



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Hiperespacios de Conjuntos Convexos de \mathbb{R}^n

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctora en Ciencias

PRESENTA:

M. en C. Natalia Jonard Pérez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergey Antonyan

2012





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	v
I Preliminares	1
1. Acciones de Grupos Topológicos	5
1.1. Acciones de Grupos Topológicos	5
1.2. Espacio de Órbitas	9
1.3. Métricas Invariantes	10
1.4. Acciones de Grupos Compactos	11
1.5. Acciones Propias	14
1.6. Rebanadas	15
1.7. Extensores y Retractos Equivariantes	16
1.8. Cubiertas Invariantes	18
2. Q-variedades e Hiperespacios	23
2.1. Q-variedades	23
2.2. Conjuntos Convexos	27
2.2.1. Conjuntos Convexos en \mathbb{R}^n	31
2.3. Hiperespacios	34
2.3.1. Hiperespacios de Conjuntos Convexos	35
2.4. Lemario de Hiperespacios	36
2.5. Compactos de Banach-Mazur	45
II Acciones de Grupos en Hiperespacios de Conjuntos Compactos Convexos de \mathbb{R}^n	47
3. La Acción del Grupo $\text{Aff}(n)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$	49
3.1. Acciones de Grupos en Hiperespacios	49
3.2. La Acción del Grupo $\text{Aff}(n)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$	51
3.3. Una Rebanada Global en $cb(\mathbb{R}^n)$	53
4. Los hiperespacios $M(n)$ y $L(n)$	61

4.1. El Hiperespacio $M(n)$	61
4.2. Propiedades de $L(n)$	72
5. Espacios Orbitales de $cb(\mathbb{R}^n)$ y $cc(\mathbb{R}^n)$	77
5.1. Algunos Espacios Orbitales de $cb(\mathbb{R}^n)$	77
5.2. Algunos Espacios Orbitales de $cc(\mathbb{R}^n)$	81
5.3. La Estructura Cónica de $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cc(\mathbb{B}^n)$	82
5.3.1. Observación Final	85
III Apéndices	87
A. Teorema de Descomposición Polar	89
B. Teoremas de descomposición QR y RQ	91
C. Nervio de una Cubierta	95
C.1. Complejos simpliciales	95
C.2. Nervio de una Cubierta	96
C.3. Triangulaciones y subdivisiones	97
Bibliografía	99
Índice Alfabético	101

Introducción

Desde los inicios de la geometría hasta el descubrimiento de la teoría de grupos, los matemáticos concebían la geometría en función de los objetos geométricos tales como puntos, rectas, círculos, triángulos, etcétera. Sin embargo, la introducción del concepto de grupo fue tan abrumador, que sobrepasó los límites del álgebra para enriquecer otras áreas de las matemáticas. Así, en su programa Erlangen, Klein sugirió que la propia geometría se caracteriza y se define no por los objetos geométricos sino por el grupo de transformaciones que los deja inalterados. En este sentido, un sistema geométrico consiste en un espacio geométrico o dominio de acción X , y un grupo G de transformaciones de X que preservan ciertas propiedades que nos interesan de las figuras en X . En este contexto nace el concepto de grupo topológico de transformaciones y con él la Topología Geométrica.

El objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar la estructura topológica de ciertos hiperespacios de conjuntos compactos convexos de \mathbb{R}^n . El método principal de este estudio está basado en la teoría de acciones de grupos topológicos.

Antecedentes

Dado $K \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $cc(K)$ al hiperespacio de todos los subconjuntos compactos convexos y no vacíos de K , y lo equiparemos con la métrica de Hausdorff:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B) \right\},$$

dónde d es la métrica Euclidiana en \mathbb{R}^n .

Por $cb(\mathbb{R}^n)$ denotaremos el subespacio de $cc(\mathbb{R}^n)$ que consiste de todos los cuerpos compactos de \mathbb{R}^n , i.e.,

$$cb(\mathbb{R}^n) = \{A \in cc(\mathbb{R}^n) \mid \text{Int } A \neq \emptyset\}.$$

Es fácil ver que $cc(\mathbb{R}^1)$ es homeomorfo al semiplano cerrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$, mientras que $cb(\mathbb{R}^1)$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 . En los años 70, Nadler, Quinn y Stavrakas demostraron que si $n \geq 2$, entonces $cc(\mathbb{B}^n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert (donde \mathbb{B}^n denota la bola

euclidiana cerrada de dimensión n), y $cc(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert perforado, es decir, al cubo de Hilbert con un punto removido (véase [30]).

A principios de la década pasada, S. Antonyan, calculó la estructura topológica del hiperespacio $\mathcal{B}(n)$ ($n \geq 2$) que consiste de todos los cuerpos compactos convexos y centralmente simétricos (respecto al origen) $A \in cb(\mathbb{R}^n)$. En los artículos [8] y [9], Antonyan utiliza la acción del grupo general lineal $GL(n)$ en $\mathcal{B}(n)$ para demostrar que este último es homeomorfo al producto $\mathbb{R}^p \times Q$, donde Q denota al cubo de Hilbert y $p = n(n+1)/2$.

En el caso de dimensión infinita, recientemente Sakai estudió la topología de ciertos hiperespacios de conjuntos convexos en espacios de Banach de dimensión infinita. En [36], Sakai demuestra que el hiperespacio de conjuntos compactos y convexos de un espacio de Banach de dimensión infinita X es un espacio de Hilbert de la misma densidad que X .

Sin embargo, la estructura topológica de $cb(\mathbb{R}^n)$ no había sido calculada.

A principio de los años 50, Macbeath estudió la topología del espacio cociente $cb(\mathbb{R}^n)/\sim$, en donde \sim es la relación de equivalencia dada por la siguiente regla: $A \sim B$ si y sólo si existe una transformación afín σ , tal que $\sigma(A) = B$. Macbeath probó que $cb(\mathbb{R}^n)/\sim$ es un espacio métrico compacto (véase [29]).

Hablando en el lenguaje de la teoría de grupos de transformaciones, el espacio cociente $cb(\mathbb{R}^n)/\sim$ es el espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$, donde $\text{Aff}(n)$ es el grupo de todas las transformaciones afines de \mathbb{R}^n (véase ejemplo 1.1.1), el cual actúa en $cb(\mathbb{R}^n)$ por medio de la correspondencia:

$$(g, A) \rightarrow gA = \{g(a) \mid a \in A\}, \quad g \in \text{Aff}(n), \quad A \in cb(\mathbb{R}^n).$$

Entender la geometría de esta acción, nos permitió calcular la estructura topológica de $cb(\mathbb{R}^n)$ así como otras propiedades geométricas y topológicas de este hiperespacio y algunos otros hiperespacios asociados.

Resultados Principales y Estructura de la Tesis

En este trabajo estudiaremos la estructura topológica de $cb(\mathbb{R}^n)$, demostrando que $cb(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al producto $Q \times \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$. El argumento principal se basa en algunas propiedades fundamentales de la acción natural del grupo $\text{Aff}(n)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$. Para ello, haremos uso de un resultado muy conocido en geometría convexa que establece lo siguiente: para cualquier cuerpo compacto y convexo $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ existe un único elipsoide de volumen mínimo $l(A)$ que contiene a A . Este resultado fue demostrado inicialmente por John en [25] y posteriormente surgieron varias pruebas distintas y generalizaciones de este resultado (véase, e.g. [20] y [44]).

La función l que asigna a cada $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ el elipsoide de volumen mínimo que lo contiene, resulta ser una retracción $\text{Aff}(n)$ -equivariante de $cb(\mathbb{R}^n)$ en el espacio $E(n)$ de todos los elipsoides n -dimensionales de \mathbb{R}^n (teorema 3.3.3). Por otro lado, la fibra $L(n) = l^{-1}(\mathbb{B}^n)$ de la bola euclidiana

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\},$$

resulta ser una $O(n)$ -rebanada global para $cb(\mathbb{R}^n)$ (véase definición 1.6.1). Estos dos hechos nos permitirán demostrar que $cb(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al producto $L(n) \times E(n)$.

Posteriormente se demuestra que $L(n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert (corolario 4.2.9) y $E(n)$ es homeomorfo al espacio euclidiano de dimensión $n(n+3)/2$ (corolario 3.3.7). De estos dos resultados concluimos que $cb(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al producto $Q \times \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$ (corolario 3.3.8), uno de los resultados principales de este trabajo.

Por otro lado, usaremos la compacidad de $L(n)$ (proposición 3.3.2(d)) para demostrar que los espacios orbitales $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ y $L(n)/O(n)$ son homeomorfos (corolario 3.3.4(2)). Esto nos permite dar una nueva demostración del resultado de Macbeath, al concluir que $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ es compacto. Sin embargo, nosotros probaremos más: en el corolario 3.3.5 demostraremos que el espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach Mazur $\text{BM}(n)$.

Sin entrar en detalles, $\text{BM}(n)$ es el conjunto de clases de isometrías de espacios de Banach de dimensión n topologizado por la siguiente métrica, mejor conocida en Análisis Funcional como la distancia de Banach-Mazur:

$$d(E, F) = \ln \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : E \rightarrow F \text{ es un homeomorfismo lineal} \}.$$

Estos espacios fueron introducidos en 1932 por S. Banach [13] y en la actualidad continúan siendo de gran interés. La representación geométrica original de $\text{BM}(n)$ está basada en la correspondencia uno a uno entre normas y cuerpos compactos centralmente simétricos (véase [42, p. 644] y [28, p. 1191]).

En la primera sección del capítulo 4, estudiaremos el hiperespacio $M(n)$ que consiste de todos los subconjuntos compactos y convexos de \mathbb{B}^n que intersecan la esfera frontera \mathbb{S}^{n-1} . Demostraremos que para cualquier subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} , el K -espacio orbital $M(n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert $Q = [0, 1]^\infty$ (corolario 4.1.10). En particular, $M(n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Por otro lado, demostraremos que para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el espacio orbital $M_0(n)/K$ es una Q -variedad, donde $M_0(n) = M(n) \setminus \{\mathbb{B}^n\}$ (corolario 4.1.9). En el teorema 4.1.13 demostraremos que $M(n)/O(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $\text{BM}(n)$.

Las técnicas utilizadas para estudiar el hiperespacio $M(n)$ serán utilizadas en la siguiente sección para demostrar propiedades análogas del hiperespacio $L(n)$ (véase proposición 4.2.7, corolarios 4.2.9 y 4.2.8 y teorema 4.2.11).

En el capítulo 5, estudiaremos algunos espacios orbitales de $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)$. Si K es un subgrupo cerrado que actúa no transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} , demostraremos que el espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad contraíble homeomorfa al producto $(E(n)/K) \times Q$ (teorema 5.1.1). Respectivamente, demostraremos que el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert con un punto removido.

Por otro lado, demostraremos que el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/O(n)$ es homeomorfo al cono abierto sobre el compacto de Banach Mázur $\text{BM}(n)$ (corolario 5.3.5). Terminaremos el trabajo estudiando la estructura topológica de algunos espacios orbitales del hiperespacio $cc(\mathbb{B}^n)$.

El trabajo se divide en tres partes. La primera parte corresponde a los preliminares. En estos capítulos se establecerán todas las definiciones, simbología y resultados básicos que se estarán usando a lo largo del texto.

La segunda parte corresponde al trabajo central de esta investigación y ahí se demostrarán todos los resultados previamente anunciados.

La última parte consiste de tres apéndices. Se trata de tres resultados que se utilizan una sola vez a lo largo del texto. El primero es el *teorema de descomposición polar*, el cual se utiliza en la demostración del corolario 3.3.6. El segundo anexo habla del teorema de descomposición RQ usado en la demostración de 3.3.7. El último apéndice trata sobre el *nervio de una cubierta*, construcción básica para la demostración de los teoremas 4.1.7 y 4.2.5. Aunque se trata de resultados conocidos, éstos serán utilizados en puntos cruciales de este trabajo, y por lo tanto, para conveniencia del lector, se incluye una breve descripción de cada uno de ellos.

Parte I

Preliminares

Nota Preliminar

Antes de comenzar, dedicaremos estas líneas para dar algunas aclaraciones sobre la simbología y definiciones básicas con las cuales estaremos trabajando a lo largo del texto.

Por un espacio topológico, entenderemos un espacio topológico de Tychonoff. Esto incluye también a los grupos topológicos.

Por un espacio topológico lineal (o simplemente, un espacio lineal) entenderemos un espacio vectorial real provisto de una topología que hace continua la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

Cuando hablemos de algún espacio lineal (en particular, cuando hablemos de \mathbb{R}^n), daremos por entendido que los signos $+$ y \sum denotan la suma de vectores en dicho espacio. El origen o vector nulo lo denotaremos por 0 , sin riesgo de confundirnos con el escalar $0 \in \mathbb{R}$ que será denotado de la misma manera.

Por otro lado, si X es un espacio topológico y A un subconjunto no vacío de X , usaremos los símbolos \bar{A} , ∂A e $\text{Int } A$ para denotar, respectivamente, la cerradura, la frontera y el interior de A en X . La función identidad en X será denotada por 1_X .

Si (X, d) es un espacio métrico y A un subconjunto de X , definimos para cada $x \in X$, la distancia de x al conjunto A de la siguiente manera:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

En este caso, para cada escalar positivo $\varepsilon > 0$ usaremos la expresión $N(A, \varepsilon)$ para denotar al siguiente conjunto:

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Si el conjunto A consiste de un sólo punto $z \in X$, el símbolo $N(z, \varepsilon)$ denotará simplemente la bola abierta alrededor de z y de radio ε . Cuando X represente un hiperespacio de conjuntos, las bolas abiertas serán denotadas de otra manera (véase capítulo 2).

En \mathbb{R}^n , usaremos los símbolos N_t , \mathbb{B}^n y \mathbb{S}^{n-1} para denotar los siguientes conjuntos:

$N_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq t\}$, la bola cerrada de radio t centrada en el origen,

$\mathbb{B}^n = N_1$, la bola unitaria,

$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| = 1\}$, la esfera unitaria,

donde $\|\cdot\|$ denota la norma estándar euclidiana en \mathbb{R}^n .

Definiciones básicas como *paracompacidad*, *partición de unidad*, *redes* serán obviadas. Sin embargo, éstas pueden ser consultadas en [21]. El resto de la notación será introducida a lo largo del texto.

Capítulo 1

Acciones de Grupos Topológicos

En este capítulo introduciremos los conceptos y resultados básicos sobre la teoría de acciones de grupos topológicos que usaremos a lo largo de este texto.

Si $(G, *)$ es un grupo, para facilitar la notación, eliminaremos el signo $*$ que denota la operación, sustituyéndolo por la yuxtaposición de los elementos del grupo. Así, si a y b son elementos de G , el producto $a * b$ lo denotaremos simplemente por ab .

1.1. Acciones de Grupos Topológicos

Un **grupo topológico** G es un grupo provisto de una topología que hace continua la función producto:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\rightarrow gh \end{aligned}$$

y la función de inversión:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

Como ejemplos tenemos los siguientes grupos topológicos:

- (1) El grupo general lineal $GL(n)$ que consiste de todos los operadores lineales e invertibles de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Cada elemento de $GL(n)$ se representa como una matriz cuadrada invertible de $n \times n$. Esto permite identificar a $GL(n)$ como un subespacio de \mathbb{R}^{n^2} . La topología de $GL(n)$ es precisamente la topología heredada de \mathbb{R}^{n^2} .

- (2) El grupo ortogonal $O(n)$ que consiste de todos los operadores lineales de $GL(n)$ que preservan el producto interior. En lenguaje de matrices, $O(n)$ representa todas las matrices cuadradas de $n \times n$ cuyas columnas forman una base ortonormal. La topología de $O(n)$ es la heredada de \mathbb{R}^{n^2} .

Los dos ejemplos anteriores son ejemplos de grupos de Lie. Para ser más específicos, un **grupo de Lie** es un grupo provisto de una estructura de n -variedad diferenciable donde el producto y la inversión son funciones suaves.

Otro ejemplo de grupo topológico que será de gran importancia en este trabajo, es el grupo de todas las transformaciones afines de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.1.1. Para cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ sea $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslación por v ; es decir, $T_v(x) = v + x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todas las traslaciones es un grupo isomorfo al grupo aditivo de \mathbb{R}^n . Para cada transformación $\sigma \in GL(n)$ y cada $v \in \mathbb{R}^n$ es fácil ver que $\sigma T_v \sigma^{-1} = T_{\sigma(v)}$. Esto induce un homomorfismo de $GL(n)$ al grupo de todos los automorfismos del grupo aditivo \mathbb{R}^n , y por lo tanto tenemos un producto semidirecto (interno):

$$\mathbb{R}^n \rtimes GL(n)$$

llamado el **grupo afín** de \mathbb{R}^n (see e.g. [2] or [31]). Este grupo será denotado por $\text{Aff}(n)$. Cada elemento $g \in \text{Aff}(n)$ se suele representar como una transformación lineal seguida de una traslación. Es decir, si $g \in \text{Aff}(n)$, entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in GL(n)$ tal que

$$g(x) = v + \sigma(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Como cualquier producto semidirecto, $\text{Aff}(n)$ se topologiza con la topología producto de $\mathbb{R}^n \times GL(n)$. Esta topología convierte a $\text{Aff}(n)$ en un grupo de Lie con únicamente dos componentes conexas.

Definición 1.1.1. Sean G un grupo topológico y X es un espacio topológico. Una **acción continua** de G en X es una función continua $\theta : G \times X \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\theta(e, x) = x$, para todo $x \in X$;
- (2) $\theta(h, \theta(gx)) = \theta(hg, x)$, para todo $g, h \in G$, $y x \in X$.

En la práctica a las acciones continuas les llamaremos simplemente acciones. Además, si $\theta : G \times X \rightarrow X$ es una acción de G en X , es común escribir $\theta(g, x)$ simplemente como gx . Con esta notación, las propiedades (1) y (2) de la definición anterior, se reescriben de la siguiente manera:

$$ex = x, \quad \text{y} \quad h(gx) = (hg)x,$$

para cada $x \in X$ y cada $g, h \in G$.

Un G -espacio es un par (X, θ) formado por un espacio topológico X y una acción continua $\theta : G \times X \rightarrow X$. En dicha situación, para cada $x \in X$, el conjunto

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

recibirá el nombre de **órbita** de x .

Definición 1.1.2. Diremos que la acción de un grupo G en un G -espacio X es **transitiva** (o que G actúa **transitivamente** en X) si para cualquier punto $x \in X$, $G(x) = X$.

Ejemplo 1.1.2. La acción del grupo ortogonal $O(n)$ en la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es transitiva ya que para cualesquiera dos puntos x y y de \mathbb{S}^{n-1} existe una transformación ortogonal $g \in O(n)$ tal que $g(x) = y$.

Si X es un G -espacio, entonces cada elemento $g \in G$ induce una función $\theta_g : X \rightarrow X$, de la siguiente manera:

$$\theta_g(x) = gx.$$

La función θ_g recibirá el nombre de **transición**. La continuidad de la acción, nos garantiza que θ_g es continua. Además, para cualesquiera $g \in G$, $x \in X$, se cumple que:

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}(x) = \theta_g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = x,$$

y también

$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g(x) = \theta_{g^{-1}}(gx) = (g^{-1}g)x = x.$$

De esta manera, para cada $g \in G$, la función θ_g es en realidad un homeomorfismo de X sobre X . Así, la acción θ define un homomorfismo de G en $\mathcal{H}(X)$, el grupo de todos los homeomorfismos de X . Por esta razón, afirmaciones como $g\bar{A} = \overline{gA}$, $g(A \cap B) = gA \cap gB$ o gU es abierto (cerrado) si y sólo si U es abierto (cerrado) serán obviadas.

Si $A \subset X$ y $H \subset G$, denotaremos por $H(A)$ a la H -saturación de A , es decir:

$$H(A) = \{ha \mid h \in H, a \in A\}.$$

Diremos que un subconjunto A de un G -espacio X es **G -invariante** (o simplemente **invariante**, cuando se sobreentienda quién es el grupo en cuestión), si $G(A) = A$.

Supongamos que X y Y son G -espacios, y que $f : X \rightarrow Y$ es una función. Diremos que f es **G -equivariante** si

$$f(gx) = gf(x), \text{ para cualesquiera } x \in X, \quad g \in G.$$

Además, si la acción en Y es trivial ($gy = y$ para todo $g \in G$, $y \in Y$) diremos que f es **G -invariante**. En otras palabras, $f : X \rightarrow Y$ es G -invariante, si

$$f(gx) = f(x), \quad \text{para cualesquiera } x \in X, \quad g \in G.$$

Si se sobreentiende quién es el grupo G , las funciones G -equivariantes (G -invariantes) serán llamadas simplemente equivariantes (invariantes).

Si X es un G -espacio, para cada $x \in X$, se define el **grupo de isotropía** de x o **estabilizador** de x como el subconjunto $G_x \subset G$ determinado por todos los elementos de g que fijan x . Es decir,

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Claramente G_x es un subgrupo cerrado de G .

Proposición 1.1.3. *Si X es un G -espacio y $(g, x) \in G \times X$, entonces:*

$$gG_xg^{-1} = G_{gx}.$$

Demostración. Si $h \in G_x$, entonces

$$ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}gx) = (gh)x = gx,$$

por lo que $ghg^{-1} \in G_{gx}$. Esto prueba que $gG_xg^{-1} \subset G_{gx}$.

Por otro lado, si $h \in G_{gx}$, entonces $h(gx) = (hg)x = gx$, y por lo tanto

$$x = (g^{-1}hg)x.$$

Esto garantiza que $(g^{-1}hg) \in G_x$ y en consecuencia,

$$h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}.$$

Así, $G_{gx} \subset gG_xg^{-1}$, lo cual implica que $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, como se quería demostrar. \square

La familia de todos los subgrupos de un grupo G que son conjugados a un subgrupo dado H será denotada por $[H]$. Esto es,

$$[H] = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}.$$

La familia $[H]$ se llama **G -tipo orbital** (o simplemente, tipo orbital). Si $[H_1]$ y $[H_2]$ son dos tipos orbitales, diremos que $[H_1] \preceq [H_2]$ si $H_1 \subset gH_2g^{-1}$ para algún $g \in G$. La relación \preceq define un orden parcial en el conjunto de todos los tipos orbitales. Además, como $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ para cualquier $x \in X$ y $g \in G$, tenemos que $[G_x] = \{G_{gx} \mid g \in G\}$.

Si X es un G -espacio y H un subconjunto de G , denotaremos por X^H al conjunto de todos los puntos H -fijos de X , es decir:

$$X^H = \{x \in X \mid H \subset G_x\}.$$

Proposición 1.1.4. *Sean X un G -espacio y $H \subset G$ un subgrupo. Entonces el conjunto X^H es cerrado en X .*

Demostración. Sea $x \in \overline{X^H}$. Entonces existe una red $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset X^H$ que converge a x . Como $x_i \in X^H$ para todo $i \in \mathcal{I}$, se cumple que

$$hx_i = x_i, \quad \text{para todo } h \in H, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Luego, si aplicamos la continuidad de la acción obtenemos que

$$hx = \lim hx_i = \lim x_i = x.$$

De este modo podemos concluir que $h \in G_x$ para todo $h \in H$, y por lo tanto $x \in X^H$. \square

1.2. Espacio de Órbitas

A continuación veremos que las órbitas de un G -espacio inducen una partición en clases de equivalencia en dicho espacio.

Proposición 1.2.1. *Si X es un G -espacio, entonces cualesquiera dos órbitas de X son iguales o son ajenas.*

Demostración. Supongamos que $x_1, x_2 \in X$ son puntos tales que

$$G(x_1) \cap G(x_2) \neq \emptyset.$$

Entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1x_1 = g_2x_2$, y por lo tanto

$$x_1 = g_1^{-1}g_2x_2 \in G(x_2), \quad \text{y} \quad x_2 = g_2^{-1}g_1x_1 \in G(x_1).$$

Este hecho nos permite concluir que

$$G(x_1) \subset G(x_2) \quad \text{y} \quad G(x_2) \subset G(x_1),$$

lo cual implica que $G(x_1) = G(x_2)$. \square

Denotaremos por X/G al conjunto de órbitas de un G -espacio X . Este conjunto es a su vez un espacio topológico si le damos la topología cociente inducida por X . Al espacio topológico X/G lo llamaremos **espacio orbital**, y a la función cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ que asigna a cada $x \in X$ su órbita $\pi(x) = G(x)$ le llamaremos **proyección orbital**.

Notemos que si X es un G -espacio, y $C \subset X$ es un subconjunto arbitrario, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = G(C).$$

Esta igualdad será usada frecuentemente.

Proposición 1.2.2. *La proyección orbital $\pi : X \rightarrow X/G$ es una función abierta.*

Demostración. Sea U abierto en X . Entonces

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = G(U) = \bigcup_{g \in G} gU,$$

lo cual es una unión de abiertos (ya que cada gU es abierto) y, por lo tanto $\pi(U)$ es abierto. \square

1.3. Métricas Invariantes

Sea (X, d) un G -espacio. Diremos que la métrica d es G -invariante, si

$$d(gx, gy) = d(x, y),$$

para todo $g \in G$ y para todo par $x, y \in X$.

Ejemplo 1.3.1. La métrica euclidiana d en \mathbb{R}^n es $O(n)$ -invariante.

La existencia de una métrica invariante en un G -espacio garantiza la metrizabilidad del espacio orbital, como veremos a continuación.

Teorema 1.3.1. Sean G un grupo topológico y (X, d) un G -espacio metrizable cuyas órbitas son conjuntos cerrados. Si la métrica d es G -invariante, entonces la función dada por:

$$d^*(G(x), G(y)) = \inf\{d(x', y') \mid x' \in G(x), y' \in G(y)\}, \quad G(x), G(y) \in X/G \quad (1.1)$$

define una métrica en X/G compatible con la topología cociente. Además, tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$d^*(G(x), G(y)) \leq d(x, y), \quad x, y \in X. \quad (1.2)$$

Demostración. La desigualdad (1.2) es consecuencia directa de la definición de d^* . Evidentemente la función d^* satisface las siguientes dos propiedades:

- (1) $d^*(G(x), G(y)) = 0$ si y sólo si $G(x) = G(y)$.
- (2) $d^*(G(x), G(y)) = d^*(G(y), G(x))$

Observemos que para cualesquiera dos órbitas $G(x)$ y $G(y)$ en X/G y para cualquier par de puntos $x' \in G(x)$ y $y' \in G(y)$, existen elementos del grupo $g_1 \in G$ y $g_2 \in G$ tales que $x' = g_1x$ y $y' = g_2y$. Como la métrica d es G -invariante, tenemos que

$$d(x', y') = d(g_1x, g_2y) = d(x, g_1^{-1}g_2y) = d(g_2^{-1}g_1x, y).$$

Estas igualdades implican que

$$d^*(G(x), G(y)) = \inf\{d(x, gy) \mid g \in G\} = \inf\{d(gx, y) \mid g \in G\}.$$

Es decir, $d^*(G(x), G(y)) = d(x, G(y)) = d(y, G(x))$.

Para demostrar la desigualdad del triángulo, consideremos $G(x)$, $G(y)$ y $G(z)$ tres órbitas en X/G . Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar elementos $g, h \in G$ tales que

$$d(x, gy) \leq d^*(G(x), G(y)) + \varepsilon/2,$$

$$d(y, hz) < d^*(G(y), G(z)) + \varepsilon/2.$$

Como d es G -invariante, tenemos que:

$$\begin{aligned} d^*(G(x), G(z)) &\leq d(x, ghz) \leq d(x, gy) + d(gy, ghz) = d(x, gy) + d(y, hz) \\ &\leq d^*(G(x), G(y)) + \varepsilon/2 + d^*(G(y), G(z)) + \varepsilon/2 \\ &= d^*(G(x), G(y)) + d^*(G(y), G(z)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que $d^*(G(x), G(z)) < d^*(G(x), G(y)) + d^*(G(y), G(z)) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y por lo tanto se cumple la desigualdad del triángulo:

$$d^*(G(x), G(z)) \leq d^*(G(x), G(y)) + d^*(G(y), G(z)).$$

Para completar la prueba necesitamos demostrar que d^* metriza la topología cociente en X/G . Sea $\pi : X \rightarrow X/G$ la proyección orbital. Demostraremos que para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\pi(N_d(x, \varepsilon)) = N_{d^*}(G(x), \varepsilon).$$

Obsérvese que la igualdad anterior implica que $\pi : (X, d) \rightarrow (X/G, d^*)$ es una función continua, suprayectiva y abierta y por lo tanto d^* sería compatible con la topología cociente de X/G .

Sea $y \in N_d(x, \varepsilon)$. Entonces $d^*(G(x), G(y)) \leq d(x, y)$ y por lo tanto $\pi(y) = G(y) \in N_{d^*}(G(x), \varepsilon)$. Esto implica que $\pi(N_d(x, \varepsilon)) \subset N_{d^*}(G(x), \varepsilon)$.

Por otro lado, si $G(z) \in N_{d^*}(G(x), \varepsilon)$ entonces

$$d(x, G(z)) = d^*(G(x), G(z)) < \varepsilon.$$

De esta manera podemos encontrar $z' \in G(z)$ tal que $d(x, z') < \varepsilon$. Luego $G(z) = \pi(z') \in \pi(N_d(x, \varepsilon))$ demostrando así que $N_{d^*}(G(x), \varepsilon) \subset \pi(N_d(x, \varepsilon))$. Esta última contención completa la demostración. \square

1.4. Acciones de Grupos Compactos

Sea X un G -espacio y $\theta : G \times X \rightarrow X$ la acción de G en X . Definamos para cada punto $x \in X$, una función $\theta_x : G \rightarrow X$ dada por

$$\theta_x(g) = gx. \tag{1.3}$$

Como θ es una función continua, θ_x también lo es. Notemos que $\theta_x(G) = G(x)$ es la órbita de x . Si G es un grupo compacto, la imagen $\theta_x(G)$ también es compacta, y por lo tanto todas las órbitas de X son conjuntos compactos. También observemos,

$$\theta_x^{-1}(\{x\}) = \{g \in G \mid gx = x\} = G_x.$$

De este modo, la continuidad de la función θ_x garantiza que para cada $x \in X$, el estabilizador G_x es un subgrupo cerrado de G . Si además G es compacto, entonces G_x también es compacto.

Todo lo anterior lo podemos resumir en la siguiente observación.

Observación 1.4.1. Si G es un grupo compacto y X es un G -espacio, entonces:

- (1) las órbitas son subconjuntos compactos de X ,
- (2) los grupos de isotropía son subgrupos compactos de G .

Supongamos que X es un G -espacio y que G es compacto. Para cualquier punto $x \in X$, el subgrupo G_x actúa en G de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_x \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\rightarrow gh^{-1} \end{aligned}$$

Por la continuidad de la función producto en el grupo, dicha acción es continua. Entonces el grupo G dotado con la acción anterior se convierte en un G_x -espacio. Sean G/G_x el espacio orbital bajo dicha acción y $\pi : G \rightarrow G/G_x$ la proyección orbital. Notemos que G/G_x lo podemos ver como el conjunto de clases laterales:

$$G/G_x = \{gG_x \mid g \in G\}.$$

Ahora podemos pensar que G actúa en G/G_x por traslaciones izquierdas, es decir

$$\begin{aligned} G \times (G/G_x) &\rightarrow G/G_x \\ (g, hG_x) &\rightarrow ghG_x \end{aligned}$$

Esta acción es continua y, por tanto, G/G_x es a su vez un G -espacio.

Consideremos la función $\theta_x : G \rightarrow G(x)$ definida anteriormente. Notemos que para cualesquiera $g \in G$, y $h \in G_x$, se cumple que

$$\theta_x(gh) = (gh)x = g(hx) = gx = \theta_x(g).$$

Luego, por la propiedad universal del cociente, existe una función continua $\bar{\theta}_x : G/G_x \rightarrow G(x)$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta_x} & G(x) \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\theta}_x & \\ G/G_x & & \end{array}$$

Notemos que $\bar{\theta}_x(gG_x) = \bar{\theta}_x(\pi(g)) = \theta_x(g) = gx$, para cada $g \in G$, $x \in X$.

Proposición 1.4.2. Si X es un G -espacio y G es un grupo compacto, entonces $\bar{\theta}_x : G/G_x \rightarrow G(x)$ es un homeomorfismo equivariante.

Demostración. La propiedad universal del cociente nos garantiza que $\bar{\theta}_x$ es continua. Como G es compacto y π es continua, el espacio G/G_x es compacto. En vista de que $G(x)$ es

de Hausdorff, podemos concluir que $\bar{\theta}_x$ es una función cerrada. Por otro lado, para cada $g, h \in G$ y cada $x \in X$,

$$\bar{\theta}_x(hgG_x) = (hg)x = h(gx) = h\bar{\theta}_x(gG_x),$$

lo cual demuestra que $\bar{\theta}_x$ es G -equivariante. Para completar la prueba necesitamos demostrar que $\bar{\theta}_x$ es una biyección. En efecto, si $y \in G(x)$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Entonces

$$\bar{\theta}_x(gG_x) = \bar{\theta}_x(\pi(g)) = \theta_x(g) = gx = y,$$

y por lo tanto $\bar{\theta}_x$ es una función suprayectiva. Ahora supongamos que g_1G_x y g_2G_x son dos clases laterales en G/G_x tales que

$$\bar{\theta}_x(g_1G_x) = \bar{\theta}_x(g_2G_x).$$

Como $\bar{\theta}_x(g_iG_x) = \theta_x(g_i) = g_ix$, para $i = 1, 2$, concluimos que $g_1x = g_2x$ y por lo tanto $g_1^{-1}g_2x = x$. Esto demuestra que $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ de donde

$$g_1G_x = g_2G_x.$$

De esta manera hemos demostrado que $\bar{\theta}_x$ es inyectiva y, por lo tanto, $\bar{\theta}_x$ es un homeomorfismo. \square

Proposición 1.4.3. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio arbitrario. Entonces la acción $\theta : G \times X \rightarrow X$ es una función cerrada.*

Demostración. Sea $F \subset G \times X$ cerrado. Consideremos una red $(g_i, x_i)_{i \in I}$ en F que converja a un punto $x \in X$. Necesitamos probar que $x \in \theta(F)$. Como G es compacto, la red $(g_i)_{i \in I}$ tiene una subred (g_{i_γ}) que converge a un elemento $g \in G$. Como G es un grupo topológico, la red $(g_{i_\gamma}^{-1})$ converge a g^{-1} . Pero $x_{i_\gamma} = g_{i_\gamma}^{-1}(g_{i_\gamma}x_{i_\gamma})$, por lo que la red (x_{i_γ}) converge a $g^{-1}x$ y, por lo tanto, la red $(g_{i_\gamma}, x_{i_\gamma})$ converge a $(g, g^{-1}x)$. Como F es cerrado, $(g, g^{-1}x) \in F$, y

$$x = g(g^{-1}x) = \theta(g, g^{-1}x) \in \theta(F),$$

como se quería probar. \square

El siguiente resultado es el responsable de muchas de las propiedades que preserva el espacio orbital de un G -espacio cuando el grupo G es compacto.

Proposición 1.4.4. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio. Entonces la proyección orbital $\pi : X \rightarrow X/G$ es perfecta.*

Recordemos que una función es perfecta, si es cerrada y con fibras compactas.

Demostración. Dado un conjunto cerrado $C \subset X$, tenemos que $\pi^{-1}(\pi(C)) = G(C)$ es cerrado por la proposición 1.4.3, y por lo tanto $\pi(C)$ es cerrado en X/G . Lo anterior demuestra que la proyección orbital es una función cerrada. Para ver que las fibras son compactas, simplemente notemos que cada fibra es, de hecho, una órbita en X y por lo tanto es compacta. \square

Como la paracompacidad se preserva bajo funciones cerradas, (véase [21, teorema 5.1.33]), tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.4.5. *Si G es compacto y X es un G -espacio paracompacto, entonces X/G es paracompacto.*

1.5. Acciones Propias

Cuando el grupo G no es compacto, la proyección orbital no es perfecta, lo cual puede dar origen a un gran número de patologías. Por ejemplo, existen G -espacios metrizable cuyo espacio orbital no satisface ni siquiera el axioma de separabilidad T_0 .

Ejemplo 1.5.1. Sea $X = \mathbb{R}^2$ y G el grupo multiplicativo $(0, \infty)$. Consideremos la acción de G en X dada por

$$(t, x) \rightarrow tx, \quad t \in G, \quad x \in X.$$

Observemos que bajo esta acción, el origen 0 es un punto fijo y por lo tanto $G(0) = \{0\}$. Además, cualquier vecindad de 0 intersecta a todas las otras órbitas. Así, la única vecindad en X/G que contiene a la órbita $G(0)$ es el espacio total X/G y por lo tanto este último no puede ser T_0 .

Para evitar este tipo de situaciones, surgen las *acciones propias*, las cuales generalizan ciertas propiedades de las acciones de grupos compactos.

Sea X un G -espacio. Para cualesquiera dos subconjuntos $S \subset X$ y $T \subset X$, llamaremos **transportador** de S a T (y lo denotaremos por $\langle S, T \rangle$) al siguiente subconjunto de G :

$$\langle S, T \rangle = \{g \in G \mid gS \cap T \neq \emptyset\}.$$

Diremos que un subconjunto $S \subset X$ de un G -espacio X es **pequeño**, si cualquier punto $y \in X$ posee una vecindad V_y con la propiedad de que el transportador

$$\langle S, V_y \rangle$$

tiene cerradura compacta en G .

Definición 1.5.1 ([33]). *Sea G un grupo localmente compacto y X un G -espacio de Tychonoff. Diremos que la acción de G en X es **propia** (en el sentido de Palais) si cualquier punto $x \in X$ tiene una vecindad pequeña.*

Evidentemente, si G es compacto cualquier G -espacio es un G -espacio propio.

En la siguiente proposición enunciamos algunas de las propiedades más importantes de un G -espacio propio. La demostración puede ser consultada en [33].

Proposición 1.5.2. *Sea G un grupo localmente compacto que actúa propiamente en un espacio de Tychonoff X . Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

- (1) El espacio orbital X/G es de Tychonoff.
- (2) Para cualquier punto $x \in X$ la órbita $G(x)$ es un subconjunto cerrado de X . Además, la función $\theta_x : G \rightarrow G(x)$ es abierta.
- (3) Para cualquier punto $x \in X$, el grupo de isotropía G_x es un subgrupo compacto de G y la función $gG_x \rightarrow gx$ es un homeomorfismo G -equivariante de G/G_x sobre la órbita $G(x)$.

1.6. Rebanadas

En esta sección recordaremos el concepto de H -rebanada, el cual es una herramienta básica en el estudio de los grupos topológicos de transformaciones.

Definición 1.6.1. Sea X un G -espacio y H un subgrupo cerrado de G . Diremos que un subconjunto H -invariante $S \subset X$ es una **H -rebanada** en X , si $G(S)$ es abierto en X y existe una función continua y G -equivariante $f : G(S) \rightarrow G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$. En estas condiciones, el conjunto $G(S)$ recibe el nombre de **H -tubo** y la función $f : G(S) \rightarrow G/H$ el nombre de **función rebanadora**. Adicionalmente, si $G(S) = X$, entonces se dice que S es una **H -rebanada global**.

Sea $S \subset X$ una H -rebanada en un G -espacio topológico X . Consideremos $f : G(S) \rightarrow G/H$ la función rebanadora. Se sigue de la continuidad de f que $S = f^{-1}(eH)$ es cerrado en $G(S)$. Por otro lado, como f es G -equivariante, para cada $gs \in G(S)$ se tiene que

$$f(gs) = gf(s) = g(eH) = gH.$$

De aquí concluimos que si $gs \in S$, entonces $gH = eH$ y por lo tanto $g \in H$. En resumen, una H -rebanada S satisface las siguientes cuatro propiedades

- (1) S es H -invariante,
- (2) $G(S)$ es abierto en X ,
- (3) S es cerrado en $G(S)$,
- (4) si $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces $g \in H$.

Cuando la acción de G en X es propia y el conjunto S es pequeño (en particular, si G es compacto), las cuatro condiciones anteriores son suficientes para que S sea una H -rebanada (véase [14, Capítulo. II, §4 y §5] para grupos compactos y [33, teorema 2.14]) para acciones propias.

El siguiente teorema es uno de los resultados fundamentales en la teoría de grupos de transformaciones (vease e.g., [14, pag. 86]):

Teorema 1.6.2 (Teorema de la rebanada). Sea G un grupo compacto de Lie, X un G -espacio de Tychonoff y $x \in X$ cualquier punto. Entonces:

- (1) existe una G_x -rebanada $S \subset X$ tal que $x \in S$,
- (2) $[G_y] \preceq [G_x]$ para todo $y \in G(S)$.

Si X es un G -espacio propio, para cada punto $x \in X$, la G -órbita $G(x)$ es homeomorfa al cociente G/G_x (proposición 1.5.2). De esta manera, si S es una G_x -rebanada para algún punto $x \in S$, la función rebanadora $f : G(S) \rightarrow G/G_x$, induce una retracción $r : G(S) \rightarrow G(x)$ dada por $r(gs) = gx$. Evidentemente r es la composición de f y el homeomorfismo $G/G_x \rightarrow G(x)$ y por lo tanto r es continua y equivariante. Este hecho se resume en el siguiente teorema:

Teorema 1.6.3. *Sean X un G -espacio propio, y $S \subset G$ una G_x -rebanada, para algún $x \in S$. Entonces existe una retracción equivariante $r : G(S) \rightarrow G(x)$ tal que $r^{-1}(x) = S$.*

1.7. Extensores y Retractos Equivariantes

En esta sección introduciremos las nociones de G -extensor absoluto, G -extensor absoluto de vecindad, G -retracto absoluto y G -retracto absoluto de vecindad. Todas estas definiciones son el análogo en la categoría de G -espacios topológicos, de las nociones (no equivariantes) de AE, ANE, AR y ANR.

Sea G un grupo topológico. Diremos que un G -espacio Y es un G -extensor absoluto de vecindad para un G -espacio X (y lo denotaremos por $Y \in G\text{-ANE}(X)$), si para todo subconjunto cerrado e invariante $A \subset X$, y para cualquier función continua y equivariante $f : A \rightarrow Y$, existe una vecindad invariante $U \subset X$ de A y una función $F : U \rightarrow Y$ continua y equivariante que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \nearrow F & \\ U & & \end{array}$$

Si además siempre es posible tomar $U = X$, entonces diremos que Y es un **G -extensor absoluto** para X (y lo denotaremos por $Y \in G\text{-AE}(X)$).

Denotemos por $G\mathcal{M}$ la clase de todos los G -espacios que admiten una métrica G -invariante. Si $Y \in G\text{-ANE}(X)$ para todo $X \in G\mathcal{M}$, entonces diremos que Y es un **G -extensor absoluto de vecindad** (para la clase $G\mathcal{M}$) y lo denotaremos por $Y \in G\text{-ANE}$. Análogamente, diremos que Y es un **G -extensor absoluto** (para la clase $G\mathcal{M}$) y lo denotaremos por $Y \in G\text{-AE}$, si $Y \in G\text{-AE}(X)$, para todo $X \in G\mathcal{M}$.

Un subconjunto invariante Y de un G -espacio Z es llamado un **retracto equivariante de vecindad** (respectivamente, **retracto equivariante**) si existe una retracción equivariante $r : U \rightarrow Y$, donde U es una vecindad invariante de Y en Z ($U = Z$, respectivamente).

En este contexto diremos que un G -espacio Y es un **G -retracto absoluto de vecindad** (para la clase $G\mathcal{M}$) y lo denotaremos por $Y \in G\text{-ANR}$ (respectivamente, **G -retracto absoluto** o en símbolos $Y \in G\text{-AR}$) si Y pertenece a la clase $G\mathcal{M}$ y siempre que Y sea

un subconjunto cerrado e invariante de un G -espacio $Z \in G\mathcal{M}$, entonces Y es un retracts equivariante de vecindad (respectivamente, retracts equivariante) de Z .

Las nociones de G -ANE, G -AE, G -ANR, y G -AR se extienden a otras clases de G -espacios (diferentes de $G\mathcal{M}$). Sin embargo, para los fines de este trabajo, las definiciones anteriores son suficientes.

Además, bajo ciertas circunstancias la clase de los G -ANE's coincide con la clase de los G -ANR's. De la misma manera, la clase de los G -AE's coincide con la clase de los G -AR's.

Teorema 1.7.1. *Sea G un grupo compacto y X un G -espacio metrizable. Entonces $X \in G$ -AR ($X \in G$ -ANR, respectivamente) si y sólo si $X \in G$ -AE ($X \in G$ -ANE, respectivamente).*

Para la demostración del teorema anterior se puede consultar [5, teorema 14].

Diremos que un G -espacio X es G -**contráctil** si existe un punto G -fijo $x_0 \in X$ y una homotopía $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$, y $t \in [0, 1]$ los siguientes enunciados se cumplan:

- (1) $F(x, 0) = x$,
- (2) $F(x, 1) = x_0$,
- (3) $F(gx, t) = gF(x, t)$.

Si además $F(x, t) = x_0$ si y sólo si $x = x_0$ o $t = 1$, entonces diremos que X es **estrictamente G -contráctil** a x_0 .

En la siguiente proposición enlistaremos brevemente algunas propiedades básicas y bien conocidas sobre los G -ANR's y los G -AR's. Las demostraciones se pueden consultar en [3] y [39].

Proposición 1.7.2. *Sea G un grupo compacto y X un G -espacio. Entonces las siguientes propiedades se cumplen.*

- (1) $X \in G$ -AR si y sólo si $X \in G$ -ANR y X es G -contráctil.
- (2) Si $X \in G$ -AR y A es un retracts equivariante de X entonces $A \in G$ -AR.
- (3) Si $X \in G$ -ANR y A es un retracts equivariante de vecindad de X (en particular si A es un retracts equivariante de X) entonces $A \in G$ -ANR.
- (4) Si además G es de Lie, entonces para todo $X \in G$ -AR ($X \in G$ -ANR) y para todo subconjunto cerrado $K \subset G$, el espacio X también es un K -AR (K -ANR). En particular $X \in \text{AR}$ ($X \in \text{ANR}$).

El siguiente teorema es un caso particular de [6, corolario 1].

Teorema 1.7.3. *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G -espacio metrizable. Si X es un G -ANR (G -AR, respectivamente) entonces el G -espacio orbital X/G es un ANR (AR, respectivamente).*

Sean G un grupo compacto de Lie y $K \subset G$ un subgrupo cerrado. Supongamos que $X \in G$ -AR ($X \in G$ -ANR). Entonces, por la proposición 1.7.2 se tiene que X también es un K -AR

(K -ANR). Luego, por el teorema 1.7.3, el K -espacio orbital X/K es un AR (ANR). Este hecho queda resumido en la siguiente proposición:

Proposición 1.7.4. *Para cada subgrupo cerrado K de un grupo compacto de Lie G , el K -espacio orbital de un G -AR (G -ANR) es un AR (ANR).*

Para terminar con esta sección, enunciaremos un último teorema que será utilizado más adelante.

Teorema 1.7.5. *Sea G un grupo compacto de Lie. Un G -espacio metrizable es un G -ANE (G -AE, respectivamente) si y sólo si X es un ANE (AE) y para cada subgrupo cerrado $K \subset G$, el conjunto de K -puntos fijos X^K es un K -retracto por deformación fuerte de vecindad (K -retracto por deformación fuerte) de X .*

La demostración del resultado anterior puede ser consultada en [11, teorema 3.7].

1.8. Cubiertas Invariantes

Si X es un G -espacio, diremos que una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de X es **invariante** si cada U_α es un conjunto G -invariante bajo la acción de G .

Proposición 1.8.1. *Sea X un G -espacio paracompacto. Si G es compacto, entonces toda cubierta abierta invariante $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de X , tiene un refinamiento abierto, invariante y localmente finito.*

Demostración. Consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta e invariante de X . Sea $\pi : X \rightarrow X/G$ la proyección orbital. Por el corolario 1.4.5, X/G es paracompacto. Como π es abierta, la familia $\{\pi(U_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ constituye una cubierta abierta de X/G y, por la paracompacidad de este espacio, existe un refinamiento abierto y localmente finito $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $\{\pi(U_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Por la continuidad de π , la familia $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un refinamiento abierto y localmente finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Además, cada conjunto $\pi^{-1}(V_\lambda)$ es G -invariante, lo cual prueba que $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es el refinamiento buscado. \square

Proposición 1.8.2. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta e invariante de un G -espacio X . Si G es compacto y X paracompacto, entonces existe $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una partición de unidad invariante subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Es decir, cada $p_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ es una función G -invariante, continua y satisface $\overline{p_\alpha^{-1}((0, 1])} \subset U_\alpha$. Además la familia $\{p_\alpha^{-1}((0, 1]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es localmente finita.*

Demostración. Consideremos la proyección orbital $\pi : X \rightarrow X/G$. Como X/G es paracompacto, existe una partición de unidad $\{q_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ subordinada a la cubierta $\{\pi(U_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de X/G . Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, la cerradura $\overline{q_\alpha^{-1}((0, 1])}$ está contenida en $\pi(U_\alpha)$.

Para cada índice $\alpha \in \mathcal{A}$, definamos $p_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ por

$$p_\alpha = q_\alpha \circ \pi.$$

Claramente $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una partición de unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Además, como cada U_α es un conjunto invariante, la preimagen $\pi^{-1}(\pi(U_\alpha))$ coincide con

el conjunto U_α . De esta manera, tenemos que

$$\overline{p_\alpha^{-1}((0, 1])} = \overline{\pi^{-1}(q_\alpha^{-1}((0, 1]))} \subset \pi^{-1}(\overline{q_\alpha^{-1}((0, 1]))} \subset \pi^{-1}(\pi(U_\alpha)) = U_\alpha.$$

Para completar la prueba, sólo necesitamos demostrar que cada p_α es invariante. En efecto, si $g \in G$ y $x \in X$, entonces $\pi(x) = \pi(gx)$, por lo que

$$p_\alpha(gx) = q_\alpha(\pi(gx)) = q_\alpha(\pi(x)) = p_\alpha(x),$$

lo cual prueba que p_α es invariante, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es la partición de unidad buscada. \square

Diremos que una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de un G -espacio X es una **cubierta tubular** si cada conjunto U_α es un H_α -tubo, para algún subgrupo cerrado $H_\alpha \subset G$.

Hemos visto que si G es compacto, entonces toda cubierta invariante de un G -espacio paracompacto admite un refinamiento invariante y localmente finito. Ahora probaremos un resultado análogo en el caso de cubiertas tubulares. Para ello es necesario el siguiente lema.

Lema 1.8.3. *Sea G un grupo topológico que actúa continuamente en un espacio X . Supongamos que $H \subset G$ es un subgrupo cerrado y que $S \subset X$ es una H -rebanada. Consideremos $U \subset X$ un abierto G -invariante. Si $U \cap S \neq \emptyset$, entonces $U \cap S$ es una H -rebanada.*

Demostración. Primero observemos que $U \cap S$ es H -invariante. Para ello consideremos $x \in U \cap S$ y $h \in H$. Como S es H -invariante, $hs \in S$ para cada $s \in S$. Además, como U es G -invariante, también se cumple que $hs \in U$ para cada $s \in U$. Por lo tanto, si $s \in U \cap S$ entonces $hs \in U \cap S$. Esto muestra que $U \cap S$ es H -invariante.

Ahora demostremos que $G(U \cap S)$ es abierto en X . Para ello, es suficiente demostrar que $G(U \cap S) = U \cap G(S)$. En efecto, si $x \in U \cap G(S)$, entonces $x = gs$ para algún $g \in G$ y $s \in S$ tal que $gs \in U$. Como U es invariante, $s = g^{-1}x \in U$ y por lo tanto $x = gs \in G(U \cap S)$, de donde concluimos que

$$U \cap G(S) \subset G(U \cap S).$$

Además, como U es invariante, la contención $G(U \cap S) \subset U \cap G(S)$ es obvia. Esto prueba que $U \cap G(S) = G(U \cap S)$ y por lo tanto $G(U \cap S)$ es abierto, como se quería demostrar.

Para finalizar la prueba, consideremos la función rebanadora $f : G(S) \rightarrow G/H$. Evidentemente, la restricción $F = f|_{G(S \cap U)}$ es una función equivariante que satisface $F^{-1}(eH) = U \cap S$. De aquí concluimos que $U \cap S$ es una H -rebanada. \square

Proposición 1.8.4. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio paracompacto. Sea $\{G(S_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta tubular, donde cada S_α es una H_α -rebanada. Entonces la familia $\{G(S_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ admite un refinamiento tubular localmente finito.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $U_\alpha = G(S_\alpha)$. Supongamos que $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ como en la demostración de la proposición 1.8.1. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\alpha_\lambda \in \mathcal{A}$, tal que

$$\pi^{-1}(V_\lambda) \subset U_{\alpha_\lambda} = G(S_{\alpha_\lambda}).$$

Llamemos $Q_\lambda = S_{\alpha_\lambda} \cap \pi^{-1}(V_\lambda)$. Entonces, por el lema 1.8.3, Q_λ es una H_{α_λ} -rebanada, y

$$\pi^{-1}(V_\lambda) = G(Q_\lambda),$$

por lo que $\{G(Q_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es el refinamiento localmente finito que buscábamos. \square

Sea G un grupo compacto de Lie y X un G -espacio. Una **cubierta G -normal de X** , es una familia

$$\mathcal{U} = \{(gS_\mu, H_\mu) \mid g \in G, \mu \in M\}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- (1) H_μ es un subgrupo cerrado de G , para cada $\mu \in M$.
- (2) S_μ es una H_μ -rebanada, para cada $\mu \in M$.
- (3) La familia de tubos abiertos $\{G(S_\mu)\}_{\mu \in M}$ es una cubierta abierta de X .
- (4) Existe una partición de unidad invariante $\{p_\mu : X \rightarrow [0, 1]\}_{\mu \in M}$, subordinada a la cubierta $\{G(S_\mu)\}_{\mu \in M}$.

Recordemos que una cubierta \mathcal{U} de un espacio X es un **refinamiento estrella** de otra cubierta \mathcal{V} de X si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que

$$\text{St}(U, \mathcal{U}) = \{W \in \mathcal{U} \mid W \cap U \neq \emptyset\} \subset V.$$

El conjunto $\text{St}(U, \mathcal{U})$ recibe el nombre de **estrella** de U respecto a \mathcal{U} .

Teorema 1.8.5. *Sea G un grupo compacto de Lie y sea X un G -espacio paracompacto. Para cada cubierta abierta \mathcal{V} de X existe una G -cubierta normal $\mathcal{U} = \{(gS_\mu, H_\mu) \mid g \in G, \mu \in M\}$ de X tal que \mathcal{U} es un refinamiento estrella de \mathcal{V} . Además, para cada $\mu \in M$, existe $x_\mu \in S_\mu$ tal que el G -estabilizador de x_μ , G_{x_μ} coincide con H_μ .*

Demostración. Como X es paracompacto, se pueden escoger cubiertas \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 de X tales que \mathcal{U}_1 es un refinamiento estrella de \mathcal{U}_2 y \mathcal{U}_2 es un refinamiento estrella de \mathcal{V} .

Sea U el subconjunto de $X \times X$ que consiste de todos los puntos (x, y) tales que existe un elemento $O \in \mathcal{U}_1$ que contiene simultáneamente a x y a y . Evidentemente, U es una vecindad abierta de la diagonal $\Delta \subset X \times X$.

La acción de G en X define una acción continua de G en $X \times X$ de la siguiente manera:

$$(g, (x, y)) = (gx, gy).$$

Por la compacidad de G , existe una vecindad invariante V de Δ en $X \times X$ tal que $V \subset U$. Para cada $x \in X$, sea $V[x] = \{z \in X \mid (x, z) \in V\}$. Como V es abierto en $X \times X$, el conjunto $V[x]$ es una vecindad de x para cada $x \in X$. Afirmamos que para cualesquiera $g \in G$ y $x \in X$, se cumple la igualdad $gV[x] = V[gx]$. En efecto, si $z \in V[gx]$, entonces $(gx, z) \in V$. Como V es G -invariante, la contención anterior sucede si y sólo si $(x, g^{-1}z) \in V$. Es decir, si y sólo si $g^{-1}z \in V[x]$. Pero esta contención es equivalente a $z \in gV[x]$, lo cual demuestra lo que se quería.

Sea \mathcal{W} la cubierta abierta de X definida por:

$$\mathcal{W} = \{V[x] \mid x \in X\}.$$

Observemos que para cada $x \in X$, el conjunto $V[x]$ está contenido en $\text{St}(x, \mathcal{U}_1)$. Además, como cada estrella $\text{St}(x, \mathcal{U}_1)$ está contenida en un elemento de \mathcal{U}_2 , podemos concluir que \mathcal{W} es un refinamiento de \mathcal{U}_2 y por lo tanto un refinamiento estrella de \mathcal{V} .

Escojamos en cada órbita un representante, digamos $x \in G(x)$ y llamemos P al conjunto de todos los representantes. Por la continuidad de la acción de G en X , existe una vecindad O_x de la identidad de G , y una vecindad G_x -invariante M_x de x en X tal que

$$O_x M_x \subset V[x] \in \mathcal{W}.$$

Por el teorema de la rebanada 1.6.2, existe una G_x -rebanada Q_x tal que $x \in Q_x$. Entonces $S_x = M_x \cap Q_x$ también es una G_x -rebanada y

$$x \in S_x \subset M_x.$$

Además $O_x S_x \subset O_x M_x \subset V[x]$. En particular $S_x \subset V[x]$ y

$$gS_x \subset gV[x] = V[gx] \in \mathcal{W}, \text{ para cada } g \in G.$$

Sea entonces $\mathcal{U} = \{(gS_x, G_x) \mid g \in G, x \in P\}$. Evidentemente \mathcal{U} es un refinamiento de \mathcal{W} y por lo tanto es un refinamiento estrella de \mathcal{V} .

Finalmente, por el teorema 1.8.2, podemos garantizar la existencia de una partición de unidad invariante y localmente finita subordinada a la cubierta abierta $\{G(S_x)\}$. \square

Capítulo 2

Q-variedades e Hiperespacios

2.1. Q-variedades

El **cubo de Hilbert** es el producto topológico $\prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]$. Dicho espacio será denotado siempre por la letra Q . Como $[0, 1]$ es un espacio métrico y compacto, la topología producto hace a Q un espacio metrizable y compacto. Además, a diferencia de los cubos finito-dimensionales, el cubo de Hilbert es un espacio homogéneo (véase [40, teorema 6.1.6]).

Un espacio topológico Y es una **Q-variedad**, si es localmente homeomorfo a Q . Es decir, si cada punto $y \in Y$ tiene una vecindad abierta $U \subset Y$ tal que U es homeomorfo a un abierto del cubo Q .

Las Q variedades han sido estudiadas por diferentes autores en la segunda mitad del siglo pasado. El texto clásico de Chapman [15] compila la mayoría de los resultados básicos sobre Q -variedades, mientras que en el artículo de H. Toruńczyk [38] se encuentra el teorema más importante de caracterización de Q -variedades. Otro texto un poco más reciente que resume los resultados más conocidos sobre Q -variedades compactas es el libro de Van Mill [40]. En esta sección haremos un pequeño resumen de los teoremas sobre Q variedades que se utilizarán en este trabajo. Escribir la demostración de dichos teoremas excede el propósito de este trabajo y por esta razón, omitiremos las pruebas dejando la referencia para una futura consulta del lector. Las únicas excepciones serán el corolario 2.1.3, la proposición 2.1.6 y el teorema de Edwards 2.1.9, para los cuales no encontramos una referencia previamente escrita.

Diremos que un subconjunto cerrado A de un espacio métrico (X, d) es un **Z-conjunto**, si la familia $\{\phi \in C(Q, X) \mid \phi(Q) \cap A = \emptyset\}$ es densa en $C(Q, X)$, donde $C(Q, X)$ es el espacio de todas las funciones continuas de Q a X equipado con la topología compacto-abierta.

Observación 2.1.1. Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subconjunto cerrado tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f : X \rightarrow X \setminus A$ con $d(x, f(x)) < \varepsilon$, entonces A es un Z -conjunto.

Demostración. Sea $\varphi \in C(Q, X)$ una función arbitraria. Observemos que al ser Q compacto, la topología compacto abierta en $C(Q, X)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme. Así, dado $\varepsilon > 0$, es suficiente encontrar una función $\phi \in C(Q, X)$ tal que $\phi(Q) \cap A = \emptyset$ y $d(\varphi(q), \phi(q)) < \varepsilon$ para cualquier punto $q \in Q$.

Definamos $\phi = f \circ \varphi$. Entonces $\phi(Q) = f(\varphi(Q)) \subset X \setminus A$ y

$$d(\varphi(q), \phi(q)) = d(\varphi(q), f(\varphi(q))) < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que A es Z -conjunto. \square

Una función continua $f : M \rightarrow X$ entre dos espacios métricos es una **Z -función** si $f(M)$ es un Z -conjunto en X .

En [38, teorema 1], Toruńczyk utilizó las Z -funciones para caracterizar las Q -variedades.

Teorema 2.1.2. Sean X un ANR localmente compacto, $k \in \mathbb{N}$ un número natural e $\mathbb{I}^k = [0, 1]^k$ el cubo de dimensión k . Supongamos que $C(\mathbb{I}^k, X)$, el espacio de todas las funciones continuas de \mathbb{I}^k en X , está equipado con la topología compacto abierta. Si el conjunto de todas las Z -funciones de $C(\mathbb{I}^k, X)$ es denso en $C(\mathbb{I}^k, X)$, entonces X es una Q -variedad.

En particular, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.1.3. (X, d) es un espacio métrico, ANR y localmente compacto tal que para cada $\varepsilon > 0$ existen dos funciones $f : X \rightarrow X$ y $g : X \rightarrow X$ tales que

- (1) $f(X) \cap g(X) = \emptyset$, y
- (2) para cada $x \in X$, $d(x, f(x)) < \varepsilon$ y $d(x, g(x)) < \varepsilon$,

entonces X es una Q variedad.

Demostración. Sea $\phi \in C(\mathbb{I}^k, X)$ una función arbitraria. Dado $\varepsilon > 0$, sean f y g como en el enunciado del teorema. Entonces la función $g \circ \phi$ es ε -cercana a ϕ . Además, $g(\phi(\mathbb{I}^k))$ es un Z -conjunto ya que $f : X \rightarrow X \setminus g(X) \subset X \setminus g(\phi(\mathbb{I}^k))$ satisface que $d(x, f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Así, en virtud de la observación 2.1.1, $g(\phi(\mathbb{I}^k))$ es un Z -conjunto y por el teorema 2.1.2, concluimos que X es una Q -variedad. \square

Teorema 2.1.4 ([38, §3]). Sea X un espacio métrico localmente compacto y sea $M \subset X$ una Q -variedad. Si el complemento de M en X es un Z -conjunto, entonces X también es una Q -variedad.

Diremos que una función entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ es **propia**, si para cualquier subconjunto compacto $C \subset Y$ la preimagen $f^{-1}(C)$ es un subconjunto compacto.

Es un hecho conocido que cualquier función perfecta es propia (véase [21, 3.7.2]). En particular la proyección orbital de un G -espacio en donde G es un grupo compacto es

perfecta (Proposición 1.4.4) y por lo tanto es propia, como indicamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. Sea G un grupo compacto y X un G -espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \rightarrow X/G$ es una función propia.

El ejemplo anterior será utilizado más adelante.

Definición 2.1.5. Diremos que una función $f : X \rightarrow Y$ entre ANR's es **tipo celda** (abreviado CE) si satisface las siguientes condiciones:

- (1) f es suprayectiva.
- (2) f es propia.
- (3) Para cada $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ tiene la propiedad UV^∞ en X . Esto quiere decir que si U es una vecindad de $f^{-1}(y)$, entonces existe una vecindad $V \subset U$ de $f^{-1}(y)$ tal que la inclusión $V \hookrightarrow U$ es homotópica a una función constante.

Supongamos que X y Y son ANR's y $f : X \rightarrow Y$ es una función cuyas fibras $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, son contráctiles. Entonces, para cada $y \in Y$, existe una homotopía $H : f^{-1}(y) \times [0, 1] \rightarrow f^{-1}(y) \subset X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = c$ para algún punto fijo $c \in f^{-1}(y)$. Sea $U \subset X$ una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$. Consideremos el conjunto $A \subset X \times [0, 1]$ dado por

$$A = (f^{-1}(y) \times [0, 1]) \cup (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}).$$

Definamos $F : A \rightarrow U$ de la siguiente manera:

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, t), & \text{si } x \in f^{-1}(y), \quad t \in [0, 1], \\ x, & \text{si } t = 0, \\ c, & \text{si } t = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Evidentemente F es continua. Además, como U es abierto en $X \in \text{ANR}$, entonces U también es un ANR. De esta manera, existe una vecindad $O \subset X \times [0, 1]$ de A y una extensión continua $\Phi : O \rightarrow U$ de F . Por otro lado, como $[0, 1]$ es compacto, existe una vecindad $V \subset X$ de $f^{-1}(y)$ tal que $V \times [0, 1] \subset O$ y $V \subset U$. En estas condiciones, es claro que la restricción $\Phi|_{V \times [0, 1]}$ es una homotopía entre la inclusión $V \hookrightarrow U$ y la función constante $V \rightarrow c \in U$ y por lo tanto la función f tiene la propiedad UV^∞ . Todo el razonamiento anterior se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre ANR's cuyas fibras son contráctiles. Entonces la función f tiene la propiedad UV^∞ .

Una función entre dos espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo cercano** si para cada cubierta abierta \mathcal{U} de Y existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, \mathcal{U} -cercano a f . Esto último significa que para cada $x \in X$ existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{f(x), h(x)\} \subset U$. En particular, si existe un homeomorfismo cercano entre dos espacios topológicos, entonces dichos espacios son homeomorfos.

El siguiente teorema es básico en la teoría de Q -variedades. La demostración de R. D. Edwards puede ser consultada en [15, teorema 43.1].

Teorema 2.1.7. *Si M es una Q -variedad, X es un ANR y $f : M \rightarrow X$ es una CE-función, entonces la función:*

$$f \times 1_Q : M \times Q \rightarrow X \times Q$$

es un homeomorfismo cercano.

La demostración del siguiente resultado, mejor conocido como el *teorema de estabilidad de Q -variedades*, puede ser consultada en [15, teorema 15.1].

Teorema 2.1.8. *Si M es una Q -variedad, entonces M es homeomorfo a $M \times Q$.*

De los dos teoremas anteriores, inferimos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.9 (R.D. Edwards). *Sea M una Q -variedad y Y un ANR localmente compacto. Si $f : M \rightarrow Y$ es una CE-función, entonces M es homeomorfo a $Y \times Q$.*

Demostración. Como f es CE, el teorema 2.1.7 implica que

$$f \times 1_Q : M \times Q \rightarrow Y \times Q$$

es un homeomorfismo cercano. Por el teorema de estabilidad 2.1.8, M es homeomorfo a $M \times Q$. Así, tenemos los siguientes homeomorfismos:

$$M \approx M \times Q \approx Y \times Q.$$

En particular M es homeomorfo a $Y \times Q$ y por lo tanto la prueba está completa. \square

Para terminar esta sección, enunciaremos algunos resultados muy conocidos que nos serán de utilidad más adelante.

El primer resultado caracteriza al cubo de Hilbert como el único AR compacto homeomorfo a su propio cono. Recordemos que el **cono** sobre un espacio X (denotado por $\text{con}(X)$) se define como el espacio cociente:

$$\text{con}(X) = X \times [0, 1] / X \times \{0\}.$$

Teorema 2.1.10. *Para un espacio metrizable X , los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) X es homeomorfo al cubo de Hilbert.
- (2) X es un AR compacto homeomorfo a su propio cono.

Para una demostración del teorema anterior se puede consultar [40, teorema 8.3.2].

Es fácil ver que el cubo de Hilbert es una Q -variedad compacta y contráctil. Resulta ser, que estas propiedades también caracterizan al cubo de Hilbert.

Teorema 2.1.11. *Sea M una Q -variedad compacta. Si M es contráctil, entonces M es homeomorfa al cubo de Hilbert.*

La demostración del teorema anterior se encuentra en [40, teorema 7.5.8]

Como Q es un espacio homogéneo, dados dos puntos $x, y \in Q$, existe un homeomorfismo $h : Q \rightarrow Q$ tal que $h(x) = y$. Este homeomorfismo induce a su vez un homeomorfismo entre $Q \setminus \{x\}$ y $Q \setminus \{y\}$. En lo sucesivo denotaremos por Q_0 al cubo de Hilbert con un punto removido. Notemos que por el argumento anterior, Q_0 no depende de qué punto sea el que removamos.

Teorema 2.1.12. *El espacio Q_0 es homeomorfo al producto $Q \times [0, 1)$.*

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [15, teorema 12.2].

2.2. Conjuntos Convexos

Los conjuntos convexos constituyen el eje central de este trabajo. Por ello, es conveniente repasar algunas nociones básicas referentes a este tipo de conjuntos.

Definición 2.2.1. *Sea L un espacio vectorial. Diremos que un conjunto $A \subset L$ es **convexo**, si para cualesquiera dos puntos a y b de A , el segmento \overline{ab}*

$$\overline{ab} = \{y \in L \mid y = ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$$

está contenido en A .

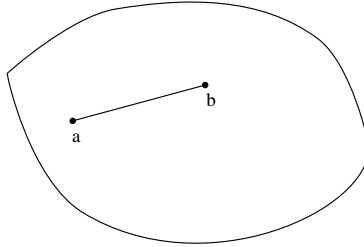


Figura 2.1: Conjunto convexo

De la definición anterior se sigue que la intersección no vacía de cualquier familia de conjuntos convexos es, a su vez, un conjunto convexo.

Si A es un subconjunto arbitrario de un espacio lineal L , llamaremos **casco convexo** de A (y lo denotaremos por $\text{conv}(A)$) al conjunto convexo más pequeño que contiene a A . Es decir,

$$\text{conv}(A) = \bigcap \{K \mid K \text{ es convexo y } A \subset K\}.$$

Observemos que el casco convexo de un conjunto siempre es un conjunto convexo.

Diremos que un vector $v \in Y$ es una **combinación convexa** de elementos de A , si

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i,$$

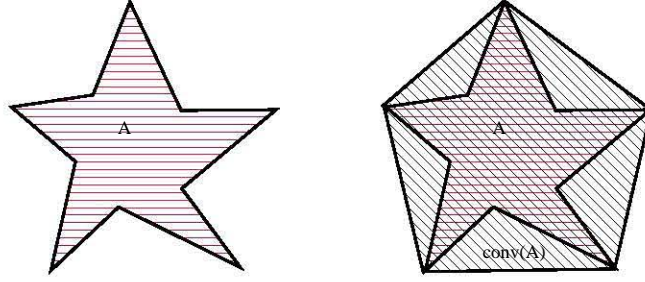


Figura 2.2: Casco convexo

donde $a_i \in A$, la suma $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y cada escalar λ_i pertenece a intervalo $[0, 1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\text{conv}_n(A)$ como el conjunto de todas las combinaciones convexas de n elementos de A . Es decir:

$$\text{conv}_n(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid a_i \in A, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Proposición 2.2.2. Sean L un espacio topológico lineal y A un subconjunto de L . Entonces se cumplen los siguientes enunciados:

- (1) $\text{conv}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A)$,
- (2) si A es finito, entonces $\text{conv}(A)$ es compacto.

Demostración. (1) Primero demostramos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A)$ es un conjunto convexo. En efecto, si $a, b \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A)$, entonces podemos suponer que $a \in \text{conv}_m(A)$ y $b \in \text{conv}_k(A)$, para ciertos $m, k \in \mathbb{N}$. De esta manera, existen puntos a_1, \dots, a_m y b_1, \dots, b_k en A , y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ y t_1, \dots, t_k en $[0, 1]$, tales que

$$a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \quad \text{y} \quad b = \sum_{j=1}^k t_j b_j,$$

y además,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 = \sum_{j=1}^k t_j.$$

Sea $s \in [0, 1]$ arbitrario. Entonces

$$(1-s)a + sb = (1-s) \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + s \sum_{j=1}^k t_j b_j = \sum_{i=1}^m (1-s)\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^k s t_j b_j.$$

Notemos que en este caso, $(1-s)\lambda_i \in [0, 1]$ para todo $i = 1, \dots, m$. De igual manera observemos que $st_j \in [0, 1]$ para todo $j = 1, \dots, k$. Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^m (1-s)\lambda_i + \sum_{j=1}^k st_j = (1-s) \sum_{i=1}^m \lambda_i + s \sum_{j=1}^k t_j = (1-s) + s = 1.$$

Esto quiere decir que $(1-s)a + sb$ es una combinación convexa de $m+k$ puntos de A y por lo tanto $(1-s)a + sb \in \text{conv}_{m+k}(A)$. Luego, $(1-s)a + sb \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A)$, lo cual prueba que este último conjunto es convexo, como se quería demostrar.

Ahora observemos que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A)$, y por lo tanto

$$\text{conv}(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A).$$

Para demostrar la otra contención, usaremos inducción sobre n para probar que $\text{conv}_n(A) \subset \text{conv}(A)$. Si $n = 1$, entonces

$$\text{conv}_1(A) = A \subset \text{conv}(A).$$

Supongamos que para toda $k \leq n$, $\text{conv}_k(A) \subset \text{conv}(A)$. Sea $y \in \text{conv}_{n+1}(A)$, entonces existen puntos a_1, \dots, a_{n+1} en A , y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$, tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i.$$

Podemos suponer sin perder la generalidad que $y \notin A$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$$

lo cual nos permite definir $\lambda = 1 / \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Notemos que $\mu_i = \lambda \cdot \lambda_i \in [0, 1]$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Además

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \lambda_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = 1,$$

por lo que

$$v = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i \in \text{conv}_n(A).$$

Aplicando la hipótesis de inducción, podemos afirmar que $v \in \text{conv}(A)$. Como $\text{conv}(A)$ es un conjunto convexo, el punto

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)v + \lambda_{n+1}a_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)v + \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)a_{n+1}$$

pertenece a $\text{conv}(A)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \left(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)v + \lambda_{n+1} a_{n+1}, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $y \in \text{conv}(A)$, y por lo tanto

$$\text{conv}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A).$$

(2) Ahora supongamos que A es finito y demostremos que $\text{conv}(A)$ es compacto. Sea n el número de elementos que contiene A . Por la parte (1) de esta proposición, sabemos que $\text{conv}(A) = \text{conv}_n(A)$. Consideremos el simplejo estándar

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

el cual es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Como A es finito, A es compacto y el producto A^n también es compacto. Luego, el producto $X = \Delta_{n-1} \times A^n$ es un espacio compacto. Definamos la función $g : X \rightarrow \text{conv}(A)$ de la siguiente manera:

$$g((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

Es claro que g está bien definida y es continua. Además, se sigue de la definición de $\text{conv}_n(A)$, que g es una función suprayectiva. Entonces la imagen

$$g(X) = \text{conv}_n(A) = \text{conv}(A)$$

es un espacio compacto, como se quería demostrar.

□

Supongamos que A y B son dos subconjuntos convexos de un espacio lineal L . La **suma de Minkowski** se define como el siguiente subconjunto de L :

$$A + B = \{a + b \in L \mid a \in A, \quad b \in B\}.$$

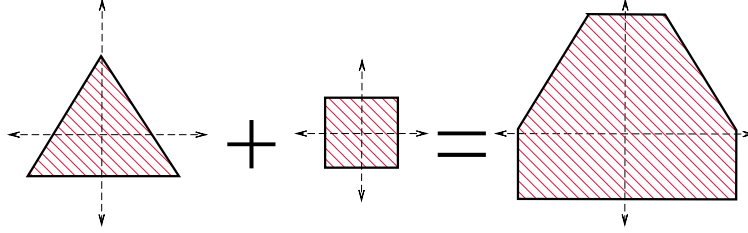


Figura 2.3: Suma de Minkowski

La suma de Minkowski de dos subconjuntos convexos A y B siempre es un subconjunto convexo. En efecto, si $a_1 + b_1 \in A + B$ y $a_2 + b_2 \in A + B$ son dos puntos arbitrarios en $A + B$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$t(a_1 + b_1) + (1 - t)(a_2 + b_2) = (ta_1 + (1 - t)a_2) + (tb_1 + (1 - t)b_2) = a + b$$

donde $a = (ta_1 + (1 - t)a_2) \in A$ y $b = (tb_1 + (1 - t)b_2) \in B$. Esto prueba que $t(a_1 + b_1) + (1 - t)(a_2 + b_2) \in A + B$ y por lo tanto $A + B$ es convexo.

2.2.1. Conjuntos Convexos en \mathbb{R}^n

Este trabajo está centrado en el estudio de ciertos espacios de conjuntos convexos del espacio euclidiano \mathbb{R}^n . En esta sección repasaremos algunas propiedades de este tipo de conjuntos convexos.

Diremos que un conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ es un **hiperplano**, si para cualesquiera dos puntos distintos $a, b \in H$, la recta determinada por a y b queda completamente contenida en H .

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto, un **hiperplano soporte** $H \subset \mathbb{R}^n$ es un hiperplano de dimensión $n - 1$ que intersecta a A y $A \subset H$ ó A está contenido en uno y sólo uno de los semiespacios determinados por H . El semiespacio cerrado en el cual queda contenido A se llama **semiespacio soporte** de A .

Si el conjunto A es convexo, entonces para cada punto $a \in \partial A$ existe al menos un hiperplano soporte que pasa por a .

Proposición 2.2.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y convexo. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ existe un único punto $a_x \in A$ tal que*

$$\|x - a_x\| = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

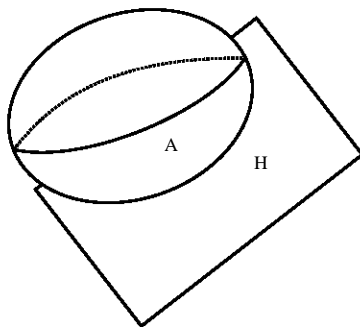


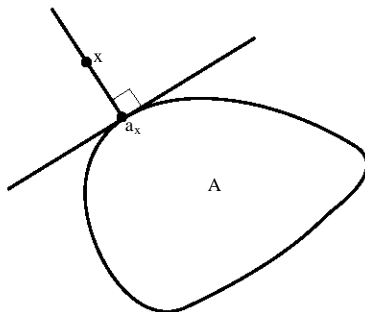
Figura 2.4: Hiperplano Soporte

Demostración. La función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(a) = \|x - a\|$ es continua y por lo tanto existe $a_x \in A$ tal que $f(a_x) \leq f(a)$ para todo $a \in A$. Afirmamos que dicho punto es único. En efecto, si existiera otro punto $b \in A$ tal que $f(a_x) = f(b)$, entonces el segmento $\overline{a_x b} = \{ta_x + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$ quedaría completamente contenido en $A \cap \overline{N(x, f(a_x))}$ (por la convexidad de $\overline{N(x, f(a_x))}$ y de A). Además, como la bola cerrada euclidiana $\overline{N(x, f(a_x))}$ no tiene segmentos rectos en su frontera, para cada $t \in (0, 1)$ el punto $ta_x + (1-t)b$ estaría en la bola abierta $N(x, f(a_x))$ y por lo tanto:

$$f(ta_x + (1-t)b) = \|x - (ta_x + (1-t)b)\| < f(a_x) = f(b),$$

lo cual es una contradicción ya que $f(b) = f(a_x) \leq f(a)$ para todo $a \in A$. De esta manera podemos concluir que a_x es único. \square

Por la proposición anterior podemos observar lo siguiente: si A es un conjunto compacto y convexo, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ y $a_x \in A$ es tal que $\rho = \|x - a_x\| = d(x, A)$, entonces $\overline{N(x, \rho)}$, la bola cerrada de centro x y radio ρ , interseca a A en un único punto, a_x . Afirmamos que el hiperplano de dimensión $n - 1$ tangente a $\overline{N(x, \rho)}$ en a_x (el cuál es ortogonal al segmento $\overline{xa_x}$) es un hiperplano soporte de A por el punto a_x . En efecto, si no lo fuera, existiría un



punto $a \in A$ en el semiespacio que contiene al punto x y por lo tanto el segmento $\overline{aa_x}$ estaría completamente contenido en A . Además, el segmento $\overline{aa_x}$ no está contenido en el

hiperplano tangente y por lo tanto debe cortar a la bola $N(x, \rho)$. Sea $y \in \overline{aa_x} \cap N(x, \rho)$ un punto cualquiera. Entonces $y \in A$ y

$$\|x - y\| < \rho = \|x - a_x\|$$

lo cual es una contradicción porque a_x es el punto de A más cercano a x . Este razonamiento se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.4. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y convexo. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ y $a_x \in A$ es tal que $\|x - a_x\| = d(x, A)$, entonces el hiperplano ortogonal al segmento $\overline{xa_x}$ que pasa por a_x es un hiperplano soporte de A .*

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, es evidente que el casco convexo $\text{conv}(A)$ es un conjunto acotado, ya que A , al ser compacto, está contenido en una bola (convexa) de radio finito. A continuación demostraremos que en esta situación $\text{conv}(A)$ también es compacto. Para ello, es necesario recordar el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [41, teorema 2.2.4]

Teorema 2.2.5 (Teorema de Caratheodory). *Sea $a \in \text{conv}(A)$, donde A es un subconjunto de dimensión afín r en \mathbb{R}^n . Entonces a se puede representar como una combinación convexa de $r + 1$ o menos puntos de A .*

La **dimensión afín** de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se define como la dimensión del hiperplano más pequeño que contiene a A .

Proposición 2.2.6. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\text{conv}(A)$ también lo es.*

Demostración. Supongamos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\text{conv}(A)$. Por el teorema de Caratheodory, cada x_k se puede representar como una combinación convexa de $n + 1$ puntos (ya que A a lo más tiene dimensión afín n). Supongamos entonces que para cada $k \in \mathbb{N}$, el punto x_k se representa de la forma:

$$x_k = \lambda_{k0}a_{k0} + \cdots + \lambda_{kn}a_{kn},$$

donde a_{k0}, \dots, a_{kn} son puntos de A y $\lambda_{k0}, \dots, \lambda_{kn}$ son números ≥ 0 tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_{ki} =$

1. Observemos que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ la sucesión $(a_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ está contenida en el compacto A . De la misma manera, la sucesión $(\lambda_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ está contenida completamente en el intervalo compacto $[0, 1]$.

En total tenemos $2n + 2$ sucesiones contenidas en conjuntos compactos y por lo tanto podemos encontrar una subsucesión de números naturales $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tales que para cada $i = 0, \dots, n$, la sucesión $(a_{j_k i})_{k \in \mathbb{N}}$ converja a un punto $a_i \in A$ y la sucesión $(\lambda_{j_k i})_{k \in \mathbb{N}}$ converja a cierto escalar $\lambda_i \in [0, 1]$. Evidentemente, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ ya que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n \lambda_{j_k i} = 1.$$

Así, la subsucesión $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (x_k) converge al punto $x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n \in \text{conv}(A)$ y por lo tanto podemos concluir que $\text{conv}(A)$ es compacto. \square

Por último, recordemos una definición que será utilizada fuertemente a lo largo del trabajo:

Definición 2.2.7. Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un **cuero convexo** si A es compacto, convexo y su interior es no vacío.

2.3. Hiperespacios

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotaremos por 2^X el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X . Esto es

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}.$$

La métrica d induce una métrica d_H en 2^X conocida como la **métrica de Hausdorff**:

$$d_H(A, B) = \inf \{ \varepsilon \mid A \subset N(B, \varepsilon), \quad B \subset N(A, \varepsilon) \}.$$

La fórmula anterior es equivalente a la siguiente igualdad:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{b \in B} d(b, A), \quad \sup_{a \in A} d(a, B) \right\}.$$

Proposición 2.3.1. La función $d_H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ es una métrica.

Demostración. Evidentemente $d_H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$. También es claro que $d_H(A, B) = d_H(B, A) \geq 0$ para cualesquiera $A, B \in 2^X$. Demostraremos únicamente la desigualdad del triángulo.

Sean $A, B, C \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Si $\delta = \varepsilon/2$, entonces tenemos que

$$A \subset N(B, d_H(A, B) + \delta) \quad \text{y} \quad B \subset N(C, d_H(B, C) + \delta) \quad (2.2)$$

Sea $x \in A$ un punto arbitrario. Por (2.2), existen $y \in B$ y $z \in C$ tales que $d(x, y) < d_H(A, B) + \delta$ y $d(y, z) < d_H(B, C) + \delta$. De aquí concluimos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon.$$

Como x fue un punto arbitrario, podemos concluir que

$$A \subset N(C, d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon). \quad (2.3)$$

Análogamente se demuestra que

$$C \subset N(A, d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon). \quad (2.4)$$

Como las contenciones (2.3) y (2.4) son ciertas para cualquier $\varepsilon > 0$, concluimos que

$$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C),$$

como se quería demostrar. □

En lo sucesivo, a menos que se especifique lo contrario, todos los hiperespacios que se mencionen en este trabajo estarán equipados con la métrica de Hausdorff.

Si (X, d) es un espacio métrico y $\mathcal{H} \subset 2^X$ es un hiperespacio de conjuntos compactos de X , para cada $A \in \mathcal{H}$ y cada $\varepsilon > 0$ denotaremos por $O(A, \varepsilon)$ a la bola abierta en \mathcal{H} de centro A y radio ε . Es decir,

$$O(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{H} \mid d_H(A, B) < \varepsilon\}.$$

Este conjunto no se debe confundir con $N(A, \varepsilon)$, la ε -vecindad de A en X . Además, es fácil ver que un compacto $B \in \mathcal{H}$ pertenece a la bola $O(A, \varepsilon)$, si y sólo si $A \subset N(B, \varepsilon)$ y $B \subset N(A, \varepsilon)$.

Veamos algunos ejemplos clásicos de hiperespacios de conjuntos compactos.

Ejemplo 2.3.1. Sea X un espacio métrico separable y topológicamente completo. Entonces:

- (1) 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo de Peano (véase [18] y [19]).
 - (2) 2^X es homeomorfo Q_0 (el cubo de Hilbert sin un punto) si y sólo si X es no compacto, conexo, localmente conexo y localmente compacto (véase [16]).
 - (3) 2^X es homeomorfo al espacio separable de Hilbert ℓ_2 si y sólo si X es conexo, localmente conexo y no localmente compacto en ninguna parte (véase [17]).
-

Si X es un espacio métrico compacto, entonces el hiperespacio 2^X también lo es. Este hecho conocido puede consultarse, por ejemplo, en [40, proposición 4.7.2]

2.3.1. Hiperespacios de Conjuntos Convexos

Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado y supongamos que d denota la métrica inducida por la norma. Si $X \subset L$ es un subconjunto convexo, denotaremos por $cc(X)$ y $cb(X)$ los siguientes hiperespacios:

$$cc(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es compacto y convexo}\},$$

$$cb(X) = \{A \in cc(X) \mid A \text{ tiene interior no vacío en } L\}.$$

En espacios de dimensión infinita, no existen conjuntos compactos con interior no vacío. Por esto, $cb(X)$ sólo tiene sentido cuando L es de dimensión finita.

Ejemplo 2.3.2. Si $X = \mathbb{R}$, entonces la función $f : cc(\mathbb{R}) \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ dada por

$$f([a, b]) = (a, b)$$

es un homeomorfismo. Esto implica que $cc(\mathbb{R})$ es homeomorfo a un semiplano cerrado en \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, la restricción $f|_{cb(\mathbb{R})}$ define un homeomorfismo entre $cb(\mathbb{R})$ y el semiplano abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. Esto implica que $cb(\mathbb{R})$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Para espacios X de dimensión mayor o igual que 2, se han calculado los siguientes hiperespacios de conjuntos convexos.

Teorema 2.3.2 ([30]). *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y convexo de dimensión mayor o igual que 2, entonces $cc(K)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert Q . Por otro lado, $cc(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a Q_0 para todo $n \geq 2$.*

Teorema 2.3.3 ([36]). *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y densidad τ , entonces $cc(X)$ es homeomorfo al espacio de Hilbert $\ell_2(\tau)$ de densidad τ .*

El hiperespacio de todos los cuerpos convexos de \mathbb{R}^n , $cb(\mathbb{R}^n)$ (del cual hablaremos más adelante), no había sido calculado. Sin embargo, en 1951 Macbeath estudió la topología del espacio cociente $cb(\mathbb{R}^n)/\sim$ obtenido por la siguiente relación de equivalencia: dos cuerpos compactos A y B son equivalentes si y sólo si existe una transformación afín $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g(A) = B$. Al respecto Macbeath probó el siguiente resultado:

Teorema 2.3.4 ([29]). *El espacio cociente $cb(\mathbb{R}^n)/\sim$ es un espacio compacto y metrizable.*

En la segunda parte de este texto, probaremos que para cada $n \geq 2$, el espacio cociente $cb(\mathbb{R}^n)/\sim$ es homeomorfo a un espacio compacto conocido como el compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.

2.4. Lemario de Hiperespacios

Esta sección la dedicaremos a demostrar algunas propiedades referentes a la topología de algunos hiperespacios de subconjuntos compactos. Dichas propiedades serán utilizadas más adelante.

Lema 2.4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y supongamos que la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^X$ converge a un elemento $A \in 2^X$. Entonces A es el conjunto de todos los puntos $x \in X$, para los cuales existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \in A_n$ y tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.*

Demostración. Sea $x \in A$ un punto arbitrario. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un punto $x_n \in A_n$ tal que

$$d(x, x_n) \leq 2d(x, A_n).$$

Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x . En efecto, como $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A , dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, $d_H(A, A_m) < \varepsilon$. En particular, $A \subset$

$N(A_m, \varepsilon)$. Esto implica que $d(x, A_m) < \varepsilon$ y por lo tanto $d(x, x_m) < 2\varepsilon$. De aquí concluimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y por lo tanto la primera contención está demostrada.

Para verificar la segunda contención supongamos que $x \in X$ es un punto tal que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Debemos probar que $x \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A , podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, $d_H(A, A_m) < \varepsilon$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y cada $x_n \in A_n$, podemos concluir que $d(x, A) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Esto implica que x pertenece a la cerradura de A , pero como A es cerrado, inferimos que $x \in A$. Ahora la prueba está completa. \square

Lema 2.4.2. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces la función $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ dada por*

$$2^f(A) = f(A)$$

es continua.

Demostración. Como X es compacto, la función f es en realidad uniformemente continua y por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$. Así, si $d_H(A, B) < \delta$, entonces $d_H(f(A), f(B)) < \varepsilon$, lo cual demuestra que f es continua. \square

Consideremos un espacio métrico X . Denotaremos por 2^{2^X} al hiperespacio de todos los subconjuntos compactos de 2^X . Si \mathcal{A} es un elemento de 2^{2^X} , entonces $\bigcup \mathcal{A}$ denotará el siguiente subconjunto de X :

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Lema 2.4.3. *Sea X un espacio métrico y \mathcal{A} un elemento de 2^{2^X} . Entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado en X .*

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\bigcup \mathcal{A}$ que converja a un punto $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Como \mathcal{A} es un subconjunto compacto de 2^X , podemos suponer sin perder la generalidad que la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento $A \in \mathcal{A}$. Luego, por el lema 2.4.1, podemos concluir que $x \in A \subset \bigcup \mathcal{A}$ y por lo tanto $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado en X . \square

Si X es un espacio métrico compacto, concluimos del lema anterior que $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$ para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. En este caso, podemos definir un operador $\bigcup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ de la siguiente manera:

$$\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}.$$

Teorema 2.4.4. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces el operador unión $\bigcup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ es continuo.*

Demostración. Sea $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^{2^X} convergente a un elemento $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Necesitamos demostrar que la sucesión $(\bigcup \mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\bigcup \mathcal{A}$ en 2^X . Para ello consideremos $\varepsilon > 0$.

Primero demostraremos que el conjunto

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigcup \mathcal{A}_n \text{ no está contenido en } N(\bigcup \mathcal{A}, \varepsilon)\}$$

es finito. Para ello supongamos lo contrario y escojamos para cada $n \in E$, un punto $x_n \in \bigcup \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}_n$ tal que

$$x_n \notin N(\bigcup \mathcal{A}, \varepsilon).$$

Como 2^X es compacto, podemos suponer sin perder la generalidad que la sucesión $(x_n)_{n \in E}$ converge a un punto $x \in 2^X$. Por el lema 2.4.1, x pertenece a $\bigcup \mathcal{A}$. Como X es compacto, también podemos suponer sin perder la generalidad, que la sucesión $(x_n)_{n \in E}$ converge a un punto $x \notin N(\bigcup \mathcal{A}, \varepsilon)$. Sin embargo, esto es una contradicción ya que

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \subset N(\bigcup \mathcal{A}, \varepsilon).$$

Así, podemos concluir que el conjunto E es finito. Ahora demostraremos que el conjunto

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigcup \mathcal{A} \text{ no está contenido en } N(\bigcup \mathcal{A}_n, \varepsilon)\}$$

es finito. Para ello supongamos lo contrario. Entonces, para cada $n \in F$, podríamos escoger un punto $x_n \in \bigcup \mathcal{A}$ tal que $x_n \notin N(\bigcup \mathcal{A}_n, \varepsilon)$. Por el lema 2.4.3 sabemos que $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado en X , y por lo tanto es compacto. Así, sin perder la generalidad, podemos suponer que $(x_n)_{n \in F}$ converge a un punto $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Escojamos $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a \mathcal{A} , el lema 2.4.1 implica que para cada $n \in F$ podemos encontrar $A_n \in \mathcal{A}_n$ tal que $(A_n)_{n \in F}$ converge a A . Usando nuevamente el lema 2.4.1, podemos encontrar para cada $n \in F$, un punto $y_n \in A_n$ tal que $(y_n)_{n \in F}$ converge a x . Luego, si $n \in F$, entonces $A_n \in \mathcal{A}_n$ y por lo tanto $y_n \in \bigcup \mathcal{A}_n$. Esto a su vez implica que $d(x_n, y_n) \geq \varepsilon > 0$, lo cual es una contradicción ya que las sucesiones (x_n) y (y_n) convergen ambas a x .

La contradicción anterior demuestra que F , al igual que E , es finito y por lo tanto podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $m \geq N_0$ se cumplan las siguientes dos contenciones:

$$\bigcup \mathcal{A} \subset N(\bigcup \mathcal{A}_m, \varepsilon) \quad \text{y} \quad \bigcup \mathcal{A}_m \subset N(\bigcup \mathcal{A}, \varepsilon).$$

Esto demuestra que $d_H(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{A}_m) < \varepsilon$ para todo $m \geq N_0$ y por lo tanto la sucesión $(\bigcup \mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\bigcup \mathcal{A}$, como se quería demostrar. \square

Corolario 2.4.5. Sean X y Y espacios métricos compactos y $g : X \rightarrow 2^Y$ una función continua. Entonces $\tilde{g} : 2^X \rightarrow 2^Y$ dada por

$$\tilde{g}(A) = \bigcup_{x \in A} g(x)$$

es continua.

Demostración. Por el lema 2.4.2, la función $2^g : 2^X \rightarrow 2^{2^Y}$ es continua. Además, por el teorema 2.4.4 el operador unión $\bigcup : 2^{2^Y} \rightarrow 2^Y$ también es continuo. Para completar la prueba simplemente observemos que $\tilde{g} = \bigcup \circ 2^g$. \square

Lema 2.4.6. Sean $A, B \in 2^{\mathbb{R}^n}$. Entonces

$$d_H(\text{conv}(A), \text{conv}(B)) \leq d_H(A, B).$$

Demostración. Sea $a \in \text{conv}(A)$ un punto arbitrario. Entonces existen $a_1, \dots, a_k \in A$ y $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ tales que $a = \sum_{i=1}^k t_i a_i$ y $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, podemos escoger un punto $b_i \in B$ tal que $\|a_i - b_i\| \leq d_H(A, B) + \varepsilon$. Llamemos $b = \sum_{i=1}^k t_i b_i \in \text{conv}(B)$. Así,

$$\|a - b\| \leq \sum_{i=1}^k t_i \|a_i - b_i\| \leq d_H(A, B) + \varepsilon,$$

y por lo tanto $\text{conv}(A) \subset N(\text{conv}(B), d_H(A, B) + \varepsilon)$. Un razonamiento análogo nos permite demostrar que $\text{conv}(B) \subset N(\text{conv}(A), d_H(A, B) + \varepsilon)$ y por lo tanto

$$d_H(\text{conv}(A), \text{conv}(B)) \leq d_H(A, B) + \varepsilon. \quad (2.5)$$

Como la desigualdad (2.5) es cierta para todo $\varepsilon > 0$, deducimos que

$$d_H(\text{conv}(A), \text{conv}(B)) \leq d_H(A, B),$$

lo cual completa la prueba. \square

Por la proposición 2.2.6, el casco convexo de un conjunto compacto es compacto y por lo tanto la función $\text{conv} : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ la cual asigna a cada elemento $A \in 2^X$ su casco convexo $\text{conv}(A)$ está bien definida. Así, el lema 2.4.6, implica que:

Corolario 2.4.7. La función $\text{conv} : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ es uniformemente continua.

La suma de Minkowski define una función $+: cc(\mathbb{R}^n) \times cc(\mathbb{R}^n) \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera:

$$+(A, B) = A + B.$$

Proposición 2.4.8. La función $+: cc(\mathbb{R}^n) \times cc(\mathbb{R}^n) \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ es continua.

Demostración. Sean $(A, B) \in cc(\mathbb{R}^n) \times cc(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $\delta = \varepsilon/2$ y supongamos que el punto $(A', B') \in cc(\mathbb{R}^n) \times cc(\mathbb{R}^n)$ satisface que $d_H(A, A') < \delta$ y $d_H(B, B') < \delta$. Necesitamos demostrar que $d_H(A + B, A' + B') < \varepsilon$.

Sea $a + b \in A + B$ un punto arbitrario con $a \in A$ y $b \in B$. Como $d_H(A, A') < \delta$ podemos encontrar un punto $a' \in A'$ tal que $\|a - a'\| < \delta$. Análogamente, existe $b' \in B'$ tal que $\|b - b'\| < \delta$. De esta manera, tenemos que

$$\|(a + b) - (a' + b')\| \leq \|a - a'\| + \|b - b'\| < \delta + \delta = \varepsilon.$$

Esto prueba que $A + B \in N(A' + B', \varepsilon)$. De la misma manera se demuestra que $A' + B' \in N(A + B, \varepsilon)$ y por lo tanto $d_H(A + B, A' + B') < \varepsilon$, como se quería demostrar. \square

Aplicando inducción, la proposición anterior se generaliza en el siguiente corolario.

Corolario 2.4.9. *La función $\sum : cc(\mathbb{R}^n)^k \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ dada por*

$$\sum(A_1, \dots, A_k) = \sum_{i=1}^k A_i = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mid a_i \in A_i \right\},$$

es continua.

Lema 2.4.10. *Sea $X \in cc(\mathbb{R}^n)$ un conjunto convexo. Para cada $\varepsilon > 0$, la bola abierta $O(X, \varepsilon) \subset cc(\mathbb{R}^n)$ de radio ε y centro X es convexa en el siguiente sentido: si $\{A_i\}_{i=1}^k \subset O(X, \varepsilon)$ es una familia finita, entonces el conjunto*

$$\sum_{i=1}^k t_i A_i = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i a_i \mid a_i \in A_i, \quad i = 1, \dots, k \right\} \in O(X, \varepsilon)$$

para cualesquiera números $t_1, t_2, \dots, t_k \in [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^k t_i = 1$.

Demostración. Sea $x \in X$. Por las hipótesis del lema, podemos encontrar puntos $a_i \in A_i$, con $i = 1, 2, \dots, k$ tales que $\|x - a_i\| < \varepsilon$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^k t_i a_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^k t_i (x - a_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^k \|t_i (x - a_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^k t_i \|x - a_i\| < \sum_{i=1}^k t_i \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Además, el punto $\sum_{i=1}^k t_i a_i$ pertenece a $\sum_{i=1}^k t_i A_i$ y por lo tanto $X \subset N(\sum_{i=1}^k t_i A_i, \varepsilon)$.

Ahora supongamos que $\sum_{i=1}^k t_i a_i \in \sum_{i=1}^k t_i A_i$ es un punto arbitrario donde cada $a_i \in A_i$. Por las hipótesis del lema, para cada $i = 1, \dots, k$, existe un punto $x_i \in X$ tal que $\|x_i - a_i\| < \varepsilon$. Como X es convexo, el punto $x = \sum_{i=1}^k t_i x_i$ es un punto de X . Además,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^k t_i a_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^k t_i x_i - \sum_{i=1}^k t_i a_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k t_i (x_i - a_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \|t_i (x_i - a_i)\| = \sum_{i=1}^k t_i \|x_i - a_i\| \\ &< \sum_{i=1}^k t_i \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que $\sum_{i=1}^k t_i A_i \in N(X, \varepsilon)$ y por lo tanto $d_H(\sum_{i=1}^k t_i A_i, X) < \varepsilon$, como se quería demostrar. \square

Para cada subconjunto cerrado A de \mathbb{R}^n y para cada $r > 0$, definimos el conjunto A_r como la r -vecindad cerrada de A . Esto es:

$$A_r = \{a \in \mathbb{R}^n \mid d(a, A) \leq r\}.$$

Lema 2.4.11. Sean $p, q > 0$. Para cualesquiera dos subconjuntos compactos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ los siguientes enunciados son ciertos:

- (1) $d_H(A_p, B_p) \leq d_H(A, B)$.
- (2) $d_H(A, A_p) \leq p$.
- (3) $A_{q+p} = (A_p)_q$.
- (4) $d_H(A_p, A_q) \leq |p - q|$.

Demostración. (1) Sea $\varepsilon > 0$. Para todo $a \in A_p$ existe $a' \in A$ tal que $\|a - a'\| \leq p$. Escojamos $b' \in B$ tal que $\|a' - b'\| \leq d_H(A, B) + \varepsilon$. Llamemos b al punto $b' + (a - a')$ y demostremos que b está en B_p . En efecto,

$$\|b - b'\| = \|b' + (a - a') - b'\| = \|a - a'\| < p$$

y como $b' \in B$, podemos concluir que $b \in B_p$. Además,

$$\|a - b\| = \|a - (b' + (a - a'))\| = \|a' - b'\| \leq d_H(A, B) + \varepsilon.$$

Esto prueba que $A_p \subset N(B_p, d_H(A, B) + \varepsilon)$. De manera análoga se demuestra que $B_p \subset N(A_p, d_H(A, B) + \varepsilon)$ y por lo tanto $d_H(A_p, B_p) \leq d_H(A, B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Esto implica que $d_H(A_p, B_p) \leq d_H(A, B)$ y por lo tanto el inciso (1) está demostrado.

(2) Dado $\varepsilon > 0$, es evidente que $A_p \subset N(A, p + \varepsilon)$. Además, siempre sucede que $A \subset A_p$. De aquí concluimos que $d_H(A, A_p) \leq p + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y por lo tanto $d_H(A, A_p) \leq p$, como se quería demostrar.

(3) Si $a \in (A_p)_q$ entonces podemos encontrar $x \in A_p$ tal que $\|a - x\| \leq q$. De la misma manera, podemos encontrar $y \in A$ tal que $\|x - y\| \leq p$. Así:

$$\|a - y\| = \|a - x + x - y\| \leq \|a - x\| + \|x - y\| \leq q + p,$$

y por lo tanto $a \in A_{q+p}$. Esto demuestra que $(A_p)_q \subset A_{q+p}$.

Por otro lado, si $a \in A_{q+p}$ entonces existe $x \in A$ tal que $\|a - x\| \leq q + p$. Si $\|a - x\| \leq q$, entonces $a \in (A_p)_q$ ya que $x \in A \subset A_p$. Por otro lado, si $q < \|a - x\| \leq q + p$ consideremos $z = tx + (1 - t)a$ donde $t = \frac{q}{\|a - x\|} \leq 1$. De esta manera

$$\begin{aligned} \|z - a\| &= \|tx + (1 - t)a - a\| = \|t(x - a)\| = t\|x - a\| \\ &= \frac{q}{\|a - x\|} \|x - a\| = q. \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}\|z - x\| &= \|tx + (1-t)a - x\| = \|(1-t)(a-x)\| = (1-t)\|a-x\| \\ &= \left(1 - \frac{q}{\|a-x\|}\right)\|a-x\| = \|a-x\| - q \leq q + p - q = p.\end{aligned}$$

Así concluimos que $a \in (A_p)_q$ lo cual demuestra que $A_{q+p} \subset (A_p)_q$ y por lo tanto $A_{q+p} = (A_p)_q$.

(4) Supongamos sin perder la generalidad que $p > q$. Entonces es suficiente demostrar que $d_H(A_p, A_q) \leq p - q$. Sea $r = p - q$. Por el inciso anterior $A_p = A_{q+r} = (A_q)_r$. Luego, por el inciso (2) se tiene que

$$d_H(A_p, A_q) = d_H((A_q)_r, A_q) \leq r = p - q.$$

Esta última desigualdad completa la prueba. \square

Lema 2.4.12. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos subconjuntos convexos y $\varepsilon > 0$. Si $d_H(A, B) < \varepsilon$, entonces $d_H(\partial A, \partial B) < \varepsilon$.

Demostración. Sea $x \in \partial A$ y H un hiperplano soporte por x . Como $d_H(A, B) < \varepsilon$, la intersección $N(x, \varepsilon) \cap B$ es no vacía. Si $N(x, \varepsilon) \cap \partial B = \emptyset$, entonces $N(x, \varepsilon)$ está completamente contenido en el interior de B y por lo tanto podemos encontrar un punto z en el semiespacio determinado por H que no contiene a A tal que $z \in B$, el rayo \overrightarrow{xz} sea perpendicular a H y $\|x - z\| \geq \varepsilon$. Evidentemente para todo $a \in A$,

$$\|z - a\| \geq \|z - x\| \geq \varepsilon$$

y por lo tanto B no está contenido en $N(A, \varepsilon)$. Esto contradice que $d_H(A, B) < \varepsilon$ y por lo tanto podemos concluir que $N(x, \varepsilon) \cap \partial B \neq \emptyset$. Así, podemos encontrar un punto $b \in \partial B$ tal que $\|x - b\| < \varepsilon$ y consecuentemente $\partial A \subset N(\partial B, \varepsilon)$. De manera análoga se prueba que $\partial B \subset N(\partial A, \varepsilon)$ y por lo tanto $d_H(\partial A, \partial B) < \varepsilon$. \square

Como consecuencia del lema anterior, tenemos el siguiente teorema.

Proposición 2.4.13. Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset cb(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión de cuerpos compactos que converge a $A \in cb(\mathbb{R}^n)$, entonces la sucesión de las fronteras $(\partial A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a ∂A .

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $d_H(A, A_k) < \varepsilon$. Por el lema 2.4.12

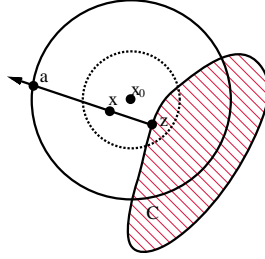
$$d_H(\partial A, \partial A_k) < \varepsilon,$$

para todo $k \geq N$. Así, la sucesión $(\partial A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a ∂A , como se quería demostrar. \square

Lema 2.4.14. Sea $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ y $x_0 \in A$ tal que $\overline{N(x_0, 2\varepsilon)} \subset A$ para algún $\varepsilon > 0$. Si $C \in O(A, \varepsilon)$, entonces $N(x_0, \varepsilon) \subset C$.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe $C \in O(A, \varepsilon)$ tal que $N(x_0, \varepsilon) \not\subset C$. Sea $x \in N(x_0, \varepsilon) \setminus C$. Como C es compacto, existe $z \in C$ tal que $d(x, z) = d(x, C)$. Sea H el hiperplano de \mathbb{R}^n que pasa por z y que es ortogonal al rayo \vec{xz} . Como C es convexo, C está completamente contenido en el hemiespacio determinado por H que no contiene el punto x . Sea a el punto en el rayo \vec{xz} tal que $a \in \partial N(x_0, 2\varepsilon) \subset A$. Evidentemente $d(a, x_0) = 2\varepsilon$ y

$$d(a, z) = d(a, H) \leq d(a, C) \leq d_H(A, C) < \varepsilon.$$



Sin embargo, como $d(x_0, x) < \varepsilon$, podemos usar la desigualdad del triángulo para concluir que

$$\varepsilon > d(a, z) > d(a, x) \geq d(a, x_0) - d(x_0, x) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Esta contradicción demuestra el lema. \square

Lema 2.4.15. *Sea $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ y $x_0 \in A$ tal que $\overline{N(x_0, 2\varepsilon)} \subset A$ para algún $\varepsilon > 0$. Denotemos por $\overline{O(A, \varepsilon)}$ la cerradura de $O(A, \varepsilon)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\overline{O(A, \varepsilon)}$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Primero observemos que $O(A, \varepsilon)$ está contenido en $cc(K)$ para algún subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Por el teorema 2.3.2, $cc(K)$ es compacto. Así, la cerradura de $O(A, \varepsilon)$ en $cc(K)$, denotada por $[O(A, \varepsilon)]$, también es compacta. Para completar la demostración es suficiente demostrar que $[O(A, \varepsilon)]$ está contenida en $cb(\mathbb{R}^n)$.

Sea $(D_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset O(A, \varepsilon)$ una sucesión de cuerpos compactos la cual converge a un elemento $D \in cc(K)$. Por el lema 2.4.14, $N(x_0, \varepsilon) \subset D_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Si $N(x_0, \varepsilon) \not\subset D$, entonces podríamos escoger un punto $x \in N(x_0, \varepsilon) \setminus D$ tal que $\eta = d(x, D) > 0$. Como $x \in D_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, es evidente que $d_H(D_m, D) \geq \eta$. Esto significa que la sucesión $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ no puede converger al punto D . De esta contradicción concluimos que $N(x_0, \varepsilon)$ está contenido en D , y por lo tanto D tiene interior no vacío. Es decir, $D \in cb(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto $[O(A, \varepsilon)]$ es un subconjunto compacto contenido en $cb(\mathbb{R}^n)$ lo cual implica que $\overline{O(A, \varepsilon)} = [O(A, \varepsilon)]$ y por lo tanto $\overline{O(A, \varepsilon)}$ es compacto. \square

La topología de Fell en $cc(\mathbb{R}^n)$ es la topología generada por los subconjuntos de la forma:

$$U^- = \{A \in cc(\mathbb{R}^n) \mid A \cap U \neq \emptyset\} \quad y$$

$$(\mathbb{R}^n \setminus K)^+ = \{A \in cc(\mathbb{R}^n) \mid A \subset \mathbb{R}^n \setminus K\},$$

siendo $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

Es un hecho conocido que la topología de Fell y la topología generada por la métrica de Hausdorff coinciden en $cc(\mathbb{R}^n)$ (véase, por ejemplo, [35, Remark 2]). En particular, ambas topologías coinciden en $cb(\mathbb{R}^n)$. Este hecho será usado en la demostración del siguiente lemma.

Lema 2.4.16. *Sea $T \in cb(\mathbb{R}^n)$ un cuerpo compacto. Supongamos que $\mathcal{H} \subset cb(\mathbb{R}^n)$ es una familia de subconjuntos convexos tales que, para cada $A \in \mathcal{H}$, la intersección $A \cap T$ tiene interior no vacío. Definamos $v : \mathcal{H} \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)$ como sigue:*

$$v(A) = A \cap T.$$

Entonces, v es una función continua.

Demostración. Para demostrar el lema es suficiente demostrar que $v^{-1}(U^-)$ y $v^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus K)^+)$ son abiertos en \mathcal{H} , para cada conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Primero consideremos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que el conjunto $A \in \mathcal{H}$ pertenece a $v^{-1}(U^-)$. Entonces la intersección $U \cap (A \cap T)$ es no vacía. Como U es abierto y $A \cap T$ es un cuerpo convexo podemos encontrar un punto x_0 en el interior de $A \cap T$, tal que $x_0 \in U$. Sea δ un número positivo que satisfaga la siguiente condición.

$$\overline{N(x_0, 2\delta)} \subset U \cap (A \cap T).$$

Por el lema 2.4.14, sabemos que si $C \in O(A, \delta) \cap \mathcal{H}$, entonces $N(x_0, \delta) \subset C$. Como $x_0 \in U \cap T$, podemos concluir que $U \cap v(C) = U \cap (C \cap T) \neq \emptyset$. Esto demuestra que $O(A, \delta) \cap \mathcal{H} \subset v^{-1}(U^-)$ y por lo tanto $v^{-1}(U^-)$ es abierto en \mathcal{H} .

Ahora consideremos un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que $A \in \mathcal{H}$ es tal que $v(A) \cap K = \emptyset$. Si $K \cap T = \emptyset$, entonces $\mathcal{H} = v^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus K)^+)$ y no habría nada más que probar. Por otro lado, si $K \cap T \neq \emptyset$ llamemos η al número:

$$\eta = \inf\{d(a, x) \mid a \in A, x \in K \cap T\}.$$

Como $(A \cap T) \cap K = \emptyset$, es claro que $\eta > 0$. Sea $C \in O(A, \eta) \cap \mathcal{H}$ y supongamos que $v(C)$ interseca a K . Entonces existe un punto $x_0 \in C \cap T \cap K$. En particular, $x_0 \in T \cap K$. Como C pertenece a la η -vecindad de A , podemos encontrar un punto $a \in A$ tal que $d(a, x_0) < \eta$, lo cual contradice la definición de η . Esto nos permite concluir que

$$O(A, \eta) \cap \mathcal{H} \subset v^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus K)^+)$$

y por lo tanto $v^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus K)^+)$ es abierto en \mathcal{H} , lo cual completa la demostración. \square

2.5. Compactos de Banach-Mazur

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la familia de todos los espacios de Banach de dimensión n . En dicha familia definamos la siguiente relación de equivalencia: dos espacios E y F están relacionados si y sólo si existe una isometría lineal $T : E \rightarrow F$. Para cada espacio E , denotemos por $[E]$ su clase de equivalencia y llamemos $\text{BM}(n)$ al conjunto de clases de equivalencia $[E]$. En $\text{BM}(n)$ se define la métrica de Banach-Mazur:

$$\rho([E], [F]) = \ln \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : E \rightarrow F \text{ es un isomorfismo lineal} \}$$

(véase [28]). Recordemos que si $T : E \rightarrow F$ es un isomorfismo lineal, la *norma* de T , $\|T\|$ se define como sigue:

$$\|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

donde el símbolo $\|\cdot\|$ denota simultáneamente la norma en E y en F sin riesgo de confusión.

Para cada $n \geq 2$, el espacio $(\text{BM}(n), \rho)$ resulta ser un espacio métrico compacto llamado **Compacto de Banach-Mazur**.

En [42, Capítulo 30, Problema 899, ANR 11], está formulado el siguiente problema propuesto por Pelczyński:

Problema ¿Los compactos de Banach Mazur $\text{BM}(n)$ son AR? Y si lo son ¿serán cubos de Hilbert?

La respuesta a la primera pregunta es afirmativa y se encuentra en [7]. La segunda pregunta sólo se ha respondido (negativamente) en el caso $n = 2$ (véase [8]). Para $n \geq 3$ el problema continua abierto. Sin embargo, en los últimos años, S. Antonyan encontró diversos modelos que permiten entender mejor la estructura geométrica y topológica de $\text{BM}(n)$ ([8], [9] y [12]).

Un primer modelo se consigue al considerar el espacio $\mathcal{N}(n)$ de todas las posibles normas $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ equipado con la topología compacto abierta. En $\mathcal{N}(n)$ se define una acción del grupo general lineal $\text{GL}(n)$ de la siguiente manera:

$$(g\phi)(x) = \phi(g^{-1}x).$$

Esta acción resulta ser continua y se puede probar que el espacio orbital $\mathcal{N}(n)/\text{GL}(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $\text{BM}(n)$ (el homeomorfismo surge de observar que un espacio de Banach de dimensión n no es otra cosa más que \mathbb{R}^n equipado con alguna norma $\phi \in \mathcal{N}(n)$).

Otra representación geométrica de $\text{BM}(n)$ surge de la correspondencia entre $\mathcal{N}(n)$ y el conjunto de todos los cuerpos compactos convexos y simétricos respecto al origen de \mathbb{R}^n . Más precisamente, llamemos $\mathcal{B}(n)$ al siguiente subespacio de $cb(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{B}(n) = \{A \in cb(\mathbb{R}^n) \mid A = -A\}.$$

El hiperespacio $\mathcal{B}(n)$ es homeomorfo al producto topológico $\mathbb{R}^{n(n+1)/2} \times Q$ ([8] y [9]). La restricción de la acción natural de $\mathrm{GL}(n)$ en $2^{\mathbb{R}^n}$ a $\mathcal{B}(n)$ convierte a este último en un $\mathrm{GL}(n)$ -espacio propio.

La función $f : \mathcal{N}(n) \rightarrow \mathcal{B}(n)$ dada por

$$f(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \leq 1\}$$

es un homeomorfismo $\mathrm{GL}(n)$ -invariante que hace a los espacios orbitales $\mathcal{N}(n)/\mathrm{GL}(n)$ y $\mathcal{B}(n)/\mathrm{GL}(n)$ homeomorfos y por lo tanto $\mathcal{B}(n)/\mathrm{GL}(n)$ también es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(n)$.

El siguiente teorema (demostrado en [12, teorema 3.3]) da condiciones suficientes para que el $\mathrm{O}(n)$ -espacio orbital de un $\mathrm{O}(n)$ -cubo de Hilbert sea homeomorfo a $\mathrm{BM}(n)$.

Teorema 2.5.1. *Supongamos que el grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ actúa continuamente en un cubo de Hilbert X de tal manera que se cumplen las siguientes condiciones:*

- (1) *X es un $\mathrm{O}(n)$ -AR con un único punto $\mathrm{O}(n)$ -fijo x_0 .*
- (2) *X es estrictamente $\mathrm{O}(n)$ -contráctil a x_0 .*
- (3) *Para cada subgrupo cerrado $H \subset \mathrm{O}(n)$, $X^H = \{x_0\}$ si y sólo si H actúa transitivamente en la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} . En caso contrario X^H es homeomorfo al cubo de Hilbert.*
- (4) *Para todo subgrupo cerrado $H \subset \mathrm{O}(n)$, el H -espacio orbital X_0/H es una Q -variedad, donde $X_0 = X \setminus \{x_0\}$.*

Entonces el espacio orbital $X/\mathrm{O}(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $\mathrm{BM}(n)$.

Parte II

Acciones de Grupos en Hiperespacios de Conjuntos Compactos Convexos de \mathbb{R}^n

Capítulo 3

La Acción del Grupo $\text{Aff}(n)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$

3.1. Acciones de Grupos en Hiperespacios

Sea G un grupo topológico y supongamos que G actúa continuamente en el espacio métrico (X, d) . La acción de G en X induce una acción en 2^X de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(g, A) &\longmapsto gA \\ gA &= \{ga \mid a \in A\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Proposición 3.1.1. *La acción definida en (3.1) es continua.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$, $g \in G$ y $\varepsilon > 0$. Como G actúa continuamente en X , para cada $a \in A$ existen una vecindad $U_a \subset G$ de g y un número $\delta_a > 0$ tales que

$$U_a \cdot N(a, \delta_a) \subset N(ga, \varepsilon/2).\tag{3.2}$$

La familia $\{N(a, \delta_a/2)\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta del subconjunto compacto A , y por lo tanto, existen puntos $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k N(a_i, \delta_{a_i}/2).$$

Denotemos por $N = \bigcup_{i=1}^k N(a_i, \delta_{a_i}/2)$, $U = \bigcap_{i=1}^k U_{a_i}$, y sea $0 < \delta < \min_{i=1}^k \frac{\delta_{a_i}}{2}$ tal que

$$N(A, \delta) \subset N.$$

Si $y \in N(A, \delta)$ y $h \in U$, entonces $y \in N(a_i, \delta_{a_i})$ y $h \in U_{a_i}$, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. La contención (3.2) implica que

$$hy \in N(ga_i, \varepsilon/2) \subset N(gA, \varepsilon/2). \quad (3.3)$$

Sea $O(A, \delta) = \{B \in 2^X \mid d_H(A, B) < \delta\}$. Afirmamos que para cada $h \in U$ y para cada $B \in O(A, \delta)$, el conjunto hB pertenece a $O(gA, \varepsilon)$.

En efecto, si $B \in O(A, \delta)$, entonces $B \subset N(A, \delta)$, y por la contención (3.3) concluimos que $hB \subset N(gA, \varepsilon/2)$.

Por otro lado, si $a \in A$, entonces existe $b \in B$ con $d(b, a) < \delta$. Además, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $d(a, a_i) \leq \delta_{a_i}/2$. Así,

$$d(b, a_i) \leq \delta + \frac{\delta_{a_i}}{2} < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i},$$

lo cual implica que $d(hb, ga_i) < \varepsilon/2$. Como $d(ga, ga_i) < \varepsilon/2$ podemos concluir que $d(hb, ga) < \varepsilon$, y por lo tanto $gA \subset N(hB, \varepsilon)$. De esta manera hemos demostrado que $d_H(hB, gA) < \varepsilon$, lo cual completa la prueba. \square

La acción natural del grupo ortogonal $O(n)$ en \mathbb{R}^n induce una acción continua de $O(n)$ en el hiperespacio $2^{\mathbb{R}^n}$ (proposición 3.1.1). Esta acción asigna a cada par $(g, A) \in O(n) \times 2^{\mathbb{R}^n}$ el conjunto $gA = \{ga \mid a \in A\} \in 2^{\mathbb{R}^n}$.

Bajo esta acción, los hiperespacios $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)$ son subconjuntos $O(n)$ -invariantes de $2^{\mathbb{R}^n}$ y por lo tanto, la restricción de la acción en cada uno convierte a $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)$ en $O(n)$ -espacios.

Observemos que bajo esta acción, funciones como el operador $\text{conv} : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$, el operador unión $U : 2^{2^{\mathbb{R}^n}} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ (la acción de $O(n)$ en $2^{\mathbb{R}^n}$ induce una acción continua en $2^{2^{\mathbb{R}^n}}$ tal como se probó en la proposición 3.1.1) y la suma de Minkowski $+$: $cc(\mathbb{R}^n)^k \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ son $O(n)$ -equivariantes.

Bajo esta acción de $O(n)$, en [10, corolario 4.8] se demostró el siguiente teorema:

Teorema 3.1.2. *Los hiperespacios $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)$ son $O(n)$ -AE.*

En particular, por teorema 1.7.1, los hiperespacios $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)$ son $O(n)$ -AR. Este hecho en combinación con el teorema 1.7.4 nos demuestra el siguiente corolario:

Corolario 3.1.3. *Sea $K \subset O(n)$ un subgrupo cerrado. Entonces los K -espacios orbitales $cc(\mathbb{R}^n)/K$ y $cb(\mathbb{R}^n)/K$ son espacios AR.*

Como $\|gx\| = \|x\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $g \in O(n)$, podemos concluir que el grupo $O(n)$ actúa isométricamente en \mathbb{R}^n . Así, la acción inducida en $cc(\mathbb{R}^n)$ también es isométrica respecto a la métrica de Hausdorff. En particular, para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, la métrica de Hausdorff en $cc(\mathbb{R}^n)$ es K -invariante.

El siguiente lema será utilizado en varias ocasiones a lo largo de este trabajo.

Lema 3.1.4. *Sean $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ una cantidad finita de puntos. Sea $K \subset O(n)$ un subgrupo cerrado que actúe no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} . Sea D el conjunto definido por*

$$D = \text{conv}(K(p_1), \dots, K(p_k)).$$

Entonces la frontera ∂D no contiene ningún dominio elíptico de dimensión $n - 1$; es decir, ∂D no contiene ningún subconjunto abierto $V \subset \partial D$ que sea al mismo tiempo un subconjunto abierto en la superficie de un elipsoide n -dimensional contenido en \mathbb{R}^n .

Para demostrar el lemma 3.1.4, necesitamos recordar el teorema de la invarianza del Dominio de Brouwer:

Teorema de la Invarianza del Dominio. *Si U y V son subconjuntos homeomorfos de \mathbb{S}^n y U es abierto en \mathbb{S}^n , entonces V también es abierto en \mathbb{S}^n .*

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [37, Ch. 4, Sección 7, teorema 16].

Demostración del lema 3.1.4. Es suficiente demostrar que ninguna de las órbitas $K(p_i)$ contiene un dominio elíptico de dimensión $n - 1$.

Supongamos lo contrario. Entonces existe un subconjunto abierto V de $K(p_i)$ tal que V es un dominio elíptico de dimensión $n - 1$. Observemos que la órbita $K(p_i)$ está contenida en la esfera $\partial N(0, \|p_i\|)$ de dimensión $n - 1$ centrada en el origen y de radio $\|p_i\|$. Por esta razón, V debe ser un dominio de esta esfera. Como la órbita $K(p_i)$ es un espacio homogéneo y compacto, $K(p_i)$ admite una cubierta finita y abierta $\{V_1, \dots, V_m\}$ en donde cada V_j es homeomorfo al abierto V . Por el Teorema de la Invarianza del Dominio cada V_j es un conjunto abierto en la esfera $\partial N(0, \|p_i\|)$. Así la unión $V_1 \cup \dots \cup V_m = K(p_i)$ es un subconjunto abierto de la esfera $\partial N(0, \|p_i\|)$. Pero $K(p_i)$ es compacto y por lo tanto es cerrado en $\partial N(0, \|p_i\|)$. Esto implica que $K(p_i)$ es un subconjunto abierto y cerrado del espacio conexo $\partial N(0, \|p_i\|)$ y consecuentemente $K(p_i) = \partial N(0, \|p_i\|)$. Así, concluimos que K actúa transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} , lo cual es una contradicción. \square

3.2. La Acción del Grupo $\text{Aff}(n)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$

Desde este momento, la letra n será usada exclusivamente para denotar un número natural mayor o igual que 2.

Por la proposición 3.1.1, la acción natural del grupo $\text{Aff}(n)$ en \mathbb{R}^n induce una acción continua en $2^{\mathbb{R}^n}$ tal y como se describe en (3.1). Observemos que para cada $g \in \text{Aff}(n)$ y para cada conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$, la imagen $g(A)$ es un conjunto convexo. Además, si el interior de A es no vacío, entonces el interior de la imagen $g(A)$ también será no vacío. Estos dos hechos indican que los hiperespacios $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)$ son subconjuntos $\text{Aff}(n)$ -invariantes de $2^{\mathbb{R}^n}$ y por lo tanto la restricción de la acción los convierte en $\text{Aff}(n)$ -espacios.

La acción de $\text{Aff}(n)$ en $cc(\mathbb{R}^n)$ no es propia. Esto se puede ver fácilmente de la siguiente manera: si la acción del grupo $\text{Aff}(n)$ en $cc(\mathbb{R}^n)$ fuera propia, entonces el estabilizador de cualquier punto sería un subgrupo compacto de $\text{Aff}(n)$ (proposición 1.5.2). Pero esto no sucede, ya que el estabilizador del singulete $\{0\} \in cc(\mathbb{R}^n)$ es el grupo $\text{GL}(n)$, el cual no es compacto.

Sin embargo, la acción de $\text{Aff}(n)$ en $cb(\mathbb{R}^n)$ sí es propia.

Teorema 3.2.1. *El grupo $\text{Aff}(n)$ actúa propiamente en $cb(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $A \in cb(\mathbb{R}^n)$. Escojamos un punto $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\overline{N(x_0, 2\varepsilon)} \subset A$. Demostraremos que $O(A, \varepsilon)$ es una vecindad pequeña de A .

Sea $B \in cb(\mathbb{R}^n)$. Como B tiene interior no vacío, existe $z_0 \in B$ y $\delta > 0$ tales que $\overline{N(z_0, 2\delta)} \subset B$. Demostraremos que el transportador

$$\Gamma = \langle O(A, \varepsilon), O(B, \delta) \rangle = \{g \in G \mid gO(A, \varepsilon) \cap O(B, \delta) \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en $\text{Aff}(n)$.

Para ello recordemos que, como espacio topológico, el grupo afín es homeomorfo al producto $\mathbb{R}^n \times \text{GL}(n)$. Además, la topología de $\text{GL}(n)$ es la topología heredada del encaje natural de $\text{GL}(n)$ en \mathbb{R}^{n^2} . De esta manera podemos dar un encaje topológico de $\text{Aff}(n)$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$. Por esta razón es suficiente demostrar que Γ es un conjunto acotado de $\text{Aff}(n)$ y que su cerradura en $\text{Aff}(n)$ coincide con su cerradura en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sea $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$. Escojamos $M > 0$ con la siguiente propiedad: si $C \in O(A, \varepsilon) \cup O(B, \delta)$, entonces

$$\|c\|_\infty \leq M \quad \text{para todo } c \in C. \quad (3.4)$$

En particular,

$$\text{diam } C = \sup_{c, c' \in C} \|c - c'\|_\infty \leq 2M.$$

Consideremos un elemento arbitrario $\mu \in \Gamma$. Entonces existe $A' \in O(A, \varepsilon)$ y $B' \in O(B, \delta)$ tales que $\mu A' = B'$. Como μ es una transformación afín, existen $u \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in \text{GL}(n)$ tales que $\mu(x) = u + \sigma(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea (σ_{ij}) la matriz correspondiente a σ respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n , y consideremos (σ_{ij}) como un punto en \mathbb{R}^{n^2} .

Como $\mu A' = B' \in O(B, \delta)$, la desigualdad (3.4) implica que $\text{diam}(\mu A') \leq 2M$. Observemos que $\mu A' = \sigma A' + u$, y por lo tanto $\text{diam } \sigma A' = \text{diam } \mu A' \leq 2M$. Sea

$$\xi_i = (0, \dots, 0, \varepsilon/2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

dónde el valor $\varepsilon/2$ corresponde a la i -ésima coordenada. Entonces, por el lema 2.4.14, $\xi_i + x_0 \in N(x_0, \varepsilon) \subset A'$ y $-\xi_i + x_0 \in N(x_0, \varepsilon) \subset A'$. Como $\text{diam } \sigma A' \leq 2M$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \|2\sigma(\xi_i)\|_\infty &= \|\sigma(2\xi_i)\|_\infty = \|\sigma(\xi_i + x_0 - (-\xi_i + x_0))\|_\infty \\ &= \|\sigma(\xi_i + x_0) - \sigma(-\xi_i + x_0)\|_\infty \leq 2M, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|\sigma(\xi_i)\|_\infty \leq M$.

Sin embargo, $\sigma(\xi_i) = (\sigma_{1i}\varepsilon/2, \dots, \sigma_{ni}\varepsilon/2)$. Así, $|\sigma_{ji}\varepsilon/2| \leq M$ para todo $i = 1, \dots, n$, y $j = 1, \dots, n$, lo cual implica que $|\sigma_{ji}| < 2M/\varepsilon$. Por otro lado, la desigualdad (3.4) garantiza

que para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in A'$, $\|a\|_\infty \leq M$. De esta manera obtenemos que:

$$\|\sigma(a)\|_\infty = \max_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} a_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{2M}{\varepsilon} \|a\|_\infty \leq \frac{2nM^2}{\varepsilon}.$$

Además, $\mu(a) \in B'$, y por lo tanto

$$M \geq \|\mu(a)\|_\infty = \|u + \sigma(a)\|_\infty \geq \|u\|_\infty - \|\sigma(a)\|_\infty \geq \|u\|_\infty - \frac{2nM^2}{\varepsilon}.$$

Esto implica que $\|(u)\|_\infty \leq M + \frac{2nM^2}{\varepsilon}$, y entonces el transportador Γ , visto como subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$, es acotado. Para completar la demostración, sólo falta demostrar que la cerradura de Γ en $\text{Aff}(n)$ coincide con su cerradura en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$. Observemos que en este caso \mathbb{R}^{n^2} representa el espacio de todas las matrices reales de $n \times n$, es decir, \mathbb{R}^{n^2} representa el espacio de todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en sí mismo. Así, cada $\lambda \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ representa la composición de una transformación lineal seguida de una traslación. En este caso, λ es una transformación afín si y sólo si es suprayectiva.

Sea $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ una sucesión de transformaciones afines la cual converge a cierto $\lambda \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$. Necesitamos demostrar que $\lambda \in \text{Aff}(n)$. Como $\lambda_m \in \Gamma$, existen $A_m \in \overline{O(A, \varepsilon)}$ y $B_m \in \overline{O(B, \delta)}$ tales que $\lambda_m A_m = B_m$. Por el lema 2.4.15, las cerraduras $\overline{O(A, \varepsilon)}$ y $\overline{O(B, \delta)}$ son conjuntos compactos. De esta manera, podemos asumir sin perder la generalidad que A_m converge a $A_0 \in \overline{O(A, \varepsilon)}$ y B_m converge a $B_0 \in \overline{O(B, \delta)}$. Así, $\lambda_m A_m = B_m$ implica que $\lambda A_0 = B_0$. Como B_0 tiene interior no vacío, inferimos que B_0 tiene dimensión n y por lo tanto la dimensión de la imagen de λ también es n . Observemos que λ es una función lineal seguida de una traslación por un vector fijo. Así, la imagen de λ es un hiperplano de dimensión n contenido en \mathbb{R}^n el cual debe coincidir con \mathbb{R}^n . Esto demuestra que λ es suprayectiva, y por lo tanto la prueba está completa. □

3.3. Una Rebanada Global en $cb(\mathbb{R}^n)$

Un resultado de F. John muy conocido en geometría convexa [25] (véase también [20]) dice que para cada subconjunto $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ existe un único elipsoide de volumen mínimo $l(A)$ que contiene a A (respectivamente, un elipsoide de volumen máximo $j(A)$ contenido en A). Actualmente, $l(A)$ es llamado el *elipsoidie de Löwner* de A , mientras que $j(A)$ es llamado el *elipsoidie de John* de A .

Denotaremos por $L(n)$ (respectivamente, por $J(n)$) el subespacio de $cb(\mathbb{R}^n)$ que consiste de todos los cuerpos $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ para los cuales la bola unitaria \mathbb{B}^n es el elipsoide de Löwner (respectivamente, el elipsoide de John).

Por otro lado, denotaremos por $E(n)$ al subespacio de $cb(\mathbb{R}^n)$ formado por todos los elipsoides de dimensión n . La función $l : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow E(n)$ que asigna a cada cuerpo convexo $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ su elipsoide de volumen mínimo $l(A)$ será llamada la función de Löwner.

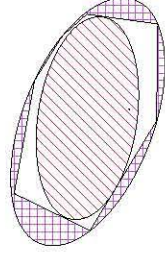


Figura 3.1: Elipsoide de John y de Löwner

Lema 3.3.1. *La función $l : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow E(n)$ es $\text{Aff}(n)$ -equivariante.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que l no es $\text{Aff}(n)$ -equivariante y consideremos $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \text{Aff}(n)$ tales que $l(gA) \neq gl(A)$. Claramente $gl(A)$ es un elipsoide que contiene a gA . Como el elipsoide de Löwner de $g(A)$ es único, podemos concluir que $\text{vol}(gl(A)) > \text{vol}(l(gA))$. Por el mismo argumento, $\text{vol}(g^{-1}l(gA)) > \text{vol}(l(A))$. Si aplicamos el hecho de que toda transformación afín preserva la razón de volúmenes de cualesquiera dos cuerpos compactos de un espacio Eulidiano, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\text{vol}(l(A))}{\text{vol}(A)} = \frac{\text{vol}(gl(A))}{\text{vol}(gA)} > \frac{\text{vol}(l(gA))}{\text{vol}(gA)} = \frac{\text{vol}(g^{-1}l(gA))}{\text{vol}(A)} > \frac{\text{vol}(l(A))}{\text{vol}(A)}.$$

Esta contradicción demuestra el lema. □

Proposición 3.3.2. *$L(n)$ satisface las siguientes condiciones*

- (a) $L(n)$ es $O(n)$ -invariante.
- (b) La saturación $\text{Aff}(n)(L(n))$ coincide con $cb(\mathbb{R}^n)$.
- (c) Si $gL(n) \cap L(n) \neq \emptyset$ para algún $g \in \text{Aff}(n)$, entonces $g \in O(n)$.
- (d) $L(n)$ es compacto.

Demostración. (a) Sea $g \in O(n)$ y $A \in L(n)$. El lema 3.3.1 implica que $l(gA) = gl(A) = g\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n$. Es decir, $gA \in L(n)$, y por lo tanto $L(n)$ es $O(n)$ -invariante.

(b) Sea $A \in cb(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe $g \in \text{Aff}(n)$, tal que $l(A) = g\mathbb{B}^n$. Por el lema 3.3.1 sabemos que

$$\mathbb{B}^n = g^{-1}l(A) = l(g^{-1}A).$$

Entonces, $g^{-1}A \in L(n)$ y $A = g(g^{-1}A)$ lo cual implica que $\text{Aff}(n)(L(n)) = cb(\mathbb{R}^n)$

(c) Si $g \in \text{Aff}(n)$ y $A \in L(n)$ son tales que $gA \in L(n)$ entonces

$$\mathbb{B}^n = l(gA) = gl(A) = g\mathbb{B}^n,$$

y por lo tanto $g \in O(n)$.

(d) Claramente, $L(n) \subset cc(\mathbb{B}^n)$. Como $cc(\mathbb{B}^n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert (teorema 2.3.2), $cc(\mathbb{B}^n)$ es compacto y por lo tanto es suficiente demostrar que $L(n)$ es cerrado en $cc(\mathbb{B}^n)$.

Sea $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L(n)$ una sucesión que converge a $A \in cc(\mathbb{B}^n)$. Demostraremos que $A \in L(n)$. Para ello, primero demostraremos que A tiene interior no vacío. En efecto, si no fuera así, existiría un hiperplano $(n-1)$ -dimensional $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \subset H$. Sea $E' \subset H$ un elipsoide de dimensión $n-1$ que contiene a A en su interior respecto a H . Para cada $r > 0$, consideremos el segmento de recta T_r , de longitud r , ortogonal a H y que pasa por el centro de E' . Sea $r > 0$ lo suficientemente pequeño para que el elipsoide n -dimensional E , generado por E' y T_r tenga volumen menor que $\text{vol}(\mathbb{B}^n)$. Como A está contenido en el interior de E , existe $\delta > 0$ tal que $N(A, \delta) \subset E$. De esta manera, como la sucesión $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a A , podemos encontrar un número natural $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{m_0} \subset N(A, \delta) \subset E$. En esta situación tendríamos que E es un elipsoide que contiene a A_{m_0} y por lo tanto

$$\text{vol}(\mathbb{B}^n) = \text{vol}(l(A_{m_0})) < \text{vol}(E) < \text{vol}(\mathbb{B}^n).$$

Esta contradicción demuestra que A tiene interior no vacío.

Consecuentemente, el elipsoide $l(A)$ está definido y sólo faltaría demostrar que $l(A) = \mathbb{B}^n$. Supongamos lo contrario, es decir: $l(A) \neq \mathbb{B}^n$. Como $A_k \subset \mathbb{B}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $A \subset \mathbb{B}^n$. Así, la unicidad del elipsoide de volumen mínimo nos garantiza que $\text{vol}(l(A)) < \text{vol}(\mathbb{B}^n)$. Sea L un elipsoide concéntrico y homotético a $l(A)$ con radio de homotecia > 1 y $\text{vol}(L) < \text{vol}(\mathbb{B}^n)$. Como $l(A)$ está contenido en el interior de L , la distancia $d_H(\partial L, \partial l(A)) = \varepsilon$ es positiva. Sea $U = N(\partial l(A), \varepsilon)$, la ε -vecindad de $\partial l(A)$ en \mathbb{R}^n . Como $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a A y todos los conjuntos A_k son convexos, la sucesión $(\partial A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a ∂A (proposición 2.4.13). Así, podemos encontrar $k_0 \geq 1$ tal que $\partial A_{k_0} \subset U$. La convexidad de A_{k_0} implica que $A_{k_0} \subset L$ y por lo tanto

$$\text{vol}(l(A_{k_0})) \leq \text{vol}(L) < \text{vol}(\mathbb{B}^n) = \text{vol}(l(A_{k_0})).$$

Esta contradicción demuestra que $A \in L(n)$, y por lo tanto $L(n)$ es cerrado en $cc(\mathbb{B}^n)$. \square

La función de Löwner es una retracción $\text{Aff}(n)$ -equivariante. La continuidad de l es una consecuencia estándar de las cuatro propiedades anteriores y [33, teorema 2.1.4]. Sin embargo, en el siguiente teorema daremos una demostración directa de este hecho utilizando la compacidad de $L(n)$.

Teorema 3.3.3. (1) *La función de Löwner $l : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow E(n)$ es una retracción $\text{Aff}(n)$ -equivariante con $L(n) = l^{-1}(\mathbb{B}^n)$.*

(2) *$L(n)$ es una $O(n)$ -rebanada global para el $\text{Aff}(n)$ -espacio propio $cb(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. (1) En el lema 3.3.1 demostramos que $l : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow E(n)$ es $\text{Aff}(n)$ -equivariante. Además, es claro que l es una retracción. sólo falta demostrar la continuidad de l . Para ello, consideremos una sucesión $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $cb(\mathbb{R}^n)$ que converja a un punto $X \in cb(\mathbb{R}^n)$. Debemos probar que la sucesión $(l(X_m))$ converge a $l(X)$. Supongamos lo contrario. Entonces debe existir un número $\varepsilon > 0$ y una subsucesión (A_k) de (X_m) tal que $d_H(l(A_k), l(A)) \geq \varepsilon$ para todo $k = 1, 2, \dots$

Por la propiedad (b) del teorema anterior, existen $g, g_k \in \text{Aff}(n)$, $k = 1, 2, \dots$, tales que $A_k = g_k S_k$ y $A = gP$ para ciertos $P, S_k \in L(n)$. Como $L(n)$ es compacto, podemos suponer sin perder la generalidad que (S_k) converge a S para algún $S \in L(n)$. Como $\text{Aff}(n)$ actúa propiamente en $cb(\mathbb{R}^n)$ (teorema 3.2.1), los puntos S y P tienen vecindades U_S y U_P , respectivamente, tales que el transportador $\langle U_S, U_P \rangle$ tiene cerradura compacta. Como (S_k) converge a S y $g^{-1}g_k S_k$ converge a P , podemos asegurar que existe un número natural k_0 tal que $g^{-1}g_k \in \langle U_S, U_P \rangle$ para todo $k \geq k_0$. De esta manera, la sucesión $(g^{-1}g_k)$ tiene una subsucesión convergente. Nuevamente, podemos asumir sin perder la generalidad que $(g^{-1}g_k)$ converge a h para cierto $h \in \text{Aff}(n)$. Esto implica que $(g^{-1}g_k S_k)$ converge a hS , y como $(g^{-1}g_k S_k)$ converge a P inferimos que $hS = P$. Como S y P pertenecen a $L(n)$, la propiedad (c) garantiza que $h \in O(n)$. Además, como (g_k) converge a gh , podemos concluir que

$$l(A_k) = l(g_k S_k) = g_k l(S_k) = g_k \mathbb{B}^n \text{ converge a } gh\mathbb{B}^n = g\mathbb{B}^n = gl(S) = l(gS) = l(A),$$

lo cual contradice la desigualdad $d_H(l(A_k), l(A)) \geq \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$. Por lo tanto, $(l(X_m))$ converge a $l(X)$, como se quería probar.

(2) Observemos que $E(n)$ es la $\text{Aff}(n)$ -órbita del punto $\mathbb{B}^n \in cb(\mathbb{R}^n)$ y que $O(n)$ es el estabilizador de \mathbb{B}^n . Como $\text{Aff}(n)$ actúa propiamente en $cb(\mathbb{R}^n)$, existe un homeomorfismo $\text{Aff}(n)$ -equivariante $E(n) \cong \text{Aff}(n)/O(n)$ dado por $g\mathbb{B}^n \rightarrow gO(n)$ (véase proposición 1.5.2(3)). Por (1), surge una función $\text{Aff}(n)$ -equivariante $f: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Aff}(n)/O(n)$ tal que $L(n) = f^{-1}(eO(n))$. Además, por la proposición 3.3.2, la saturación $\text{Aff}(n)(L(n))$ coincide con $cb(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto podemos concluir que $L(n)$ es una $O(n)$ -rebanada global. □

De los resultados anteriores, podemos dar una nueva demostración del teorema de Macbeath (teorema 2.3.4), agregando nueva información sobre el espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$.

Corolario 3.3.4. (1) (Macbeath [29]) *El $\text{Aff}(n)$ -espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ es compacto.*

(2) *Los dos espacios orbitales $L(n)/O(n)$ y $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ son homeomorfos.*

Demostración. Sea $\pi: L(n) \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ la restricción de la función orbital $cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$. Por la proposición 3.3.2(b) la función π es suprayectiva. Además, como π es continua y $L(n)$ es compacto, concluimos que la imagen $\pi(L(n)) = cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ es un espacio compacto. Esto prueba el primer enunciado.

Además, si $A, B \in L(n)$, la proposición 3.3.2(c) implica que $\pi(A) = \pi(B)$ si y sólo si A y B tienen la misma $O(n)$ -órbita. De aquí concluimos que π induce una biyección continua $p: L(n)/O(n) \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$. Como $L(n)/O(n)$ es compacto y $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ es Hausdorff, la función p es en realidad un homeomorfismo. □

En el teorema 4.2.11 probaremos que el espacio orbital $L(n)/O(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $BM(n)$. Esto, en combinación con el corolario 3.3.4 implica el siguiente resultado:

Corolario 3.3.5. *El $\text{Aff}(n)$ -espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/\text{Aff}(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $\text{BM}(n)$.*

Corolario 3.3.6. (1) *Existe una retracción $O(n)$ -equivariante $r: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(n)$ tal que $r(A)$ pertenece a la $\text{Aff}(n)$ -órbita de A .*

(2) *El producto diagonal de las dos retracciones $r: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(n)$ y $l: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow E(n)$ es un homeomorfismo $O(n)$ -equivariante $cb(\mathbb{R}^n) \cong L(n) \times E(n)$.*

Demostración. (1) Recordemos que $O(n)$ es un subgrupo maximal compacto de $\text{Aff}(n)$. De acuerdo a un teorema de estructura (véase [22, Capítulo XV, teorema 3.1]), existe un subconjunto $T \subset \text{Aff}(n)$ tal que $gTg^{-1} = T$ para todo $g \in O(n)$ y la función multiplicación

$$(t, g) \mapsto tg: T \times O(n) \rightarrow \text{Aff}(n) \quad (3.5)$$

es un homeomorfismo. En nuestro caso, es fácil ver que el conjunto T se puede tomar como el conjunto de todos los productos AS , donde A es una traslación y S es un operador positivo definido y simétrico (o auto adjunto). Este hecho es consecuencia directa de los siguientes dos resultados bien conocidos del álgebra lineal:

- (a) Cada elemento $a \in \text{Aff}(n)$ se representa de manera única como la composición de una traslación por un vector $t \in \mathbb{R}^n$ y un operador invertible $g \in \text{GL}(n)$,
- (b) Por el teorema de Descomposición Polar, cada operador invertible $g \in \text{GL}(n)$ se representa de manera única como la composición de un operador positivo no degenerado y simétrico y un operador ortogonal (véase Apéndice A).

Sea $f: \text{Aff}(n) \rightarrow E(n)$ la función definida por $f(g) = g\mathbb{B}^n$. Entonces f induce un homeomorfismo $\text{Aff}(n)$ -equivariante $\tilde{f}: \text{Aff}(n)/O(n) \rightarrow E(n)$ (proposición 1.5.2) tal que f es la composición de las funciones

$$\text{Aff}(n) \xrightarrow{\pi} \text{Aff}(n)/O(n) \xrightarrow{\tilde{f}} E(n)$$

en donde π es la función cociente. Como $O(n)$ es compacto, la función π es cerrada y por lo tanto f al ser composición de dos funciones cerradas, también es cerrada.

Observemos que la restricción $f|_T: T \rightarrow E(n)$ es una biyección. En efecto, si $f(t_1) = f(t_2) = g\mathbb{B}^n$, entonces las dos clases laterales $t_1O(n)$ y $t_2O(n)$ coinciden. Esto quiere decir que existen transformaciones ortogonales $\sigma_1, \sigma_2 \in O(n)$ tales que

$$t_1\sigma_1 = t_2\sigma_2,$$

Luego, por el teorema de descomposición polar, concluimos que $t_1 = t_2$. Por otro lado, para cada $F \in E(n)$, existe una transformación afín $g \in \text{Aff}(n)$ tal que $F = g\mathbb{B}^n$. Entonces existe un vector $u \in \mathbb{R}^n$ y una transformación lineal $h \in \text{GL}(n)$ tal que

$$g(x) = u + h(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por el teorema de descomposición polar, h se representa como la composición de un operador positivo no degenerado y simétrico s y un operador ortogonal ω . Esto quiere decir que

$$g(x) = u + s(\omega(x)), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Llamemos t a la función dada por $t(x) = u + s(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $t \in T$ y

$$f(t) = t\mathbb{B}^n = u + s(\mathbb{B}^n) = u + s(\omega\mathbb{B}^n) = g\mathbb{B}^n = F,$$

por lo que $f|_T$ es suprayectiva.

Lo anterior implica que la restricción $f|_T: T \rightarrow E(n)$ es un homeomorfismo. Además, este homeomorfismo es $O(n)$ -equivariante si dejamos actuar a $O(n)$ en T por automorfismos internos y en $E(n)$ por la acción inducida de $cb(\mathbb{R}^n)$.

Denotemos por $\xi: E(n) \rightarrow T$ la función inversa f^{-1} . Entonces ξ satisface la siguiente condición:

$$[\xi(C)]^{-1}C = \mathbb{B}^n \quad \text{para todo } C \in E(n). \quad (3.6)$$

Ahora definimos la retracción r de la siguiente manera

$$r(A) = [\xi(l(A))]^{-1}A \quad \text{para todo } A \in cb(\mathbb{R}^n).$$

Claramente, r depende continuamente de $A \in cb(\mathbb{R}^n)$.

Como $l(r(A)) = l([\xi(l(A))]^{-1}A) = [\xi(l(A))]^{-1}l(A)$ y por (3.6), $[\xi(l(A))]^{-1}l(A) = \mathbb{B}^n$, podemos concluir que $r(A) \in L(n)$. Además, si $A \in L(n)$, entonces $l(A) = \mathbb{B}^n$ y

$$r(A) = [\xi(l(A))]^{-1}A = [\xi(\mathbb{B}^n)]^{-1}A = 1 \cdot A = A.$$

Esto demuestra que r es una retracción bien definida sobre $L(n)$.

Verifiquemos que r es $O(n)$ -equivariante. Para ello, sean $g \in O(n)$ y $A \in cb(\mathbb{R}^n)$. Entonces $r(gA) = [\xi(l(gA))]^{-1}gA = [\xi(gl(A))]^{-1}gA$. Como ξ es equivariante, tenemos que $\xi(gl(A)) = g\xi(l(A))g^{-1}$, y por lo tanto $[\xi(gl(A))]^{-1} = g[\xi(l(A))]^{-1}g^{-1}$. Consecuentemente,

$$r(gA) = \left(g[\xi(l(A))]^{-1}g^{-1}\right)gA = g\left([\xi(l(A))]^{-1}A\right) = gr(A),$$

como se quería. De esta manera tenemos que $r: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(n)$ es una retracción $O(n)$ -equivariante y claramente $r(A)$ pertenece a la $\text{Aff}(n)$ -órbita de A .

(2) Definamos

$$\varphi(A) = (r(A), l(A)), \quad \text{para cada } A \in cb(\mathbb{R}^n).$$

Entonces $\varphi: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(n) \times E(n)$ es un homeomorfismo $O(n)$ -equivariante cuya función inversa es la función dada por $\varphi^{-1}((C, E)) = \xi(E)C$ para cada par $(C, E) \in L(n) \times E(n)$.

□

Corolario 3.3.7. (1) *Los hiperespacios $L(n)$ y $E(n)$ son $O(n)$ -AR.*

(2) *$E(n)$ es homeomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n(n+3)/2}$.*

Demostración. (1) Por el teorema 3.1.2, $cb(\mathbb{R}^n)$ es un $O(n)$ -AR. Esto implica que cualquier retracto $O(n)$ -equivariante de $cb(\mathbb{R}^n)$ será también un $O(n)$ -AR. En particular, los $O(n)$ -retractos $E(n)$ (teorema 3.3.3) y $L(n)$ (corolario 3.3.6) son $O(n)$ -AR.

(2) Anteriormente hemos observado que $E(n)$ es homeomorfo al espacio cociente $\text{Aff}(n)/O(n)$. Por esta razón, es suficiente demostrar que $\text{Aff}(n)/O(n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n(n+3)/2}$.

Por ser $\text{Aff}(n)$ un producto semidirecto de \mathbb{R}^n y $\text{GL}(n)$, como espacio topológico $\text{Aff}(n)/O(n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \text{GL}(n)/O(n)$. El teorema de descomposición- RQ nos dice que toda matriz invertible se representa de manera única como el producto de una matriz ortogonal y una matriz triangular superior en la que todos los elementos de la diagonal son positivos (véase Apéndice B). De esta manera, $\text{GL}(n)/O(n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{(n+1)n/2}$ y por lo tanto $\text{Aff}(n)/O(n)$ es homeomorfo a \mathbb{R}^p , para $p = n + (n+1)n/2 = n(n+3)/2$.

□

En el capítulo 4 demostraremos que $L(n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert (corolario 4.2.9). Si se combina este hecho con el corolario 3.3.7, obtenemos el siguiente resultado, el cual es uno de los resultados principales de este trabajo:

Corolario 3.3.8. $cb(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $Q \times \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$.

Observación 3.3.9. Si usamos elipsoides de volumen máximo (elipsoides de John) en vez de elipsoides de volumen mínimo (elipsoides de Löwner), se puede demostrar que $J(n)$, también es una $O(n)$ -rebanada global para $cb(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, por un resultado de Abels [1, lema 2.3] las dos $O(n)$ -rebanadas $J(n)$ y $L(n)$ son equivalentes en el sentido de que existe un homeomorfismo $\text{Aff}(n)$ -equivariante $f: cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(L(n)) = J(n)$. De esta manera, todos los resultados previos y posteriores sobre $L(n)$ tienen su análogo en términos de $J(n)$.

Capítulo 4

Los hiperespacios $M(n)$ y $L(n)$

En este capítulo estudiaremos propiedades geométricas y topológicas de dos hiperespacios de conjuntos convexos: $M(n)$ y $L(n)$. El hiperespacio $M(n)$, que será definido a continuación, presenta características similares al ya definido $L(n)$. Las técnicas utilizadas para demostrar las propiedades de $M(n)$, serán utilizadas después para demostrar las propiedades análogas de $L(n)$.

4.1. El Hiperespacio $M(n)$

Denotemos por $M(n)$ el subconjunto $O(n)$ -invariante de $cc(\mathbb{R}^n)$ que consiste de todos los compactos convexos $A \in cc(\mathbb{R}^n)$ tales que $\max_{a \in A} \|a\| = 1$. Es decir, $M(n)$ es el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos y convexos de \mathbb{B}^n que intersecan la esfera \mathbb{S}^{n-1} .

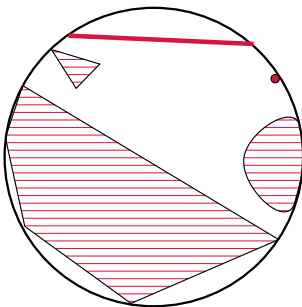


Figura 4.1: $M(n)$

Es evidente que $M(n)$ es cerrado en $cc(\mathbb{B}^n)$, el cual es homeomorfo al cubo de Hilbert

(véase teorema 2.3.2) y por lo tanto $M(n)$ es compacto. La importancia de $M(n)$ radica en la propiedad de que $cc(\mathbb{R}^n)$ es el cono abierto sobre $M(n)$ (véase Capítulo 5).

En esta sección demostraremos que $M(n)$ también es homeomorfo al cubo de Hilbert (corolario 4.1.10).

Consideremos la función $\nu : cc(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ definida por la fórmula:

$$\nu(A) = \max_{a \in A} \|a\|. \quad (4.1)$$

Lema 4.1.1. *La función ν es una función $O(n)$ -invariante, uniformemente continua, propia y las fibras $\nu^{-1}(t)$ son $O(n)$ -contráctiles.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $d_H(A, B) < \varepsilon$. Como A es compacto, existe $a \in A$ tal que $\nu(A) = \|a\|$. Escojamos $b \in B$ con $\|a - b\| < \varepsilon$. Evidentemente $\|b\| \leq \nu(B)$ y por lo tanto

$$\varepsilon > \|a - b\| \geq \|a\| - \|b\| \geq \nu(A) - \nu(B).$$

De manera análoga se prueba que $\nu(B) - \nu(A) < \varepsilon$, lo cual implica que $|\nu(A) - \nu(B)| < \varepsilon$ y por lo tanto ν es una función uniformemente continua.

Para demostrar que ν es $O(n)$ -invariante, consideremos $\sigma \in O(n)$. Como σ es una isometría de \mathbb{R}^n , se tiene que $\|\sigma x\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Así

$$\nu(\sigma A) = \max_{a' \in \sigma A} \|a'\| = \max_{a \in A} \|\sigma a\| = \max_{a \in A} \|a\| = \nu(A),$$

y por lo tanto ν es $O(n)$ -invariante.

Para demostrar que ν es propia, consideremos un subconjunto compacto $C \subset [0, \infty)$. Sea a el supremo de C . Denotemos por N_a la bola cerrada de radio a centrada en el origen. Como ν es continua, la preimagen $\nu^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de $cc(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto también es cerrado en $cc(N_a)$. Por el teorema 2.3.2, el hiperespacio $cc(N_a)$ es compacto, y por lo tanto $\nu^{-1}(C)$ también es compacto.

Para completar la prueba, demostremos que las fibras de ν son contráctiles. Sea $t \in [0, \infty)$. Si $t = 0$, la fibra $\nu^{-1}(t)$ es el singulete conformado por el origen de \mathbb{R}^n el cuál es contráctil. Por otro lado, si $t > 0$, consideremos la bola cerrada N_t , de radio t y centrada en el origen. Definamos $H : \nu^{-1}(t) \times [0, 1] \rightarrow \nu^{-1}(t)$ de la siguiente manera:

$$H(A, s) = sN_t + (1 - s)A, \quad \text{para todo } s \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

Evidentemente H define una homotopía estricta de $\nu^{-1}(t)$ en N_t . Además, H es $O(n)$ -equivariante ya que

$$H(gA, s) = sNt + (1 - s)gA = sgNt + (1 - s)gA = g(sNt + (1 - s)A) = gH(A, s),$$

para todo $g \in O(n)$, $A \in \nu^{-1}(t)$ y $s \in [0, 1]$. Esto demuestra que $\nu^{-1}(t)$ es estrictamente $O(n)$ -contráctil, como se quería demostrar. \square

Para cada $t \in [0, \infty)$, el hiperespacio $\nu^{-1}(t)$ tiene un único $O(n)$ -punto fijo: N_t .

Además, observemos que para cada $t > 0$, la función $h : \nu^{-1}(1) \rightarrow \nu^{-1}(t)$ dada por

$$h(A) = tA$$

define un $O(n)$ -homeomorfismo.

Teorema 4.1.2. *$M(n)$ es un $O(n)$ -AR con un único $O(n)$ -punto fijo, \mathbb{B}^n . Además, $M(n)$ es estrictamente $O(n)$ -contráctil a \mathbb{B}^n .*

Demostración. Por el teorema 3.1.2, $cc(\mathbb{R}^n)$ es un $O(n)$ -AR y por lo tanto $cc(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ es un $O(n)$ -ANR. La función $r : cc(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \rightarrow M(n)$ definida por la regla:

$$r(A) = \frac{1}{\nu(A)}A \quad (4.3)$$

es una $O(n)$ -retracción, lo cual demuestra que $M(n)$ también es un $O(n)$ -ANR (proposición 1.7.2). Por otro lado, por el lema 4.1.1, cada $\nu^{-1}(t)$ es estrictamente $O(n)$ -contráctil a N_t . En particular $M(n)$ es $O(n)$ -contráctil a $N_1 = \mathbb{B}^n$. Esto hecho implica que $M(n)$ es un $O(n)$ -AR (proposición 1.7.2) y por lo tanto la prueba está completa. \square

Denotemos por $M_0(n)$ el complemento $M(n) \setminus \{\mathbb{B}^n\}$.

Proposición 4.1.3. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} y para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua K -equivariante $\chi_\varepsilon : M(n) \rightarrow M_0(n)$, la cual es ε -cercana a la función identidad de $M(n)$. En particular, $\chi_\varepsilon(M(n)^K) \subset M_0(n)^K$.*

Demostración. Sea $r : cc(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \rightarrow M(n)$ la retracción $O(n)$ -equivariante definida en (4.3). Como $M(n)$ es compacto, podemos encontrar $0 < \delta < \varepsilon/2$ tal que $d_H(r(A), A) < \varepsilon/2$ para todo A que pertenezca a la δ -vecindad de $M(n)$ en $cc(\mathbb{R}^n)$.

Sea $P \subset \mathbb{B}^n$ un poliedro convexo que contenga el origen en su interior. Podemos escoger P de manera que sea $\delta/4$ -cercano a \mathbb{B}^n y tal que todos los vértices p_1, \dots, p_k de P estén en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$. Entonces el casco convexo:

$$T = \text{conv}(K(p_1), \dots, K(p_k))$$

es un conjunto compacto, convexo y K -invariante. Por el lema 3.1.4, la frontera ∂T no tiene ningún dominio elíptico de dimensión $(n-1)$. Además,

$$d_H(\mathbb{B}^n, T) \leq d_H(\mathbb{B}^n, P) < \delta/4 \quad (4.4)$$

Sea $h : M(n) \rightarrow M(n)$ la función definida en cada $A \in M(n)$ por la siguiente fórmula:

$$h(A) = \{x \in \mathbb{B}^n \mid d(x, A) \leq \delta/2\} = A_{\delta/2} \cap \mathbb{B}^n.$$

Claramente, $h(A) \cap T$ es un conjunto no vacío con interior no vacío.

Si definimos

$$\chi'(A) = h(A) \cap T$$

obtenemos una función $\chi' : M(n) \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)$. Como T es un K -punto fijo de $cc(\mathbb{R}^n)$, podemos concluir que χ' es K -equivariante.

La continuidad de χ' es consecuencia inmediata del lema 2.4.16 y del hecho que h es una función continua.

Afirmamos que $\chi'(A)$ no es una bola Euclidiana centrada en el origen para ningún $A \in M(n)$. En efecto, si $h(A) \subset T$ entonces $h(A) \neq \mathbb{B}^n$ ya que T está estrictamente contenido en \mathbb{B}^n . En este caso $\chi'(A) = h(A) \cap T = h(A)$ y $h(A)$ pertenece a $M(n)$. Sin embargo, la única bola Euclidiana centrada en el origen contenida en $M(n)$ es \mathbb{B}^n . Consecuentemente, $\chi'(A)$ no puede ser ninguna bola Euclidiana centrada en el origen.

Por otro lado, si $h(A)$ no está contenido en T , entonces la frontera de $\chi'(A)$ contiene un dominio de la frontera de T . Pero la frontera de T no contiene ningún dominio elíptico $(n-1)$ -dimensional (lema 3.1.4), y por lo tanto podemos concluir que $\chi'(A)$ no es un elipsoide. En particular, $\chi'(A)$ no es una bola Euclidiana centrada en el origen, y por lo tanto la afirmación está probada.

La función buscada es la composición $\chi = r \circ \chi'$. Observemos que $r(A) = \mathbb{B}^n$ si y sólo si A es una bola Euclidiana centrada en el origen. Entonces $\chi(A) = r(\chi'(A)) \neq \mathbb{B}^n$ para todo $A \in M(n)$.

Claramente χ es continua y K -equivariante.

Ahora, si $x \in \chi'(A)$ entonces $x \in h(A)$. Así, $d(x, A) \leq \delta/2 < \delta$ y $\chi'(A) \subset N(A, \delta)$. Por otro lado, si $a \in A \subset \mathbb{B}^n$, podemos usar la desigualdad (4.4) para encontrar un punto $x \in T$ tal que $d(x, a) < \delta/4 \leq \delta/2$. De esta manera, $x \in h(A) \cap T = \chi'(A)$ y por lo tanto $A \subset N(\chi'(A), \delta/2)$. Esto demuestra que $d_H(A, \chi'(A)) < \delta$.

Por la elección de δ , tenemos que $d_H(r(\chi'(A)), \chi'(A)) \leq \varepsilon/2$. Ahora, si $A \in M(n)$, entonces

$$\begin{aligned} d_H(\chi(A), A) &\leq d_H(\chi(A), \chi'(A)) + d_H(\chi'(A), A) \\ &= d_H(r(\chi'(A)), \chi'(A)) + d_H(\chi'(A), A) \\ &< \varepsilon/2 + \delta < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que χ es ε -cercana a la función identidad de $M(n)$, lo cual completa la demostración. □

Como consecuencia de la proposición 4.1.3 tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.1.4. *El conjunto $\{\mathbb{B}^n\}$ es un Z -conjunto en $M(n)^K$.*

Ahora daremos una serie de lemas y proposiciones que se resumirán en el corolario 4.1.12.

Lema 4.1.5. *Sea $A \in M(n)$. El $O(n)$ -estabilizador de A actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} si y sólo si $A \in M_0(n)$.*

Demostración. Sea $A \in M(n)$ y $O(n)_A$ el $O(n)$ -estabilizador de A . Observemos que la intersección $A \cap \mathbb{S}^{n-1}$ es no vacía, y por lo tanto, existe un punto $a \in A \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Esto quiere decir que $O(n)_A(a) \subset A \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

Si $A = \mathbb{B}^n$, entonces $O(n)_A = O(n)$ el cual actúa transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} . Por otro lado, si $A \in M_0(n)$ entonces $A \neq \mathbb{B}^n$ y por lo tanto la órbita $O(n)_A(a)$ no puede ser \mathbb{S}^{n-1} . Esto demuestra que $O(n)_A$ no actúa transitivamente en la esfera. \square

Denotemos por $\mathcal{R}(n)$, al conjunto de todos los $A \in M(n)$ tales que $A \cap \mathbb{S}^{n-1}$ tiene interior vacío en \mathbb{S}^{n-1} .

Lema 4.1.6. *Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $D \in M_0(n)$ existe un conjunto compacto y convexo $A \in \mathcal{R}(n)$, con $d_H(D, A) < \varepsilon$ y tal que el $O(n)$ -estabilizador $O(n)_A$ de A coincide con el $O(n)$ -estabilizador $O(n)_D$ de D .*

Demostración. Por el teorema 1.6.2, podemos encontrar un número $0 < \eta < \varepsilon$ tal que si $d_H(C, D) < \eta$ entonces $O(n)_C$ es conjugado a un subgrupo de $O(n)_D$. Sean $p_1, \dots, p_k \in D$ puntos tales que $P = \text{conv}(p_1, \dots, p_k)$ pertenece $M(n)$ (para ello es suficiente tomar uno de los p_i 's en $D \cap \mathbb{S}^{n-1}$) y a tal que $d_H(D, P) < \eta$. Ahora consideremos

$$A = \text{conv}(O(n)_D(p_1), \dots, O(n)_D(p_k)).$$

Claramente $A \in M(n)$ y

$$d_H(D, A) \leq d_H(D, P) < \eta < \varepsilon.$$

Como $D \in M_0(n)$, inferimos del lema 4.1.5 que $O(n)_D$ actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} . Luego, por el lema 3.1.4, ∂A no contiene ningún dominio elíptico de dimensión $(n-1)$. En particular, el conjunto de contacto $A \cap \mathbb{S}^{n-1}$ tiene interior vacío en \mathbb{S}^{n-1} .

Por la elección de η podemos inferir que $O(n)_A$ es conjugado a un subgrupo de $O(n)_D$. Sólo falta demostrar que $O(n)_D = O(n)_A$. Para ello, observemos que A es un conjunto $O(n)_D$ -invariante. Entonces $O(n)_D \subset O(n)_A$ y como $O(n)_A$ es conjugado a un subgrupo de $O(n)_D$, podemos concluir que $O(n)_A = O(n)_D$, lo cual completa la prueba. \square

Proposición 4.1.7. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $O(n)$ -equivariante $f_\varepsilon : M_0(n) \rightarrow \mathcal{R}(n)$, ε -cercana a la función identidad de $M_0(n)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{O(X, \varepsilon/4)\}_{X \in M_0(n)}$ la cubierta abierta de $M_0(n)$ formada por todas las bolas abiertas de radio $\varepsilon/4$. Por el teorema 1.8.5, existe una cubierta $O(n)$ -normal de $M_0(n)$,

$$\mathcal{W} = \{(gS_\mu, H_\mu) \mid g \in O(n), \mu \in \mathcal{M}\}$$

la cual es un refinamiento estrella de \mathcal{V} . Además, por el mismo lema, para cada $\mu \in \mathcal{M}$ existe $X_\mu \in S_\mu$ tal que H_μ coincide con el estabilizador $O(n)_{X_\mu}$. Como $X_\mu \in M_0(n)$, podemos afirmar que H_μ actúa no transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} . Así, por el lema 4.1.6, podemos encontrar $A_\mu \in \mathcal{R}(n)$, $\varepsilon/4$ -cercano a X_μ y tal que $O(n)_{A_\mu} = H_\mu$. Sea $F_\mu : O(n)(S_\mu) \rightarrow O(n)(A_\mu)$ la función definida por

$$F_\mu(gX) = gA_\mu, \quad X \in S_\mu, \quad g \in O(n).$$

Claramente F_μ es una función bien definida, continua y $O(n)$ -equivariante.

Para cada $\mu \in \mathcal{M}$, denotemos el conjunto $O(n)(S_\mu)$ por O_μ . Como \mathcal{W} es una cubierta $O(n)$ -normal, existe $\{p_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ una partición de unidad invariante localmente finita subordinada a la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{O_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$. Así, para cada $\mu \in \mathcal{M}$,

$$\overline{p_\mu^{-1}((0, 1])} \subset O_\mu.$$

Sea $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ el nervio de la cubierta \mathcal{U} (véase Apéndice C) y, por simplicidad, supongamos que \mathcal{M} es el conjunto de vértices de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Denotemos por $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ la realización geométrica de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Recordemos que cada punto $\alpha \in |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ lo podemos expresar como una suma $\alpha = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \alpha_\mu v_\mu$, en donde v_μ es el vértice geométrico correspondiente al vértice abstracto μ y $\{\alpha_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ son las coordenadas baricéntricas de α .

Para cada simplejo σ del nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ con vértices μ_1, \dots, μ_k usaremos la notación $\sigma = \langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle$. Por $|\sigma| = |\langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle|$ denotaremos el correspondiente simplejo geométrico cuyos vértices son $v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}$.

Para cada simplejo geométrico $|\sigma| = |\langle \mu_1, \dots, \mu_k \rangle| \in |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ denotemos por $\beta(\sigma) \in |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ su baricentro geométrico, es decir, $\beta(\sigma) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \beta(\sigma)_\mu v_\mu$ donde

$$\beta(\sigma)_\mu = \begin{cases} 1/k, & \text{si } \mu \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}, \\ 0, & \text{si } \mu \notin \{\mu_1, \dots, \mu_k\}. \end{cases}$$

Consideremos la función $\Psi : |\mathcal{N}(\mathcal{U})| \rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ definida en cada $\alpha = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \alpha_\mu v_\mu \in |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ como sigue: si $|\langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle|$ es el portador de α y $\alpha_{\mu_0} \geq \alpha_{\mu_1} \geq \dots \geq \alpha_{\mu_k} > 0$, entonces

$$\Psi(\alpha) = \sum_{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})} \Psi(\alpha)_\sigma \beta(\sigma)$$

donde

$$\Psi(\alpha)_\sigma = \begin{cases} (i+1)(\alpha_{\mu_i} - \alpha_{\mu_{i+1}}), & \text{si } \sigma = \langle \mu_0, \dots, \mu_i \rangle, \\ (k+1)\alpha_{\mu_k}, & \text{si } \sigma = \langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle, \\ 0, & \text{si } \sigma \neq \langle \mu_0, \dots, \mu_i \rangle, \quad i = 0, \dots, k. \end{cases} \quad (4.5)$$

La función Ψ es en realidad la función identidad de $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$. Simplemente observemos que $\Psi(\alpha)$ está utilizando las coordenadas baricéntricas respecto a la primera subdivisión baricéntrica de $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ (ver Apéndice C).

Sea $p : M_0(n) \rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ la función canónica definida por

$$p(X) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} p_\mu(X) v_\mu, \quad X \in M_0(n).$$

Como cada p_μ es $O(n)$ -invariante, la función p también es $O(n)$ -invariante.

Además, si $\sigma = \langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ entonces el conjunto $V_\sigma = O_{\mu_0} \cap \dots \cap O_{\mu_k}$ es un conjunto abierto y no vacío de $M_0(n)$. La continuidad del Operador Unión (lema 2.4.4) y del Operador Casco Convexo (lema 2.4.7) garantizan que la función $\Omega'_\sigma : V_\sigma \rightarrow M_0(n)$ dada por

$$\Omega'_\sigma(X) = \text{conv} \left(\bigcup_{\mu \in \sigma} F_\mu(X) \right)$$

es una función continua y $O(n)$ -equivariante.

Observemos que $\Omega'_\sigma(X)$ pertenece a $M_0(n)$ y por lo tanto el conjunto de contacto $(\Omega'_\sigma(X)) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ está contenido en $(\bigcup_{\mu \in \sigma} F_\mu(X)) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ y por ende tiene interior vacío en \mathbb{S}^{n-1} .

Fijemos un conjunto $B_0 \in M_0(n)$. Para cada $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, extendamos la función Ω'_σ a una función $\Omega_\sigma : M_0(n) \rightarrow M_0(n)$ definida en todo $M_0(n)$ como sigue:

$$\Omega_\sigma(X) = \begin{cases} \Omega'_\sigma(X) & \text{si } X \in V_\sigma, \\ B_0, & \text{si } X \notin V_\sigma. \end{cases}$$

Definamos la función $f' : M_0(n) \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ por la fórmula:

$$f'(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})} \Psi(p(X))_\sigma \Omega_\sigma(X).$$

Para cada $X \in M_0(n)$, sea $Q(X)$ el subconjunto de \mathcal{M} formado por todos aquellos índices $\mu \in \mathcal{M}$ tales que $X \in p_\mu^{-1}((0, 1])$. Similarmente, definamos $Q'(X)$ como el subconjunto de \mathcal{M} formado por todos los índices $\mu \in \mathcal{M}$ tales que $X \in \overline{p_\mu^{-1}((0, 1])}$.

Si $X \in M_0(n)$, es evidente que $Q(X) \subset Q'(X)$ y ambos conjuntos son finitos. De esta manera, para cada $X \in M_0(n)$ podemos reescribir la imagen $f'(x)$ como sigue:

$$f'(X) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q(X)}} \Psi(p(X))_\sigma \Omega_\sigma(X) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q'(X)}} \Psi(p(X))_\sigma \Omega_\sigma(X). \quad (4.6)$$

Para demostrar que f' es continua, escojamos un punto arbitrario $C \in M_0(n)$. Sea

$$V = \bigcap_{\mu \in Q'(C)} O_\mu \setminus \bigcup_{\mu \notin Q'(C)} \overline{p_\mu^{-1}((0, 1])}.$$

Como la familia $\{\overline{p_\mu^{-1}((0, 1])}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ es localmente finita, la unión $\bigcup_{\mu \notin Q'(C)} \overline{p_\mu^{-1}((0, 1])}$ es cerrada, y por lo tanto, V es vecindad de C . Es evidente que para cada $X \in V$, el conjunto $Q(X)$ está completamente contenido en $Q'(C)$. Si usamos la igualdad (4.6) podemos inferir que

$$f'(X) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q'(C)}} \Psi(p(X))_\sigma \Omega_\sigma(X).$$

Observemos que para cada $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ con $\sigma \subset Q'(C)$, la vecindad V está contenida en V_σ y por lo tanto $\Omega_\sigma|_V = \Omega'_\sigma|_V$ es continua.

Por otro lado, $\Psi(p(X))_\sigma$ es la proyección de $\Psi(p(X))$ en la $\beta(\sigma)$ -coordenada. De esta manera, para cada $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, la función $X \rightarrow \Psi(p(X))_\sigma$ depende continuamente de X . Así, $f'|_V$ es una suma finita de funciones continuas y por lo tanto ella misma es continua.

Si $g \in O(n)$ y $X \in M_0(n)$, entonces

$$\begin{aligned} f'(gX) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q(X)}} \Psi(p(gX))_\sigma \Omega_\sigma(gX) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q(X)}} \Psi(p(X))_\sigma \Omega'_\sigma(gX) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})} \Psi(p(X))_\sigma g \Omega'_\sigma(X) = g \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q(X)}} \Psi(p(X))_\sigma \Omega'_\sigma(X) \right) \\ &= g \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \\ \sigma \subset Q(X)}} \Psi(p(X))_\sigma \Omega_\sigma(X) \right) = gf'(X), \end{aligned}$$

lo cual implica que f' es $O(n)$ -equivariante.

La función buscada $f_\varepsilon : M_0(n) \rightarrow M_0(n)$ se define como:

$$f_\varepsilon(X) = \text{conv}(f'(X)), \quad X \in M_0(n).$$

Es evidente que f_ε es una función continua y $O(n)$ -equivariante.

Para cada $X \in M_0(n)$, la imagen $f_\varepsilon(X)$ es el casco convexo de una suma de Minkowski de elementos de $M_0(n)$ y por lo tanto está contenida en \mathbb{B}^n . Para ver que pertenece a $M_0(n)$, supongamos que $Q(X) = \{\mu_0, \dots, \mu_k\}$ y $p_{\mu_0}(X) \geq p_{\mu_1}(X) \geq \dots \geq p_{\mu_k}(X)$.

Por la ecuación (4.5), el conjunto $f'(X)$ se escribe como la suma de Minkowski:

$$\begin{aligned} f'(X) &= (k+1)p_{\mu_k}(X)\Omega_{\langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle}(X) + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)(p_{\mu_i}(X) - p_{\mu_{i+1}}(X))\Omega_{\langle \mu_0, \dots, \mu_i \rangle}(X) \\ &= (k+1)p_{\mu_k}(X)\Omega'_{\langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle}(X) + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)(p_{\mu_i}(X) - p_{\mu_{i+1}}(X))\Omega'_{\langle \mu_0, \dots, \mu_i \rangle}(X). \end{aligned}$$

Observemos que $F_{\mu_0}(X) \subset \Omega'_{\langle \mu_0, \dots, \mu_i \rangle}(X)$ para cada $i = 0, \dots, k$. Esto implica que

$$\begin{aligned} F_{\mu_0}(X) &= (k+1)p_{\mu_k}(X)F_{\mu_0}(X) + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)(p_{\mu_i}(X) - p_{\mu_{i+1}}(X))F_{\mu_0}(X) \\ &\subset (k+1)p_{\mu_k}(X)\Omega'_{\langle \mu_0, \dots, \mu_k \rangle}(X) + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)(p_{\mu_i}(X) - p_{\mu_{i+1}}(X))\Omega'_{\langle \mu_0, \dots, \mu_i \rangle}(X) \\ &= f'(X) \subset f_\varepsilon(X) \end{aligned}$$

y por lo tanto $f_\varepsilon(X) \in M_0(n)$. Por otro lado, el conjunto de contacto $f_\varepsilon(X) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ es el conjunto de contacto $f'(X) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ el cual está contenido en

$$\partial\left(\bigcup_{i=0}^k \Omega'_{\langle\mu_0, \dots, \mu_i\rangle}(X)\right) \cap \mathbb{S}^{n-1}$$

y por lo tanto tiene interior vacío en \mathbb{S}^{n-1} .

Sólo falta demostrar que $d_H(X, f_\varepsilon(X)) < \varepsilon$, para cada $X \in M_0(n)$. Como el operador casco convexo es no expansivo (lema 2.4.6), es suficiente demostrar que $d_H(f'(X), X) < \varepsilon$. Pero $f'(X)$ es una suma convexa de los elementos $\Omega_{\langle\mu_0, \dots, \mu_i\rangle}(X)$ para $i = 0, \dots, k$. Así, por el lema 2.4.10 es suficiente demostrar que $\Omega_{\langle\mu_0, \dots, \mu_i\rangle}(X)$ es ε -cercano a X para cada $i = 0, \dots, k$.

Recordemos que $\Omega_{\langle\mu_0, \dots, \mu_i\rangle}(X) = \text{conv}\left(\bigcup_{j=0}^i F_{\mu_j}(X)\right)$, y por lo tanto sólo es necesario demostrar que cada $F_{\mu_j}(X)$ satisface $d_H(X, F_{\mu_j}(X)) < \varepsilon$. Para ello, supongamos que $g_j \in O(n)$ es tal que $F_{\mu_j}(X) = g_j A_{\mu_j}$. Entonces $X \in g_j S_{\mu_j}$ y $g_j X_{\mu_j} \in g_j S_{\mu_j}$.

Como \mathcal{W} es un refinamiento estrella de \mathcal{V} , existe un punto $Z \in M_0(n)$ tal que $St(X, \mathcal{W}) \subset O(Z, \varepsilon/4)$. En particular,

$$d_H(X, Z) < \varepsilon/4 \quad \text{y} \quad d_H(g_j X_{\mu_j}, Z) < \varepsilon/4. \quad (4.7)$$

Esto implica que $d_H(g_j X_{\mu_j}, X) < \varepsilon/2$. Por la elección de A_{μ_j} , tenemos que $d_H(A_{\mu_j}, X_{\mu_j}) < \varepsilon/4$. Como la métrica de Hausdorff es $O(n)$ -invariante, $d_H(g_j A_{\mu_j}, g_j X_{\mu_j}) < \varepsilon/4$, y por lo tanto

$$d_H(X, F_{\mu_j}(X)) = d_H(X, g_j A_{\mu_j}) \leq d_H(X, g_j X_{\mu_j}) + d_H(g_j X_{\mu_j}, g_j A_{\mu_j}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar. \square

Proposición 4.1.8. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $O(n)$ -equivariante, $h_\varepsilon : M_0(n) \rightarrow M_0(n) \setminus \mathcal{R}(n)$, la cuál es ε -cercana a la función identidad de $M_0(n)$.*

Demostración. Definamos una función continua $\gamma : M_0(n) \rightarrow \mathbb{R}$ por la regla

$$\gamma(A) = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, d_H(\mathbb{B}^n, A)\} \quad \text{para todo } A \in M_0(n).$$

Sea $h_\varepsilon(A)$ la $\gamma(A)$ -vecindad cerrada de A en \mathbb{B}^n , es decir,

$$h_\varepsilon(A) = A_{\gamma(A)} \cap \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{B}^n \mid d(x, A) \leq \gamma(A)\}.$$

Por la elección de $\gamma(A)$, el conjunto $h_\varepsilon(A)$ es diferente de \mathbb{B}^n , y como $A \subset h_\varepsilon(A)$, podemos ver que $h_\varepsilon(A) \in M_0(n)$. Más aún, $h_\varepsilon(A) \cap \partial\mathbb{B}^n$ tiene interior no vacío en \mathbb{S}^{n-1} .

Por el lema 2.4.11, $d_H(A, A_{\gamma(A)}) < \gamma_A < \varepsilon$ lo cual implica que h_ε es ε -cercana a la identidad de $M(n)$.

Verifiquemos la continuidad de h_ε . Por el lema 2.4.16, es suficiente verificar que la función

$$A \rightarrow A_{\gamma(A)}$$

es continua. Para cada par $A, C \in M_0(N)$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$d_H(A_{\gamma(A)}, C_{\gamma(C)}) \leq d_H(A_{\gamma(A)}, A_{\gamma(C)}) + d_H(A_{\gamma(C)}, C_{\gamma(C)}).$$

Usando el lema 2.4.11 tenemos que

$$\begin{aligned} d_H((A)_{\gamma(A)}, C_{\gamma(C)}) &\leq d_H(A_{\gamma(A)}, A_{\gamma(C)}) + d_H(A_{\gamma(C)}, C_{\gamma(C)}) \\ &= |\gamma(A) - \gamma(C)| + d_H(A, C). \end{aligned}$$

Finalmente la continuidad de γ implica la continuidad de la función $A \rightarrow A_{\gamma(A)}$ y por lo tanto h_ε es continua. □

Como consecuencia de las proposiciones 4.1.7 y 4.1.8 tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 4.1.9. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el K -espacio orbital $M_0(n)/K$ es una Q -variedad.*

Demostración. Supongamos que $M_0(n)/K$ está metrizado por la métrica inducida por d_H como se vio en la ecuación (1.1).

Claramente $M_0(n)$ es un espacio localmente compacto y por lo tanto el espacio orbital $M_0(n)/K$ también es localmente compacto. Como $M(n)$ es un $O(n)$ -AR, y $M_0(n)$ es un abierto $O(n)$ -invariante en $M(n)$, tenemos que $M_0(n)$ es un $O(n)$ -ANR (proposición 1.7.2). Luego, por la proposición 1.7.4, podemos concluir que $M_0(n)/K$ es un ANR.

Por el teorema de caracterización de Toruńczyk (teorema 2.1.3), es suficiente demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones continuas $\tilde{f}_\varepsilon, \tilde{h}_\varepsilon : M_0(n)/K \rightarrow M_0(n)/K$, ε -cercanas a la identidad de $M_0(n)/K$ y tales que

$$\text{Im } \tilde{f}_\varepsilon \cap \text{Im } \tilde{h}_\varepsilon = \emptyset.$$

Sean f_ε y h_ε las funciones construidas en las proposiciones 4.1.7 y 4.1.8, respectivamente. Como ambas funciones son $O(n)$ -equivariantes, cada una induce una función continua

$$\tilde{f}_\varepsilon : M_0(n)/K \rightarrow M_0(n)/K \quad \text{y} \quad \tilde{h}_\varepsilon : M_0(n)/K \rightarrow M_0(n)/K$$

de la siguiente manera

$$\tilde{f}_\varepsilon(K(A)) = K(f_\varepsilon(A)) \quad \text{y} \quad \tilde{h}_\varepsilon(K(A)) = K(h_\varepsilon(A)), \quad K(A) \in M_0(n)/K.$$

Como f_ε y h_ε son ε -cercanas a la identidad de $M_0(n)$, si usamos la desigualdad (1.2) obtenemos que \tilde{f}_ε y \tilde{h}_ε también son ε -cercanas a la identidad de $M_0(n)/K$.

Finalmente observemos que las imágenes $f_\varepsilon(M_0(n))$ y $h_\varepsilon(M_0(n))$ son conjuntos disjuntos y $O(n)$ -invariantes. Así, los conjuntos $\text{Im } \tilde{f}_\varepsilon = \text{Im } f_\varepsilon/K$ y $\text{Im } \tilde{h}_\varepsilon = \text{Im } h_\varepsilon/K$ tienen intersección vacía, lo cual demuestra el corolario. \square

Corolario 4.1.10. *Para cualquier subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en la esfera unitaria S^{n-1} , el K -espacio orbital $M(n)/K$ es un cubo de Hilbert. En particular $M(n)$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. En el corolario 4.1.4 se vio que el singulete $\{\mathbb{B}^n\}$ es un Z -conjunto en $M(n)/K$. Observemos que la Q -variedad $M_0(n)/K$ se puede ver como el complemento $M(n)/K \setminus \{\mathbb{B}^n\}$. En estas condiciones podemos aplicar el teorema 2.1.4 y concluir que $M(n)/K$ también es una Q -variedad. Además, $M(n)/K$ es un espacio compacto y contráctil y la única Q -variedad con esas características es precisamente el cubo de Hilbert (teorema 2.1.11). De aquí concluimos que $M(n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. \square

Corolario 4.1.11. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúa no transitivamente en la esfera S^{n-1} , el conjunto $M(n)^K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Demostración. Como $M(n)$ es compacto y $M(n)^K$ es cerrado en $M(n)$, podemos concluir que $M(n)^K$ también es compacto. Por el teorema 4.1.2, $M(n)$ es un $O(n)$ -AR. Si combinamos este resultado con el teorema 1.7.5, obtenemos que $M(n)^K$ es un AR. En particular, $M(n)^K$ es contráctil.

Sean f_ε y h_ε las funciones de las proposiciones 4.1.7 y 4.1.8, respectivamente. Como ambas son funciones $O(n)$ -equivariantes, tenemos que

$$f_\varepsilon(M_0(n)^K) \subset M_0(n)^K \quad \text{y} \quad h_\varepsilon(M_0(n)^K) \subset M_0(n)^K.$$

Por el teorema de caracterización de Toruńczyk (teorema 2.1.3), podemos concluir que $M_0(n)^K$ es una Q -variedad. Pero $M_0(n)^K$ es igual a $M(n)^K \setminus \{\mathbb{B}^n\}$. Luego, por el corolario 4.1.4, tenemos que \mathbb{B}^n es un Z -conjunto en $M(n)^K$. Así, por el teorema 2.1.4, $M(n)^K$ también es una Q -variedad. En particular, $M(n)^K$ es una Q -variedad compacta y contráctil, y por el teorema 2.1.11, $M(n)^K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. \square

Todos los resultados que obtuvimos acerca del hiperespacio $M(n)$ los podemos resumir en el siguiente corolario:

Corolario 4.1.12. *$M(n)$ es un $O(n)$ -espacio compacto que satisface las siguientes propiedades:*

- (1) *$M(n)$ es un $O(n)$ -AR con un único punto $O(n)$ -fijo: \mathbb{B}^n .*
- (2) *$M(n)$ es estrictamente $O(n)$ -contráctil a su punto fijo \mathbb{B}^n .*
- (3) *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el conjunto de K -puntos fijos $M(n)^K$ es igual al singulete $\{\mathbb{B}^n\}$ si y sólo si K actúa transitivamente en la esfera S^{n-1} , y, $M(n)^K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert siempre que $M(n)^K \neq \{\mathbb{B}^n\}$.*

- (4) Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el K -espacio orbital $M_0(n)/K$ es una Q -variedad. Si además Q actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , entonces $M(n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Este resultado, en combinación con el teorema 2.5.1 nos da el siguiente teorema:

Teorema 4.1.13. *El espacio orbital $M(n)/O(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.*

4.2. Propiedades de $L(n)$

En esta sección demostraremos, entre otros resultados, las propiedades del espacio $L(n)$ que se anunciaron en el capítulo 4. Las demostraciones serán simples modificaciones de las propiedades análogas del espacio $M(n)$, demostradas en la sección anterior.

Antes que nada, observemos que $L(n)$ es estrictamente $O(n)$ -contráctil a \mathbb{B}^n .

Proposición 4.2.1. *La función $F : L(n) \times [0, 1]$ definida por*

$$F(A, t) = (1 - t)A + t\mathbb{B}^n$$

es una contracción estricta, $O(n)$ -equivariante y tal que $F(A, 1) = \mathbb{B}^n$. En particular, $L(n)/K$ es estrictamente contráctil a $K(\mathbb{B}^n)$, para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$.

Denotaremos por $\mathcal{P}(n)$ el subconjunto de $L(n)$ formado por todos los cuerpos compactos $A \in L(n)$ tales que el conjunto de contacto $A \cap \mathbb{S}^{n-1}$ tiene interior vacío en la esfera \mathbb{S}^{n-1} .

Por otro lado, sea $L_0(n)$ el complemento $L(n) \setminus \{\mathbb{B}^n\}$.

Lema 4.2.2. *Sea $\varepsilon > 0$. Para cada cuerpo compacto $X \in L_0(n)$ existe otro cuerpo compacto $A \in \mathcal{P}(n)$ tal que $d_H(X, A) < \varepsilon$ y el $O(n)$ -estabilizador $O(n)_A$ de A coincide con $O(n)_X$, el $O(n)$ -estabilizador de X .*

La demostración del lema 4.2.2 es muy similar a la demostración del lema 4.1.6. Sin embargo, hay una diferencia importante y por esta razón, daremos la prueba completa:

Demostración. Sea $r : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(n)$ la retracción $O(n)$ -equivariante del corolario 3.3.6. Por el teorema 1.6.2, existe $0 < \eta < \varepsilon$ tal que si $C \in O(X, \eta)$ entonces $[O(n)_C] \preceq [O(n)_X]$; es decir, $O(n)_C$ es conjugado a un subgrupo de $O(n)_X$.

Como $L(n)$ es compacto, existe $0 < \delta < \eta/2$ tal que $d_H(r(C), C) < \eta/2$ para todo C que pertenezca a la δ -vecindad de $L(n)$.

Sean $p_1, \dots, p_k \in \partial X$ puntos tales que $P = \text{conv}(p_1, \dots, p_k)$ tiene interior no vacío y $d_H(P, X) < \delta$. Consideremos el conjunto

$$D = \text{conv}(O(n)_X(p_1), \dots, O(n)_X(p_k)).$$

Como $P \subset D$, podemos asegurar que D tiene interior no vacío lo cual demuestra que $D \in cb(\mathbb{R}^n)$. Además, como $X \in L_0(n) \subset M_0(n)$, el estabilizador $O(n)_X$ actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} (lema 4.1.5). Luego, por el lema 3.1.4, la frontera ∂D no contiene ningún

dominio elíptico de dimensión $(n - 1)$. En particular, el conjunto de contacto $D \cap \partial l(D)$ no contiene ningún dominio elíptico.

Sea $A = r(D)$. Como $A \in L(n)$ y A pertenece a la $\text{Aff}(n)$ -órbita de D , podemos encontrar una transformación afín g tal que $A = gD$. El conjunto de contacto $A \cap \mathbb{S}^{n-1}$ es la imagen bajo g de $D \cap \partial l(D)$ y por lo tanto tiene interior vacío en la esfera \mathbb{S}^{n-1} . En otras palabras, A pertenece a $\mathcal{P}(n)$. La construcción de P garantiza que $P \subset D \subset X$, y por lo tanto

$$d_H(D, X) \leq d_H(P, X) < \delta < \eta/2.$$

Ahora, la elección de δ implica que $d_H(r(D), D) < \eta/2$ y consecuentemente

$$d_H(A, X) \leq d_H(A, D) + d_H(D, X) = d_H(r(D), D) + d_H(D, X) < \eta/2 + \eta/2 = \eta.$$

De aquí podemos concluir dos cosas: primero $d_H(A, X) < \eta < \varepsilon$ como se quería; segundo, por la elección de η podemos inferir que $O(n)_A$ es un subgrupo conjugado de $O(n)_X$. Sólo nos faltaría demostrar que $O(n)_X = O(n)_A$. Para ello observemos que D es un conjunto $O(n)_X$ -invariante y por lo tanto $O(n)_X \subset O(n)_D$. Además, como r es $O(n)$ -equivariante, tenemos que

$$O(n)_D \subset O(n)_{r(D)} = O(n)_A.$$

Así, $O(n)_X \subset O(n)_A$ y como $[O(n)_A] \preceq [O(n)_X]$, podemos concluir que $O(n)_A = O(n)_X$, como queríamos demostrar. \square

Proposición 4.2.3. *Sea $K \subset O(n)$ un subgrupo cerrado que actúe no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} . Para cada $\varepsilon > 0$, existe una función K -equivariante $\chi_\varepsilon : L(n) \rightarrow L_0(n)$, ε -cercana a la identidad de $L(n)$.*

La demostración es copia de la demostración de la proposición 4.1.3, reemplazando $M(n)$ por $L(n)$, $M_0(n)$ por $L_0(n)$, $cc(\mathbb{R}^n)$ por $cb(\mathbb{R}^n)$ y la retracción r de (4.3), por la retracción $r : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(n)$ definida en el corolario 3.3.6.

Sea d_H^* la métrica en $L(n)/K$ inducida por la métrica de Hausdorff en $L(n)$ como se vio en la ecuación (1.1):

$$d_H^*(K(A), K(B)) = \inf_{k \in K} d_H(A, kB), \quad A, B \in L(n).$$

Corolario 4.2.4. *Si $K \subset O(n)$ es un subgrupo cerrado que actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , entonces la clase de \mathbb{B}^n en $L(n)/K$ es un Z -conjunto en $L(n)/K$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la proposición 4.2.3, existe una función K -equivariante $\chi_\varepsilon : L(n) \rightarrow L_0(n)$ tal que $d_H(A, \chi_\varepsilon(A)) < \varepsilon$ para todo $A \in L(n)$. Esta función induce otra función continua $\tilde{\chi}_\varepsilon : L(n)/K \rightarrow L_0/K$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\chi}_\varepsilon(K(A)) = \pi(\chi_\varepsilon(A)) = K(\chi_\varepsilon(A)), \quad A \in L(n),$$

donde $\pi : L(n) \rightarrow L(n)/K$ es la proyección orbital. Por la desigualdad (1.2) tenemos que:

$$d_H^*(K(\chi_\varepsilon(A)), K(A)) \leq d_H(\chi_\varepsilon(A), A) \leq \varepsilon$$

y por lo tanto $\tilde{\chi}_\varepsilon$ es ε -cercana a la identidad de $L(n)/K$.

Por otro lado, como $\{\chi_\varepsilon(A)\} \neq \{\mathbb{B}^n\} = K(\mathbb{B}^n)$ para cada $A \in L(n)$, podemos concluir que

$$\tilde{\chi}_\varepsilon(L(n)/K) \cap K(\mathbb{B}^n) = \emptyset$$

lo cual demuestra que $K(\mathbb{B}^n)$ es un Z -conjunto en $L(n)/K$. \square

Teorema 4.2.5. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $O(n)$ -equivariante, $f_\varepsilon : L_0(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$, la cual es ε -cercana a la identidad de $L_0(n)$.*

Demostración. Repitamos la demostración de la proposición 4.1.7, reemplazando $M_0(n)$ por $L_0(n)$, hasta la construcción de la familia $\{X_\mu\}$. Ahora usemos el lema 4.2.2 y encontremos, para cada índice μ , un subconjunto compacto A_μ , $\varepsilon/4$ -cercano a X_μ y tal que $O(n)_{A_\mu} = H_\mu$.

La demostración continua repitiendo la demostración de la proposición 4.1.7, reemplazando $M_0(n)$ por $L_0(n)$, y $\mathcal{R}(n)$ por $\mathcal{P}(n)$. \square

Teorema 4.2.6. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $O(n)$ -equivariante, $h_\varepsilon : L_0(n) \rightarrow L_0(n) \setminus \mathcal{P}(n)$, ε -cercana a la función identidad de $L(n)$.*

Demostración. La prueba consiste en copiar la demostración de la proposición 4.1.8, reemplazando $M_0(n)$ por $L_0(n)$, y $M_0(n) \setminus \mathcal{R}(n)$ por $L_0(n) \setminus \mathcal{P}(n)$. \square

Proposición 4.2.7. *$L_0(n)/K$ es una Q -variedad.*

Demostración. Supongamos que $L_0(n)/K$ está equipado con la métrica d_H^* . Por el corolario 3.3.7, $L(n)$ es un $O(n)$ -AR. Luego, la proposición 1.7.4 implica que $L(n)/K$ es un AR. Como $L_0(n)/K$ es abierto en $L(n)/K$ podemos concluir que $L_0(n)/K$ es un ANR localmente compacto.

Por el teorema de caracterización de Toruńczyk's 2.1.3 es suficiente demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen funciones continuas $\tilde{f}_\varepsilon, \tilde{h}_\varepsilon : L_0(n)/K \rightarrow L_0(n)/K$ ε -cercanas a la identidad de $L_0(n)/K$ tales que

$$\tilde{f}_\varepsilon(L_0(n)/K) \cap \tilde{h}_\varepsilon(L_0(n)/K) = \emptyset.$$

Sean f_ε y h_ε las funciones construidas en los teoremas 4.2.5 y 4.2.6, respectivamente. Como ambas funciones son $O(n)$ -equivariantes, inducen funciones $\tilde{f}_\varepsilon : L_0(n)/K \rightarrow \mathcal{P}(n)/K$ y $\tilde{h}_\varepsilon : L_0(n)/K \rightarrow (L_0(n) \setminus \mathcal{P}(n))/K$ de la siguiente manera:

$$\tilde{f}_\varepsilon(K(A)) = K(f_\varepsilon(A)), \quad \text{y} \quad \tilde{h}_\varepsilon(K(A)) = K(h_\varepsilon(A)), \quad K(A) \in L_0(n)/K.$$

Además, como f_ε y h_ε son ε -cercanas a la identidad de $L_0(n)$ podemos usar la desigualdad (1.2) para garantizar que \tilde{f}_ε y \tilde{h}_ε are también son ε -cercanas a la identidad de $L_0(n)/K$.

Finalmente, observemos que $\text{Im } \tilde{f}_\varepsilon = \text{Im } f_\varepsilon/K$, $\text{Im } \tilde{h}_\varepsilon = \text{Im } h_\varepsilon/K$ y $\text{Im } \tilde{f}_\varepsilon$ y $\text{Im } \tilde{h}_\varepsilon$ son conjuntos disjuntos y K -invariantes. Esto implica que $\text{Im } \tilde{f}_\varepsilon \cap \text{Im } \tilde{h}_\varepsilon = \emptyset$ y por lo tanto la prueba está completa. \square

Hemos demostrado que $\{K(\mathbb{B}^n)\}$ es un Z -conjunto en $L(n)/K$. Además, la Q -variedad $L_0(n)/K$ es el complemento de $(L(n)/K) \setminus \{K(\mathbb{B}^n)\}$. Por el teorema 2.1.4, $L(n)/K$ también es una Q -variedad. Entonces, $L(n)/K$ es una Q -variedad compacta y contráctil, y por el teorema 2.1.11 concluimos que $L(n)/K$ es un espacio homeomorfo al cubo de Hilbert. Este resultado se resume en el siguiente corolario.

Corolario 4.2.8. *$L(n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

En particular, si K es el grupo trivial, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.2.9. *$L(n)$ es un cubo de Hilbert.*

Repitiendo la misma técnica usada en la demostración del corolario 4.1.11, podemos inferir del corolario 4.2.4 y los teoremas 4.2.5 y 4.2.6 el siguiente resultado:

Corolario 4.2.10. *Para cualquier subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} , el conjunto de K -puntos fijos $L(n)^K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Finalmente, de manera análoga a como se hizo con el hiperespacio $M(n)$, podemos deducir de todos los teoremas y corolarios de esta sección que $L(n)$ es un cubo de Hilbert equipado con una acción del grupo ortogonal $O(n)$ la cual satisface las siguientes condiciones:

- (1) $L(n)$ es un $O(n)$ -AR con un único punto $O(n)$ -fijo \mathbb{B}^n ,
- (2) $L(n)$ es estrictamente $O(n)$ -contráctil a \mathbb{B}^n ,
- (3) Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el conjunto de K -puntos fijos $L(n)^K$ coincide con el singulete $\{\mathbb{B}^n\}$ si y sólo si K actúa transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} , y $L(n)^K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert siempre que $L(n)^K \neq \{\mathbb{B}^n\}$,
- (4) Para cualquier subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el K -espacio orbital $L_0(n)/K$ es una Q -variedad. Además, si K actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , entonces $L(n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Todas estas condiciones en combinación con el teorema 2.5.1 implican el siguiente resultado:

Teorema 4.2.11. *El espacio orbital $L(n)/O(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.*

Capítulo 5

Espacios Orbitales de $cb(\mathbb{R}^n)$ y $cc(\mathbb{R}^n)$

En los dos capítulos anteriores se demostró que el hiperespacio $cb(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al producto del cubo de Hilbert Q por $\mathbb{R}^{n(n+3)/2}$. Por otro lado, Nadler demostró que el hiperespacio $cc(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert con un punto removido. En este capítulo generalizaremos ambos resultados al calcular algunos espacios orbitales de $cb(\mathbb{R}^n)$ y $cc(\mathbb{R}^n)$.

5.1. Algunos Espacios Orbitales de $cb(\mathbb{R}^n)$

Por el corolario 3.3.6(2) tenemos un homeomorfismo $O(n)$ -equivariante

$$cb(\mathbb{R}^n) \cong_{O(n)} L(n) \times E(n). \quad (5.1)$$

En lo sucesivo, consideraremos la métrica $O(n)$ -invariante en el producto $E(n) \times L(n)$ dada por:

$$D((A_1, E_1), (A_2, E_2)) = d_H(A_1, A_2) + d_H(E_1, E_2).$$

Denotemos por $cb_0(\mathbb{R}^n)$ al complemento:

$$cb_0(\mathbb{R}^n) = cb(\mathbb{R}^n) \setminus E(n).$$

Bajo el homeomorfismo (5.1) (c.f. corolario 3.3.6), $cb_0(\mathbb{R}^n)$ se corresponde con el producto $E(n) \times L_0(n)$.

En esta sección probaremos el siguiente resultado principal:

Teorema 5.1.1. *Sea $K \subset O(n)$ un subgrupo cerrado. Entonces:*

- (1) *El espacio orbital $cb_0(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad.*

(2) Si además K actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , entonces el espacio orbital $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad homeomorfa a $(E(n)/K) \times Q$.

Para ello, necesitamos demostrar algunos resultados previos.

Proposición 5.1.2. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , existe una función K -equivariante $\eta : cb(\mathbb{R}^n) \rightarrow cb_0(\mathbb{R}^n)$ la cual es ε -cercana a la función identidad de $cb(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la proposición 4.2.3, existe una función K -equivariante, $\chi_\varepsilon : L(n) \rightarrow L_0(n)$, tal que $d_H(A, \chi_\varepsilon(A)) < \varepsilon$ para todo $A \in L(n)$. Entonces la función

$$\eta = \chi_\varepsilon \times 1_{E(n)} : L(n) \times E(n) \rightarrow L_0(n) \times E(n)$$

es K -equivariante, y además

$$D(\eta(A, E), (A, E)) = d_H(\chi_\varepsilon(A), A) < \varepsilon.$$

□

Por ser K -equivariante, la función η de la proposición 5.1.2 induce una función entre los espacios orbitales

$$\tilde{\eta} : \frac{L(n) \times E(n)}{K} \longrightarrow \frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$$

la cual, en virtud de la desigualdad (1.2), es ε -cercana a la función identidad de $\frac{L(n) \times E(n)}{K}$. Esto quiere decir que para todo subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , $(\{\mathbb{B}^n\} \times E(n))/K$ es un Z -conjunto en $(L(n) \times E(n))/K$. Como $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es homeomorfo a $(L(n) \times E(n))/K$ y bajo este homeomorfismo $E(n)/K$ se corresponde con $(\{\mathbb{B}^n\} \times E(n))/K$, concluimos el siguiente corolario:

Corolario 5.1.3. Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , $E(n)/K$ es un Z -conjunto en $cb(\mathbb{R}^n)/K$. En particular, $E(n)$ es un Z -conjunto en $cb(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 5.1.4. Sea $K \subset O(n)$ un subgrupo cerrado que actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} y sea $\pi : L(n) \times E(n) \rightarrow E(n)$ la segunda proyección. Entonces la función inducida $\tilde{\pi} : (L(n) \times E(n))/K \rightarrow E(n)/K$ es propia y tiene fibras contráctiles.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} L(n) \times E(n) & \xrightarrow{\pi} & E(n) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \frac{L(n) \times E(n)}{K} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \frac{E(n)}{K} \end{array}$$

en donde p_1 y p_2 son las respectivas proyecciones orbitales.

Para cada subconjunto compacto $C \subset E(n)$, la preimagen $\pi^{-1}(C) = L(n) \times C$ es compacta y por lo tanto π es una función propia. Además, como K es un subgrupo compacto, las proyecciones orbitales p_1 y p_2 también son propias (ejemplo 2.1.1).

De esta manera, si $C \subset E(n)/K$ es un subconjunto compacto, entonces $p_2^{-1}(C)$ es compacto (por ser p_2 propia) y por lo tanto $\pi^{-1}(p_2^{-1}(C))$ es compacto también (porque π es propia). Luego, como p_1 es continua concluimos que

$$\tilde{\pi}^{-1}(C) = p_1(\pi^{-1}(p_2^{-1}(C)))$$

es compacto y por lo tanto $\tilde{\pi}$ es propia.

Para demostrar que las fibras de $\tilde{\pi}$ son contráctiles, consideremos la función $F : L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$ de la proposición 4.2.1. Sea $\phi : (L(n) \times E(n)) \times [0, 1] \rightarrow L(n) \times E(n)$ la función definida por la fórmula

$$\phi((A, g\mathbb{B}^n), t) = (F(A, t), g\mathbb{B}^n).$$

Como F es $O(n)$ -equivariante, la función ϕ también lo es y por lo tanto induce una función continua:

$$\tilde{\phi} : \frac{L(n) \times E(n)}{K} \times [0, 1] \longrightarrow \frac{E(n)}{K},$$

dada por

$$(K(A, g\mathbb{B}^n), t) \longrightarrow K(\phi((A, g\mathbb{B}^n), t)).$$

Sea $K(g\mathbb{B}^n) \in \frac{E(n)}{K}$ un punto arbitrario. La restricción $\tilde{\phi}|_{\tilde{\pi}^{-1}(K(g\mathbb{B}^n))}$ define una contracción de $\tilde{\pi}^{-1}(K(g\mathbb{B}^n))$ a su punto $K(\mathbb{B}^n, g\mathbb{B}^n)$, lo cual demuestra que $\tilde{\pi}^{-1}(g\mathbb{B}^n)$ es contraíble, como se quería probar. \square

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de esta sección.

Demostración del teorema 5.1.1. (1) Por (5.1), $cb_0(\mathbb{R}^n)$ es $O(n)$ -homeomorfo al producto $L_0(n) \times E(n)$. Esto implica que los espacios orbitales $cb_0(\mathbb{R}^n)/K$ y $\frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$ son homeomorfos. Por esta razón, es suficiente demostrar que $\frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$ es una Q -variedad.

Supongamos que $\frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$ está dotado de la métrica D^* inducida por D como se definió en la igualdad (1.1).

Por el corolario 3.3.7(1), los espacios $L(n)$ y $E(n)$ son $O(n)$ -AR's. Consecuentemente, el producto $L_0(n) \times E(n)$ es un $O(n)$ -ANR localmente compacto. Por el teorema 1.7.4, el K -espacio orbital $\frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$ es un ANR localmente compacto.

Sean f_ε y h_ε las funciones de las proposiciones 4.2.5 y 4.2.6, respectivamente. Consideremos las siguientes funciones:

$$f = f_\varepsilon \times 1_{E(n)} : L_0(n) \times E(n) \rightarrow L_0(n) \times E(n),$$

$$h = h_\varepsilon \times 1_{E(n)} : L_0(n) \times E(n) \rightarrow L_0(n) \times E(n),$$

En donde $1_{E(n)}$ denota la identidad de $E(n)$. Como f_ε y h_ε son $O(n)$ -equivariantes y sus imágenes son disjuntas, las funciones f y h también lo son y por lo tanto inducen funciones

$$\tilde{f}, \tilde{h} : \frac{L_0(n) \times E(n)}{K} \rightarrow \frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$$

que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} L_0(n) \times E(n) & \xrightarrow{f} & L_0(n) \times E(n) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \frac{L_0(n) \times E(n)}{K} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \frac{L_0(n) \times E(n)}{K} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L_0(n) \times E(n) & \xrightarrow{h} & L_0(n) \times E(n) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \frac{L_0(n) \times E(n)}{K} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \frac{L_0(n) \times E(n)}{K} \end{array} .$$

Como, $d_H(f_\varepsilon(A), A) < \varepsilon$, inferimos que

$$\begin{aligned} D(f(A, E), (A, E)) &= D((f_\varepsilon(A), E), (A, E)) \\ &= d_H(f_\varepsilon(A), A) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $D(h(A, E), (A, E)) < \varepsilon$. De esta manera, concluimos que f y h son ε -cercanas a la función identidad de $L_0(n) \times E(n)$. Luego, la desigualdad (1.2) implica que \tilde{f} y \tilde{h} son ε -cercanas a la función identidad de $\frac{L_0(n) \times E(n)}{K}$.

Finalmente, como $\text{Im } \tilde{f} = (\text{Im } f)/K$, $\text{Im } \tilde{h} = (\text{Im } h)/K$ e $\text{Im } f \cap \text{Im } h = \emptyset$, concluimos que $\text{Im } \tilde{f} \cap \text{Im } \tilde{h} = \emptyset$. Luego, del corolario 2.1.3, inferimos que $\frac{L_0(n) \times E}{K}$ es una Q -variedad.

(2) Por el corolario 3.3.6(2), los espacios $cb(\mathbb{R}^n)$ y $L(n) \times E(n)$ son $O(n)$ -homeomorfos, y por lo tanto los K -espacios orbitales $cb(\mathbb{R}^n)/K$ y $\frac{L(n) \times E(n)}{K}$ son homeomorfos. Por otro lado, $cb(\mathbb{R}^n)$ es un $O(n)$ -AR (corolario 3.1.3). Entonces, por el teorema 1.7.4 concluimos que $cb(\mathbb{R}^n)/K \cong \frac{L(n) \times E(n)}{K}$ es un AR. Por la parte (1) de esta demostración sabemos que $cb_0(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad, mientras que su complemento en $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es un Z -conjunto (corolario 5.1.3). Luego, por el teorema 2.1.4, concluimos que $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad también.

Más aún, como $E(n)$ es un $O(n)$ -AR (teorema 3.3.7), por el teorema 1.7.4, concluimos que el K -espacio orbital $E(n)/K$ es un AR. Además, la función,

$$\tilde{\pi} : \frac{L(n) \times E(n)}{K} \rightarrow E(n)/K$$

es propia y tiene fibras contráctiles (proposición 5.1.4). Por la proposición 2.1.6 la función $\tilde{\pi}$ es una CE-función entre AR's. Como $\frac{cb(\mathbb{R}^n)}{K} \cong \frac{L(n) \times E(n)}{K}$ es una Q -variedad, el teorema 2.1.9 implica que $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es homeomorfo a $(E(n)/K) \times Q$, como se quería probar. \square

5.2. Algunos Espacios Orbitales de $cc(\mathbb{R}^n)$

Consideremos la función ν definida en (4.1). Al ser $O(n)$ -invariante, ν induce para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, una función continua $\tilde{\nu} : cc(\mathbb{R}^n)/K \rightarrow [0, \infty)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\nu}(K(A)) = \nu(A), \quad K(A) \in cc(\mathbb{R}^n)/K. \quad (5.2)$$

Proposición 5.2.1. $\tilde{\nu}$ es una CE-función.

Demostración. Evidentemente $\tilde{\nu}$ es una función suprayectiva. Denotemos por $p : cc(\mathbb{R}^n) \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)/K$ la función orbital y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} cc(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\nu} & [0, \infty) \\ p \downarrow & \nearrow \tilde{\nu} & \\ \frac{cc(\mathbb{R}^n)}{K} & & \end{array}$$

Sea $C \subset [0, \infty)$ un subconjunto compacto. Entonces

$$\tilde{\nu}^{-1}(C) = \{K(A) \mid \nu(A) \in C\} = p(\nu^{-1}(C))$$

es compacto porque ν es propia (lema 4.1.1) y p es continua. Esto demuestra que $\tilde{\nu}$ es una función propia.

De acuerdo a la proposición 2.1.6, para completar la prueba es suficiente demostrar que $\tilde{\nu}^{-1}(t)$ es contráctil para cada $t \in [0, \infty)$. En efecto, si $t = 0$, entonces $\tilde{\nu}^{-1}(t) = \{K(0)\}$ el cual es contráctil. Si $t > 0$, consideremos la homotopía H definida en la igualdad (4.2). Como N_t es $O(n)$ -invariante, observemos que para cada elemento $g \in O(n)$ se cumple que:

$$H(gA, s) = sN_t + (1-s)gA = sgN_t + (1-s)gA = gH(A, s). \quad (5.3)$$

Esto implica que g es $O(n)$ -equivariante y por lo tanto induce una homotopía continua $\tilde{H} : \tilde{\nu}^{-1}(t) \times [0, 1] \rightarrow \tilde{\nu}^{-1}(t)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{H}(K(A), s) = K(H(A, s)).$$

Evidentemente \tilde{H} es una contracción al punto $K(N_t) \in cc(\mathbb{R}^n)/K$, lo cual demuestra que $\tilde{\nu}^{-1}(t)$ es contráctil, como se quería. \square

Para cada $\varepsilon > 0$, la función $\zeta_\varepsilon : cc(\mathbb{R}^n) \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\zeta_\varepsilon(A) = A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

es una función continua, $O(n)$ -equivariante y ε -cercana a la identidad de $cc(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, la función ζ_ε induce una función continua

$$\tilde{\zeta}_\varepsilon : cc(\mathbb{R}^n)/K \rightarrow cb(\mathbb{R}^n)/K$$

de la siguiente manera:

$$\tilde{\zeta}_\varepsilon(K(A)) = K(A_\varepsilon).$$

Por ser $O(n)$ -invariante, la métrica de Hausdorff d_H induce una métrica en $cc(\mathbb{R}^n)/K$, a través de la igualdad (1.1). Luego, la desigualdad (1.2), nos garantiza que la función $\tilde{\zeta}_\varepsilon$ es ε -cercana a la función identidad de $cc(\mathbb{R}^n)/K$. Esto demuestra que el conjunto

$$\frac{cc(\mathbb{R}^n) \setminus cb(\mathbb{R}^n)}{K} = \frac{cc(\mathbb{R}^n)}{K} \setminus \frac{cb(\mathbb{R}^n)}{K}$$

es un Z -conjunto en $cc(\mathbb{R}^n)/K$. Si K actúa no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , entonces $cb(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad, (teorema 5.1.1), y por el teorema 2.1.4 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.2.2. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} , el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad.*

De hecho, en este caso podemos ser más precisos y decir de qué Q -variedad se trata:

Corolario 5.2.3. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en \mathbb{S}^{n-1} , el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/K$ es homeomorfo a Q_0 , el cubo de Hilbert con un punto removido.*

Demostración. Por el teorema 5.2.2, el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/K$ es una Q -variedad. Consideremos la función $\tilde{\nu}$ definida en (5.2). Como la función $\tilde{\nu}$ es CE (proposición 5.2.1), podemos usar el teorema de Edwards 2.1.9 y concluir que $cc(\mathbb{R}^n)/K$ es homeomorfo a $[0, \infty) \times Q$. Sin embargo, el producto $[0, \infty) \times Q$ es homeomorfo a Q_0 (teorema 2.1.12), lo cual completa la prueba. \square

5.3. La Estructura Cónica de $cc(\mathbb{R}^n)$ y $cc(\mathbb{B}^n)$

El cono abierto sobre un espacio topológico X se define como el espacio cociente:

$$OC(X) = X \times [0, \infty) / X \times \{0\}.$$

Denotaremos por $[A, t]$ la clase de equivalencia del par $(A, t) \in X \times [0, \infty)$ en este espacio cociente. Es evidente que $[A, t] = [A', t']$ si y sólo si $t = 0 = t'$ o $A = A'$ y $t = t'$. Por conveniencia, la clase $[A, 0]$ será denotada por θ .

Es fácil ver que \mathbb{R}^n es $O(n)$ -homeomorfo como abierto sobre \mathbb{S}^{n-1} . En esta sección veremos que la estructura cónica de \mathbb{R}^n induce una estructura cónica en $cc(\mathbb{R}^n)$.

Denotemos el cono abierto sobre $M(n)$ por $\widetilde{M}(n)$. El grupo ortogonal $O(n)$ actúa continuamente en $\widetilde{M}(n)$ por la siguiente regla:

$$g * [A, t] = [gA, t].$$

Teorema 5.3.1. *El hiperespacio $cc(\mathbb{R}^n)$ es $O(n)$ -homeomorfo a $\widetilde{M}(n)$.*

Demostración. Definamos $\Phi : cc(\mathbb{R}^n) \rightarrow \widetilde{M}(n)$ por la fórmula:

$$\Phi(A) = \begin{cases} \theta, & \text{si } A = \{0\}, \\ [r(A), \nu(A)], & \text{si } A \neq \{0\}, \end{cases}$$

donde ν y r son las funciones definidas en (4.1) y (4.3), respectivamente.

Como r es $O(n)$ -equivariante y ν es $O(n)$ -invariante, para cada $g \in O(n)$, tenemos la siguiente igualdad:

$$\Phi(gA) = [r(gA), \nu(gA)] = [gr(A), \nu(A)] = g * [r(A), \nu(A)] = g * \Phi(A).$$

Esto demuestra que Φ es $O(n)$ -equivariante.

Claramente Φ es una biyección cuya inversa es la función $\Phi^{-1} : \widetilde{M}(n) \rightarrow cc(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\Phi^{-1}([A, t]) = tA.$$

La continuidad de las restricciones $\Phi|_{cc(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}}$ y $\Phi^{-1}|_{\widetilde{M}(n) \setminus \{\theta\}}$ es evidente. Para completar la prueba, probaremos la continuidad de Φ en $\{0\}$ y la continuidad de Φ^{-1} en θ , de manera simultánea.

Dado $\varepsilon > 0$, sea O_ε la ε -bola abierta en $cc(\mathbb{R}^n)$ centrada en $\{0\}$. Definamos $U_\varepsilon = \{[A, t] \in \widetilde{M}(n) \mid t < \varepsilon\}$. Como U_ε es una vecindad abierta de θ en $\widetilde{M}(n)$, es suficiente demostrar que $\Phi(O_\varepsilon) = U_\varepsilon$. En efecto, si $B \in O_\varepsilon$, entonces $B \subset N(\{0\}, \varepsilon)$ y por lo tanto $\nu(B) < \varepsilon$. Esto demuestra que $\Phi(B) = [r(B), \nu(B)] \in U_\varepsilon$ y por lo tanto

$$\Phi(O_\varepsilon) \subset U_\varepsilon. \quad (5.4)$$

Por otro lado, si $[A, t] \in U_\varepsilon$ entonces $t < \varepsilon$ y $tA \subset N(\{0\}, \varepsilon)$. Así, para cada $a \in A$, $d(ta, 0) < \varepsilon$. En particular, $0 \in N(tA, \varepsilon)$, y por lo tanto $d_H(\{0\}, tA) < \varepsilon$. De esta manera, inferimos que $\Phi^{-1}(U_\varepsilon) \subset O_\varepsilon$ y por lo tanto

$$U_\varepsilon = \Phi(\Phi^{-1}(U_\varepsilon)) \subset \Phi(O_\varepsilon). \quad (5.5)$$

Si combinamos las contenciones (5.4) y (5.5) obtenemos la igualdad buscada:

$$\Phi(O(\{0\}, \varepsilon)) = U_\varepsilon.$$

Ahora la prueba está completa. \square

Como Φ es un $O(n)$ -homeomorfismo, para todo subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, la función Φ induce un homeomorfismo entre los K -espacios orbitales, tal como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} cc(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Phi} & \widetilde{M}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ cc(\mathbb{R}^n)/K & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \widetilde{M}(n)/K. \end{array}$$

Como consecuencia, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.3.2. *Para todo subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, los espacios orbitales $cc(\mathbb{R}^n)/K$ y $\widetilde{M}(n)/K$ son homeomorfos. En particular, los $O(n)$ -espacios orbitales $cc(\mathbb{R}^n)/O(n)$ y $\widetilde{M}(n)/O(n)$ son homeomorfos.*

Lema 5.3.3. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el espacio orbital $\widetilde{M}(n)/K$ es homeomorfo al cono abierto sobre $M(n)/K$.*

Demostración. La función $\Psi : \widetilde{M}(n)/K \rightarrow OC(M(n)/K)$ definida por la regla:

$$\Psi(K[A, t]) = [K(A), t],$$

es un homeomorfismo. □

Además, el $O(n)$ -homeomorfismo entre $cc(\mathbb{R}^n)$ y $\widetilde{M}(n)$, en combinación con el lema 5.3.3, nos da el siguiente resultado:

Teorema 5.3.4. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el K -espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/K$ es homeomorfo a $OC(M(n)/K)$*

Finalmente, estamos en condiciones de calcular el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/O(n)$.

Corolario 5.3.5. *El espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/O(n)$ es homeomorfo al cono abierto sobre el compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.*

Demostración. Por el teorema 5.3.4, el espacio orbital $cc(\mathbb{R}^n)/O(n)$ es homeomorfo al cono abierto $OC(M(n)/O(n))$. Además, $M(n)/O(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $BM(n)$ (corolario 4.1.13), y por lo tanto $cc(\mathbb{R}^n)/O(n)$ es homeomorfo a $OC(BM(n))$, como se quería demostrar. □

Por otro lado, si restringimos el $O(n)$ -homeomorfismo del teorema 5.3.1 a $cc(\mathbb{B}^n)$, obtenemos un $O(n)$ -homeomorfismo entre el hiperespacio $cc(\mathbb{B}^n)$ y el cono sobre $M(n)$.

Siguiendo la demostración del lema 5.3.3, se demuestra que el K -espacio orbital del cono sobre $M(n)$ es homeomorfo al cono sobre $M(n)/K$, para cada subgrupo cerrado K de $O(n)$. Es decir:

$$\text{con}(M(n)/K) \cong \text{con}(M(n))/K.$$

Este hecho implica el siguiente resultado:

Proposición 5.3.6. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$, el K -espacio orbital $cc(\mathbb{B}^n)/K$ es homeomorfo al cono sobre $M(n)/K$.*

En particular, si K actúa no transitivamente en la esfera \mathbb{S}^{n-1} el espacio orbital $M(n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert (corolario 4.1.10). En este caso, por la proposición anterior concluimos que el espacio orbital $cc(\mathbb{B}^n)/K$ es homeomorfo al cono sobre el cubo de Hilbert. Pero por el teorema 2.1.10, dicho cono es homeomorfo al cubo de Hilbert mismo. Este hecho se resume en el siguiente corolario:

Corolario 5.3.7. *Para cada subgrupo cerrado $K \subset O(n)$ que actúe no transitivamente en la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} , el K -espacio orbital $cc(\mathbb{B}^n)/K$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Por otro lado, el teorema 4.1.13 en combinación con la proposición 5.3.6 implican el último resultado de este trabajo:

Corolario 5.3.8. *El espacio orbital $cc(\mathbb{B}^n)/O(n)$ es homeomorfo al cono sobre el compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.*

5.3.1. Observación Final

Para concluir este trabajo, haremos una última observación. Existe una relación entre el corolario 5.3.8 y el problema de A. Pelczyński:

Problema Si $n \geq 3$ ¿los compactos de Banach-Mazur $BM(n)$ son homeomorfos al cubo de Hilbert?

Por el teorema 2.1.10, sabemos que el único retracto absoluto homeomorfo a su propio cono es el cubo de Hilbert.

De acuerdo al corolario 5.3.8, el espacio orbital $cc(\mathbb{B}^n)/O(n)$ es homeomorfo al cono sobre el compacto de Banach Mazur $BM(n) \cong M(n)/O(n)$. Si $BM(n)$ fuera cubo de Hilbert, entonces éste último sería homeomorfo a su cono, el cual es homeomorfo a $cc(\mathbb{B}^n)/O(n)$.

De esta manera, el problema de A. Pelczyński es equivalente a la siguiente pregunta

Pregunta 1. *Si $n \geq 3$ ¿los espacios $cc(\mathbb{B}^n)/O(n)$ y $M(n)/O(n)$ son homeomorfos?*

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Teorema de Descomposición Polar

Sea L un espacio lineal real con producto interior (\cdot, \cdot) . Diremos que un operador O en L es **ortogonal** si $(Ox, Oy) = (x, y)$ para cualquier par de puntos $x, y \in L$. Por otro lado, diremos que un operador T en L es **auto-adjunto** (o **simétrico**) si para cualesquiera $x, y \in L$ se tiene que

$$(Tx, y) = (x, Ty).$$

Si L es un espacio euclidiano, los operadores auto-adjuntos tienen la siguiente caracterización:

Teorema A.0.9. *Sea T una transformación lineal en un espacio Euclidiano L , y sea \mathcal{B} una base ortonormal de L . Entonces T es auto-adjunto si y sólo si la matriz relativa a \mathcal{B} es simétrica.*

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [26, teorema 45].

Diremos que un operador simétrico T en un espacio lineal con producto interior L es **positivo** ó **positivo semidefinido** si $(x, Tx) \geq 0$ para todo $x \in L$. Si además $(x, Tx) > 0$ para todos los $x \neq 0$, entonces diremos que T es **estrictamente positivo** o **positivo definido**. Evidentemente un operador positivo es estrictamente positivo si y sólo si es invertible.

Si L es un espacio euclidiano, todo operador simétrico positivo definido T , se puede representar como una matriz simétrica con entradas positivas en la diagonal.

El teorema de Descomposición Polar establece lo siguiente:

Teorema A.0.10 (Teorema de Descomposición Polar). *Sea T un operador invertible en un espacio lineal con producto interior. Entonces existe un operador positivo definido H y un operador ortogonal O tales que $T = HO$. La elección de H y O es única.*

Para una demostración del teorema anterior se puede consultar [26, Teorema 60].

Apéndice B

Teoremas de descomposición QR y RQ

Los Teoremas de Descomposición QR y RQ aparecen en Álgebra lineal como consecuencia inmediata del proceso Gram-Schmidt para ortonormalizar la base de un subespacio de \mathbb{R}^n . En nuestro caso, el Teorema de descomposición RQ fue utilizado en la demostración del corolario 3.3.7 y por esta razón incluimos aquí una breve explicación de estos dos teoremas.

Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y supongamos que los vectores $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ constituyen una base ortonormal para W . Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario. La **proyección** de x en W se define como el siguiente vector:

$$\text{Proy}_W(x) = \sum_{i=1}^m (w_i, x) w_i,$$

donde (w, x) denota el producto escalar de los vectores w y x .

Supongamos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base para un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^m$. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea V_i el espacio generado por los vectores $\{v_1, \dots, v_i\}$. El proceso de Gram-Schmidt para ortonormalizar la base $\{v_1, \dots, v_m\}$ dice que $\{w_1, \dots, w_i\}$ es una base ortonormal para V_i , donde

- $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1,$
- $w_i = \frac{1}{\|v_i - \text{Proy}_{V_{i-1}}(v_i)\|} (v_i - \text{Proy}_{V_{i-1}}(v_i)),$ si $i \in \{2, \dots, m\}.$

Observemos que $v_i - \text{Proy}_{V_{i-1}}(v_i) = v_i - (w_1 \cdot v_i)w_1 - \dots - (w_{i-1} \cdot v_i)w_{i-1}$. Denotemos por $r_{11} = \|v_1\|$ y para cada $i = 2, \dots, m$, sea $r_{ii} = \|v_i - \text{Proy}_{V_{i-1}}(v_i)\|$. Por otro lado, si

$i > j$ sea $r_{ji} = w_j \cdot v_i$. Entonces, del proceso de Gram-Schmidt concluimos que

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11}w_1 \\ v_2 &= r_{12}w_1 + r_{22}w_2 \\ &\vdots \\ v_m &= r_{1m}w_1 + r_{2m}w_2 + \cdots + r_{mm}w_m \end{aligned}$$

Todas las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial como sigue:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_m \\ | & | & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

De aquí se concluye que cualquier matriz cuadrada con columnas linealmente independientes, se puede expresar como el producto de una matriz ortonormal por una matriz triangular superior con entradas positivas en su diagonal (observemos que cada uno de los r_{ii} es un número positivo).

Además, esta expresión es única. Para ver esto recordemos los siguientes tres hechos sobre matrices triangulares superiores:

1. El producto de dos matrices triangulares superiores (a_{ji}) y (b_{ji}) es otra matriz triangular superior (p_{ji}) . En este caso, la entrada p_{ii} de la diagonal del producto de las matrices es igual al producto $a_{ii}b_{ii}$.
2. Una matriz triangular superior (a_{ji}) es invertible si y sólo si todas sus columnas son no nulas. En este caso la matriz inversa es triangular superior (b_{ji}) donde $b_{ii} = 1/a_{ii}$.
3. Una matriz triangular superior es ortonormal si y solo si es diagonal y todas las entradas de la diagonal son 1 ó -1.

Ahora supongamos que una matriz M satisface $M = QR = Q_1R_1$ donde Q y Q_1 son matrices ortonormales y R y R_1 son matrices triangulares superiores con entradas positivas en la diagonal. Entonces $RR_1^{-1} = Q^{-1}Q_1$ y por lo tanto RR_1^{-1} es una matriz triangular superior, ortonormal (y por lo tanto diagonal) y todas las entradas de su diagonal son positivas. De aquí se deduce que RR_1^{-1} es la matriz identidad y por lo tanto $Q = Q_1$ y $R = R_1$.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente teorema:

Teorema B.0.11 (Teorema de Descomposición QR). *Sea M una matriz invertible. Entonces existe una matriz ortonormal Q y una matriz triangular superior R tales que $M = QR$. Además, esta representación es única.*

Del teorema anterior se sigue inmediatamente el Teorema de descomposición RQ:

Teorema B.0.12 (Teorema de Descomposición RQ). *Sea M una matriz invertible. Entonces existe una matriz ortonormal Q y una matriz triangular superior R tales que $M = RQ$. Además, esta representación es única.*

Demostración. Sea M^{-1} la inversa de la matriz M . Entonces existe una matriz triangular superior R_1 y una matriz ortonormal Q_1 tales que $M^{-1} = Q_1 R_1$. Luego,

$$M = (M^{-1})^{-1} = (Q_1 R_1)^{-1} = R_1^{-1} Q_1^{-1} = RQ$$

donde $R = R_1^{-1}$ es una matriz triangular superior con entradas positivas en la diagonal y $Q = Q_1^{-1}$ es una matriz ortonormal. La unicidad de R y Q se sigue de la unicidad de las matrices Q_1 y R_1 . \square

Apéndice C

Nervio de una Cubierta

C.1. Complejos simpliciales

Definición C.1.1. Sea V un conjunto. Un **complejo simplicial** (abstracto) \mathcal{K} es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de V , que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para cada elemento $v \in V$, el singulete $\{v\}$ pertenece a \mathcal{K} .
- (2) Si $\sigma \in \mathcal{K}$ y $\tau \subset \sigma$, entonces $\tau \in \mathcal{K}$.

En este caso los elementos $\sigma \in \mathcal{K}$ reciben el nombre de **simplejos abstractos** de \mathcal{K} . Por otro lado, V se llama **conjunto de vértices** y cada uno de sus elementos $v \in V$ es un vértice del complejo simplicial.

Más aún, si $\sigma \in \mathcal{K}$ es de la forma $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$, entonces diremos que σ es un simplejo de dimensión n cuyos vértices son v_0, \dots, v_n . Los **caras** de σ serán todos los subconjuntos $\eta \subset \sigma$ y el simplejo σ será denotado por:

$$\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Sea un complejo simplicial abstracto \mathcal{K} cuyo conjunto de vértices es V . Consideremos el espacio lineal \mathbb{R}^V . Recordemos que cada elemento $\alpha \in \mathbb{R}^V$ se puede representar como una función $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$. Por cada vértice $v \in V$, consideremos la función $\alpha_v \in \mathbb{R}^V$ dada por

$$\alpha_v(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = v \\ 0, & \text{si } u \neq v. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Es fácil ver que la familia $\{\alpha_v \mid v \in V\}$ es un conjunto linealmente independiente. Para cada simplejo $\sigma \in \mathcal{K}$, sea $|\sigma|$ el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^V :

$$|\sigma| = \text{conv}\{\alpha_{v_0}, \dots, \alpha_{v_n}\}.$$

El conjunto $|\sigma|$ recibe el nombre de simplejo geométrico. En $|\sigma|$ se puede definir la métrica ρ de la siguiente manera:

$$\rho(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V} (\alpha(v) - \beta(v))^2}.$$

Para cada n -simplejo σ , la métrica ρ hace al simplejo geométrico $|\sigma|$ isométrico al n -simplejo estándar

$$\Delta_n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \text{ y } \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}$$

Finalmente consideremos el conjunto

$$|\mathcal{K}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma| \subset \mathbb{R}^V.$$

Equipemos a $|\mathcal{K}|$ con la topología débil respecto a la cubierta $\{|\sigma| \mid \sigma \in \mathcal{K}\}$. Es decir, un conjunto $U \subset |\mathcal{K}|$ es abierto en \mathcal{K} si y sólo si $U \cap |\sigma|$ es abierto en $|\sigma|$ para todo $\sigma \in \mathcal{K}$. El espacio topológico $|\mathcal{K}|$ así obtenido se llama realización geométrica de $|\mathcal{K}|$. En este caso diremos que el conjunto $\{\alpha_v\}_{v \in V}$ es el conjunto de vértices de $|\mathcal{K}|$.

Observemos que si $\alpha \in |\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$, entonces $\alpha \in |\sigma|$ para algún $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle \in \mathcal{K}$. Además, podemos elegir σ de manera que $\alpha = \sum_{i=0}^n \lambda_i \alpha_{v_i}$ donde cada $\lambda_i > 0$ y $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. El simplejo geométrico $|\sigma|$ así elegido recibe el nombre de portador de α . Además, si $v \notin \sigma$, entonces $\alpha(v) = 0$. De esta manera, podemos denotar cada $\alpha \in \mathcal{K}$ de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum_{v \in V} \lambda_v(\alpha) \alpha_v,$$

donde $\lambda_v(\alpha) = 0$ si $v \notin \sigma$ y $\lambda_v(\alpha) = \lambda_i$ si $v = v_i$. El conjunto $\{\lambda_v(\alpha)\}_{v \in V}$ recibe el nombre de coordenadas baricéntricas de α . Además, para cada $v \in V$, la función $\lambda_v : |\mathcal{K}| \rightarrow [0, 1]$ es continua.

C.2. Nervio de una Cubierta

Definición C.2.1. Sea X un espacio topológico y \mathcal{U} una cubierta abierta de X . El **nervio** de \mathcal{U} es el complejo simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ definido de la siguiente manera: los vértices de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ son los elementos de \mathcal{U} , y $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ es un simplejo de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ si y sólo si

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \neq \emptyset.$$

Evidentemente, si $\sigma \subset \tau \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, entonces $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Teorema C.2.2. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X y $\{\varphi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una partición de unidad localmente finita subordinada a \mathcal{U} . Para cada $U_\alpha \in \mathcal{U}$, sea $u_\alpha \in |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ el vértice correspondiente. Entonces existe una función continua $f : X \rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ tal que

$$f^{-1}(\text{St}(u_\alpha)) \subset U_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}$$

donde $\text{St}(u_\alpha) = \{|\sigma| \in |\mathcal{N}(\mathcal{U})| \mid u_\alpha \in |\sigma|\}$.

Demostración. Definamos, para cada $x \in X$, la función $f : X \rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ como sigue:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha(x) u_\alpha.$$

Como la familia $\{\varphi_\alpha^{-1}((0, 1])\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita, la función f es continua.

Veamos que $f^{-1}(\text{St}(u_\alpha)) \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Para ello simplemente observemos que $f(z) \in \text{St}(u_\alpha)$ si y sólo si $\varphi_\alpha^{-1}(z) > 0$. De esta manera concluimos que

$$f^{-1}(\text{St}(u_\alpha)) = \varphi_\alpha^{-1}((0, 1]) \subset U_\alpha,$$

lo cual completa la demostración. □

C.3. Triangulaciones y subdivisiones

Definición C.3.1. Un espacio topológico es **triangulable** si existe un complejo simplicial \mathcal{K} cuya realización geométrica $|\mathcal{K}|$ es homeomorfa a X . En este caso diremos que \mathcal{K} es una **triangulación** de X .

Definición C.3.2. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Una **subdivisión** de \mathcal{K} , es otro complejo simplicial \mathcal{S} el cual cumple las siguientes propiedades:

- (1) Los vértices de \mathcal{S} son elementos de $|\mathcal{K}|$.
- (2) Dado $\tau \in \mathcal{S}$, existe $\sigma \in \mathcal{K}$ tal que $\tau \subset |\sigma|$.
- (3) La función inducida de $|\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{K}|$ por la función que asocia a cada vértice de \mathcal{S} el punto correspondiente de $|\mathcal{K}|$ es un homeomorfismo.

En otras palabras, una subdivisión de \mathcal{K} es una triangulación \mathcal{S} de $|\mathcal{K}|$ tal que para cada simplejo $\sigma \in \mathcal{K}$, la familia

$$\mathcal{S}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{S} \mid |\tau| \subset |\sigma|\}$$

es una triangulación finita del simplejo $|\sigma|$.

Sea \mathcal{K} un complejo simplicial abstracto. Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ al siguiente complejo simplicial: el conjunto de vértices de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ es \mathcal{K} . Los simplejos de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ son los conjuntos de

la forma $\{\sigma_0 \subset \sigma_1, \dots \subset \sigma_q \mid \sigma_i \in \mathcal{K}\}$. El complejo simplicial $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ se llama subdivisión baricéntrica de \mathcal{K} .

Además, para cualquier complejo simplicial \mathcal{K} , la realización geométrica $|\mathcal{K}|$ es homeomorfa a la realización geométrica de su subdivisión baricéntrica. $|\mathcal{B}(\mathcal{K})|$. Sea \mathcal{K} un complejo

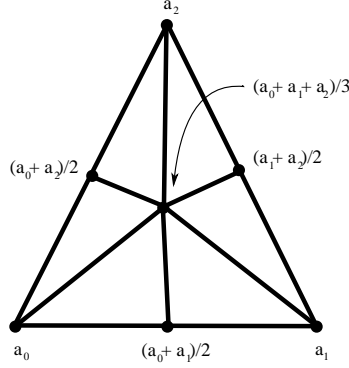


Figura C.1: Subdivisión Baricéntrica de Δ_2

simplicial cuyo conjunto de vértices es V . Para cada simplejo $\sigma \in \mathcal{K}$, $\sigma = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, denotemos por $\beta_\sigma \in |\mathcal{K}|$ el baricentro del simplejo geométrico $|\sigma|$, es decir:

$$\beta_\sigma(v) = \begin{cases} 1/k, & \text{si } v \in \{v_1, \dots, v_k\}, \\ 0, & \text{si } v \notin \{v_1, \dots, v_k\}. \end{cases}$$

La función $\Phi : |\mathcal{B}(\mathcal{K})| \rightarrow |\mathcal{K}|$ definida por

$$\Phi(\alpha)(v) = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \alpha(\sigma) \beta_\sigma(v), \quad \alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), \quad v \in V,$$

es un homeomorfismo cuya función inversa es el homeomorfismo $\Psi : |\mathcal{N}(\mathcal{U})| \rightarrow |B|$ definido en cada $\alpha \in |\mathcal{K}|$ como sigue:

$$\Psi(\alpha)(\sigma) = \begin{cases} (i+1)(\alpha(v_i) - \alpha(v_{i+1})), & \text{si } \sigma = \langle v_0, \dots, v_i \rangle, \\ (k+1)\alpha(v_k), & \text{si } \sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle, \\ 0, & \text{si } \sigma \neq \langle v_0, \dots, v_i \rangle, \quad i = 0, \dots, k \end{cases}$$

donde el portador de α es $|\langle v_0, \dots, v_k \rangle|$ y $\alpha(v_0) \geq \alpha(v_1) \geq \dots \geq \alpha(v_k)$.

Bibliografía

- [1] H. Abels *Parallelizability of proper actions, global K -slices and maximal compact subgroups*, Math. Anal. 212 (1974), 1-19.
- [2] J. L. Alperin and R. B. Bell *Groups and Representations*, Graduate texts in mathematics 162, Springer, New York, 1995.
- [3] S. A. Antonyan, *Retracts in the categories of G -spaces*, Izvestija Akademii Nauk Armyanskoi SSR. Matematika, Vol 15, No. 5 (1980) 365-378. English transl. in: Soviet Journal of Contemporary mathematical Analysis.
- [4] S. A. Antonyan, *Equivariant generalization of Dugundji's theorem*, Mathematical Notes, vol. 38 no.4 (1985), 844-848.
- [5] S. A. Antonyan, *Equivariant embeddings into G -AR's*, Glasnik Mat. Ser. III, 22 (42) (1987), 503-553.
- [6] S. A. Antonyan, *Retraction properties of an orbit space*, Matem. Sbornik 137 (1988), 300-318; English transl. in: Math. USSR Sbornik 65 (1990), 305-321.
- [7] S. A. Antonyan, *The Banach-Mazur compacta are absolute retracts*, Bull. Polish Acad. Sci. Math, 46 (1998), 113-119.
- [8] S. A. Antonyan, *The topology of the Banach-Mazur compactum*, Fund. Math. 1966, no. 3 (2000), 209-232.
- [9] S. A. Antonyan, *West's Problem on equivariant hyperspaces and Banach-Mazur compacta*, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), 3379-3404. *Corrigendum to «West's Problem on equivariant hyperspaces and Banach-Mazur compacta»*, Trans. Amer. Math. Soc., 358, (12) (2006), 5631-5633.
- [10] S. A. Antonyan, *Extending equivariant maps into spaces with convex structures*, Topology Appl., 153 (2005), 261-275.
- [11] S. A. Antonyan, *A characterization of equivariant absolute extensors and the equivariant Dugundji theorem*, Houston J. Math., Vol. 31, No. 2, (2005), 451-462.
- [12] S. A. Antonyan, *New topological models for Banach-Mazur compacta*, Journal of Mathematical Sciences, vol. 146, no. 1, (2007), 5465-5473.

- [13] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
- [14] G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.
- [15] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, C. B. M. S. Regional Conference Series in Math., 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [16] D. W. Curtis, *Hyperspaces of noncompact metric spaces*, Compositio Math. 40, No.2 (1980), 139–152.
- [17] D. W. Curtis, *Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 75, No. 1 (1979) 126-130.
- [18] D. W. Curtis and R. M. Shori, 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927-931.
- [19] D. W. Curtis and R. M. Shori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19-38.
- [20] L. Danzer, D. Laughwitz and H. Lenz, *Ueber das Löwnersche Ellipsoi und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeshriebenen Ellipsoiden*, Arch. Math., 8 (1957), 214-219.
- [21] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlín, 1989.
- [22] G. Hochschild, *The Structure of Lie Groups*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.
- [23] S. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.
- [24] A. Illanes and S. B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamental and Recent Advances*, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.
- [25] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, in: F. John Collected Papers, Vol. 2 (ed. by J. Moser), Birkhäuser, 1985, 543-560.
- [26] I. Kaplansky, *Linear Algebra and Geometry. A second course*, Dover Publ., New York, 1974.
- [27] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1987.
- [28] J. Lindenstrauss and V. D. Millman, *The local theory of normed spaces and its applications to convexity*, in: Handbook of Convex Geometry (P. M. Gruber and J. M. Wills, eds.), pp. 1149-1220, Elsevier Sci. Publ. B. V. (North-Holland), Amsterdam, 1993.
- [29] A. M. Macbeath, *A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions*, Canadian Journal of Mathematics, III (1951), 54-61.
- [30] S. B. Nadler, Jr., J. E. Quinn, and N. M. Stavrakas, *Hyperspaces of compact convex sets*, Pacific J. Math. 83 (1979), 441-462.

- [31] S. de Neymet, *Grupos Topológicos de Transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [32] R. Palais, *The classification of G -spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol 36, American Mathematical Society, Providence, RI, 1960.
- [33] R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math 73 (1961), 295-323.
- [34] K. Sakai and M. Yaguchi, *The AR 's property of the space of closed convex sets*, Colloq. Math. 106 (2006), 15-24.
- [35] K. Sakai and Z. Yang, *The space of closed convex sets in Euclidean spaces with the fell topology*, Bull. Pol. Acad. Sci., Vol. 55, no.2 (2007), 139-143.
- [36] K. Sakai, *The spaces of compact convex sets and bounded closed convex sets in a Banach space*, Houston Journal of mathematics, Vol. 34, no. 1 (2008), 289-300.
- [37] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [38] H. Toruńczyk, *On CE -images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds*, Fund. Math. 106 (1980), 31-40.
- [39] J. de Vries, *Topics in the theory of topological groups*, in: Topological Structures II, pp.291-304, Math. Centre Tracts, Vol. 116, Math. Centrum Amsterdam, 1979.
- [40] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland Math. Library 43, Amsterdam, 1989.
- [41] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [42] J. E. West, *Open Problems of Infinite-dimensional Topology*, in *Open Problems in Topology*, ed. J. van Mill, G. Reed, North Holland, 1990.
- [43] D. J. Winter, *Matrix Algebra*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [44] V. L. Zaguskin, *On circumscribed and inscribed ellipsoids of extremal volume*, Uspehi Mat. Nauk. 13 (1958), no. 6 (84), 89-92. (Russian).