en \mathbf{I} . La **sección horizontal de C en a** es la función h_C^a de \mathbf{I} en \mathbf{I} dada por $h_C^a(t) = C(t, a)$; la **sección vertical de C en a**

es la función v_C^a de \mathbf{I} en \mathbf{I} dada por $v_C^a(t) = C(a, t)$ y la **sección diagonal de C** es la función δ_C de \mathbf{I} en \mathbf{I} dada por $\delta_C(t) = C(t, t)$.

Corolario 1.1.18. Sean C una cópula y a un número en \mathbf{I} . Entonces, las secciones horizontal y vertical de C en a y la sección diagonal de C son funciones crecientes y uniformemente continuas en \mathbf{I} .

Demostración: Sean h_C^a la sección horizontal de C en a , $\epsilon > 0$ y t_1, t_2 números en \mathbf{I} tales que $|t_2 - t_1| < \epsilon$. Entonces, por el Teorema 1.1.16 y la definición de sección horizontal

$$|h_C^a(t_2) - h_C^a(t_1)| \leq |t_2 - t_1| < \epsilon.$$

Por lo tanto, h_C^a es uniformemente continua. El caso para v_C^a , la sección vertical de C en a es análogo.

Sean δ_C la sección diagonal de C , $\epsilon > 0$ y t_1, t_2 números en \mathbf{I} tal que $|t_2 - t_1| < \epsilon/2$. Entonces, por el Teorema 1.1.16 y la definición de sección diagonal

$$|\delta_C(t_2) - \delta_C(t_1)| \leq 2|t_2 - t_1| < \epsilon.$$

Por lo tanto, δ_C es uniformemente continua. ■

Teorema 1.1.19. Sea C una cópula. Para toda v en \mathbf{I} , la derivada parcial $\partial C(u, v)/\partial u$ existe para casi toda u (respecto a la medida de Lebesgue) y además cuando existe

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u}(u, v) \leq 1. \quad (1.10)$$

Del mismo modo, para toda u en \mathbf{I} , la derivada parcial $\partial C(u, v)/\partial v$ existe para casi toda v (respecto a la medida de Lebesgue) y además cuando existe

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial v}(u, v) \leq 1. \quad (1.11)$$

Además, las funciones $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ y $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ están definidas y son crecientes casi seguramente respecto a la medida de Lebesgue¹.

¹El término "casi seguramente respecto a la medida de Lebesgue" significa que las funciones $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ y $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ están definidas y son crecientes en todo \mathbf{I} excepto en un conjunto con medida de Lebesgue igual a cero

Demostración: La existencia de las parciales $\partial C(u, v)/\partial u$ y $\partial C(u, v)/\partial v$ se sigue del Corolario 1.1.18, ya que v_C^u y h_C^v son funciones de \mathbf{I} en \mathbf{I} crecientes y uniformemente continuas. Para ver que se cumple (1.10) veamos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(u + \delta, v) - C(u, v)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{h_C^v(u + \delta) - h_C^v(u)}{\delta} \\ &\leq \frac{\delta}{\delta} = 1. \end{aligned}$$

El caso para (1.11) es análogo. Sean v_1, v_2 en \mathbf{I} tal que $v_1 \leq v_2$ entonces, por el Lema 1.1.4 la función $u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ es creciente, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial u}(C(u, v_2) - C(u, v_1)) \geq 0,$$

para toda u en \mathbf{I} . Por lo tanto, $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ es creciente. Siendo análogo el procedimiento para demostrar que $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ es creciente. ■

1.2. Teorema de Sklar

No se puede hablar de cópulas sin mencionar el Teorema de Sklar, en 1959 Abe Sklar demostró la existencia de una función que relaciona la función de distribución conjunta de probabilidad con sus marginales. Este teorema da la relación que existe entre las cópulas y las medidas de probabilidad. También es importante mencionar que una consecuencia de este resultado, es que una cópula puede construir muchas funciones de distribución simplemente cambiando las funciones de distribución marginales. Como lo mencionamos en la Introducción, una aplicación importante de las cópulas es la construcción de funciones de distribución conjunta. Esta aplicación se sigue de este teorema, ya que si tenemos una cópula podemos construir funciones de distribución conjunta simplemente cambiando las marginales.

Definición 1.2.1. Sea F una función de $\overline{\mathbb{R}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, decimos que F es una **función de distribución** si y sólo si cumple que

1. F es creciente,
2. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

Ejemplo 1.2.2. Sean a un número en \mathbb{R} y ε_a la función de $\overline{\mathbb{R}}$ en el conjunto $\{0, 1\}$ dada por

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty, a), \\ 1 & \text{si } x \in [a, \infty]. \end{cases}$$

Entonces, ε_a es una función de distribución.

Definición 1.2.3. Sea H una función de $\overline{\mathbb{R}}^2$ en $\overline{\mathbb{R}}$, decimos que H es una **función de distribución conjunta** si y sólo si cumple que

1. H es 2-creciente,
2. Para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ y $H(\infty, \infty) = 1$.

Notemos que $-\infty, \infty$ están en $\overline{\mathbb{R}}$, por lo tanto H está fija y tiene marginales F y G dadas por $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$ para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$. Además, por el Corolario 1.1.18 F y G son funciones de distribución.

Ejemplo 1.2.4. Sea H una función de $\overline{\mathbb{R}}^2$ en \mathbf{I} dada por

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & \text{si } x \in [-1, 1] \times [0, \infty], \\ 1 - e^{-y} & \text{si } x \in (1, \infty] \times [0, \infty], \\ 0 & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$

Se puede demostrar fácilmente que H es una función de distribución conjunta.

Lema 1.2.5. Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces, existe una única subcópula C' tal que

1. $\text{dom } C' = \text{ran } F \times \text{ran } G$,
2. Para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.

Demostración: Por la definición de función de distribución conjunta, sabemos que H está fija y es 2-creciente con $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$. Por lo tanto, el Lema 1.1.9 nos dice que para cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $\overline{\mathbb{R}}^2$,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|. \quad (1.12)$$

Entonces, si $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$ tenemos que $H(x_2, y_2) = H(x_1, y_1)$. Por lo tanto, el conjunto de parejas

$$\left\{ ((F(x), G(y)), H(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

define una función a la que llamaremos C' cuyo dominio es $\text{ran } F \times \text{ran } G$. Sabemos por (1.12) que C' está bien definida, ahora veamos que C' es una subcópula.

Primero veamos que, por la definición de C' , su dominio es $\text{ran } F \times \text{ran } G$; como F y G son funciones de distribución, entonces $\{0, 1\}$ está contenido en $\text{ran } F$ y $\text{ran } G$, ya que por definición $F(\infty) = G(\infty) = 1$, $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$; como F y G son crecientes, esto implica que $\text{ran } F$ y $\text{ran } G$ están contenidos en \mathbf{I} . Segundo, para demostrar que C' está fija veamos que si u pertenece a $\text{ran } F$, entonces existe una x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = u$, por lo tanto

$$C'(u, 0) = C'(F(x), G(-\infty)) = H(x, -\infty) = 0$$

por la definición de función de distribución conjunta. Además,

$$C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u.$$

Análogamente se puede demostrar que $C'(0, v) = 0$ y $C'(1, v) = v$ para cualquier v en $\text{ran } G$. Finalmente veamos que C' es 2 creciente. Sean u_1, u_2 en $\text{ran } F$ y v_1, v_2 en $\text{ran } G$ tales que $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, esto implica que existen x_1, x_2, y_1, y_2 en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que $F(x_i) = u_i$ y $G(y_i) = v_i$ para $i = 1, 2$. Pero F y G son crecientes, por lo que $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq \infty$ y $-\infty \leq y_1 \leq y_2 \leq \infty$. Teniendo todas estas observaciones y por la definición de función de distribución conjunta tenemos que

$$V_{C'}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \geq 0.$$

Por lo tanto, C' es subcópula. ■

Ahora veamos que una subcópula siempre se puede extender a una cópula.

Lema 1.2.6. Sea C' una subcópula. Entonces, existe una cópula C tal que $C'(u, v) = C(u, v)$ para toda (u, v) en $\text{dom } C'$.

Demostración: Sean S_1, S_2 dos subconjuntos de \mathbf{I} tales que contienen a $\{0, 1\}$ y $S_1 \times S_2$ es el dominio de C' . Sean $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ las respectivas cerraduras de S_1 y S_2 , como C' es Lipschitz y creciente en cada coordenada, entonces C' se puede extender de forma única a $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$ (ver Klenke [?]), denotemos a C'' como la extensión de C' a $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$. Por la definición de C'' , se puede ver que es subcópula.

Lo que sigue es extender a C'' de $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$ a todo \mathbf{I}^2 . Sea (a, b) un punto arbitrario en \mathbf{I}^2 . Definamos a_1 y a_2 en \overline{S}_1 tales que $a_1 = \sup \{c \in \overline{S}_1 | c \leq a\}$ y $a_2 = \inf \{d \in \overline{S}_1 | a \leq d\}$, entonces $a_1 \leq a \leq a_2$; análogamente definamos a b_1 y b_2 en \overline{S}_2 tales que $b_1 = \sup \{c \in \overline{S}_2 | c \leq b\}$ y $b_2 = \inf \{d \in \overline{S}_2 | b \leq d\}$, entonces $b_1 \leq b \leq b_2$. Notemos que si a pertenece a \overline{S}_1 esto implica que $a_1 = a = a_2$, mientras que si b pertenece a \overline{S}_2 , entonces $b_1 = b = b_2$. Sean

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 < a_2, \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2; \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b - b_1}{b_2 - b_1} & \text{si } b_1 < b_2, \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2; \end{cases}$$

y definamos ahora a

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La C es una interpolación bilineal, ya que es lineal en cada coordenada.

Ahora veamos que C es una cópula que extiende a C'' en todo \mathbf{I}^2 . Primero veamos que C extiende a C'' en todo \mathbf{I}^2 , sea (a, b) en $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$, entonces $a_1 = a = a_2$, $b_1 = b = b_2$, $\lambda_1 = 1$ y $\mu_1 = 1$, por lo tanto $C(a, b) = C''(a_2, b_2) = C''(a, b)$.

Para que C sea cópula tiene que cumplir las condiciones de frontera y ser 2-creciente. Si a es un número en \mathbf{I} y $b = 0$; esto implica, dado que 0 pertenece a \overline{S}_2 que $b_1 = 0 = b_2$ y $\mu_1 = 1$. Supongamos que a no pertenece a \overline{S}_1 , entonces

$$C(a, 0) = (1 - \lambda_1)C''(a_1, 0) + \lambda_1C''(a_2, 0) = 0,$$

por la definición de subcópula. El caso en el que a está en \bar{S}_1 es trivial por que C es una extensión de C'' . Supongamos ahora que a no pertenece a \bar{S}_1 y $b = 1$, nuevamente como 1 pertenece a \bar{S}_2 implica que $b_1 = 1 = b_2$ y $\mu_1 = 1$ entonces,

$$\begin{aligned} C(a, 1) &= (1 - \lambda_1)C''(a_1, 1) + \lambda_1 C''(a_2, 1) \\ &= \frac{a_2 - a}{a_2 - a_1} a_1 + \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} a_2 \\ &= a. \end{aligned}$$

De la misma forma, el caso en el que a está en \bar{S}_1 es trivial porque C es una extensión de C'' . Análogamente se demuestra que si b es un número en \mathbf{I} , entonces $C(0, b) = 0$ y $C(1, b) = b$.

Por último, tenemos que demostrar que C es 2-creciente. Sea (c, d) un punto en \mathbf{I}^2 tal que $c \geq a$ y $d \geq b$ y definamos a $c_1, c_2, d_1, d_2, \mu_2, \lambda_2$ los números correspondientes a (c, d) . Para demostrar la propiedad 2-creciente de C tenemos que calcular $V_C(B)$, donde $B = [a, c] \times [b, d]$, pero esto se debe hacer por casos, dependiendo de si existe o no algún punto de \bar{S}_1 que esté estrictamente entre a y c y si existe o no algún punto de \bar{S}_2 que esté estrictamente entre b y d .

Analizaremos el caso cuando $a < a_2 \leq c_1 < c$ y $b < b_2 \leq d_1 < d$; como $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ son números en \mathbf{I} y C'' es 2-creciente, esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 - \lambda_1)\mu_2 V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2 V_{C''}([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1 - \lambda_1) V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \\ &\quad + (1 - \mu_1) V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) + \lambda_2 (1 - \mu_1) V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) \\ &= C(c, d) - C(a, d) - C(c, b) + C(a, b) \\ &= V_C(B). \end{aligned}$$

Este es el caso más complicado, mientras que el más sencillo es cuando $c_1 = a_1 < a < c < a_2 = c_2$ y $d_1 = b_1 < b < d < b_2 = d_2$. Todos se demuestran de forma similar. Por lo tanto,

C es 2-creciente, lo que completa la demostración. ■

Notemos que la extensión que se da en el Lema 1.2.6 no es única, ya que se puede hacer otro tipo de interpolación. El siguiente es un ejemplo muy claro de que la extensión no siempre es única.

Ejemplo 1.2.7. Sean (a, b) un punto en $\overline{\mathbb{R}}^2$ y H una función de distribución definida como

$$H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ o } y < b, \\ 1 & \text{si } x \geq a \text{ y } y \geq b. \end{cases}$$

Las marginales de H son ε_a y ε_b (ver Ejemplo 1.2.2) y como el $\text{ran } \varepsilon_a = \text{ran } \varepsilon_b = \{0, 1\}$, entonces aplicando el Lema 1.2.5 tenemos que la subcópula C' tiene dominio $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, tal que $C'(0, 0) = C'(1, 0) = C'(0, 1) = 0$ y $C'(1, 1) = 1$. Si ahora aplicamos el Lema 1.2.6 para extender la subcópula C' a una cópula C , entonces por (1.13), tenemos que para todo (u, v) en \mathbf{I}^2

$$\begin{aligned} C(u, v) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(0, 0) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(0, 1) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(1, 0) + \lambda_1\mu_1C'(1, 1) \\ &= uv. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C = \Pi$. Sin embargo, toda cópula, por las condiciones de frontera, coincide con C' en $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Por lo tanto, cualquier cópula es extensión de C' .

Teniendo estos resultados es posible demostrar el Teorema de Sklar, que es central en la teoría de cópulas.

Teorema 1.2.8 (Sklar). Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces, existe una cópula C tal que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \tag{1.14}$$

Si F y G son continuas, entonces C es única, y en otro caso C está únicamente determinada en $\text{ran } F \times \text{ran } G$. Recíprocamente, si C es una cópula, y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida en (1.14) resulta ser una función de distribución conjunta con marginales F y G .

Demostración: Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Por el Lema 1.2.5 existe una única subcópula C' tal que $\text{dom } C' = \text{ran } F \times \text{ran } G$ y para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$. Si F y G son continuas, entonces $\text{ran } F = \text{ran } G = \mathbf{I}$, por lo que C' es de hecho una cópula. Para el caso en el que F y G no son continuas tenemos que aplicar el Lema 1.2.6; entonces C' se extiende a una cópula C , por lo que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = C(F(x), G(y))$.

Supongamos ahora que C es una cópula, F y G son funciones de distribución y definamos a $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$. Sabemos por la definición de cópula y la de función de distribución que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} H(-\infty, y) &= C(F(-\infty), G(y)) = C(0, G(y)) = 0, \\ H(x, -\infty) &= C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0 \end{aligned}$$

y

$$H(\infty, \infty) = C(F(\infty), G(\infty)) = C(1, 1) = 1.$$

Para demostrar que H es 2-creciente tomemos a x_1, x_2, y_1, y_2 en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq -\infty$ y $-\infty \leq y_1 \leq y_2 \leq -\infty$. Como F y G son crecientes, entonces $0 \leq F(x_1) \leq F(x_2) \leq 1$ y $0 \leq G(y_1) \leq G(y_2) \leq 1$, por lo tanto la propiedad se sigue por el hecho de que C es 2-creciente. Por último veamos que F y G son marginales de H . Sea x en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces

$$H(x, \infty) = C(F(x), G(\infty)) = C(F(x), 1) = F(x),$$

por la definición de cópula y la de función de distribución; análogamente si y es un número en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces

$$H(\infty, y) = C(F(\infty), G(y)) = C(1, G(y)) = G(y).$$

■

La ecuación (1.14) nos da una expresión que relaciona funciones de distribución conjunta con sus marginales mediante cópulas. Esto significa que las cópulas se pueden ver como funciones de distribución conjunta, por lo que tiene sentido la definición de la C -medida de un rectángulo $B \subset \mathbf{I}^2$ de la Definición 1.1.1, para alguna cópula C . También es posible

invertir (1.14) para expresar cópulas en función de una distribución conjunta y las "inversas" de las marginales. Sin embargo, no es posible hablar de la inversa de las marginales, en el sentido usual, ya que si una marginal no es estrictamente creciente no tiene inversa. Por eso tenemos que definir la "cuasi-inversa" de una función de distribución.

Definición 1.2.9. Sea F una función de distribución. Una **cuasi-inversa** de F denotada por $F^{(-1)}$ es una función con dominio \mathbf{I} tal que

1. si t pertenece a ran F entonces, $F^{(-1)}(t)$ es cualquier x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$,
2. si t no pertenece a ran F entonces,

$$F^{(-1)}(t) = \inf \{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) \geq t\} = \sup \{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) \leq t\}.$$

Primero veamos que la Definición 1.2.9 tiene sentido. Como $\{0, 1\}$ es subconjunto de ran F , ya que $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$, entonces si t no está en el rango de F se cumple que $0 < t < 1$, por lo tanto $\{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) \geq t\}$ y $\{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) \leq t\}$ son diferentes del vacío. Para ver que la igualdad en el punto 2 realmente se cumple notemos que si t no pertenece al rango de F , entonces

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) \geq t\} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) > t\}$$

y

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) \leq t\} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) < t\}.$$

Además, como F es creciente existen a, b en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que $\{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) > t\}$ es igual a $[b, \infty]$ o $(b, \infty]$ ya que si para x en $\overline{\mathbb{R}}$ se tiene que $F(x) > t$, esto implica que para toda y en $\overline{\mathbb{R}}$ con $y \geq x$ $F(y) \geq F(x) > t$ y de la misma forma tenemos que $\{x \in \overline{\mathbb{R}} | F(x) < t\}$ es igual a $[-\infty, a]$ o $[-\infty, a)$; si suponemos que $a < b$, entonces (a, b) es distinto del vacío y para toda $a < x < b$ tenemos que ni $F(x) < t$ ni $F(x) > t$, por lo tanto $F(x) = t$, que es una contradicción ya que t no pertenece al rango de F , por lo tanto $a = b$ y la igualdad en el punto 2 se cumple. Observemos que si F es estrictamente creciente, entonces $F^{(-1)}$ es única, pero si F es constante en algún intervalo \mathbf{I}_n , es decir, para alguna a en $\overline{\mathbb{R}}$, $F(x) = a$ para toda x en \mathbf{I}_n entonces, $F^{(-1)}(a) = x$ donde x es cualquier número en \mathbf{I}_n , por lo tanto $F^{(-1)}$ no es única.

Ejemplo 1.2.10. Sean a un número en \mathbb{R} y ε_a la función definida en el ejemplo 1.2.2. Una cuasi-inversa de ε_a está dada por

$$\varepsilon_a^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0 & \text{si } t = 0, \\ a & \text{si } t \in (0, 1), \\ a_1 & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

donde $-\infty \leq a_0 < a \leq a_1 \leq \infty$.

Ejemplo 1.2.11. Sea F una función de distribución definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

para toda x en $\overline{\mathbb{R}}$. Una cuasi-inversa de F está dada por

$$F^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0 & \text{si } t = 0, \\ t & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1, \\ a_1 & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

donde $-\infty \leq a_0 \leq 0$ y $\frac{1}{2} < a_1 \leq \infty$.

Corolario 1.2.12. Sean H, F, G y C' como en el Lema 1.2.5, y $F^{(-1)}, G^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F y G respectivamente. Entonces, para toda (u, v) en $\text{dom } C'$,

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (1.15)$$

Demostración: Sean (u, v) en $\text{dom } C'$, entonces existen x, y en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que $F(x) = u$ y $G(y) = v$. Sean $F^{(-1)}, G^{(-1)}$ cuasi-inversas tales que $F^{(-1)}(u) = x$ y $G^{(-1)}(v) = y$, entonces por el Lema 1.2.5

$$H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) = H(x, y) = C'(u, v) = C'(F(x), G(y)).$$



Si F y G son continuas, entonces C' es cópula y (1.15) nos da un método de construcción de cópulas.

Ejemplo 1.2.13. Sea H la función de distribución conjunta del ejemplo 1.2.4 dada por

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & \text{si } x \in [-1, 1] \times [0, \infty], \\ 1 - e^{-y} & \text{si } x \in (1, \infty] \times [0, \infty], \\ 0 & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$

Entonces, H tiene marginales F y G dadas por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ (x+1)/2 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad y \quad G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Tomemos a las cuasi-inversas de F y G como $F^{(-1)}(u) = 2u - 1$ ya que si u pertenece a \mathbf{I} , entonces $u = (x+1)/2$, por lo tanto $x = 2u - 1$; mientras que $G^{(-1)}(v) = -\ln(1-v)$ ya que para toda v en \mathbf{I} se tiene que $v = 1 - e^{-y}$, por lo tanto $y = -\ln(1-v)$. Como $\text{ran } F = \text{ran } G = \mathbf{I}$, entonces por (1.15), H nos da una cópula C tal que para toda (u, v) en \mathbf{I}^2

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \\ &= \frac{2u(e^{-\ln(1-v)} - 1)}{2u - 2 + 2e^{-\ln(1-v)}} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv}. \end{aligned}$$

Notemos que si C es una cópula con rango en \mathbf{I} , entonces define una función de distribución

conjunta en $\overline{\mathbb{R}}^2$ si la extendemos apropiadamente. Si H la definimos como

$$H_C(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0, \\ C(x, y) & \text{si } x, y \in \mathbf{I}, \\ x & \text{si } x \in \mathbf{I} \text{ y } y > 1, \\ y & \text{si } x > 1 \text{ y } y \in \mathbf{I}, \\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ y } y > 1, \end{cases}$$

entonces, H_C es una función de distribución conjunta con marginales uniformes en el $(0, 1)$.

1.3. Cópulas y variables aleatorias

Sea $\mathcal{C} = \{(a, b) | -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$, recordemos que el σ -álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$, denotada por $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ es el σ -álgebra más pequeño que contiene a \mathcal{C} , es decir, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{C})$. Si X es una función definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , que toma valores en \mathbb{R} , y es una función medible, decimos que X es una **variable aleatoria**. Sea F la **función de distribución de probabilidad de X** , es decir, para toda x en \mathbb{R} , $F(x) = P[X \in (-\infty, x]] = P[X \leq x]$, esto implica que F es una función creciente, continua por la derecha y

$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

por lo tanto cumple con la Definición 1.2.1. A partir de ahora nos referimos a las funciones de distribución de probabilidad como función de distribución. Si Y es otra variable aleatoria definida en (Ω, \mathcal{F}, P) , con función de distribución G , entonces podemos definir a H , la **función de distribución conjunta del vector aleatorio (X, Y)** , como $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$, y esta función cumple con la Definición 1.2.3. Por lo tanto, podemos reescribir el Teorema de Sklar en términos de variables aleatorias.

Teorema 1.3.1. Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H , y marginales F y G , respectivamente. Entonces, existe una cópula C tal que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Si F y G son continuas C es única, y en otro caso C está únicamente determinada en $\text{ran } F \times \text{ran } G$.

A la cópula C del Teorema 1.3.1 la llamaremos **cópula de \mathbf{X} y \mathbf{Y}** , denotada por C_{XY} .

Ahora veamos que la cópula producto $\Pi(u, v) = uv$ para u, v en \mathbf{I} , caracteriza a las variables aleatorias independientes cuando éstas son continuas.

Teorema 1.3.2. Sean X, Y variables aleatorias continuas. Entonces, X y Y son independientes si y sólo si $C_{XY} = \Pi$.

Demostración: Sean X, Y variables aleatorias continuas e independientes con marginales F y G , entonces por la independencia se cumple que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $H(x, y) = F(x)G(y)$. Además, por el Teorema de Sklar existe una cópula C_{XY} tal que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y))$. Si $F(x) = u$ y $G(y) = v$ por continuidad sabemos que para toda (u, v) en \mathbf{I}^2 existe (x, y) en $\overline{\mathbb{R}}^2$ tal que $(u, v) = (F(x), G(y))$; lo que implica, por el Teorema de Sklar, que C_{XY} es única. Por lo tanto $C_{XY} = \Pi$.

Supongamos ahora que X y Y son variables aleatorias continuas, con funciones de distribución F y G respectivamente, tales que $C_{XY} = \Pi$. Entonces, para toda (u, v) en \mathbf{I}^2 , $C_{XY}(u, v) = uv$. Si $u = F(x)$ y $v = G(y)$, entonces por el Teorema de Sklar $C_{XY}(F(x), G(y)) = F(x)G(y) = H(x, y)$, por lo tanto X y Y son independientes. ■

El siguiente teorema nos dice que bajo transformaciones estrictamente monótonas, las cópulas son invariantes, o bien, cambian en forma predecible.

Teorema 1.3.3. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son funciones estrictamente crecientes de $\text{ran } X$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y $\text{ran } Y$ en $\overline{\mathbb{R}}$, respectivamente, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Así C_{XY} es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes.

Demostración: Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} , y F_1, F_2, G_1 y G_2 las funciones de distribución de $X, \alpha(X), Y$ y $\beta(Y)$ respectivamente. Como α y β son estrictamente crecientes tenemos que para toda x en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$F_2(x) = \text{P}[\alpha(X) \leq x] = \text{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$$

y análogamente se demuestra que para toda y en $\overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$. Entonces, por el Teorema de Sklar se cumple que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= \text{P}[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= \text{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

Como X y Y son continuas, $\text{ran } F_2 = \text{ran } G_2 = \mathbf{I}$, por lo tanto $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ en \mathbf{I}^2 . ■

Si α o β son estrictamente decrecientes, entonces la cópula de $\alpha(X)$ y $\beta(Y)$ es una simple transformación de la cópula de X y Y .

Teorema 1.3.4. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Sean α y β funciones estrictamente monótonas que van de $\text{ran } X$ a $\overline{\mathbb{R}}$ y $\text{ran } Y$ a $\overline{\mathbb{R}}$, respectivamente.

1. Si α es estrictamente creciente y β estrictamente decreciente, entonces para toda u, v en \mathbf{I}

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

2. Si α es estrictamente decreciente y β estrictamente creciente, entonces para toda u, v en \mathbf{I}

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

3. Si α y β son estrictamente decrecientes, entonces para toda u, v en \mathbf{I}

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Demostración: Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} , y F_1, F_2, G_1 y G_2 las funciones de distribución de $X, \alpha(X), Y$ y $\beta(Y)$ respectivamente.

1. Supongamos que α es estrictamente creciente y β estrictamente decreciente. Sabemos por la demostración del Teorema 1.3.3 que $F_2(x) = F_1(\alpha^{-1}(x))$, mientras que

por la continuidad de Y tenemos que

$$\begin{aligned}
 G_2(y) = P[\beta(Y) \leq y] &= P[Y \geq \beta^{-1}(y)] \\
 &= 1 - P[Y < \beta^{-1}(y)] \\
 &= 1 - P[Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
 &= 1 - G_1(\beta^{-1}(y)).
 \end{aligned}$$

Teniendo esto y por el Teorema de Sklar podemos ver que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F(x), G(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
 &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\
 &= P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
 &= F_1(\alpha^{-1}(x)) - C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
 &= F_2(x) - C_{XY}(F_2(x), 1 - G_2(y))
 \end{aligned}$$

Como X y Y son continuas, $\text{ran } F_2 = \text{ran } G_2 = \mathbf{I}$, por lo tanto para toda u, v en \mathbf{I} $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$ en \mathbf{I}^2 .

2. El caso cuando α es estrictamente decreciente y β estrictamente creciente, es análogo.
3. Supongamos ahora que α y β son estrictamente decrecientes. En este caso tenemos que $F_2(x) = 1 - F_1(\alpha^{-1}(x))$ y $G_2(y) = 1 - G_1(\beta^{-1}(y))$. Por esto y por el Teorema

de Sklar podemos ver que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F(x), G(y)) &= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= \mathbb{P}[X \geq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\
&= \mathbb{P}[X \geq \alpha^{-1}(x)] - \mathbb{P}[X \geq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= (1 - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)]) \\
&\quad - (\mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)] - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)]) \\
&= 1 - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] - \mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&\quad + \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= 1 - F_1(\alpha^{-1}(x)) - G_1(\beta^{-1}(y)) \\
&\quad + C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= F_2(x) + G_2(y) - 1 + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda u, v en \mathbf{I} , se cumple que $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)$ en \mathbf{I}^2 .

■

Observemos que los resultados de los Teoremas 1.3.3 y 1.3.4 son independientes de la elección de α y β . Además, es posible debilitar las hipótesis de los teoremas mencionados si pedimos que α y β sean estrictamente crecientes o decrecientes casi en todos lados respecto a la medida de Lebesgue.

Antes de seguir, es necesario recordar algunos resultados y terminología de teoría de la medida. Toda función de distribución conjunta H induce una medida de probabilidad en $\overline{\mathbb{R}}^2$ mediante $V_H([-\infty, x] \times [-\infty, y]) = H(x, y)$, pues el conjunto $\{[-\infty, x] \times [-\infty, y] \mid (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2\}$ es clase determinante en $\overline{\mathbb{R}}^2$. Como toda cópula induce una función de distribución conjunta, con marginales que se distribuyen uniformes en $(0, 1)$, esto implica que si C es una cópula, también induce una medida de probabilidad en \mathbf{I}^2 mediante $V_C([0, u] \times [0, v]) = C(u, v)$. Por el Teorema de Descomposición de Lebesgue, toda cópula C se puede escribir como

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v),$$

donde

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds \quad \text{y} \quad S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v), \quad (1.16)$$

A_C es la parte **absolutamente continua de C** y S_C es la parte **singular de C** respecto a la medida de Lebesgue en \mathbf{I}^2 .

Definición 1.3.5. Sea C una cópula. Definamos al **soporte de C** como el complemento de la unión de todos los conjuntos abiertos de \mathbf{I}^2 con C -volumen cero. Decimos que C tiene **soporte completo** si y sólo si su soporte es igual a \mathbf{I}^2

Notemos que si C es singular, entonces el soporte de C tiene medida de Lebesgue igual a cero.

Ejemplo 1.3.6. Sea M la cota de Fréchet-Hoeffding definida como $M(u, v) = \min(u, v)$ para toda (u, v) en \mathbf{I}^2 . El soporte de M es $D = \{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | v = u\}$, la diagonal del cuadrado unitario \mathbf{I}^2 , por lo tanto M es singular. Esto se sigue del hecho de que si $0 \leq a \leq b \leq 1$ y $0 \leq c \leq d \leq 1$ son tales que $\{(a, b) \times (c, d)\} \cap D = \emptyset$, entonces $(a, b) \times (c, d)$ tiene M -volumen igual a cero. También notemos que $\partial^2 M(u, v) / \partial u \partial v = 0$ fuera de la diagonal, por lo tanto $A_M(u, v) = 0$.

Análogamente se puede demostrar que W , la otra cota de Fréchet-Hoeffding, tiene soporte en la diagonal secundaria $S = \{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | u + v = 1\}$ y es singular.

Ejemplo 1.3.7. La cópula producto Π es absolutamente continua, ya que para toda u, v en \mathbf{I} se tiene que

$$A_\Pi(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial}{\partial s \partial t} \Pi(s, t) dt ds = \int_0^u \int_0^v 1 dt ds = uv.$$

Ejemplo 1.3.8. Sean Π la cópula producto y M la cota de Fréchet-Hoeffding. Definamos a $C(u, v) = (1/2)\Pi(u, v) + (1/2)M(u, v)$, entonces C es una cópula con soporte completo y parte singular. Primero veamos que, como Π y M son cópulas, por el Ejemplo 1.1.13, C es cópula; además $\partial^2 C(u, v) / \partial u \partial v = 1/2$ para toda (u, v) en \mathbf{I}^2 , por lo tanto tiene soporte completo, pero C también tiene parte singular.

1.4. Las cotas de Fréchet-Hoeffding

En la ecuación (1.8) vimos que para toda cópula C y para toda u, v en \mathbf{I} , existen dos funciones W y M que resultan ser cópulas, las cotas de Fréchet-Hoeffding, tales que

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

Por el Teorema de Sklar, tenemos que si X y Y son variables aleatorias con función de distribución conjunta H , marginales F y G , respectivamente, entonces para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$W(F(x), G(y)) \leq H(x, y) \leq M(F(x), G(y)). \quad (1.17)$$

Como W y M son cópulas, entonces por el teorema de Sklar las funciones $W(F, G)$ y $M(F, G)$ son funciones de distribución conjunta.

Definición 1.4.1. Sea S un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^2$. Decimos que S es **creciente** si para todo (x, y) y (u, v) en S , $x < u$ implica que $y \leq v$. De la misma forma se dice que S es **decreciente** si para todo (x, y) y (u, v) en S , $x < u$ implica que $y \geq v$.

Ahora demostraremos que si X y Y son variables aleatorias con función de distribución conjunta H , ésta coincide con M , la cota superior de Fréchet-Hoeffding, si y sólo si el soporte de H es un conjunto creciente, pero antes debemos demostrar los siguientes resultados.

Lema 1.4.2. Sea S un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces, S es creciente si y sólo si para toda (x, y) en $\overline{\mathbb{R}}^2$ se cumple alguno de los siguientes puntos,

1. para todo (u, v) en S , $u \leq x$ implica $v \leq y$; o
2. para todo (u, v) en S , $v \leq y$ implica $u \leq x$.

Demostración: Primero supongamos que S es creciente y que no cumple los puntos 1 y 2; entonces existen los puntos (x, y) en $\overline{\mathbb{R}}^2$ y $(a, b), (c, d)$ en S tales que $a \leq x, b > y, d \leq y$ y $c > x$, de donde $a < c$ y $b > d$, que es una contradicción. Por lo tanto, si S es creciente se

cumplen 1 ó 2. Ahora supongamos que S no es creciente, lo que implica que existen puntos (a, b) y (c, d) en S tales que $a < c$ y $b > d$. Si tomamos a $(x, y) = ((a + c)/2, (b + d)/2)$, entonces $a < x, b > y, c > x$ y $d < y$. Por lo tanto, no se cumple ninguno de los incisos. ■

Lema 1.4.3. Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces, H es igual a M , la cota superior de Fréchet-Hoeffding, si y sólo si para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, se cumple que $P[X > x, Y \leq y] = 0$ o $P[X \leq x, Y > y] = 0$.

Demostración: Supongamos que X y Y son variables aleatorias con función de distribución conjunta H , con marginales F y G respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X \leq x, Y > y] \\ &= H(x, y) + P[X \leq x, Y > y] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G(y) &= P[Y \leq y] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X > x, Y \leq y] \\ &= H(x, y) + P[X > x, Y \leq y] \end{aligned}$$

De donde, $H(x, y) = M(F(x), G(y))$ si y sólo si $\min(P[X \leq x, Y > y], P[X > x, Y \leq y]) = 0$. ■

Teorema 1.4.4. Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces, H es igual a M , la cota superior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si el soporte de H es un subconjunto creciente de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Demostración: Sean S el soporte de H y (x, y) un punto en $\overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces, el inciso 1 del Lema 1.4.2 se cumple si y sólo si $\{(u, v) | u \leq x \text{ y } v > y\} \cap S = \emptyset$, y esto ocurre si y sólo si $P[X \leq x, Y > y] = 0$. De la misma forma se puede demostrar que el inciso 2 del Lema 1.4.2 se cumple si y sólo si $P[X > x, Y \leq y] = 0$. Por el Lema 1.4.3 sabemos que $P[X > x, Y \leq y] = 0$ o $P[X \leq x, Y > y] = 0$. Entonces, por lo visto anteriormente, se cumple alguno de los dos incisos del Lema 1.4.2, por lo tanto $H = M$ si y sólo si el

soporte de H es creciente. ■

Observemos que si X, Y son variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , entonces el soporte de H no tiene segmentos de línea horizontales ni verticales. En este caso, decimos que Y es una función estrictamente creciente de X casi siempre, es decir, $Y = f(X)$ con f una función estrictamente creciente si y sólo si la cópula de X y Y es M .

Por un procedimiento análogo se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.4.5. Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces, H es igual a W , la cota inferior de Fréchet-Hoeffding, si y sólo si el soporte de H es un subconjunto decreciente de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Si X, Y son variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , entonces el soporte de H no tiene segmentos de línea horizontales ni verticales. En este caso decimos que Y es una función estrictamente decreciente de X casi siempre, es decir, $Y = g(X)$ con g una función estrictamente decreciente si y sólo si la cópula de X y Y es W .

1.5. Cópulas de supervivencia y simetría

En las aplicaciones de la teoría de probabilidad, es común que las variables aleatorias representen tiempos de vida de personas u objetos. La probabilidad de que un individuo u objeto sobreviva más allá de x está dado por la **función de supervivencia** $\bar{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$, donde F es la función de distribución de X .

De la misma forma, si tenemos a (X, Y) un vector aleatorio con función de distribución conjunta H , la **función de supervivencia conjunta** está dada por $\bar{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$. Las marginales de \bar{H} son las funciones $\bar{H}(x, -\infty)$ y $\bar{H}(-\infty, y)$, que son las funciones de supervivencia \bar{F} y \bar{G} , respectivamente. Para poder dar una relación funcional entre las funciones de supervivencia conjunta y sus marginales, como se hizo en el Teorema de Sklar, supongamos que C es la cópula asociada a (X, Y) y veamos que para toda x, y

en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(x, y) &= \mathbb{P}[X > x, Y > y] \\
 &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\
 &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\
 &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos a \hat{C} una función que va de \mathbf{I} a \mathbf{I}^2 como

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \quad (1.18)$$

para toda u, v en \mathbf{I} , tenemos que

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)), \quad (1.19)$$

para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$.

Notemos que, por el inciso 3 del Teorema 1.3.4, \hat{C} es cópula. Además a \hat{C} se le conoce como **la cópula de supervivencia de X y Y** . Es importante no confundir a la cópula de supervivencia \hat{C} con \bar{C} la función de supervivencia conjunta de dos variables aleatorias uniformes $(0, 1)$ cuya función de distribución conjunta es la cópula C . Notemos que para toda u, v en $\overline{\mathbb{R}}$, $\bar{C}(u, v) = \mathbb{P}[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v)$.

Ejemplo 1.5.1. Sean X y Y variables aleatorias con la función de supervivencia dada por

$$\bar{H}_\theta(x, y) = \begin{cases} (1 + x + y)^{-\theta} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, \\ (1 + x)^{-\theta} & \text{si } x \geq 0, y < 0, \\ (1 + y)^{-\theta} & \text{si } x < 0, y \geq 0, \\ 1 & \text{si } x < 0, y < 0, \end{cases}$$

con $\theta > 0$. Entonces, las funciones marginales de supervivencia están dadas por

$$\bar{H}_\theta(x, -\infty) = \bar{F}(x) = \begin{cases} (1 + x)^{-\theta} & \text{si } x \geq 0, \\ 1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

y

$$\bar{H}_\theta(-\infty, y) = \bar{G}(y) = \begin{cases} (1 + y)^{-\theta} & \text{si } y \geq 0, \\ 1 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Si $u = (1 + x)^{-\theta}$ entonces despejando obtenemos $x = u^{-1/\theta} - 1$; de la misma forma si $v = (1 + y)^{-\theta}$ entonces $y = v^{-1/\theta} - 1$. Con todo esto y por la versión en términos de cópulas de supervivencia del Corolario 1.2.12 tenemos que para toda u, v en \mathbf{I} , $\hat{C}(u, v) = (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}$.

Dos funciones relacionadas con cópulas y cópulas de supervivencia son: la **cópula dual** definida como $\tilde{C}(u, v) = u + v - C(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} , donde C es la cópula y la **co-cópula** definida como $C^*(u, v) = 1 - C(1 - u, 1 - v)$. Primero veamos que \tilde{C} y C^* no son cópulas, ya que $\tilde{C}(u, 1) = u + 1 - C(u, 1) = 1$ y $C^*(u, 0) = 1 - C(1 - u, 1) = u$, para toda u en \mathbf{I} .

Sean X y Y variables aleatorias con H la función de distribución conjunta y marginales F y G , respectivamente. Entonces, para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = C(F(x), G(y))$$

y

$$P[X > x, Y > y] = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)).$$

Aunque la cópula dual y la co-cópula no son cópulas, expresan la probabilidad de un evento de las variables aleatorias X y Y , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P[\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}] &= P[X \leq x] + P[Y \leq y] - P[X \leq x, Y \leq y] \\ &= F(x) + G(y) - C(F(x), G(y)) \\ &= \tilde{C}(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P[\{X > x\} \cup \{Y > y\}] &= P[X > x] + P[Y > y] - P[X > x, Y > y] \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - \{F(x) + G(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))\} \\ &= C^*(\bar{F}(x), \bar{G}(y)). \end{aligned}$$

Además, se puede demostrar que bajo composición \circ , el conjunto de operaciones formadas por la cópula de supervivencia, la cópula dual y co-cópula de una cierta cópula C , junto

con la identidad (es decir, " \wedge ", " \sim ", " $*$ " e " i ") está dado por la Tabla 1.1. Por ejemplo, veamos que $* \circ * = i$ y $\wedge \circ * = \sim$. En efecto, sean u, v en \mathbf{I} y C una cópula, entonces

$$(C^*(u, v))^* = (1 - C(1 - u, 1 - v))^* = 1 - C^*(1 - u, 1 - v) = C(u, v);$$

mientras que

$$(C^*(u, v))^\wedge = (1 - C(1 - u, 1 - v))^\wedge = 1 - \hat{C}(1 - u, 1 - v) = u + v - C(u, v) = \tilde{C}(u, v).$$

Tabla 1.1: Operaciones bajo composición

\circ	i	\wedge	\sim	$*$
i	i	\wedge	\sim	$*$
\wedge	\wedge	i	$*$	\sim
\sim	\sim	$*$	i	\wedge
$*$	$*$	\sim	\wedge	i

Si X es una variable aleatoria y a es un número real, decimos que X es **simétrica respecto a a** si la distribución de las variables aleatorias $X - a$ y $a - X$ es la misma, es decir, para toda x en \mathbb{R} , $P[X - a \leq x] = P[a - X \leq x]$. Cuando X es continua con función de distribución F , esto es ocurre si y sólo si

$$F(a + x) = \bar{F}(a - x), \tag{1.20}$$

y si F es discontinua entonces (1.20) se cumple sólo en los puntos de continuidad de F .

En el caso univariado, definir la simetría respecto a un número real a es natural; sin embargo, en el caso bivariado ya no lo es. Como veremos a continuación, se pueden definir varios tipos de simetría.

Definición 1.5.2. Sean X y Y variables aleatorias y sea (a, b) un punto en $\overline{\mathbb{R}}^2$.

1. (X, Y) es **marginalmente simétrico respecto a (a, b)** si X y Y son simétricos respecto a a y b respectivamente.

2. (X, Y) es **radialmente simétrico respecto a** (a, b) si la distribución conjunta de $X - a$ y $Y - b$ es la misma distribución conjunta de $a - X$ y $b - Y$
3. (X, Y) es **conjuntamente simétrico respecto a** (a, b) si los siguientes vectores aleatorios tienen la misma distribución conjunta: $(X - a, Y - b)$, $(X - a, b - Y)$, $(a - X, b - Y)$ y $(a - X, Y - b)$.

Teorema 1.5.3. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente. Sea (a, b) un punto en \mathbb{R}^2 . Entonces, (X, Y) es radialmente simétrico sobre (a, b) si y sólo si

$$H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y) \text{ para todo } (x, y) \text{ en } \mathbb{R}^2. \quad (1.21)$$

Demostración: Sean (x, y) en \mathbb{R}^2 . Sabemos que (X, Y) es radialmente simétrico respecto a (a, b) si y sólo si $(X - a, Y - b) \stackrel{d}{=} (a - X, b - Y)$, pero esto ocurre si y sólo si $P[X - a \leq x, Y - b \leq y] = P[a - X \leq x, b - Y \leq y]$. Para concluir la demostración solamente debemos notar que

$$\begin{aligned} H(a + x, b + y) &= P[X \leq x + a, Y \leq y + b] \\ &= P[X - a \leq x, Y - b \leq y] \\ &= P[a - X \leq x, b - Y \leq y] \\ &= P[X > a - x, Y > b - y] = \bar{H}(a - x, b - y). \end{aligned}$$

Esto se debe a que por la continuidad de las variables aleatorias X y Y se cumple que $P[X > a - x, Y > b - y] = P[X \geq a - x, Y \geq b - y]$. ■

El término "radial" viene del hecho de que los puntos $(a + x, b + y)$ y $(a - x, b - y)$ que aparecen en (1.21) se encuentran en los rayos con dirección opuesta que salen de (a, b) .

Por la definición de simetría conjunta, es claro que ésta implica simetría radial, mientras que la simetría radial implica simetría marginal, ya que si $y = \infty$ en (1.21) tenemos que

$$F(a + x) = H(a + x, \infty) = \bar{H}(a - x, -\infty) = \bar{F}(a - x).$$

De la misma forma, si $x = \infty$, entonces $G(b + y) = \bar{G}(b - y)$. Como la simetría conjunta es una condición muy fuerte, nos enfocaremos en la simetría radial para distribuciones bivariadas.

Ejemplo 1.5.4. Sea X y Y variables aleatorias tales que (X, Y) tiene distribución normal bivariada con parámetros $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ y ρ . Entonces, (X, Y) es radialmente simétrico respecto a (μ_x, μ_y)

En (1.21) se ve que la simetría radial involucra a la funciones de distribución y supervivencia conjuntas. El siguiente teorema nos dice cuál es el papel que juegan las cópulas y las cópulas de supervivencia en la simetría radial.

Teorema 1.5.5. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G , respectivamente, y cópula C . Más aún, supongamos que X es radialmente simétrica respecto a a y Y respecto a b . Entonces, (X, Y) es radialmente simétrico respecto a (a, b) si y sólo si $C = \hat{C}$, es decir, si se cumple que

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \quad (1.22)$$

para toda u, v en \mathbf{I} .

Demostración: Sean (a, b) en $\bar{\mathbb{R}}^2$. Sabemos por la Definición 1.5.2 que el vector aleatorio (X, Y) es radialmente simétrico respecto a (a, b) si y sólo si, para toda (x, y) en $\bar{\mathbb{R}}^2$, se cumple que $H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y)$. Por el Teorema de Sklar, esto se cumple si y sólo si para toda (x, y) en $\bar{\mathbb{R}}^2$

$$C(F(a + x), G(b + y)) = \hat{C}(\bar{F}(a - x), \bar{G}(b - y)). \quad (1.23)$$

Como X es simétrica respecto a a y Y es simétrica respecto a b , sabemos que

$$F(a + x) = \hat{F}(a - x) \quad \text{y} \quad G(b + y) = \hat{G}(b - y).$$

Si $F(a + x) = u$ y $G(b + y) = v$ y por la continuidad de las variables aleatorias, podemos concluir que (1.23) se cumple. Por lo tanto, el vector aleatorio (X, Y) es radialmente simétrico respecto a (a, b) si y sólo si (1.23) se cumple. ■

Lo que (1.23) nos dice es que para toda u, v en \mathbf{I} , los rectángulos

$$[0, u] \times [0, v] \quad \text{y} \quad [1 - u, 1] \times [1 - v, 1]$$

tienen igual C -volumen.

Otra forma de simetría es la intercambiabilidad. Decimos que X y Y variables aleatorias son **intercambiables** si los vectores aleatorios (X, Y) y (Y, X) , se distribuyen idénticamente, es decir, si H es la función de distribución conjunta de X y Y con marginales F y G , respectivamente, se cumple que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = H(y, x)$. Claramente las variables aleatorias intercambiables se distribuyen idénticamente, ya que para toda x en $\overline{\mathbb{R}}$

$$F(x) = H(x, \infty) = H(\infty, x) = G(x). \quad (1.24)$$

En general, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias, decimos que son intercambiables si y sólo si $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ para toda σ permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Teorema 1.5.6. Sean X, Y variables aleatorias continuas con distribución conjunta H , marginales F y G , respectivamente, y cópula C . Entonces, X y Y son intercambiables si y sólo si $F = G$ y $C(u, v) = C(v, u)$ para toda u, v en \mathbf{I} .

Demostración: Supongamos que X, Y son variables aleatorias continuas intercambiables con distribución conjunta H , marginales F y G , respectivamente, y cópula C . Por la definición de intercambiabilidad, sabemos que esto ocurre si y sólo si $(X, Y) \stackrel{d}{=} (Y, X)$, es decir, para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = H(y, x)$. Por el Teorema de Sklar esto ocurre si y sólo si $C(F(x), G(y)) = C(F(y), G(x))$, pero (1.24) nos dice que $F(x) = G(x)$ y $F(y) = G(y)$, por lo tanto $C(F(x), F(y)) = C(F(y), F(x))$ para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$. Si $u = F(x)$ y $v = G(y)$ para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, por la continuidad de X y Y , concluimos que X, Y son intercambiables si y sólo si $C(u, v) = C(v, u)$ para toda u, v en \mathbf{I} . ■

Cuando $C(u, v) = C(v, u)$ para toda u, v en \mathbf{I} , diremos que C es **simétrica**.

Ejemplo 1.5.7. Sean X, Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Entonces, X y Y son intercambiales. Esto es fácil de ver ya que si F es la distribución de X y Y , entonces

$$H(x, y) = F(x)F(y) = F(y)F(x) = H(y, x)$$

para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$; por lo tanto X y Y son intercambiables y su cópula es Π ; además, notemos que Π es simétrica.

Sin embargo, no todas las variables aleatorias idénticamente distribuidas intercambiables son independientes. Sea

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}$$

para toda u, v en \mathbf{I} , claramente C es simétrica, por lo tanto si X, Y se distribuyen idénticamente, por el Teorema 1.5.6 son intercambiables, pero $C \neq \Pi$. Por lo tanto, X, Y no son independientes.

1.6. Orden

Definición 1.6.1. Sean C_1 y C_2 cópulas. Decimos que C_1 es **menor a** C_2 , denotado por $C_1 \prec C_2$, si y sólo si $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} . De igual forma, decimos que C_1 es **mayor a** C_2 , denotado por $C_1 \succ C_2$, si y sólo si $C_1(u, v) \geq C_2(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} .

Ahora mostraremos que \prec es un orden parcial. Claramente \prec es reflexiva, ya que para toda cópula C se cumple que $C(u, v) \leq C(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} . Para ver que es transitiva, sean C_1, C_2 y C_3 cópulas tales que $C_1 \prec C_2$ y $C_2 \prec C_3$, entonces

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \leq C_3(u, v)$$

para toda u, v en \mathbf{I} , por lo tanto $C_1 \prec C_3$. Por último supongamos que C_1 y C_2 son cópulas tales que $C_1 \prec C_2$ y $C_2 \prec C_1$; lo que implica que

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \leq C_1(u, v)$$

para toda u, v en \mathbf{I} , por lo tanto $C_1 = C_2$; es decir, \prec es antisimétrico, y \prec es un orden parcial.

Si W y M son las cotas de Fréchet-Hoeffding y C es cualquier cópula, entonces

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

para toda u, v en \mathbf{I} , por lo que W es menor a cualquier cópula y M es mayor a cualquier cópula. Es importante notar que \prec no induce un orden total, como el siguiente ejemplo lo demuestra.

Ejemplo 1.6.2. Sean Π la cópula producto y $C(u, v) = [W(u, v) + M(u, v)]/2$ para toda u, v en \mathbf{I} . Demostraremos que Π y C no son comparables. Por el Ejemplo 1.1.13 sabemos que C , una suma convexa de W y M , es cópula. Para demostrar que no son comparables basta ver que

$$\begin{aligned} C(1/4, 1/4) &= [\max(1/4 + 1/4 - 1, 0) + \min(1/4, 1/4)]/2 \\ &= 1/8 \\ &> 1/16 = \Pi(1/4, 1/4) \end{aligned}$$

y

$$C(3/4, 1/4) = 1/8 < 3/16 = \Pi(3/4, 1/4).$$

Por lo tanto, Π y C no son comparables y \prec no induce un orden total.

Sin embargo, existen familias de cópulas totalmente ordenadas por \prec . Sea $\{C_\theta\}$ una familia de cópulas. Decimos que la familia está **positivamente ordenada** si para toda $\theta_1 \leq \theta_2$ se cumple que $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$, y la familia está **negativamente ordenada** si para toda $\theta_1 \leq \theta_2$ se cumple que $C_{\theta_2} \prec C_{\theta_1}$.

Ejemplo 1.6.3. Sea θ en \mathbf{I} y definamos a C una función de \mathbf{I}^2 en \mathbf{I} tal que para todo u, v en \mathbf{I}

$$C_\theta(u, v) = [\min(u, v)]^\theta [uv]^{1-\theta}.$$

Entonces, $\{C_\theta\}$ es una familia de cópulas positivamente ordenadas. De la misma forma que en el ejemplo anterior, veamos que C_θ cumple las condiciones de frontera,

$$C_\theta(0, v) = [\min(0, v)]^\theta \cdot 0 = 0$$

y

$$C_\theta(1, v) = [\min(1, v)]^\theta [v]^{1-\theta} = v^\theta v^{1-\theta} = v,$$

para toda v en \mathbf{I} . Análogamente se demuestra que para toda u en \mathbf{I} , se cumple que $C_\theta(u, 0) = 0$ y $C_\theta(u, 1) = u$. Para demostrar que C_θ es 2-creciente lo haremos por casos:

1. Si $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= u_2^\theta [u_2 v_2]^{1-\theta} - u_2^\theta [u_2 v_1]^{1-\theta} - u_1^\theta [u_1 v_2]^{1-\theta} + u_1^\theta [u_1 v_1]^{1-\theta} \\ &= (u_2 - u_1)(v_2^{1-\theta} - v_1^{1-\theta}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Si $0 \leq u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= u_2^\theta [u_2 v_2]^{1-\theta} - v_1^\theta [u_2 v_1]^{1-\theta} - u_1^\theta [u_1 v_2]^{1-\theta} + u_1^\theta [u_1 v_1]^{1-\theta} \\ &= v_2^{1-\theta} (u_2 - u_1) - v_1^{1-\theta} (v_1^\theta u_2^{1-\theta} - u_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Esto se debe a que $v_1^\theta u_2^{1-\theta} \geq u_1$ y $u_2 \geq v_1^\theta u_2^{1-\theta}$.

3. Si $0 \leq v_1 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= u_2^\theta [u_2 v_2]^{1-\theta} - v_1^\theta [u_2 v_1]^{1-\theta} - u_1^\theta [u_1 v_2]^{1-\theta} + v_1^\theta [u_1 v_1]^{1-\theta} \\ &= u_2^{1-\theta} (u_2^\theta v_2^{1-\theta} - v_1) - u_1^{1-\theta} (u_1^\theta v_2^{1-\theta} - v_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Esto se debe a que $u_1^\theta v_2^{1-\theta} \geq v_1$ y $u_2^\theta v_2^{1-\theta} \geq u_1^\theta v_2^{1-\theta}$.

Los casos $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2 \leq 1$, son análogos al 1 y 2 respectivamente. Por lo tanto, C_θ es cópula para $0 \leq \theta \leq 1$. Para ver que $\{C_\theta\}$ es positivamente ordenada veamos que si $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$ y u, v en $(0, 1)$, entonces

$$\frac{C_{\theta_1}(u, v)}{C_{\theta_2}(u, v)} = \left(\frac{uv}{\min(u, v)} \right)^{\theta_2 - \theta_1} \leq 1,$$

por lo tanto $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$. A $\{C_\theta\}$ se le conoce como **la familia de cópulas Cuadras-Augé**. Notemos que $C_0 = \Pi$ y $C_1 = M$.

1.7. Cópulas multivariadas

En esta sección extenderemos los resultados vistos hasta ahora, para los casos cuando la dimensión es mayor o igual a 3. Aunque muchos de los resultados y definiciones se extienden de forma natural, no sucede con todos.

Antes de comenzar vamos a dar la notación a utilizar en esta sección. Denotemos por $\overline{\mathbb{R}}^n$ al conjunto n -dimensional de los números reales extendidos, es decir, $\overline{\mathbb{R}}^n = \overline{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{R}} = \prod_{i=1}^n \overline{\mathbb{R}}$; para los puntos de $\overline{\mathbb{R}}^n$ utilizaremos la notación vectorial, es decir, si \mathbf{a} está en $\overline{\mathbb{R}}^n$, entonces $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, donde a_i está en $\overline{\mathbb{R}}$ para i en $\{1, \cdots, n\}$; también denotamos por \mathbf{I}^n al cubo unitario n -dimensional $\mathbf{I} \times \cdots \times \mathbf{I}$. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} están en $\overline{\mathbb{R}}^n$, entonces $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ si y sólo si $a_i \leq b_i$ para toda i en $\{1, \cdots, n\}$; de la misma forma $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ si y sólo si $a_i < b_i$ para toda i en $\{1, \cdots, n\}$; también denotamos por $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ al **paralelepípedo o caja n -dimensional** o simplemente **n -caja** $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Definición 1.7.1. Sean \mathbf{a}, \mathbf{b} puntos en $\overline{\mathbb{R}}^n$ y $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Entonces, los **vértices de B** son los puntos de la forma $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$, donde cada c_i es igual a a_i o b_i . Notemos que B tiene 2^n vértices.

Definición 1.7.2. Sean S_1, \cdots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$. Sea H una función tal que el dom $H = S_1 \times \cdots \times S_n$ y ran H es subconjunto de \mathbb{R} . Sean \mathbf{a}, \mathbf{b} en $\overline{\mathbb{R}}^n$ y $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ tal que sus vértices están en dom H . Entonces, el **H -volumen de B** está dado por

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}), \quad (1.25)$$

donde la suma varía sobre los 2^n vértices de B y $\text{sgn}(\mathbf{c})$ está dado por

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número par de } k\text{'s} \\ -1 & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número impar de } k\text{'s} \end{cases}$$

Ejemplo 1.7.3. Veamos que la Definición 1.7.2 es congruente con la definición dada para $n = 2$. Sean H una función de $\overline{\mathbb{R}}^2$ en \mathbb{R} . Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ puntos en $\overline{\mathbb{R}}^2$ tales que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Si $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, entonces $\mathcal{C} = \{(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)\}$, el conjunto de los vértices de B y por (1.25) tenemos que

$$V_H(B) = H(b_1, b_2) - H(b_1, a_2) - H(a_1, b_2) + H(a_1, a_2),$$

por lo tanto (1.25) es congruente con la definición dada para dimensión 2.

Ejemplo 1.7.4. Sea H una función de $\overline{\mathbb{R}}^3$ en \mathbb{R} , y sea $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Entonces, el H -volumen de B está dado por

$$\begin{aligned} V_H(B) = & H(b_1, b_2, b_3) - H(b_1, b_2, a_3) - H(b_1, a_2, b_3) - H(a_1, b_2, b_3) \\ & + H(b_1, a_2, a_3) + H(a_1, b_2, a_3) + H(a_1, a_2, b_3) - H(a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

Definición 1.7.5. Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$. Sea H una función tal que el dom $H = S_1 \times \dots \times S_n$ y ran H es subconjunto de \mathbb{R} .

- i. Decimos que H es **n -creciente** si y sólo si para toda caja n -dimensional B tal que sus vértices pertenecen a dom H , se cumple que $V_H(B) \geq 0$.
- ii. Si a_k es el ínfimo de S_k para toda k en $\{1, \dots, n\}$, decimos que H está **n -fija** si $H(\mathbf{t}) = 0$ para toda \mathbf{t} en dom H , donde al menos un $t_k = a_k$, con k en $\{1, \dots, n\}$.
- iii. Si b_k es el supremo de S_k para toda k en $\{1, \dots, n\}$, entonces H tiene **marginales unidimensionales** H_k donde dom $H_k = S_k$ y para toda x en S_k se cumple que

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n),$$

para toda k en $\{1, \dots, n\}$.

Notemos que se pueden definir marginales conjuntas de dos o más variables; por ejemplo, si H está definida como en la Definición 1.7.5, entonces $H_{12}(x, y) = H(x, y, b_2, \dots, b_n)$, para toda (x, y) en $S_1 \times S_2$.

El siguiente lema es análogo al Lema 1.1.6, pero para dimensión mayor o igual a 2. La demostración es análoga.

Lema 1.7.6. Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función de $S_1 \times \dots \times S_n$ en \mathbb{R} n -fija y n -creciente. Entonces, H es creciente en cada coordenada; es decir, si $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ y $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$ están en el dom H y $x < y$, entonces $H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$.

El siguiente lema es análogo al Lema 1.1.9, pero para dimensión mayor o igual a 2.

Lema 1.7.7. Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función de $S_1 \times \dots \times S_n$ en \mathbb{R} n -fija y n -creciente con marginales unidimensionales H_1, \dots, H_n . Entonces, para todo \mathbf{x} y \mathbf{y} en dom H se cumple que

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|$$

Definición 1.7.8. Una **subcópula n -dimensional** o **n -subcópula** es una función C' que satisface:

1. $\text{dom } C' = S_1 \times \cdots \times S_n$ donde S_1, \cdots, S_n son subconjuntos de \mathbf{I} que contienen al 0 y al 1.
2. C' está n -fija y es n -creciente.
3. C' tiene marginales unidimensionales C'_k , para toda k en $\{1, \cdots, n\}$ tales que para toda u en S_k

$$C'_k(u) = u, \quad (1.26)$$

De la misma forma en que demostramos para las 2-subcópulas tales que su rango está contenido en \mathbf{I} , se demuestra que para toda \mathbf{u} en $\text{dom } C'$, $0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq 1$, por lo que $\text{ran } C'$ está contenido en \mathbf{I} .

Definición 1.7.9. Una **cópula n -dimensional** o **n -cópula** es una subcópula C cuyo dominio es \mathbf{I}^n .

Equivalentemente, una n -cópula es una función de \mathbf{I}^n en \mathbf{I} con las siguientes propiedades:

1. Para toda \mathbf{u} en \mathbf{I}^n ,

$$C(\mathbf{u}) = 0 \text{ si al menos } u_k = 0 \text{ para alguna } k \text{ en } \{1, \cdots, n\} \quad (1.27)$$

y

$$C(1, \cdots, 1, u_k, 1, \cdots, 1) = u_k; \quad (1.28)$$

2. Para toda \mathbf{a}, \mathbf{b} en \mathbf{I} tales que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$,

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0. \quad (1.29)$$

Por la definición anterior se puede demostrar que si $n \geq 2$, entonces toda k -marginal de C es k -cópula para $2 \leq k < n$.

Ejemplo 1.7.10. Sea $C(u, v, w) = w \cdot \min(u, v)$ para toda u, v, w en \mathbf{I} . Entonces, C es una 3-cópula. Las condiciones de frontera (1.27) y (1.28) son fáciles de ver ya que

$$\begin{aligned}
C(0, v, w) &= C(u, 0, w) = C(u, v, 0) = 0, \\
C(u, 1, 1) &= \min(u, 1) = u \\
C(1, v, 1) &= \min(1, v) = v
\end{aligned}$$

y

$$C(1, 1, w) = w \cdot \min(1, 1) = w$$

para toda u, v, w en \mathbf{I} . Sea $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ una 3-caja, para ver que el C -volumen de B es positivo veamos que

$$\begin{aligned}
V_C(B) &= C(b_1, b_2, b_3) - C(a_1, b_2, b_3) - C(b_1, a_2, b_3) - C(b_1, b_2, a_3) \\
&\quad + C(a_1, a_2, b_3) + C(a_1, b_2, a_3) + C(b_1, a_2, a_3) - C(a_1, a_2, a_3) \\
&= b_3(\min(b_1, b_2) - \min(b_1, a_2) - \min(a_1, b_2) + \min(a_1, a_2)) \\
&\quad - a_3(\min(b_1, b_2) - \min(b_1, a_2) - \min(a_1, b_2) + \min(a_1, a_2)) \geq 0,
\end{aligned}$$

ya que

$$\min(b_1, b_2) - \min(b_1, a_2) - \min(a_1, b_2) + \min(a_1, a_2) = V_M([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \geq 0,$$

donde M es la cota superior de Fréchet-Hoeffding. Por lo tanto, C es una 3-cópula. Además las 2-cópulas generadas por las 2-marginales de C son M y Π , ya que

$$\begin{aligned}
C(u, v, 1) &= \min(u, v) = M(u, v), \\
C(u, 1, w) &= w \cdot \min(u, 1) = \Pi(u, w)
\end{aligned}$$

y

$$C(1, v, w) = w \cdot \min(1, v) = \Pi(v, w)$$

para toda u, v, w en \mathbf{I} .

Teorema 1.7.11. Sea C' una n -subcópula. Entonces, para toda \mathbf{u}, \mathbf{v} en $\text{dom } C'$, se tiene que

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|. \quad (1.30)$$

Por lo tanto, C' es uniformemente continua en su dominio.

Definición 1.7.12. Sea H una función de $\overline{\mathbb{R}}^n$ en \mathbb{R} . Decimos que H es **función de distribución n -dimensional** si y sólo si cumple que

1. H es n -creciente.
2. $H(\mathbf{t}) = 0$ si al menos $t_k = -\infty$ para alguna k en $\{1, \dots, n\}$ y $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Notemos que $-\infty, \infty$ están en $\overline{\mathbb{R}}$, por lo tanto H está n -fija. Además, si $-\infty \leq x_k \leq \infty$ las marginales unidimensionales $F_k(x_k) = (\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty)$ son crecientes por el Lema 1.7.6. Por la definición anterior $F_k(-\infty) = 1$ y $F_k(\infty) = 1$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$.

Teniendo todo esto podemos enunciar la versión n -dimensional del Teorema de Sklar.

Teorema 1.7.13 (Sklar). Sea H una función de distribución n -dimensional con marginales unidimensionales F_1, \dots, F_n . Entonces, existe C una n -cópula tal que para toda \mathbf{x} en $\overline{\mathbb{R}}^n$,

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (1.31)$$

Si F_1, \dots, F_n son continuas, entonces C es única; en otro caso C está únicamente determinada en $\text{ran } F_1 \times \dots \times \text{ran } F_n$. Recíprocamente, si C es una n -cópula y F_1, \dots, F_n son funciones de distribución univariada, entonces H definida por (1.31) es una función de distribución n -dimensional.

La demostración de la versión n -dimensional del Teorema de Sklar procede como en el caso para dimensión $n = 2$; primero se demuestran las versión n -dimensionales de los Lemas 1.2.5 y 1.2.6. La demostración del primero es directa; sin embargo, la extensión del segundo, en el que se demuestra que toda n -subcópula se puede extender a una n -cópula se hace vía interpolación multilinear de la n -subcópula, como en el caso visto en el Lema 1.2.6. Para la demostración ver [16].

Corolario 1.7.14. Sean H, C, F_1, \dots, F_n como en el Teorema 1.7.13 y sean $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ cuasi-inversas de F_1, \dots, F_n , respectivamente. Entonces, para toda \mathbf{u} en \mathbf{I}^n ,

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (1.32)$$

También podemos escribir la versión n -dimensional del Teorema de Sklar para variables aleatorias.

Teorema 1.7.15. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con funciones de distribución F_1, \dots, F_n , respectivamente, y función de distribución conjunta H . Entonces, existe una n -cópula tal que (1.31) se cumple. Si F_1, \dots, F_n son continuas entonces, C es única. En otro caso, C está únicamente determinada en $\text{ran } F_1 \times \dots \times \text{ran } F_n$.

Las extensiones de las cópulas M, W y Π a dimensión n , las denotamos por M^n, W^n y Π^n ; es decir, para toda \mathbf{u} en \mathbf{I}^n

$$\begin{aligned} M^n(\mathbf{u}) &= \min(u_1, \dots, u_n); \\ W^n(\mathbf{u}) &= \max(u_1 + \dots + u_n - (n-1), 0); \\ \Pi^n(\mathbf{u}) &= u_1 \cdots u_n. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Teorema 1.7.16. Si C' es n -subcópula y W^n, M^n definidas como en (1.33) entonces, para toda \mathbf{u} en $\text{dom } C'$,

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C'(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u}). \tag{1.34}$$

Demostración: Sea \mathbf{u} en $\text{dom } C'$. Entonces, por el Lema 1.7.6, sabemos que C' es creciente en cada coordenada, ya que toda n -subcópula está fija y es n -creciente, por lo que se cumple que

$$\begin{aligned} C'(u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n) &\leq C'(u_1, 1, u_3, u_4, \dots, u_n) \\ &\leq C'(u_1, 1, 1, u_4, \dots, u_n) \\ &\quad \vdots \\ &\leq C'(u_1, 1, \dots, 1) = u_1. \end{aligned}$$

En general se tiene que $C'(u_1, \dots, u_n) \leq u_k$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$, por lo tanto

$$C'(u_1, \dots, u_n) \leq \min(u_1, \dots, u_n) = M^n(u_1, \dots, u_n).$$

Para ver la otra desigualdad, veamos que por el Lema 1.7.7 se cumple que para toda \mathbf{u}

en \mathbf{I}^n

$$\begin{aligned} |C(1, \dots, 1) - C'(u_1, \dots, u_n)| &= 1 - C'(u_1, \dots, u_n) \\ &\leq \sum_{k=1}^n |1 - u_k| \\ &= \sum_{k=1}^n (1 - u_k) = n - \sum_{k=1}^n u_k. \end{aligned}$$

Entonces, $C'(u_1, \dots, u_n) \geq \sum_{k=1}^n u_k - n + 1$. Por lo tanto,

$$C'(u_1, \dots, u_n) \geq \max \left(\sum_{k=1}^n u_k - n + 1, 0 \right) = W^n(u_1, \dots, u_n).$$

■

En el teorema anterior demostramos que W^n y M^n , las extensiones de las cotas de Fréchet-Hoeffding, siguen siendo cotas para las n -cópulas. Sin embargo, veremos en el siguiente ejemplo que W^n no es cópula, mientras que M^n y Π^n sí lo son.

Ejemplo 1.7.17. Sean W^n, M^n y Π^n definidas como en (1.33). Entonces, M^n y Π^n son n -cópulas pero W^n no.

Primero veamos que M^n es cópula. Las condiciones de frontera son triviales ya que si \mathbf{u} en \mathbf{I}^n , $M^n(\mathbf{u}) = 0$ si y sólo si existe k en $\{1, \dots, n\}$ tal que $u_k = 0$. Sea \mathbf{u} en \mathbf{I}^n y definamos \mathbf{u}_k como el vector que tiene 1 en todas las entradas excepto en la k -ésima que es igual a u_k para toda k en $\{1, \dots, n\}$; entonces $M^n(\mathbf{u}_k) = u_k$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$. Para ver que es n -creciente se puede demostrar que si \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbf{I}^n tales que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$; esto implica que

$$V_{M^n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \max \left(\min (b_1, \dots, b_n) - \max (a_1, \dots, a_n), 0 \right) \geq 0,$$

y por lo tanto M^n es n -cópula.

Para ver que Π^n es n -cópula solamente necesitamos verificar que es n -creciente, ya que las condiciones de frontera las cumple y su demostración es trivial. Para ver que es n -creciente se puede demostrar que si \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbf{I}^n tales que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$; de donde

$$V_{\Pi^n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \geq 0,$$

y por lo tanto Π^n es n -cópula.

La función W^n no es n -cópula ya que se puede demostrar que $V_{W^n}([\mathbf{1}/2, \mathbf{1}]) = 1 - (n/2)$, donde $\mathbf{1}/2 = (1/2, \dots, 1/2)$ y $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, por lo tanto W^n no es n -cópula para $n > 2$.

Aunque W^n , la extensión de la cota inferior de Fréchet-Hoeffding, no es cópula para $n \geq 3$; en el siguiente teorema veremos que si $n \geq 3$, se cumple que para toda \mathbf{u} en \mathbf{I}^n , existe una n -cópula C tal que $C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u})$. Por lo tanto, la cota inferior para las cópulas de la ecuación (1.34), sigue siendo la mejor posible.

Teorema 1.7.18. Para toda $n \geq 3$ y \mathbf{u} en \mathbf{I}^n , existe una n -cópula C tal que

$$C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u}).$$

Demostración: Fijemos a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ en \mathbf{I}^n tal que es diferente de $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ ó $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Entonces, tenemos dos casos:

i. $0 < u_1 + \dots + u_n \leq n - 1$.

ii. $n - 1 < u_1 + \dots + u_n < n$.

Supongamos primero que $0 < u_1 + \dots + u_n \leq n - 1$ y consideremos al conjunto

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{I}^n \mid v_k \text{ es } 0, 1 \text{ o } t_k = \min \{(n-1)u_k/(u_1 + \dots + u_n), 1\} \text{ para } k = 1, \dots, n\},$$

entonces la cardinalidad de \mathcal{D} es a lo más 3^n . Observemos que si $u_1 + \dots + u_n = n - 1$, entonces $t_k = u_k$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$. Definamos una función C' tal que $C'(\mathbf{v}) = W^n(\mathbf{v})$, para toda \mathbf{v} en \mathcal{D} . Ahora veamos que C' es una n -subcópula. Sabemos que satisface las condiciones de frontera, veamos que es n -creciente. Sea $\mathbf{a}_k = (0, \dots, 0, t_k, 0, \dots, 0)$ y $\mathbf{b}_k = (t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n)$, para toda k en $\{1, \dots, n\}$, por lo tanto se cumple que $\mathbf{a}_k \leq \mathbf{b}_k$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$. Si $B_k = [\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k]$, entonces

$$\begin{aligned} V_{C'}(B_k) &= C'(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n) - C'(t_1, \dots, t_n) \\ &= W^n(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n) - W^n(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

para toda k en $\{1, \dots, n\}$. Como $\sum_{k=1}^n t_k = n - 1$, entonces $W^n(t_1, \dots, t_n) = 0$; con todo esto tenemos que para toda k en $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} V_{C'}(B_k) &= W^n(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \max(t_1 + \dots + t_{k-1} + 1 + t_{k+1} + \dots + t_n - (n - 1), 0) \\ &= \max(n - t_k - (n - 1), 0) \\ &= 1 - t_k. \end{aligned}$$

Si sumamos las C' -medidas de B_k para toda k en $\{1, \dots, n\}$ nos da igual a 1, por lo que si tomamos cualquier otra n -caja con vértices en \mathcal{D} , la C' -medida es igual a cero. Notemos que si $u_k = 1$, entonces $t_k = 1$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$. Entonces, ocurre que $t_k \geq u_k$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$. Por lo que $\mathbf{u} \leq \mathbf{t}$, es decir, \mathbf{u} está en $[\mathbf{0}, \mathbf{t}]$ y C' al ser n -subcópula se puede extender a una n -cópula C y como $C(\mathbf{u}) = C'(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u}) = 0$, se demuestra el primer caso.

Ahora supongamos que $n - 1 < u_1 + \dots + u_n < n$ y sea

$$\mathcal{G} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{I}^n \mid v_k \text{ es } 0, 1 \text{ o } s_k = 1 - (1 - u_k) / \sum_{j=1}^n (1 - u_j) \text{ para } k = 1, \dots, n \right\},$$

entonces la cardinalidad de \mathcal{G} es a lo más 3^n . Observemos que la definición de \mathcal{G} tiene sentido ya que para toda k en $\{1, \dots, n\}$, $s_k < 0$ si y sólo si $1 < (1 - u_k) / \sum_{j=1}^n (1 - u_j)$ pero esto ocurre si y sólo si $0 > (n - 1) + (u_1 + \dots + u_{k-1} + u_{k+1} + \dots + u_n)$ y esto no puede ocurrir; por otro lado, para toda k en $\{1, \dots, n\}$, $s_k > 1$ si y sólo si $(1 - u_k) / \sum_{j=1}^n (1 - u_j) < 0$ y como esto tampoco puede pasar, la definición de \mathcal{G} tiene sentido. Además, es importante ver que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s_k &= n - \sum_{j=1}^n (1 - u_j) / \sum_{i=1}^n (1 - u_i) \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

y

$$1 - (1 - u_k) / \sum_{j=1}^n (1 - u_j) = s_k \leq u_k$$

si y sólo si

$$1 \geq \sum_{j=1}^n (1 - u_j) = n - \sum_{j=1}^n u_j$$

y como esto siempre ocurre, entonces para toda k en $\{1, \dots, n\}$ se cumple que $s_k \leq u_k$. Con un procedimiento análogo al del caso anterior, cambiando las t_k con las s_k se puede extender a $C'(\mathbf{v}) = W^n(\mathbf{v})$ a una cópula C y tomando a la n -caja $B = [\mathbf{s}, \mathbf{1}]$, dado que \mathbf{u} está en esa n -caja, $C'(\mathbf{s}) = W^n(\mathbf{s}) = 0$ y $V_C(B) = 0$ entonces, $C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^n u_k - (n-1)$. Por lo que se demuestra el segundo caso. ■

A partir de lo que hemos visto en esta sección, podemos empezar a construir funciones de distribución conjunta de probabilidad de una forma muy sencilla. Teniendo a C una n -cópula, lo único que tenemos que hacer es escoger las marginales; ya que por el Teorema de Sklar, con esto obtenemos la función de distribución conjunta de un vector aleatorio. En el siguiente capítulo veremos otros métodos para construir cópulas en dimensión igual a 2.

Capítulo 2

Método geométrico para la construcción de cópulas

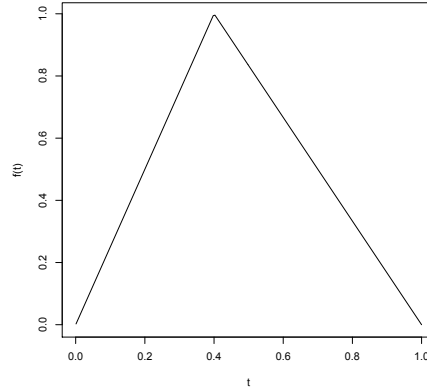
Las cópulas pueden ser útiles para modelar y simular ya que si tenemos una colección de n -cópulas, por el Teorema de Sklar, tenemos una colección de funciones de distribución multivariadas. Es por esto que tener muchas familias de cópulas nos puede ser útil. En este capítulo presentamos algunos de los métodos más comunes para la construcción de cópulas. El material de este capítulo está basado en Nelsen [17].

2.1. Cópulas singulares con soporte prescrito

En esta sección veremos mediante ejemplos cómo la definición de cópula puede ser útil para construir cópulas singulares cuyo soporte está en un conjunto dado.

Ejemplo 2.1.1. Sea θ en \mathbf{I} y supongamos que la masa de probabilidad θ está distribuida uniformemente en el segmento de recta que une al $(0, 0)$ con $(\theta, 1)$, mientras que la masa de probabilidad $1 - \theta$ está distribuida uniformemente en el segmento de recta que une al $(\theta, 1)$ con $(1, 0)$, ver Figura 2.1 para $\theta = 0.4$. Notemos que si $\theta = 1$ nos da la cópula M , por otro lado, si $\theta = 0$ nos da la cópula W .

Como el soporte de C_θ se encuentra en dos segmentos de recta, podemos encontrar una expresión para C_θ calculando el C_θ -volumen de los rectángulos apropiados en \mathbf{I}^n .

Figura 2.1: Soporte de $C_{0.4}$.

Supongamos que $u \leq \theta v$. Entonces, el C_θ -volumen del rectángulo $[0, u] \times [0, v]$ es igual al del rectángulo $[0, u] \times [0, 1]$, de donde

$$\begin{aligned} u = V_{C_\theta}([0, u] \times [0, 1]) &= V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) \\ &= C(u, v) - C(u, 0) - C(0, v) + C(0, 0) \\ &= C(u, v). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $u > \theta v$ y $u < 1 - (1 - \theta)v$. Como $V_{C_\theta}([\theta v, u] \times [0, v]) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} C_\theta(u, v) &= C_\theta(\theta v, v) \\ &= V_{C_\theta}([0, \theta v] \times [0, v]) \\ &= \theta v. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que si $u \geq 1 - (1 - \theta)v$, en este caso tenemos que

$$0 = V_{C_\theta}([u, 1] \times [v, 1]) = C_\theta(1, 1) - C_\theta(1, v) - C_\theta(u, 1) + C_\theta(u, v),$$

ya que el rectángulo $[u, 1] \times [v, 1]$ no interseca a los segmentos de recta donde se encuentra el soporte de C_θ . Por lo tanto, $C(u, v) = u + v - 1$. Por todo lo mencionado tenemos que, para toda u, v, θ en \mathbf{I} ,

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} u & \text{si } 0 \leq u \leq \theta v \leq \theta, \\ \theta v & \text{si } 0 \leq \theta v < u < 1 - (1 - \theta)v, \\ u + v - 1 & \text{si } \theta \leq 1 - (1 - \theta)v \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

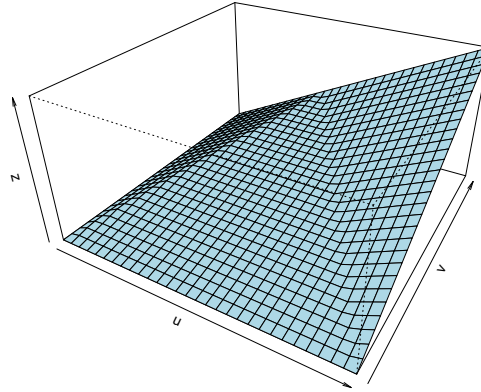


Figura 2.2: Cópula del Ejemplo 2.1.1.

En la Figura 2.2 podemos ver la gráfica de $C_{0.4}$

Ejemplo 2.1.2. Sea θ en \mathbf{I} y supongamos que la masa de probabilidad está distribuida uniformemente en dos segmentos de recta, uno de ellos une al $(0, \theta)$ con $(\theta, 0)$ (con masa θ) y el otro une a $(\theta, 1)$ con $(1, \theta)$ (con masa $1 - \theta$). Como en el ejemplo anterior, debemos encontrar una expresión para $C_\theta(u, v)$ para (u, v) en \mathbf{I}^2 .

Primero veamos que si (u, v) está en $[0, \theta] \times [\theta, 1]$, entonces $C_\theta(u, v) = u$ ya que

$$V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) = V_{C_\theta}([0, u] \times [0, 1]) = u.$$

De la misma forma, si (u, v) está en $[\theta, 1] \times [0, \theta]$, entonces $C_\theta(u, v) = v$ ya que

$$V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) = V_\theta([0, 1] \times [0, v]) = v.$$

Si (u, v) está en $[0, \theta]^2$ con $u + v \geq \theta$, esto implica que $C_\theta(u, v) = u + v - \theta$ ya que

$$\begin{aligned} 1 - \theta &= V_{C_\theta}([u, 1] \times [1, 1]) \\ &= C_\theta(1, 1) - C_\theta(1, v) - C_\theta(u, 1) + C_\theta(u, v). \end{aligned}$$

Por último veamos que si (u, v) está en $[\theta, 1]^2$ tenemos dos casos: si $u + v < 1 - \theta$, claramente $C_\theta(u, v) = \theta$; si $u + v \geq 1 - \theta$, entonces $C_\theta(u, v) = u + v - 1$ ya que

$$\begin{aligned} 0 &= V_{C_\theta}([u, 1] \times [v, 1]) \\ &= C_\theta(1, 1) - C_\theta(1, v) - C_\theta(u, 1) + C_\theta(u, v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda (u, v) en \mathbf{I}^2

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} \max(u + v - \theta, 0) & \text{si } (u, v) \in [0, \theta]^2, \\ \max(\theta, u + v - 1) & \text{si } (u, v) \in [\theta, 1]^2, \\ M(u, v) & \text{en otro lado.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Notemos que de la ecuación (2.2) es fácil ver que $C_0 = C_1 = W$.

Ejemplo 2.1.3. Supongamos ahora que la masa de probabilidad está distribuida uniformemente en dos arcos dados por $u^2 + v^2 = 2u$ y $u^2 + v^2 = 2v$. Como en el ejemplo anterior, se puede ver que si (u, v) está en la región que está arriba del arco superior ($u^2 + v^2 = 2u$) entonces $C(u, v) = u$. De la misma forma, si (u, v) está en la región que está abajo del arco inferior ($u^2 + v^2 = 2v$) entonces $C(u, v) = v$. Por lo tanto, si $u^2 + v^2 > 2\min(u, v)$ entonces $C(u, v) = M(u, v)$. Además, como el soporte de la cópula es simétrico respecto a la diagonal tenemos que C es simétrica.

Ahora supongamos que (u, v) está por encima de la diagonal pero por debajo del arco superior, es decir, $u \leq v$ y $u^2 + v^2 \leq 2u$. Esto implica que

$$V_C([u, v]^2) = C(v, v) - C(v, u) - C(u, v) + C(u, u) = 0$$

y por la simetría de C tenemos que $C(u, v) = (1/2)(\delta(u) + \delta(v))$, donde δ es la sección diagonal de C . Si (u, v) es tal que $u^2 + v^2 = 2u$, es decir, que el punto está en el arco superior y por la continuidad de la cópula $u = C(u, v) = (1/2)(\delta(u) + \delta(v))$, entonces

$$\delta(u) + \delta(v) = 2u = u^2 + v^2$$

y $\delta(u) = u^2$ es solución de esta ecuación. Por lo tanto, $C(u, v) = \min(u, v, (u^2 + v^2)/2)$. Se puede demostrar que C es 2-creciente, con lo que concluimos que C es una cópula.

2.2. Sumas ordinales

Sea W la cota inferior de Fréchet-Hoeffding. Sabemos que es una cópula singular y su soporte es la diagonal secundaria de \mathbf{I}^2 , que es el segmento de recta con pendiente -1

que une al punto $(0, 1)$ con $(1, 0)$. Recordemos la cópula del Ejemplo 2.1.2, cuyo soporte consiste de dos segmentos de recta con pendiente -1 . Este soporte se puede ver como dos copias del soporte de W , pero en lugar de estar en el $[0, 1]^2$ están en $[0, \theta]^2$ y $[\theta, 1]^2$. Ésta es la idea detrás de las sumas ordinales.

Definición 2.2.1. Sea $\{J_i = [a_i, b_i]\}$ una partición de \mathbf{I} , es decir, una colección de intervalos cerrados que solamente se intersectan en los puntos extremos, cuya unión es \mathbf{I} . Sea $\{C_i\}$ una colección de cópulas, indexadas de la misma forma que $\{J_i\}$. Entonces, la **suma ordinal de $\{C_i\}$** respecto a $\{J_i\}$ es la cópula C dada por

$$C(u, v) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)C_i\left(\frac{u - a_i}{b_i - a_i}, \frac{v - a_i}{b_i - a_i}\right) & \text{si } (u, v) \in J_i^2, \\ M(u, v) & \text{en otro lado.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.2.2. Veamos que la suma ordinal de $\{W, W\}$ respecto a $\{[0, \theta], [\theta, 1]\}$ es la cópula C_θ del Ejemplo 2.1.2. Si (u, v) está en $[0, \theta]^2$,

$$\theta W\left(\frac{u}{\theta}, \frac{v}{\theta}\right) = \max(0, u + v - \theta),$$

mientras que si (u, v) pertenece a $[\theta, 1]^2$,

$$\theta + (1 - \theta)W\left(\frac{u - \theta}{1 - \theta}, \frac{v - \theta}{1 - \theta}\right) = \max(\theta, u + v - 1).$$

Por lo tanto, la suma ordinal coincide con C_θ .

El siguiente teorema caracteriza a las cópulas que se pueden representar como suma ordinal.

Teorema 2.2.3. Sea C una cópula. Entonces, C es una suma ordinal si y sólo si existe una t en $(0, 1)$ tal que $C(t, t) = t$.

Demostración: Supongamos que existe una t en $(0, 1)$ tal que $C(t, t) = t$. Sean C_1 y C_2 dos funciones definidas como $C_1(u, v) = C(tu, tv)/t$ y

$$C_2(u, v) = \frac{C(t + (1 - t)u, t + (1 - t)v) - t}{(1 - t)}$$

para toda u, v en \mathbf{I} . Veamos que C_1 y C_2 son cópulas.

Primero lo haremos para C_1 : para toda u, v en \mathbf{I} , $C_1(u, 0) = 0 = C_1(0, v)$; para toda u, v en \mathbf{I} , $C_1(u, 1) = C(ut, t)/t = u$ ya que $V_C([0, t] \times [t, 1]) = 0$; de la misma forma

$$C_1(1, v) = \frac{C(t, vt)}{t} = v$$

ya que $V_C([t, 1] \times [0, t]) = 0$. La propiedad 2-creciente es trivial ya que si $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ entonces,

$$V_{C_1}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = \frac{V_C([tu_1, tu_2] \times [tv_1, tv_2])}{t} \geq 0.$$

Ahora veamos que C_2 es cópula. Observemos que para toda u, v en \mathbf{I} ,

$$C_2(0, v) = \frac{C(t, t + (1-t)v) - t}{1-t} = 0$$

ya que $V_C([0, t] \times [t, 1]) = 0$ y como $V_C([t, 1] \times [0, t]) = 0$ se cumple que $C_2(u, 0) = 0$. Además, para toda u, v en \mathbf{I} ,

$$C_2(1, v) = \frac{C(1, t + (1-t)v) - t}{1-t} = v$$

y

$$C_2(u, 1) = \frac{C(t + (1-t)u, 1) - t}{1-t} = u.$$

Solamente falta ver que C_2 es 2-creciente. Sean $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$; entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{V_C\left([t + (1-t)u_1, t + (1-t)u_2] \times [t + (1-t)v_1, t + (1-t)v_2]\right)}{1-t} \\ &= V_{C_2}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, C_1 y C_2 son cópulas.

Observemos que si u, v pertenecen al $[0, t]$, entonces

$$C(u, v) = tC_1\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right)$$

y si u, v pertenecen al $[t, 1]$

$$C(u, v) = t + (1-t)C_1\left(\frac{u-t}{1-t}, \frac{v-t}{1-t}\right).$$

Además si (u, v) está en $[0, t] \times [t, 1]$, por lo visto antes, $C(u, v) = u$ y si (u, v) está en $[t, 1] \times [0, t]$ entonces, $C(u, v) = v$. Por lo tanto, C es suma ordinal de $\{C_1, C_2\}$ respecto a $\{[0, t], [t, 1]\}$.

El recíproco es trivial, ya que si C es suma ordinal, entonces existe un número finito de cópulas C_1, \dots, C_n tales que C se puede expresar como en (2.3); por lo tanto tenemos que para toda i en $\{1, \dots, n\}$

$$C(b_i, b_i) = a_i + (b_i - a_i)C_i\left(\frac{b_i - a_i}{b_i - a_i}, \frac{b_i - a_i}{b_i - a_i}\right) = b_i.$$

■

Si U, V son variables aleatorias uniformes $(0, 1)$ con cópula C , entonces las siguientes condiciones son equivalentes a la condición $C(t, t) = t$ para alguna t en $(0, 1)$:

1. $P[\max(U, V) \leq t] = t$ para alguna t en $(0, 1)$;
2. $P[\min(U, V) \leq t] = t$ para alguna t en $(0, 1)$;
3. $P[\max(U, V) \leq t] = P[\min(U, V) \leq t]$ para alguna t en $(0, 1)$;
4. $P[(U - t)(V - t) \geq 0] = 1$ para alguna t en $(0, 1)$.

2.3. *Shuffles* de M

En esta sección definiremos los *shuffles* de M y veremos algunas propiedades que tienen las cópulas que se construyen mediante este método.

Definición 2.3.1. Sean n un número natural y $\{J_i = [a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ una partición finita de \mathbf{I} , donde J_i es un intervalo cerrado para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Sean π una permutación en $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ y ω una función de S_n en $\{-1, 1\}$. Entonces el **shuffle de M respecto a $\{J_i\}_{i=1}^n$** , denotado por $M(n, \{J_i\}, \pi, \omega)$, es una cópula que en el rectángulo $J_i \times J_{\sigma(i)}$ tiene masa que se distribuye uniformemente en la diagonal para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$.

Notemos que en un shuffle de M , n el número natural nos indica el número de componentes conectados en el soporte del shuffle.

Por ejemplo, si $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 - \theta$, $\theta \leq v_1 \leq u_1 + \theta$ y $u_2 + \theta \leq v_2 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_2] - \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_1] \\
&\quad - \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_2] + \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_1] \\
&= u_2 - (v_1 - \theta) - u_1 + v_1 - \theta \\
&= u_2 - u_1 \geq 0
\end{aligned}$$

con probabilidad 1. Siguiendo un procedimiento análogo, se demuestra que si $1 - \theta \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \theta$, entonces el rectángulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ tiene C_θ -volumen positivo si y sólo si el rectángulo interseca en más de un punto al segmento de recta que une a los puntos $(1 - \theta, 0)$ con $(1, \theta)$. Ahora veamos el caso cuando $1 - \theta \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $\theta \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, esto implica que

$$\begin{aligned}
V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_2] - \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_1] \\
&\quad - \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_2] + \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_1] \\
&= u_2 - (1 - \theta) + v_2 + \theta - (u_2 - (1 - \theta) + v_1 + \theta) - \\
&\quad (u_1 - (1 - \theta) + v_2 + \theta) + u_1 - (1 - \theta) + v_1 + \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

con probabilidad 1. Por lo tanto, el soporte de C_θ se distribuye de manera uniforme en los segmentos de recta con pendiente 1 que unen a los puntos $(0, \theta)$ con $(1 - \theta, 1)$ y al $(1 - \theta, 0)$ con $(1, \theta)$. Ahora daremos la fórmula para calcular C_θ . Sean (u, v) en $[0, 1 - \theta] \times [\theta, 1]$, entonces por el Teorema de Sklar $C_\theta(u, v) = \mathbb{P}[U \leq u, U \oplus \theta \leq v] = \min(u, v - \theta)$; si (u, v) está en $[1 - \theta, 1] \times [0, \theta]$ y por el Teorema de Sklar, nuevamente,

$$C_\theta(u, v) = \mathbb{P}[U \leq u, U \oplus \theta \leq v] = \min(u + \theta - 1, v);$$

si (u, v) está en $[0, 1 - \theta] \times [0, \theta]$ vimos que $C(u, v) = 0$. Notemos que en estos casos $0 \leq u + v \leq 1$, por lo tanto $C(u, v) = W(u, v) = 0$; por último veamos que si (u, v) está en $[1 - \theta, 1] \times [\theta, 1]$ entonces, por lo visto anteriormente,

$$C(u, v) = u - (1 - \theta) + v_2 + \theta = u_2 + v_2 - 1.$$

Además, en este caso tenemos que $0 \leq u_2 + v_2 - 1 \leq 1$, por lo tanto $C(u, v) = W(u, v)$.

En resumen, tenemos que para toda (u, v) en \mathbf{I}

$$C(u, v) = \begin{cases} \min(u, v - \theta) & \text{si } (u, v) \in [0, 1 - \theta] \times [\theta, 1], \\ \min(u + \theta - 1, v) & \text{si } (u, v) \in [1 - \theta, 1] \times [0, \theta], \\ W(u, v) & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Por lo tanto, C_θ es el shuffle $M(2, \{[0, \theta], [\theta, 1]\}, (2, 1), -1)$.

Aunque los shuffles son objetos simples, pueden ser muy útiles. Recordemos que si X y Y son variables aleatorias decimos que son **mutuamente completamente dependientes** si existe f una función inyectiva tal que $P[Y = f(X)] = 1$.

Supongamos ahora que X y Y son variables aleatorias tales que su cópula es un shuffle de M . Entonces, como el soporte de cualquier shuffle es la gráfica de una función inyectiva, entonces X y Y son mutuamente completamente dependientes (el recíproco no siempre se cumple). En el siguiente teorema probaremos, por medio de shuffles de M , que existen variables aleatorias mutuamente completamente dependientes, cuya función de distribución conjunta se acerca tanto como queramos a la función de distribución conjunta de variables aleatorias independientes con las mismas marginales. Esto, en términos de cópulas, significa que Π , la cópula producto, se aproxima por shuffles de M .

Teorema 2.3.3. Para toda $\epsilon > 0$ existe C_ϵ un shuffles de M tal que

$$\sup_{u, v \in \mathbf{I}} |C_\epsilon(u, v) - \Pi(u, v)| < \epsilon. \quad (2.4)$$

Demostración: Sean $\epsilon > 0$ y $m \geq 4/\epsilon$ un entero. Entonces, por el Teorema 1.1.16, sabemos que para toda cópula C y puntos u, v, s, t en \mathbf{I} , tales que $|u - s| < 1/m$ y $|v - t| < 1/m$, se cumple

$$|C(u, v) - C(s, t)| \leq |u - s| + |v - t| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.5)$$

Sea $n = m^2$ y sea $\{J_i\}$ la partición de \mathbf{I} en n subintervalos del mismo tamaño, es decir, $J_1 = [0, 1/n], \dots, J_n = [1 - 1/n, 1]$. Sea π la permutación de S_n dada por

$$\pi(m(j - 1) + k) = m(k - 1) + j$$

Ejemplo 2.3.2. Sean u, v en $(0, 1)$. Definamos la operación $u \oplus v$ como

$$u \oplus v = \begin{cases} u + v & \text{si } u + v < 1 \\ u + v - 1 & \text{si } u + v \geq 1. \end{cases}$$

Sean U, V variables aleatorias uniformes $(0, 1)$ tales que $V = U \oplus \theta$ con probabilidad 1, donde θ es una constante en $(0, 1)$. Demostraremos que si C_θ es la cópula de U y V , entonces es el shuffle $M(2, \{[0, \theta], [\theta, 1]\}, (2, 1), -1)$.

Observemos que, por el Teorema de Sklar, para toda u, v en \mathbf{I} , $C_\theta(u, v) = \mathbb{P}[U \leq u, V \leq v] = \mathbb{P}[U \leq u, U \oplus \theta \leq v]$. Primero veamos que el soporte de C_θ se distribuye de manera uniforme en los segmentos de recta con pendiente 1 que unen a los puntos $(0, \theta)$ con $(1 - \theta, 1)$ y al $(1 - \theta, 0)$ con $(1, \theta)$. Para esto notemos que si (u, v) es un punto en $[0, 1 - \theta] \times [0, \theta]$, entonces por el Teorema de Sklar,

$$C_\theta(u, v) = \mathbb{P}[U \leq u, U \oplus \theta \leq v] = \mathbb{P}[\{U \leq u\} \cap \{U \oplus \theta \leq v\}] = 0$$

con probabilidad 1. Sean $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 - \theta$ y $u_2 + \theta \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= C_\theta(u_2, v_2) - C_\theta(u_2, v_1) - C_\theta(u_1, v_2) + C_\theta(u_1, v_1) \\ &= \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_2] - \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_1] \\ &\quad - \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_2] + \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_1] \\ &= u_2 - u_2 - u_1 + u_1 = 0 \end{aligned}$$

con probabilidad 1. Si $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 - \theta$ y $\theta \leq v_1 \leq v_2 \leq u_1 + \theta$ se tiene que

$$\begin{aligned} V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_2] - \mathbb{P}[U \leq u_2, U \oplus \theta \leq v_1] \\ &\quad - \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_2] + \mathbb{P}[U \leq u_1, U \oplus \theta \leq v_1] \\ &= v_2 - \theta - (v_1 - \theta) - (v_2 - \theta) + v_1 - \theta = 0 \end{aligned}$$

con probabilidad 1. Para los casos en los que $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 - \theta$ y $\theta \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ tales que el rectángulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ intersecta en más de un punto al segmento de recta que une a los puntos $(0, \theta)$ con $(1 - \theta, 1)$, el C_θ -volumen del rectángulo es mayor o igual a 0.

para $k = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, m$. Finalmente, sea ω arbitrario y definamos a $C_\epsilon = M(n, \{J_i\}, \pi, \omega)$; el efecto que esta permutación tiene es el de distribuir la masa de probabilidad de M para que en cada uno de los n cuadrados de \mathbf{I}^2 se tenga masa $1/n$.

Como $V_{C_\epsilon}([0, p/m] \times [0, q/m]) = C_\epsilon(p/m, q/m) = pq/n$ y $V_\Pi([0, p/m] \times [0, q/m]) = \Pi(p/m, q/m) = (p/m)(q/m) = pq/n$ para $p = 0, 1, \dots, m$ y $q = 0, 1, \dots, m$, entonces

$$C_\epsilon(p/m, q/m) = \Pi(p/m, q/m), \quad (2.6)$$

para $p = 0, 1, \dots, m$ y $q = 0, 1, \dots, m$.

Sean u, v en \mathbf{I} , entonces existen enteros p y q en $\{0, 1, \dots, m\}$ tales que $|u - p/m| < 1/m$ y $|v - q/m| < 1/m$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |C_\epsilon(u, v) - \Pi(u, v)| &= |C_\epsilon(u, v) - \Pi(u, v) + C_\epsilon(p/m, q/m) \\ &\quad + \Pi(p/m, q/m) - C_\epsilon(p/m, q/m) - \Pi(p/m, q/m)| \\ &\leq |C_\epsilon(u, v) - C_\epsilon(p/m, q/m)| \\ &\quad + |C_\epsilon(p/m, q/m) - \Pi(p/m, q/m)| \\ &\quad + |\Pi(p/m, q/m) - \Pi(u, v)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad sale aplicando la desigualdad del triángulo dos veces y la segunda desigualdad es por (2.5) y (2.6). ■

El teorema anterior se puede generalizar de la siguiente manera. Sea C una cópula cualquiera, entonces existen shuffles de M que aproximan de manera uniforme a C . Por lo tanto, si tomamos a \mathcal{C} como el conjunto de todas las cópulas con la norma del supremo, definida en (2.4), el subconjunto de los shuffles de M es denso en \mathcal{C} .

A continuación veremos que, en algunos casos, cuando tenemos información sobre los valores que toma la cópula en ciertos puntos en el interior de \mathbf{I} , las cotas de Fréchet-Hoeffding se pueden mejorar. Para la demostración de este teorema denotamos a la parte positiva de x por x^+ , es decir, $x^+ = \max(x, 0)$.

Teorema 2.3.4. Sea C una cópula y supongamos que $C(a, b) = \theta$ para (a, b) en $(0, 1)^2$ y θ que satisface $\max(a + b - 1, 0) \leq \theta \leq \min(a, b)$. Entonces,

$$C_L(u, v) \leq C(u, v) \leq C_U(u, v), \quad (2.7)$$

donde C_L y C_U son las cópulas dadas por

$$C_U = M(4, \{[0, \theta], [\theta, a], [a, a + b - \theta], [a + b - \theta, 1]\}, (1, 3, 2, 4), 1)$$

y

$$C_L = M(4, \{[0, a - \theta], [a - \theta, a], [a, 1 - b + \theta], [1 - b + \theta, 1]\}, (4, 2, 3, 1), -1).$$

Como $C_L(a, b) = \theta = C_U(a, b)$, las cotas no se pueden mejorar más.

Demostración: Para esta demostración utilizaremos el hecho de que, para toda u, v en \mathbf{I} ,

$$C_U(u, v) = \min(u, v, \theta + (u - a)^+ + (v - a)^+)$$

y

$$C_L(u, v) = \max(0, u + v - 1, \theta - (u - a)^+ - (v - a)^+).$$

Notemos que si $u \geq a$ y $0 \leq v \leq 1$, entonces por el Teorema 1.1.16 y el Corolario 1.1.18,

$$0 \leq |C(u, v) - C(a, v)| = C(u, v) - C(a, v) \leq |u - a| = u - a;$$

y si $u < a$ entonces, por los resultados mencionados, $0 \leq C(a, v) - C(u, v) \leq a - u$. Por lo tanto,

$$-(a - u)^+ \leq C(u, v) - C(a, v) \leq (u - a)^+.$$

Análogamente se puede demostrar que, para toda $0 \leq u \leq 1$,

$$-(b - u)^+ \leq C(u, v) - C(u, b) \leq (v - b)^+;$$

en particular, para $u = a$ $-(b - u)^+ \leq C(a, v) - C(a, b) \leq (v - b)^+$. Por lo tanto

$$-(a - u)^+ - (b - v)^+ \leq C(u, v) - C(a, b) \leq (u - a)^+ + (v - b)^+. \quad (2.8)$$

Como $C(a, b) = \theta$ y despejando θ en (2.8), obtenemos que para toda u, v en \mathbf{I}

$$-(a - u)^+ - (b - v)^+ + \theta \leq C(u, v) \leq \theta + (u - a)^+ + (v - b)^+.$$

Además, por las cotas de Fréchet-Hoeffding sabemos que

$$C_L(u, v) \leq C(u, v) \leq C_U(u, v),$$

para toda u, v en \mathbf{I} . Como $C_U(a, b) = \min(a, b, \theta) = \theta$ y $C_L(a, b) = \max(0, a+b-1, \theta) = \theta$, es claro que las cotas no se pueden mejorar. ■

Capítulo 3

Cópulas arquimedianas

En este capítulo estudiaremos una clase de cópulas importantes, las cópulas arquimedianas. La importancia de estas clase radica en lo sencillo que es la construcción de estas cópulas y en la reducción de dimensionalidad. Además, es una clase de cópulas muy grande, ya que abarca una infinidad de cópulas desde W hasta M , aunque M no pertenece a esta clase. El material de este capítulo está basado en Nelsen [17].

3.1. Definiciones

Si X y Y son variables aleatorias independientes con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente. Entonces, para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = F(x)G(y)$. Este es el único caso en el que la función de distribución conjunta es el producto de las marginales. Sin embargo, existen cópulas con propiedades parecidas; por ejemplo, la familia Ali-Mikhail satisface que para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)} + (1 - \theta) \frac{1 - F(x)}{F(x)} \frac{1 - G(y)}{G(y)}. \quad (3.1)$$

Entonces,

$$1 + (1 - \theta) \frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \left[1 + (1 - \theta) \frac{1 - F(x)}{F(x)} \right] \left[1 + (1 - \theta) \frac{1 - G(y)}{G(y)} \right].$$

Si λ es una función tal que $\lambda(t) = 1 + (1 - \theta)(1 - t)/t$, para t en $(0, 1]$, se puede demostrar que $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$ para x, y en $(-\infty, \infty]$. Si $\varphi(t) = -\ln \lambda(t)$ para t en $(0, 1]$, entonces para toda x, y en $(-\infty, \infty]$,

$$\begin{aligned}\varphi(H(x, y)) = -\ln(\lambda(H(x, y))) &= -\ln(\lambda(F(x))\lambda(G(y))) \\ &= -\ln \lambda(F(x)) - \ln \lambda(G(y)) \\ &= \varphi(F(x)) + \varphi(G(y)).\end{aligned}$$

Finalmente, si C es la cópula que el Teorema de Sklar le asigna a H , entonces

$$\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v). \quad (3.2)$$

Ejemplo 3.1.1. Sea $\hat{C}_\theta(u, v) = (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}$ para todo u, v en \mathbf{I} . Si $\varphi(t) = t^{-1/\theta} - 1$, entonces \hat{C}_θ cumple (3.2) con φ ya que

$$\begin{aligned}\varphi(\hat{C}_\theta(u, v)) &= ((u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta})^{-1/\theta} - 1 \\ &= u^{-1/\theta} - 1 + v^{-1/\theta} - 1 \\ &= \varphi(u) + \varphi(v).\end{aligned}$$

Como estamos interesados en expresiones que podamos utilizar para la construcción de cópulas, nos gustaría que de la expresión $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$, pudiéramos despejar a C y tener $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$, donde $\varphi^{[-1]}$ debe ser una "inversa" apropiada.

Definición 3.1.2. Sea φ una función de \mathbf{I} en $[0, \infty]$, continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$. La **pseudo inversa de φ** , denotada por $\varphi^{[-1]}$ se define como una función de $[0, \infty]$ en \mathbf{I} tal que

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) < t \leq \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Notemos que $\varphi(0)$ puede ser finito o infinito. Por ejemplo, si $\varphi(x) = 1/x - 1$ para toda x en \mathbf{I} , entonces φ es una función de \mathbf{I} en $[0, \infty]$, estrictamente decreciente, $\varphi(1) = 0$ y $\varphi(0) = \infty$. Por el contrario, si $\varphi(x) = 1 - x$ para toda x en \mathbf{I} , entonces φ es una función de \mathbf{I} en $[0, \infty]$, estrictamente decreciente, $\varphi(1) = 0$ pero $\varphi(0) = 1$.

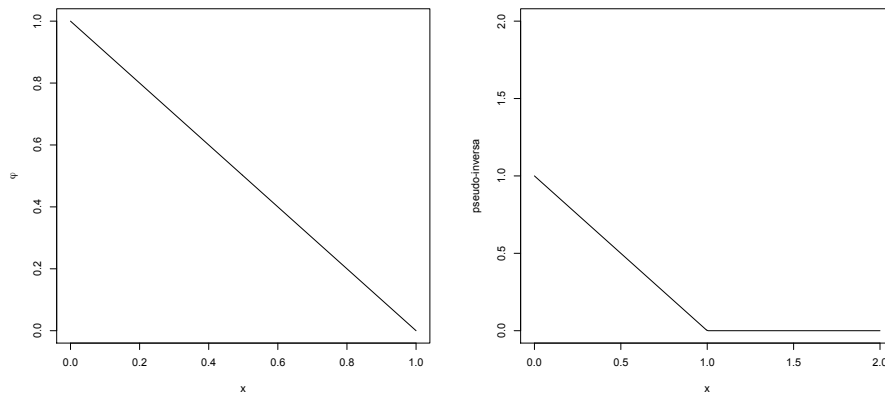


Figura 3.1: La gráfica de $\varphi(x) = 1 - x$ para x en \mathbf{I} y su pseudo inversa.

Ejemplo 3.1.3. Sea $\varphi(x) = 1/x - 1$ para toda x en \mathbf{I} . Por lo mencionado arriba, φ tiene pseudo inversa que está dada por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{1+t},$$

para toda t en $[0, \infty]$.

Ejemplo 3.1.4. Sea $\varphi(x) = 1 - x$ para toda x en \mathbf{I} . Por lo mencionado arriba, φ tiene pseudo inversa que está dada por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

En la Figura 3.1 podemos ver las gráficas de φ (a la izquierda) y $\varphi^{[-1]}$ (a la derecha).

Observemos las siguientes propiedades de $\varphi^{[-1]}$.

- i. Si $\varphi(0) = \infty$, entonces por (3.3) $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$ para toda t en $[0, \infty]$, donde φ^{-1} es la inversa usual.
- ii. Por la forma en que definimos a $\varphi^{[-1]}$, es continua.

- iii. $\varphi^{[-1]}$ es decreciente; para ver esto lo haremos por casos. Primero supongamos que $0 \leq \varphi(0) \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$, de manera que $\varphi^{[-1]}(t_1) = \varphi^{[-1]}(t_2) = 0$; si $0 \leq t_1 \leq \varphi(0) \leq t_2 \leq \infty$, entonces existe s_1 en \mathbf{I} , tal que $\varphi(s_1) = t_1$, por lo tanto

$$\varphi^{[-1]}(t_1) = \varphi^{-1}(t_1) = s_1 \geq 0 = \varphi^{[-1]}(t_2);$$

por último, veamos que si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \varphi(0) \leq \infty$, entonces existen s_1, s_2 en \mathbf{I} tales que $\varphi(s_1) = t_1$ y $\varphi(s_2) = t_2$. Como φ es estrictamente decreciente se cumple que

$$\varphi^{[-1]}(t_1) = s_1 > s_2 = \varphi^{[-1]}(t_2),$$

por lo tanto φ es decreciente, de hecho es estrictamente decreciente en $[0, \varphi(0)]$.

- iv. Para toda u en \mathbf{I} , $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$. Si $0 \leq u \leq 1$, entonces $0 \leq \varphi(u) \leq \infty$; cuando $u = 0$ tenemos que

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(0)) = \varphi^{-1}(\varphi(0)) = 0;$$

si estamos en el caso $0 < u \leq 1$, entonces $\varphi(0) > \varphi(u) \geq \varphi(1) = 0$, por lo tanto $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$.

- v. Para toda t en $[0, \infty]$,

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)). \end{aligned}$$

Primero supongamos que $0 \leq t \leq \varphi(0)$, entonces $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \varphi(\varphi^{-1}(t)) = t$; si $\varphi(0) \leq t \leq \infty$, entonces $\varphi^{[-1]}(t) = 0$, por lo tanto $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \varphi(0)$.

Lema 3.1.5. Sea φ una función de \mathbf{I} en $[0, \infty]$, continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$ y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo inversa de φ definida en (3.3). Sea C una función de \mathbf{I}^2 en \mathbf{I} , definida mediante

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (3.4)$$

para toda u, v en \mathbf{I} . Entonces, C satisface las condiciones de frontera de una cópula.

Demostración: Sean u, v en \mathbf{I} ; entonces $C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$, ya que $\varphi(u) + \varphi(0) \geq \varphi(0)$ y

$$C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$$

por el inciso iv de la observación anterior. Análogamente, se demuestra que $C(0, v) = 0$ y $C(1, v) = v$. ■

Lema 3.1.6. Sean $\varphi, \varphi^{[-1]}$ y C como en el Lema 3.1.5. Entonces, C es 2-creciente si y sólo si para toda v en \mathbf{I} y para toda $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$,

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1. \quad (3.5)$$

Demostración: Como

$$\begin{aligned} 0 \leq V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) &= C(u_2, 1) - C(u_2, v) - C(u_1, 1) + C(u_1, v) \\ &= u_2 - u_1 - (C(u_2, v) - C(u_1, v)), \end{aligned}$$

entonces $V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0$ es equivalente a (3.5), por lo tanto si C es 2-creciente (3.5) se cumple.

Ahora supongamos que (3.5) se cumple. Sean $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ y $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$; notemos que $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$. Por el Teorema del Valor Intermedio, dado que C es continua, existe t en \mathbf{I} , tal que $C(t, v_2) = v_1$. Como

$$0 \leq C(t, v_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) + \varphi(v_2)) = v_1 \leq 1$$

y φ es decreciente, entonces

$$0 = \varphi(1) \leq \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(t) + \varphi(v_2))) = \varphi(v_1) \leq \varphi(0)$$

y por el inciso v de la observación anterior $\varphi(t) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1)$. También veamos que

$$\varphi(u_2) + \varphi(v_2) = \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2)));$$

sabemos por el inciso v de la observación anterior que

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2))) = \min(\varphi(u_2) + \varphi(v_2), \varphi(0)).$$

Si $\varphi(u_2) + \varphi(v_2) \leq \varphi(0)$, entonces se cumple lo que queremos; si $\varphi(u_2) + \varphi(v_2) > \varphi(0)$, como $\varphi^{[-1]}$ es decreciente esto implica que

$$0 \leq \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2)) \leq \varphi^{[-1]}(\varphi(0)) = 0,$$

por lo tanto $\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2)) = 0$ y en este caso también se cumple lo que queremos. De manera similar se puede demostrar que $\varphi(u_1) + \varphi(v_2) = \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2)))$. Entonces,

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(t) + \varphi(v_2)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(t) + \varphi(v_2)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u_2, v_2)) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u_1, v_2)) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

La última desigualdad se debe a (3.5). De (3.6) se sigue que $V_C(B) \geq 0$, por lo tanto C es 2-creciente. ■

Antes de seguir, vamos a definir lo que es una función convexa y a demostrar algunas propiedades.

Definición 3.1.7. Sea f una función de $\overline{\mathbb{R}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, decimos que f es **convexa** si para toda t en \mathbf{I} y para toda x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, se cumple que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{3.7}$$

y f es **medio convexa** si (3.7) se cumple para $t = 1/2$.

Proposición 3.1.8. Sean a, b en \mathbb{R} y f una función de $[a, b]$ en \mathbb{R} , continua. Entonces, f es convexa si y sólo si f es medio convexa.

Demostración: Si f es convexa entonces f es medio convexa, esta implicación es trivial.

Supongamos que f es medio convexa. Sean $a \leq x \leq y \leq b$ y $0 \leq t \leq 1$. Por demostrar que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si $t = 0$ ó $t = 1$, es trivial, por lo que podemos suponer que $0 < t < 1$. Definamos a

$$g(t) = f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y);$$

como f es continua, es claro que g también lo es. La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que existe una $0 < t < 1$ tal que $g(t) > 0$, sean $M_0 = \max_{0 \leq t \leq 1} g(t) > 0$ y $t_0 = \inf \{0 \leq t \leq 1 | g(t) = M_0\}$; entonces existe $\delta > 0$ tal que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [0, 1]$. Sean $\hat{x} = (t_0 - \delta)x + (1 - t_0 + \delta)y$ y $\hat{y} = (t_0 + \delta)x + (1 - t_0 - \delta)y$, por lo que $(\hat{x} + \hat{y})/2 = t_0x + (1 - t_0)y$. Como f es medio convexa se cumple que

$$\begin{aligned} f(t_0x + (1 - t_0)y) &= f\left(\frac{\hat{x} + \hat{y}}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(\hat{x}) + \frac{1}{2}f(\hat{y}) \\ &= \frac{1}{2}f\left((t_0 - \delta)x + (1 - t_0 + \delta)y\right) + \frac{1}{2}f\left((t_0 + \delta)x + (1 - t_0 - \delta)y\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como g es continua existe una $\delta_\epsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que si $\delta < \delta_\epsilon$, entonces

$$g(t_0) - g(t_0 - \delta) = |g(t_0) - g(t_0 - \delta)| < \epsilon$$

y

$$g(t_0) - g(t_0 + \delta) = |g(t_0) - g(t_0 + \delta)| < \epsilon.$$

Entonces, por la elección de t_0 y (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} M_0 = g(t_0) &= f(t_0x + (1 - t_0)y) - t_0f(x) - (1 - t_0)f(y) \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ f\left((t_0 - \delta)x + (1 - t_0 + \delta)y\right) - (t_0 - \delta)f(x) - (1 - t_0 + \delta)f(y) \right. \\ &\quad \left. + f\left((t_0 + \delta)x + (1 - t_0 - \delta)y\right) - (t_0 + \delta)f(x) - (1 - t_0 - \delta)f(y) \right\} + \epsilon \\ &= \frac{1}{2}(g(t_0 - \delta) + g(t_0 + \delta)) + \epsilon \\ &< M_0 + \epsilon. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como (3.9) se cumple para toda $\epsilon > 0$, entonces si ϵ tiende a 0 llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $g(t) \leq 0$ para toda $0 < t < 1$ y esto implica que f es convexa. ■

Proposición 3.1.9. Sean a, b en \mathbb{R} y f una función de $[a, b]$ en \mathbb{R} , continua y estrictamente decreciente. Entonces, f es convexa si y sólo si f^{-1} es convexa.

Demostración: Sean $c = f(a)$ y $d = f(b)$. Como f es estrictamente decreciente, entonces f^{-1} es estrictamente decreciente ya que si existen $x < y$ tales que $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$, entonces $x = f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) = y$, que es una contradicción. Si f es convexa entonces, para toda x, y en $[a, b]$ y para toda t en \mathbf{I} , se cumple que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

pero esto ocurre si y sólo si

$$f^{-1}(f(tx + (1-t)y)) \geq f^{-1}(tf(x) + (1-t)f(y)).$$

Entonces

$$f^{-1}(t\hat{x} + (1-t)\hat{y}) \leq tf^{-1}(\hat{x}) + (1-t)f^{-1}(\hat{y}),$$

donde $\hat{x} = f(x)$ y $\hat{y} = f(y)$, por lo tanto f^{-1} es convexa. ■

Proposición 3.1.10. Sea f una función de J en \mathbb{R} , convexa, con J un intervalo de la forma $[a, b]$, donde a, b están en \mathbb{R} . Si $t < u < v$, donde t, u, v están en J , entonces

$$\frac{f(u) - f(t)}{u - t} \leq \frac{f(v) - f(t)}{v - t} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}. \quad (3.10)$$

Además, las derivadas por la derecha y por la izquierda de f siempre existen en (a, b) , al igual que $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

Demostración: Sea $\lambda = (v - u)/(v - t)$, entonces $0 < \lambda < 1$, $1 - \lambda = (u - t)/(v - t)$ y $\lambda t + (1 - \lambda)v = (vt - ut + uv - tv)/(v - t) = u$. Como f es convexa, entonces

$$\begin{aligned} f(u) = f(\lambda t + (1 - \lambda)v) &\leq \lambda f(t) + (1 - \lambda)f(v) \\ &= \frac{(v - u)f(t)}{v - t} + \frac{(u - t)f(v)}{v - t}, \end{aligned}$$

pero esto ocurre si y sólo si

$$(v - t)f(u) \leq (v - u)f(t) + (u - t)f(v). \quad (3.11)$$

Si en la desigualdad (3.11) restamos $(v-t)f(t)$ obtenemos

$$\frac{f(u) - f(t)}{u - t} \leq \frac{f(v) - f(t)}{v - t}.$$

La otra desigualdad de (3.10) ocurre si y sólo si $(v-u)(f(v)-f(t)) \leq (v-t)(f(v)-f(u))$; cancelando términos nos queda que $(v-t)f(u) \leq (v-u)f(t) + (u-t)f(v)$, pero esto es (3.11), por lo tanto (3.10) se cumple. Sea u un número en el interior de J y $h > 0$ tal que $u-h$, $u+h$ están en J ; utilizando (3.10) con $t = u-h < u < u+h = v$ entonces,

$$\frac{f(u) - f(u-h)}{h} \leq \frac{f(u+h) - f(u-h)}{2h} \leq \frac{f(u+h) - f(u)}{h}. \quad (3.12)$$

Ahora tomemos a $0 < h_1 < h_2$ tales que $u+h_1, u+h_2$ están en J ; aplicando nuevamente (3.10) para $u < u+h_1 < u+h_2$ sabemos que

$$\frac{f(u+h_1) - f(u)}{h_1} \leq \frac{f(u+h_2) - f(u)}{h_2}. \quad (3.13)$$

Sea $g(h) = (f(u+h) - f(u))/h$ tal que $h > 0$ y $u+h$ está en J . Por (3.13) sabemos que si $0 < h_1 < h_2$ se cumple que $g(h_1) \leq g(h_2)$ y está acotada por abajo, entonces

$$\lim_{h \downarrow 0} g(h) = f'(u^+)$$

existe en $[a, b)$.

Siguiendo el mismo procedimiento con $u-h_2 < u-h_1 < u$, se demuestra que el límite por la izquierda existe. Por lo tanto, para toda u en el interior de J , tenemos que $f'(u^+)$ y $f'(u^-)$ existen, son crecientes en $[a, b)$ y $(a, b]$, respectivamente, y además, $f'(a^+)$ existe o $f'(a^+) = -\infty$ y $f'(b^-)$ existe o $f'(b^-) = \infty$. ■

Utilizando las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.9, podemos demostrar el siguiente resultado. La Proposición 3.1.10 se necesita más adelante.

Teorema 3.1.11. Sean $\varphi, \varphi^{[-1]}$ y C como en el Lema 3.1.5. Entonces, C es una cópula si y sólo si φ es convexa.

Demostración: Sabemos por el Lema 3.1.5, que sin importar si φ es convexa o no, C siempre cumple las condiciones de frontera. Por lo tanto, basta demostrar que C es 2-creciente si y sólo si φ es convexa, pero por el Lema 3.1.6 esto es equivalente a demostrar que C cumple (3.5) si y sólo si φ es convexa.

Primero supongamos que C cumple (3.5), es decir, para toda $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y v en \mathbf{I} , $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$; pero esto ocurre si y sólo si

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)).$$

Sean $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ y $c = \varphi(v)$. Como φ es estrictamente decreciente, entonces $a = \varphi(u_1) \geq \varphi(u_2) = b$ y $c = \varphi(v) \geq 0$. Por lo tanto,

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c). \quad (3.14)$$

Sean $0 \leq s < t < \infty$ tales que $a = (s + t)/2 > s = b$ y $c = (t - s)/2 > 0$, entonces por (3.14)

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) + \varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t),$$

por lo tanto

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}. \quad (3.15)$$

Como $\varphi^{[-1]}$ cumple (3.15), entonces es medio convexa y como es continua, por la Proposición 3.1.8 $\varphi^{[-1]}$ es convexa. Aún más, dado que $\varphi^{[-1]}$ es estrictamente decreciente, entonces por la Proposición 3.1.9, φ es convexa.

Recíprocamente, si φ es convexa entonces, por la Proposición 3.1.9, φ^{-1} es convexa. Sean a, b, c en \mathbf{I} tales que $a > b$ y $\gamma = (a-b)/(a-b+c)$. Entonces, $0 < \gamma \leq 1$ y $1-\gamma = c/(a-b+c)$. Además, se tiene que

$$(1 - \gamma)b + \gamma(a + c) = a \quad \text{y} \quad \gamma b + (1 - \gamma)(a + c) = b + c.$$

Por la convexidad de $\varphi^{[-1]}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi^{[-1]}(a) &= \varphi^{[-1]}((1 - \gamma)b + \gamma\varphi^{[-1]}(a + c)) \\ &\leq (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a + c) \end{aligned} \quad (3.16)$$

y

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(b+c) &= \varphi^{[-1]}(\gamma b + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c)) \\ &\leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c) + \gamma\varphi^{[-1]}(b).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Sumando (3.16) y (3.17) llegamos a

$$\varphi^{[-1]}(b+c)\varphi^{[-1]}(a) = \varphi^{[-1]}(a+c) + \varphi^{[-1]}(b),$$

que es (3.14), por lo tanto C es cópula. ■

Si C es una cópula tal que, para toda u, v en \mathbf{I} , $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$, donde φ es una función de \mathbf{I} en $[0, \infty]$, continua, convexa y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$, entonces decimos que C es una **cópula arquimediana** y φ es su **generador**. Si $\varphi(0) = \infty$ decimos que el generador es **estricto** y a C la cópula que genera se le llama **cópula arquimediana estricta**.

Ejemplo 3.1.12. Sea $\varphi(t) = -\ln(t)$ para t en \mathbf{I} . Como $\varphi(0) = -\ln(0) = \infty$, entonces φ es un generador estricto. Aún más, $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = e^{-t}$ y por (3.4) genera a

$$\begin{aligned}C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= e^{(-(-\ln(u) - \ln(v)))} \\ &= e^{(\ln(u) + \ln(v))} \\ &= uv = \Pi(u, v).\end{aligned}$$

Por lo tanto, Π es una cópula arquimediana estricta.

Ejemplo 3.1.13. Sea $\varphi(t) = 1 - t$ para t en \mathbf{I} . Entonces, $\varphi^{[-1]}(t) = 1 - t$ para $0 \leq t \leq 1$ y 0 para $t > 1$, es decir, $\varphi^{[-1]}(t) = \max(1 - t, 0)$. Nuevamente, por (3.4) φ genera a

$$\begin{aligned}C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \max(1 - (1 - u + 1 - v), 0) \\ &= \max(u + v - 1, 0) = W(u, v).\end{aligned}$$

Teorema 3.1.14. Sea C una cópula arquimediana con generador φ . Entonces,

- i. C es **simétrica**, es decir, $C(u, v) = C(v, u)$ para toda u, v en \mathbf{I} .
- ii. C es **asociativa**, es decir $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para toda u, v, w en \mathbf{I} .
- iii. Si $c > 0$ entonces, $c\varphi$ también es un generador de C .

Demostración:

- i. Claramente C es simétrica ya que para toda u, v en \mathbf{I} ,

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) = C(v, u).$$

- ii. Sabemos que, para toda x, y en \mathbf{I} ,

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(y))) = \begin{cases} \varphi(x) + \varphi(y) & \text{si } \varphi(x) + \varphi(y) \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(x) + \varphi(y) > \varphi(0). \end{cases}$$

por lo que demostraremos la asociatividad de C por casos. Sean u, v, w en \mathbf{I} ; primero supongamos que $\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) \leq \varphi(0)$, entonces

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v)) + \varphi(w))) \\ &= C(u, C(v, w)); \end{aligned}$$

ahora supongamos que $\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) \leq \varphi(0)$, entonces

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(w)) = 0, \end{aligned}$$

ya que $\varphi(0) + \varphi(w) \geq \varphi(0)$ y también

$$\begin{aligned} C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v)) + \varphi(w))) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) = 0, \end{aligned}$$

ya que

$$\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w) \geq \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(0);$$

el caso $\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$ es análogo al anterior; por último supongamos que $\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$, entonces

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(w)) = 0, \end{aligned}$$

ya que $\varphi(0) + \varphi(w) \geq \varphi(0)$ y también

$$\begin{aligned} C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v)) + \varphi(w))) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0, \end{aligned}$$

ya que $\varphi(u) + \varphi(0) \geq \varphi(0)$. Por lo tanto, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para toda u, v, w en \mathbf{I} .

- iii. Sea φ el generador de C , una cópula; entonces φ es una función de $[0, 1]$ en $[0, \infty]$, continua, convexa, estrictamente creciente y tal que $\varphi(1) = 0$. Sea $c > 0$ y definamos a $\psi(t) = c\varphi(t)$ para toda t en \mathbf{I} ; entonces ψ es una función continua, estrictamente decreciente, $\psi(1) = c\varphi(1) = 0$ y $\psi(0) = c\varphi(0)$. Ahora veamos que ψ es convexa. Sea $0 \leq \lambda \leq 1$ y u, v en \mathbf{I} , entonces

$$\begin{aligned} \psi(tu + (1-t)v) &= c\varphi(tu + (1-t)v) \leq c(t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)) \\ &= t\psi(u) + (1-t)\psi(v), \end{aligned}$$

por lo tanto ψ es generador de una cópula arquimediana C_ψ . Por último veamos que ψ también genera a C , es decir que $C_\psi = C$. Para esto notemos que, para toda $0 \leq t \leq \infty$,

$$\begin{aligned} \psi^{[-1]}(t) &= (c\varphi)^{[-1]}(t) \\ &= \begin{cases} \varphi^{-1}(t/c) & \text{si } 0 \leq t \leq \psi(0) = c\varphi(0) \\ 0 & \text{si } \psi(0) = c\varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= \varphi^{[-1]}(t/c). \end{aligned}$$

Entonces, para toda u, v en \mathbf{I} , $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \psi^{[-1]}(\psi(u) + \psi(v))$. Por lo tanto, ψ genera a C , es decir, el generador de C es único salvo constantes positivas.

■

Ling [12], demuestra que el inverso del Teorema 3.1.14 también se vale. El dual del resultado principal de su artículo se enuncia de la siguiente manera.

Teorema de Ling 3.1.15. Sean $J = [a, b]$ para $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ y S una función de $J \times J$ en J , asociativa, continua, creciente tal que $S(b, x) = x$ para toda x en J y para toda x en (a, b) se cumple que $S(x, x) < x$. Entonces, existe f una función estrictamente decreciente y continua de J en $[0, \infty]$ tal que

$$S(x, y) = f^{[-1]}(f(x) + f(y)).$$

Si tenemos C una cópula asociativa tal que $\delta_C(u) < u$, para toda u en $(0, 1)$, entonces cumple las hipótesis del resultado anterior con $a = 0$ y $b = 1$. Por el Teorema de Ling, C es arquimediana.

Proposición 3.1.16. Sea C una cópula arquimediana y δ_C la sección diagonal de C . Entonces, para toda $0 < u < 1$, $\delta_C(u) < u$.

Demostración: Sean φ el generador de C y $0 < u < 1$. Como φ es estrictamente creciente en $(0, 1)$, sabemos que $0 = \varphi(1) < \varphi(u) < \varphi(0)$, entonces $\varphi(u) < 2\varphi(u)$. Para demostrar el resultado lo haremos por casos. Primero supongamos que $\varphi(0) < 2\varphi(u)$; entonces $\varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) = 0$, por lo tanto

$$\delta_C(u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) = 0 < u.$$

Si $\varphi(0) > 2\varphi(u)$, entonces como $\varphi^{[-1]}$ es estrictamente decreciente en $[0, \varphi(0)]$, por el inciso iii de la observación anterior se tiene que

$$\varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) = \varphi^{-1}(2\varphi(u)) < \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u;$$

por lo tanto

$$\delta_C(u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) < \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u.$$

■

Con este resultado es trivial demostrar que M no es una cópula arquimediana como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.17. Sea M la cota superior de Fréchet-Hoeffding. Por demostrar que M es una cópula asociativa pero no arquimediana. Primero veamos que M es asociativa. Sean u, v, w en \mathbf{I} ; entonces

$$\begin{aligned} M(u, M(v, w)) &= \min(u, M(v, w)) = \min(u, \min(v, w)) \\ &= \min(u, v, w) \\ &= \min(\min(u, v), w) \\ &= M(M(u, v), w), \end{aligned}$$

por lo tanto M es asociativa.

Ahora veamos que por la Proposición 3.1.16, como $\delta_M(u) = M(u, u) = u$ para toda u en \mathbf{I} , entonces M no es arquimediana.

3.2. Propiedades fundamentales

Si C es una cópula y u está en \mathbf{I} , las C -potencias de u , denotadas por u_C^n , se definen recursivamente de la siguiente forma: $u_C^0 = 1$ y $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$. Notemos que $u_C^1 = C(u, u_C^0) = C(u, 1) = u$ y por lo tanto $u_C^2 = C(u, u_C^1) = C(u, u) = \delta_C(u)$.

Recordemos que el axioma arquimediano de los números reales positivos nos dice que si a, b son números reales positivos, entonces existe n un número entero tal que $na > b$. El siguiente teorema nos demuestra una propiedad de las cópulas arquimediana. La razón de que se llamen arquimediana es precisamente esta propiedad.

Teorema 3.2.1. Sea C una cópula arquimediana con generador φ . Entonces, para toda u, v en el intervalo $(0, 1)$, existe $n \geq 1$ tal que $u_C^n < v$.

Demostración: Sean u, v en $(0, 1)$; primero veremos que $u_C^n = \varphi^{[-1]}(n\varphi(u))$ y lo haremos por inducción. El caso base, $n = 2$, se cumple ya que

$$u_C^2 = C(u, u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(u)) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u)).$$

Ahora supongamos que se vale para $n - 1$, con $n \geq 3$, es decir, $u_C^{n-1} = \varphi^{[-1]}((n-1)\varphi(u))$. Por demostrar que $u_C^n = \varphi^{[-1]}(n\varphi(u))$. Por la definición de C -potencia de u y por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} u_C^n &= C(u, u_C^{n-1}) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(u) + \varphi \left(\varphi^{[-1]}((n-1)\varphi(u)) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si $\varphi(0) = \infty$, entonces $\varphi^{[-1]}$ es igual a la inversa usual. Así, por (3.18),

$$\begin{aligned} u_C^n &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(u) + \varphi \left(\varphi^{-1}((n-1)\varphi(u)) \right) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(u) + (n-1)\varphi(u) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(n\varphi(u) \right). \end{aligned}$$

Sin embargo, si $\varphi(0) < \infty$ tenemos dos casos más. Cuando

$$(n-1)\varphi(u) < \varphi(0) \quad \text{y} \quad (n-1)\varphi(u) \geq \varphi(0).$$

En el primero de los casos, como

$$\varphi \left(\varphi^{[-1]}((n-1)\varphi(u)) \right) = (n-1)\varphi(u),$$

sustituyendo esto en (3.18) concluimos que $u_C^n = \varphi^{[-1]}(n\varphi(u))$. En el segundo caso, como $\varphi(\varphi^{[-1]}((n-1)\varphi(u))) = \varphi(0)$, sustituyendo en (3.18) y por la Definición 3.1.2 tenemos que

$$u_C^n = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0. \quad (3.19)$$

Además tenemos que $n\varphi(u) \geq (n-1)\varphi(u) \geq \varphi(0)$; entonces por la Definición 3.1.2 se cumple que

$$\varphi^{[-1]}(n\varphi(u)) = 0. \quad (3.20)$$

Por (3.19) y (3.20) se concluye la inducción.

Como φ es decreciente, sabemos que

$$0 = \varphi(1) < \varphi(u) < \varphi(0) \quad \text{y} \quad 0 = \varphi(1) < \varphi(v) < \varphi(0).$$

Si $\varphi(0) < \infty$, existe N en \mathbb{N} tal que para toda $n \leq N$ se tiene que $n\varphi(u) \geq \varphi(0)$, y entonces $0 = u_C^n < v$. Cuando $\varphi(0) = \infty$, la pseudo inversa coincide con la inversa usual y, aplicando la propiedad arquimediana de los números reales, existe n en \mathbb{N} tal que $n\varphi(u) > \varphi(v)$. Como φ^{-1} es decreciente, entonces

$$u_C^n = \varphi^{-1}(n\varphi(u)) < \varphi^{-1}(\varphi(v)) = v.$$

■

Recordemos que si C es una cópula, los **conjuntos de nivel** se definen como

$$\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u, v) = t\}$$

para toda t en \mathbf{I} . Cuando C es una cópula arquimediana con generador φ y $t > 0$, entonces el conjunto de nivel son los puntos tales que $t = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$, pero esto es lo mismo que las curvas de nivel $\varphi(t) = \varphi(u) + \varphi(v)$. En general, las curvas de nivel las escribiremos como $v = L_t(u)$, donde

$$L_t(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u)).$$

La última igualdad se vale porque $0 \leq v \leq 1$ y como φ es decreciente entonces,

$$0 = \varphi(1) = \varphi(t) - \varphi(u) = \varphi(v) \leq \varphi(0).$$

Para $t = 0$, $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u, v) = 0\}$ es el **conjunto cero de C** , denotado por Z_C . En muchos casos $Z_C = (\{0\} \times \mathbf{I}) \cup (\mathbf{I} \times \{0\})$. Para otros casos Z_C tiene área positiva. Para estos conjuntos cero, a la curva límite, $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$, es decir, $v = L_0(u)$, se le conoce como **curva cero de C** .

Ejemplo 3.2.2. Sea C una cópula arquimediana tal que para toda u, v en \mathbf{I} ,

$$C(u, v) = \max(1 - \{(1 - u)^2 + (1 - v)^2\}, 0).$$

Si $0 < t < 1$, en este caso las curvas de nivel son circunferencias $(1-t)^2 = (1-u)^2 + (1-v)^2$. Cuando $t = 0$, la curva límite está dada por $1 - \{(1-u)^2 + (1-v)^2\} = 0$, pero esto ocurre si y sólo si $1 = (1-u)^2 + (1-v)^2$, que es la ecuación de un círculo con centro en $(1, 1)$ y radio igual a 1.

Teorema 3.2.3. Sea C una cópula arquimediana. Entonces, las curvas de nivel de C son convexas.

Demostración: Sea φ el generador de C . Sabemos que para toda $0 \leq t < 1$ las curvas de nivel están dadas por $v = L_t(u) = \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u))$. Veamos que L_t es medio convexa. Como φ es una función convexa entonces,

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &\geq \varphi(t) - \frac{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)}{2} \\ &= \frac{[\varphi(t) - \varphi(u_1)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por (3.21) y como φ^{-1} es decreciente y convexa, entonces

$$\begin{aligned} L_t\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \varphi^{-1}\left[\varphi(t) - \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right] \\ &\leq \varphi^{-1}\left[\frac{[\varphi(t) - \varphi(u_1)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u_1)) + \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u_2))\right] \\ &= \frac{L_t(u_1) + L_t(u_2)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L_t(u)$ es medio convexa. Como $L_t(u)$ es continua y medio convexa, entonces por la Proposición 3.1.8 $L_t(u)$ es convexa. ■

El siguiente resultado nos da la C -medida de las curvas de nivel de una cópula arquimediana.

Teorema 3.2.4. Sea C una cópula arquimediana con generador φ .

i) Si $0 < t < 1$, la C -medida de $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ está dada por

$$\varphi(t) \left(\frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)} \right), \quad (3.22)$$

donde $\varphi'(t^-)$ y $\varphi'(t^+)$ son las derivadas por la izquierda y por la derecha de $\varphi(t)$, respectivamente. En particular, si $\varphi'(t)$ existe, entonces la C -medida es 0.

ii) Si C no es estrictamente decreciente, entonces la C -medida de $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$ es

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}, \quad (3.23)$$

por lo tanto es 0 cuando $\varphi'(0^+) = -\infty$.

Demostración: Como φ es convexa, entonces por la Proposición 3.1.10 $\varphi'(t^-)$ existe en $(0, 1]$ y $\varphi'(t^+)$ existe en $[0, 1)$. Sean $0 < t < 1$ y $0 < \omega = \varphi(t) < \varphi(0)$. Sea n un número natural fijo, y consideremos la siguiente partición del intervalo $[t, 1]$. Primero tomemos la partición regular de $[0, \omega]$, $\{0, \omega/n, \dots, k\omega/n, \dots, n\omega/n\}$ y definamos a

$$t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1,$$

donde $t_{n-k} = \varphi^{[-1]}(k\omega/n)$, para toda k en $\{0, 1, \dots, n\}$. Además, para toda j en $\{0, 1, \dots, n\}$,

$$\varphi(t_j) = \varphi(t_{n-(n-j)}) = \varphi(\varphi^{[-1]}((n-j)\omega/n)) = (n-j)\omega/n.$$

Entonces, para toda j, k en $\{0, 1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} C(t_j, t_k) &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(t_j) - \varphi(t_k) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\frac{n-j}{n}\omega - \frac{n-k}{n}\omega \right) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\omega + \frac{n-j-k}{n}\omega \right). \end{aligned}$$

En particular $C(t_j, t_{n-j}) = \varphi^{[-1]}(\omega) = t$. Sean $R_k = [t_{k-1}, t_k] \times [t_{n-k}, t_{n-k+1}]$ para toda k en $\{1, \dots, n\}$ y $S_n = \bigcup_{k=1}^n R_k$. Además, si k está en $\{0, 1, \dots, n\}$, como φ es convexa y

por (3.10) con $(n - k - 1)\omega/n < (n - k)\omega/n < (n - k + 1)\omega/n$, entonces

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{n - k}{n}\omega\right) - \varphi^{[-1]}\left(\frac{n - k + 1}{n}\omega\right) \leq \varphi^{[-1]}\left(\frac{n - k - 1}{n}\omega\right) - \varphi^{[-1]}\left(\frac{n - k}{n}\omega\right);$$

por lo tanto

$$0 \leq t_1 - t_0 \leq t_2 - t_1 \leq \cdots \leq t_n - t_{n-1} = 1 - t_{n-1}.$$

Además, por la continuidad de φ sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty}(1 - t_{n-1}) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty}\varphi^{[-1]}(\omega/n) \\ &= 1 - \varphi^{[-1]}(\lim_{n \rightarrow \infty}\omega/n) \\ &= 1 - \varphi^{[-1]}(0) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la C -medida de la curva $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ está dada por $\lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S_n)$.

Si k está en $\{1, \dots, n\}$ entonces,

$$\begin{aligned} V_C(R_k) &= C(t_k, t_{n-(k-1)}) - C(t_k, t_{n-k}) - C(t_{k-1}, t_{n-(k-1)}) + C(t_{k-1}, t_{n-k}) \\ &= C(t_k, t_{n-(k-1)}) - t - t + C(t_{k-1}, t_{n-k}) \\ &= \left[\varphi^{[-1]}\left(\omega + \frac{n - (k-1) - (n-k)}{n}\omega\right) - \varphi^{[-1]}(\omega) \right] \\ &\quad - \left[\varphi^{[-1]}(\omega) - \varphi^{[-1]}\left(\omega + \frac{n-k - (n-k+1)}{n}\omega\right) \right] \\ &= \left[\varphi^{[-1]}\left(\omega + \frac{\omega}{n}\right) - \varphi^{[-1]}(\omega) \right] - \left[\varphi^{[-1]}(\omega) - \varphi^{[-1]}\left(\omega - \frac{\omega}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

lo que nos dice que $V_C(R_k)$ no depende de k . Entonces,

$$V_C(S_n) = \sum_{k=1}^n V_C(R_k) = nV_C(R_1)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S_n) &= \omega \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(\omega + \omega/n) - \varphi^{[-1]}(\omega)}{\omega/n} \right. \\ &\quad \left. - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(\omega) - \varphi^{[-1]}(\omega - \omega/n)}{\omega/n} \right] \\ &= \omega \left[\frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Finalmente, como $\omega = \varphi(t)$, entonces de (3.24) se sigue (3.22).

Si C no es estricta y $t = 0$, entonces $0 < \varphi(0) < \infty$ y $C(u, v) = 0$ sobre Z_C el conjunto cero. Entonces, para toda k en $\{1, \dots, n\}$,

$$V_C(R_k) = C(t_k, t_{n-k+1}) = \varphi^{[-1]}(\omega - \omega/n).$$

Además, en este caso $\omega = \varphi(0)$ por lo que $\varphi^{[-1]}(\omega) = \varphi^{[-1]}(\varphi(0)) = 0$. Con todo esto, como

$$V_C(S_n) = \sum_{k=1}^n V_C(R_k) = n\varphi^{[-1]}(\omega - \omega/n),$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\omega \left[\frac{\varphi^{[-1]}(\omega - \omega/n) - \varphi^{[-1]}(\omega)}{-\omega/n} \right] \\ &= -\omega\varphi^{[-1]}(\omega^-) \\ &= -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.2.5. Sean θ en $(0, 1]$ y φ_θ la función lineal por pedazos en que une a $(0, 2 - \theta)$ con $(\theta/2, 1 - \theta/2)$ y a $(\theta/2, 1 - \theta/2)$ con $(1, 0)$, es decir,

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} (2 - \theta) - t(2 - \theta)/\theta & \text{si } 0 \leq t \leq \theta/2 \\ 1 - t & \text{si } \theta/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sea C_θ la cópula arquimediana generada por φ_θ . Como $\varphi'_\theta(t) = (\theta - 2)/\theta$ si $0 \leq t \leq \theta/2$ y $\varphi'_\theta(t) = -1$ si $\theta/2 < t < 1$, la C_θ -medida de la curva de nivel $\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v) = \varphi_\theta(\theta/2)$, está dada por (3.22) ya que $0 < \theta/2 < 1$; entonces la C_θ -medida es

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(\theta/2) \left[\frac{1}{\varphi'_\theta(\theta/2^-)} - \frac{1}{\varphi'_\theta(\theta/2^+)} \right] &= (1 - \theta/2) \left[\frac{1}{(\theta - 2)/\theta} - \frac{1}{-1} \right] \\ &= 1 - \theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, que la C_θ -medida de la curva cero está dada por (3.23) y es

$$-\frac{\varphi_\theta(0)}{\varphi'_\theta(0^+)} = \frac{(\theta - 2)\theta}{(\theta - 2)} = \theta.$$

Observemos que, como ambas medidas suman 1, las cópulas arquimedianas de esta familia son singulares y el soporte de C_θ es

$$\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(\theta/2) \text{ o } \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)\}.$$

Además, si $\theta = 1$, entonces $C_\theta = W$, ya que $\varphi_1(t) = 1 - t$ y $C_{0^+} = \lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = W$.

De hecho, si φ es generador de una cópula arquimediana C y es lineal por pedazos, entonces C debe ser singular.

Teorema 3.2.6. Sea C una cópula arquimediana generada por φ . Sea $K_C(t)$ la C -medida de $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u, v) \leq t\}$, o equivalentemente, del conjunto

$$\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}.$$

Entonces, para toda t en \mathbf{I} ,

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \quad (3.25)$$

Demostración: Sea $0 < t < 1$ y $\omega = \varphi(t)$. Sea n un número natural fijo y consideremos las particiones de $[t, 1]$ y $[0, \omega]$ como en el Teorema 3.2.4. Sean R'_k el rectángulo $[t_{k-1}, t_k] \times [0, t_{n-k+1}]$ y $S'_n = \bigcup_{k=1}^n R'_k$. Con un procedimiento análogo al del Teorema 3.2.4, $K_C(t)$ está dado por la suma de la C -medida de $[0, t] \times \mathbf{I}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S'_n)$, pero $V_C([0, t] \times \mathbf{I}) = t$,

por lo tanto $K_C(t) = t + \lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S'_n)$. Si k está en $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} V_C(R'_k) &= C(t_k, t_{n-(k-1)}) - C(t_k, 0) - C(t_{k-1}, t_{n-(k-1)}) + C(t_{k-1}, 0) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\omega + \frac{n-k-(n-k+1)}{n} \omega \right) - t \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\omega - \frac{\omega}{n} \right) - \varphi^{[-1]}(\omega), \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} V_C(S'_n) &= \sum_{k=1}^n V_C(R'_k) \\ &= -\omega \left[\frac{\varphi^{[-1]}(\omega) - \varphi^{[-1]}(\omega - \omega/n)}{\omega/n} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_C(t) &= t + \lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S'_n) \\ &= t - \omega \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi^{[-1]}(\omega) - \varphi^{[-1]}(\omega - \omega/n)}{\omega/n} \right] \\ &= t - \varphi(t) \varphi^{[-1]}(\omega^-) \\ &= t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \end{aligned}$$

Si $t = 0$ esto también es válido y si $t = 1$ entonces $K_C(1) = 1$, por la definición de $K_C(t)$. ■

Corolario 3.2.7. Sea C una cópula arquimediana generada por φ . Sea $K'_C(s, t)$ la C -medida del conjunto $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid u \leq s, C(u, v) \leq t\}$. Entonces, para toda s, t en \mathbf{I} ,

$$K'_C(s, t) = \begin{cases} s & \text{si } s \leq t \\ t - \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi'(t^+)} & \text{si } s > t. \end{cases} \quad (3.26)$$

Demostración: Si $s \leq t$, entonces

$$\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid u \leq s, C(u, v) \leq t\} = \{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid u \leq s\};$$

por lo tanto $K'_C(s, t) = V_C(\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | u \leq s\}) = s$. Cuando $s > t$, si $z = \varphi(s)$ y $\omega = \varphi(t)$, como φ es decreciente entonces $z < \omega$. Si particionamos $[t, s]$ en lugar de $[t, 1]$ y $[z, \omega]$ en lugar de $[0, \omega]$, como en los Teoremas 3.2.4 y 3.2.6, entonces para k en $\{0, 1, \dots, n\}$, $t_{n-k} = \varphi^{[-1]}(z + k(\omega - z)/n)$, donde $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = s$. Lo demás es análogo al Teorema 3.2.6. ■

Un caso especial de las cópulas arquimedianas es cuando φ , el generador, es dos veces diferenciable, es decir, para $0 < t < 1$ se tiene que $\varphi'(t) < 0$ y $\varphi''(t) \geq 0$. Si C es una cópula arquimediana absolutamente continua y φ , el generador, es dos veces diferenciable. Entonces, por el Teorema de Sklar, existe H una función de distribución conjunta cuya función de densidad está dada por la función

$$-\frac{\varphi''(C(u, v))\varphi'(u)\varphi'(v)}{\varphi'(C(u, v))^3}. \quad (3.27)$$

Ejemplo 3.2.8. Sea θ en $[-1, 0)$ y sea $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$. A $\{C_\theta\}_{\theta \in [-1, 0)}$, donde C_θ está generada por φ_θ , se le conoce como la **familia Clayton de cópulas arquimedianas**. Notemos que si $\theta = -1$ entonces $\varphi_{-1}(t) = 1 - t$, por lo que $C_{-1} = W$. Además, si $-1 < \theta < 0$, entonces $\varphi'_\theta(t) = -t^{-\theta-1}$. Si t tiende a 0, entonces la derivada de φ se va a $-\infty$, es decir, $\varphi'_\theta(0^+) = -\infty$, y $\varphi''_\theta(t) = (\theta + 1)t^{-\theta-2} \geq 0$, ya que $0 < \theta + 1 < 1$. Como

$$0 < \varphi_\theta(0) = -1/\theta < \infty,$$

para $-1 < \theta < 0$, entonces φ_θ no es un generador estricto para toda θ en $[-1, 0)$. Por lo tanto, $\{C_\theta\}_{\theta \in [-1, 0)}$ son absolutamente continuas aunque φ_θ no es estricto para toda θ en $[-1, 0)$. En la Figura 3.2 podemos ver la gráfica de φ_{-1} (línea continua) y $\varphi_{-0.5}$ (línea discontinua).

Ejemplo 3.2.9. Sean θ en $[1, \infty)$ y $\varphi_\theta(t) = (1-t)^\theta$. Sea $\{C_\theta\}_{\theta \in [1, \infty)}$ una familia de cópulas arquimedianas, donde C_θ está generada por φ_θ . Primero notemos que W pertenece a esta familia de cópulas ya que $\varphi_1(t) = (1-t)$, es el generador de W . Además, como $\varphi_\theta(0) = 1$ para toda θ en $[1, \infty)$, entonces φ_θ no es un generador estricto. Como $\varphi'_\theta(t) = -\theta(1-t)^{\theta-1}$ para toda θ en $[1, \infty)$, entonces por el Teorema 3.2.4 la C_θ -medida de la curva cero está dada por

$$\frac{-\varphi_\theta(0)}{\varphi'_\theta(0^+)} = \frac{-1}{\lim_{t \downarrow 0} (-\theta)(1-t)^{\theta-1}} = \frac{1}{\theta}.$$

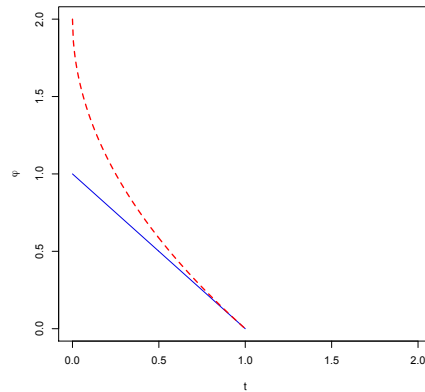


Figura 3.2: Generadores de la familia Clayton.

Si θ está en $(1, \infty)$, entonces la C_θ -medida de la curva cero es menor a uno, y por lo tanto C_θ tiene parte absolutamente continua y parte singular.

Ejemplo 3.2.10. Sea

$$C_\theta(u, v) = M(u, v) + \frac{1 - \theta}{1 + \theta} (uv)^{1/(1-\theta)} \left(1 - [\max(u, v)]^{-(1+\theta)/(1-\theta)} \right),$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$. A $\{C_\theta\}_{\theta \in [0,1]}$ se le conoce como la **familia Raftery de cópulas**. Ésta no es una familia de cópulas arquimedianas. Esto se puede ver, ya que para $C_1 = M$ y en el Ejemplo 3.1.17 vimos que M no es arquimediana.

Teorema 3.2.11. Sean U, V variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0, 1)$, con distribución conjunta C , que es una cópula arquimediana generada por φ . Sea H la función de distribución conjunta de

$$S = \varphi(U)/(\varphi(U) + \varphi(V)) \quad \text{y} \quad T = C(U, V).$$

Entonces H está dada por $H(s, t) = sK_C(t)$ para toda s, t en \mathbf{I} . En otras palabras, S y T son independientes y S se distribuye uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.

Demostración: La demostración la haremos solamente para el caso cuando C es absolutamente continua. Sea $h(s, t)$ la función de densidad conjunta de S y T , dada por

$$h(s, t) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| \quad (3.28)$$

donde $\partial^2 C(u, v)/\partial u \partial v$ está dada por (3.27) y $\partial(u, v)/\partial(s, t)$ es el jacobiano de la transformación $\varphi(u) = s\varphi(t)$, $\varphi(v) = (1 - s)\varphi(t)$. Dado que

$$\varphi(T) = \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(U) + \varphi(V))) = \varphi(U) + \varphi(V),$$

entonces $S = \varphi(U)/\varphi(T)$ y esto despejando nos queda que $\varphi(U) = S\varphi(T)$; por lo tanto $U = \varphi^{[-1]}(S\varphi(T))$. Además, como $\varphi(V) = \varphi(T) - \varphi(U)$, sustituyendo nos da $\varphi(V) = (1 - S)\varphi(T)$; por lo tanto $V = \varphi^{[-1]}((1 - S)\varphi(T))$. Para calcular el jacobiano primero calculemos las derivadas parciales de las transformaciones, que son :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\varphi(t)}{\varphi'(\varphi^{[-1]}(s\varphi(t)))} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{s\varphi'(t)}{\varphi'(\varphi^{[-1]}(s\varphi(t)))} \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{-\varphi(t)}{\varphi'(\varphi^{[-1]}((1 - s)\varphi(t)))} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{(1 - s)\varphi'(t)}{\varphi'(\varphi^{[-1]}((1 - s)\varphi(t)))}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} &= \frac{(1 - s)\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} + \frac{s\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} \\ &= \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} < 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Sustituyendo (3.27) y (3.29) en (3.28) nos queda que

$$h(s, t) = \left[-\frac{\varphi''(t)\varphi'(u)\varphi'(v)}{\varphi'(t)^3} \right] \cdot \left[\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} \right] = \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{\varphi'(t)^2}.$$

Por lo tanto,

$$H(s, t) = \int_0^s \int_0^t \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{\varphi'(t)^2} dy dx = s \left[y - \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} \right] \Big|_0^t = s \left[t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right].$$

La última igualdad se debe a que $\varphi(0)/\varphi'(0)$ es la C -medida de la curva cero y como C es absolutamente continua vale cero. ■

Teorema 3.2.12. Sea C una cópula arquimediana con generador φ . Entonces, para casi toda u, v en \mathbf{I} , se cumple que

$$\varphi'(u) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \quad (3.30)$$

Demostración: Como φ es convexa, entonces φ' existe para casi toda u en $(0, 1)$. También sabemos por el Teorema 1.1.19 que $\partial C(u, v)/\partial u$ y $\partial C(u, v)/\partial v$ existen casi en todos lados para u, v en \mathbf{I} . Además, $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ y, por la regla de la cadena,

$$\varphi'(C(u, v)) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \varphi'(u) \quad \text{y} \quad \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v).$$

Entonces,

$$\varphi'(C(u, v)) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(u) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$$

y

$$\varphi'(C(u, v)) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \varphi'(v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

Por lo tanto,

$$\varphi'(u) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

■

Si C es una cópula asociativa tal que $\delta_C(u) < u$ para toda u en \mathbf{I} , entonces (por el Teorema de Ling) C es una cópula arquimediana. En el siguiente ejemplo veremos una aplicación de este teorema, para encontrar al generador de dicha cópula.

Ejemplo 3.2.13. Sea θ en $[-1, 1]$ y $C_\theta(u, v) = uv/(1 - \theta(1 - u)(1 - v))$. A $\{C_\theta\}_{\theta \in [-1, 1]}$ se le conoce como la **familia de cópulas Ali-Mikhail-Haq**. Se puede demostrar que son asociativas y que, para toda u en \mathbf{I} , $\delta_C(u) < u$, es decir, son cópulas arquimediana. Para encontrar el generador utilizaremos el Teorema 3.2.12. Por (3.30) sabemos que

$$\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi'_\theta(v)} = \frac{\partial C_\theta(u, v)/\partial u}{\partial C_\theta(u, v)/\partial v},$$

pero

$$\frac{\partial C_\theta(u, v)}{\partial u} = \frac{v(1 - \theta(1 - v))}{(1 - \theta(1 - u)(1 - v))^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial C_\theta(u, v)}{\partial v} = \frac{u(1 - \theta(1 - u))}{(1 - \theta(1 - u)(1 - v))^2}.$$

Entonces,

$$\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi'_\theta(v)} = \frac{v(1 - \theta(1 - v))}{u(1 - \theta(1 - u))},$$

para θ en $[-1, 1)$

$$\varphi'_\theta(u) = \frac{k_\theta}{u(1 - \theta(1 - u))},$$

donde k_θ es una constante. Entonces,

$$\varphi_\theta(t) = \frac{k_\theta}{1 - \theta} \ln \left(\frac{1 - \theta(1 - t)}{t} \right).$$

Si $\theta = 1$, entonces $\varphi'_1(u) = k_1/u^2$; por lo tanto $\varphi_1(t) = k_1(1/t - 1)$. Con todo esto podemos concluir que

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} \frac{k_\theta}{1 - \theta} \ln \left(\frac{1 - \theta(1 - t)}{t} \right) & \text{si } \theta \in [-1, 1), \\ k \left(\frac{1}{t} - 1 \right) & \text{si } \theta = 1, \end{cases}$$

donde k y k_θ son constantes. Si $k = 1$ y $k_\theta = 1 - \theta$, entonces

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} \ln \left(\frac{1 - \theta(1 - t)}{t} \right) & \text{si } \theta \in [-1, 1), \\ \frac{1}{t} - 1 & \text{si } \theta = 1. \end{cases}$$

3.3. Orden y casos límite

Recordemos que si C_1 y C_2 son cópulas, entonces $C_1 \prec C_2$ si y sólo si $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} . Sea Θ un subconjunto de \mathbb{R} ; entonces $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ está **positivamente ordenado** si y sólo si $C_\alpha \prec C_\beta$ para toda α, β en Θ tales que $\alpha \leq \beta$; y **negativamente ordenado** si y sólo si $C_\beta \prec C_\alpha$ para toda α, β en Θ tales que $\alpha \leq \beta$.

Ejemplo 3.3.1. Sea θ en $(0, 1]$ y $C_\theta = uv e^{-\theta \ln u \ln v}$. A $\{C_\theta\}_{\theta \in (0, 1]}$ se le conoce como la **familia de cópulas Gumbel-Barnett**. Si tomamos C_{θ_1} y C_{θ_2} , dos cópulas de esta familia tales que $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 1$, como

$$-\theta_1 \ln u \ln v \geq -\theta_2 \ln u \ln v,$$

para toda u, v en $(0, 1)$, entonces $C_{\theta_1}(u, v) \geq C_{\theta_2}(u, v)$. Por lo tanto la familia Gumbel-Barnett está negativamente ordenada.

En este caso, ver si la familia de cópulas está ordenada fue muy sencillo, pero en muchos casos, como en el caso de la familia en la que

$$C_\theta(u, v) = \frac{\theta}{\ln(e^{\theta/u} + e^{\theta/v} - e^\theta)}$$

para θ en $(0, \infty)$, es bastante complicado. Siempre que tengamos cópulas arquimedianas, esto se nos va a facilitar debido a las propiedades de sus generadores.

Definición 3.3.2. Sea f una función de $[0, \infty)$ en \mathbb{R} . Decimos que f es **subaditiva** si y sólo si

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \quad (3.31)$$

para toda x, y en $[0, \infty)$.

Teorema 3.3.3. Sean C_1 y C_2 cópulas arquimedianas con generadores φ_1 y φ_2 , respectivamente. Entonces, $C_1 \prec C_2$ si y sólo si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es subaditiva.

Demostración: Sea $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$; entonces f es una función de $[0, \infty]$ en \mathbb{R} , continua, creciente y

$$f(0) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(0) = \varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(0)) = \varphi_1(1) = 0.$$

Además, $C_1 \prec C_2$ si y sólo si

$$\varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \leq \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)), \quad (3.32)$$

para toda u, v en \mathbf{I} .

Si $x = \varphi_2(u)$ y $y = \varphi_2(v)$, entonces

$$\varphi_1(u) = (\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]} \circ \varphi_2)(u) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u)) = f(x).$$

De la misma forma $\varphi_1(v) = f(y)$. Sustituyendo esto en (3.32) nos queda que

$$\varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y)) \leq \varphi_2^{[-1]}(x + y) \quad (3.33)$$

para toda x, y en $[0, \varphi_2(0)]$. Aún más, si $x > \varphi_2(0)$ o $y > \varphi_2(0)$, entonces los dos lados de (3.33) son iguales a cero.

Supongamos que $C_1 \prec C_2$; por lo anterior, esto ocurre si y sólo si (3.33) se cumple. Aplicando φ_1 en ambos lados de (3.33), por el hecho de que $\varphi_1 \circ \varphi_1^{[-1]}(\omega) \leq \omega$ para $\omega \geq 0$ y como φ_1 es decreciente llegamos a que

$$f(x) + f(y) \geq \varphi_1 \circ \varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y)) \geq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x + y) = f(x + y);$$

por lo tanto f es subaditiva. Recíprocamente, supongamos ahora que f es subaditiva. Por (3.31) f es subaditiva si y sólo si

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x + y) \leq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x) + \varphi_1 \circ \varphi_1^{[-1]}(y). \quad (3.34)$$

Como $\varphi_1^{[-1]}$ es decreciente y aplicando $\varphi_1^{[-1]}$ en ambos lados de (3.34) nos queda que

$$\begin{aligned} \varphi_2^{[-1]}(x + y) &= (\varphi_1^{[-1]} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]})(x + y) \\ &\geq \varphi_1^{[-1]} \left((\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]})(x) + (\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]})(y) \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si $x = \varphi_2(u)$, $y = \varphi_2(v)$ y sustituyendo en (3.35) llegamos a que

$$\begin{aligned} C_2(u, v) = \varphi_2^{[-1]}(x + y) &= \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) \\ &\geq \varphi_1^{[-1]} \left((\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]})(x) + (\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]})(y) \right) \\ &\geq \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) = C_1(u, v); \end{aligned}$$

por lo tanto $C_1 \prec C_2$. ■

Con este teorema, caracterizamos el orden parcial que define \prec en el espacio de las cópulas arquimedianas en términos de la subaditividad de composiciones de generadores y sus inversas. Sin embargo, demostrar la subaditividad de $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ puede ser difícil. Los siguientes resultados nos dan condiciones suficientes para la subaditividad de $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$.

Lema 3.3.4. Sea f una función de $[0, \infty)$ en \mathbb{R} . Si f es cóncava y $f(0) = 0$, entonces f es subaditiva.

Demostración: Sean x, y en $[0, \infty)$. Si $x + y = 0$, entonces $x = y = 0$ y por hipótesis

$$f(x + y) = f(0) = 0 = f(x) + f(y),$$

por lo que se cumple (3.31). Supongamos ahora que $x + y > 0$, sea $\alpha = x/(x + y)$, entonces $1 - \alpha = y/(x + y)$. Como f es cóncava,

$$x = \alpha(x + y) + (1 - \alpha)0 \quad y = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha)(x + y),$$

entonces se cumple que

$$f(x) \geq \frac{x}{x + y}f(x + y) + \frac{y}{x + y}f(0) = \frac{x}{x + y}f(x + y) \quad (3.36)$$

y

$$f(y) \geq \frac{x}{x + y}f(0) + \frac{y}{x + y}f(x + y) = \frac{y}{x + y}f(x + y), \quad (3.37)$$

pero sumando (3.36) y (3.37) nos da (3.31). Por lo tanto, f es subaditiva. ■

Corolario 3.3.5. Sean C_1 y C_2 cópulas arquimedianas con generadores φ_1 y φ_2 , respectivamente. Si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es cóncava, entonces $C_1 \prec C_2$.

Demostración: Como $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(0) = 0$, entonces por el Lema 3.3.4 sabemos que $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es subaditiva y por el Teorema 3.3.3 concluimos que $C_1 \prec C_2$. ■

Ejemplo 3.3.6. Sea θ en $[1, \infty)$ y $C_\theta = e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}}$. A $\{C_\theta\}_{\theta \in [1, \infty)}$ se le conoce como la **familia de cópulas Gumbel-Hougaard**. Sabemos que el generador de C_θ es $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$. Sean C_{θ_1} y C_{θ_2} dos miembros de esta familia de cópulas arquimedianas. Entonces,

$$\varphi_{\theta_1} \circ \varphi_{\theta_2}^{[-1]} = \varphi_{\theta_1}(e^{(-t^{1/\theta_2})}) = [-\ln(e^{(-t^{1/\theta_2})})]^{\theta_1} = t^{\theta_1/\theta_2}.$$

Si $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces t^{θ_1/θ_2} es cóncava y por el Corolario 3.3.5, $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$. Por lo tanto, la familia Gumbel-Hougaard está positivamente ordenada.

Corolario 3.3.7. Sean C_1 y C_2 cópulas arquimedianas con generadores φ_1 y φ_2 , respectivamente. Si φ_1/φ_2 es creciente en $(0, 1)$, entonces $C_1 \prec C_2$.

Demostración: Sean φ_1 y φ_2 los generadores de C_1 y C_2 cópulas arquimedianas y supongamos que φ_1/φ_2 es creciente en $(0, 1)$. Definamos a g una función de $(0, \infty)$ en

$(0, \infty)$ tal que $g(t) = (\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]})(t)/t$. Como φ_2 es decreciente y

$$g \circ \varphi_2(t) = \frac{\varphi_1 \circ (\varphi_2^{[-1]} \circ \varphi_2)(t)}{\varphi_2(t)} = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)},$$

entonces g es decreciente en $(0, \varphi_2(0))$ y por lo tanto en $(0, \infty)$. Entonces, para toda $x \geq 0, y \geq 0$ tenemos que

$$x[g(x+y) - g(x)] + y[g(x+y) - g(y)] \leq 0$$

y esto ocurre, si y sólo si

$$(x+y)g(x+y) \leq xg(x) + yg(y);$$

sustituyendo a la g nos queda que

$$(x+y) \left[\frac{\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x+y)}{x+y} \right] \leq x \left[\frac{\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x)}{x} \right] + y \left[\frac{\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(y)}{y} \right],$$

pero esto ocurre si y sólo si

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x+y) \leq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(y);$$

por lo tanto $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es subaditiva y, por el Teorema 3.3.3, $C_1 \prec C_2$. ■

Ejemplo 3.3.8. Sea θ en $[1, \infty)$ y $\varphi_\theta = (1-t)^\theta$. Si tomamos a $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2$, entonces $\varphi_1(t)/\varphi_2(t) = (1-t)^{\theta_1-\theta_2}$. Entonces, φ_1/φ_2 es creciente en $(0, 1)$ y por el Corolario 3.3.7 se sigue que $\{C_\theta\}_{\theta \in [1, \infty)}$, la familia de cópulas tal que C_θ está generada por φ_θ para toda θ en $[1, \infty)$, está positivamente ordenada.

Corolario 3.3.9. Sean C_1 y C_2 cópulas arquimedianas con generadores φ_1 y φ_2 , respectivamente. Si φ_1 y φ_2 son diferenciables continuas en $(0, 1)$ y φ_1'/φ_2' es creciente en $(0, 1)$, entonces $C_1 \prec C_2$.

Demostración: Primero notemos que φ_1' y φ_2' son negativas en $(0, 1)$ ya que φ_1 y φ_2 son decrecientes (por ser generadores de cópulas). Definamos a $f = \varphi_1'/\varphi_2'$ y $g = \varphi_1/\varphi_2$ y supongamos que f es creciente. Como f es continua, entonces $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$ existe, aunque

puede ser infinito. Además, se cumple que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi_2(t)$, y aplicando la regla de L'Hôpital se cumple que $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t)$. También tenemos que $g' = (f - g)\varphi_2'/\varphi_2$, ya que

$$g' = \frac{\varphi_2\varphi_1' - \varphi_2'\varphi_1}{\varphi_2^2} = \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = (f - g) \frac{\varphi_2'}{\varphi_2}. \quad (3.38)$$

Supongamos que existe t_0 en $(0, 1)$ tal que $f(t_0) - g(t_0) > 0$. Entonces, utilizando el hecho de que f, g son crecientes

$$g(t_0) < f(t_0) \leq \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t),$$

pero por (3.38)

$$g'(t_0) = (f(t_0) - g(t_0))\varphi_2'(t_0)/\varphi_2(t_0) < 0$$

ya que $\varphi_2'(t_0) < 0$. Por lo tanto, existe t_1 en $(t_0, 1)$ tal que $g(t_1) < g(t_0)$ y $g'(t_1) = 0$. Así,

$$g(t_1) < g(t_0) < f(t_0) \leq f(t_1)$$

y por (3.38), $g'(t_0) < 0$, que es una contradicción. Por lo tanto, $f(t) - g(t) \leq 0$ para toda t en $(0, 1)$, pero esto implica, por (3.38), que g' es no negativa. Sin embargo, esto ocurre si y sólo si $g = \varphi_1/\varphi_2$ es creciente en $(0, 1)$ y por el Corolario 3.3.7 se cumple que $C_1 \prec C_2$. ■

Ejemplo 3.3.10. Sea θ en $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ y $C_\theta = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$. Entonces, $\{C_\theta\}_{\theta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)}$ es la familia de cópulas Clayton. Sabemos, por el Ejemplo 3.2.8, que el generador de C_θ es $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$; entonces $\varphi_\theta'(t) = -t^{-\theta-1}$. Si C_{θ_1} y C_{θ_2} son dos cópulas de esta familia y esto implica que $\varphi_{\theta_1}'(t)/\varphi_{\theta_2}'(t) = t^{\theta_2-\theta_1}$. Si $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces $\varphi_{\theta_1}'/\varphi_{\theta_2}'$ es creciente en $(0, 1)$ y por el Corolario 3.3.9 sabemos que $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$. Por lo tanto, la familia Clayton está positivamente ordenada.

Una cópula arquimediana relevante en esta tesis es la que se define como

$$\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}, \quad (3.39)$$

para toda u, v en \mathbf{I} . La importancia de esta cópula radica en el hecho de que aparece en muchas familias de cópulas arquimedianas. Por ejemplo, para la familia Clayton se obtiene cuando $\theta = 1$.

3.4. Cópulas arquimedianas multivariadas

Ahora queremos saber si esta forma de construir cópulas se puede generalizar para construir n -cópulas, para $n \geq 3$. En el caso de la cópula producto Π , vimos que $\varphi(t) = -\ln t$ es su generador, donde φ es una función continua, estrictamente decreciente, convexa, con $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(1) = 0$, por lo que

$$\Pi(u, v) = uv = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

para toda u, v en \mathbf{I} . Si ahora tenemos a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ en \mathbf{I}^n , notamos que la n -cópula producto Π^n , se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 \cdots u_n &= \exp\left(-[(-\ln u_1) + \cdots + (-\ln u_n)]\right) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n)). \end{aligned}$$

Esto nos lleva a que una generalización natural de la definición de cópula arquimediana para dimensiones mayores a dos, debería ser

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n)), \quad (3.40)$$

para todo \mathbf{u} en \mathbf{I}^n , donde φ es el generador de una cópula arquimediana. Sin embargo, esto no siempre es n -cópula. Si $\varphi(t) = 1 - t$, sabemos por el Ejemplo 3.1.13 que es el generador de W pero

$$W^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n))$$

no es n -cópula por el Ejemplo 1.7.17; por lo tanto vamos a tener que pedirle más restricciones al generador.

Definición 3.4.1. Sea g una función de J en \mathbb{R} , donde J es un intervalo. Entonces, g es **completamente monótona** si y sólo si se cumple que para toda k en $\{0, 1, 2, \dots\}$

$$(-1)^k \frac{d^k g(t)}{dt^k} \geq 0, \quad (3.41)$$

para toda t en el interior de J .

Notemos que si g es una función completamente monótona en $[0, \infty)$, entonces $g(t) \geq 0$, $g'(t) \leq 0$ y $g''(t) \geq 0$ para toda t en el interior de J . Por lo tanto, g es decreciente y convexa. Como g es creciente y no negativa, si existe $0 < c < \infty$ tal que $g(c) = 0$ entonces $g(t) = 0$ para toda $c \leq t < \infty$. Si la pseudo inversa $\varphi^{[-1]}$ de un generador arquimediano es completamente monótona, entonces debe ser positiva en $(0, \infty)$, es decir, φ es estricta y $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que φ un generador estricto genere n -cópulas arquimedianas; para la demostración ver Kimberling [8].

Teorema 3.4.2. Sea φ una función continua, estrictamente decreciente de \mathbf{I} en $[0, \infty]$ tal que $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(1) = 0$, y sea φ^{-1} su inversa. Si C^n es una función de \mathbf{I}^n en \mathbf{I} dada por (3.40), entonces C^n es n -cópula para toda $n \geq 2$ si y sólo si φ^{-1} es completamente monótona en $[0, \infty)$.

Ejemplo 3.4.3. Sea θ en $(0, \infty)$. La función $\varphi_\theta(t) = t^{-\theta} - 1$ genera una subfamilia de la familia de cópulas arquimedianas Clayton. Esta subfamilia tiene generadores estrictos ya que $\varphi_\theta(0) = \infty$. Además, $\varphi_\theta^{-1}(t) = (1 + t)^{-1/\theta}$ y

$$(-1)^k \frac{d^k \varphi_\theta^{-1}(t)}{dt^k} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1 + i\theta}{\theta^k} (1 + t)^{-(1+k\theta)/\theta} \geq 0,$$

para toda t en $[0, \infty)$. Entonces, por (3.40)

$$\begin{aligned} C^n(\mathbf{u}) &= \left((u_1^{-\theta} - 1) + (u_2^{-\theta} - 1) + \cdots + (u_n^{-\theta} - 1) + 1 \right)^{-1/\theta} \\ &= \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} \cdots + u_n^{-\theta} - n + 1 \right)^{-1/\theta}, \end{aligned}$$

y por el Teorema 3.4.2 C^n es una n -cópula.

Corolario 3.4.4. Sea φ^{-1} la inversa de φ , un generador de n -cópulas arquimedianas. Entonces $\Pi^n \prec C^n$ para $n \geq 3$, donde C^n es la n -cópula generada por φ .

Demostración: Como $\varphi_1(t) = -\ln(t)$ es el generador de Π^n , entonces por el Corolario 3.3.5 basta ver que

$$h(t) = \varphi_1 \circ \varphi^{-1}(t) = -\ln(\varphi^{-1}(y))$$

es una función cóncava en $(0, \infty)$. Si $g = \varphi^{-1}$, entonces

$$h'(t) = -g(t)/g'(t) \quad \text{y} \quad h''(t) = \frac{-g''(t)g(t) + g'(t)^2}{g(t)^2}$$

para toda t en $(0, \infty)$. Como g es completamente monótona, entonces $h''(t) \leq 0$, por lo que $-h$ es una función convexa y por lo tanto h es cóncava. ■

Capítulo 4

Concordancia

Como lo explica Nelsen [17], dos variables aleatorias son concordantes si y sólo si a los valores grandes de una de ellas se asocian valores grandes de la otra y valores pequeños de una de ellas se asocian a valores pequeños de la otra. Es decir, si tenemos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones del vector aleatorio (X, Y) de variables aleatorias continuas, entonces (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son **concordantes** si y sólo si ocurre $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$, o $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. Por otro lado, si ocurre que $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$, o $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$, entonces decimos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son **discordantes**. Otra forma de ver esto es la siguiente: $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ si y sólo si (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes; de manera similar $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ si y sólo si (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son discordantes.

4.1. Tau de Kendall

Definición 4.1.1. Sea $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria del vector aleatorio (X, Y) de variables aleatorias continuas. Entonces, hay $\binom{n}{2}$ parejas diferentes (x_i, y_i) y (x_j, y_j) de observaciones de la muestra. Como las variables aleatorias son continuas, esto implica que para toda i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$, (x_i, y_i) es diferente de (x_j, y_j) con probabilidad 1, por lo que cada una de las parejas son concordantes o discordantes con probabilidad 1. Sea c el número de parejas concordantes y d el número de parejas discordantes; entonces $c + d = \binom{n}{2}$ con probabilidad 1. La **tau de Kendall** de la muestra

se define como

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}},$$

por lo tanto t es la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia, al escoger al azar dos parejas (x_i, y_i) y (x_j, y_j) de la muestra.

La versión poblacional de la tau de Kendall se define de la siguiente forma: sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) dos vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución conjunta H . Entonces, la tau de Kendall se define como la probabilidad de que sean concordantes menos la probabilidad de que sean discordantes, es decir,

$$\tau = \tau_{XY} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4.1)$$

Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios de variables aleatorias continuas con H_1 y H_2 sus funciones de distribución conjunta, respectivamente, no necesariamente iguales pero con las mismas marginales F y G . Definamos a Q una función de concordancia entre dos vectores aleatorios, que es la probabilidad de que sean concordantes menos la probabilidad de que sean discordantes. En el siguiente resultado demostramos que Q solamente depende de sus cópulas.

Teorema 4.1.2. Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios de variables aleatorias continuas con H_1 y H_2 sus funciones de distribución conjunta, respectivamente, no necesariamente iguales pero con las mismas marginales F y G , donde F es la función de distribución de X_1 y X_2 , mientras que G es la función de distribución de Y_1 y Y_2 . Sean C_1 y C_2 las cópulas respectivas; es decir, para toda x, y en \mathbb{R}

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= C_1(F(x), G(y)) \\ H_2(x, y) &= C_2(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Sea Q la probabilidad de que (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) sean concordantes menos la probabilidad de que sean discordantes, es decir,

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Entonces,

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (4.2)$$

Demostración: Como las variables aleatorias son continuas, entonces

$$(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \neq 0$$

con probabilidad 1, por lo tanto se tiene que

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0].$$

Sustituyendo esto en la definición de Q obtendemos que

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \quad (4.3)$$

Además, como

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$$

y por la continuidad de las variables aleatorias y por el Teorema de Sklar, se tiene que

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= P[X_2 \leq X_1, Y_2 \leq Y_1] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} H_2(x, y) dH_1(x, y) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Si $u = F(x)$ y $v = G(y)$, entonces

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

De la misma forma, por la continuidad de las variables aleatorias y por el Teorema de Sklar, se tiene que

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= P[X_2 > X_1, Y_2 > Y_1] \\ &= P[X_2 \geq X_1, Y_2 \geq Y_1] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + H_2(x, y)] dH_1(x, y) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Si $u = F(x)$ y $v = G(y)$, entonces

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \iint_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v).$$

Como C_1 es la función de distribución conjunta del vector aleatorio (U, V) , donde U y V son variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el $(0, 1)$, y como se cumple que $E[U] = E[V] = 1/2$, entonces

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \iint_{\mathbf{I}^2} dC_1(u, v) - \iint_{\mathbf{I}^2} u dC_1(u, v) \\ &\quad - \iint_{\mathbf{I}^2} v dC_1(u, v) + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

y sustituyendo esto en (4.3) obtenemos que

$$Q = 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

■

Observemos que, si en la demostración del Teorema 4.1.2 intercambiamos a (X_1, Y_1) por (X_2, Y_2) y viceversa, llegamos a que $Q = 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1$.

Corolario 4.1.3. Sean C_1, C_2 y Q como en el Teorema 4.1.2. Entonces,

- i. Q es simétrica, es decir, $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.
- ii. Q es creciente en cada argumento, es decir, si $C_1 \prec C'_1$ y $C_2 \prec C'_2$, entonces

$$Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2).$$

iii. Las cópulas se pueden sustituir por cópulas de supervivencia, es decir,

$$Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2).$$

Ejemplo 4.1.4. Sean W, M la cotas de Fréchet-Hoeffding y Π la cópula producto. Primero notemos que si g es una función integrable con dominio igual a \mathbf{I}^2 , entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{I}^2} g(u, v) dM(u, v) &= \int_0^1 g(u, u) du, \\ \iint_{\mathbf{I}^2} g(u, v) dW(u, v) &= \int_0^1 g(u, 1-u) du \end{aligned}$$

ya que el soporte de M está en la diagonal $u = v$ y el soporte de W está en la diagonal secundaria $v = 1 - u$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Q(M, M) &= 4 \iint_{\mathbf{I}^2} M(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1, \\ Q(M, \Pi) &= 4 \iint_{\mathbf{I}^2} \Pi(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 du - 1 = -1/3, \\ Q(M, W) &= \iint_{\mathbf{I}^2} W(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_{1/2}^1 (2u - 1) du - 1 = 0, \\ Q(W, W) &= \iint_{\mathbf{I}^2} W(u, v) dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = 0, \end{aligned}$$

$$Q(W, \Pi) = \iint_{\mathbf{I}^2} \Pi(u, v) dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1-u) du - 1 = -1/3.$$

Por último, como $d\Pi(u, v) = du dv$, entonces

$$Q(\Pi, \Pi) = \iint_{\mathbf{I}^2} \Pi(u, v) d\Pi(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv du dv - 1 = 0.$$

Sea C una cópula arbitraria. Como $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$ para toda u, v en \mathbf{I} , es decir, $W \prec C \prec M$, entonces $-1 \leq Q(C, C) \leq 1$, ya que por el inciso ii del Corolario 4.1.3 y por el Ejemplo 4.1.4, sabemos que

$$-1 = Q(W, W) \leq Q(C, C) \leq Q(M, M) = 1.$$

También se cumple por los incisos i y ii del Corolario 4.1.3 y por el Ejemplo 4.1.4, lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= Q(W, M) \leq Q(C, M) \leq Q(M, M) = 1, \\ -1 &= Q(W, W) \leq Q(C, W) \leq Q(W, M) = 0, \\ -\frac{1}{3} &= Q(W, \Pi) \leq Q(C, \Pi) \leq Q(M, \Pi) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Corolario 4.1.5. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C . Entonces, τ_{XY} , la versión poblacional de la tau de Kendall para X y Y , está dada por

$$\tau_{XY} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \text{E}[C(U, V)] - 1, \quad (4.4)$$

donde U y V son variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el $(0, 1)$, cuya función de distribución conjunta es C .

Ahora veamos cómo se simplifica la tau de Kendall cuando la cópula es arquimediana.

Corolario 4.1.6. Sean X y Y variables aleatorias tales que su cópula C es arquimediana con generador φ . Entonces,

$$\tau_{XY} = \tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (4.5)$$

Demostración: Sean U y V variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0, 1)$ y cuya función de distribución conjunta es C . Sea K_C la función de distribución de $C(U, V)$; entonces por (4.4) llegamos a que

$$\tau_C = 4 \text{E}[C(U, V)] - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1. \quad (4.6)$$

Sea $u = t$ y $dv = dK_C(t)$; entonces $du = dt$ y $v = K_C(t)$, e integrando por partes obtenemos que

$$\int_0^1 t dK_C(t) = tK_C(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt = 1 - \int_0^1 K_C(t) dt. \quad (4.7)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.6) obtenemos que

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt, \quad (4.8)$$

pero por la ecuación (3.25), sabemos que $K_C(t) = t - \varphi(t)/\varphi'(t^+)$ para toda t en \mathbf{I} . Por lo tanto, sustituyendo a $K_C(t)$ en (4.8)

$$\begin{aligned}\tau_C &= 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 3 - 2 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} dt \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} dt,\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.1.7. Sean C_θ una cópula de la familia Clayton, definida en el Ejemplo 3.2.8. Entonces, para θ en $[-1, \infty) \setminus \{0\}$, tenemos que para toda t en \mathbf{I} ,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} &= \frac{t^{-\theta} - 1}{-t^{-\theta-1}} \\ &= \frac{1 - t^\theta}{\theta t^\theta} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\frac{-1}{t^{\theta+1}}}.\end{aligned}$$

Como $C_0 = \Pi$, entonces $\varphi_0(t) = -\ln(t)$ para toda t en \mathbf{I} , y en consecuencia

$$\varphi_0(t)/\varphi'(t) = t \ln(t)$$

para toda t en \mathbf{I} .

Con todo esto, para θ en $[-1, \infty) \setminus \{0\}$ y por el Corolario 4.1.6 podemos calcular la tau de Kendall de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{t^{\theta+2}}{\theta+2} \Big|_0^1 - \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) \\ &= 1 - \frac{2}{\theta+2} \\ &= \frac{\theta}{\theta+2},\end{aligned}$$

mientras que, para $\theta = 0$, integrando por partes obtenemos que

$$\tau_0 = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt = 1 + 4 \int_0^1 t \ln(t) dt = 1 + 4 \frac{-1}{4} = 0,$$

que coincide con lo que hicimos en el Ejemplo 4.1.4.

4.2. Rho de Spearman

La **rho de Spearman** es otra medida de asociación basada en concordancia y discordancia. La versión poblacional se obtiene de la siguiente forma: sean (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (X_3, Y_3) vectores aleatorios independientes de variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , con marginales F y G , y cópula C . Entonces, la versión poblacional de la rho de Spearman se define como algo proporcional a la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia de los dos vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3) . Sabemos que (X_1, Y_1) tiene función de distribución conjunta H con marginales F y G , mientras que (X_2, Y_3) tiene función de distribución igual a $F(x)G(y)$ para toda x, y en \mathbb{R} , ya que son independientes, es decir,

$$\rho = \rho_{XY} = 3(\text{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \text{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]).$$

De hecho, obtenemos el mismo resultado si tomamos al vector (X_3, Y_2) , ya que tienen la misma función de distribución. Notemos que, por la independencia, la cópula de (X_2, Y_3) es Π .

Teorema 4.2.1. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C . Entonces,

$$\begin{aligned} \rho_{XY} = \rho_C &= 3 Q(C, \Pi) \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uv \, dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C(u, v) \, du \, dv - 3 \end{aligned}$$

Demostración: Por el Teorema 4.1.2, sabemos que

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= 3(\text{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \text{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \\ &= 3 Q(C, \Pi) \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} \Pi(u, v) \, dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uv \, dC(u, v) - 3. \end{aligned}$$

Además, sabemos, por el inciso i del Corolario 4.1.3, que $Q(C, \Pi) = Q(\Pi, C)$, por lo tanto se cumple

$$\rho_{XY} = 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C(u, v) \, du \, dv - 3.$$

■

Como $-1/3 \leq Q(C, \Pi) \leq 1/3$, para cualquier cópula C , entonces el coeficiente que normaliza a $Q(C, \Pi)$ es 3, por lo que

$$-1 \leq \rho_C = 3 Q(C, \Pi) \leq 1.$$

Ejemplo 4.2.2. Sean $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta \geq 1$. Entonces,

$$C_{\alpha\beta}(u, v) = \alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v) + \beta W(u, v)$$

es miembro de la **familia de cópulas de Fréchet**.

Primero notemos que, por el Ejemplo 1.1.13, como α, β y $1 - \alpha - \beta$ son números positivos, $\alpha + \beta + 1 - \alpha - \beta = 1$, y M, W y Π son cópulas, entonces $C_{\alpha\beta}$, la suma convexa de M, W y Π , es una cópula.

Por el Teorema 4.2.1 y el Ejemplo 4.1.4 podemos calcular $\rho_{\alpha\beta}$, la rho de Spearman de la cópula $C_{\alpha\beta}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} = 3 Q(C_{\alpha\beta}, \Pi) &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C_{\alpha\beta}(u, v) \, du \, dv - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} (\alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v) + \beta W(u, v)) \, du \, dv - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} \alpha M(u, v) \, du \, dv + 12 \iint_{\mathbf{I}^2} (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v) \, du \, dv \\ &\quad + 12 \iint_{\mathbf{I}^2} \beta W(u, v) \, du \, dv - 3 \\ &= 3\alpha Q(M, \Pi) + 3(1 - \alpha - \beta)Q(\Pi, \Pi) + 3\beta Q(W, \Pi) \\ &= \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Definición 4.2.3. Una medida numérica κ de asociación entre X y Y , dos variables aleatorias continuas con cópula C , es **medida de concordancia** si satisface las siguientes propiedades:

1. $\kappa_{X,Y}$ está definida para toda pareja X, Y de variables aleatorias continuas.
2. Debe cumplir que $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ y $\kappa_{X,-X} = -1$.
3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
4. Si X y Y son independientes, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$.
5. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{Y,-X} = -\kappa_{X,Y}$.
6. Si C_1 y C_2 son dos cópulas tales que $C_1 \prec C_2$, entonces $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$.
7. Sea $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tal que para toda n en los naturales C_n es la cópula del vector (X_n, Y_n) . Si $C_n \rightarrow C$ cuando $n \rightarrow \infty$ puntualmente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Teorema 4.2.4. Si X y Y son variables aleatorias continuas, con cópula C , entonces τ_{XY} y ρ_{XY} son medidas de concordancia.

La demostración del teorema anterior se encuentra en Nelsen [17].

Recordemos que si tenemos X, Y variables aleatorias continuas, entonces la **covarianza de** (X, Y) , denotada por $\text{Cov}(X, Y)$, y el **coeficiente de correlación**, denotado por $\text{Cor}(X, Y)$, son

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \text{E}[XY] - \text{E}[X]\text{E}[Y] \\ \text{Cor}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{(\text{Var}[X]\text{Var}[Y])^{1/2}} \end{aligned}$$

Notemos que si C es una cópula, entonces existen U, V variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el $(0, 1)$, de manera que

$$\text{E}[U] = 1/2 = \text{E}[V] \quad \text{y} \quad \text{Var}[U] = 1/12 = \text{Var}[V].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \rho_C = 3 Q(C, \Pi) &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uv \, dC(u, v) - 3 \\
 &= 12\mathbb{E}[UV] - 3 \\
 &= \frac{\mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]}{1/12} = \text{Cor}(U, V).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para X y Y variables aleatorias continuas, la rho de Spearman coincide con el coeficiente de correlación de las variables aleatorias $U = F(X)$ y $V = G(Y)$.

También se puede demostrar (ver Nelsen [17]) que si X y Y son variables aleatorias continuas y ρ y τ son la rho de Spearman y la tau de Kendall de (X, Y) , respectivamente, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq 3\tau - 2\rho \leq 1, \\
 \frac{1 + \rho}{2} &\geq \left(\frac{1 + \tau}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

y

$$\frac{1 - \rho}{2} \leq \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^2.$$

Capítulo 5

Asociatividad de cópulas discretas

Este capítulo está basado en González-Barrios [6] y en él estudiaremos la asociatividad en cópulas discretas. También analizaremos la prueba estadística sobre la asociatividad de la cópula empírica de una muestra aleatoria, que se define en el artículo mencionado.

5.1. Definiciones básicas.

El concepto de cópula discreta es un concepto que en los últimos años ha sido de gran importancia ya que su estudio nos permite hacer inferencia estadística sobre la cópula a la que en teoría pertenece una muestra aleatoria, como lo veremos más adelante. Sea $L = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, para n un número en los naturales.

Definición 5.1.1. Sea C una función de $L \times L$ en L . Decimos que C es una **cópula discreta en L** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

1. $C(i, 0) = C(0, i) = 0$ para toda i en L .
2. $C(i, n) = C(n, i) = i$ para toda i en L .
3. $C(i, j) - C(i, j') - C(i', j) + C(i', j') \geq 0$ siempre que $i' \leq i$ y $j' \leq j$, con i, i', j y j' en L .

Esta definición la dan Mayor, et al. [14] y además hacen las siguientes observaciones.

- i. Si C es una cópula discreta en L y definimos a

$$C'(a, b) = 1/n \cdot C(na, nb)$$

para toda a, b en $\{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1\}$, entonces C' es una subcópula (ver Definición 1.1.10) de $\{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1\}^2$ en $\{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1\}$.

- ii. De igual forma, si tenemos a C' una subcópula de $\{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1\}^2$ en $\{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1\}$, entonces

$$C(a, b) = nC'(a/n, b/n)$$

para toda a, b en L , es una cópula discreta en L .

Definición 5.1.2. Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matriz. Decimos que A es una **matriz de permutación de $n \times n$** si y sólo si $a_{ij} = \mathbf{1}_{\{i\}}(\pi(j))$, donde π es una permutación de L . Para el caso en el que A es la matriz de permutación de $n \times n$ tal que $a_{ij} = 1$ cuando $i + j = n + 1$, y $a_{ij} = 0$ en otro lugar, entonces A es la **matriz de permutación de Lukasiewicz de $n \times n$** .

Veamos un ejemplo de matriz de Lukasiewicz. Si $n = 3$, entonces la matriz de Lukasiewicz es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definición 5.1.3. Sean A_1, \dots, A_k , para alguna $k \geq 1$, donde A_i es una matriz de permutación de Lukasiewicz de tamaño n_i . Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & A_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_k & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

una matriz de $n \times n$, donde $n = n_1 + \dots + n_k$. A la matriz A se le conoce como la **suma ordinal de A_1, \dots, A_n** y lo denotamos por $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$.

En el artículo de Mayor, et al. [14] demuestran el siguiente resultado, la biyección entre el conjunto de las matrices de permutación de $n \times n$ y el conjunto de las cópulas discretas en L

Proposición 5.1.4. Sea C una función de L^2 en L ; entonces los siguientes incisos son equivalentes:

i. Existe $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matriz de permutación tal que

$$C(r, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \text{ o } s = 0 \\ \sum_{i \leq r} \sum_{j \leq s} a_{ij} & \text{en otro lugar.} \end{cases} \quad (5.1)$$

ii. C es una cópula discreta en L .

Demostración: Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ es una matriz de permutación y C la función de L^2 en L dada por (5.1). Veamos ahora que C es una cópula discreta; para esto basta demostrar los incisos 2 y 3 de la Definición 5.1.1, ya que el inciso 1 es directo por la definición de C en (5.1). Para toda r en $\{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} C(r, n) &= \sum_{i \leq r} \sum_{j \leq n} a_{ij} \\ &= (a_{11} + \dots + a_{1n}) + \dots + (a_{r1} + \dots + a_{rn}) \\ &= 1 + \dots + 1 = r; \end{aligned}$$

de forma análoga se demuestra que, para toda s en $\{1, \dots, n\}$, $C(n, s) = s$. Por último veamos que C cumple la propiedad 2-creciente. Sean $r' \leq r$ y $s' \leq s$, con r, r', s y s' en L , y sean k, q tales que $r - k = r'$ y $s - q = s'$; entonces

$$\begin{aligned} (C(r, s) - C(r, s')) &- (C(r', s) + C(r', s')) \\ &= (C(r, s) - C(r, s - q)) - (C(r - k, s) + C(r - k, s - q)) \\ &= \sum_{i \leq r} \sum_{s-q < j \leq s} a_{ij} - \sum_{i \leq r-k} \sum_{s-q < j \leq s} a_{ij} \\ &= \sum_{r-k < i \leq r} \sum_{s-q < j \leq s} a_{ij} \geq 0, \end{aligned}$$

por lo tanto C es cópula discreta.

Recíprocamente, sea C una cópula discreta en L y definamos a la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, donde

$$a_{ij} = C(i, j) - C(i, j-1) - C(i-1, j) + C(i-1, j-1) \quad (5.2)$$

para toda i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$. Sea r en $\{1, 2, \dots, n\}$ fijo; entonces

$$\begin{aligned} a_{r1} &= C(r, 1) - C(r, 0) - C(r-1, 1) + C(r-1, 0) = C(r, 1) - C(r-1, 1) \\ a_{r2} &= C(r, 2) - C(r, 1) - C(r-1, 2) + C(r-1, 1) \\ &\vdots \\ a_{rs} &= C(r, s) - C(r, s-1) - C(r-1, s) + C(r-1, s-1), \end{aligned}$$

para s en $\{1, 2, \dots, n\}$. Entonces,

$$a_{r1} + \dots + a_{rs} = C(r, s) - C(r-1, s), \quad (5.3)$$

para s en $\{1, 2, \dots, n\}$. En particular, si $s = n$ tenemos que

$$a_{r1} + \dots + a_{rn} = C(r, n) - C(r-1, n) = r - (r-1) = 1.$$

Por lo tanto, las entradas de cada fila de la matriz A son iguales a cero, excepto una de ellas que es igual a uno. De forma análoga se demuestra que las entradas de cada columna de la matriz A son iguales a cero, excepto una de ellas que es igual a uno. ■

Corolario 5.1.5. La correspondencia $A \rightarrow C_A$ definida por (5.1) es una biyección entre el conjunto de las matrices de permutación de $n \times n$ y el conjunto de cópulas discretas en L . Por lo tanto, existen $n!$ cópulas discretas en L .

Demostración: Sea C una cópula discreta en L , sea $A_C = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ su matriz asociada y C_{A_C} la correspondiente cópula discreta en L asociada a la matriz A_C . Entonces, para toda r, s en L , por (5.1) y (5.3),

$$\begin{aligned} C_{A_C}(r, s) &= \sum_{i \leq r} \sum_{j \leq s} a_{ij} \\ &= (a_{11} + \dots + a_{1s}) + \dots + (a_{r1} + \dots + a_{rs}) \\ &= C(1, s) + (C(2, s) - C(1, s)) + \dots + (C(r, s) - C(r-1, s)) \\ &= C(r, s). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que tenemos $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matriz de permutación, C_A la cópula discreta asociada a la matriz A y $A_{C_A} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ la matriz de permutación asociada a cópula discreta C_A . Entonces, por (5.2) y (5.1), para toda r, s en $\{1, 2, \dots, n\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} b_{rs} &= C_A(r, s) - C_A(r, s-1) - C_A(r-1, s) + C_A(r-1, s-1) \\ &= \sum_{i \leq r} \sum_{j \leq s} a_{ij} - \sum_{i \leq r} \sum_{j \leq s-1} a_{ij} - \sum_{i \leq r-1} \sum_{j \leq s} a_{ij} + \sum_{i \leq r-1} \sum_{j \leq s-1} a_{ij} \\ &= a_{rs}. \end{aligned}$$

■

Kolesárová, et al. [11] también demuestran un resultado análogo.

Definición 5.1.6. Sea C una cópula discreta en L . Si $C(i, j) = C(j, i)$ para toda i, j en L , decimos que C es **simétrica** o **conmutativa**. Si $C(C(i, j), k) = C(i, C(j, k))$ para toda i, j, k en L , decimos que C es **asociativa**.

Definición 5.1.7. Sea C una cópula discreta en L . Decimos que i es un **idempotente** de C si $C(i, i) = i$ para i en $\{1, 2, \dots, n\}$.

Notemos que, si C es una cópula discreta, entonces n siempre es idempotente de C .

Como consecuencia de la Proposición 5.1.4 y el Corolario 5.1.5, Mayor, et al. [14] mencionan el siguiente resultado.

Corolario 5.1.8. Sea C una cópula discreta en L . Entonces, C es simétrica si y sólo si A , su matriz de permutación asociada, es simétrica.

Demostración: Sea C una cópula discreta en L , simétrica. Por la Proposición 5.1.4 y el Corolario 5.1.5 sabemos que existe $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matriz de permutación asociada a C y por la simetría de C tenemos que

$$\begin{aligned} a_{rs} &= C(r, s) - C(r, s-1) - C(r-1, s) + C(r-1, s-1) \\ &= C(s, r) - C(s-1, r) - C(s, r-1) + C(s-1, r-1) \\ &= a_{sr} \end{aligned}$$

para toda r, s en $\{1, 2, \dots, n\}$. Por lo tanto, A es una matriz simétrica.

Ahora supongamos que $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ es una matriz de permutación simétrica. Por la Proposición 5.1.4 y el Corolario 5.1.5 sabemos que existe C una cópula discreta en L asociada a A . Por (5.1) y la simetría de A tenemos que

$$C(r, s) = \sum_{i \leq r} \sum_{j \leq s} a_{ij} = \sum_{j \leq s} \sum_{i \leq r} a_{ji} = C(s, r),$$

para toda r, s en L . ■

Por lo que respecta a las cópulas discretas asociativas, Mayor, et al. [14] las caracterizan a través de la matriz asociada como lo vemos en el siguiente resultado.

Proposición 5.1.9. Si C es una cópula discreta en L , con n su único idempotente. Entonces, C es asociativa si y sólo si la matriz asociada a C es de Lukasiewicz

Demostración: La cópula discreta asociada a la matriz de $n \times n$ de Lukasiewicz es la restricción de W en L , por lo tanto es asociativa.

Supongamos que C es una cópula discreta asociativa en L con n su único idempotente y veamos que su matriz asociada es la de Lukasiewicz. Sea A la matriz asociada a C . Si $n = 1$ la demostración se sigue ya que $A = [1]$. Analicemos el caso $n > 1$.

Primero supongamos que $a_{1j} = 1$ para alguna j en $\{1, \dots, n-1\}$. Por (5.1) sabemos que

$$C(1, j) = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1j} = 1,$$

y como $C(1, n) = 1$ por la definición de cópula discreta, entonces a_{1j} es la única entrada de A que es diferente de 0. Además, por la asociatividad de la cópula,

$$C(1, C(j, j)) = C(C(1, j), j) = C(1, j) = 1,$$

pero esto es una contradicción, ya que por hipótesis, n es el único idempotente de C y esto implica que $C(j, j) < j$; or lo tanto

$$C(1, C(j, j)) = \sum_{l=1}^{C(j,j)} a_{1l} < a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1j} = 1.$$

Entonces, $a_{1j} = 0$ para toda j en $\{1, \dots, n-1\}$, de donde $a_{1n} = 1$.

Ahora supongamos que $a_{i1} = 1$ para alguna i en $\{1, \dots, n-1\}$. Por (5.1) sabemos que

$$C(i, 1) = a_{11} + a_{21} + \dots + a_{i1} = 1.$$

Como $C(n, 1) = 1$ por la definición de cópula discreta, entonces a_{i1} es la única entrada de A que es diferente de 0; además, por la asociatividad de la cópula

$$C(C(i, i), 1) = C(i, C(i, 1)) = C(i, 1) = 1,$$

pero esto es una contradicción, ya que por hipótesis, n es el único idempotente de C . Entonces $C(i, i) < i$, y por lo tanto

$$C(C(i, i), 1) = \sum_{l=1}^{C(i, i)} a_{l1} < a_{11} + a_{21} + \dots + a_{i1} = 1,$$

de donde $a_{i1} = 0$ para toda i en $\{1, \dots, n-1\}$, y por lo tanto $a_{n1} = 1$.

Sea i en $\{1, 2, \dots, n-1\}$ fija y sea $l = n+1-i$. Supongamos que $a_{il} = 1$ y $a_{ij} = 0$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n+1-i\}$, y que $a_{li} = 1$ y $a_{lj} = 0$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Debemos demostrar que para $i+1$ se cumple que $a_{i+1, n-i} = 1$, $a_{i+1, j} = 0$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n-i\}$, $a_{n-i, i+1} = 1$ y $a_{n-i, j} = 0$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i+1\}$.

Por la Definición 5.1.1, sabemos que $C(m, n) = m$ para toda m en $\{0, 1, \dots, n\}$; entonces por (5.1) y la hipótesis de inducción

$$C(i+1, n-1) = \sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{n-1} a_{rs} = i. \quad (5.4)$$

Notemos que por la hipótesis de inducción se cumple que $a_{i+1, m} = 0$, para toda m en $\{n-i+1, n-i+2, \dots, n\}$. Supongamos que $a_{i+1, j} = 1$ para alguna j en $\{1, 2, \dots, n-i-1\}$; entonces por la hipótesis de inducción $a_{i+1, m} = 0$, para toda m en $\{1, 2, \dots, j-1\}$. Además, por (5.1) tenemos que

$$C(i+1, j) = \sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^j a_{rs} = a_{i+1, j} = 1,$$

pero esto es una contradicción, ya que, por (5.4) y la asociatividad de C tendríamos que

$$\begin{aligned}
 1 = C(i+1, j) &= C(i+1, C(j+1, n-1)) \\
 &= C(C(i+1, j+1), n-1) \\
 &= C(1, n-1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_{i+1, j} = 0$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n-i-1\}$ y por la hipótesis de inducción sabemos que $a_{i+1, j} = 0$ para toda j en $\{n-i+1, n-i+2, \dots, n\}$, de donde $a_{i+1, n-i} = 1$. Análogamente se demuestra que $a_{n-i, i+1} = 1$ y $a_{n-i, j} = 0$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i+1\}$.

Por lo tanto, A es una matriz de Lukasiewicz. ■

Proposición 5.1.10. Sea C una cópula discreta en L y A la matriz de permutación asociada a C . Entonces, C es asociativa si y sólo si A es suma ordinal de matrices de Lukasiewicz.

Demostración: Supongamos que $A = (a_{ij})_{i, j=1}^n$, la matriz asociada a C , una cópula discreta, es una suma ordinal de matrices de Lukasiewicz; entonces $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$. La demostración la haremos por inducción. El caso base es la Proposición 5.1.9. Supongamos que la cópula discreta asociada a la matriz $A_1 \oplus \dots \oplus A_{k-1}$ es asociativa y denotemos por C_1 a esta cópula. Para demostrar que C es asociativa lo haremos por casos; sean n_1 y n_2 números enteros tales que $A_1 \oplus \dots \oplus A_{k-1}$ es una matriz de $n_1 \times n_1$ y A_k es una matriz de $n_2 \times n_2$. Primer supongamos que $r, s, t \leq n_1$, entonces

$$C(r, C(s, t)) = C_1(r, C_1(s, t))$$

y como C_1 es asociativa por la hipótesis de inducción, se tiene que C es asociativa en este caso.

Ahora veamos el caso cuando $r, s \leq n_1$ y $t > n_1$, en el cual $C(r, s) = C_1(r, s) \leq n_1$ y

$$C(s, t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t a_{ij} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} = C_1(s, n_1) = s.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} C(C(r, s), t) &= \sum_{i=1}^{C(r,s)} \sum_{j=1}^t a_{ij} = \sum_{i=1}^{C_1(r,s)} \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} \\ &= C_1(C_1(r, s), n_1) \\ &= C_1(r, s) \\ &= C(r, s), \end{aligned}$$

mientras que $C(r, C(s, t)) = C(r, s)$. Si $r, t \leq n_1$ y $s > n_1$, entonces

$$C(r, s) = r \quad \text{y} \quad C(s, t) = t,$$

por lo que

$$C(C(r, s), t) = C(r, t) \quad \text{y} \quad C(r, C(s, t)) = C(r, t).$$

De manera similar se demuestra para el caso $r > n_1$ y $s, t \leq n_1$. Por lo que, en este caso, C también es asociativa.

Si $r \leq n_1$ y $s, t > n_1$, entonces $C(r, s) = r$ y $C(s, t) \leq n_1$; utilizando esto llegamos a que

$$C(C(r, s), t) = \sum_{i=1}^{C(r,s)} \sum_{j=1}^t a_{ij} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} = r.$$

Además tenemos que

$$C(r, C(s, t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} = r.$$

Si $r, s > n_1$ y $t \leq n_1$, lo que implica que $C(r, s) \leq n_1$ y $C(s, t) = t$, por lo que

$$C(C(r, s), t) = \sum_{i=1}^{C(r,s)} \sum_{j=1}^t a_{ij} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^t a_{ij} = t.$$

Por otro lado,

$$C(r, C(s, t)) = C(r, t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^t a_{ij} = t.$$

Así, en este caso C también es asociativa.

Finalmente, veamos el caso cuando $r, s, t > n_1$. Sea C_2 la cópula discreta asociada a A_k ; entonces

$$C(r, s) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{ij} = n_1 + \sum_{i=n_1+1}^r \sum_{j=n_1+1}^s a_{ij} = n_1 + C_2(r - n_1, s - n_1) \leq n_1.$$

Análogamente tenemos que $C(s, t) = n_1 + C_2(s - n_1, t - n_1) \leq n_1$ y de manera similar llegamos a que

$$\begin{aligned} C(C(r, s), t) &= n_1 + C_2(C_2(r - n_1, s - n_1), t - n_1) \\ &= n_1 + C_2(r - n_1, C_2(s - n_1, t - n_1)) \\ &= C(r, C(s, t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, C es asociativa.

Ahora supongamos que C es una cópula asociativa, sea \mathcal{I} el conjunto de idempotentes no triviales de C y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Si $\mathcal{I} = \emptyset$, entonces por la Proposición 5.1.9, se sigue el resultado. Ahora veamos el caso cuando $\mathcal{I} \neq \emptyset$; supongamos que $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_k\}$, para alguna k en $\{1, 2, \dots, n-1\}$, en cuyo caso $C(i_m, i_m) = i_m$ para toda m en $\{1, \dots, k\}$. Sea A_1 la matriz de $i_1 \times i_1$ que tiene como entradas las primeras i_1 filas e i_1 columnas de A y sea C_1 la restricción de C en $\{1, \dots, i_1\}$; entonces C_1 tiene como único idempotente a i_1 , y por la Proposición 5.1.9 esto significa que A_1 es una matriz de Lukasiewicz.

De la misma forma, si tomamos A_m , para m que pertenece a $\{1, \dots, k\}$ fija, como la matriz de $(i_m - i_{m-1}) \times (i_m - i_{m-1})$ cuyas entradas son las filas y columnas de A que van de $i_{m-1} + 1$ hasta i_m , y definimos

$$C_m(r, s) = C(i_{m-1} + r, i_{m-1} + s) - i_{m-1}, \quad (5.5)$$

para toda r, s en $\{1, \dots, i_m - i_{m-1}\}$, que es la restricción de C en $\{i_{m-1} + 1, \dots, i_m\}$, entonces C_m es asociativa y su matriz asociada es A_m . Para ver que C_m es asociativa tomamos a r, s y t en $\{1, \dots, i_m - i_{m-1}\}$; entonces por la asociatividad de C y (5.5) se

cumple que

$$\begin{aligned}
C_m(C_m(r, s), t) &= C(i_{m-1} + C_m(r, s), i_{m-1} + t) - i_{m-1} \\
&= C(C(i_{m-1} + r, i_{m-1} + s), i_{m-1} + t) - i_{m-1} \\
&= C(i_{m-1} + r, C(i_{m-1} + s, i_{m-1} + t)) - i_{m-1} \\
&= C(i_{m-1} + r, C_m(s, t) + i_{m-1}) - i_{m-1} \\
&= C_m(s, C_m(s, t)).
\end{aligned}$$

Para ver que la matriz asociada es A_m , lo único que debemos notar es que para todo r, s en $\{1, \dots, i_m - i_{m-1}\}$, tenemos por la ecuación (5.5) que

$$\begin{aligned}
C_m(r, s) &= C(i_{m-1} + r, i_{m-1} + s) - i_{m-1} \\
&= \sum_{l=1}^{i_{m-1}+r} \sum_{j=1}^{i_{m-1}+s} i_{lj} - i_{m-1} \\
&= \sum_{l=1}^{i_{m-1}} \sum_{j=1}^{i_{m-1}} i_{lj} + \sum_{l=i_{m-1}+r}^{i_{m-1}+r} \sum_{j=i_{m-1}}^{i_{m-1}+s} i_{lj} - i_{m-1} \\
&= \sum_{l=i_{m-1}}^{i_{m-1}+r} \sum_{j=i_{m-1}}^{i_{m-1}+s} i_{lj};
\end{aligned}$$

por lo tanto A_m es la matriz asociada a C_m .

Finalmente, veamos que $i_m - i_{m-1}$ es el único idempotente de C_m . Por (5.5) y del hecho de que i_m es idempotente de C se sigue que

$$C_m(i_m - i_{m-1}, i_m - i_{m-1}) = C(i_m, i_m) - i_{m-1} = i_m - i_{m-1};$$

ahora supongamos que existe r en $\{1, 2, \dots, i_m - i_{m-1} - 1\}$ tal que $C_m(r, r) = r$, entonces por (5.5),

$$r + i_{m-1} = C_m(r, r) + i_{m-1} = C(r + i_{m-1}, r + i_{m-1}),$$

por lo que $r + i_{m-1}$ es idempotente de C , lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, C_m es una matriz asociativa, con matriz asociada A_m y con $i_m - i_{m-1}$ como su único idempotente. Entonces por la Proposición 5.1.9, A_m es una matriz de Lukasiewicz. Con todo esto podemos concluir que A es una suma ordinal de matrices de Lukasiewicz, es decir, $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$. ■

5.2. Cópulas empíricas, cópulas discretas y permutaciones

En esta sección veremos la relación que hay entre la cópula empírica de una muestra aleatoria, ver Nelsen [17], y la definición de cópula discreta.

Definición 5.2.1. Denotemos por $X_{[i]}$ y $Y_{[j]}$ los estadísticos de orden de la muestra aleatoria $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ que proviene de una distribución bivariada continua. La **cópula empírica** es la función C dada por

$$C\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{número de pares } (X, Y) \text{ de la muestra tales que } X \leq X_{[i]} \text{ y } Y \leq Y_{[j]}}{n}$$

En lo que resta del capítulo siempre supondremos que la muestra aleatoria $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ proviene de una distribución bivariada continua, por lo que siempre podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $X_1 < X_2 < \dots < X_n$. Entonces $X_{[i]} = X_i$ para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$. También notemos que para toda i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$, $C(i/n, j/n) = k/n$ para alguna k en $\{1, 2, \dots, n\}$.

Como la cópula empírica es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes, ya que los estadísticos de orden no se afectan, podemos suponer que $X_1 = 1, X_2 = 2, \dots, X_n = n$ y para toda k en $\{1, 2, \dots, n\}$ existe una j en $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $Y_k = j$. Sea $\sigma(i) = Y_i$; entonces σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$. Por lo tanto, la muestra aleatoria la podemos ver como $(1, \sigma(1) = Y_1), (2, \sigma(2) = Y_2), \dots, (n, \sigma(n) = Y_n)$, a la que llamaremos **muestra modificada**.

A partir de ahora estudiaremos una forma de cópula empírica totalmente equivalente a la de la Definición 5.2.1 dada por

$$C'(i, j) = \text{número de pares } (X, Y) \text{ de la muestra tales que } X \leq i \text{ y } Y \leq Y_{[j]}, \quad (5.6)$$

donde la muestra es de la forma $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$, para σ una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$. Si además definimos $C'(i, 0) = 0 = C'(0, j)$ para toda i, j en L , entonces por la Definición 5.1.1, C' es una cópula discreta en L y por la Proposición 5.1.4 existe A , una matriz de permutación de $n \times n$, que está asociada a C' .

Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria que proviene de una distribución bivariada continua. Decimos que es **simétrica** si y sólo si, para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$, si (X_i, Y_i) está en la muestra, entonces (Y_i, X_i) también está en la muestra. Sin embargo, a partir de ahora vamos a estar trabajando con la muestra modificada $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$, por lo tanto decimos que la muestra modificada es simétrica si y sólo si, para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$, si $(i, \sigma(i))$ está en la muestra, esto implica que $(\sigma(i), i)$ también está en la muestra, por lo que, $\sigma^2(i) = i$ para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Por lo tanto, una muestra es simétrica si y sólo si σ , la permutación, es de orden 2. La demostración de esto también viene en Mayor, et al. [14].

Ejemplo 5.2.2. Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria que proviene de una distribución bivariada continua, tal que $(1, n), (2, 2), \dots, (n-1, n-1), (n, 1)$ es su muestra aleatoria modificada. Primero notemos que σ , la permutación de la muestra, es de orden 2, ya que si i está en $\{2, 3, \dots, n-1\}$, $\sigma^2(i) = \sigma(i) = i$, mientras que $\sigma^2(1) = \sigma(n) = 1$ y $\sigma^2(n) = \sigma(1) = n$. Por lo mencionado anteriormente, ésta es una muestra aleatoria simétrica y su cópula empírica está dada por

$$C'(i, j) = \begin{cases} \min \{i, j\} - 1 & \text{si } 1 \leq i \text{ y } 1 < j \\ \min \{i, j\} & \text{si } i = n \text{ o } j = n. \end{cases}$$

5.3. Estadística para la asociatividad de una cópula.

Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra aleatoria modificada y C' su cópula empírica. Decimos que i en $\{1, 2, \dots, n\}$ es un **idempotente de la muestra** si i es idempotente de C' .

Supongamos que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$ son los idempotentes de la muestra $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$, entonces $C'(i_j, i_j) = i_j$ para toda j en $\{1, 2, \dots, k\}$.

Proposición 5.3.1. Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra modificada. Entonces, los

idempotentes de la muestra son $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k = n$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \{1, 2, \dots, i_1\} &= \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_1)\} \\ \{i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2\} &= \{\sigma(i_1 + 1), \sigma(i_1 + 2), \dots, \sigma(i_2)\} \\ &\vdots \\ \{i_{k-1} + 1, i_{k-1} + 2, \dots, i_k = n\} &= \{\sigma(i_{k-1} + 1), \sigma(i_{k-1} + 2), \dots, \sigma(i_k = n)\}. \end{aligned}$$

Además, para toda $1 \leq j < i_1$, $\{1, 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$, y para toda $1 \leq l \leq k$ y para cualquier $i_l + 1 \leq j < i_{l+1}$, $\{i_l + 1, i_l + 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(i_l + 1), \sigma(i_l + 2), \dots, \sigma(j)\}$.

Demostración: Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra modificada y C' su cópula empírica. Primero veamos que, por (5.6), $C'(i, i) = i$ si y sólo si hay i puntos de la muestra en $\{1, 2, \dots, i\} \times \{1, 2, \dots, i\}$, ya que para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $\sigma(i)$ está en $\{1, 2, \dots, n\}$. Como i es un idempotente de la muestra si y sólo si $C'(i, i) = i$ y por lo mencionado antes, esto ocurre si y sólo si $\{1, 2, \dots, n\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$. Por todo esto, n siempre es idempotente de la muestra.

Por lo tanto, si $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k = n$ son idempotentes de la muestra, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \{1, 2, \dots, i_1\} &= \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_1)\} \\ \{1, 2, \dots, i_2\} &= \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_2)\} \\ &\vdots \\ \{1, 2, \dots, i_k = n\} &= \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_k = n)\}. \end{aligned}$$

Como $\{1, 2, \dots, i_1\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_1)\}$ y $\{1, 2, \dots, i_2\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_2)\}$, entonces $\{i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2\} = \{\sigma(i_1 + 1), \sigma(i_1 + 2), \dots, \sigma(i_2)\}$. Esto lo podemos hacer con cada uno de los conjuntos, por lo tanto se cumple que

$$\begin{aligned} \{1, 2, \dots, i_1\} &= \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_1)\} \\ \{i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2\} &= \{\sigma(i_1 + 1), \sigma(i_1 + 2), \dots, \sigma(i_2)\} \\ &\vdots \\ \{i_{k-1} + 1, i_{k-1} + 2, \dots, i_k = n\} &= \{\sigma(i_{k-1} + 1), \sigma(i_{k-1} + 2), \dots, \sigma(i_k = n)\}. \end{aligned}$$

Supongamos que existe j en $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k = n\}$ tal que

$$\{1, 2, \dots, j\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\},$$

por lo mencionado al principio de la demostración, esto ocurre si y sólo si $C'(j, j) = j$, por lo tanto j es un idempotente, que es una contradicción. Por lo tanto, para toda j en $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k = n\}$, se tiene que $\{1, 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$. Si $i_l + 1 \leq j < i_{l+1}$, para $1 \leq l \leq k - 1$, entonces

$$\{i_l + 1, i_l + 2, \dots, i_{l+1}\} = \{\sigma(i_l + 1), \sigma(i_l + 2), \dots, \sigma(i_{l+1})\}$$

y

$$\{1, 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\},$$

por lo tanto $\{i_l + 1, i_l + 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(i_l + 1), \sigma(i_l + 2), \dots, \sigma(j)\}$. ■

Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra modificada y denotemos por K al número de idempotentes de la muestra de tamaño n . Notemos que K está en $\{1, 2, \dots, n\}$, y puede cualquiera de los valores. Si $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(n - 1) = n, \sigma(n) = 1$, entonces por la Proposición 5.3.1 como

$$\{1, 2, \dots, i\} \neq \{2, 3, \dots, i + 1\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\},$$

por lo tanto $K = 1$. Para cualquier k en $\{2, 3, \dots, n - 1\}$ fijo, si tomamos a σ de forma que

$$\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(k - 1) = k - 1, \sigma(k) = k + 1, \dots, \sigma(n - 1) = n, \sigma(n) = k,$$

como $\{i\} = \{\sigma(i)\}$ para i en $\{1, 2, \dots, k - 1\}$, y para toda j en $\{k, k + 1, \dots, n - 1\}$ se cumple que

$$\{k, k + 1, \dots, j\} \neq \{k + 1, k + 2, \dots, j + 1\} = \{\sigma(k), \sigma(k + 1), \dots, \sigma(j)\}.$$

Entonces, por la Proposición 5.3.1, $K = k$. Por último, si

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2), \dots, \sigma(n) = n,$$

entonces $\{i\} = \{\sigma(i)\}$ para i en $\{1, 2, \dots, n\}$ y por la Proposición 5.3.1, $K = n$.

Ahora definamos la estadística de asociatividad que propone González-Barrios [6], para medir la asociatividad de la muestra modificada $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$, la cual está basada en que la muestra modificada es asociativa si y sólo si su cópula empírica, dada por (5.6), es suma ordinal de matrices de permutación de Lukasiewicz, donde el número de términos de la suma está determinado por el número de idempotentes de la muestra.

Definición 5.3.2. Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra modificada con idempotentes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$. Definamos una **estadística de asociatividad** de la muestra mediante

$$A_{\pi}^n = \sum_{l=1}^k \sum_{i_{l-1}+1}^{i_l} (i_l + i_{l-1} - j + 1 - \sigma(j))^2, \quad (5.7)$$

donde $i_0 = 0$. El símbolo π denota que la estadística depende de la permutación.

Notemos que A_{π}^n mide el cuadrado de la distancia entre la muestra modificada y la suma ordinal de matrices de permutación de Lukasiewicz con idempotentes $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, por lo que A_{π}^n está midiendo la asociatividad de la muestra modificada.

Ejemplo 5.3.3. Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra modificada tal que $\sigma(j) = j$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\}$. En este caso, por la Proposición 5.3.1, $K = n$; es decir, $i_j = j$ para j en $\{1, 2, \dots, n\}$ son idempotentes y

$$\begin{aligned} A_{\pi}^n &= \sum_{l=1}^k \sum_{i_{l-1}+1}^{i_l} (i_l + i_{l-1} - j + 1 - \sigma(j))^2 \\ &= \sum_{l=1}^n (i_l + i_{l-1} - l + 1 - \sigma(l))^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la muestra modificada $(1, 1), \dots, (n, n)$ es asociativa.

Notemos que K el número de idempotentes de la muestra modificada es una variable aleatoria que depende de la distribución conjunta de (X, Y) . En el caso particular cuando $K = 1$, entonces $i_1 = n$ es el único idempotente de la muestra y en ese caso

$$A_{\pi}^n = \sum_{j=1}^n (n - j + 1 - \sigma(j))^2 = \hat{A}_{\pi}^n.$$

Este caso particular lo analizaremos más adelante. En el siguiente resultado daremos el número de permutaciones tales que $K = 1$ y $K = n$.

Proposición 5.3.4. Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ la muestra modificada, de tamaño n , donde σ es una permutación de I_n , donde $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $K_1(j)$ el número de permutaciones de una muestra modificada de tamaño j , con un solo idempotente. Entonces,

$$K_1(n) = n! - \sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!, \quad (5.8)$$

donde $K_1(1) = 1$. Además, solamente existe una permutación σ de I_n tal que $K = n$.

Demostración: La demostración la haremos por inducción. Primero supongamos que $n = 1$; en este caso, la única permutación de I_1 es $\sigma(1) = 1$, con idempotente $i_1 = 1$ y $K_1(1) = 1$. Si $n = 2$ tenemos dos permutaciones de I_2 . Cuando σ es tal que $\sigma(1) = 1$ y $\sigma(2) = 2$, entonces los idempotentes son $i_1 = 1$ e $i_2 = 2$ y el número de idempotentes es $K = 2$. Por otro lado, si σ es tal que $\sigma(1) = 2$ y $\sigma(2) = 1$, entonces el único idempotente es $i_1 = 2$ y $K = 1$. Notemos que en el caso $n = 2$

$$K_1(2) = 2! - K_1(1)(2-1)! = 1,$$

por lo tanto (5.8) se cumple para $n = 2$. Supongamos que (5.8) también se cumple para $n - 1$.

Ahora debemos demostrar que también se cumple para n . Primero veamos el número de permutaciones σ de I_n tales que el número de idempotentes es mayor a 1. Para esto debemos ver la posición de i_1 , el primer idempotente.

Notemos que, por la Proposición 5.3.1, $i_1 = 1$ si y sólo si $\sigma(1) = 1$. Entonces $\sigma(2), \dots, \sigma(n)$ no tienen restricciones, por lo tanto existen $(n-1)!$ permutaciones σ de I_n que cumplen esto. Además, como $K_1(1) = 1$, existen $K_1(1)(n-1)!$ permutaciones σ de I_n tales que $i_1 = 1$, es decir, si $i_1 = 1$ hay $K_1(1)(n-1)!$ tales que $K > 1$.

Ahora supongamos que $i_1 = k$ para $2 \leq k < n - 1$; entonces, por la Proposición 5.3.1, la permutación σ de I_n debe cumplir que

$$\{1, 2, \dots, k\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\}$$

y para toda $1 \leq j < k$, $\{1, 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$. Pero $K_1(k)$ es el número de permutaciones de I_k que cumplen esta condición, mientras que $\sigma(k+1), \dots, \sigma(n)$ no tienen restricciones. Por lo tanto, si $i_1 = k$ existen $K_1(k)(n-k)!$ permutaciones σ de I_n tales que $K > 1$.

Sumando todos los casos cuando $K > 1$, dependiendo del valor de i_1 tal que $i_1 < n$, obtenemos que el número de permutaciones σ de I_n que tienen más de un idempotente está dado por

$$\sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!,$$

y como existen $n!$ permutaciones σ de I_n , entonces

$$K_1(n) = n! - \sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!.$$

Finalmente, $K = n$ si y sólo si toda i en I_n es idempotente de la muestra modificada, pero por la Proposición 5.3.1 esto ocurre si y sólo si $\{i\} = \{\sigma(i)\}$; es decir, si $\sigma(i) = i$ para toda i en I_n . Por lo tanto, solamente existe una permutación σ de I_n tal que $K = n$. ■

Si $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ es una muestra aleatoria que proviene de una distribución bivariada continua, con cópula Π , el siguiente resultado se sigue inmediatamente por la Proposición 5.3.4.

Corolario 5.3.5. Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria continua de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas e independientes, es decir, (X, Y) tiene cópula Π . Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ la muestra modificada y K el número de idempotentes de C la cópula discreta inducida por la muestra modificada. Entonces,

$$P(K = n) = \frac{1}{n!}$$

y

$$P(K = 1) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!}{n!}.$$

Demostración: Como X y Y son independientes, esto implica que todas las permutaciones σ de I_n tienen la misma probabilidad. Entonces, por la Proposición 5.3.4 sabemos que sólo existe una permutación σ de I_n tal que $K = n$; por lo tanto

$$P(K = n) = \frac{1}{n!}.$$

En la Proposición 5.3.4 también vimos que existen $n! - \sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!$ permutaciones σ de I_n tal que $K = 1$, por lo tanto

$$P(K = 1) = \frac{n! - \sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!}{n!} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} K_1(j)(n-j)!}{n!}.$$

■

Además, González-Barrios [6] hace la observación de que $P(K = 1) \approx 1 - 2/n$, como se puede ver en la siguiente tabla:

Valores de n	$P(K = 1)$	$1 - 2/n$
1	1	-
2	0.5	0
3	0.5	0.333
4	0.5416	0.5
5	0.5916	0.6
10	0.7796	0.8
100	0.9798	0.98
200	0.989974	0.99
500	0.995956	0.996
1000	0.997999	0.998

Ahora estudiaremos algunas propiedades de la estadística de asociatividad A_π^n . La primera propiedad que vamos a ver demuestra que, en el caso de que existan más de un idempotente, A_π^n es suma de variables del mismo tipo pero de dimensiones menores o iguales a n .

Lema 5.3.6. Sea $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ la muestra modificada de tamaño n y supongamos que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$ son idempotentes. Entonces, para $l = 1, 2, \dots, k$ existe una única permutación σ_l de $\{1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\}$, donde $i_0 = 0$, tal que

$$\sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} (i_l + i_{l-1} - j + 1 - \sigma(j))^2 = \sum_{k=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - i_{l-1} - k + 1 - \sigma_l(k))^2.$$

Demostración: Para el caso $l = 1$, el resultado es trivial, ya que, si tomamos a $\sigma_1(k) = \sigma(k)$ para toda k en $\{1, 2, \dots, i_1\}$, y como $i_{l-1} = i_0 = 0$ entonces,

$$\sum_{j=1}^{i_1} (i_1 + i_0 - j + 1 - \sigma(j))^2 = \sum_{k=1}^{i_1 - i_0} (i_1 - i_0 - k + 1 - \sigma_1(k))^2.$$

Veamos ahora lo que ocurre cuando $1 < l \leq k$. Como i_{l-1} e i_l son idempotentes consecutivos y por la Proposición 5.3.1 sabemos que

$$\{i_{l-1} + 1, i_{l-1} + 2, \dots, i_l\} = \{\sigma(i_{l-1} + 1), \sigma(i_{l-1} + 2), \dots, \sigma(i_l)\}.$$

Entonces, si definimos a $\sigma_l(k) = \sigma(i_{l-1} + k) - i_{l-1}$, para k en $\{1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\}$ y hacemos el cambio de variable $j = k + i_{l-1}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - i_{l-1} - k + 1 - \sigma_l(k))^2 &= \sum_{k=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - i_{l-1} - k + 1 - (\sigma(i_{l-1} + k) - i_{l-1}))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - k + 1 - \sigma(i_{l-1} + k))^2 \\ &= \sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} (i_l + i_{l-1} - j + 1 - \sigma(j))^2. \end{aligned}$$

■

Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria bivariada de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas y sea $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ su muestra modificada. Definamos el siguiente evento:

$$J_{i_1 i_2 \dots i_k} = \{\text{Los idempotentes asociados a } \sigma \text{ son } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n\}, \quad (5.9)$$

para alguna k en $\{1, 2, \dots, n\}$. En el siguiente resultado demostramos que, condicionando en estos eventos, podemos encontrar la densidad de la variable aleatoria A_π^n .

Teorema 5.3.7. Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria bivariada de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas e independientes y sea $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ su muestra modificada. Sean $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$ los idempotentes asociados a σ e $i_0 = 0$. Entonces,

$$P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \frac{K_1(i_1)K_1(i_2 - i_1) \cdots K_1(n - i_{k-1})}{n!}, \quad (5.10)$$

donde $K_1(l)$ es el número de permutaciones τ de $\{1, 2, \dots, l\}$, con un solo idempotente, que necesariamente es l . Además, para cualquier número no negativo a

$$P(A_\pi^n = a) = \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in R_k} \sum_{\underline{b} \in B_a} \{\prod_{j=1}^k P(A_\pi^{i_j - i_{j-1}} = b_j | J_{i_1 i_2 \dots i_k})\} P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}), \quad (5.11)$$

donde

$$R_k = \{\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k) | 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n \text{ son } k \text{ enteros}\},$$

y

$$B_a = \{\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k) | b_1, b_2, \dots, b_k \geq 0 \text{ son enteros y } \sum_{j=1}^k b_j = a\}. \quad (5.12)$$

Demostración: Si $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ es la muestra modificada y el conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ son los idempotentes asociados a σ e $i_0 = 0$. Sea l en $\{1, 2, \dots, k\}$ fija; entonces por la Proposición 5.3.1 sabemos que

$$\{i_{l-1} + 1, i_{l-1} + 2, \dots, i_l\} = \{\sigma(i_{l-1} + 1), \sigma(i_{l-1} + 2), \dots, \sigma(i_l)\}$$

y para toda j en $\{1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\}$

$$\{i_{l-1} + 1, i_{l-1} + 2, \dots, i_{l-1} + j\} = \{\sigma(i_{l-1} + 1), \sigma(i_{l-1} + 2), \dots, \sigma(i_{l-1} + j)\}.$$

Si consideramos la función que mapea a $i_{l-1} + s$ en s y definimos a σ_l como en el Lema 5.3.6, entonces

$$\{1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\} = \{\sigma_l(1), \sigma_l(2), \dots, \sigma_l(i_l - i_{l-1})\}. \quad (5.13)$$

Además, para toda j en $\{1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\}$

$$\{1, 2, \dots, j\} \neq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}. \quad (5.14)$$

Por la Proposición 5.3.4 existen $K_1(i_l - i_{l-1})$ permutaciones σ_l de $\{1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\}$ que satisfacen las ecuaciones (5.13) y (5.14). Como esto se vale para toda l en $\{1, 2, \dots, k\}$, utilizando el hecho de que existen $n!$ permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ y que al ser X y Y independientes las permutaciones son equiprobables, obtenemos que

$$P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \frac{K_1(i_1)K_1(i_2 - i_1) \cdots K_1(i_k - i_{k-1})}{n!},$$

por lo tanto demostramos la ecuación (5.10).

Si a es un entero no negativo, entonces por la probabilidad condicional se cumple que

$$P(A_\pi^n = a, J_{i_1 i_2 \dots i_k}) = P(A_\pi^n = a | J_{i_1 i_2 \dots i_k})P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}).$$

Marginalizando, obtenemos que

$$\begin{aligned} P(A_\pi^n = a) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in R_k} P(A_\pi^n = a, J_{i_1 i_2 \dots i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in R_k} P(A_\pi^n = a | J_{i_1 i_2 \dots i_k})P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

pero por el Lema 5.3.6 podemos reescribir a A_π^n de tal forma que

$$A_\pi^n = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - i_{l-1} - j + 1 - \sigma_l(j))^2. \quad (5.16)$$

Si definimos a

$$A_\pi^{i_l - i_{l-1}} = \sum_{j=1}^{i_l - i_{l-1}} i_l - i_{l-1} (i_l - i_{l-1} - j + 1 - \sigma_l(j))^2,$$

para toda l en $\{1, 2, \dots, k\}$, entonces $A_\pi^n = \sum_{l=1}^k A_\pi^{i_l - i_{l-1}}$. Sustituyendo esto en (5.15) nos queda que

$$\begin{aligned} P(A_\pi^n = a) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in R_k} P(A_\pi^{i_1} + A_\pi^{i_2 - i_1} + \cdots + A_\pi^{i_k - i_{k-1}} = a | J_{i_1 i_2 \dots i_k})P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in R_k} \sum_{\underline{b} \in B_a} P(A_\pi^{i_1} = b_1, A_\pi^{i_2 - i_1} = b_2, \dots, A_\pi^{i_k - i_{k-1}} = b_k | J_{i_1 i_2 \dots i_k})P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}). \end{aligned}$$

Como σ_l solamente depende de $i_l - i_{l-1}$, entonces $A_\pi^{i_1}, A_\pi^{i_2-i_1}, \dots, A_\pi^{n-i_{k-1}}$ son condicionalmente independientes dado $J_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Por lo tanto,

$$P(A_\pi^n = a) = \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in R_k} \sum_{\underline{b} \in B_a} \{\prod_{j=1}^k P(A_\pi^{i_j-i_{j-1}} = b_j | J_{i_1 i_2 \dots i_k})\} P(J_{i_1 i_2 \dots i_k}),$$

que es la ecuación (5.11). ■

Por el Teorema 5.3.7, si σ es una permutación en I_n con dos idempotentes o más y conocemos la distribución de A_π^j para cualquier j en $\{1, 2, \dots, n-1\}$, entonces podemos encontrar $P(A_\pi^n = a)$, para cualquier \underline{i} en R_k y a un entero no negativo. Los únicos casos en los que podemos calcular $P(A_\pi^n = a)$ explícitamente es cuando σ tiene asociado solamente un idempotente, es decir, $i_1 = n$ y $K = 1$. En estos casos, debemos evaluar todas las probabilidades condicionales de la forma $P(A_\pi^n = a | J_n)$ y por la Proposición 5.3.4 sabemos que son $K_1(n)$ evaluaciones.

Lema 5.3.8. Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria bivariada de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas e independientes y sea $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ su muestra modificada. Sean $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$ los idempotentes asociados a σ e $i_0 = 0$. Entonces, el rango de A_π^n , denotado por $\text{ran}(A_\pi^n)$, está dado por

$$\text{ran}(A_\pi^n) = \left\{ 0, 2, 4, \dots, \frac{n^3 - 13n + 18}{3} \right\}.$$

Además, $P(A_\pi^n = 0) = 2^{n-1}/n!$, $P(A_\pi^1 = 0) = P(A_\pi^2 = 0) = 1$ y para $n \geq 3$ se cumple que

$$P\left(A_\pi^n = \frac{n^3 - 13n + 18}{3}\right) = \frac{2}{n!}.$$

Demostración: Sean τ_1 y τ_2 dos permutaciones de $\{1, 2, \dots, j\}$ para alguna j en \mathbb{N} ; entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j (\tau_1(k) - \tau_2(k))^2 &= \sum_{k=1}^j \tau_1(k)^2 - \sum_{k=1}^j \tau_1(k)\tau_2(k) + \sum_{k=1}^j \tau_2(k)^2 \\ &= 2\left(\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} - \sum_{k=1}^j \tau_1(k)\tau_2(k)\right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

ya que τ_1 y τ_2 son biyecciones de I_j en I_j . Por lo tanto, $\sum_{k=1}^j (\tau_1(k) - \tau_2(k))^2$ es un número no negativo par.

En la demostración del Teorema 5.3.7, en la ecuación (5.16) vimos que

$$A_\pi^n = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - i_{l-1} - j + 1 - \sigma_l(j))^2 = \sum_{l=1}^k A_\pi^{i_l - i_{l-1}}.$$

Si

$$\tau_1(j) = i_l - i_{l-1} - j + 1 \quad \text{y} \quad \tau_2(j) = \sigma(j)$$

para toda j en $\{0, 1, 2, \dots, i_l - i_{l-1}\}$, entonces $A_\pi^n = \sum_{k=1}^j (\tau_1(k) - \tau_2(k))^2$ y por (5.17) A_π^n es un entero no negativo par.

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (n - i + 1 - i)^2 &= \sum_{i=1}^n (n + 1 - 2i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((n + 1)^2 - 4i(n + 1) + 4i^2) \\ &= n(n + 1) - 2n(n + 1)^2 + \frac{4n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\ &= n(n + 1) \left(\frac{n - 1}{3} \right) \\ &= \frac{n^3 - n}{3}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

En este caso, estamos comparando las permutaciones $\tau_1(j) = n - j + 1$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir

$$\{\tau_1(1), \tau_1(2), \dots, \tau_1(n)\} = \{n, n - 1, \dots, 1\},$$

y $\tau_2(j) = j$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\}$, o equivalentemente

$$\{\tau_2(1), \tau_2(2), \dots, \tau_2(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Notemos que (5.18) es el valor máximo para $\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))$ cuando variamos σ sobre todas las permutaciones de I_n . De hecho, los términos $(n - 1)^2$ y $(1 - n)^2 = (n - 1)^2$

aparecen en la suma. Sea $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero que es menor o igual a x para cualquier x en \mathbb{R} entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (n-i+1-i)^2 &= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n+1-2i)^2 + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^n (n+1-2i)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor-1} (n+1-2(i+1))^2 + \sum_{i=0}^{n-\lfloor n/2 \rfloor-1} (n+1-2(i+\lfloor n/2 \rfloor+1))^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor-1} (n-2i-1)^2 + \sum_{i=0}^{n-\lfloor n/2 \rfloor-1} (n-2(i+\lfloor n/2 \rfloor)-1)^2. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Ahora veamos lo que ocurre con (5.19) cuando n es par y cuando n es impar. Si n es un número par, entonces $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$. Además,

$$n - 2k - 1 = 2(i + n/2) + 1 - n$$

si y sólo si $i = n/2 - 1 - k$; juntando esto con (5.19) llegamos a que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (n-i+1-i)^2 &= \sum_{i=0}^{n/2-1} (n-2i-1)^2 + \sum_{i=0}^{n-n/2-1} (n-2(i+n/2)-1)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n/2-1} (n-2i-1)^2 + \sum_{i=0}^{n/2-1} (n-2(i+n/2)-1)^2 \\
&= 2 \sum_{i=0}^{n/2-1} (n-2i-1)^2. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Por otro lado, cuando n es impar $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ y $n - 2k - 1 = 2(i + (n-1)/2) + 1 - n$ si y sólo si $i = (n-2k-1)/2$. Entonces, por (5.19) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (n-i+1-i)^2 &= \sum_{i=0}^{(n-1)/2-1} (n-2i-1)^2 + \sum_{i=0}^{n-(n-1)/2-1} (n-2(i+(n-1)/2)-1)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{(n-1)/2-1} (n-2i-1)^2 + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (n-2(i+\lfloor n/2 \rfloor)-1)^2 \\
&= 2 \sum_{i=0}^{(n-1)/2-1} (n-2i-1)^2. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (5.20) y (5.21) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - i)^2 = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (n - 2i - 1)^2. \quad (5.22)$$

En la demostración del Teorema 5.3.7, en la ecuación (5.16) vimos que

$$\begin{aligned} A_\pi^n &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{i_l - i_{l-1}} (i_l - i_{l-1} - j + 1 - \sigma_l(j))^2 \\ &= \sum_{l=1}^k A_\pi^{i_l - i_{l-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(n^3 - n)/3$ no es un valor posible para A_π^n , ya que si $\sigma(i) = i$, entonces i es idempotente para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$, por lo tanto $A_\pi^n = 0$. Ahora veamos cuál es el valor máximo que puede tomar A_π^n ; lo primero que tenemos que observar es que este máximo se alcanza cuando σ solamente tiene un idempotente. Si $K = 1$, entonces $(n - 1)^2$ no es un término en $\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))^2$ ya que esto sólo ocurre si $\sigma(1) = 1$ o $\sigma(n) = n$; si $\sigma(1) = 1$, entonces 1 y n son idempotentes y en el caso de $\sigma(n) = n$ tenemos que $n - 1$ y n son idempotentes, por lo que en los dos casos $K > 1$.

El término $(n - 2)^2$ siempre es posible en $\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))^2$, cuando $i_1 = n$ es el único idempotente de σ . Veamos cómo debe de ser σ , una permutación de I_n con un único idempotente y que cumpla lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))^2 = 2(n - 2)^2 + \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (n - 1 - 2i)^2. \quad (5.23)$$

Primero supongamos que n es un número impar, es decir, $n = 2l + 1$ para alguna l en \mathbb{N} . Para esto, σ debe satisfacer la siguiente condición

$$\text{Si } \sigma(i) = s \text{ entonces } \sigma(n - \sigma(i) + 1) = n - i + 1 \text{ para toda } i \text{ en } I_n. \quad (5.24)$$

Primero definamos a $\sigma(1) = 2$, entonces por (5.24),

$$\sigma(n - 2 + 1) = \sigma(n - 1) = n.$$

Entonces,

$$(n - 1 + 1 - \sigma(1))^2 = (n - 2)^2 \quad \text{y} \quad (n - (n - 1) + 1 - \sigma(n - 1))^2 = (2 - n)^2.$$

Ahora, para $i = 2j$, donde $1 \leq j < \lfloor n/2 \rfloor = l$, definamos a $\sigma(2j) = 2j + 2$. Así, por (5.24),

$$\sigma(n - \sigma(2j) + 1) = \sigma(n - 2j - 1) = n - 2j + 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (n - 2j + 1 - \sigma(2j))^2 &= (n - 4j - 1)^2 \\ &= (2l - 4j)^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (n - (n - 2j - 1) + 1 - \sigma(n - 2j - 1))^2 &= (2j + 2 - (n - 2j + 1))^2 \\ &= (4j + 1 - l)^2 = (4j - 2l)^2. \end{aligned}$$

Si $i = 2j + 1$ para $1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor = l$, definamos a $\sigma(2j + 1) = 2j - 1$; así, por (5.24),

$$\sigma(n - \sigma(2j + 1) + 1) = \sigma(n - 2j + 2) = n - 2j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (n - (2j + 1) + 1 - \sigma(2j + 1))^2 &= (n - 2j - (2j - 1))^2 \\ &= (n - 4j + 1)^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (n - (n - 2j + 2) + 1 - \sigma(n - 2j + 2))^2 &= (2j - 1 - (n - 2j))^2 \\ &= (4j - 1 - n)^2 \\ &= (4j - 2 - 2l)^2. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que σ tiene más de un idempotente, es decir $i_1 = j < n$; entonces por la Proposición 5.3.1 se cumple que $\{1, 2, \dots, i_1\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_1)\}$ pero esto es una contradicción y veremos la razón por casos. Si $i_1 = 1$, esto implica que $\sigma(i_1) = 2$ y $\{1\} \neq \{2\}$; cuando $i_1 > 1$ y es un número par, entonces $i_1 < \sigma(i_1) = i_1 + 2$; finalmente, si $i_1 > 1$ y es un número impar, entonces, $i_1 < \sigma(i_1 - 1) = i_1 + 1$. Por lo tanto, σ satisface (5.23) y su único idempotente es $i_1 = n$.

Veamos cómo debe ser σ para que cumpla (5.23) cuando n es un número par, es decir, $n = 2l$ para alguna l en \mathbb{N} . En este caso definimos a σ de tal forma que

$$\sigma(1) = 2, \sigma(n) = n - 1 \quad \text{y} \quad \sigma(2j) = 2j + 2$$

para $1 \leq j < \lfloor n/2 \rfloor = l$, y $\sigma(2j + 1) = 2j - 1$ para $1 \leq j < \lfloor n/2 \rfloor = l$. Por lo tanto, σ satisface (5.23) y su único idempotente es $i_1 = n$. Para ver que σ solamente tiene un idempotente, se demuestra de forma análoga al caso anterior. Por lo tanto, σ satisface (5.23) y su único idempotente es $i_1 = n$.

Por las ecuaciones (5.18), (5.22) y (5.23) podemos obtener el valor máximo que puede tomar A_π^n . En (5.18) vimos cual es el valor máximo de $\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))^2$, para σ una permutación de I_n . Luego, en (5.22) vimos que se podía expresar de otra forma. Después hicimos la observación de que los términos $(n - 1)^2$ y $(1 - n)^2$ no aparecen en $\sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))^2$ cuando σ tiene un único idempotente. Por otro lado, en (5.23) definimos a σ de tal forma que tiene un único idempotente que coincide con (5.18) pero en lugar de que aparezcan los términos $(n - 1)^2$ y $(1 - n)^2$, aparecen $(n - 2)^2$ y $(2 - n)^2$. Sea M_n el valor máximo que toma A_π^n , entonces

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{i=1}^n (n + 1 - 2i)^2 - 2(n - 1)^2 + 2(n - 2)^2 \\ &= \frac{n^3 - n}{3} - 2(n - 1)^2 + 2(n - 2)^2 \\ &= \frac{n^3 - 13n + 18}{3}. \end{aligned}$$

Aún más, se puede demostrar que A_π^n puede tomar cualquier valor par entre 0 y M_n , por lo tanto $\text{ran } A_\pi^n = \{0, 2, \dots, M_n\}$.

Para cualquier $n \geq 1$, si σ es la permutación definida antes, donde su estadística asociada alcanza el máximo y definimos a σ' otra permutación de I_n tal que $\sigma(\sigma'(i)) = i$ para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\{1, 2, \dots, j\} = \{\sigma(\sigma'(1)), \sigma(\sigma'(2)), \dots, \sigma(\sigma'(j))\}, \quad (5.25)$$

para toda j en $\{1, 2, \dots, n\}$. Por la definición, σ' tiene un único idempotente, ya que si tuviera más de un idempotente, es decir $i_1 < n$, sabemos por la Proposición 5.3.1 que

$\{1, 2, \dots, i_1\} = \{\sigma'(1), \sigma'(2), \dots, \sigma'(i_1)\}$ y por (5.25) sabemos que

$$\{1, 2, \dots, i_1\} = \{\sigma(\sigma'(1)), \sigma(\sigma'(2)), \dots, \sigma(\sigma'(i_1))\};$$

entonces $\{\{1, 2, \dots, i_1\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i_1)\}\}$ pero esto es una contradicción ya que i_1 no puede ser idempotente de σ . Por la definición de σ' y la conmutatividad de la suma llegamos a que

$$\begin{aligned} A_\pi^n &= \sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma'(i))^2 = \sum_{i=1}^n (n - \sigma(\sigma'(i)) + 1 - \sigma'(i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (n - \sigma'(i) + 1 - \sigma(\sigma'(i)))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (n - i + 1 - \sigma(i))^2 \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que, para cualquier otra permutación de I_n , la estadística asociada a esa permutación, es estrictamente menor a M_n . Por todo lo anterior y como todas las permutaciones son equiprobables, ya que X y Y son variables aleatorias continuas e independientes, tenemos que $P(A_\pi^n = M_n) = 2/n!$. Finalmente, si σ es una permutación de I_n , con k idempotentes, para alguna k en $\{1, 2, \dots, n\}$, como $i_k = n$, entonces los restantes $k - 1$ idempotentes se pueden seleccionar en

$$\binom{n-1}{k-1}$$

formas diferentes, y para cada selección de idempotentes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$ solamente existe una permutación σ tal que $A_\pi^n = 0$. Entonces, por el Teorema del binomio existen

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

casos tales que $A_\pi^n = 0$; lo implica que

$$P(A_\pi^n = 0) = 2^{n-1}/n!.$$

Por lo tanto, $P(A_\pi^1 = 0) = 1$ y $P(A_\pi^2 = 0) = 2/2 = 1$. ■

Observemos que, por el Lema 5.3.8, la ecuación (5.12) del Teorema 5.3.7 se puede reescribir como

$$B_a = \left\{ \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k) \mid b_1, b_2, \dots, b_k \geq 0 \text{ son enteros pares y } \sum_{j=1}^k b_j = a \right\},$$

donde a es un número entero par no negativo.

Ahora estudiaremos una estadística que está relacionado con A_π^n y que definimos como

$$\hat{A}_\pi^n = \sum_{j=1}^n (n - j + 1 - \sigma(j))^2. \quad (5.26)$$

Notemos que si $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ es una muestra modificada que sólo tiene un idempotente asociado a la permutación σ de I_n , es decir, $K = 1$, entonces $A_\pi^n = \hat{A}_\pi^n$. Veamos algunas propiedades de \hat{A}_π^n , bajo independencia.

Proposición 5.3.9. Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria bivariada de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas e independientes, y sea $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ su muestra modificada. Entonces,

$$E(\sigma(j)^k) = \frac{\sum_{l=1}^n l^k}{n} \quad \text{para toda } k \geq 1, \quad (5.27)$$

$$E(\sigma(j)\sigma(k)) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} \quad \text{para toda } 1 \leq j \neq k \leq n. \quad (5.28)$$

Además,

$$E(\hat{A}_\pi^n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \quad (5.29)$$

y

$$V(\hat{A}_\pi^n) = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)}{36}. \quad (5.30)$$

Demostración: Sea $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ la muestra modificada de dos variables aleatorias continuas e independientes; entonces toda permutación σ de I_n tiene probabilidad $1/n!$. Esto implica que para toda j en I_n ,

$$P(\sigma(j) = i) = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

Además, si $1 \leq j, k \leq n$ con $j \neq k$, entonces

$$P(\sigma(j) = i, \sigma(k) = l) = \begin{cases} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leq i \neq l \leq n, \\ 0 & \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

Por lo tanto, para toda $k \geq 1$

$$E(\sigma(j)^k) = \sum_{i=1}^n i^k P(\sigma(j) = i) = \sum_{i=1}^n \frac{i^k}{n}.$$

En particular,

$$E(\sigma(j)) = (n+1)/2 \quad \text{y} \quad E(\sigma(j)^2) = (n+1)/2. \quad (5.31)$$

Por otro lado, si j, k pertenecen a I_n con $j \neq k$, entonces

$$\begin{aligned} E(\sigma(j)\sigma(k)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1, l \neq i}^n \frac{il}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n i \left(\frac{n(n+1)}{2} - i \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}. \end{aligned}$$

Como $\tau(j) = n - j + 1$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\}$ y σ son permutaciones de I_n , entonces podemos reescribir a \hat{A}_π^n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{A}_\pi^n &= \sum_{j=1}^n (n - j + 1 - \sigma(j))^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \tau(j)^2 - 2 \sum_{j=1}^n \tau(j)\sigma(j) + \sum_{j=1}^n \sigma(j)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1)^2 + 2 \sum_{j=1}^n j\sigma(j) \\ &= 2 \sum_{j=1}^n j\sigma(j) - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por las ecuaciones (5.31) y (5.32) tenemos que

$$\begin{aligned}
E(\hat{A}_\pi^n) &= 2 \sum_{j=1}^n jE(\sigma(j)) - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
&= n(n+1) \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n+2}{3} \right) \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Si definimos a $C_n = n(n+1)(n+2)$, entonces por (5.32)

$$\begin{aligned}
E((\hat{A}_\pi^n)^2) &= 4 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jkE(\sigma(j)\sigma(k)) - 4C_n \sum_{j=1}^n jE(\sigma(j)) + C_n^2 \\
&= 4 \sum_{j=1}^n j^2E(\sigma(j)^2) + 4 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n jkE(\sigma(j)\sigma(k)) \\
&\quad - 4C_n \sum_{j=1}^n jE(\sigma(j)) + C_n^2. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Analicemos por separado cada uno de los sumandos de (5.33). Primero veamos que, por (5.31),

$$\begin{aligned}
4 \sum_{j=1}^n j^2E(\sigma(j)^2) &= 4 \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)^2(2n+1)^2}{9}, \tag{5.34}
\end{aligned}$$

mientras que, por (5.28),

$$\begin{aligned}
4 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n jkE(\sigma(j)\sigma(k)) &= 4 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n jk \frac{(n+1)(3n+2)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{3} \sum_{j=1}^n j \left(\frac{(n+1)}{2} - j \right) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{3} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\
&= \frac{n(n+1)^2(3n+2)}{3} \left(\frac{n(n+1)}{4} - \frac{(2n+1)}{6} \right) \tag{5.35}
\end{aligned}$$

y también llegamos a que

$$-4C_n \sum_{j=1}^n jE(\sigma(j)) = -4C_n n(n+1)^2 = -\frac{n^2(n+1)^3(n+2)}{3}. \quad (5.36)$$

Por la definición de C_n y sustituyendo (5.34), (5.35) y (5.36) en la ecuación (5.33) llegamos a que

$$\begin{aligned} E((\hat{A}_\pi^n)^2) &= \frac{n(n+1)^2(2n+1)^2}{9} + \frac{n(n+1)^2(3n+2)}{3} \left(\frac{n(n+1)}{4} - \frac{(2n+1)}{6} \right) \\ &\quad - \frac{n^2(n+1)^3(n+2)}{3} + \frac{n^2(n+1)^2(n+2)^2}{9} \\ &= \frac{n(n+1)^2}{36} [4(2n+1)^2 + 3n(n+1)(3n+2) \\ &\quad - 2(3n+2)(2n+1) - 12n(n+1)(n+2) + 4n(n+2)^2] \\ &= \frac{n^3(n+1)^2(n-1)}{36}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Finalmente, por (5.29) y (5.37)

$$\begin{aligned} V(\hat{A}_\pi^n) &= E((\hat{A}_\pi^n)^2) - (E(\hat{A}_\pi^n))^2 \\ &= \frac{n^3(n+1)^2(n-1)}{36} - \frac{n^2(n+1)^2(n-1)^2}{36} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(n-1)}{36} (n - (n-1)) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(n-1)}{36}. \end{aligned}$$

■

Sea τ una permutación de I_n y $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ una muestra modificada, y definamos a $\tilde{A}_\pi^n = \sum_{j=1}^n (\tau(j) - \sigma(j))^2$. Notemos que para el caso particular cuando $\tau(j) = n - j + 1$, se cumple que $\tilde{A}_\pi^n = \hat{A}_\pi^n$. Ahora veamos algunas propiedades sobre la distribución de \tilde{A}_π^n .

Proposición 5.3.10. Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria bivarida de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas e independientes y sea $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ su muestra modificada. Sea τ una permutación de I_n , fija. Entonces,

$$\tilde{A}_\pi^n \stackrel{d}{=} \hat{A}_\pi^n, \quad (5.38)$$

donde $\stackrel{d}{=}$ significa que son iguales en distribución. Sea $Y_i = 2(R_n - i\sigma(i))$ para i en $\{1, 2, \dots, n\}$, donde $R_n = (n+1)(2n+1)/6$. Entonces, las covarianzas $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$ y las correlaciones $\rho(Y_i, Y_j)$ están dadas por

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{-(n+1)}{3}ij \quad \text{y} \quad \rho(Y_i, Y_j) = \frac{-1}{(n-1)}, \quad (5.39)$$

para toda i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$. Aún más, \hat{A}_π^n es una variable aleatoria simétrica respecto a $n(n+1)(n-1)/6$.

Demostración: Primero notemos que podemos reescribir a \tilde{A}_π^n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\pi^n &= \sum_{j=1}^n (\tau(j) - \sigma(j))^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \tau(j)^2 - 2 \sum_{j=1}^n \tau(j)\sigma(j) + \sum_{j=1}^n \sigma(j)^2 \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \sum_{j=1}^n \tau(j)\sigma(j) \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \sum_{k=1}^n k\sigma'(k), \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde la última ecuación se sigue de reindexar los términos $\tau(j)\sigma(j)$ para toda j en $\{1, 2, \dots, n\}$, en orden creciente respecto a los valores de $\tau(j)$. Además, σ' sigue siendo una permutación de I_n . De (5.40) se sigue que la distribución de \tilde{A}_π^n no depende de τ , entonces

$$\hat{A}_\pi^n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n (i - \sigma(i))^2 = \sum_{i=1}^n 2(R_n - i\sigma(i)) = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (5.41)$$

Por la ecuación (5.27) de la Proposición 5.3.9 llegamos a que

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= 2R_n - 2iE(\sigma(i)) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{3} - (n+1)i \\ &= (n+1) \left[\frac{2n+1}{3} - i \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

y

$$\begin{aligned}
E(Y_i^2) &= E(4R_n^2 - 8R_n i\sigma(i) + 4i^2\sigma(i)^2) \\
&= 4 \left[\frac{(n+1)^2(2n+1)^2}{36} - \frac{i(n+1)^2(2n+1)}{6} + \frac{i^2(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{3} \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - i(n+1) + i^2 \right], \tag{5.43}
\end{aligned}$$

para toda i en I_n .

Por las ecuaciones (5.42) y (5.43) se cumple que, para toda i en I_n ,

$$\begin{aligned}
V(Y_i) &= E(Y_i^2) - (E(Y_i))^2 \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{3} \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - i(n+1) + i^2 \right] \\
&\quad - (n+1)^2 \left[\frac{2n+1}{3} - i \right] \\
&= i^2(n+1) \left[\frac{4(2n+1)}{6} - (n+1) \right] \\
&= \frac{(n+1)(n-1)i^2}{3}. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Además, por (5.28), para cualquier i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$ tenemos que

$$\begin{aligned}
E(Y_i Y_j) &= E\left(4(R_n - i\sigma(i))(R_n - j\sigma(j))\right) \\
&= 4E\left(R_n^2 - j\sigma(j)R_n - i\sigma(i)R_n + ij\sigma(i)\sigma(j)\right) \\
&= 4\left(R_n^2 - jR_n E(\sigma(j)) - iR_n E(\sigma(i)) + ijE(\sigma(i)\sigma(j))\right) \\
&= 4\left(R_n^2 - jR_n \frac{n+1}{2} - iR_n \frac{n+1}{2} + ij \frac{(n+1)(3n+2)}{12}\right) \\
&= \frac{4(n+1)}{12} \left(\frac{(n+1)(2n+1)^2}{3} - j(n+1)(2n+1) \right. \\
&\quad \left. - i(n+1)(2n+1) + ij(3n+2) \right) \\
&= \frac{n+1}{3} \left(\frac{(n+1)(2n+1)^2}{3} \right. \\
&\quad \left. - (n+1)(2n+1)(i+j) + ij(3n+2) \right). \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Para calcular la covarianza utilizamos las ecuaciones (5.42) y (5.45), ya que

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Y_i, Y_j) &= E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j) \\
&= \frac{n+1}{3} \left(\frac{(n+1)(2n+1)^2}{3} - (n+1)(2n+1)(i+j) + ij(3n+2) \right) \\
&\quad - (n+1) \left(\frac{2n+1}{3} - i \right) (n+1) \left(\frac{2n+1}{3} - j \right) \\
&= (n+1)ij \left(\frac{3n+2}{3} - (n+1) \right) \\
&= -\frac{(n+1)}{3}ij
\end{aligned} \tag{5.46}$$

y esto se cumple para toda i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Por su parte, para calcular la correlación utilizamos (5.44) y (5.46). Para toda i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\rho(Y_i, Y_j) &= \frac{\text{Cov}(Y_i, Y_j)}{\sqrt{V(Y_i)V(Y_j)}} \\
&= -\frac{(n+1)ij}{(n+1)(n-1)ij} \\
&= -\frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Por último, veamos la simetría de \hat{A}_π^n . Sea $A = \sum_{i=1}^n (i - \sigma(i))$; entonces por la ecuación (5.38) sabemos que $\hat{A}_\pi^n \stackrel{d}{=} A$, pero por (5.40) se cumple que, para toda σ permutación de I_n ,

$$A = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i).$$

Fijemos a σ una permutación de I_n y definamos a τ , otra permutación de I_n , tal que $\tau(i) = n - \sigma(i) + 1$ para toda i en I_n . Sea $B = \sum_{i=1}^n (i - \tau(i))^2$; entonces

$$\begin{aligned}
B &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2 \sum_{i=1}^n i\tau(i) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2 \sum_{i=1}^n i(n - \sigma(i) + 1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) - 2 \sum_{i=1}^n i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n^2(n+1) + 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) - n(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1)^2 + 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(n-1)}{3} - B &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + n(n+1)^2 - 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) \\
&= n(n+1) \left(\frac{n-1}{3} - \frac{2n+1}{3} + (n+1) \right) - 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) \\
&= A.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, \hat{A}_π^n es simétrico respecto a $n(n+1)(n-1)/6$. ■

Definamos a

$$A_n = \frac{\hat{A}_\pi^n - E(\hat{A}_\pi^n)}{\sqrt{V(\hat{A}_\pi^n)}}, \quad (5.47)$$

entonces, por la Proposición 5.3.10, sabemos que A_n es una variable aleatoria tal que $E(A_n) = 0$ y $V(A_n) = 1$.

Ahora veamos cómo es la distribución asintótica de A_n . Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria bivariada de tamaño n , donde X y Y son variables aleatorias continuas y tienen distribución F . Aún más, supongamos que $X_1 < X_2 < \dots < X_n$, y sea

$$\rho = \frac{12}{n(n^2-1)} \left(\sum_{i=1}^n iR_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \right), \quad (5.48)$$

donde R_1, R_2, \dots, R_n son los rangos de Y_1, Y_2, \dots, Y_n respectivamente, es decir, $R_i = \sigma(i)$ para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Entonces, por las ecuaciones (5.47), (5.32), (5.29) y (5.30)

tenemos que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{\hat{A}_\pi^n - \mathbb{E}(\hat{A}_\pi^n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{A}_\pi^n)}} \\
&= \frac{2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n-1)(n+1)}{6}}{\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2(n-1)}{36}}} \\
&= \frac{2 \sum_{i=1}^n i\sigma(i) - \frac{n(n+1)}{6}(2n+4+n-1)}{\frac{n(n+1)}{6}\sqrt{n-1}} \\
&= \frac{12}{n(n+1)\sqrt{n-1}} \left(\sum_{i=1}^n i\sigma(i) - \frac{n(n+1)^2}{4} \right) \\
&= \sqrt{n-1} \frac{12}{n(n^2-1)} \left(\sum_{i=1}^n iR_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \right) \\
&= \sqrt{n-1} \rho.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Como $\sqrt{n-1} \rho$ tiene distribución asintótica $N(0, 1)$, bajo el supuesto de independencia (ver Lehman [13]) entonces \hat{A}_π^n tiene distribución asintótica normal.

Capítulo 6

Estadística para la detección de idempotentes no triviales de una cópula

Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una distribución bivariada continua tal que su muestra modificada es $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$; ver Definición 5.2.1. En el capítulo anterior analizamos la estadística propuesta por González-Barrios [6], que nos permite hacer inferencia sobre la muestra modificada, para saber si proviene o no de una cópula asociativa. Sin embargo, esta prueba no es suficiente para saber si proviene o no de una cópula arquimediana, ya que, por el Teorema 3.1.14 y el Teorema de Ling sabemos que una cópula es arquimediana si y sólo si es asociativa y su diagonal está por debajo de la identidad en $(0, 1)$. El ejemplo más claro de que esta estadística falla es la cópula M , que es una cópula asociativa con soporte en la diagonal, por lo tanto no es arquimediana, aunque la estadística de asociatividad $A_\pi^n = 0$.

En este capítulo proponemos una prueba estadística que nos permite hacer inferencia sobre una cópula para saber si tiene o no idempotentes no triviales.

6.1. Motivación

Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una distribución bivariada continua, con cópula C , tal que su muestra modificada es $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$. Al igual que en

la estadística de asociatividad, vamos a utilizar la muestra modificada para definir la estadística diagonal; en otras palabras, para saber si C es una cópula que tiene o no idempotentes no triviales, trabajaremos con $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$.

Lo que buscamos, es definir una estadística que penalice la existencia de idempotentes no triviales. Además, la penalización que se le da a los idempotentes tiene que cumplir dos propiedades: la primera es que la penalización de dos idempotentes no triviales y diferentes entre sí, que tienen como punto medio a $n/2$, debe ser igual; y la segunda es que el castigo debe ser mayor mientras más cerca esté el idempotente de $n/2$, ya que si la muestra tiene un idempotente cercano a $n/2$ es muy posible que la muestra provenga de una suma ordinal.

En la Figura 6.1 podemos ver los diagramas de dispersión de dos muestras aleatorias de de tamaño veinte; la muestra modificada del diagrama de la izquierda tiene idempotentes $i_1 = 10$ e $i_2 = 20$; mientras el diagrama del lado derecho tiene una muestra modificada con idempotentes $i_1 = 1$ e $i_2 = 20$. De la gráfica se puede ver que, la cópula C_1 que en teoría pertenece a la muestra modificada con idempotentes $i_1 = 10$ e $i_2 = 20$, probablemente cumple que $C(u, u) = u$ para u cercano a $1/2$. Sin embargo, no podemos decir mucho sobre la cópula que generó a la muestra modificada con idempotentes $i_1 = 1$ e $i_2 = 20$. Es por esto que para definir a la estadística diagonal, pedimos que se penalice más a los idempotentes cercanos a $n/2$.

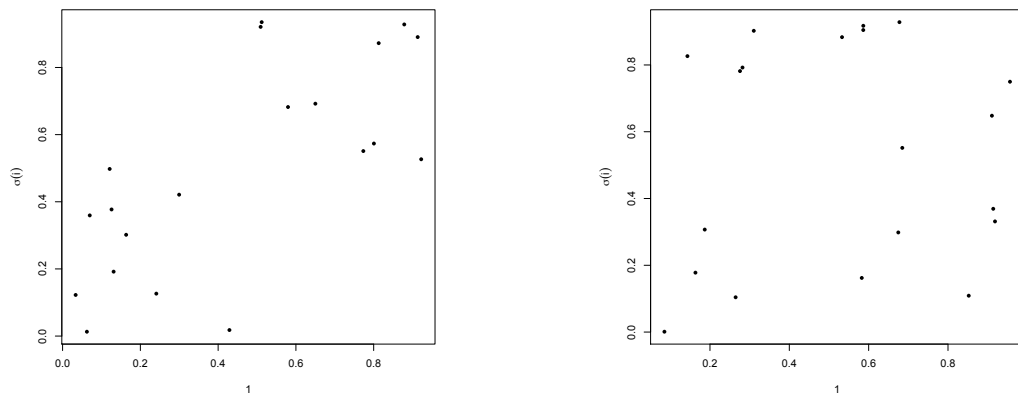


Figura 6.1: Diagramas de dispersión de muestras aleatorias.

Antes de definir la estadística analicemos la siguiente función. Sea n un entero positivo fijo y definamos a f_n una función de $[0, \infty]$ en $[0, \infty]$, tal que

$$f_n(x) = \frac{1}{(n/2 - x)^2 + 1}, \quad (6.1)$$

para toda x en $[0, \infty]$. Entonces, f_n (ver Figura 6.2) es una función positiva, estrictamente creciente en $[0, n/2)$, estrictamente decreciente en $(n/2, n]$ y alcanza su máximo $n/2$. Esto es fácil de ver, ya que

$$f'_n(x) = \frac{2(n/2 - x)}{((n/2 - x)^2 + 1)^2} \quad \text{y} \quad f''_n(x) = \frac{2^3(n/2 - x)^2}{((n/2 - x)^2 + 1)^3} - \frac{2}{(n/2 - x)^2 + 1}.$$

Además, f_n es simétrica respecto a $n/2$ en el intervalo $[0, n]$, ya que para toda x en $[0, n/2)$ se cumple que

$$f_n(n/2 + x) = \frac{1}{x^2 + 1} = f_n(n/2 - x).$$

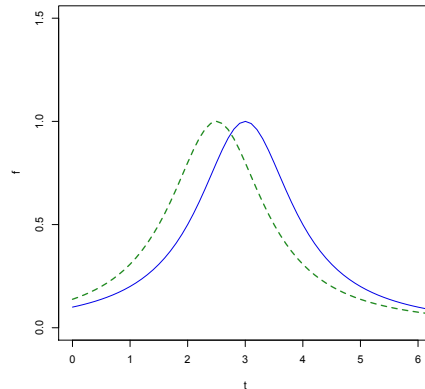


Figura 6.2: Gráfica de f_6 (línea continua) y f_5 (línea discontinua).

Ahora definamos una estadística para saber si la cópula tiene idempotentes no triviales.

Definición 6.1.1. Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una distribución bivariada continua tal que su muestra modificada es $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ con idempotentes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$, para alguna k en $\{1, \dots, n\}$. Definamos una estadística para la detección de idempotentes no triviales, a la que llamaremos **estadística diagonal**,

mediante

$$\begin{aligned}
 I_{\pi}^n &= \frac{\sum_{j=1}^{k-1} f_n(i_j)}{\sum_{j=1}^{n-1} f_n(j)} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(n/2 - i_j)^2 + 1}}{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(n/2 - j)^2 + 1}}. \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

Notemos que en (6.2) el numerador de I_{π}^n castiga a cada idempotente no trivial de la muestra modificada, evaluando f_n y sumando el valor correspondiente de todos los idempotentes no triviales, mientras que el denominador tiene como objetivo dividir entre el máximo valor posible del numerador, que se alcanza cuando $\sigma(i)$ es idempotente para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$; es decir, $\sigma(i) = i$ para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$. De esta forma, I_{π}^n es un número entre cero y uno. Además, I_{π}^n es una variable aleatoria discreta que depende de la permutación de la muestra modificada.

Por las propiedades de la función f_n mencionadas antes, la estadística cumple las dos propiedades que queremos. Si n es par, es decir, $n = 2m$ para alguna m en \mathbb{N} , como f_n alcanza su máximo en $n/2$, entonces I_{π}^n al idempotente que más peso le da es a $n/2$ y conforme los idempotentes se van alejando de $n/2$, f_n decrece, por lo tanto la estadística penaliza menos conforme los idempotentes se alejan de $n/2$. Además, f_n es simétrica respecto a $n/2$, por lo que I_{π}^n castiga de igual forma a los idempotentes simétricos respecto a $n/2$. Por otro lado, si n es impar, es decir, $n = 2m + 1$ para alguna m en \mathbb{N} , entonces $n/2$ no puede ser idempotente y por la simetría de f_n , a los idempotentes que más peso reciben son m y $m + 1$, y por lo mismo que se mencionó en el caso anterior, I_{π}^n castiga igual a los idempotentes simétricos respecto a $n/2$.

Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una distribución bivariada continua, con cópula C , tal que su muestra modificada es $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ con idempotentes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = n$, para alguna k en $\{1, \dots, n\}$. Entonces, la estadística diagonal cumple las siguientes propiedades:

- i. Si $C = W$, entonces la muestra modificada es de la forma $(1, n), (2, n-1), \dots, (n, 1)$ con probabilidad 1 pues el soporte de W es $\{(t, 1-t) | t \in [0, 1]\}$ (la diagonal secun-

daria), lo que implica que el único idempotentes es n con probabilidad 1. En este caso, $I_\pi^n = 0$ con probabilidad 1.

- ii. Si $C = M$, entonces la muestra modificada es de la forma $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$ con probabilidad 1 pues el soporte de M es la diagonal principal $\{(t, t) | t \in [0, 1]\}$. En este caso los idempotentes son $i_1 = 1 < i_2 = 2 < \dots < i_k = n$, es decir $k = n$. Entonces, $I_\pi^n = 1$ con probabilidad 1.
- iii. Si $C = \Pi$, utilizando el Corolario 5.3.5, sabemos que si K es el número de idempotentes de una muestra modificada de Π de tamaño n ; entonces $P(K = 1) \approx 1 - 2/n$. Como n siempre es idempotente de una muestra modificada entonces

$$P(K > 1) = 1 - P(K = 1) \approx 2/n \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Además, $P(I_\pi^n > 0) = P(K > 1) \approx 2/n$.

6.2. Definiciones y simulaciones

En el caso que vamos a ver a continuación, una **hipótesis estadística** es una afirmación sobre la cópula de una muestra aleatoria; a la hipótesis H_0 se le conoce como **hipótesis nula** y a H_1 como **hipótesis alternativa**. La **prueba** de una hipótesis estadística es una regla de decisión para aceptar o rechazar la hipótesis. La **función potencia** de la prueba H_0 contra H_1 , es la función que calcula la probabilidad de que, dada una muestra aleatoria, la hipótesis nula sea rechazada; y la **potencia** de la prueba es la probabilidad de rechazar H_0 dado que H_0 es cierta. La **región crítica** de una prueba estadística, denotada por \mathcal{A} , es un subconjunto del espacio muestral, de tal forma que si una muestra aleatoria pertenece a la región crítica, entonces rechazamos H_0 .

En este caso tenemos que las hipótesis a probar son:

$$H_0 : C(u, u) < u \text{ para toda } u \text{ en } (0, 1) \quad \text{vs.} \quad H_1 : C(u_0, u_0) = u_0 \text{ para alguna } u_0 \text{ en } (0, 1).$$

De esta prueba podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Esta prueba es claramente no paramétrica.
2. Si la muestra aleatoria proviene de una cópula arquimediana C , entonces H_0 es cierta, por el Teorema de Ling.
3. Sea \mathcal{C} el espacio de todas las cópulas. La función potencia de la prueba se define como

$$f(C) = P(\text{rech } H_0 | C)$$

para toda C en \mathcal{C} . Es decir, la función potencia es la probabilidad de rechazar H_0 dado que la muestra aleatoria se generó de una cópula C fija. Notemos que de la propiedad i (mencionada al final de la sección anterior) $f(W) = 0$; de la propiedad ii se sigue que $f(M) = 1$. Para encontrar la región crítica de la prueba queremos que $f(\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}) = \alpha$ para α en $\{0.10, 0.05, 0.01\}$, donde $\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ es la cópula definida en (3.39).

Sean α en $\{0.10, 0.05, 0.01\}$ y n en \mathbb{N} fijos, entonces la región crítica de esta prueba es $\mathcal{A} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) | I_\pi^n \geq \xi_{1-\alpha}^n\}$ donde $\xi_{1-\alpha}^n$ es un valor crítico de la prueba. Por la observación 3, para encontrar la región crítica de la prueba se procederá haciendo un gran número de simulaciones para valores de n . Con este procedimiento aproximamos la distribución de $I_\pi^n | C = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$.

Para encontrar los valores críticos de la prueba simulamos 100,000 observaciones de $I_\pi^n | C = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$. Para los tamaños de muestra 10, 20, 50 y 100, calculamos su función de distribución empírica y tomamos $\xi_{1-\alpha}^n$ para α en $\{0.1, 0.05, 0.01\}$ y n en $\{10, 20, 50, 100\}$, donde

$$\xi_{1-\alpha}^n = \min \left\{ y \geq 0 : P(I_\pi^n \leq y | C = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}) \geq 1 - \alpha \right\}.$$

Los valores de $\xi_{1-\alpha}^n$ están en la Tabla 6.1.

También es importante notar que, en base a simulaciones, existe una relación entre el orden parcial \prec , ver Definición 1.6.1, y la función potencia de la prueba. Si C_1 y C_2 son

Tamaño de la muestra	1 - α		
	0.90	0.95	0.99
10	0.2056277	0.3679654	0.6471861
20	0.01202011	0.01616278	0.04241643
50	0.001178439	0.001350763	0.002112563
100	0.0002731040	0.0002847228	0.000431662

Tabla 6.1: Valores críticos de la prueba.

dos cópulas tales que $W \prec C_1 \prec C_2 \prec M$, entonces

$$0 = f(W) \leq f(C_1) \leq f(C_2) \leq f(M) = 1.$$

Sabemos por el Ejemplo 3.3.10 que la familia Clayton está positivamente ordenada, lo que implica que $W \prec \Pi \prec \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi} \prec M$, esta es una de las razones por las que tomamos a la cópula $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$ como pivote y no a la cópula producto Π . De hecho, en la Tabla 6.1 podemos ver que incluso para muestras aleatorias de tamaño 100 de la cópula $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$, es probable que I_π^n sea mayor que cero; ya que las muestras modificadas suelen acumularse cerca de 1 y n , por lo que probabilidades de tener idempotentes no triviales alejados de $n/2$ son mayores que con la cópula producto.

Notemos que si rechazamos la hipótesis nula H_0 , entonces rechazamos que C sea una cópula arquimediana. Sin embargo, si no rechazamos H_0 no podemos garantizar que C sea una cópula arquimediana.

Para saber qué tan bien funcionan los valores críticos de la prueba, hicimos simulaciones de algunas de las familias de cópulas más importantes.

Primero hicimos 1,000 simulaciones de algunas cópulas de la familia Raftery, ver Ejemplo 3.2.10, sabemos que $C_0 = \Pi$ y $C_1 = M$. Para tamaños de muestra 10, 20, 50 y 100, calculamos su estadística I_π^n y el número de rechazos de H_0 . Los resultados se pueden ver en la Tabla 6.2. Aunque la familia Raftery no es familia de cópulas arquimedianas, se puede demostrar que $C_\theta(u, u) < u$ para toda u en $(0, 1)$ y para toda $0 \leq \theta < 1$, pero si $\theta = 1$ entonces $C_1 = M$. En la Tabla 6.2 podemos ver que para valores de $\theta \geq 0.5$ la potencia de la prueba es muy alta; es decir, la probabilidad de rechazar H_0 es alta. En la

Figura 6.3 vemos que para $\theta = 0.5$ los puntos de la muestra se acumulan en la esquina superior izquierda, lo que provoca que la muestra modificada tenga idempotentes cercanos a n . Mientras que para $\theta = 0.9$ la muestra es muy parecida a la de la cópula M . Cuando $\theta = 0.1$, la cópula se parece mucho a Π .

Notemos que la potencia de la prueba crece conforme θ se acerca a 1 y decrece conforme θ se acerca a 0. Es decir, $f(C_\theta) \rightarrow 1$ cuando $\theta \rightarrow 1$ y $f(C_\theta) \rightarrow 0$ cuando $\theta \rightarrow 0$.

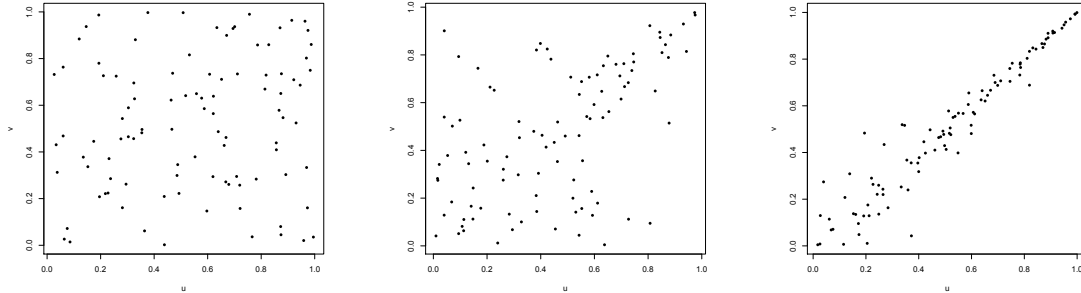


Figura 6.3: Diagramas de dispersión de la familia Raftery para $\theta = 0.1$ (izquierda), $\theta = 0.5$ (centro) y $\theta = 0.9$ (derecha).

Lo mismo hicimos con la familia Clayton, ver Ejemplo 3.3.10, cuyos resultados están en la Tabla 6.3. Consideramos a θ en $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ y a C_θ una cópula de la familia Clayton. Sabemos que $C_{-1} = W$, $C_0 = \Pi$, $C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$ y para el caso límite $C_\infty = M$. Además, por el Ejemplo 3.3.10, la familia Clayton es positivamente ordenada; entonces, si $-1 \leq \theta \leq 1$ tenemos que $W \prec C_\theta \prec \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$, y los rechazos tienen que ser pocos, ya que para cualquier cópula que esté entre la W y la $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$ es muy difícil encontrar muestras que den evidencia de idempotentes no triviales. En la Tabla 6.3 se verifica este comportamiento. Si $\theta > 1$ y hacemos que θ crezca, entonces la cópula C_θ se va ir acercando a M , por lo que esperamos que cada vez existan más rechazos de H_0 ; esto también se verifica en la tabla antes mencionada.

Aunque la familia Clayton es arquimediana, este comportamiento es lo que esperamos ya que la prueba va a rechazar a cópulas que se parezcan a M . Como esta familia es de cópulas arquimedianas, sabemos que no tocan la diagonal. Sin embargo, por las simulaciones vemos que la función potencia de la prueba es cercana a cero cuando $\theta \leq 1$ y $f(C_\theta) \rightarrow 1$ cuando

$\theta \rightarrow \infty$. En la Figura 6.4 podemos ver los diagramas de dispersión de Π , $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$ y C_5 . En el diagrama de dispersión se ve como C_5 se parece a M , sobre todo en la cola inferior.

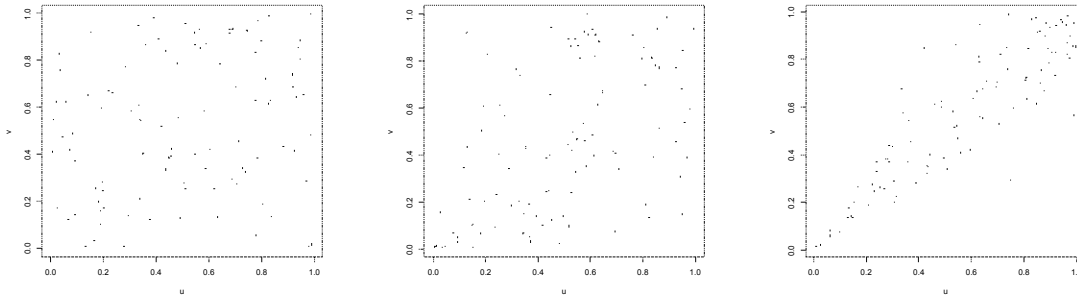


Figura 6.4: Diagramas de dispersión de la familia Clayton para $\theta = 0$ (izquierda), $\theta = 1$ (centro) y $\theta = 5$ (derecha).

Con la familia Ali-Mikhail-Haq, ver Ejemplo 3.2.13, hicimos lo mismo, sus resultados están en la Tabla 6.4. Si θ está en $[-1, 1)$ y C_θ es una cópula que pertenece a la familia Ali-Mikhail-Haq, sabemos que $C_0 = \Pi$ y $C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$. Además, esta familia es arquimediana y está positivamente ordenada, ver Nelsen [17]. Por lo tanto, esperamos ver pocos rechazos; en la Tabla 6.4 se comprueba esto. Con esta familia, se cumple que $f(C_\theta) < \alpha$ para θ en $[-1, 1)$. En la Figura 6.5 podemos ver los diagramas de dispersión de algunas cópulas que pertenecen a la familia Ali-Mikhail-Haq.

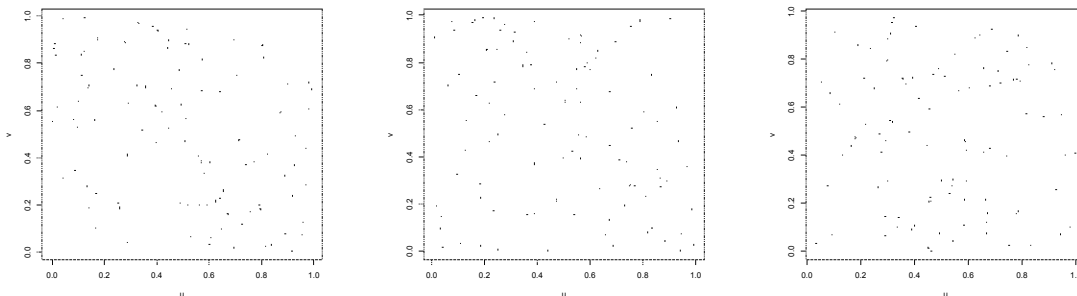


Figura 6.5: Diagramas de dispersión de la familia Ali-Mikhail-Haq para $\theta = -1$ (izquierda), $\theta = -0.5$ (centro) y $\theta = 0.5$ (derecha).

Finalmente, veamos el caso de la suma ordinal de $\{\Pi, \Pi\}$ respecto a $\{[0, \theta], [\theta, 1]\}$. Notemos

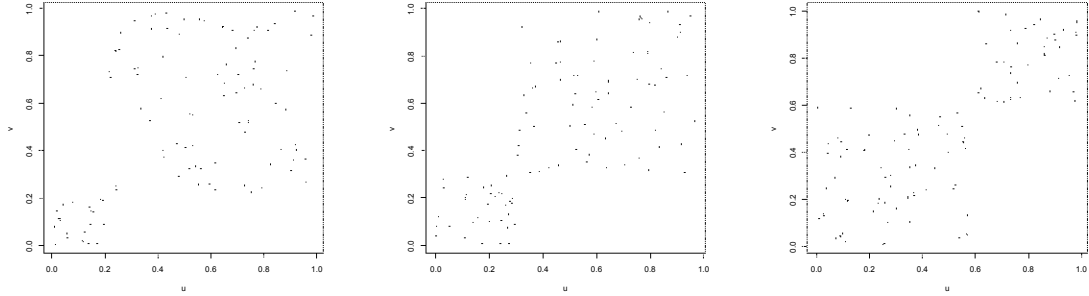


Figura 6.6: Diagramas de dispersión de la suma ordinal para $\theta = 0.2$ (izquierda), $\theta = 0.3$ (centro) y $\theta = 0.6$ (derecha).

que, en las Tablas 6.5 y 6.6 para θ en $\{0.1, 0.9\}$ y tamaño de muestra igual a 10, los rechazos son pocos. Esto se debe a que la estadística castiga poco a los idempotentes no triviales que están en los extremos, y en estos casos esto es lo que ocurre con los idempotentes no triviales que aparecen. Si el valor de θ se acerca a 0.5, los idempotentes no triviales que aparecen se acercan más a $n/2$, donde n es el tamaño de la muestra, por lo que aumentan los rechazos. De los resultados podemos ver, incluso para θ en $\{0.1, 0.9\}$ con tamaño de muestra mayor a 10, que la probabilidad de rechazar H_0 es bastante alta. En otras palabras, la prueba detecta de manera muy eficiente cuando la muestra aleatoria proviene de una suma ordinal. En la Figura 6.6 podemos ver diagramas de dispersión de sumas ordinales para diferentes valores de θ .

Parámetro	Tamaño de la muestra	Rechazo al nivel		
		$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
0.1	10	14	3	1
	20	6	2	0
	50	1	1	0
	100	0	0	0
0.3	10	47	17	3
	20	49	29	2
	50	51	28	3
	100	52	28	8
0.5	10	147	86	19
	20	236	193	39
	50	237	174	72
	100	216	196	74
0.7	10	475	302	122
	20	685	622	315
	50	679	625	436
	100	676	651	426
0.9	10	936	837	582
	20	999	996	976
	50	1000	1000	999
	100	999	999	998

Tabla 6.2: Resultados para la familia Raftery.

Parámetro	Tamaño de la muestra	Rechazo al nivel		
		$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
0	10	3	2	0
	20	0	0	0
	50	0	0	0
	100	0	0	0
0.3	10	17	12	0
	20	5	0	0
	50	6	0	0
	100	2	1	0
0.6	10	49	27	4
	20	37	21	1
	50	27	11	0
	100	15	12	1
0.9	10	91	35	8
	20	82	45	8
	50	65	22	6
	100	51	33	13
2	10	256	144	29
	20	371	303	78
	50	335	267	103
	100	341	270	98
5	10	723	487	250
	20	907	883	626
	50	917	873	736
	100	901	861	711
10	10	918	808	485
	20	998	998	951
	50	1000	996	993
	100	1000	999	996

Tabla 6.3: Resultados para la familia Clayton.

Parámetro	Tamaño de la muestra	Rechazo al nivel		
		$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
-1	10	2	2	0
	20	0	0	0
	50	0	0	0
	100	0	0	0
-0.5	10	3	3	0
	20	0	0	0
	50	0	0	0
	100	0	0	0
0.1	10	8	6	1
	20	0	0	0
	50	0	0	0
	100	0	0	0
0.3	10	13	6	0
	20	0	0	0
	50	1	0	0
	100	0	0	0
0.5	10	23	7	0
	20	3	1	0
	50	1	0	0
	100	1	0	0
0.7	10	37	22	4
	20	10	5	1
	50	1	0	0
	100	0	0	0
0.9	10	63	30	9
	20	36	21	6
	50	5	4	0
	100	2	1	1

Tabla 6.4: Resultados para la familia Ali-Mikhail-Haq.

Parámetro	Tamaño de la muestra	Rechazo al nivel		
		$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
0.1	10	44	16	5
	20	174	100	3
	50	399	290	59
	100	291	277	72
0.2	10	148	47	12
	20	589	381	65
	50	806	714	333
	100	896	840	320
0.3	10	332	115	31
	20	877	721	292
	50	985	971	801
	100	999	999	966
0.4	10	488	221	43
	20	978	929	640
	50	1000	999	987
	100	1000	1000	1000
0.5	10	575	274	57
	20	994	980	795
	50	1000	1000	999
	100	1000	1000	1000

Tabla 6.5: Resultados para la suma ordinal (parte 1).

Parámetro	Tamaño de la muestra	Rechazo al nivel		
		$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
0.6	10	514	242	64
	20	972	919	664
	50	1000	1000	989
	100	1000	1000	999
0.7	10	330	143	31
	20	874	737	291
	50	986	962	809
	100	999	999	962
0.8	10	159	53	13
	20	620	420	62
	50	805	695	318
	100	900	840	343
0.9	10	40	18	8
	20	163	83	1
	50	405	302	72
	100	256	245	73

Tabla 6.6: Resultados para la suma ordinal (parte 2).

6.3. Conclusiones

Como lo mencionamos antes, no existe una prueba estadística que permita hacer inferencia sobre la muestra aleatoria para saber si proviene o no de una cópula arquimediana; y tampoco existe una prueba para saber si proviene o no de una cópula cuya diagonal está por debajo de la identidad en $(0, 1)$. Por lo visto en la sección anterior, podemos observar que la prueba que proponemos en este capítulo detecta la existencia de idempotentes no triviales para aquellas cópulas que no sean muy cercanas a la M ; esto se debe a que el número de idempotentes de la muestra modificada, de una cópula arquimediana que se acerca mucho a M , crece. También vimos que para sumas ordinales, la prueba funciona bastante bien. Con esta prueba podemos hacer inferencia sobre la muestra aleatoria, para saber si proviene o no de una cópula que no tiene idempotentes no triviales.

Recordemos que, por el Teorema de Ling, una cópula C es arquimediana si y sólo si C es asociativa y no tiene idempotentes no triviales. Entonces, la prueba que proponemos no detecta la arquimedianeidad de la cópula que generó a la muestra aleatoria; ya que esta prueba estadística no detecta la asociatividad de la muestra aleatoria. Sin embargo, podemos inferir que si la prueba rechaza la hipótesis nula H_0 , entonces la cópula que generó la muestra aleatoria no debería ser arquimediana. Por lo tanto, esta prueba resuelve el problema parcialmente.

En aplicaciones a Seguros y Finanzas es común suponer que las muestras aleatorias provienen de cópulas arquimedianas; ya que trabajar con esta clase de cópulas es mucho más sencillo. Cuando la muestra aleatoria proviene de una suma ordinal, aproximarla con una cópula arquimediana puede ser un error costoso. En este caso, la estadística diagonal puede ser de mucha utilidad.

Apéndice A

Simuladores

En este apéndice están los programas en lenguaje R que se necesitaron para esta tesis.

La función **mat.perm** da la muestra modificada de una muestra aleatoria.

```
mat.perm<-function(mat){
  nf <- nrow(mat)      # Número de filas de la matriz.
  perm1 <- order(mat[,1])  # Permutación para ordenar la primer columna.
  i <- 1
  mat1 <- matrix(0, nf, 2)  # Vector de nf filas y entradas igual a cero.
  for(i in 1:nf){          # Ciclo para ordenar la primer columna.
    mat1[i,] <- mat[perm1[i],]
    i <- i+1
  }
  mat2 <- cbind(mat1, 1:nf)  # Matriz con la primer columna ordenada (matriz extendida con la permutación).
  perm2 <- order(mat2[,2])  # Permutación para ordenar la segunda columna.
  i <- 1
  mat3 <- matrix(0, nf, 3)  # Matriz de nf × 3 filas y entradas igual a cero.
  for(i in 1:nf){          # Ciclo para ordenar la segunda columna.
    mat3[i,] <- mat2[perm2[i],]
```

```

i <- i+1
}
mat4 <- cbind(mat3, 1:nf)      # Matriz con la segunda columna ordenada (matriz ex-
tendida).
perm3 <- order(mat4[,3])      # Permutación para ordenar la tercer columna i <- 1
mat5 <- matrix(0, nf, 4)      # Matriz de nf × 4 filas y entradas igual a cero.
for(i in 1:nf){              # Ciclo para ordenar la tercer columna.
mat5[i,] <- mat4[perm3[i,]]
i <- i+1
}
i <- 1
x = matrix(0, nf, 2)         # Vector de nf filas y entradas igual a cero.
for(i in 1:nf){              # Ciclo para obtener la muestra modificada
j <- 1
for (j in 1:2){
x[i,j] <- mat5[i, 2+j]
j <- j+1
}
i <- i+1
}
return(x)
}

```

Dada una muestra modificada, la función **idempotentes** regresa un vector con los idempotentes de dic a muestra.

```

idempotentes <- function(mumod){
nf <- nrow(mumod)           # Número de filas de la matriz.
i<-1
k<-0
for (i in 1:(nf-1)){        # Ciclo para crear un vector con la primer entrada igual a 0 y las
demás entradas con los idempotentes no triviales de la muestra modificada.
j<-1

```

```

while (mumod[j,2] <= i) {
j<-j+1
if (j > i) k <- cbind(k, i)
if (j> i) break
}
i<- i+1
}
k[1]<-nf      # Agrega el idempotente trivial en la primer entrada del vector.
idem<-sort(k)  # Ordena de menor a mayor las entradas del vector.
return(idem)
}

```

La función **est.diag** calcula el numerador de la estadística diagonal de un vector de idempotentes.

```

est.diag<- function(vec.idem){
n <- length(vec.idem)      # Calcula el tamaño del vector.
tam.muestra <- vec.idem[n]
vec.est1<-rep(0,n-1)
i<-1
for(i in 1:n-1){          # El ciclo va de 1 a n-1 porque la última entrada de vec.idem tiene
el idempotente trivial.
vec.est1[i] <- (tam.muestra/2 - vec.idem[i])2 + 1      # Calcula el peso que le da la es-
tadística diagonal a cada idempotente no trivial.
i <- i+1
}
vec.est <- 1/vec.est1
total<- sum(vec.est)      # Suma las penalizaciones de los idempotentes no triviales.
return(total)
}

```

La función **max.est.diag** calcula la constante de normalización de la estadística diagonal.

```

max.est.diag <- function(tam.vector){
idem<-1:tam.vector
vec<-rep(0,tam.vector - 1)
vec1<- rep(0, tam.vector -1)
i<-1
for(i in 1:tam.vector-1){
vec[i] <- (tam.vector/2 - idem[i])2 + 1
vec1[i] <- 1/vec[i]
i <- i+1
}
total <- sum(vec1)
return(total)
}

```

La función **sim.est.diag** simula una cópula y calcula su estadística diagonal. Los parámetros son: el tamaño de muestra de cada simulación, el número de simulaciones y el parámetro de la familia que se va a simular.

```

sim.est.diag <-function(tam.mue, num.sim, param){
vec.diag <- rep(0,num.sim)      # Vector de tamaño num.sim y entradas iguales a 0.
i<-1
for (i in 1:num.sim){          # Ciclo que hace las simulaciones para que cada entrada del
vector vec.diag tenga el calculo de una estadística diagonal.
x <- simula.muestra(tam.mue, param)      # Función que simula la cópula.
x.mumod <- mat.perm(x)      # Calcula la muestra modificada.
x.idem<-idempotentes(x.mumod) # Calcula los idempotentes.
vec.diag[i] <- est.diag(x.idem)/max.est.diag(tam.mue)      # Calcula la estadística dia-
gonal
Calcula la estadística diagonal de la muestra simulada.
i <- i + 1
}
return(vec.diag)
}

```

La función **val.crit** calcula el vector de valores críticos de la prueba. Las entradas son el tamaño de muestra de cada simulación, el número de simulaciones y el parámetro de la cópula pivote.

```
val.crit<-function(tam.mue, num.sim, param){
mat<-sim.est.diag(tam.mue, num.sim, param)      # Vector de tamaño num.sim y cada
entrada es el estadístico diagonal de una muestra aleatoria de la cópula pivote.
mat1<- sort(mat)      # Ordena de mayor a menor las entradas del vector.
alpha.01<- ceiling(num.sim*.99)
alpha.05<-ceiling(num.sim*.95)
alpha.10<-ceiling(num.sim*.90)
vec<-c(mat1[alpha.10], mat1[alpha.05], mat1[alpha.01])      #Vector con los valores crí-
ticos..
return(vec)
}
```

La función **rech.famcop** simula una cópula y regresa un vector de tamaño 3, en cada entrada tiene el número de veces que se rechaza la prueba de la cópula para $\alpha = .1, .05, .01$ respectivamente.

```
rech.famcop <- function(tam.mue, num.sim, param, val.crit){
mat<-sim.est.diag(tam.mue, num.sim, param)      # Vector de tamaño num.sim y cada
entrada es el estadístico diagonal de una muestra aleatoria de la cópula simulada.
mat1<-sort(mat)      # Ordena de mayor a menor las entradas del vector.
cont<-rep(0,3)
j<-1
for (j in 1:3){      # Ciclo para movernos en los valores del vector val,crit.
i<-1
for(i in 1:num.sim){      # Ciclo para contar el número de rechazos respecto a la entrada
del vector val.crit.
if (mat1[i] > val.crit[j])(cont[j]<-cont[j]+1)
i<-i+1
```

```

}
j<-j+1
}
return(cont)
}

```

La función **suma.ord.pi** simula la suma ordinal $\{P_i, P_i\}$ respecto a $\{[0, \theta], [\theta, 1]\}$.

```

suma.ord.pi<-function(tam.mue, theta){
  u<-runif(tam.mue)      # Calcula un vector de tamaño tam.mue cuyas entradas son nú-
                          # meros aleatorios en el intervalo unitario.
  v<-rep(0,tam.mue)
  i<-1
  for(i in 1:tam.mue){   #Ciclo para calcular las entradas del vector v, respecto a las del
                          # vector u para tener la suma ordinal.
    if(u[i]<=theta)(v[i]<-runif(1)*theta) else (v[i]<- theta + runif(1)*(1-theta))
    i<-i+1
  }
  vec<-cbind(u,v)
  return(vec)
}

```

La función **sim.est.sumord** simula una suma ordinal $\{P_i, P_i\}$ respecto a $\{[0, \theta], [\theta, 1]\}$ y calcula su estadística diagonal. Los parámetros son: el tamaño de muestra de cada simulación, el número de simulaciones y el parámetro de la suma ordinal.

```

sim.est.sumord<-function(tam.mue, num.sim, theta){
  vec.diag <- rep(0,num.sim)
  i<-1
  for (i in 1:num.sim){
    x <- suma.ord.pi(tam.mue,theta)      # Función que simula la suma ordinal.
    x.mumod <- mat.perm(x)              # Calcula la muestra modificada.
    x.idem<-idempotentes(x.mumod)      # Calcula los idempotentes.
  }
}

```

```
vec.diag[i] <- est.diag(x.idem)/max.est.diag(tam.mue)      # Calcula la estadística diagonal
```

Calcula la estadística diagonal de la muestra simulada.

```
i <- i + 1
}
return(vec.diag)
}
```

La función **rech.sumord** simula una suma ordinal $\{P_i, P_i\}$ respecto a $\{[0, \theta], [\theta, 1]\}$ y regresa un vector de tamaño 3, en cada entrada tiene el número de veces que se rechaza la prueba de la cópula para $\alpha = .1, .05, .01$ respectivamente.

```
rech.sumord <- function(tam.mue, num.sim, theta, val.crit){
  mat <- sim.est.sumord(tam.mue, num.sim, theta)      # Vector de tamaño num.sim y cada
  # entrada es el estadístico diagonal de una muestra aleatoria de la suma ordinal simulada.
  mat1 <- sort(mat)      # Ordena de mayor a menor las entradas del vector.
  cont <- rep(0, 3)
  j <- 1
  for (j in 1:3){      # Ciclo para movernos en los valores del vector val.crit.
    i <- 1
    for(i in 1:num.sim){      # Ciclo para contar el número de rechazos respecto a la entrada
      # del vector val.crit.
      if (mat1[i] > val.crit[j])(cont[j] <- cont[j] + 1)
      i <- i + 1
    }
    j <- j + 1
  }
  return(cont)
}
```


Bibliografía

- [1] Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley, Great Britain.
- [2] Deheuvels, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, **65**, 5, 274-292.
- [3] Embrechts, P. (2009). Copulas: a personal view. *J. Risk Ins.*, **76**, 639-650.
- [4] Erdelyi, A., González-Barrios, J.M., Nelsen, R.B. (2008). Symmetries of random discrete copulas. *Kybernetika*, **44**, 6, 846-863.
- [5] Frees, E.W., Valdez, E. (1998). Understanding relationship using copulas. *N. Amer. Actuarial J.*, **2** 1-25.
- [6] González-Barrios, J.M. (2010). Statistical aspects of associativity for copulas. *Kybernetika*, **46**, 149-177.
- [7] Hettmansperger, T. P. (1984). *Statistical Inference Based on Ranks*. Wiley, New York.
- [8] Kimberling, C.H. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Math.*, **10**, 152-164.
- [9] Klement, E.P., Mesiar, R. (2006). How non-symmetric can a copula be?. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **47**, 1, 141-148.
- [10] Klenke, A. (2008). *Probability Theory*. Springer, London.
- [11] Kolesárová, A., Mesiar, R., Mordelová, J. and Sempi, C. (2006). Discrete copulas. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **14**, 698-705.

- [12] Ling, C. (1965). Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 189-212.
- [13] Lehman, E. L. (2006). *Nonparametric Statistical methods Based on Ranks*. Springer, New York.
- [14] Mayor, G., Suñer, J. and Torrens, J. (2005). Copula-like operations on finite settings. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **13**, 468-477.
- [15] Mayor, G., Suñer, J. and Torrens, J. (2007). Sklar's Theorem in finite settings. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **15**, 410-416.
- [16] Moore, D.S. and Spruill, M.C. (1975). Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit. *Ann. Statist.*, **3**, 599-616.
- [17] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. 2nd Ed. Springer, New York.
- [18] Nelsen, R. B. (2007). Extremes of nonexchangeability. *Statist. Papers*, **48**, 329-336.
- [19] Schweizer, B., Sklar, A. (1983). *Probabilistic Metric Spaces*. North Holland, New York.