UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

REPRESENTACIONES Y COTAS DE FUNCIONES DE AGREGACIÓN BINARIAS 2-CRECIENTES

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MICHELLE ANZARUT CHACALO

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. JOSÉ MARÍA GONZÁLEZ-BARRIOS MURGUÍA
IIMAS, UNAM

MÉXICO, D. F. A 27 DE MAYO DEL 2013

Prefacio

Agregar tiene como propósito usar simulátaneamente información proveniente de diferentes fuentes para llegar a una conclusión o decisión, por lo que las funciones de agregación transforman un número finito de entradas en una única salida. Algunos ejemplos sencillos son el máximo, el promedio o el primer número positivo de un conjunto finito de números reales.

En este trabajo se introducen las funciones binarias de agregación 2-crecientes axiomáticamente, por medio de un conjunto de propiedades, y se desarrollan caracterizaciones de las mismas basadas en cópulas, siguiendo la línea propuesta por F. Durante, S. Saminger-Platz y P. Sarkoci, en su artículo *On representations of 2-increasing binary aggregation functions.*

El concepto de cópula, introducido por Sklar en 1959, es hoy en día muy común en la literatura estadística y recientemente se ha evidenciado su potencial para aplicacíones en la modelación de dependencia. Las cópulas son funciones de distribución multivariadas cuyas marginales unidimensionales están distribuídas uniformemente en $[0, 1]$ y permiten representar funciones de distribución conjunta separando el comportamiento integrado en las distribuciones marginales, de la dependencia, que captura la cópula en si.

El documento está estructurado de la siguiente manera. En la siguiente sección estableceremos la notación, presentaremos algunas propiedades matemáticas de las funciones de agregación, una breve descripción de algunas propiedades de las cópulas y 2 ejemplos sencillos. Esto establecerá las bases para el entendimiento de las demostraciones de la sección 3 en la que se desarrollan representaciones y cotas para las funciones de agregación 2-crecientes haciendo uso de resultados conocidos de cópulas.

Índice general

1

Conceptos y resultados introductorios

Comenzaremos definiendo algunos conceptos y notación que se utilizaran a lo largo de todo el trabajo, posteriormente, desarrollaremos ciertos resultados que serán de ayuda en las demostraciones del siguiente capítulo.

1.1. Definiciones y notación

Denotaremos con I al intervalo $[0,1]$, por lo que I^2 será su producto cartesiano, $[0,1] \times [0,1]$.

Definición 1. *Sea $A : I^2 \to I$, decimos que A es una* ***función de agregación binaria*** *si satisface:*

(i) $A(0,0) = 0$ *y* $A(1,1) = 1$.

(ii) *A es creciente, es decir, $A(x_1, y_1) \leq A(x_2, y_2)$ para todo par de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I^2$ tal que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$.*

Denotaremos por $\mathcal{A}$ a la clase de todas las funciones de agregación.

Definición 2. *Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$. Una función bivariada $G : S_1 \times S_2 \to I$ es* ***2-creciente*** *si para todo rectángulo $R = (x_1, y_1) \times (x_2, y_2)$ con $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_1 \times S_2$, $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ se cumple que:*

$$V_G(R) := G(x_2, y_2) - G(x_2, y_1) - G(x_1, y_2) + G(x_1, y_1) \geq 0$$

El valor $V_G(R)$ es llamado **G-volúmen de R**.
Denotaremos por $\mathcal{A}_2$ a la clase de todas las funciones de agregación 2-crecientes.

Ejemplo 1. *Sea $A : I^2 \to I$ tal que $A(x,y) = \frac{1}{4}max(3x + 3y - 2, 0)$, entonces $A \in \mathcal{A}_2$. Claramente $A(0,0) = 0$ y $A(1,1) = 1$, veamos que A es creciente. Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ tales que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, entonces hay 3 casos posibles:*

- *Si $3x_1 + 3y_1 - 2 \geq 0$ entonces $3x_2 + 3y_2 - 2 \geq 0$ por lo que $A(x_1, y_1) \leq A(x_2, y_2)$.*
- *Si $3x_1 + 3y_1 - 2 \leq 0$ y $3x_2 + 3y_2 - 2 \geq 0$ entonces $A(x_1, y_1) \leq A(x_2, y_2)$.*
- *Si $3x_1 + 3y_1 - 2 \leq 0$ y $3x_2 + 3y_2 - 2 \leq 0$ entonces $A(x_1, y_1) = A(x_2, y_2)$.*

Así que ya tenemos que $A \in \mathcal{A}$, veamos que es 2-creciente. Para todo rectángulo $R = (x_1, y_1) \times (x_2, y_2)$ con $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ y $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
V_A(R) &= \frac{1}{4}max(3x_1 + 3y_1 - 2, 0) + \frac{1}{4}max(3x_2 + 3y_2 - 2, 0) \\
&\quad - \frac{1}{4}max(3x_1 + 3y_2 - 2, 0) - \frac{1}{4}max(3x_2 + 3y_1 - 2, 0) \\
&\geq \frac{1}{4}max(3x_1 + 3y_1 - 2 + 3x_2 + 3y_2 - 2 - 3x_1 - 3y_2 + 2 - 3x_2 - 3y_1 + 2, 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notemos que una función creciente en cada coordenada no necesariamente es 2-creciente, por ejemplo, si $H : I^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $H(x,y) = max\{x, y\}$, entonces H es creciente en cada coordenada, pero $V_H(I^2) = -1$. Tampoco es cierto que toda función 2-creciente es creciente en cada coordenada, un contraejemplo es $H : I^2 \to \mathbb{R}$, dada por $H(x,y) = (2x - 1)(2y - 1)$.

Definición 3. *Una función de agregación 2-creciente es una **cópula** si para toda $x, y \in I$ se cumple que:*

$$C(x, 1) = x \text{ y } C(1, y) = y.$$

Denotaremos por $\mathcal{C}$ al conjunto de cópulas.

Ejemplo 2. *Sea $\pi : I^2 \to I$ tal que $\pi(u,v) = uv$, entonces π es cópula pues claramente para todo par $u, v \in I$ se tiene que $\pi(u,0) = \pi(0,v) = 0$, $\pi(u,1) = u$, $\pi(1,v) = v$ y π es creciente, además, para todo rectángulo $R = (u_1, v_1) \times (u_2, v_2)$ con $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ se cumple que:*

$$V_\pi(R) = u_2 v_2 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + u_1 v_1 = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq 0.$$

La cópula anterior es llamada cópula producto y está asociada a dos variables aleatorias independientes.

Definición 4. *Una **subcópula** es una función $C' : S_1 \times S_2 \to I$ que cumple:*

(i) $S_1, S_2 \subset I$ *con* $\{0,1\} \in S_1, S_2$.

(ii) C' *está fija, es decir, si* a_1 *es el ínfimo de* S_1 *y* a_2 *es el ínfimo de* S_2*, entonces,* $C'(x, a_2) = C'(a_1, y) = 0$ *para toda* $x \in S_1$*,* $y \in S_2$.

(iii) C' *es creciente.*

(iv) C' *es 2-creciente.*

(v) *Para toda* $x \in S_1$ *y* $y \in S_2$*,* $C'(x,1) = x$ *y* $C'(1,y) = y$.

Es posible probar que el punto (iii) se deriva de los anteriores.
Observemos que una subcópula C' es una cópula si y sólo si $S_1 = S_2 = I$.

Definición 5. *Dada una función de agregación 2-creciente* A*, sus* ***marginales inferiores*** *son las funciones de* I *a* I *dadas por:*

$$h_0^A(x) := A(x,0) \text{ y } v_0^A(y) := A(0,y).$$

Y sus ***marginales superiores*** *son las funciones de* I *a* I *dadas por:*

$$h_1^A(x) := A(x,1) \text{ y } v_1^A(y) := A(1,y).$$

Por definición las cópulas son funciones de agregación 2-crecientes con marginales superiores uniformes, pues si C es una cópula y $x, y \in I$, entonces $h_1^C(x) = x$, $v_1^C(y) = y$. Además, C tiene **aniquilador** 0, es decir, $h_0^C(x) = 0$ y $v_0^C(y) = 0$ debido a que

$$\begin{aligned} 0 = C(0,0) \leq C(x,0) \leq C(1,0) = 0, \\ 0 = C(0,0) \leq C(0,y) \leq C(0,1) = 0. \end{aligned}$$

Al conjunto de funciones de agregación 2-crecientes que coinciden en un conjunto ordenado de marginales, $M = \{h_0, h_1, v_0, v_1\}$, lo denotaremos por $\mathcal{A}_2^M$, por ejemplo, si f es la función idénticamente cero y g es la identidad ($f, g : I \to I,\ f(x) = 0$ *y* $g(x) = x$), entonces $\mathcal{A}_2^{\{f,g,f,g\}} = \mathcal{C}$. Inversamente, podemos plantear condiciones para que un conjunto de cuatro funciones crecientes sea admisible para ser un conjunto de marginales para alguna función $A \in \mathcal{A}_2$.

Definición 6. *Un conjunto* $M = \{h_0, h_1, v_0, v_1\}$ *de funciones* $h_0, h_1, v_0, v_1 : I \to I$ *es llamado* ***conjunto de marginales*** *si cumple las siguientes condiciones:*

(i) $h_0(0) = v_0(0), h_0(1) = v_1(0), h_1(0) = v_0(1), h_1(1) = v_1(1)$.

(ii) *Para todo* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ *tales que* $x_1 \leq x_2$ *y* $y_1 \leq y_2$ *se cumple:*

$$\begin{aligned} h_1(x_2) + h_0(x_1) \geq h_1(x_1) + h_0(x_2), \\ v_1(y_2) + v_0(y_1) \geq v_1(y_1) + v_0(y_2). \end{aligned}$$

De la segunda parte de la definición se sigue directamente que las funciones $(h_1 - h_0)$ y $(v_1 - v_0)$ son crecientes, pues si $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, entonces despejando se tiene que:

$$h_1(x_2) - h_0(x_2) \geq h_1(x_1) - h_0(x_1),$$
$$v_1(y_2) - v_0(y_2) \geq v_1(y_1) - v_0(y_1).$$

Por lo que usando ahora la primera parte de la definición obtenemos que para todo x, y en I:

$$h_1(1) - h_0(1) \geq h_1(x) - h_0(x) \geq h_1(0) - h_0(0) = v_0(1) - v_0(0) \geq 0,$$
$$v_1(1) - v_0(1) \geq v_1(y) - v_0(y) \geq v_1(0) - v_0(0) = h_0(1) - h_0(0) \geq 0.$$

Es decir,

$$h_1(x) \geq h_0(x) + h_1(0) - h_0(0) = h_0(x) + v_0(1) - v_0(0) \geq h_0(x),$$
$$v_1(y) \geq v_0(y) + v_1(0) - v_0(0) = v_0(y) + h_0(1) - h_0(0) \geq v_0(y).$$

Definición 7. *Una función $A : I^2 \to I$ es* ***modular*** *si el A-volúmen de cada rectángulo incluído en el cuadrado unitario es cero, es decir, $V_A(R) = 0 \ \forall R \subset I^2$.*

1.2. Resultados auxiliares

Proposición 1. *Sea $A \in \mathcal{A}_2$, el conjunto de marginales de A forma un conjunto de marginales.*

Demostración. El punto (i) se cumple claramente por definición, veamos que se cumple el punto (ii). Para todo $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ tales que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ se tiene que $V_A([x_1, x_2] \times [0,1]) \geq 0$ y $V_A([0,1] \times [y_1, y_2]) \geq 0$ de donde:

$$A(x_2, 1) + A(x_1, 0) \geq A(x_1, 1) + A(x_2, 0),$$
$$A(1, y_2) + A(0, y_1) \geq A(1, y_1) + A(0, y_2).$$

Por lo que:

$$h_1(x_2) + h_0(x_1) \geq h_1(x_1) + h_0(x_2),$$
$$v_1(y_2) + v_0(y_1) \geq v_1(y_1) + v_0(y_2).$$

□

Proposición 2. *Sea $A \in \mathcal{A}_2$, y sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$, entonces*

$$|A(x_2, y_2) - A(x_1, y_1)| \ \leq \ |h_1^A(x_2) - h_1^A(x_1)| + |v_1^A(y_2) - v_1^A(y_1)|.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}|A(x_2,y_2)-A(x_1,y_1)| &= |A(x_2,y_2)-A(x_1,y_2)+A(x_1,y_2)-A(x_1,y_1)|\\ &\leq |A(x_2,y_2)-A(x_1,y_2)|+|A(x_1,y_2)-A(x_1,y_1)|.\end{aligned}$$

Supongamos que $x_1 \leq x_2$, como $V_A([x_1,x_2]\times[y_2,1]) \geq 0$ y además A es creciente entonces,

$$\begin{aligned}0 &\leq A(x_2,y_2)-A(x_1,y_2)\\ &\leq\ A(x_2,1)-A(x_1,1)\\ &= h_1^A(x_2)-h_1^A(x_1).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x_1 \geq x_2$, entonces

$$\begin{aligned}|A(x_2,y_2)-A(x_1,y_2)| &\leq\ |h_1^A(x_1)-h_1^A(x_2)|\\ &= |h_1^A(x_2)-h_1^A(x_1)|.\end{aligned}$$

Análogamente es posible ver que

$$|A(x_1,y_2)-A(x_1,y_1)| \leq\ |v_1^A(y_2)-v_1^A(y_1)|.$$

Por lo que se obtiene la desigualdad deseada. □

Corolario 1. *Sea C' una subcópula, y sean $x_1,x_2,y_1,y_2 \in I$, entonces*

$$|C(x_2,y_2)-C(x_1,y_1)|\ \leq\ |x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

Por lo tanto toda subcópula es uniformemente continua en su dominio.

Proposición 3. *Una función $A\in\mathcal{A}_2$ es modular si y sólo si para todo $x,y\in I$ se tiene que:*

$$A(x,y)=h_0^A(x)+v_0^A(y)=h_1^A(x)+v_1^A(y)-1.$$

Demostración. Para probar la implicación de ida basta notar que como A es modular entonces dadas $x,y\in I$ se tiene que $V_A([0,x]\times[0,y])=0$, o equivalentemente, $A(0,0)+A(x,y)-A(0,y)-A(x,0)=0$, pero $A(0,0)=0$, así pues, $A(x,y)=h_0^A(x)+v_0^A(y)$. La segunda parte de la igualdad se deriva directamente de la igualdad anterior, pues:

$$\begin{aligned}A(x,1)&=A(x,0)+A(0,1),\\ A(1,y)&=A(1,0)+A(0,y),\\ A(1,1)&=A(1,0)+A(0,1)=1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $A(x,1)+A(1,y)=A(x,0)+A(0,y)+1$, o equivalentemente $h_0^A(x)+v_0^A(y)=h_1^A(x)+v_1^A(y)-1$.
Veamos ahora la implicación de regreso. Sea R un rectángunlo contenido en I^2, $R=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ con $0\leq x_1\leq x_2\leq 1$ y $0\leq y_1\leq y_2\leq 1$, recordemos que $V_A(R)=A(x_1,y_1)+A(x_2,y_2)-A(x_2,y_1)-A(x_1,y_2)$, pero $A(x,y)=h_0^A(x)+v_0^A(y)=A(x,0)+A(0,y)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} V_A(R) &= A(x_1,0)+A(0,y_1)+A(x_2,0)+A(0,y_2)-A(x_2,0)-A(x_1,0)-A(0,y_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Probamos que las marginales de cualquier función de agregación 2-creciente son crecientes, por lo tanto, si $A\in\mathcal{A}_2$ y denotamos por $\mathcal{R}_{h_1}^A$ y $\mathcal{R}_{v_1}^A$ al rango de h_1^A y v_1^A respectivamente, entonces para toda $s\in\mathcal{R}_{h_1}^A$ y $t\in\mathcal{R}_{v_1}^A$ los conjuntos

$$\begin{aligned} (h_1^A)^{-1}(\{s\}) &:= \{x\in I : h_1^A(x)=s\}), \\ (v_1^A)^{-1}(\{t\}) &:= \{y\in I : v_1^A(y)=s\}). \end{aligned}$$

Son no vacíos y forman intervalos, sean s^*, t^* sus supremos y s_*, t_* sus ínfimos, definimos las funciones

$$\begin{aligned} (h_1^A)^* &: \mathcal{R}_{h_1}^A \to I, \\ (v_1^A)^* &: \mathcal{R}_{v_1}^A \to I. \end{aligned}$$

Dadas por:

$$\begin{aligned} (h_1^A)^* &= \frac{s_*+s^*}{2}, \\ (v_1^A)^* &= \frac{t_*+t^*}{2}. \end{aligned}$$

Notemos que s^*, t^*,s_*, t_* no necesariamente están en los intervalos, pues no sabemos si son abiertos o cerrados, pero su media aritmética sí debe pertenecer a los intervalos, es decir, para todo s y t:

$$\begin{aligned} (h_1^A)^*(s) &\in (h_1^A)^{-1}(\{s\}), \\ (v_1^A)^*(t) &\in (v_1^A)^{-1}(\{t\}). \end{aligned}$$

Lema 1. *Sean $A\in\mathcal{A}_2$, $s\in\mathcal{R}_{h_1}^A$ y $t\in\mathcal{R}_{v_1}^A$, si denotamos por $s'=(h_1^A)^*(s)$ y $t'=(v_1^A)^*(t)$, entonces para todo $(x,y)\in(h_1^A)^{-1}(\{s\})\times(v_1^A)^{-1}(\{t\})$ se tiene que:*

$$A(x,y)=A(s',t').$$

Demostración. $s', t' \in I$ y como mencionamos anteriormente $(s', t') \in (h_1^A)^{-1}(\{s\}) \times (v_1^A)^{-1}(\{t\})$ por lo tanto si los conjuntos $(h_1^A)^{-1}(\{s\})$ y $(v_1^A)^{-1}(\{t\})$ solo tienen un elemento, necesariamente $x = s', y = t'$ y el resultado es trivial.
Si $y = t'$ y existen dos elementos, digamos x_1, x_2 en $(h_1^A)^{-1}(\{s\})$, supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 < x_2$, entonces:

$$V_A([x_1, x_2] \times [t', 1]) \geq 0.$$

Es decir,

$$A(x_1, t') + A(x_2, 1) - A(x_2, t') - A(x_1, 1) \geq 0.$$

Pero, $A(x_1, 1) = h_1^A(x_1) = s = h_1^A(x_2) = A(x_2, 1)$, por lo tanto,

$$A(x_1, t') \geq A(x_2, t').$$

Además A es creciente por lo que necesariamente

$$A(x_1, t') = A(x_2, t').$$

Si $x = s'$ y existen dos elementos y_1, y_2 en $(v_1^A)^{-1}(\{t\})$ tales que $y_1 < y_2$, similarmente obtenemos que:

$$A(s', y_1) = A(s', y_2).$$

Así pues, para todo x, y

$$A(x, y) = A(x, t') = A(s', t').$$

□

Teorema 1. *Sea C' una subcópula , entonces, para todo (u, v) en su dominio se tiene que:*

$$max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq min(u, v)$$

Demostración. Sea C' una subcópula y sea (u, v) en el dominio de C', entonces $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ y $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$, por lo que $C'(u, v) \leq min(u, v)$, además, $V'_C([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$, o equivalentemte, $C'(1, 1) - C'(1, v) - C'(u, 1) + C'(u, v) \geq 0$, es decir, $C'(u, v) \geq u + v - 1$, como también se tiene que $C'(u, v) \geq C'(u, 0) = 0$, entonces, $C'(u, v) \geq max(u + v - 1, 0)$. □

Como toda cópula es a su vez una subcópula, la desigualdad anterior es válida para cópulas, en este caso usualmente se denotan por $W, M : I^2 \to I$ a las funciones $W(u, v) = max(u + v - 1, 0)$ y $M(u, v) = min(u, v)$, es sencillo probar que W y M son también cópulas por lo que son las mejores cotas que es posible obtener. Se les llaman cotas de Fréchet-Hoeffding, en nombre al matemático francés Maurice René Fréchet quién demostró dicha desigualdad en 1941 y al estadístico finlandés Wassily Hoeffding quién, sin conocer el trabajo de Fréchet, obtuvo el mismo resultado independientemente en 1951.

Lema 2. *Sea $C' : S_1 \times S_2 \to I$ una subcópula, entonces existe una cópula C tal que para todo $x, y \in S_1 \times S_2$ se tiene que $C(x, y) = C'(x, y)$.*

Demostración. Usando el corolario 1 y el hecho de que C' es no decreciente en cada coordenada, podemos extenderla por continuidad a una función C'' con dominio $\bar{S_1} \times \bar{S_2}$, donde $\bar{S_1}$ es la cerradura de S_1 y $\bar{S_2}$ es la cerradura de S_2. Claramente C'' es también una subcópula. A continuación extendemos C'' a una función C con dominio I^2. Con este fin, sea (a, b) cualquier punto en I^2. Sean a_1 y a_2 el mayor y menor elemento de S_1 (respectivamente) que satisfagan $a_1 \leq a \leq a_2$, y sean b_1 y b_2 el mayor y menor elemento de S_2 que satisfagan $b_1 \leq b \leq b_2$. Notemos que si a está en $\bar{S_1}$, entonces $a_1 = a = a_2$; y si b está en $\bar{S_2}$, entonces $b_1 = b = b_2$. Ahora, sean

$$\lambda_1 = \begin{cases} (a - a_1)/(a_2 - a_1), & \text{si } a_1 \leq a_2, \\ 1, & \text{si } a_1 = a_2. \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} (b - b_1)/(b_2 - b_1), & \text{si } b_1 \leq b_2, \\ 1, & \text{si } b_1 = b_2. \end{cases}$$

Definimos

$$\begin{aligned} C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1 C''(a_1, b_2) \\ + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2, b_2). \end{aligned}$$

C es una interpolación bilineal pues λ_1 y μ_1 son lineales en a y b respectivamente, el dominio de C es I^2 y si (a, b) está en $\bar{S_1} \times \bar{S_2}$, entonces $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ por lo que $C(a, b) = C''(a, b)$. Afirmamos que C es una cópula, no lo demostraremos pues es muy sencillo comprobar que para todo par $x, y \in I$ se cumple que $C(x, 0) = 0 = C(0, y)$, $C(x, 1) = x$ y $C(1, y) = y$, y muy largo verificar que C es 2-creciente pues hay muchos casos por considerar. La demostración completa puede encontrarse en [2, página 30]. $\square$

El lema anterior afirma que una subcópula siempre puede extenderse a una cópula, la extensión en general no es única.

2

Representaciones y cotas

En este capítulo desarrollaremos representaciones de las funciones de agregación 2-crecientes en términos de sus marginales, estas representaciones estarán esencialmente basadas en cópulas, que también se usarán para proveer cotas para las clases de funciones de agregación con marginales en común.

2.1. Generalización del teorema de Sklar

Recordemos que una función cualquiera $H(x, y) : \mathbb{R} \to I$ es una función de distribución conjunta si y sólo si:

(i) $\lim_{x,y\to+\infty} H(x, y) = 1$.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} H(x, y) = \lim_{y\to-\infty} H(x, y) = 0$.

(iii) H es no decreciente en cada variable.

(iv) H es continua por la derecha en cada variable.

(v) H es 2-creciente.

Y sus marginales son las funciones univariadas:

$$F(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x, y) \text{ y } G(y) := \lim_{x\to+\infty} H(x, y)$$

Teorema 2. *Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G, entonces existe una cópula C tal que para todo $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Conversamente si C es una cópula y F, G son dos funciones de distribución entonces H, definida como en el teorema anterior, es una función de distribución conjunta en $\mathbb{R}^2$.

El resultado anterior es conocido como Teorema de Sklar pues apareció por primera vez en un artículo escrito por Abe Sklar en 1959. El nombre *cópula* fue elegido para enfatizar la manera en que una cópula empareja la distribución conujunta con las marginales univariadas. El siguiente resultado adopta en escencia las mismas ideas del Teorema de Sklar, sin embargo, mientras que el anterior está formulado para funciones de distribución, el Teorema 3 admite cualquier función de agregación 2-creceinte, sin pedirle ningún supuesto de continuidad.

Teorema 3. *Sea A una función de agregación 2-creciente, entonces existe una cópula C tal que para todo $x, y \in I$*

$$A(x, y) = C(h_1^A(x), v_1^A(y)).$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}_2$, por simplicidad de notación llamaremos $h_1 := h_1^A$, $v_1 := v_1^A$, $S := \mathcal{R}_{h_1} \cup \{0\}$ y $T := \mathcal{R}_{v_1} \cup \{0\}$.
Sea

$$C'(s,t) = \begin{cases} A(h_1^*(s), v_1^*(t)) & \text{si } (s,t) \in \mathcal{R}_{h_1} \times \mathcal{R}_{v_1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el Lema 1, C' está bien definida, veamos que es una subcópula.

(i) Claramente $S, T \subset I$ y $\{0, 1\} \subset S, T$.

(ii) C' está fija: probaremos que $C'(0, t) = 0$ para toda t, el otro caso es análogo. Si $0 \notin \mathcal{R}_{h_1}$, entonces, $C'(0, t) = 0$.
Si $0 \in \mathcal{R}_{h_1}$ entonces, $C'(0, t) = A(h_1^*(0), v_1^*(t))$, pero, $h_1^*(0) \in (h_1^A)^{-1}(\{0\})$, por lo que $A(h_1^*(0), 1) = 0$, así pues,

$$0 = A(0, 0) \leq A(h_1^*(0), v_1^*(t)) \leq A(h_1^*(0), 1) = 0.$$

(iii) C' es creciente: para que C' sea creciente basta que h_1^* y v_1^* sean crecientes, pero recordemos que si $s_1' \in (h_1^A)^{-1}(\{s_1\})$ y $s_2' \in (h_1^A)^{-1}(\{s_2\})$, entonces, $h_1(s_1') = s1$ y $h_1(s_2') = s2$, como h_1 es creciente, $s_1' \leq s_2'$ si y sólo si $s_1 \leq s_2$. (El caso con v_1^* es análogo).

(iv) C' es 2 - creciente: sean $s_1, s_2 \in \mathcal{R}_{h_1}$, $t_1, t_2 \in \mathcal{R}_{v_1}$ tales que $s_1 \leq s_2$ y $t_1 \leq t_2$, entonces, como A es 2-creciente,

$$V_{C'}([s_1, s_2] \times [t_1, t_2]) = V_A([h_1^*(s_1), h_1^*(s_2)] \times [v_1^*(t_1), v_1^*(t_2)]) \geq 0.$$

En el caso en que $0 \notin \mathcal{R}_{h_1}$ o $0 \notin \mathcal{R}_{v_1}$ se tiene que $C'(0,t_1) = C'(0,t_2) = 0$ por lo que

$$\begin{aligned} V_{C'}([0,s_2] \times [t_1,t_2]) &= C(0,t_1) + C(s_2,t_2) - C(s_2,t_1) - C(0,t_2) \\ &= A(h_1^*(s_2), v_1^*(t_2)) - A(h_1^*(s_2), v_1^*(t_1)). \end{aligned}$$

Pero v_1^* es creciente por lo que $v_1^*(t_2) \geq v_1^*(t_1)$ y A es creciente, de donde $A(h_1^*(s_2), v_1^*(t_2)) \geq A(h_1^*(s_2), v_1^*(t_1))$. Similarmente se prueba que $V_{C'}([s_1,s_2] \times [0,t_2]) \geq 0$.

(v) C' tiene marginales superiores uniformes: se tiene que $h_1(1) = 1$ por lo que por el Lema 1 $A(1,y) = A(h_1^*(1), y)$ para toda y y análogamente $A(x,1) = A(x, v_1^*(t))$ para toda x, en particular, si $s,t \in I$, entonces, tomando $x = h_1^*(s)$ y $y = v_1^*(t)$,

$$\begin{aligned} C'(s,1) &= A(h_1^*(s), v_1^*(1)) = A(h_1^*(s), 1) = h_1(h_1^*(s)) = s, \\ C'(1,t) &= A(h_1^*(1), v_1^*(t)) = A(1, v_1^*(t)) = v_1(v_1^*(t)) = t. \end{aligned}$$

Además, para todo $x, t \in I$,

$$C'(h_1(x), v_1(y)) = A(h_1^*(h_1(x)), v_1^*(v_1(y))) = A(x,y),$$

por el Lema 2, existe una cópula C que coinicide en $S \times T$ con C', por lo tanto,

$$A(x,y) = C(h_1(x), v_1(y)) \ \forall \ (x,y) \in I^2.$$

$\square$

Notemos que C está únicamente determinada en $\mathcal{R}_{h_1} \times \mathcal{R}_{v_1}$. De hecho si una fución $A : I^2 \to I$ es conjuntamente continua entonces $\mathcal{R}_{h_1}^A = \mathcal{R}_{v_1}^A = I$, por lo tanto si $A \in \mathcal{A}_2$ es conjuntamente continua y cumple que ${h_1}^A(0) = {v_1}^A(0) = 0$, la cópula que asocia el Teorema 3 a A es única. Inversamente, como toda cópula es continua tenemos automáticamente el siguiente corolario.

Corolario 2. *Sea $A \in \mathcal{A}_2$, A es conjuntamente continua en I^2 si y sólo si sus marginales superiores son continuas.*

Aplicando el Teorema 1 podemos deducir también el siguiente corolario:

Corolario 3. *Sea $A \in \mathcal{A}_2$, para todo $(x,y) \in I$ se tiene que*

$$max({h_1}^A(x) + {v_1}^A(y) - 1, 0) \leq A(x,y) \leq min({h_1}^A(x), {v_1}^A(y)).$$

De hecho, es sencillo ver que $A_W(x,y) = max({h_1}^A(x) + {v_1}^A(y) - 1, 0) \in \mathcal{A}_2$, pero no se puede asegurar lo mismo de $A_M(x,y) = min({h_1}^A(x), {v_1}^A(y))$, pues $A_M(0,0)$ puede ser distinto de cero.

Ejemplo 3. *En el ejemplo 1, probamos que* $A : I^2 \to I$ *definida por* $A(x,y) = \frac{1}{4}max(3x+3y-2,0)$ *es una funcion de agragacion 2-creciente. Además sus marginales superiores están dadas por:*

$$h_1^A(x) = \frac{1}{4}max(3x+3-2,0) = \frac{1}{4}(3x+1),$$
$$v_1^A(y) = \frac{1}{4}max(3+3y-2,0) = \frac{1}{4}(3y+1).$$

Se tiene que $0 \in \mathcal{R}_{h_1^A} \cap \mathcal{R}_{v_1^A}$ *y*

$$u = \frac{1}{4}(3z+1) \text{ si y sólo si } z = \frac{1}{3}(4u-1).$$

Por lo que:

$$(h_1^A)^{-1}(\{s\}) = \frac{1}{3}(4s-1) \text{ y } (v_1^A)^{-1}(\{t\}) = \frac{1}{3}(4t-1).$$

Siguiendo la construcción del Teorema 3,

$$\begin{aligned} C(s,t) &= A\left(\frac{1}{3}(4s-1), \frac{1}{3}(4t-1)\right) \\ &= max(s+t-1,0) \\ &= W(s,t). \end{aligned}$$

Pero también $A(x,y) = C^*(h_1^A(x), v_1^A(y))$, *donde*

$$C^*(s,t) = \begin{cases} min(s, t-\frac{3}{4}), & si\ (s,t) \in [0,\frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4},1], \\ min(s-\frac{3}{4}, t), & si\ (s,t) \in [\frac{3}{4},1] \times [0,\frac{1}{4}], \\ W(s,t), & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Pues $\mathcal{R}_{h_1^A} = \mathcal{R}_{v_1^A} = [\frac{1}{4},1]$.

Conversamente, por medio de una cópula C y un par de funciones $f, g : I \to I$ podemos construir funciones de agregación 2-crecientes tales que sus marginales superiores coincidan en f y g mediante la siguiente proposición:

Proposición 4. *Sea* $C \in \mathcal{C}$ *y sean* $f, g : I \to I$ *funciones crecientes tales que* $f(1) = g(1) = 1$ *y* $C(f(0), g(0)) = 0$, *entonces*

$$A(x,y) = A_{C,f,g}(x,y) := C(f(x), g(y)).$$

es una función de agregación dos creciente con marginales superiores $h_1^A = f$ *y* $v_1^A = g$.

Demostración. Notemos primero que A es la composición de 3 funciones crecientes, C, f y g, por lo tanto A es creciente, más aún, A es 2-creciente, pues si $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ son tales que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ se tiene que $f(x_1), f(x_2), g(y_1), g(y_2) \in I$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ y $g(y_1) \leq g(y_2)$, por lo tanto, como C es 2-creciente, entonces:

$$V_A([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) = V_C([f(x_1), f(x_2)] \times [g(y_1), g(y_2)]) \geq 0.$$

Además, por definición $A(0,0) = C(f(0), g(0)) = 0$ y $A(1,1) = C(f(1), g(1)) = C(1,1) = 1$, entonces $A \in \mathcal{A}_2$. Finalmente, para cualquier par x, y en I

$$h_1^A(x) = A(x,1) = C(f(x), g(1)) = C(f(x), 1) = f(x),$$
$$v_1^A(y) = A(1,y) = C(f(1), g(y)) = C(1, g(y)) = g(y).$$

□

Corolario 4. *Sea $C \in \mathcal{C}$ y sean $f, g : I \to I$ funciones crecientes tales que $f(1) = g(1) = 1$ y $f(0) = 0$ o $g(0) = 0$, entonces*

$$A(x,y) = A_{C,f,g}(x,y) := C(f(x), g(y)).$$

es una función de agregación dos creciente con marginales superiores $h_1^A = f$ y $v_1^A = g$.

Demostración. Si $f(0) = 0$, entonces, $C(f(0), g(0)) = C(0, g(0)) = 0$ y obtenemos el resultado aplicando la Proposición 4. El otro caso es análogo. □

2.2. Funciones de agregación con marginales dadas.

Lema 3. *Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda := V_A(I^2) \geq 0$ y sea $A^v : I \to R$ dada por $A^v(x,y) := (1/\lambda)V_A([0,x] \times [0,y])$ entonces A^v es una función de agregación 2-creciente con aniquilador 0 si y sólo si A es 2-creciente.*

Demostración. A^v tiene aniquilador 0 pues:

$$A^v(x,0) = (1/\lambda)V_A([0,x] \times [0,0]) = 0 \ \forall x \in I,$$
$$A^v(0,y) = (1/\lambda)V_A([0,0] \times [0,y]) = 0 \ \forall y \in I.$$

Veamos que $A^v \in \mathcal{A}_2$ si y sólo si $A \in \mathcal{A}_2$.

(i) Claramente $A(0,0) = (1/\lambda)0 = 0$ y $A(1,1) = (1/\lambda)\lambda = 1$.

(ii) Supongamos que A es 2-creciente. Sean $(x_1, y), (x_2, y) \in I^2$ tal que $x_1 \leq x_2$, entonces,

$$\begin{aligned} A^v(x_2, y) - A^v(x_1, y) &= (1/\lambda)[A(x_2, y) - A(x_2, 0) - A(x_1, y) + A(x_1, 0)] \\ &= (1/\lambda)V_A([x_1, x_2] \times [0, y]) \geq 0 \end{aligned}$$

Análogamente si $(x, y_1), (x, y_2) \in I^2$ son tales que $y_1 \leq y_2$, entonces, $A^v(x, y_2) - A^v(x, y_1) \geq 0$

(iii) Como $A(0,0) = 0$ entonces $A^v(x, y) = (1/\lambda)(A(x, y) - (1/\lambda)(h_0{}^A(x) + (v_0{}^A(y))$, y por definición, la función $(x, y) \mapsto (1/\lambda)(h_0{}^A(x) + (v_0{}^A(y))$ es modular, por lo tanto, para cualquier rectángulo R contenido en I^2 se tiene que $V_{A^v} = 1/\lambda V_A(R)$. Así pues, A_v es 2-creciente si y sólo si A lo es.

□

Teorema 4. *Sea $A \in \mathcal{A}_2$ tal que $\lambda := V_A(I^2) \geq 0$, entonces existe una cópula C tal que*

$$A(x, y) = \lambda C(\phi_1(x), \phi_2(y)) + h_0^A(x) + v_0^A(y).$$

Con $\phi_1, \phi_2 : I \to I$ dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &:= (1/\lambda)(h_1^A(x) - h_0^A(x) - h_1^A(0), \\ \phi_2(y) &:= (1/\lambda)(v_1^A(y) - v_0^A(y) - v_1^A(0). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}_2$ con $\lambda \geq 0$, por el Lema 3 $A^v(x, y) := (1/\lambda)V_A([0, x] \times [0, y]) \in \mathcal{A}_2$ y tiene aniquilador 0, por lo tanto, por el Teorema 3, existe una cópula C tal que $A^v(x, y) = C(h_1^{A^v}(x), v_1^{A^v}(y))$, pero,

$$\begin{aligned} h_1^{A^v}(x) &= (1/\lambda)(h_1^A(x) - h_0^A(x) - h_1^A(0) = \phi_1(x), \\ v_1^{A^v}(x) &= (1/\lambda)(v_1^A(y) - v_0^A(y) - v_1^A(0) = \phi_2(x). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \lambda A^v(x, y) + h_0^A(x) + v_0^A(y) \\ &= \lambda C(\phi_1(x), \phi_2(y)) + h_0^A(x) + v_0^A(y). \end{aligned}$$

□

Notemos que con el Teorema 3 y el Teorema 4, dada una función de agregación 2-creciente, podemos asociarle dos cópulas, cuando la función tenga aniquilador 0 las cópulas serán iguales.

Ejemplo 4. *Sea* $A : I^2 \to I$ *dada por* $A(x,y) = \frac{1}{4}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$, *trivialmente se tiene que* $A(0,0) = 0$, $A(1,1) = 1$ *y* A *es creciente, por lo que* $A \in \mathcal{A}$. *Más aún,* $A \in \mathcal{A}_2$, *pues es fácil ver que para todo rectángulo* $R = (x_1,y_1)\times(x_2,y_2)$ *con* $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$ *y* $0 \le y_1 \le y_2 \le 1$ *se tiene que:*

$$V_A(R) = \frac{1}{2}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1}) \ge 0$$

Además, claramente A *no tiene aniquilador 0 y* $\lambda = V_A(I^2) = \frac{1}{2} > 0$. *Así pues, con los Teoremas 3 y 4 es posible encontrar 2 cópulas distintas asociadas a dicha función. Se tiene que:*

$$h_0^A(x) = \frac{x}{4},\ v_0^A(y) = \frac{y}{4},\ h_1^A(x) = \frac{1}{4}(\sqrt{x}+1)^2 \text{ y } v_1^A(y) = \frac{1}{4}(\sqrt{y}+1)^2.$$

Además,

$$u = \frac{1}{4}(\sqrt{z}+1)^2 \text{ si y sólo si } z = (2\sqrt{u}-1)^2.$$

Por lo que $(h_1^A)^{-1}(\{s\}) = (2\sqrt{s}-1)^2$ *y* $(v_1^A)^{-1}(\{t\}) = (2\sqrt{t}-1)^2$. *Siguiendo la construcción del Teorema 3,*

$$C_1'(s,t) = (\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2.$$

Y podemos extender C_1' *a la cópula*

$$C_1(s,t) = (max(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1,0))^2.$$

Por otro lado, por el Teorema 4,

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \lambda C_2(\phi_1(x),\phi_2(y)) + h_0^A(x) + v_0^A(y) \\ &= \frac{1}{2}C_2(\phi_1(x),\phi_2(y)) + \frac{x}{4} + \frac{y}{4} \end{aligned}$$

Con ϕ_1, ϕ_2 *dadas por*

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= (1/\lambda)(h_1^A(x) - h_0^A(x) - h_1^A(0)) \\ &= 2\left(\frac{x+2\sqrt{x}+1-x+1}{4}\right) \\ &= \sqrt{x} \\ \phi_2(y) &= (1/\lambda)(v_1(y) - v_0(y) - v_1(0) \\ &= 2\left(\frac{y+2\sqrt{y}+1-y+1}{4}\right) \\ &= \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si C_2 es la cópula producto, entonces se cumple la igualdad deseada.

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \frac{1}{4}(2\sqrt{xy}+x+y) \\ &= \frac{1}{2}C_2(\sqrt{x},\sqrt{y})+\frac{x}{4}+\frac{y}{4}. \end{aligned}$$

Proposición 5. *Sea $M=\{h_0,h_1,v_0,v_1\}$ un conjunto de marginales tal que $h_0(0)=v_0(0)=0$, $h_1(1)=v_1(1)=1$ y $\lambda=h_1(1)-h_0(1)-h_1(0)=v_1(1)-v_0(1)-v_1(0)\geq 0$, entonces, para toda cópula C la función $A:I^2\to I$ definida por:*

$$A(x,y)=\lambda C(\phi_1(x),\phi_2(y))+h_0(x)+v_0(y).$$

Con $\phi_1,\phi_2:I\to I$ dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &:= (1/\lambda)(h_1(x)-h_0(x)-h_1(0), \\ \phi_2(y) &:= (1/\lambda)(v_1(y)-v_0(y)-v_1(0). \end{aligned}$$

pertenece a $\mathcal{A}_2^M$.

Demostración. Veamos primero que $A\in\mathcal{A}_2$

(i) $\phi_1(1)=(1/\lambda)\lambda=1=\phi_2(1)$ y $\phi_1(0)=(1/\lambda)0=0=\phi_2(0)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} A(0,0) &= h_0(0)+v_0(0)=0, \\ A(1,1) &= \lambda+h_0(1)+v_0(1)=h_1(1)-h_1(0)+v_0(1)=1. \end{aligned}$$

(ii) Sabemos por la Definición 6 que para todas $x_1,x_2,y_1,y_2\in I$ tales que $x_1\leq x_2$ y $y_1\leq y_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} h_1(x_2)-h_0(x_2) &\geq h_1(x_1)-h_0(x_1)\geq h_1(0), \\ v_1(y_2)-v_0(y_2) &\geq v_1(y_1)-v_0(y_2)\geq v_1(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ_1 y ϕ_2 son funciones crecientes, además h_0 y v_0 son crecientes, $\lambda\geq 0$ y C es también creciente, por lo que A es creciente.

(iii) Como C es 2-creciente y el mapeo $(x,y)\mapsto h_0(x)+v_0(y)$ es modular, se sigue que A es 2-creciente.

Ahora,

$$\begin{aligned} &A(x,0)=h_0(x)+v_0(0)=h_0(x), \\ &A(x,1)=\lambda\phi_1(x)+h_0(x)+v_0(1)=h_1(x)-h_0(x)-h_1(0)+h_0(x)+v_0(1)=h_1(x). \end{aligned}$$

Y similarmente $A(0,y)=v_0(y)$ y $A(1,y)=v_1(y)$, por lo que $A\in\mathcal{A}_2^M$. □

Proposición 6. *Sea $A \in \mathcal{A}_2$ con conjunto de marginales $M = \{h_0^A, h_1^A, v_0^A, v_1^A\}$ y tal que $\lambda := V_A(I^2) \geq 0$, las funciones $A_*, A^* : I^2 \to I$ definidas por:*

$$A_*(x,y) := max(h_1^A(x) + v_1^A(y) - 1, h_0^A(x) + v_0^A(y)),$$
$$A^*(x,y) := min(h_1^A(x) + v_0^A(y) - h_1^A(0), h_0^A(x) + v_1^A(y) - h_0^A(1)).$$

pertenecen a $\mathcal{A}_2^M$ y para toda $\bar{A} \in \mathcal{A}_2$ se cumple que para cualquier $x, y \in I$

$$A_*(x,y) \leq \bar{A}(x,y) \leq A^*(x,y).$$

Demostración. Notemos que si A_* puede representarse como en la Proposición 5 para $C = W$ y A^* se puede representar para $C = M$, entonces tenemos automáticamente que $A_*, A^* \in \mathcal{A}_2^M$ y dada $\bar{A} \in \mathcal{A}_2$ por el Teorema 4 existe una cópula C tal que $\bar{A}(x,y) = \lambda C(\phi_1(x), \phi_2(y)) + h_0^A(x) + v_0^A(y)$, por lo tanto, $A_*(x,y) \leq \bar{A}(x,y) \leq A^*(x,y)$ si y sólo si $W(\phi_1(x), \phi_2(y)) \leq C(\phi_1(x), \phi_2(y)) \leq M(\phi_1(x), \phi_2(y))$, lo cuál es cierto por el Teorema 1. Veremos que:

$$A_*(x,y) = \lambda W(\phi_1(x), \phi_2(y)) + h_0^A(x) + v_0^A(y).$$

Con $\phi_1, \phi_2 : I \to I$ dadas por

$$\phi_1(x) := (1/\lambda)(h_1^A(x) - h_0^A(x) - h_1^A(0),$$
$$\phi_2(y) := (1/\lambda)(v_1^A(y) - v_0^A(y) - v_1^A(0).$$

El caso para A^* se demuestra de forma análoga.

$$\begin{aligned}
&\lambda W(\phi_1(x), \phi_2(y)) \\
&\quad = max(\lambda\phi_1(x) + \lambda\phi_2(y) - \lambda, 0) \\
&\quad = max(h_1^A(x) - h_0^A(x) - h_1^A(0) + v_1^A(y) - v_0^A(y) - v_1^A(0) - 1 + h_1^A(0) + v_1^A(0), 0) \\
&\quad = max(h_1^A(x) - h_0^A(x) + v_1^A(y) - v_0^A(y) - 1, 0) \\
&\quad = max(h_1^A(x) + v_1^A(y) - 1, h_0^A(x) + v_0^A(y)) - h_0^A(x) - v_0^A(y)
\end{aligned}$$

Despejando obtenemos que:

$$\lambda W(\phi_1(x), \phi_2(y)) + h_0^A(x) + v_0^A(y) = A_*(x,y)$$

□

3

Conclusiones

Se desarrollaron 2 formas distintas de representar funciones de agregación 2-crecientes, la primera es en términos de sus marginales superiores y una cópula y la segunda es en términos de sus marginales tanto superiores como inferiores y una cópula (no necesariamente la misma que en la primera representación). Éstas representaciones también son útiles para proveer cotas superiores e inferiores para clases de funciones de agregación con un conjunto común de marginales.

La eliminación de la estructura marginal ayuda a comprender la dependencia entre los argumentos de la función con mayor eficacia.

El estudio de los resultados presentados en el caso n-dimensional es claramente un problema de interés.

Bibliografía

[1] F. Durante, S. Saminger-Platz y P. Sarkoci, On representations of 2-increasing binary aggregation functions, *Information Sciences*, **15**, [2008], 4534-4541.

[2] R. Nelsen, *Curso intermedio de probabilidad*, segunda edición, New York:Springer-Verlag [2007].

[3] A. Gut *Probability: A Graduate course*, primera edicion, Springer [2005].