UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Dinámica en Hiperespacios.

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS.

P R E S E N T A

Ártico Ramírez Urrutia.

DIRECTOR DE LA TESIS: Dr. Gerardo Acosta García.

MÉXICO, D.F. 2012

Dinámica en Hiperespacios

Índice general

Prefacio

El presente trabajo se enmarca en un área de la Topología llamada la Teoría de los Hiperespacios y, a su vez, tiene conexiones con la Teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos. La Teoría de Hiperespacios es muy amigable, pues no requiere de un manejo muy sofisticado de topología, basta con tener claro los conocimientos generales de este tema para entender la Teoría de los Hiperespacios.

Una de las características principales que permea a lo largo de esta tesis es la idea de demostrar resultados con la menor cantidad de hipótesis posible, es decir, sin depender de la métrica, o de la compacidad del espacio, la conexidad, etc. De allí que algunos resultados que ya se han probado anteriormente se presentan y demuestran ahora en una nueva versión, incluso se llegaron a obtener resultados nuevos. Como ejemplo de esto tenemos el Teorema 2.54, el cual afirma que si X es T_1, $f\colon X \to X$ es continua y cerrada y $n \in \mathbb{N}$, entonces f es exacta si y solo si $F_n(f)$ es exacta. Pero, sin más preámbulos veamos los temas que se abarcan en cada uno de los capítulos.

En el primer capítulo veremos las definiciones importantes y los resultados que son esenciales para el resto del trabajo. Se presentan en esta primera parte los conceptos básicos de los cuales debemos iniciar. Veremos algunas propiedades importantes junto con sus respectivas referencias. Todo esto dará pie a construir los diferentes hiperespacios que se estudiarán en adelante, así como las funciones inducidas y sus propiedades básicas. Es importante mencionar en este momento que existen diferentes tipos de topologías que se le pueden asignar a los hiperespacios. Para esta tesis se eligió trabajar con la Topología de Vietoris por ser la topología con la que más fuentes de información se contaba al momento, quizá por ser la topología más importante que se estudia en los hiperespacios y que, cabe mencionar, es equivalente a la topología generada por la métrica de Hausdorff, cuando el espacio X es métrico.

El Capítulo 2 se centra en estudiar el concepto de transitividad. La transitividad se puede definir en dos formas diferentes; una desde la perspectiva topológica y la otra desde un punto de vista más apegado a los sistemas dinámicos, las orbitas densas. Veremos cómo demostrando una serie de resultados podremos concluir que en el caso de los espacios métricos, compactos y sin puntos aislados, tener puntos con órbitas densas y ser transitivo, desde el punto de vista topológico, son equivalentes. Además de las órbitas también se definirán los ω-conjuntos. Para estos conjuntos se demostrará que cuando X es métrico y compacto y $f\colon X \to X$ continua, entonces la transitividad de f equivale a pedir que $\omega(x, f) = X$, para algún $x \in X$. Otros conceptos derivados del análisis de la transitividad de funciones aparecen estudiados aquí, tal es el caso de la transitividad total, la mezclación débil y la exactitud de funciones. Estas dos últimas logrando ser equivalentes entre espacios e hiperespacios bajos ciertas condiciones.

En la última parte del Capítulo 2 se presentarán una serie de espacios que, entre otras cosas, nos mostrarán cómo la transitividad de las funciones inducidas implica la transitividad de las funciones originales, pero no al revés.

En el Capítulo 3 se estudiará la transitividad de las funciones continuas en los continuos (espacios métricos, compactos y conexos). El resultado más importante de este capítulo aparece enunciado en el Teorema 3.12 y nos dice que, cuando X es un continuo con un arco libre y $f\colon X \to X$ es una función continua, la función inducida $C(f) : C(X) \to C(X)$ no puede ser transitiva. Este resultado nos ofrece entonces un buen criterio para descartar la posibilidad de que las funciones continuas, en determinados espacios continuos, tengan funciones inducidas transitivas en el hiperespacio de los subcontinuos.

En la última parte de este capítulo se exhibe un ejemplo de un continuo Q y un homeomorfismo transitivo $\sigma\colon Q \to Q$ tal que tanto $C(\sigma)$ como 2^{σ} resultan ser transitivos. Dicho ejemplo nos mostrará que existe por lo menos un continuo X con una función continua $f\colon X \to X$ transitiva cuya inducida $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ también es transitiva, dándole sentido al Teorema 3.12.

Dentro del cuarto y último capítulo de la tesis se trabajó con el concepto de densidad de puntos periódicos, que junto con la transitividad definen caos desde el puntos de vista de Devaney. El resultado inmediato que se obtiene aparece en el Teorema 4.6, enunciando que para los espacios métricos X y las funciones continuas $f\colon X \to X$, la densidad de puntos periódicos en X implica la densidad de puntos periódicos en $CL(X)$. El regreso de este resultado resulta cierto cuando X es un árbol y este hecho hace suponer que si X es un continuo lo mismo podría ocurrir, sin embargo, veremos que en el continuo $K_{\{M\}}$, con el que se trabaja gran parte del capítulo, existe una función continua G que no genera densidad de puntos periódicos en $K_{\{M\}}$ pero que en $2^{K_{\{M\}}}$ se tiene densidad de puntos periódicos bajo 2^G.

Capítulo 1

Resultados Iniciales

1.1. Introducción

Comenzamos el presente capítulo con una serie de definiciones y resultados, propios de la Topología General, que usaremos a lo largo del trabajo.

Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, utilizaremos los símbolos $\mathrm{Int}_X(A)$, $\mathrm{Cl}_X(A)$ y $\mathrm{Bd}_X(A)$, para denotar el interior, la cerradura y la frontera de A en X, respectivamente. Si el contexto es lo suficientemente claro, también usaremos el símbolo $\overline{A}$ para denotar a la cerradura de A en X. La cardinalidad de un conjunto A la denotaremos por $|A|$, y el diámetro de A, por diám(A), en el caso en que X sea un espacio métrico.

En más de una ocasión, para probar que dos conjuntos A y B son iguales, hacemos ver que se cumplen las siguientes condiciones:

1) de $A \neq \emptyset$, probamos que $B \neq \emptyset$ y que $A \subset B$;

2) de $B \neq \emptyset$, probamos que $A \neq \emptyset$ y que $B \subset A$.

En efecto, de 1) se tiene que $A \neq \emptyset$ implica $B \neq \emptyset$. Entonces, por contrapositivo, $B = \emptyset$ implica $A = \emptyset$. De manera similar, de 2), $A = \emptyset$, implica $B = \emptyset$. Entonces los conjuntos A y B son ambos vacíos o ambos no vacíos. Más aún, si A y B son no vacíos, por 1) y 2), son iguales.

A menos que digamos explícitamente lo contrario, durante todo este trabajo, la palabra *espacio* significa espacio topológico. Un resultado que será muy usado es el siguiente.

Teorema 1.1. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio Hausdorff. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

La demostración de este teorema puede verse en [17, Proposición 2.6, p. 63].

1.2. Continuos y Puntos Fijos

En la presente sección veremos la noción de continuo, así como la de arco. Estudiaremos además un caso especial de arco en un continuo y, por último, presentaremos una serie de resultados que garantizan la existencia de un punto fijo para una función definida entre arcos.

Definición 1.2. *Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subset X$ es un **arco en** X si existe un homeomorfismo $\phi\colon [0,1] \to A$. Si $\phi(0) = r$ y $\phi(1) = s$, entonces decimos que A es un **arco en** X **con extremos** r **y** s y escribimos $A = [r, s]$.*

Si A es un arco en X con extremos r y s, también solemos decir que A es un arco en X de r a s. Recordemos que un espacio X es *degenerado* si posee solamente un elemento. En caso contrario, decimos que X es *no degenerado*. Por definición, un arco en X es un subconjunto no degenerado de X que, además, es compacto y conexo (pues dichas propiedades son preservadas bajo funciones continuas).

Supongamos que A es un arco en X, con extremos r y s. Entonces $A = [r, s]$ y existe un homeomorfismo $f\colon [0,1] \to A$ tal que $f(0) = r$ y $f(1) = s$. Dados $a_1, a_2 \in A$ existen $t_1, t_2 \in [0,1]$ tales que $f(t_1) = a_1$ y $f(t_2) = a_2$. Como f es inyectiva, t_1 y t_2 se determinan de manera única. Decimos que

$$a_1 \preceq a_2 \quad \text{si y sólo si} \quad t_1 \leq t_2.$$

Entonces $r \preceq s$ y, como es fácil mostrar, $\preceq$ es un orden parcial en A (es decir, reflexiva, antisimétrica y transitiva). Definimos ahora $a_1 \prec a_2$ si $a_1 \preceq a_2$ y $a_1 \neq a_2$. Nos referiremos a $\preceq$ como el *orden natural en A de r a s.*

En un espacio topológico algunos arcos son especiales, como se indica en la siguiente definición.

Definición 1.3. *Sean X un espacio topológico y A un arco en X con extremos p y q. Diremos que A es un **arco libre** en X si el conjunto $A - \{p, q\}$ es abierto en X.*

A lo largo de este trabajo, utilizaremos espacios que satisfacen las condiciones indicadas en la siguiente definición.

Definición 1.4. *Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.*

Notemos que los arcos son ejemplos de continuos.

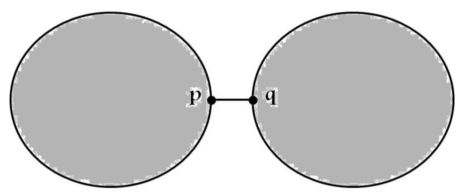

Figura 1.1: Un Continuo con un Arco Libre.

El espacio presentado en la Figura 1.1, es un ejemplo de un continuo con un arco libre, a saber el arco con extremos p y q. Por otra parte, el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ es un continuo que contiene arcos pero no arcos libres.

Si X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces $p \in X$ es un *punto fijo* de f si $f(p) = p$. Terminamos la presente sección con una serie de resultados, que involucran la existencia de un punto fijo de una función continua, definida entre intervalos cerrados de la recta real.

Teorema 1.5. *Sea $[r,s] \subset [0,1]$ y $f\colon [r,s] \to [0,1]$ una función continua con $f(r) = 0$ y $f(s) = 1$. Entonces existe $t \in [r,s]$ tal que $f(t) = t$.*

Demostración. Podemos suponer que $r \neq 0$ y $s \neq 1$ pues, si no, tendríamos demostrado el resultado. Definimos la función continua $h\colon [r,s] \to \mathbb{R}$ como $h(x) = f(x) - x$, para cada $x \in [r,s]$. Observemos que

$$h(r) = f(r) - r = 0 - r = -r < 0 \quad \text{y} \quad h(s) = f(s) - s = 1 - s > 0.$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $t \in (r,s)$ tal que $h(t) = 0$. Luego $f(t) - t = h(t) = 0$, así que $f(t) = t$. $\square$

Corolario 1.6. *Sean $[c, d]$ y $[a, b]$ dos arcos tales que $[c, d] \subset [a, b]$ y sea $f\colon [c, d] \to [a, b]$ una función continua con $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Entonces existe $e \in [c, d]$ tal que $f(e) = e$.*

Demostración. Por definición de arco, existe un homeomorfismo $\phi\colon [0, 1] \to [a, b]$ tal que $\phi(0) = a$ y $\phi(1) = b$. Como $[c, d] \subset [a, b]$ podemos suponer, sin perder generalidad, que en el orden natural $\preceq$ en $[a, b]$ de a a b, sucede que $a \preceq c \prec d \preceq b$. Tomemos $r, s \in [0, 1]$ tales que $r < s$, $\phi(r) = c$ y $\phi(s) = d$. Luego

$$\phi_{|_{[r,s]}}\colon [r, s] \to [c, d]$$

es un homeomorfismo. Definimos $\overline{f}\colon [r, s] \to [0, 1]$ como $\overline{f} = \phi^{-1} \circ f \circ \phi_{|_{[r,s]}}$. El siguiente diagrama conmutativo ilustra de manera clara la situación que tenemos.

$$\begin{tikzcd}
{[c,d]} \arrow[r, "f"] & {[a,b]} \\
{[r,s]} \arrow[u, "\phi_{|_{[r,s]}}"] \arrow[r, "\overline{f}"'] & {[0,1]} \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que $[r, s] \subset [0, 1]$. Además $\overline{f}$ es una función continua con

$$\overline{f}(r) = \left(\phi^{-1} \circ f \circ \phi_{|_{[r,s]}}\right)(r) = \phi^{-1}(f(\phi(r))) = \phi^{-1}(f(c)) = \phi^{-1}(a) = 0$$

y

$$\overline{f}(s) = \left(\phi^{-1} \circ f \circ \phi_{|_{[r,s]}}\right)(s) = \phi^{-1}(f(\phi(s))) = \phi^{-1}(f(d)) = \phi^{-1}(b) = 1.$$

Por el Teorema 1.5, existe $t \in [r, s]$ tal que $\overline{f}(t) = t$. Entonces, si $e = \phi(t)$ tenemos que e es un elemento de $[c, d]$ tal que

$$f(e) = (f \circ \phi)(t) = (\phi \circ \overline{f})(t) = \phi\left(\overline{f}(t)\right) = \phi(t) = e.$$

Esto termina la demostración. $\square$

Teorema 1.7. *Si $[r, s] \subset [0, 1]$ y $f\colon [r, s] \to [0, 1]$ es una función continua tal que $f(r) = 1$ y $f(s) = 0$. Entonces existe $z \in [r, s]$ tal que $f(z) = z$.*

Demostración. Es claro de nuestra hipótesis que $r \neq 1$ y $s \neq 0$. Consideremos la función continua $h\colon [r, s] \to \mathbb{R}$ definida como $h(x) = x - f(x)$, para cada $x \in [r, s]$. Como

$$h(r) = r - f(r) = r - 1 < 0 \quad \text{y} \quad h(s) = s - f(s) = s > 0,$$

por el teorema del valor intermedio existe $z \in (r, s)$ tal que $h(z) = 0$. Luego $z - f(z) = 0$, con lo que $z = f(z)$. □

Con un argumento análogo a la demostración del Corolario 1.6, se obtiene un nuevo corolario a partir del Teorema 1.7.

Corolario 1.8. *Sean $[c, d]$ y $[a, b]$ dos arcos tales que $[c, d] \subset [a, b]$ y sea $f\colon [c, d] \to [a, b]$ una función continua con $f(c) = b$ y $f(d) = a$. Entonces existe $c \in [c, d]$ tal que $f(c) = c$.*

Estos resultados son versiones distintas del teorema del valor intermedio. Una versión que en algún momento nos será útil y cuya demostración es técnicamente la misma que hemos visto, es el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Sean $[a, b] \subset [0, 1]$ y $f\colon [a, b] \to [0, 1]$ una función continua tal que $f(a) \geq a$ y $f(b) \leq b$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

1.3. Límites inversos

Esta sección es pequeña porque, en esencia, podríamos decir que requerimos saber solamente lo que es un límite inverso y qué propiedades tienen, que nos permiten construir continuos, a partir de una sucesión dada de continuos. Las definiciones y los resultados que a continuación aparecen, se encuentran detallados en [21, Capítulo 2]. Primero, debemos recordar el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en [21, Teorema 2.1].

Teorema 1.10. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de continuos. Entonces, el producto*

$$X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$

con la topología producto, es un continuo.

Lo segundo que necesitamos es definir un tipo de sucesión especial.

Definición 1.11. *Una* ***sucesión inversa*** *es una sucesión de la forma $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde X_i es un espacio y $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es una función continua, para cada $i \geq 1$.*

En ocasiones, las sucesiones inversas suelen representarse mediante el siguiente diagrama.

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} \cdots \xleftarrow{f_{i-1}} X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \xleftarrow{f_{i+1}} \cdots .$$

Definición 1.12. *Dada una sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, definimos el **límite inverso** de la sucesión, como el subespacio del producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ dado por:*

$$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \colon f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \geq 1\right\}.$$

Se puede hablar sobre varias características de los límites inversos, sin embargo, el resultado importante que requerimos conocer sobre ellos dice lo siguiente (ver [21, Teorema 2.4]).

Teorema 1.13. *El límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo.*

1.4. Hiperespacios

En esta sección veremos algunas definiciones y resultados conocidos de la Teoría de Hiperespacios de un espacio topológico. Entre otras cosas, veremos que toda función continua y cerrada, definida entre los espacios topológicos X y Y induce, de manera natural, funciones continuas entre los hiperespacios de X y Y. Esto será vital en el siguiente capítulo.

Empezaremos por definir los hiperespacios que estudiaremos y la notación que usaremos.

Definición 1.14. *Sea X un espacio topológico. Definimos los siguientes subconjuntos del conjunto potencia de X:*

1) $CL(X) = \{A \subseteq X \colon A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\}$;

2) $2^X = \{A \in CL(X) \colon A \text{ es compacto}\}$;

3) $CLC(X) = \{A \in CL(X) \colon A \text{ es conexo}\}$;

4) $C(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\}$;

5) $F_n(X) = \{A \subset X \colon 1 \leq |A| \leq n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que $2^X, CLC(X)$ y $C(X)$ son subconjuntos de $CL(X)$. Por tanto si a $CL(X)$ le damos una topología, podemos considerar que la topología en los respectivos conjuntos $2^X, CLC(X)$ y $C(X)$ es la de subespacio. Notemos que cuando X es compacto, se tiene que $2^X = CL(X)$ y $C(X) = CLC(X)$. Además, si X es T_1, $F_n(X) \subset CL(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así pues, cuando X es T_1 y $CL(X)$ tiene una topología, podemos pensar que cada conjunto $F_n(X)$ posee la topología de subespacio.

1.4.1. La topología de Vietoris

Para darle una topología a $CL(X)$, consideramos primero los conjuntos que aparecen en la siguiente definición.

Definición 1.15. *Dada $U \subseteq X$, definimos:*

1) $\Gamma(U) = \{A \in CL(X)\colon A \subseteq U\}$;

2) $\Omega(U) = \{A \in CL(X)\colon A \cap U \neq \emptyset\}$;

3) *Si $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$, definimos el conjunto $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$, como*

$$\left\{A \in CL(X)\colon A \in \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \text{ y } A \in \Omega(U_i),\right.$$

$$\left.\text{para toda } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}.$$

A los conjuntos del punto 3) se les conoce como *vietóricos de X*. En [22, Definición 3.2, p. 101] el conjunto $\Gamma(U)$ se denota por $e(U)$ y se llama la *extensión de A en $CL(X)$*. El siguiente resultado es fácil de probar, tomando en cuenta que nuestro espacio es T_1.

Teorema 1.16. *Sean X un espacio T_1, $U \subset X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$. Entonces:*

1) $\Gamma(U) = \emptyset$ *si y sólo si* $U = \emptyset$;

2) $\Omega(U) = \emptyset$ *si y sólo si* $U = \emptyset$;

3) $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \emptyset$ *si y sólo si* $U_i = \emptyset$, *para alguna* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

El objetivo de la presente sección es construir, mediante los conjuntos de la definición anterior, una topología para las familias dadas en la Definición 1.14. A continuación veremos unas propiedades de los vietóricos, que nos servirán para construir dicha topología.

Lema 1.17. *Sea X un espacio topológico. Tomemos $W \subset X$ y dos familias $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{V_j\}_{j=1}^{m}$ de subconjuntos de X. Entonces se tiene lo siguiente:*

1) $\Gamma(W) = \langle W\rangle$;

2) $\Omega(W) = \langle X, W\rangle$;

3) *si* $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ *y* $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_i$, *entonces:*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle;$$

4) *si* $U, V \subset X$, *entonces* $\Gamma(U \cap V) = \Gamma(U) \cap \Gamma(V)$.

Demostración. Para ver 1), tomemos $A \in \Gamma(W)$. Entonces $A \in CL(X)$ y $A \subset W$. Luego $A \subset W$ y $A \cap W \neq \emptyset$, así que $A \in \langle W \rangle$. Esto prueba que $\Gamma(W) \subset \langle W \rangle$. Para ver la otra contención, tomemos ahora $A \in \langle W \rangle$. Entonces $A \in CL(X)$ y $A \subset W$, por lo que $A \in \Gamma(W)$. Así $\langle W \rangle \subset \Gamma(W)$ y 1) se cumple.

Para ver 2) tomemos primero $A \in \Omega(W)$. Entonces $A \in CL(X)$ y $A \cap W \neq \emptyset$. Luego $A \subset X = X \cup W$, $A \cap X \neq \emptyset$ y $A \cap W \neq \emptyset$, de donde $A \in \langle X, W \rangle$. Esto prueba que $\Omega(W) \subset \langle X, W \rangle$. Para ver la otra contención, tomemos $A \in \langle X, W \rangle$ Entonces $A \in CL(X)$ y $A \cap W \neq \emptyset$, por lo que $A \in \Omega(W)$. Así $\langle X, W \rangle \subset \Omega(W)$ y 2) se cumple.

Para probar 3) notemos primero que

$$\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cap V = U \cap V$$

y

$$\bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U) = \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_j \right) \cap U = V \cap U.$$

Por tanto

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U) \right) = U \cap V.$$

Supongamos ahora que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \neq \emptyset$, y tomemos un elemento

$$K \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle.$$

Entonces $K \in CL(X)$, $K \subset U$, $K \subset V$, $K \cap U_i \neq \emptyset$ y $K \cap V_j \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Así

$$K \subset U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U) \right).$$

Además, como $K \subset V$ y $K \cap U_i \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq K \cap U_i \subset K \cap (V \cap U_i)$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. De forma similar se tiene que $\emptyset \neq K \cap (V_j \cap U)$, para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto

$$K \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle.$$

Esto prueba que $\langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle \neq \emptyset$ y, además, que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \subset \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle.$$

Supongamos ahora que $\langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle \neq \emptyset$, y tomemos un elemento

$$K \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle.$$

Entonces $K \in CL(X)$ y $\emptyset \neq K \cap (V \cap U_i) \subset K \cap U_i$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. También tenemos que $\emptyset \neq K \cap V_j$, para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por otra parte, sabemos que

$$K \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U) \right) = U \cap V.$$

Por tanto $K \subset U$ y $K \subset V$. Esto muestra que

$$K \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle.$$

Con esto probamos que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \neq \emptyset$ y, además, que

$$\langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle.$$

Esto prueba 3). La prueba de 4) es una consecuencia inmediata de 3). También se deduce de las siguientes equivalencias.

$$\begin{aligned} K \in \Gamma(U \cap V) \Leftrightarrow K \subset U \cap V \Leftrightarrow K \subset U \quad y \quad K \subset V \\ \Leftrightarrow K \in \Gamma(U) \text{ y } K \in \Gamma(V) \Leftrightarrow K \in \Gamma(U) \cap \Gamma(V). \end{aligned}$$

$\square$

Los puntos 1) y 2) del lema anterior, nos dicen que para cada $W \subset X$, los conjuntos $\Gamma(W)$ y $\Omega(W)$ son vietóricos de X.

Ahora, por la parte 1) del lema anterior, $\langle X\rangle = \Gamma(X) = CL(X)$ y, por la parte 3), la intersección de dos vietóricos de X es, de nuevo, un vietórico de X. Por tanto la familia

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \colon n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, U_2 \ldots, U_n \text{ abiertos en } X\} \tag{1.4.1}$$

es una base para una topología τ_V en $CL(X)$. Si U es un abierto en X entonces, por las partes 1) y 2) del lema anterior, $\Gamma(U)$ y $\Omega(U)$ son elementos de $\mathcal{B}$. Además si $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son abiertos en X, entonces

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \Omega(U_i)\right)$$

es una intersección finita de elementos de la subfamilia

$$\mathcal{S} = \{\Gamma(U) \colon U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\Omega(U) \colon U \text{ es abierto en } X\} \tag{1.4.2}$$

de $\mathcal{B}$. Por tanto $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología τ_V. Así pues, cada elemento de τ_V se puede escribir como una unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Definición 1.18. *Si X es un espacio topológico, entonces la **topología de Vietoris** en $CL(X)$ es la topología τ_V que tiene por base a la familia* (1.4.1). *Con dicha topología decimos que $CL(X)$ es un **hiperespacio de** X. También son hiperespacios de X los conjuntos $2^X, CLC(X)$ y $C(X)$, como subespacios de $CL(X)$. Si X es T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$, como subespacio de $CL(X)$, es también un hiperespacio de X.*

Sea X un espacio T_1. Si U es un abierto no vacío en X entonces, por el Teorema 1.16, $\Gamma(U)$ y $\Omega(U)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $CL(X)$. Más aún, si $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de X, entonces

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$$

es un subconjunto abierto y no vacío de $CL(X)$.

Notemos que si $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ es un elemento básico de la topología de $CL(X)$, es decir un elemento de la familia (1.4.1), entonces

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap 2^X, \quad \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap CLC(X)$$

y $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap C(X)$ son elementos básicos de la topología de 2^X, $CLC(X)$ y $C(X)$, respectivamente. Para $F_n(X)$, tenemos el siguiente resultado, que será de utilidad más adelante.

Teorema 1.19. *Sean X un espacio T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Entonces la familia*

$$\mathcal{B}_n = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap F_n(X) \colon \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de $F_n(X)$.

Demostración. Como $F_n(X)$ es un subespacio de $CL(X)$, la familia

$$\mathcal{C}_n = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X) \colon m \in \mathbb{N} \text{ y } \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de $F_n(X)$. Basta entonces con demostrar que, para cada $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X) \in \mathcal{C}_n$ y cada

$$A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X)$$

existen n abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que

$$A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle \cap F_n(X) \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X). \tag{1.4.3}$$

Tomemos, por tanto,

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X) \in \mathcal{C}_n \quad \text{ y } \quad A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X).$$

Supongamos primero que $m \leq n$. Hagamos

$$V_i = \begin{cases} U_i, & \text{si } i \in \{1, 2, \ldots, m\}; \\ U_m, & \text{si } i \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Entonces $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle = \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ y (1.4.3) se cumple.

Supongamos ahora que $m > n$. Como $A \in F_n(X)$, existen $1 \leq k \leq n$ y $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ de modo que $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea

$$W_i = \bigcap \{U_j \colon x_i \in U_j\}.$$

Es claro que W_i es un abierto en X tal que $x_i \in W_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, así que

$$A \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_k\rangle.$$

Tomemos un elemento $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\} \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_k\rangle \cap F_n(X)$. Entonces $1 \leq l \leq n$. Como $B \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$, dada $r \in \{1, 2, \ldots, l\}$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $y_r \in W_i$. Por la definición de W_i, existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $x_i \in U_j$ y $y_r \in U_j$. Hemos probado, con esto, que para cada $r \in \{1, 2, \ldots, l\}$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $y_r \in U_j$. Por tanto $B \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$.

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$, sucede que $A \cap U_j \neq \emptyset$. Entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $x_i \in U_j$. Por la definición de W_i, tenemos que $W_i \subset U_j$. Ahora bien, como $B \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_k \rangle$, resulta que $B \cap W_i \neq \emptyset$. Entonces existe $r \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $y_r \in W_i$. Luego $y_r \in B \cap U_j$. Hemos probado, con esto, que $B \cap U_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por tanto $B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$.

De los tres párrafos anteriores, deducimos que $\langle W_1, W_2, \ldots, W_k \rangle \cap F_n(X)$ es un elemento de $\mathcal{C}_n$ tal que

$$A \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_k \rangle \cap F_n(X) \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \cap F_n(X).$$

Como $k \leq n$, siguiendo la demostración que hicimos para el caso en que $m \leq n$, existen n abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que

$$A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \cap F_n(X) \subset \langle W_1, W_2, \ldots, W_k \rangle \cap F_n(X).$$

De las contenciones anteriores se sigue (1.4.3). $\square$

Si $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ es un abierto básico de $CL(X)$, entonces a los conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ se llamarán las *entradas* de $\mathcal{U}$. Dicha notación es conveniente para enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.20. *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$ son dos abiertos básicos de $CL(X)$, entonces podemos reescribir a $\mathcal{U}$ y a $\mathcal{V}$ de modo que tengan el mismo número de entradas.*

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $n < m$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Hagamos $U_{n+i} = U_n$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Es fácil ver que

$$\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, \ldots, U_{n+k} \rangle.$$

De esta manera $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son escritos utilizando el mismo número de entradas, a saber m. $\square$

Otro resultado que más adelante usaremos es el siguiente.

Teorema 1.21. *Si X es un espacio topológico y $K \subset X$ es cerrado en X, entonces los conjuntos $\Gamma(K)$ y $\Omega(K)$ son cerrados en $CL(X)$. Además, si X es T_1, entonces el conjunto $\{A \in CL(X)\colon K \subset A\}$ es cerrado en $CL(X)$.*

Demostración. Sea K un subconjunto cerrado de X. Entonces $X - K$ es abierto en X. Además

$$\begin{aligned} CL(X) - \Gamma(K) = \{A \in CL(X)\colon A \not\subseteq K\} = \\ = \{A \in CL(X)\colon A \cap (X - K) \neq \emptyset\} = \Omega(X - K) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} CL(X) - \Omega(K) = \{A \in CL(X)\colon A \cap K = \emptyset\} = \\ = \{A \in CL(X)\colon A \subset X - K\} = \Gamma(X - K). \end{aligned}$$

Entonces $CL(X) - \Gamma(K)$ y $CL(X) - \Omega(K)$ son abiertos en $CL(X)$. Luego $\Gamma(K)$ y $\Omega(K)$ son cerrados en $CL(X)$.

Ahora supongamos que X es T_1. Sea

$$B \in CL(X) - \{A \in CL(X)\colon K \subset A\}.$$

Entonces existe $k \in K$ tal que $k \notin B$. Como X es T_1, el conjunto $\{k\}$ es cerrado en X, así que $\Gamma(X - \{k\})$ es abierto en $CL(X)$. Es claro que $B \in \Gamma(X - \{k\})$. Si $B' \in \Gamma(X - \{k\})$, entonces $k \notin B'$ y, por lo tanto, $B' \notin \{A \in CL(X)\colon K \subset A\}$. De esta manera $\{A \in CL(X)\colon K \subset A\}$ es cerrado en $CL(X)$. □

Como una aplicación del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.22. *Sean X un espacio infinito y T_1, $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k \in CL(X)$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea $\Lambda_j = \{A \in CL(X)\colon A_j \subset A\}$. Hagamos*

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j.$$

Entonces Λ no es denso en $CL(X)$.

Demostración. Como X es T_1, por el Teorema 1.21, Λ_j es cerrado en $CL(X)$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego Λ es cerrado en $CL(X)$. Definimos ahora

$$M = \{j \in \{1, 2, \ldots, k\}\colon A_j \in F_1(X)\}.$$

Por ser X infinito, existe $x \in X - \bigcup_{j\in M} A_j$. Entonces $\{x\} \in CL(X) - \Lambda = CL(X) - \mathrm{Cl}_{CL(X)}(\Lambda)$. Por lo tanto, Λ no es denso en $CL(X)$. $\square$

Supongamos ahora que X es un continuo. Entonces X un espacio conexo, $T_{3\frac{1}{2}}$ y no degenerado. Se afirma que X es no numerable por la siguiente razón. Consideremos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces existe $\varphi : X \to [0,1]$ continua, de manera que $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(y) = 1$. Como φ es continua y X es conexo, $\varphi(X)$ es un subconjunto conexo de $[0,1]$ tal que $0, 1 \in \varphi(X)$. Luego $\varphi(X) = [0,1]$. Así, la cardinalidad de X es mayor o igual que la cardinalidad de $[0,1]$, la cual es no numerable.

En particular X es infinito y T_1. Tomemos ahora $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k \in 2^X$. Con la misma demostración que la dada en el teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado, que será utilizado más adelante.

Teorema 1.23. *Sean X un continuo, $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k \in 2^X$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea $\Lambda_j = \{A \in 2^X \colon A_j \subset A\}$. Hagamos*

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j.$$

Entonces Λ no es denso en 2^X.

Si en su lugar $A_1, A_2, \ldots, A_k \in C(X)$, también la misma prueba dada en el Teorema 1.22, puede utilizarse para probar el siguiente resultado.

Teorema 1.24. *Sea X un continuo, $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k \in C(X)$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea $\Lambda_j = \{A \in C(X) \colon A_j \subset A\}$. Hagamos*

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j,$$

Entonces Λ no es denso en $C(X)$.

Aunque no lo utilizaremos en el presente trabajo, el teorema anterior tiene también su versión en los hiperespacios $F_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Incluso se puede presentar en los hiperespacios 2^X, $CLC(X)$, $C(X)$ y $F_n(X)$, suponiendo que X es infinito y T_1.

Teorema 1.25. *Sea X un espacio T_1. Definimos el siguiente conjunto*

$$F(X) = \{A \subset X \colon A \neq \emptyset \text{ y A es infinito}\}.$$

Entonces $F(X)$ es denso en $CL(X)$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío en $CL(X)$. Existen abiertos no vacíos en X, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ con $n \in \mathbb{N}$, tales que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, elegimos $u_i \in U_i$ y definimos $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Este conjunto C es finito y en consecuencia pertenece al conjunto $F(X)$. Por la forma en que lo construimos, tenemos que $C \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. En otras palabras, tenemos que $\mathcal{U} \cap F(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F(X)$ es denso en $CL(X)$.

$\square$

1.4.2. Convergencia en $CL(X)$

Si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio topológico X y $p \in X$, entonces p es un *punto límite* de la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada abierto U en X tal que $p \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in U$, para cada $n \geq N$. Recordemos que si un espacio topológico X es T_2, entonces toda sucesión en X posee a lo más un punto límite ([9, Proposición 1.6.7, p. 51]). Cuando X sea un espacio y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión en X, si $p \in X$ es un punto límite de la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, escribiremos $p_n \rightsquigarrow p$ y diremos que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a p. Si X es T_2, entonces p es el único punto límite de dicha sucesión.

De lo anterior si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $CL(X)$ y $A \in CL(X)$, entonces $A_n \rightsquigarrow A$ si para cada abierto $\mathcal{U}$ en $CL(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \mathcal{U}$, para cada $n \geq N$. En [9, Corolario 3.1.5, p. 124] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.26. *Sean X un espacio topológico y U un abierto en X. Sea $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos cerrados de X, en donde al menos algún elemento de $\mathcal{F}$ es compacto. Si $\bigcap_{s\in S} F_s \subset U$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ tales que $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k} \subset U$.*

Una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $CL(X)$ es *decreciente* si $A_{n+1} \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.27. *Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $CL(X)$, en la que al menos uno de sus elementos es compacto. Hagamos $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Entonces $A \in CL(X)$ y $A_n \rightsquigarrow A$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = A_n \cap A_k$. Entonces $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados no vacíos en el espacio compacto A_k. Como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es decreciente y, por tanto, posee la propiedad de la intersección finita. Entonces, por [9, Teorema 3.1.1, p.

123], $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$. Como $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, tenemos que $A \neq \emptyset$. Notemos ahora que A es cerrado en X, por ser una intersección de cerrados en X. Esto prueba que $A \in CL(X)$.

Para ver que $A_n \rightsquigarrow A$, sea $\mathcal{U}$ un abierto en $CL(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en X tales que

$$A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subset \mathcal{U}.$$

Hagamos $U = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$. Entonces U es un abierto en X tal que $A \subset U$. Como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por el Teorema 1.26, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset U$, para cada $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$ y, además, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces $\emptyset \neq A \cap U_i \subset A_n \cap U_i$, por lo que $A_n \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$. Esto muestra que $A_n \in \mathcal{U}$, para cada $n \geq N$. Luego $A_n \rightsquigarrow A$. $\square$

Si en el teorema anterior, suponemos que X es compacto y que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en 2^X, entonces resulta que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in 2^X$ y $A_n \rightsquigarrow A$.

1.4.3. La métrica de Hausdorff

Si nos olvidamos por un momento de la topología de Vietoris τ_V en $CL(X)$, podemos pensar en construir una métrica para $CL(X)$, a partir de una métrica d en X. Para realizar esto, consideremos primero la siguiente definición.

Definición 1.28. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\epsilon > 0$ y $A \in CL(X)$. Definimos la* ***nube con centro en*** *A* ***y radio*** *ϵ como el conjunto*

$$N_X(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}.$$

Si $a \in X$ y $\epsilon > 0$, definimos la ***bola con centro en*** *a* ***y radio*** *ϵ como el conjunto*

$$B_X(a, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

En [22] al conjunto $N_X(A, \epsilon)$ se le conoce como la *ϵ-dilatación de A*. Notemos que

$$N_X(A, \epsilon) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

Por tanto

$$N_X(A, \epsilon) = \bigcup_{a\in A} B_X(a, \epsilon).$$

Esto implica que cada conjunto de la forma $N_X(A,\epsilon)$ es abierto en X. Es fácil probar que

$$\text{diám}\left(N_X(A,\epsilon)\right) \leq \text{diám}(A) + 2\epsilon.$$

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 1.29. *Si (X,d) es un espacio métrico y $A,B \in CL(X)$, definimos una función $H_d\colon CL(X) \times CL(X) \to [0,\infty)$ como sigue:*

$$H_d(A,B) = \text{ínf}\left\{\epsilon > 0\colon\, A \subset N_X(B,\epsilon) \;\; y \;\; B \subset N_X(A,\epsilon)\right\}.$$

Si en un contexto utilizamos o entendemos que la métrica en X es d, entonces denotamos H_d simplemente por H.

Una prueba del siguiente resultado puede verse en [18, Teorema 2.2, p. 11].

Teorema 1.30. *Supongamos que (X,d) es un espacio métrico y acotado. Entonces H está bien definida y es una métrica en $CL(X)$. Si X es un espacio métrico, cuya métrica no está necesariamente acotada, entonces $H_{|2^X \times 2^X}$ está bien definida y es una métrica en 2^X.*

A H_d se le conoce como la *métrica de Hausdorff en $CL(X)$ inducida por d*. Por supuesto, la métrica H_d genera una topología τ_{H_d} en $CL(X)$. Para simplificar, la restricción de dicha topología a 2^X la seguiremos denotando por τ_{H_d}. Entonces $CL(X)$ posee, en principio, dos topologías, a saber la topología de Vietoris τ_V y la topología τ_{H_d}. Nos gustaría que, por ejemplo, dichas topologías fueran iguales. Antes de verificar esto, conviene indicar el siguiente resultado, probado en [18, Teorema 2.4, p. 13].

Teorema 1.31. *Si X es un espacio T_1 y $(CL(X),\tau_V)$ es metrizable, entonces X es metrizable y compacto.*

Así pues, si $(CL(X),\tau_V)$ es metrizable entonces, como X es compacto, $CL(X) = 2^X$. Luego $\left(2^X,\tau_V\right)$ es metrizable. Esto significa que si queremos darle a $CL(X)$ una métrica cuya topología inducida sea la topología de Vietoris en $CL(X)$, entonces en realidad a quien le estamos dando tal métrica, es a 2^X. Ahora bien, en [18, Teorema 3.1, p. 16] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.32. *Si (X,d) es un espacio métrico, entonces $\left(2^X,\tau_V\right)$ es metrizable y, además, $\tau_V = \tau_{H_d}$.*

Del teorema anterior se deduce que si X es un espacio metrizable, entonces $\left(2^X, \tau_V\right)$ es metrizable y, además, si d es una métrica en X que induce la topología τ de X, entonces $\tau_V = \tau_{H_d}$. Por tanto, si d y e son métricas en X que inducen la topología τ de X, entonces $\tau_{H_d} = \tau_{H_e}$. Esto implica que la topología en 2^X inducida por la métrica de Hausdorff, solamente depende de la topología de X.

En [18, Teorema 3.4, p. 18] se prueba que si X es un espacio T_1, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable si y sólo si X es compacto y metrizable. En [18, Teorema 3.5, p. 18] se prueba que si X es compacto y metrizable, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es compacto. De todo esto tenemos que, cuando (X, d) es compacto y metrizable, $(CL(X), \tau_V)$ (o lo que es lo mismo $(2^X, \tau_V)$) es compacto y metrizable. Además, cuando X es compacto y metrizable, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $CL(X)$ y $A \in CL(X)$ es tal que $A_n \rightsquigarrow A$, entonces la convergencia de la sucesión en términos de la métrica de Hausdorff, es equivalente a la convergencia de la misma sucesión, en términos de la topología de Vietoris.

Ahora mostraremos el siguiente resultado, que es bastante socorrido y en este trabajo no será la excepción.

Teorema 1.33. *Sea X un espacio métrico. Si $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces*

$$H(A, B) < \epsilon \quad \textit{si y sólo si} \quad A \subset N_X(B, \epsilon) \ \ \textit{y} \ \ B \subset N_X(A, \epsilon).$$

Demostración. Tomemos $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Definamos

$$E(A, B) = \{\delta > 0\colon A \subset N_X(B, \delta) \text{ y } B \subset N_X(A, \delta)\}.$$

Entonces $H(A, B) = \inf\{\delta > 0\colon \delta \in E(A, B)\}$. Supongamos que $H(A, B) < \epsilon$. Entonces existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \epsilon$. Luego $A \subset N_X(B, \delta) \subset N_X(B, \epsilon)$ y, análogamente, $B \subset N_X(A, \epsilon)$.

Supongamos ahora que $A \subset N_X(B, \epsilon)$ y $B \subset N_X(A, \epsilon)$. Vamos a encontrar $\epsilon' \in E(A, B)$ con $\epsilon' < \epsilon$. Para esto sea $\mathcal{U} = \{N_X(A, \delta)\colon 0 < \delta < \epsilon\}$. Notemos que $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos en X. Además

$$B \subset \bigcup_{0<\delta<\epsilon} N_X(A, \delta).$$

Para ver esto, sea $b \in B$. Como $B \subset N_X(A, \epsilon)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Tomando δ tal que $d(a, b) < \delta < \epsilon$, tenemos que $b \in N_X(A, \delta)$ y $0 <$

$\delta < \epsilon$. Esto prueba que $B \subset \bigcup_{0<\delta<\epsilon} N_X(A,\delta)$. Entonces $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos en X cuya unión contiene al subconjunto compacto B de X. Esto implica que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tales que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_X(A,\delta_i)$$

y $0 < \delta_i < \epsilon$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\delta_i \neq \delta_j$ para cada $i, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ con $i \neq j$ y, más aún, que $0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n < \epsilon$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} N_X(A,\delta_i) = N_X(A,\delta_n)$ y, por tanto, $B \subset N_X(A,\delta_n)$. Hemos así encontrado, utilizando la compacidad de B y el hecho de que $B \subset N_X(A,\epsilon)$, un número real η tal que $B \subset N_X(A,\eta)$ y $0 < \eta < \epsilon$ (a saber η es δ_n).

Como A es compacto y $A \subset N_X(B,\epsilon)$, procediendo de manera similar, se obtiene un número real η' tal que $A \subset N_X(B,\eta')$ y $0 < \eta' < \epsilon$. Sea $\epsilon' = \max\{\eta, \eta'\}$. Entonces $A \subset N_X(B,\epsilon')$, $B \subset N_X(A,\epsilon')$ y $0 < \epsilon' < \epsilon$. Luego $H(A,B) \leq \epsilon' < \epsilon$. □

Ahora presentamos el siguiente resultado.

Teorema 1.34. *Sean X un espacio métrico, A un abierto no vacío de X, y $K \in 2^X$ tales que $K \subset A$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N_X(K,\epsilon) \subset A$.*

Demostración. Como A es un abierto en X tal que $K \subset A$, para cada $k \in K$, existe $\epsilon_k > 0$ de tal suerte que $B_X(k,\epsilon_k) \subset A$. Tenemos entonces que

$$K \subset \bigcup_{k \in K} B_X\left(k, \frac{\epsilon_k}{2}\right) \subset A.$$

Por la compacidad de K, existe $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_X\left(k_i, \frac{\epsilon_{k_i}}{2}\right). \tag{1.4.4}$$

Sea

$$\epsilon = \min\left\{\frac{\epsilon_{k_i}}{2} : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}.$$

Es claro que $K \subset N_X(K,\epsilon)$. Falta ver que $N_X(K,\epsilon) \subset A$. Para esto sea $x \in N_X(K,\epsilon)$. Entonces existe $k \in K$ tal que $d(x,k) < \epsilon$ y, por (1.4.4), existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $k \in B_X\left(k_j, \frac{\epsilon_{k_j}}{2}\right)$. Tenemos así que

$$d(x,k_j) \leq d(x,k) + d(k,k_j) < \epsilon + \frac{\epsilon_{k_j}}{2} \leq \frac{\epsilon_{k_j}}{2} + \frac{\epsilon_{k_j}}{2} = \epsilon_{k_j}$$

es decir, $x \in B_X(k_j, \epsilon_{k_j}) \subset A$. Esto prueba que $N_X(K, \epsilon) \subset A$. □

Si en el teorema anterior suponemos que X es un espacio métrico compacto y que $K \in CL(X)$, entonces $K \in 2^X$ y, por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $N_X(K, \epsilon) \subset A$. En adelante, cuando el contexto sea lo suficientemente claro, si $K \in CL(X)$, escribiremos $N_X(K, \epsilon)$ simplemente como $N(K, \epsilon)$.

Teorema 1.35. *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces, para cada $K \in 2^X$ y toda $\epsilon > 0$, existe $A \in F(X)$ tal que $H(K, A) < \epsilon$.*

Desmotración. Sea $K \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos la cubierta abierta,

$$K \subset \bigcup_{k \in K} B_X(k, \epsilon).$$

Como K es compacto entonces existe $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset K$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_X(k_i, \epsilon).$$

Pero esta unión coincide con $N_X(\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}, \epsilon)$. De esta manera, tenemos que

$$K \subset N_X(\{k_1, k_2, \ldots k_n\}, \epsilon).$$

Como $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset N_X(K, \epsilon)$, entonces $H(\{k_1, k_2, \ldots k_n\}, K) < \epsilon$.

□

Teorema 1.36. *Sea X un espacio métrico, compacto y sin puntos aislados. Si $K \in F(X)$, $\epsilon > 0$ y $q \in \mathbb{N}$ es tal que $q \geq |K|$, entonces existe $L \in F(X)$ con $|L| = q$ y $H(K, L) < \epsilon$.*

Demostración. Si $q = |K|$ entonces $L = K$, y este caso se vuelve trivial. Supongamos entonces que $q > |K|$, tomamos $L = K \cup \{x_1, \ldots, x_{q-|K|}\}$ donde, para cada $i \in \{1, \ldots, q - |K|\}$, $d(x_i, k) < \epsilon$ para algún $k \in K$, esto lo podemos hacer porque X no tiene puntos aislados. Es claro que $K \subset N_X(L, \epsilon)$, pero también tenemos que $L \subset N_X(K, \epsilon)$, pues si $x \in K$ la contención es clara y si $x \in \{x_1, \ldots, x_{q-|K|}\}$, entonces $d(x, k) < \epsilon$, para algún $k \in K$ y por lo tanto $d(x, K) < \epsilon$, es decir, $x \in N_X(K, \epsilon)$.

□

Los espacios que nos interesará analizar serán compactos así que, cuando sea éste el caso, definiremos conceptos en 2^X en vez de $CL(X)$.

1.4.4. Funciones inducidas

Como mostraremos en la presente sección, toda función continua definida entre espacios topológicos, induce de manera natural funciones continuas entre sus respectivos hiperespacios.

Supongamos que X y Y son espacios topológicos y que $f\colon X \to Y$ es una función cerrada. Si $K \in CL(X)$, entonces $K \neq \emptyset$ y K es cerrado en X. Luego

$$f(K) = \{f(k) \colon k \in K\}$$

es no vacío y cerrado. Por lo tanto, $f(K) \in CL(Y)$. Esto nos permite definir una función $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ como

$$CL(f)(K) = f(K).$$

Si $K \in 2^X$ y f es continua, entonces $f(K) \in 2^Y$, pues la imagen continua de un subconjunto compacto de X, es un subconjunto compacto de Y. Esto nos permite definir una función $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ como

$$2^f(K) = f(K).$$

Si $K \in CLC(X)$ o bien $K \in C(X)$, entonces $f(K) \in CLC(Y)$ o bien $K \in C(Y)$, según corresponda, pues la imagen continua de un subconjunto conexo de X, es un subconjunto conexo de Y. Podemos entonces considerar las funciones $CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(Y)$ y $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ definidas, para $K \in CLC(X)$, como

$$CLC(f) = f(K)$$

y, para $K \in C(X)$, como

$$C(f)(K) = f(K).$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $K \in F_n(X)$, entonces $f(K)$ es un subconjunto no vacío de Y con, a lo más, n elementos. Luego $f(K) \in F_n(Y)$ y podemos considerar la función $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ definida como

$$F_n(f)(K) = f(K).$$

Definición 1.37. *Si $f\colon X \to Y$ es una función cerrada entre los espacios topológicos X y Y, entonces la función $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ es una **función inducida** de f. Si f es una función continua y cerrada, entonces las funciones $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, $CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(Y)$, $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ también se llaman **funciones inducidas** de f.*

Es natural preguntarse si la continuidad de f implica la de $CL(f)$, así como la del resto de las funciones inducidas. Para estudiar la continuidad de las funciones inducidas del tipo $F_n(f)$, debemos suponer que X y Y son espacios T_1. Ahora bien, para estudiar la continuidad de $CL(f)$, el siguiente resultado es importante.

Teorema 1.38. *Sea $f\colon X \to Y$ una función cerrada entre los espacios topológicos X y Y. Si $n \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2, \ldots, W_n$ son subconjuntos de Y, entonces*

$$CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right) = \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

Demostración. Como se puede ver por la demostración, la hipótesis de que f es cerrada, se utiliza solamente para que $CL(f)$ esté bien definida.

Supongamos que $CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right) \neq \emptyset$. Sea

$$K \in CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right).$$

Entonces $K \in CL(X)$ y

$$CL(f)(K) = f(K) \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle.$$

Luego $f(K) \in CL(Y)$ y $f(K) \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$, por lo que

$$\begin{aligned} K \subset f^{-1}(f(K)) &\subset f^{-1}(W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n) \\ &= f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(W_n). \end{aligned}$$

Tomemos ahora $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $f(K) \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle$, tenemos que $f(K) \cap W_i \neq \emptyset$. Luego $K \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. Por tanto

$$K \in \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

Esto prueba que $\langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle \neq \emptyset$ y, además, que

$$CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right) \subset \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

Ahora supongamos que $\langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle \neq \emptyset$. Sea

$$K \in \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

Entonces $K \in CL(X)$ y $K \subset f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(W_n)$. Luego

$$\begin{aligned} f(K) \subset f\left(f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(W_n)\right) &= f\left(f^{-1}(W_1)\right) \cup \\ \cup f\left(f^{-1}(W_2)\right) \cup \cdots \cup f\left(f^{-1}(W_n)\right) &\subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n. \end{aligned}$$

Por tanto $f(K) \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$. Tomemos $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como

$$K \in \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle$$

sucede que $K \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. Luego $f(K) \cap W_i \neq \emptyset$. Como f es cerrada y $K \in CL(X)$, tenemos que $f(K) \in CL(Y)$. Luego $CL(f)(K) = f(K) \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle$, de donde

$$K \in CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right).$$

Esto prueba que $CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right) \neq \emptyset$ y, además, que

$$\langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle \subset CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right).$$

Por tanto

$$CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle\right) = \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

□

Corolario 1.39. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y cerrada entre los espacios topológicos X y Y. Entonces las funciones*

$$CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y), \quad 2^f\colon 2^X \to 2^Y, \quad CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(Y)$$

y $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ son continuas. Más aún, si X y Y son espacios T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces la función $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ es continua.

Demostración. Para probar que $CL(f)$ es continua, basta ver que la imagen inversa, bajo $CL(f)$, de cada abierto básico de $CL(Y)$, es un abierto en $CL(X)$. Tomemos, por tanto, $m \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2, \ldots, W_m$ subconjuntos abiertos de Y. Como f es continua, $f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_m)$ son subconjuntos abiertos de X. Luego

$$\langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_m)\rangle$$

es un abierto en $CL(X)$. Además, por el Teorema 1.38,

$$CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_m\rangle\right) = \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_m)\rangle.$$

Luego $CL(f)^{-1}\left(\langle W_1, W_2, \ldots, W_m\rangle\right)$ es un abierto en $CL(X)$ (incluso un abierto básico de $CL(X)$). Esto prueba que $CL(f)$ es continua.

Notemos ahora que $2^f = CL(f)_{|2^X}$, $CLC(f) = CL(f)_{|CLC(X)}$ y $C(f) = CL(f)_{|C(X)} = \left(2^f\right)_{|C(X)}$. Entonces $2^f, CLC(f)$ y $C(f)$ son restricciones de funciones continuas y, por tanto, funciones continuas. Supongamos ahora que X y Y son espacios T_1. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(f) = CL(f)_{|F_n(X)}$, por lo que $F_n(f)$ es también la restricción de una función continua. Luego $F_n(f)$ es continua. $\square$

Bajo las hipótesis del corolario anterior, si $W \subset Y$ entonces, por el Lema 1.17 y el Teorema 1.38

$$CL(f)^{-1}(\Gamma(W)) = CL(f)^{-1}(\langle W \rangle) = \left\langle f^{-1}(W) \right\rangle = \Gamma\left(f^{-1}(W)\right)$$

y

$$\begin{aligned} CL(f)^{-1}(\Omega(W)) = CL(f)^{-1}(\langle Y, W \rangle) = \left\langle f^{-1}(Y), f^{-1}(W) \right\rangle = \\ = \left\langle X, f^{-1}(W) \right\rangle = \Omega\left(f^{-1}(W)\right). \end{aligned}$$

Luego

$$CL(f)^{-1}(\Gamma(W)) = \Gamma\left(f^{-1}(W)\right) \quad \text{y} \quad CL(f)^{-1}(\Omega(W)) = \Omega\left(f^{-1}(W)\right).$$

Notemos ahora que si X es compacto, Y es de Hausdorff y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada y Y también es compacto. Luego $CL(X) = 2^X$, $CL(Y) = 2^Y$ $CLC(X) = C(X)$, $CLC(Y) = C(Y)$, $CL(f) = 2^f$, $CLC(f) = C(f)$ y, por el Corolario 1.39, las funciones $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ y $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ son continuas.

Vamos a probar ahora que, entre espacios T_1, la continuidad de $CL(f)$ implica la continuidad de f. Para esto será importante el siguiente resultado.

Teorema 1.40. *Sea X un espacio topológico T_1. Consideremos la función $e_X\colon X \to F_1(X)$ definida, para $x \in X$, como $e_X(x) = \{x\}$. Entonces e_X es un homeomorfismo. Por tanto X es homeomorfo a $F_1(X)$.*

Demostración. Notemos que $F_1(X) = \{\{x\}\colon x \in X\}$. Como X es T_1, tenemos que $F_1(X)$ es un subespacio de $CL(X)$. Tomemos ahora $x, y \in X$ tales que $e_X(x) = e_X(y)$. Entonces $\{x\} = \{y\}$, por lo que $x = y$. Esto prueba que e_X es inyectiva. Si $\{x\} \in F_1(X)$, entonces x es un elemento de X tal que $e_X(x) = \{x\}$, por lo que e_X es suprayectiva.

Para ver que e_X es continua, sea U un subconjunto de X. Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(U) \cap F_1(X) = \{A \in F_1(X)\colon A \subset U\} = \{A \in F_1(X)\colon A \cap U \neq \emptyset\} = \\ = \Omega(U) \cap F_1(X). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} e_X^{-1}(\Gamma(U) \cap F_1(X)) = \{x \in X \colon e_X(x) \in \Gamma(U) \cap F_1(X)\} = \\ = \{x \in X \colon \{x\} \subset U\} = \{x \in X \colon x \in U\} = U. \end{aligned}$$

Si U es abierto en X, es claro entonces que $e_X^{-1}(\Gamma(U) \cap F_1(X))$ es abierto en X. Esto prueba que e_X es continua.

Consideremos ahora la función $g\colon F_1(X) \to X$ definida para $\{x\} \in F_1(X)$, como $g(\{x\}) = x$. Entonces g es la función inversa de e_X y, si U es un subconjunto de X, entonces:

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) = \{\{x\} \in F_1(X) \colon g(\{x\}) \in U\} = \{\{x\} \in F_1(X) \colon x \in U\} \\ = \{\{x\} \in F_1(X) \colon \{x\} \subset U\} = \Gamma(U) \cap F_1(X). \end{aligned}$$

Si U es abierto en X, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en $F_1(X)$. Luego g es continua. Esto prueba que e_X es un homeomorfismo. □

Corolario 1.41. *Sean X y Y espacios topológicos T_1 y $f\colon X \to Y$ una función cerrada. Si la función inducida $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $g = e_Y^{-1} \circ CL(f) \circ e_X$, donde $e_X\colon X \to F_1(X)$ y $e_Y\colon Y \to F_1(Y)$ se definen como en el Teorema 1.40. Notemos que la función $g\colon X \to Y$ está bien definida pues, si $x \in X$, entonces $e_X(x) = \{x\} \in CL(X)$ y $CL(f)(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \in F_1(Y)$. Por tanto

$$g(x) = e_Y^{-1}(CL(f)(\{x\})) = e_Y^{-1}(\{f(x)\}) = f(x) \in Y.$$

Esto prueba que g está bien definida y, además, que $g = f$. Como e_X y e_Y son homeomorfismos y $CL(f)$ es una función continua, g es una composición de funciones continuas. Entonces g es continua y, como $g = f$, también f es continua. □

Si X y Y son espacios T_1, $n \in \mathbb{N}$ y alguna de las funciones inducidas

$$2^f\colon 2^X \to 2^Y, \quad CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(Y),$$

$$C(f)\colon C(X) \to C(Y) \quad y \quad F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y),$$

son continuas, entonces siguiendo las ideas dadas en la demostración del Corolario 1.41, se deduce que f es continua. Por consiguiente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.42. *Sean X y Y espacios topológicos T_1, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to Y$ una función cerrada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es continua;*

2) *cada una de las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ y $F_n(f)$ es continua;*

3) *alguna de las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ y $F_n(f)$ es continua.*

Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, es natural preguntarse ahora si las funciones inducidas de f también son homeomorfismos. Para esto utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.43. *Sea $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo entre los espacios topológicos X y Y. Si $m \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_m$ son subconjuntos de X, entonces:*

$$CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right) = \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle.$$

Demostración. Supongamos primero que $CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right) \neq \emptyset$. Sea $B \in CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right)$. Entonces existe $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ tal que $CL(f)(K) = f(K) = B$. Como $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$, tenemos que $K \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$. Luego

$$B = f(K) \subset f(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m) = f(U_1) \cup f(U_2) \cup \cdots \cup f(U_m).$$

Tomemos ahora $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$, sucede que $K \cap U_i \neq \emptyset$. Luego $f(K) \cap f(U_i) \neq \emptyset$, de donde $B \cap f(U_i) \neq \emptyset$. Entonces $B \in \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle$. Esto prueba que $\langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle \neq \emptyset$ y, además, que

$$CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right) \subset \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle.$$

Para probar la contención anterior, utilizamos que

$$CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right)$$

es no vacío y que f es cerrada, para que así la función $CL(f)$ esté bien definida.

Ahora supongamos que $\langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle \neq \emptyset$. Tomemos un elemento $B \in \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle$. Entonces $B \in CL(Y)$. Hagamos

$K = f^{-1}(B)$. Como f es continua y suprayectiva, $K \in CL(X)$ y, como además f es suprayectiva, tenemos que

$$CL(f)(K) = f(K) = f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$

Vamos a probar ahora que $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$. Como

$$B \in \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m) \rangle,$$

tenemos que $B \subset f(U_1) \cup f(U_2) \cup \cdots \cup f(U_m)$. Puesto que f es inyectiva, $f^{-1}(f(U_i)) = U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Luego

$$\begin{aligned} K = f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(U_1) \cup f(U_2) \cup \cdots \cup f(U_m)) = \\ = f^{-1}(f(U_1)) \cup f^{-1}(f(U_2)) \cup \cdots \cup f^{-1}(f(U_m)) = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m. \end{aligned}$$

Por tanto $K \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$. Tomemos ahora $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como

$$B \in \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m) \rangle,$$

tenemos que $B \cap f(U_i) \neq \emptyset$. Luego $f^{-1}(B) \cap U_i \neq \emptyset$, así que $K \cap U_i \neq \emptyset$. Esto muestra que $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$. Por tanto,

$$B = CL(f)(K) \in CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle\right).$$

Esto prueba que $CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle\right) \neq \emptyset$ y, además, que

$$\langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m) \rangle \subset CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle\right).$$

De lo anterior se tiene que

$$CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle\right) = \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m) \rangle.$$

□

Corolario 1.44. *Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo entre los espacios topológicos X y Y, entonces la función inducida $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Tomemos $A, B \in CL(X)$ tales que $CL(f)(A) = CL(f)(B)$. Entonces $f(A) = f(B)$ y, como f es inyectiva,

$$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B)) = B.$$

Esto prueba que $CL(f)$ es inyectiva. Para ver que $CL(f)$ es suprayectiva, sea $D \in CL(Y)$. Como f es continua y suprayectiva, $f^{-1}(D) \in CL(X)$. Además, puesto que f es suprayectiva

$$CL(f)\left(f^{-1}(D)\right) = f\left(f^{-1}(D)\right) = D.$$

Esto prueba que $CL(f)$ es suprayectiva. Como f es continua y cerrada, por el Corolario 1.39, $CL(f)$ es continua. Para ver que $CL(f)$ es un homeomorfismo, basta probar que $CL(f)$ es abierta. Esto se consigue si hacemos ver que la imagen, bajo $CL(f)$, de cada abierto básico en $CL(X)$, es un abierto en $CL(Y)$. Tomemos entonces $m \in \mathbb{N}$ así como m subconjuntos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_m$ de X. Por el Teorema 1.43

$$CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right) = \langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle.$$

Como f es abierta, los conjuntos $f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)$ son abiertos en Y. Luego $\langle f(U_1), f(U_2), \ldots, f(U_m)\rangle$ es abierto en $CL(Y)$ (de hecho es un abierto básico). Por tanto

$$CL(f)\left(\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle\right)$$

es abierto en $CL(Y)$. Esto prueba que $CL(f)$ es abierta. □

En [9, Proposición 2.1.4, p. 67], se prueba que si $f\colon X \to Y$ es una función cerrada (respectivamente, abierta) entre los espacios topológicos X y Y, entonces para cualquier subconjunto L de Y, la restricción $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ es cerrada (respectivamente, abierta). Esto nos permite probar, utilizando el corolario anterior, que si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces el resto de las funciones inducidas de f, también resultan ser homeomorfismos.

Teorema 1.45. *Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo entre los espacios topológicos X y Y, entonces las funciones inducidas*

$$2^f\colon 2^X \to 2^Y, \quad CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(Y), \quad C(f)\colon C(X) \to C(Y)$$

son homeomorfismos. Más aún, si X y Y son T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces la función inducida $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, existe $g\colon Y \to X$ continua tal que $f \circ g = Id_Y$ y $g \circ f = Id_X$. Entonces, $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ y $CL(g)\colon CL(Y) \to CL(X)$ son dos funciones continuas, por el Corolario 1.39. Además,

$$CL(f) \circ CL(g) = CL(Id_Y) = Id_{CL(Y)}$$

y

$$CL(g) \circ CL(f) = CL(Id_X) = Id_{CL(X)}.$$

Por lo tanto, $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ es un homeomorfismo. Para los demás hiperespacios aplicamos el mismo argumento.

□

Tenemos así que si X y Y son espacios T_1, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ y $F_n(f)$ son homeomorfismos.

Ahora probaremos que si la función inducida $CL(f)$ es un homeomorfismo, entonces f es un homeomorfismo.

Teorema 1.46. *Sean X y Y espacios topológicos T_1 y $f\colon X \to Y$ una función. Si $CL(f)\colon CL(X) \to CL(Y)$ es un homeomorfismo, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $g = e_Y^{-1} \circ CL(f) \circ e_X$, donde $e_X\colon X \to F_1(X)$ y $e_Y\colon Y \to F_1(Y)$ se definen como en el Teorema 1.40. Como se prueba en el Corolario 1.41, la función g está bien definida y $g = f$. Además, por el Teorema 1.40, g es una composición de homeomorfismos y, por tanto, un homeomorfismo. □

Si X y Y son espacios T_1, $n \in \mathbb{N}$ y alguna de las funciones inducidas

$$2^f\colon 2^X \to 2^Y, \quad CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(Y), \quad C(f)\colon C(X) \to C(Y)$$

y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces siguiendo las ideas dadas en la demostración del Teorema 1.46, se deduce que f es un homeomorfismo.

Combinando los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.47. *Sean X y Y espacios topológicos T_1, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es un homeomorfismo;*

2) *cada una de las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ y $F_n(f)$ es un homeomorfismo;*

3) *alguna de las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ y $F_n(f)$ es un homeomorfismo.*

1.4.5. Otras propiedades de los hiperespacios

En la presente sección vamos a probar otras propiedades de los hiperespacios que serán utilizadas a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.48. *Si X es un espacio T_1, entonces $CL(X)$ es T_1.*

Demostración. Sean $A, B \in CL(X)$ tales que $A \neq B$. Entonces $A - B \neq \emptyset$ o bien $B - A \neq \emptyset$. Supongamos que $A - B \neq \emptyset$. Sea $a \in A - B$, como $\{a\}$ es cerrado, los conjuntos $\Gamma(X - \{a\})$ y $\Omega(X - B)$ son abiertos en $CL(X)$, con $A \in \Omega(X - B)$ y $B \in \Gamma(X - \{a\})$. Además, $A \notin \Gamma(X - \{a\})$ y $B \notin \Omega(X - B)$, pues $a \in A$ y $B \cap (X - B) = \emptyset$. Así, $CL(X)$ es T_1. De manera análoga se demuestra que $CL(X)$ es T_1 si $B - A \neq \emptyset$. $\square$

Si X es un espacio T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces los hiperespacios 2^X, $CLC(X)$, $C(X)$ y $F_n(X)$ también son T_1, pues son subespacios de $CL(X)$, que es T_1.

En la prueba del siguiente resultado, utilizaremos el siguiente Lema.

Lema 1.49. *Sea X un espacio T_1 y sin puntos aislados. Si U es un abierto no vacío, entonces U es infinito.*

Demostración. Sea X un espacio T_1 sin puntos aislados. Tomemos $U \subset X$ tal que U es abierto y no vacío. Si U es finito y $x \in U$, entonces $U - \{x\}$ es cerrado y, además, $\{x\} = U \cap (X - (U - \{x\}))$ es un abierto en X y, por tanto, un punto aislado. Como esto es una contradicción, U es infinito. $\square$

Teorema 1.50. *Supongamos que X es un espacio T_1. Entonces X no tiene puntos aislados si y sólo si $CL(X)$ no tiene puntos aislados.*

Demostración. Si $CL(X)$ no tiene puntos aislados entonces, en particular, $F_1(X)$ no tiene puntos aislados. Como X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Teorema 1.40), deducimos que X no tiene puntos aislados.

Supongamos ahora que X no tiene puntos aislados. Si $CL(X)$ posee un punto aislado A, entonces $\{A\}$ es abierto en $CL(X)$. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_m$ abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subset \{A\}$. Entonces

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle = \{A\}.$$

Por el Teorema 1.16, $U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y, como X no tiene puntos aislados, cada U_i es infinito, por el Lema 1.49. Fijemos, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $a_i \in U_i$. Como U_1 es infinito, existe $a_1' \in U_1 - \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $\{a_1', a_2, \ldots, a_m\}$ son dos elementos distintos de $CL(X)$ que se encuentran en $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$. Esto contradice el hecho de que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ posee solamente al elemento A de $CL(X)$. Por tanto $CL(X)$ no posee puntos aislados. $\square$

La misma demostración dada en el teorema anterior, puede emplearse para obtener el siguiente resultado.

Teorema 1.51. *Si X es un espacio T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X no tiene puntos aislados;*

2) *$CL(X)$ no tiene puntos aislados;*

3) *2^X no tiene puntos aislados;*

4) *$F_n(X)$ no tiene puntos aislados.*

En el caso de $F_n(X)$, los puntos $a_i \in U_i$, para $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se escogen de modo que $a_1' \in U_1 - \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y, además, $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $\{a_1', a_2, \ldots, a_m\}$ son elementos de $F_n(X)$. Siguiendo la prueba dada en el Teorema 1.50 también podemos probar que si X es T_1 y alguno de los hiperespacios $CLC(X)$ y $C(X)$ no tiene puntos aislados, entonces X no tiene puntos aislados.

En [25, p. 326], R. E. Smithson construye un espacio primero numerable, T_2 y compacto X, tal que $CL(X) = 2^X$ no es primero numerable. Tenemos, por otro lado, el siguiente resultado.

Teorema 1.52. *Si X es un espacio T_1 y $CL(X)$ es primero numerable, entonces X es primero numerable.*

Demostración. Si $CL(X)$ es primero numerable, entonces $F_1(X)$ es primero numerable. Como $F_1(X)$ es homeomorfo a X (Teorema 1.40), resulta que X es primero numerable. $\square$

La misma demostración dada en el teorema anterior, puede utilizarse para probar que si X es un espacio T_1, $n \in \mathbb{N}$ y alguno de los hiperespacios $2^X, CLC(X), C(X)$ y $F_n(X)$ es primero numerable, entonces X es primero numerable.

1.5. Órbitas y ω-límites

En esta sección vamos a presentar los resultados más básicos, propios de los Sistemas Dinámicos Discretos, que utilizaremos en este trabajo. Por un *sistema dinámico* entendemos una pareja (X, f) donde X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ es una función continua.

Definición 1.53. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in X$, entonces la **órbita de** x **bajo** f se define como el conjunto*

$$\operatorname{orb}(x, f) = \left\{ f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

En la definición anterior, dada $f\colon X \to X$, entendemos que f^0 es la función identidad de X en X, $f^1 = f$ y, para cada $k \in \mathbb{N} - \{1\}$,

$$f^k = f \circ f^{k-1}.$$

Entonces f^k es el resultado de componer k veces f consigo misma. Es interesante el caso en que el conjunto $\operatorname{orb}(x, f)$ es finito.

Definición 1.54. *Sean X un espacio topológico, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Entonces x es un **punto periódico de** f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menor número natural n tal que $f^n(x) = x$ se le llama el **periodo de** x **bajo** f. Si existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(x)$ es un punto periódico de f, decimos que x es un **punto preperiódico de** f.*

Sean X un espacio topológico, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Es fácil probar que $\operatorname{orb}(x, f)$ es finito si y sólo si x es un punto preperiódico de f.

Supongamos ahora que X es un espacio topológico y que $f\colon X \to X$ es una función continua. Si $x \in X$ y, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hacemos $x_k = f^k(x)$, entonces el conjunto $\operatorname{orb}(x, f)$ puede ser pensado como una sucesión en X, a saber $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Esto nos permite considerar las nociones de punto límite y de punto de acumulación de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$.

Recordemos que si $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio topológico Y y $y \in Y$, entonces

1) y es un *punto límite* de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si para cada abierto U en Y tal que $y \in U$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in U$, para cada $k \geq K$;

2) y es un *punto de acumulación* de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si para cada abierto U en Y tal que $y \in U$ y para todo $K \in \mathbb{N}$, existe $k \geq K$ tal que $y_k \in U$.

Es importante señalar que, por la manera en que se definió arriba, el concepto de punto de acumulación de una sucesión difiere totalmente del concepto conocido de punto de acumulación de un conjunto. Por ejemplo, en el caso de las sucesiones constantes $\{x, x, x, \ldots\}$, si las pensamos como conjuntos, es claro que x no puede ser punto de acumulación del conjunto $\{x\}$, sin embargo, x si es punto de acumulación de la sucesión, según nuestra definición.

Veamos ahora el siguiente resultado.

Teorema 1.55. *Si Y es primero numerable y $y \in Y$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Y, entonces existe una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que*

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$$

de modo que y es un punto límite de la subsucesión $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Supongamos que $y \in Y$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Y. Como Y es primero numerable, existe una base local numerable $\mathcal{B}_y = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en y. Como U_1 es un abierto en Y que tiene al punto de acumulación y de $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{k_1} \in U_1$. De manera similar, existe $k_2 \geq k_1 + 1$ tal que $y_{k_2} \in U_1 \cap U_2$,. Lo siguiente es tomar $k_3 \geq k_2 + 1$ tal que $y_{k_3} \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$. En general, supongamos que los números naturales $k_1, k_2, \ldots, k_i$ y los puntos $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_i}$ ya han sido seleccionados, de modo que $k_1 < k_2 < \cdots < k_i$ y $y_{k_j} \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_j$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, i\}$. Como y es un punto de acumulación de $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, existe $k_{i+1} \geq k_i + 1$ de modo que $y_{k_{i+1}} \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_{i+1}$. De esta manera construimos una sucesión estrictamente creciente $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ de modo que $y_{k_i} \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Notemos que, si $i \in \mathbb{N}$, entonces $y_{k_j} \in U_i$, para cada $j \geq i$.

Para ver que y es un punto límite de la sucesión $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, sea U un abierto en Y tal que $y \in U$. Como $\mathcal{B}_y$ es una base local en y, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $U_K \subset U$. Luego $y_{k_n} \in U_K \subset U$, para cada $n \geq K$. Esto termina la demostración. $\square$

A la inversa, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.56. *Si $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio topológico Y y existen una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que*

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$$

y un punto $y \in Y$, de modo que y es un punto límite de la subsucesión $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces y es un punto de acumulación de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Para ver que y es un punto de acumulación de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sean U un abierto en Y tal que $y \in U$ y $K \in \mathbb{N}$. Como y es un punto límite de $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $y_{k_n} \in U$, para cada $n \geq M$. Como $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$, existe $n \geq M$ tal que $k_n \geq K$. Luego $y_{k_n} \in U$. Esto termina la demostración. $\square$

La siguiente definición será importante en este trabajo.

Definición 1.57. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in X$ entonces, pensando a $\operatorname{orb}(x, f)$ como una sucesión en X (y no como cojunto), al conjunto de puntos de acumulación de $\operatorname{orb}(x, f)$, se le llama el conjunto **ω-límite de x bajo f** y se denota por $\omega(x, f)$.*

En ocasiones a $\omega(x, f)$ le llamaremos también el ω-conjunto límite de x bajo f.

Vamos ahora a presentar las propiedades más importantes de los conjuntos ω-límites.

Teorema 1.58. *Sean X un espacio topológico, A un subconjunto cerrado de X y $f : X \to X$ una función continua. Supongamos que existe $y \in X$ tal que $\operatorname{orb}(y, f) \subset A$. Entonces $\omega(y, f) \subset A$.*

Demostración. Tomemos $p \in \omega(y, f)$. Si $p \notin A$, entonces $X - A$ es un abierto en X que tiene a p. Como p es un punto de acumulación de $\operatorname{orb}(y, f)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in X - A$. Entonces $f^n(y)$ es un elemento de $\operatorname{orb}(y, f)$ que no está en A. En vista de que esto es una contradicción, tenemos que $p \in A$. Esto prueba que $\omega(y, f) \subset A$. $\square$

Para mostrar otros resultados, requerimos de la siguiente definición.

Definición 1.59. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que $S \subset X$ es **invariante bajo f** si $f(S) \subset S$. En el caso en que $f(S) = S$, se dice que S es **fuertemente invariante bajo f**.*

Recordemos que un espacio topológico X es *metrizable* si existe una métrica en X, cuya topología inducida es la del espacio X. Es claro que los espacios métricos son metrizables. Recordemos ahora que un espacio topológico X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente, es decir, una subsucesión que admite un punto límite. En los espacios metrizables ser compacto y ser secuencialmente compacto es lo mismo ([9, Teorema 4.1.17, p. 256]). Otro resultado que usaremos inmediatamente dice lo siguiente.

Teorema 1.60. *Sea X un espacio topológico y $A = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si $\omega(A) = \{x \in X : x \text{ es punto de acumulación de la sucesión } A\}$ entonces $\omega(A)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X - \omega(A)$, entonces existe un abierto U en X, con $x \in U$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que, para toda $n \geq N$, $x_n \notin U$. Si $y \in U$, entonces $y \notin \omega(A)$. De no ser así, tendriamos que para alguna $m \geq N$, $x_m \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $X - \omega(A)$ es abierto , o bien, $\omega(A)$ es cerrado. □

Teorema 1.61. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Entonces*

1) *si X es compacto o bien secuencialmente compacto, entonces $\omega(x, f) \neq \emptyset$, para cada $x \in X$;*

2) *$\omega(x, f)$ es cerrado en X, para cada $x \in X$;*

3) *$f(\omega(x, f)) \subset \omega(x, f)$, para cada $x \in X$;*

4) *si X es T_2, primero numerable y secuencialmente compacto, entonces $\omega(x, f) \subset f(\omega(x, f))$, para cada $x \in X$.*

Demostración. Tomemos $x \in X$. Recordemos que si X es compacto, entonces toda sucesión en X posee un punto de acumulación ([9, Teorema 3.1.23, p. 128]). Luego, si X es compacto, la sucesión $\mathrm{orb}(x, f)$ posee un punto de acumulación. Así $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Si X es secuencialmente compacto, entonces la sucesión $\mathrm{orb}(x, f)$ posee una subsucesión convergente y, por tanto, la sucesión $\mathrm{orb}(x, f)$ tiene un punto de acumulación (Teorema 1.56). Luego $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Esto prueba 1).

Para ver que $\omega(x, f)$ es cerrado en X, aplicamos el Teorema 1.60.

Para probar 3) sea $y \in f(\omega(x,f))$. Entonces $y = f(p)$ para alguna $p \in \omega(x,f)$. Para ver que y es un punto de acumulación de $\mathrm{orb}(x,f)$, sean V un abierto en X tal que $y \in V$ y $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como f es continua, existe un abierto U en X tal que $p \in U$ y $f(U) \subset V$. En vista de que p es un punto de acumulación de $\mathrm{orb}(x,f)$, existe $k \geq K$ tal que $f^k(x) \in U$. Notemos que $k+1 \geq K$ y que $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) \in f(U) \subset V$. Esto prueba que y es un punto de acumulación de $\mathrm{orb}(x,f)$, así que $y \in \omega(x,f)$. Luego $f(\omega(x,f)) \subset \omega(x,f)$.

Para probar 4) sea $z \in \omega(x,f)$. Entonces z es un punto de acumulación de $\mathrm{orb}(x,f)$ y, como X es primero numerable, existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que z es un punto límite de la sucesión $\{f^{n_i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ (Teorema 1.55). Por ser $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente podemos suponer, sin perder generalidad, que $n_i > 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Notemos que $\left\{f^{n_i-1}(x)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio X, que es secuencialmente compacto. Por tanto existen $z' \in X$ y una subsucesión $\left\{f^{n_{i_m}-1}(x)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\left\{f^{n_i-1}(x)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que z' es un punto límite de $\left\{f^{n_{i_m}-1}(x)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$. Como la sucesión $\{n_{i_m}-1\}_{m\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, tenemos que $z' \in \omega(x,f)$. Además, por la continuidad de f, $f(z')$ es un punto límite de la sucesión $\left\{f\left(f^{n_{i_m}-1}(x)\right)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$. Ahora bien, dada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $f\left(f^{n_{i_m}-1}(x)\right) = f^{n_{i_m}}(x)$. Entonces $f(z')$ es un punto límite de la subsucesión $\{f^{n_{i_m}}(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{f^{n_i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$. En vista de que z es un punto límite de la sucesión $\{f^{n_i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$, tenemos que z es también un punto límite de la subsucesión $\{f^{n_{i_m}}(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{f^{n_i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como X es T_2, los límites de las sucesiones en X son únicos, así que $f(z') = z$. Luego $z \in f(\omega(x,f))$. Esto prueba que $\omega(x,f) \subset f(\omega(x,f))$. □

Corolario 1.62. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces, para toda $x \in X$, el conjunto $\omega(x,f)$ es no vacío, cerrado en X y fuertemente invariante bajo f.*

Sean (X,f) un sistema dinámico y $x \in X$. En [6] se indica que, para cada $m \in \mathbb{N}$, sucede que:

$$\omega(x,f) = \bigcup_{j=0}^{m-1} \omega\left(f^j(x), f^m\right) \quad \text{y} \quad f\left(\omega(x,f^m)\right) = \omega\left(f(x), f^m\right).$$

Otra propiedad importante que se usará más adelante se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.63. *Sean X un espacio primero numerable y $f : X \to X$ una función continua. Si $x, y \in X$ y $y \in \mathrm{orb}(x,f)$, entonces $\omega(x,f) = \omega(y,f)$.*

Demostración. Como $y \in \text{orb}(x, f)$, entonces $y = f^n(x)$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $z \in \omega(y, f)$, entonces existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $f^{n_i}(y) \rightsquigarrow z$ (Teorema 1.55). Tenemos entonces que $f^{n_i}(f^n(x)) \rightsquigarrow z$, es decir, $f^{n+n_i}(x) \rightsquigarrow z$. Por lo tanto, $z \in \omega(x, f)$ (Teorema 1.56). Así $\omega(y, f) \subset \omega(x, f)$.

Tomemos ahora $z \in \omega(x, f)$. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{m_i}(x) \rightsquigarrow z$ (Teorema 1.55). Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < m_k$. Entonces la sucesión $\{f^{m_j}(x)\}_{j\geq k}$ converge a z y puede escribirse como $\{f^{n+(m_j-n)}(x)\}_{j\geq k}$. De esta manera, tenemos que $f^{n+(m_j-n)}(x) \rightsquigarrow z$, o bien, $f^{m_j-n}(f^n(x)) = f^{m_j-n}(y) \rightsquigarrow z$. Por lo tanto $z \in \omega(y, f)$ (Teorema 1.56). Esto prueba que $\omega(x, f) \subset \omega(y, f)$. □

Combinando los teoremas 1.58 y 1.63, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.64. *Sean X un espacio primero numerable, A un subconjunto cerrado de X y $f : X \to X$ una función continua. Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $y \in \text{orb}(x, f)$ y $\text{orb}(y, f) \subset A$. Entonces $\omega(x, f) \subset A$.*

Demostración. Por el Teorema 1.58, $\omega(y, f) \subset A$ y, por el Teorema 1.63, $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. Luego $\omega(x, f) \subset A$. □

Vamos a probar ahora el siguiente resultado. En su demostración, utilizamos que en un espacio T_1 sin puntos aislados, los abiertos no vacíos son infinitos.

Teorema 1.65. *Sea X un espacio T_1 sin puntos aislados. Sean $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$ tal que $\text{orb}(x, f)$ es denso en X. Entonces, para cada $y \in \text{orb}(x, f)$, el conjunto $\text{orb}(y, f)$ es denso en X.*

Demostración. Tomemos $y \in \text{orb}(x, f)$. Entonces $y = f^k(x)$, para alguna $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea U un abierto no vacío en X. Como X es T_1 y no tiene puntos aislados, U es infinito. Consideremos el conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n < k \text{ y } f^n(x) \in U\}.$$

Entonces A es finito y, como U es infinito, $U \cap (X - \{f^n(x) : n \in A\})$ es un abierto no vacío en X. Como $\text{orb}(x, f)$ es denso en X, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^j(x) \in U \cap (X - \{f^n(x) : n \in A\})$. Entonces $j \geq k$, por lo que $f^j(x) \in U \cap \text{orb}(y, f)$. Hemos demostrado, con esto, que $U \cap \text{orb}(y, f) \neq \emptyset$. Por tanto $\text{orb}(y, f)$ es denso en X. □

Trabajaremos en el siguiente capítulo con una de las definiciones que determinan el concepto de caos, según R. L. Devaney.

Capítulo 2

Transitividad

2.1. Introducción

Si (X, f) es un sistema dinámico y $x \in X$, entonces la **órbita** de x bajo f la definimos como el conjunto

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

Si $A \subset X$, la órbita de A bajo f, es el conjunto

$$\{A, f(A), f^2(A), f^3(A), \ldots\}$$

donde $f^k(A)$ se define de igual forma que $f^k(x)$, a saber $f^0(A) = A$, $f^1(A) = f(A)$ y, para $k \geq 2$, $f^k(A) = f\left(f^{k-1}(A)\right)$.

Informalmente, decimos que una *propiedad dinámica* en (X, f), es una propiedad que involucra la órbita bajo f, de uno o varios puntos de X, o bien de uno o varios subconjuntos de X. Por ejemplo "tener un punto con órbita finita" es una propiedad dinámica, lo mismo que "tener un punto con órbita densa". Otras propiedades dinámicas serán descritas en el presente capítulo.

Si (X, f) es un sistema dinámico donde $f\colon X \to X$ es una función cerrada (y, por supuesto continua) entonces, por el Corolario 1.39, las funciones inducidas

$$CL(f)\colon CL(X) \to CL(X),\ \ 2^f\colon 2^X \to 2^X,\ \ CLC(f)\colon CLC(X) \to CLC(X)$$

y $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ son continuas. Más aún, si X es T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces la función inducida $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ es continua. En dichas situaciones

$$(CL(X), CL(f)), \quad (2^X, 2^f), \quad (CLC(X), CLC(f)), \quad (C(X), C(f))$$

y $(F_n(X), F_n(f))$ son sistemas dinámicos. Diremos que (X, f) es el *sistema dinámico base* de los sistemas dinámicos

$$(CL(X), CL(f)), \quad (2^X, 2^f), \quad (CLC(X), CLC(f)), \quad (C(X), C(f))$$

y $(F_n(X), F_n(f))$. Diremos también que f es la *función base* de las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ y $F_n(f)$.

Es natural preguntarse si una propiedad dinámica definida en algunos de estos sistemas dinámicos (incluyendo a (X, f)), produce la misma o bien otra propiedad dinámica en el resto de los sistemas dinámicos. Por ejemplo si (X, f) tiene un punto con órbita finita, ¿necesariamente el sistema dinámico $(2^X, 2^f)$ tiene un punto con órbita finita? A lo largo del presente capítulo responderemos preguntas de este estilo. Notemos que si $A \in CL(X)$, entonces el conjunto

$$\{A, f(A), f^2(A)), f^3(A), \ldots\}$$

es la órbita de A bajo $CL(f)$. Si en su lugar $A \in 2^X$, entonces el conjunto anterior es la órbita de A bajo 2^f. Las mismas conclusiones se obtienen si suponemos que $A \in CLC(X)$, si $A \in C(X)$, o bien si $A \in F_n(X)$.

2.2. Funciones transitivas

En buena medida, esta sección y las siguientes dos, presentan resultados del artículo [22]. En tal se trata la siguiente propiedad dinámica.

Definición 2.1. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que f es* ***topológicamente transitiva*** *si para cada par U y V de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

En adelante, a las funciones topológicamente transitivas, las llamaremos simplemente funciones transitivas. En la Sección 2.8 veremos ejemplos de funciones transitivas. Notemos que si $f\colon X \to X$ es transitiva, entonces para cada par de abiertos y no vacíos U y V de X, es posible encontrar un punto en U cuya órbita bajo f intersecta a V, y también es posible encontrar un punto en V cuya órbita bajo f intersecta a U.

En [14, p. 80] se dice que la noción de transitividad se debe a G. D. Birkhoff, quien la utilizó en 1920. Informalmente, una función continua es transitiva si posee puntos que eventualmente se mueven, bajo iteración, de una vecindad "arbitrariamente pequeña" a cualquier otra. Por tanto, el sistema dinámico no se puede ver como la unión de dos abiertos, ajenos e invariantes bajo la función.

En algunos textos, a las funciones transitivas se les llama *regionalmente transitivas*, *topológicamente ergódicas*, *topológicamente indescomponibles*, *topológicamente irreducibles* o bien *nomádicas*.

En esta sección vamos a mostrar varias propiedades de las funciones transitivas. En algunas ocasiones utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Sean X un conjunto y $f : X \to X$ una función. Si A y B son dos subconjuntos no vacíos de X, tenemos que*

$$f(A) \cap B \neq \emptyset \quad \textit{si y sólo si} \quad A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Demostración. Supongamos primero que $f(A) \cap B \neq \emptyset$ y tomemos un punto $b \in f(A) \cap B$. Como $b \in f(A)$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Luego $a \in A \cap f^{-1}(B)$ y, por tanto, $A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ y tomemos un punto $a \in A \cap f^{-1}(B)$. Como $a \in f^{-1}(B)$, tenemos que $f(a)$ es un elemento de B y también de $f(A)$, pues $a \in A$. Luego $f(A) \cap B \neq \emptyset$. □

Vamos a probar ahora que, bajo una función transitiva, las preimágenes de abiertos no vacíos son no vacías.

Teorema 2.3. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función transitiva. Si U es un abierto no vacío en X, entonces $f^{-1}(U)$ es no vacío. Además $f^{-k}(U) = (f^k)^{-1}(U) \neq \emptyset$, para cada abierto no vacío U en X y cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. Como X y U son abiertos no vacíos en X y f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(X) \cap U \neq \emptyset$. Notemos que $f^n(X) \subset f(X)$, así que $f(X) \cap U \neq \emptyset$. Luego $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Notemos que $f^{-0}(U) = U \neq \emptyset$. Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que $f^{-n}(U) \neq \emptyset$. Entonces $f^{-n}(U)$ es un abierto no vacío en X y, por lo probado al principio, $f^{-(n+1)}(U) = f^{-1}\left(f^{-n}(U)\right) \neq \emptyset$. Esto prueba la segunda parte del teorema. □

Corolario 2.4. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función transitiva. Si U es un abierto no vacío en X, entonces los conjuntos*

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U) \quad y \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(U)$$

son abiertos, no vacíos y densos en X.

Demostración. Como U es un abierto no vacío en X, por el Teorema 2.3, $f^{-k}(U) \neq \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego A y B son no vacíos. Como cada iteración de f es una función continua, $f^{-k}(U)$ es un abierto en X, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces A y B son abiertos en X. Para ver que también son densos, sea V un abierto no vacío en X. Como f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(V) \cap U \neq \emptyset$. Por el Lema 2.2, esto implica que $V \cap f^{-k}(U) \neq \emptyset$ y, como $f^{-k}(U) \subset A \cap B$, sucede que $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap B \neq \emptyset$. Luego A y B son densos en X. $\square$

Teorema 2.5. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada abierto no vacío U en X, el conjunto*

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(U)$$

es denso en X, entonces f es transitiva.

Demostración. Tomemos dos abiertos no vacíos U y V en X. Por hipótesis, el conjunto

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(V)$$

es denso en X. Luego $U \cap B \neq \emptyset$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Esto implica, por el Lema 2.2, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ y, por tanto, f es transitiva. $\square$

Un espacio topológico X es de *Fréchet* si para cada $A \subset X$ y cada $x \in \mathrm{Cl}_X(A)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \rightsquigarrow x$. Es conocido que los espacios primero numerables y, por tanto también los espacios métricos, son de Fréchet ([9, Teorema 1.6.14, p. 53]). Tenemos también el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua de un espacio X que es secuencialmente compacto, a un espacio Y que es de Fréchet y T_2. Entonces f es cerrada.*

Demostración. Supongamos que $A \subset X$ es cerrado en X. Para ver que $f(A)$ es cerrado en Y, tomemos un punto $y \in \mathrm{Cl}_Y(f(A))$. Como Y es de Fréchet existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $f(A)$ tal que $y_i \rightsquigarrow y$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $x_i \in A_i$ tal que $y_i = f(x_i)$. Como X es secuencialmente compacto y A es cerrado en X, resulta que A es secuencialmente compacto ([9, Teorema 3.10.33]). Entonces la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en A tiene una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, que converge a un elemento $x \in A$. Por la continuidad de f se tiene que $y_{i_j} = f\left(x_{i_j}\right) \rightsquigarrow f(x)$. Como también $y_{i_j} \rightsquigarrow y$ y los límites de sucesiones en Y son únicos (pues Y es T_2), resulta que $y = f(x)$. Esto implica que $y \in f(A)$. Por tanto $\mathrm{Cl}_Y(f(A)) \subset f(A)$ y entonces $f(A)$ es cerrado en X. Esto prueba que f es cerrada. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función transitiva. Si alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

1) *f es cerrada;*

2) *X es de Fréchet, secuencialmente compacto y T_2;*

3) *X es métrico y compacto;*

entonces f es suprayectiva.

Demostración. Notemos primero que si se cumple 3), entonces se cumple 1), pues toda función continua de un espacio compacto a un espacio T_2 es cerrada. También, por el Teorema 2.6, si se cumple 2) entonces se cumple 1). Esto muestra que siempre se cumple 1).

Supongamos ahora que f no es suprayectiva. Puesto que f es cerrada, X y $X - f(X)$ son abiertos no vacíos en X. Como f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(X) \cap (X - f(X)) \neq \emptyset$. Puesto que $f^n(X) \subset f(X)$, resulta que $f^n(X) \cap (X - f(X)) = \emptyset$. Esto es una contradicción, así que f es suprayectiva. $\square$

2.2.1. Funciones exactas

Un concepto relacionado con la transitividad es el siguiente.

Definición 2.8. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que f es **exacta** si para todo abierto y no vacío U en X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.*

Teorema 2.9. *Toda función exacta es transitiva y suprayectiva.*

Demostración. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función exacta. Para ver que f es suprayectiva, tomemos $b \in X$. Como X es un abierto no vacío en X y f es exacta, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(X) = X$. Tomemos $x \in X$ tal que $f^k(x) = b$. Entonces $k - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a = f^{k-1}(x)$ es un elemento de X tal que $f(a) = f\left(f^{k-1}(x)\right) = f^k(x) = b$. Esto prueba que f es suprayectiva.

Para ver que f es transitiva, sean U y V dos abiertos no vacíos en X. Como f es exacta, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$. Entonces $f^n(U) \cap V = X \cap V = V \neq \emptyset$. Esto muestra que f es transitiva. $\square$

2.2.2. Transitividad y órbitas densas

Como haremos ver en la presente subsección, bajo ciertas condiciones, la transitividad de una función f, está ligada con la existencia de un punto cuya órbita bajo f es densa y, también, con la existencia de un punto cuyo ω-conjunto límite es el total.

Teorema 2.10. *Sean X un espacio T_1 sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Si existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que el conjunto

$$\operatorname{orb}(x, f) = \left\{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

es denso en X. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Como X no tiene puntos aislados, U y V son infinitos, por el Lema 1.49. En particular $U \cap (X - \{x\})$ es un abierto no vacío en X y, como $\operatorname{orb}(x, f)$ es denso en X, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(x) \in U \cap (X - \{x\})$. Puesto que $f^0(x) = x$ y $f^k(x) \in X - \{x\}$, necesariamente $k \in \mathbb{N}$. Hagamos

$$W = V - \left\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x)\right\}.$$

Como V es infinito y X es T_1, sucede que W es un abierto y no vacío en X. Por la densidad de $\operatorname{orb}(x, f)$, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^m(x) \in W$. De la definición de W se sigue que $m > k$, por lo que $m - k \in \mathbb{N}$. Como $f^k(x) \in U$ y $f^{m-k}\left(f^k(x)\right) = f^m(x) \in V$, tenemos que $f^{m-k}(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto muestra que f es transitiva. $\square$

Corolario 2.11. *Sean X un espacio métrico y compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Si existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X, entonces f es transitiva.*

Demostración. Basta observar que los espacios métricos son T_1 y aplicar el Teorema 2.10. $\square$

Consideremos $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$, con la topología usual que hereda de $\mathbb{R}$. Notemos que X es un espacio T_1 con puntos aislados. Sea $f\colon X \to X$ la función definida como sigue: $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$. Entonces f es continua. Además $\operatorname{orb}(1, f) = \left\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en X. Tomemos ahora $U = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $V = \{1\}$. Notemos que U y V son abiertos no vacíos en X y que, de la definición de f, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Entonces f no es transitiva. Por consiguiente, en general, de la existencia de un punto en X cuya órbita bajo f sea densa en X, no se deduce que f es transitiva.

Definición 2.12. *Sean X un espacio topológico y $M \subset X$. Decimos que M es* ***denso en ninguna parte de*** *X si $\operatorname{Int}_X(\overline{M}) = \emptyset$.*

En la Sección 2.8, veremos que de la transitividad no se sigue, en general, que existe un punto cuya órbita es densa. Sin embargo, como probaremos a continuación, en los espacios segundo numerables y de la segunda categoría, lo anterior sí se cumple. Recordemos que un espacio topológico X es de la *segunda categoría* si X no se puede escribir como una unión numerable $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ de subconjuntos A_i de X que son densos en ninguna parte de X.

Teorema 2.13. *Sean X un espacio segundo numerable y de la segunda categoría y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X.*

Demostración. Vamos a demostrar que si X es segundo numerable, f es transitiva y la órbita de ningún punto de X es densa en X, entonces X no es de la segunda categoría.

Supongamos, por tanto, que bajo f la órbita de ningún punto de X es densa en X. Como X es segundo numerable, X posee una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Podemos suponer que cada elemento de $\mathcal{B}$ es no vacío. Ahora bien, para cada $x \in X$, como $\operatorname{orb}(x, f)$ no es denso en X, existe un abierto no vacío V_x en X tal que $V_x \cap \operatorname{orb}(x, f) = \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ es una base de X, existe $U_{n(x)} \in \mathcal{B}$ tal que $U_{n(x)} \subset V_x$. Luego

$$U_{n(x)} \cap \operatorname{orb}(x, f) = \emptyset$$

y, por tanto, $f^k(x) \notin U_{n(x)}$, para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Hagamos

$$W_{n(x)} = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}\left(U_{n(x)}\right).$$

Por el Corolario 2.4, cada $W_{n(x)}$ es un subconjunto abierto, no vacío y denso de X. Luego cada $W_{n(x)}$ intersecta a cualquier abierto no vacío de X. Para cada $x \in X$, definamos ahora

$$A_{n(x)} = X - W_{n(x)}.$$

Como cada conjunto $W_{n(x)}$ es abierto en X, todo conjunto $A_{n(x)}$ es cerrado en X. Además, como cada conjunto $W_{n(x)}$ intersecta a cualquier abierto y no vacío de X, el conjunto $A_{n(x)}$ no contiene un abierto y no vacío de X. Vamos a probar ahora que $x \in A_{n(x)}$. Para ver esto supongamos, por el contrario, que $x \in W_{n(x)}$. Entonces existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \in f^{-k}\left(U_{n(x)}\right)$. Luego $f^k(x) \in U_{n(x)}$. Como esto es una contradicción tenemos que $x \notin W_{n(x)}$, por lo que cada conjunto $A_{n(x)}$ contiene a x. Esto muestra que todos los conjuntos $A_{n(x)}$ son cerrados y no vacíos en X y, además, que

$$X = \bigcup_{x \in X} A_{n(x)}.$$

Notemos ahora que la unión anterior es numerable. Para ver esto recordemos que cada $x \in X$ produjo un elemento $U_{n(x)}$ en la familia numerable $\mathcal{B}$. Luego $U_{n(x)}$ produjo el conjunto $W_{n(x)}$ y éste, a su vez, produjo el conjunto $A_{n(x)}$. Por tanto la familia $\left\{A_{n(x)} \colon x \in X\right\}$ es numerable.

De todo lo anterior deducimos que X se puede escribir como una unión numerable de subconjuntos de X, cuya cerradura tiene interior vacío. Entonces X no es de la segunda categoría. En vista de que esto es una contradicción, deducimos que existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X. $\square$

Para el siguiente resultado, recordaremos brevemente un resultado sobre las categorías de Baire.

Teorema 2.14. *Si X es un espacio métrico completo y no vacío, entonces X no puede escribirse como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte de X. En particular, si*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

con A_k cerrado en X, para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces para algún $k \in \mathbb{N}$, el conjunto A_k contiene un abierto no vacío de X.

Una demostración del teorema anterior puede verse en [19, Teorema 4.7-2, p. 247].

Corolario 2.15. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X.*

Demostración. Como X es métrico y compacto, X es completo (ver [8, Capítulo XI, Teorema 4.1, p. 233]) y segundo numerable (ver [8, Capítulo XIV, Corolario 2.4, p. 294]). Supongamos que, bajo f, la órbita de ningún punto de X es densa en X. Entonces, como indicamos en el primer párrafo de la prueba del Teorema 2.13, obtenemos que $X = \bigcup_{x\in X} A_{n(x)}$ es una unión numerable de subconjuntos cerrados de X con interior vacío. Como esto contradice el Teorema 2.14, deducimos que existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X. □

Combinando los teoremas 2.10 y 2.13, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.16. *Sea X un espacio segundo numerable, de la segunda categoría, T_1 y sin puntos aislados. Supongamos que $f\colon X \to X$ es una función continua. Entonces f es transitiva si y sólo si existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X.*

Combinando los corolarios 2.11 y 2.15, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *Sean X un espacio métrico y compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces f es transitiva si y sólo si existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X.*

En el siguiente teorema, mostramos condiciones bajo las cuales el ω-conjunto límite, de un punto con órbita densa, es el total. Recordemos que el conjunto $\omega(x, f)$ fue definido en la Sección 1.5

Teorema 2.18. *Sea X un espacio T_1 y primero numerable. Supongamos que $f\colon X \to X$ es una función continua y suprayectiva. Si existe $x \in X$ tal que $\operatorname{orb}(x, f)$ es denso en X, entonces $\omega(x, f) = X$.*

Demostración. Como f es suprayectiva, existe $y \in X$ tal que $f(y) = x$. Supongamos primero que $y \in \operatorname{orb}(x, f)$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $y = f^m(x)$. Luego $x = f(y) = f^{m+1}(x)$. Esto implica que $\operatorname{orb}(x, f) \subset \omega(x, f)$

y, como $\text{orb}(x, f)$ es denso en X y $\omega(x, f)$ es cerrado en X (parte 2) del Teorema 1.61), resulta que $\omega(x, f) = X$.

Supongamos ahora que $y \notin \text{orb}(x, f)$. Como X es primero numerable, existe una base local numerable $\mathcal{W}_y = \{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ en y. Hagamos $B_1 = U_1$ y $B_{m+1} = B_m \cap U_{m+1}$. Entonces $\mathcal{B}_y = \{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable en y tal que $B_{m+1} \subset B_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Hagamos $s_1 = 1$. Como $\text{orb}(x, f)$ es denso en X, existe $r_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{r_1}(x) \in B_{s_1}$. Por hipótesis $y \notin \text{orb}(x, f)$, así que $f^{r_1}(x) \neq y$. Como X es T_1, $B_{s_1} \cap (X - \{f^{r_1}(x)\})$ es un abierto en X que tiene a y. Entonces existe $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{s_2} \subset B_{s_1} \cap (X - \{f^{r_1}(x)\}) .$$

Notemos que $s_2 > s_1$. Puesto que $\text{orb}(x, f)$ es denso en X, existe $r_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{r_2}(x) \in B_{s_2}$. Notemos que $r_2 \neq r_1$ y $f^{r_1}(x) \neq f^{r_2}(x)$. Además $y \neq f^{r_2}(x)$, pues $y \notin \text{orb}(x, f)$. Como X es T_1, $B_{s_2} \cap (X - \{f^{r_2}(x)\})$ es un abierto en X que tiene a y. Entonces existe $s_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{s_3} \subset B_{s_2} \cap (X - \{f^{r_2}(x)\}) .$$

Por la construcción de B_{s_3} y de $\mathcal{B}_y$, tenemos que $s_3 > s_2$. Puesto que $\text{orb}(x, f)$ es denso en X, existe $r_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{r_3}(x) \in B_{s_3}$. Notemos que $r_3 \neq r_2$, $r_3 \neq r_1$, $f^{r_3}(x) \neq f^{r_1}(x)$ y $f^{r_3}(x) \neq f^{r_2}(x)$. Además $y \neq f^{r_3}(x)$, pues $y \notin \text{orb}(x, f)$. Continuando este proceso, es posible construir una sucesión $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ con las siguientes propiedades:

a) $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente;

b) $f^{r_i}(x) \in B_{s_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$;

c) $r_i \neq r_j$ y $f^{r_i}(x) \neq f^{r_j}(x)$, para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$.

Entonces y es un punto de acumulación de $\text{orb}(x, f)$. Para ver esto sean V un abierto en X tal que $y \in V$ y $K \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_y$ es una base local en y, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subset V$. Por a), existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $s_i > m$. Luego $B_{s_i} \subset B_m$. Por construcción, B_{s_i} contiene una infinidad de elementos de la forma $f^{r_i}(x)$. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $r_i \geq K$. Luego $f^{r_i}(x) \in B_{s_i} \subset V$. Esto muestra que y es un punto de acumulación de $\text{orb}(x, f)$. Luego $y \in \omega(x, f)$.

Como $y \in \omega(x, f)$, por la parte 3) del Teorema 1.61, $x = f(y) \in f(\omega(x, f)) \subset \omega(x, f)$. Entonces $x \in \omega(x, f)$. Aplicando de nueva cuenta f y la parte 3) del Teorema 1.61, tenemos que $f(x) \in f(\omega(x,f)) \subset \omega(x,f)$. Entonces $f(x) \in \omega(x,f)$. Continuando este proceso deducimos que $\operatorname{orb}(x,f) \subset \omega(x,f)$. Como $\operatorname{orb}(x,f)$ es denso en X y $\omega(x,f)$ es cerrado en X (por 2) del Teorema 1.61), resulta que $\omega(x,f) = X$. □

Tenemos también el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Sea X un espacio T_1, segundo numerable y de la segunda categoría. Supongamos que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Si f es transitiva, entonces existe $x \in X$ tal que* $\operatorname{orb}(x,f)$ *es denso en X y $\omega(x,f) = X$.*

Demostración. Por el teorema 2.13, existe $x \in X$ tal que $\overline{\operatorname{orb}(x,f)} = X$. Luego, por el Teorema 2.18, $\omega(x,f) = X$.

□

Corolario 2.20. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces existe $x \in X$, tal que* $\operatorname{orb}(x,f)$ *es denso en X y $\omega(x,f) = X$.*

Demostración. Como X es métrico y compacto, X es completo, segundo numerable y T_1. Al ser X métrico y completo, por el Teorema 2.14, X es de la segunda categoría. Además f es cerrada. Entonces el resultado se sigue del Teorema 2.19. □

Ahora mostraremos que, de la existencia de un punto cuyo ω-conjunto límite es el total, se sigue que f es transitiva.

Teorema 2.21. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que $\omega(x,f) = X$, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Tomemos $y \in U$ y $z \in V$. De $\omega(x,f) = X$, se infiere que $y \in \omega(x,f)$. Entonces y es un punto de acumulación de $\operatorname{orb}(x,f)$ y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$. Como $z \in \omega(x,f)$, tenemos que z es un punto de acumulación de $\operatorname{orb}(x,f)$. Luego existe $n \geq m+1$ tal que $f^n(x) \in V$. Notemos que $n - m \in \mathbb{N}$. Además, $f^m(x) \in U$ y $f^{n-m}(f^m(x)) = f^n(x) \in V$. Luego $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto muestra que f es transitiva. □

Combinando el Teorema 2.19 y el Teorema 2.21, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Sea X un espacio T_1, segundo numerable y de la segunda categoría. Supongamos que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Entonces f es transitiva si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*

Si combinamos el Corolario 2.20 y el Teorema 2.21, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.23. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces f es transitiva si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*

De todo lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.24. *Sea X un espacio segundo numerable, de la segunda categoría, T_1 y sin puntos aislados. Supongamos que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es transitiva;*

2) *existe $x \in X$ tal que $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X;*

3) *existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*

Demostración. Por el Teorema 2.16, 1) y 2) son equivalentes. Por el Teorema 2.22, 1) y 3) son equivalentes. □

Combinando el Teorema 2.17 y el Teorema 2.23, tenemos el siguiente resultado, válido en espacios métricos y compactos sin puntos aislados.

Teorema 2.25. *Sean X un espacio métrico, compacto y sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es transitiva;*

2) *existe $x \in X$ tal que $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X;*

3) *existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*

Si X es un continuo, entonces X es un espacio métrico, compacto y sin puntos aislados. Entonces del Teorema 2.25, para una función continua $f\colon X \to X$ definida en un continuo X, la transitividad de f equivale a la existencia de un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X y, también, equivale a la existencia de un punto en X cuyo ω-conjunto límite bajo f es X. En el Capítulo 3 utilizaremos con frecuencia este hecho.

Algunos de los teoremas anteriores fueron inspirados de [24, Proposición 1.1, p. 354], en el que se prueba que si X es un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua, entonces:

1) cuando X no posee puntos aislados, de la existencia de un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X, se sigue que f es transitiva;

2) cuando X es separable y de la segunda categoría, entonces de la transitividad de f, se sigue que existe un punto en X cuya órbita bajo f es densa en X.

La parte 1) se sigue ahora del Teorema 2.10 y del hecho de que los espacios métricos son T_1. La parte 2) se sigue del Teorema 2.13 y del hecho de que, en los espacios métricos, ser separable es equivalente a ser segundo numerable (ver [8, Capítulo IX, Teorema 5.6, p. 187]).

2.3. Transitividad en las funciones inducidas

En la presente sección, vamos a probar ahora que del hecho de que una función inducida sea transitiva, se sigue que la función base también es transitiva. También mostraremos condiciones, bajo las cuales, de la existencia de un punto con órbita densa en una función inducida, se deduce la existencia de un punto con órbita densa en la función base. Lo mismo haremos con el ω-conjunto límite. Recordemos que si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces

$$\Gamma(A) = \{K \in CL(X)\colon K \subset A\}.$$

Como vimos en el capítulo anterior, si A es un abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ es un abierto en $CL(X)$. Más aún, por el Teorema 1.16, si X es T_1 y A es un abierto no vacío en X, entonces $\Gamma(A)$ es un abierto no vacío de $CL(X)$. Por el mismo teorema si $B \subset X$ es tal que $\Gamma(B) \neq \emptyset$, entonces $B \neq \emptyset$.

El siguiente resultado aparece probado en [22, Lema 3.5, p. 101], para espacios métricos y funciones continuas.

Lema 2.26. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función cerrada. Entonces*

1) $\Gamma(A \cap B) = \Gamma(A) \cap \Gamma(B)$;

2) $CL(f)(\Gamma(A)) \subset \Gamma(f(A))$, *para cada* $A \subset X$;

3) $(CL(f))^n = CL\left(f^n\right)$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La prueba de 1) es la parte 4) del Lema 1.17. Aunque la prueba de 2), en un contexto más general, está incluida en la demostración del Teorema 1.43, podemos dar aquí otra prueba. Sea $K \in CL(f)(\Gamma(A))$. Entonces $K \in CL(X)$ y existe $L \in \Gamma(A)$ tal que $CL(f)(L) = f(L) = K$. Como $L \in CL(X)$ y $L \subset A$, sucede que $f(L) \subset f(A)$. Luego $K \subset f(A)$ y, así, $K \in \Gamma(f(A))$. Esto prueba 2).

Vamos a probar 3) por inducción. El caso $n = 1$ es obvio. Supongamos entonces que $(CL(f))^k = CL\left(f^k\right)$, para un número natural k. Entonces, para cada $A \in CL(X)$,

$$(CL(f))^{k+1}(A) = \Big((CL(f))^k \circ CL(f)\Big)(A) = \Big((CL(f))^k(CL(f)(A))\Big) =$$
$$= (CL(f))^k(f(A)) = CL(f^k)(f(A)) = f^k(f(A)) = f^{k+1}(A) = CL(f^{k+1})(A).$$

Luego $(CL(f))^{k+1} = CL\left(f^{k+1}\right)$ y, por inducción, 3) es cierto. □

El siguiente resultado aparece probado en [22, Teorema 3.6, p. 101], para espacios métricos y funciones continuas.

Teorema 2.27. *Sean X un espacio T_1 y $f : X \to X$ una función continua y cerrada. Si $CL(f)\colon CL(X) \to CL(X)$ es transitiva, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean A y B dos abiertos no vacíos de X. Como X es T_1, $\Gamma(A)$ y $\Gamma(B)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $CL(X)$. Por la transitividad de $CL(f)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(CL(f))^k(\Gamma(A)) \cap \Gamma(B) \neq \emptyset.$$

Por la parte 3) del Lema 2.26 tenemos

$$(CL(f))^k(\Gamma(A)) \cap \Gamma(B) = CL(f^k)(\Gamma(A)) \cap \Gamma(B).$$

Usando ahora las partes 1) y 2) del mismo lema, sucede que

$$\emptyset \neq CL(f^k)(\Gamma(A)) \cap \Gamma(B) \subset \Gamma(f^k(A)) \cap \Gamma(B) = \Gamma(f^k(A) \cap B).$$

De esta manera $\Gamma(f^k(A) \cap B) \neq \emptyset$, así que $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$. Esto prueba que f es transitiva. □

Utilizando la misma demostración que dimos en el teorema anterior, se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 2.28. *Sean X un espacio T_1, $f : X \to X$ una función continua y cerrada y $n \in \mathbb{N}$. Si alguna de las funciones inducidas*

$$2^f : 2^X \to 2^X, \quad CLC(f) : CLC(X) \to CLC(X), \quad C(f) : C(X) \to C(X)$$

o bien $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(X)$ es transitiva, entonces f es transitiva.

Más adelante, en este capítulo, veremos que el respectivo recíproco de los teoremas 2.27 y 2.28 no es cierto.

2.3.1. ω-conjunto límite en las funciones inducidas

Como ya indicamos, la transitividad se suele relacionar con la existencia de puntos con órbita periódica y con la existencia de puntos cuyo ω-conjunto límite es el total. En este sentido tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.29. *Supongamos que X es un espacio T_1 y primero numerable. Sea $f : X \to X$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si existe $B \in CL(X)$ tal que $\omega(B, CL(f)) = CL(X)$, entonces para cada $A \in \operatorname{orb}(B, CL(f))$ y cada $x \in A$, tenemos que $\operatorname{orb}(x, f)$ es denso en X y $\omega(x, f) = X$.*

Demostración. Como $A \in \operatorname{orb}(B, CL(f))$, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $A = (CL(f))^k(B) = f^k(B)$. Tomemos $x \in A$. Vamos a probar primero que $\operatorname{orb}(x, f)$ es denso en X. Sea U un abierto no vacío en X. Es claro que $\Gamma(U)$ es abierto no vacío en $CL(X)$. Como $\omega(B, CL(f)) = CL(X)$, existe $D \in \omega(B, CL(f))$ tal que $D \in \Gamma(U)$. Además, D es un punto de acumulación de $\operatorname{orb}(B, CL(f))$, entonces podemos encontrar $n > k$ tal que $CL(f)^n(B) = f^n(B) \in \Gamma(U)$. Así,

$$CL(f)^{n-k}(A) = CL(f)^{n-k}(CL(f)^k(B)) = CL(f)^n(B) = f^n(B) \in \Gamma(U).$$

Es decir, $CL(f)^{n-k}(A) \subset U$. Pero $x \in A$, entonces $f^{n-k}(x) \in U$. Hemos probado entonces que $\operatorname{orb}(x, f) \cap U \neq \emptyset$, así que, el conjunto $\operatorname{orb}(x, f)$ es denso en X.

Usando el Teorema 2.18, como X es primero numerable, tenemos que $\omega(x, f) = X$ para cada $x \in A$. $\square$

El teorema anterior sigue siendo válido, con la misma demostración, si cambiamos $CL(X)$ por otro hiperespacio y $CL(f)$ por su correspondiente función inducida. Tenemos así el siguiente resultado y, para enunciar éste y otros resultados de la presente sección, supondremos que si $f\colon X \to X$ es una función continua, $n \in \mathbb{N}$ y

$$\Lambda(X) \in \{CL(X), 2^X, CLC(X), C(X), F_n(X)\},$$

entonces $\Lambda(f)\colon \Lambda(X) \to \Lambda(X)$ es la función inducida al hiperespacio seleccionado.

Teorema 2.30. *Supongamos que X es un espacio T_1 y primero numerable y que $f\colon X \to X$ es una función continua, cerrada y suprayectiva. Supongamos, además, que existe $B \in \Lambda(X)$ tal que $\omega(B, \Lambda(f)) = \Lambda(X)$. Entonces para cada $A \in \mathrm{orb}(B, \Lambda(f))$ y cada $x \in A$, tenemos que $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X y $\omega(x, f) = X$.*

En el siguiente teorema mantendremos la notación $\Lambda(X)$ y $\Lambda(f)$, como indicamos. También utilizaremos la noción de punto preperiódico, que dimos en la Definición 1.54.

Teorema 2.31. *Supongamos que X es un espacio infinito, T_1 y primero numerable y que $f\colon X \to X$ es una función continua, cerrada y suprayectiva. Supongamos, además, que existe $B \in \Lambda(X)$ tal que $\omega(B, \Lambda(f)) = \Lambda(X)$. Entonces para cada $A \in \mathrm{orb}(B, \Lambda(f))$ y cada $x \in A$, tenemos que x no es un punto preperiódico de f.*

Demostración. Si x es preperiódico, entonces $\mathrm{orb}(x, f)$ es finito y, por tanto, cerrado en X. Además, por el Teorema 2.30, $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X. Luego $X = \mathrm{orb}(x, f)$. Esto implica que X es finito. Como esto contradice el hecho de que X es infinito, deducimos que x no es un punto preperiódico de f. □

Si X es un continuo, entonces X es infinito, T_1 y primero numerable. Si $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces f es cerrada. Si suponemos además que $\Lambda(f)$ es transitiva, entonces f es transitiva (teoremas 2.27 y 2.28). Por el Teorema 2.7, f es suprayectiva. Además, como $\Lambda(f)$ es transitiva, por el Teorema 2.20, existe $B \in \Lambda(X)$ tal que $\omega(B, \Lambda(f)) = \Lambda(X)$. Entonces, aplicando los teoremas 2.30 y 2.31, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.32. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Supongamos que $\Lambda(f)$ es transitiva y que $B \in \Lambda(X)$ es tal que $\omega(B, \Lambda(f)) = \Lambda(X)$. Entonces para cada $A \in \mathrm{orb}(B, \Lambda(f))$ y cada $x \in A$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $\text{orb}(x, f)$ *es denso en* X;

2) $\omega(x, f) = X$;

3) x *no es un punto preperiódico de* f.

El Teorema 2.32, cuando $\Lambda(X)$ es 2^X o bien $C(X)$, corresponde a los teoremas 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10 de [1].

2.3.2. Órbita densa en las funciones inducidas

Vamos ahora a presentar un resultado similar al Teorema 2.29, pero suponiendo ahora que, para la función inducida, hay un elemento con órbita densa.

Teorema 2.33. *Supongamos que* X *es un espacio* T_1 *y que* $f\colon X \to X$ *es una función continua y cerrada. Si existe* $B \in CL(X)$ *tal que* $\text{orb}(B, CL(f))$ *es denso en* $CL(X)$*, entonces para cada* $x \in B$*, el conjunto* $\text{orb}(x, f)$ *es denso en* X*. Más aún, si* X *no tiene puntos aislados, entonces para cada* $A \in \text{orb}(B, CL(f))$ *y cada* $a \in A$*, el conjunto* $\text{orb}(a, f)$ *es denso en* X.

Demostración. Supongamos que $B \in CL(X)$ es tal que $\text{orb}(B, CL(f))$ es denso en $CL(X)$. Supongamos también que X es T_1 y que $x \in B$. Tomemos un abierto no vacío U en X. Como $\text{orb}(B, CL(f))$ es denso en $CL(X)$, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(B) = (CL(f))^k(B) \in \Gamma(U)$. Luego $f^k(B) \subset U$ y, como $x \in B$, sucede que $f^k(x) \in U$. Esto muestra que $U \cap \text{orb}(x, f) \neq \emptyset$. Luego $\text{orb}(x, f)$ es denso en X.

Supongamos ahora que X es un espacio T_1 sin puntos aislados. Entonces $CL(X)$ es T_1 y no tiene puntos aislados (Teoremas 1.48 y 1.50). Sean $A \in \text{orb}(B, CL(f))$ y $a \in A$. Por el Teorema 1.65, aplicado a $CL(X)$ con la función $CL(f)$, deducimos que $\text{orb}(A, CL(f))$ es denso en $CL(X)$. Luego, por la primera parte del teorema, $\text{orb}(a, f)$ es denso en X. $\square$

Por el Teorema 1.51, la prueba del teorema anterior puede ser adaptada para obtener los siguientes resultados. Utilizaremos la notación $\Lambda(f)$ y $\Lambda(X)$ como ya indicamos.

Teorema 2.34. *Supongamos que* X *es un espacio* T_1 *y que* $f\colon X \to X$ *es una función continua y cerrada. Si existe* $B \in \Lambda(X)$ *tal que* $\text{orb}(B, \Lambda(f))$ *es denso en* $\Lambda(X)$*, entonces para cada* $x \in B$*, el conjunto* $\text{orb}(x, f)$ *es denso en* X.

Teorema 2.35. *Supongamos que X es un espacio T_1 sin puntos aislados. Si $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada, entonces:*

1) *si existe $B \in 2^X$ tal que* $\operatorname{orb}(B, 2^f)$ *es denso en 2^X, entonces para cada $A \in \operatorname{orb}(B, 2^f)$ y cada $a \in A$, el conjunto* $\operatorname{orb}(a, f)$ *es denso en X;*

2) *si existen $n \in \mathbb{N}$ y $B \in F_n(X)$ tales que* $\operatorname{orb}(B, F_n(f))$ *es denso en 2^X, entonces para cada $A \in \operatorname{orb}(B, F_n(f))$ y cada $a \in A$, el conjunto* $\operatorname{orb}(a, f)$ *es denso en X.*

Teorema 2.36. *Supongamos que X es un espacio T_1 y que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Entonces:*

1) *si $CLC(X)$ no tiene puntos aislados y existe $B \in CLC(X)$ tal que* $\operatorname{orb}(B, CLC(f))$ *es denso en $CLC(X)$, entonces para cada $A \in$* $\operatorname{orb}(B, CLC(f))$ *y cada $a \in A$, el conjunto* $\operatorname{orb}(a, f)$ *es denso en X;*

2) *si $C(X)$ no tiene puntos aislados y existe $B \in C(X)$ tal que* $\operatorname{orb}(B, C(f))$ *es denso en $C(X)$, entonces para cada $A \in \operatorname{orb}(B, C(f))$ y cada $a \in A$, el conjunto* $\operatorname{orb}(a, f)$ *es denso en X.*

2.3.3. Transitividad en las funciones inducidas

El siguiente resultado, que generaliza los teoremas 2.27 y 2.28, aparece en [10, Teorema 3.1(1), p. 1382], para espacios métricos y la función inducida 2^f de la función continua f.

Teorema 2.37. *Sean X un espacio T_1 y $f : X \to X$ una función continua y cerrada. Sea $\mathcal{L} \subset CL(X)$ tal que $F_1(X) \subset \mathcal{L}$ y $CL(f)(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Si $CL(f)_{|\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es transitiva, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos y no vacíos de X. Queremos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Sabemos que $\Gamma(U)$ y $\Gamma(V)$ son abiertos en $CL(X)$, así que $\mathcal{U} = \Gamma(U) \cap \mathcal{L}$ y $\mathcal{V} = \Gamma(V) \cap \mathcal{L}$ son abiertos en $\mathcal{L}$. Como

$$\emptyset \neq F_1(U) \subset \Gamma(U) \cap \mathcal{L} \quad \text{y} \quad \emptyset \neq F_1(V) \subset \Gamma(V) \cap \mathcal{L},$$

tenemos que $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Por ser $CL(f)_{|\mathcal{L}}$ transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(CL(f)_{|\mathcal{L}})^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Esto quiere decir que existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $f^n(W) \in \mathcal{V}$. Luego $W \in \Gamma(U) \cap \mathcal{L}$ y $f^n(W) \in \Gamma(V) \cap \mathcal{L}$. Con esto último se tiene que

$$W \subset U \quad \text{y} \quad f^n(W) \subset V.$$

Como $W \in \Gamma(U) \subset CL(X)$, resulta que W es un subconjunto cerrado y no vacío de X. Entonces si $x \in W$, tenemos que $x \in U$ y $f^n(x) \in f^n(W) \subset V$. Por lo tanto, $f^n(x) \in f^n(U) \cap V$. Esto prueba que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y, así, f es transitiva. $\square$

Notemos que si X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada, entonces

$$CL(f)_{|2^X} = 2^f, \quad CL(f)_{|CLC(X)} = CLC(f) \quad \text{y} \quad CL(f)_{|C(X)} = C(f).$$

Supongamos ahora que X es T_1 y que $n \in \mathbb{N}$. Entonces $CL(f)_{|F_n(X)} = F_n(f)$. Además los hiperespacios $CL(X)$, 2^X, $CLC(X)$, $C(X)$ y $F_n(X)$ contienen a $F_1(X)$. Entonces, por el teorema anterior, si alguna de las funciones inducidas $CL(f)$, 2^f, $CLC(f)$, $C(f)$ o $F_n(f)$ es transitiva, entonces f es transitiva. Por esta razón, el Teorema 2.37 generaliza los teoremas 2.27 y 2.28.

2.4. Funciones débilmente mezcladoras y totalmente transitivas

En la presente sección vamos a mencionar dos propiedades dinámicas relacionadas con la transitividad y, además, otros resultados que involucran la transitividad para las funciones inducidas.

2.4.1. Funciones débilmente mezcladoras

Supongamos que X es un espacio topológico y que $f\colon X \to X$ es una función continua. Consideremos en $X \times X$ la topología producto, así como la función producto $f \times f\colon X \times X \to X \times X$ definida, para $(a, b) \in X \times X$, como

$$(f \times f)(a, b) = (f(a), f(b)).$$

Por [9, Proposición 2.3.6, p. 78], $f \times f$ es continua. Cuando dicha función es transitiva, f recibe un nombre especial, como indica la siguiente definición.

Definición 2.38. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que f es* ***débilmente mezcladora*** *si $f \times f : X \times X \to X \times X$ es transitiva.*

La noción de función débilmente mezcladora, fue introducida por H. Furstenberg en 1967 en el artículo [11].

Si X es un espacio topológico y $f : X \to X$ es una función continua, entonces para cada $(a, b) \in X \times X$ y cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que

$$(f \times f)^n(a, b) = (f^n(a), f^n(b)) . \tag{2.4.1}$$

Utilizando esta propiedad, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 2.39. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Entonces f es débilmente mezcladora si y sólo si, para cada dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos primero que f es débilmente mezcladora. Tomemos dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Como $f \times f$ es transitiva y los conjuntos $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ son abiertos en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f \times f)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Tomemos $(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$ tal que $(f \times f)^n(a_1, a_2) \in V_1 \times V_2$. Esto implica, por (2.4.1), que $f^n(a_1) \in V_1$ y $f^n(a_2) \in V_2$. Luego $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Para probar la segunda parte, supongamos que A y B son dos abiertos no vacíos de $X \times X$. Entonces existen dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, tales que $U_1 \times U_2 \subset A$ y $V_1 \times V_2 \subset B$. Por hipótesis existe también $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Tomemos $(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$ tal que $f^n(a_1) \in V_1$ y $f^n(a_2) \in V_2$. Entonces $(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2 \subset A$ y, por (2.4.1),

$$(f \times f)^n(a_1, a_2) = (f^n(a_1), f^n(a_2)) \in V_1 \times V_2 \subset B.$$

Luego $(f \times f)^n(A) \cap B \neq \emptyset$ y, por tanto, f es débilmente mezcladora. $\square$

De manera más general, tenemos el siguiente resultado, el cual se prueba de la misma forma que el Teorema 2.39.

Teorema 2.40. *Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $m \in \mathbb{N}$. Entonces la función producto*

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{m-veces} : \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces} \longrightarrow \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces}$$

es transitiva si y sólo si, para cada par de familias

$$\{U_1, U_2, \ldots, U_m\} \quad y \quad \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$$

de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Vamos a probar ahora el siguiente teorema, en el que utilizamos la Definición 2.8.

Teorema 2.41. *Las funciones exactas son débilmente mezcladoras y, a su vez, las funciones débilmente mezcladoras son transitivas.*

Demostración. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función exacta. Tomemos dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Como f es exacta existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(U_1) = X$ y $f^m(U_2) = X$. Sea $k = \max\{n, m\}$. Como f es suprayectiva (Teorema 2.9), $f^k(U_1) = X = f^k(U_2)$. Luego $f^k(U_1) \cap V_1 = X \cap V_1 = V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 = X \cap V_2 = V_2 \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.39, esto implica que f es débilmente mezcladora.

Supongamos ahora que f es débilmente mezcladora. Tomemos dos abiertos no vacíos de U y V en X. Como $f \times f$ es transitiva y los conjuntos $U \times U$ y $V \times V$ son abiertos y no vacíos en $X \times X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(f \times f)^n(U \times U) \cap (V \times V) \neq \emptyset.$$

Esto implica, por (2.4.1), que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto f es transitiva. □

En [23, Ejemplo 2.1.25, p. 18] se da un ejemplo de una función continua $f \colon [0, 1] \to [0, 1]$ que es débilmente mezcladora y no exacta. En la sección 2.8 de este mismo capítulo, veremos una función transitiva (Corolario 2.57) que no es débilmente mezcladora (Teorema 2.58, inciso 2).

2.4.2. Funciones totalmente transitivas

Como sabemos, si $f \colon X \to X$ es continua y $n \in \mathbb{N}$, entonces la n-ésima función composición de f, es decir la función $f^n \colon X \to X$, es continua. Cuando cada una de estas funciones resulta ser transitiva, f también recibe un nombre especial.

Definición 2.42. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que f es* ***totalmente transitiva*** *si $f^n : X \to X$ es transitiva, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Observemos que, debido a que $f^1 = f$, si f es totalmente transitiva, entonces f es transitiva.

Más adelante, en el Teorema 2.44, veremos que las funciones débilmente mezcladoras son totalmente transitivas. Notemos primero que, en lugar de la

Definición 2.38, pudimos decir que una función $f\colon X \to X$ es 2-transitiva si la función producto $f \times f : X \times X \to X \times X$ es transitiva. Luego, a modo de generalización, decir que si $m \in \mathbb{N}$, entonces f es m-transitiva si la función producto

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{m-veces} : \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces} \longrightarrow \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces}$$

es transitiva. En estos términos el siguiente resultado, llamado el Teorema de Furstenberg, dice que si f es 2-transitiva, entonces f es m-transitiva, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.43. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezcladora, entonces*

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{m-veces} : \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces} \longrightarrow \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces}$$

es transitiva, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para cada pareja (A, B) de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, definimos

$$T(A, B) = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Vamos a mostrar dos propiedades de dichos conjuntos, a saber:

1) $T(A, B) \neq \emptyset$, para cada pareja (A, B) de abiertos no vacíos en X;

2) si (A, B) y (C, D) son dos parejas de abiertos no vacíos en X, entonces existe una pareja (E, F) de abiertos no vacíos en X tal que

$$T(E, F) \subset T(A, B) \cap T(C, D).$$

Para probar 1), sea (A, B) una pareja de abiertos no vacíos en X. Como f es débilmente mezcladora, por el Teorema 2.41, f es transitiva. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$. Luego $n \in T(A, B)$. Esto prueba 1).

Para probar 2), sean (A, B) y (C, D) dos parejas de abiertos no vacíos en X. Como f es débilmente mezcladora, por el Teorema 2.39, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(A) \cap C \neq \emptyset$ y $f^k(B) \cap D \neq \emptyset$. Por el Lema 2.2, aplicado a f^k, esto implica que $A \cap f^{-k}(C) \neq \emptyset$ y $B \cap f^{-k}(D) \neq \emptyset$. Definimos entonces

$$E = A \cap f^{-k}(C) \quad \text{y} \quad F = B \cap f^{-k}(D).$$

Entonces (E, F) es una pareja de abiertos no vacíos en X y, por 1), $T(E, F) \neq \emptyset$. Más aún, si $n \in T(E, F)$, entonces

$$\emptyset \neq f^n \left(A \cap f^{-k}(C)\right) \cap \left(B \cap f^{-k}(D)\right) \subset f^n(A) \cap B$$

y

$$\emptyset \neq f^n \left(A \cap f^{-k}(C)\right) \cap \left(B \cap f^{-k}(D)\right) \subset f^n \left(f^{-k}(C)\right) \cap f^{-k}(D).$$

Luego $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$, por lo que $n \in T(A, B)$. También $f^n\left(f^{-k}(C)\right) \cap f^{-k}(D) \neq \emptyset$. Haciendo $C' = f^n\left(f^{-k}(C)\right)$ y $g = f^k$, tenemos que $C' \cap g^{-1}(D) \neq \emptyset$. Entonces, por el Lema 2.2, $g(C') \cap D \neq \emptyset$, es decir

$$f^k \left(f^n \left(f^{-k}(C)\right)\right) \cap D \neq \emptyset.$$

Si $x \in f^k\left(f^n\left(f^{-k}(C)\right)\right) \cap D$, entonces existe $x_1 \in f^n\left(f^{-k}(C)\right)$ tal que $f^k(x_1) = x$. Pero que $x_1 \in f^n\left(f^{-k}(C)\right)$ quiere decir que existe $x_2 \in f^{-k}(C)$ tal que $f^n(x_2) = x_1$. Como $x_2 \in f^{-k}(C)$, resulta que $f^k(x_2) \in C$. Luego

$$x = f^k(x_1) = f^k\left(f^n(x_2)\right) = f^n\left(f^k(x_2)\right) \in f^n(C).$$

Por lo tanto $x \in f^n(C) \cap D$. Esto prueba que $f^n(C) \cap D \neq \emptyset$, así que $n \in T(C, D)$. Luego $n \in T(A, B) \cap T(C, D)$ y, así, 2) se cumple.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ y $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ dos familias de abiertos no vacíos en X. Aplicando 1) y 2) se deduce que

$$\bigcap_{i=1}^{m} T(A_i, B_i) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A_i) \cap B_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Esto implica, por el Teorema 2.40, que la función producto

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{m-veces} : \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces} \longrightarrow \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces}$$

es transitiva. $\square$

Veamos ahora la relación que existe entre las funciones débilmente mezcladoras y las totalmente transitivas.

Teorema 2.44. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezcladora entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima función composición $f^n\colon X \to X$ es débilmente mezcladora. En particular f es totalmente transitiva.*

Demostración. Como f es débilmente mezcladora, por el Teorema 2.41, f es transitiva. Luego, por el Teorema 2.3, para cada abierto no vacío A de X, sucede que $f^{-i}(A) \neq \emptyset$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Tomemos ahora $n \in \mathbb{N}$. Para probar que la función f^n es débilmente mezcladora, vamos a mostrar que la función producto $f^n \times f^n\colon X \times X \to X \times X$ es transitiva. Tomemos entonces dos parejas (U, V) y (U', V') de abiertos no vacíos en X. De (2.4.1) se sigue que $f^n \times f^n = (f \times f)^n$. Vamos a encontrar $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(f \times f)^{np}(U \times V) \cap (U' \times V') \neq \emptyset.$$

Para esto, consideremos los conjuntos

$$W = \underbrace{U \times U \times \cdots \times U}_{n-veces} \times \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n-veces}$$

y

$$W' = U' \times f^{-1}(U') \times \cdots \times f^{-(n-1)}(U') \times V' \times f^{-1}(V') \times \cdots \times f^{-(n-1)}(V').$$

Por la observación que hicimos en el primer párrafo de la demostración, W y W' son subconjuntos abiertos y no vacíos de

$$\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{2n-veces}.$$

Además, como f es débilmente mezcladora, por el Teorema 2.43, la función producto

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{2n-veces} : \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{2n-veces} \longrightarrow \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{2n-veces},$$

es transitiva. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{2n-veces})^k(W) \cap W' \neq \emptyset.$$

Por el Lema 2.2, esto implica que

$$W \cap (\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{2n-veces})^{-k}(W') \neq \emptyset.$$

Por tanto para cada $0 \leq i \leq n-1$, tenemos que

$$f^{-(k+i)}(U') \cap U \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^{-(k+i)}(V') \cap V \neq \emptyset. \tag{2.4.2}$$

Como módulo n todo entero es congruente con un único número entre 0 y $n-1$, existe $0 \leq i \leq n-1$, tal que $k+i$ es un múltiplo de n. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que $k+i = np$. De (2.4.2), se sigue que

$$f^{-(np)}(U') \cap U \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^{-(np)}(V') \cap V \neq \emptyset.$$

Aplicando el Lema 2.2 sucede que

$$f^{np}(U) \cap U' \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^{np}(V) \cap V' \neq \emptyset.$$

Luego $(f \times f)^{np}(U \times V) \cap (U' \times V') \neq \emptyset$. Esto prueba que la función producto $f^n \times f^n$ es transitiva. Por tanto f^n es débilmente mezcladora. Aplicando el Teorema 2.41, deducimos que f^n es transitiva. Por lo tanto, f es totalmente transitiva. $\square$

Es natural preguntarse si las funciones totalmente transitivas son débilmente mezcladoras. Más adelante, en la Sección 2.8, mostraremos una función totalmente transitiva que no es débilmente mezcladora.

El siguiente resultado aparece probado en [4, Lema 5, p. 86].

Teorema 2.45. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Supongamos que se cumple*

1) *para cada tres abiertos no vacíos U, V_1 y V_2 en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U) \cap V_2 \neq \emptyset$,*

entonces se cumple

2) *para cada dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean (U_1, U_2) y (V_1, V_2) dos parejas de abiertos no vacíos en X. Aplicando 1) a los abiertos U_1, U_2 y V_2, deducimos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^m(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Por el Lema 2.2

$$S = U_1 \cap f^{-m}(U_2) \quad \text{y} \quad T = U_1 \cap f^{-m}(V_2)$$

son dos abiertos no vacíos de X. Aplicando ahora 1) a los abiertos S, T y V_1, deducimos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(S) \cap T \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^k(S) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Como $S \subset U_1$, se tiene que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Sea $W = S \cap f^{-k}(T)$. De nueva cuenta, W es un abierto no vacío de X. Si $x \in W \subset S \subset f^{-m}(U_2)$, entonces $f^m(x) \in U_2$. También $x \in W \subset f^{-k}(T)$, así que $f^k(x) \in T \subset f^{-m}(V_2)$. Luego

$$f^k\left(f^m(x)\right) = f^{k+m}(x) = f^{m+k}(x) = f^m\left(f^k(x)\right) \in V_2.$$

Por tanto $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. □

Corolario 2.46. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Entonces f es débilmente mezcladora si sólo si f satisface la propiedad* 1) *del* Teorema 2.45*.*

Demostración. Si f es débilmente mezcladora entonces, por el Teorema 2.39, f satisface la propiedad 2) del Teorema 2.45. Tomemos tres abiertos no vacíos U, V_1 y V_2 en X. Como (U, U) y (V_1, V_2) son dos parejas de abiertos no vacíos en X, por 2), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. Entonces f satisface la propiedad 1) del Teorema 2.45.

Ahora bien, si f satisface la propiedad 1) del Teorema 2.45 entonces, por el mismo teorema, f satisface la propiedad 2) y, por el Teorema 2.39, f es débilmente mezcladora. □

2.5. Mezclación débil en las funciones inducidas

Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Como veremos en la Subsección 2.8.1, del hecho de que f sea transitiva no se garantiza que la función inducida $CL(f) : CL(X) \to CL(X)$ sea transitiva. Por tanto la transitividad de f no es equivalente a la transitividad de $CL(f)$. Como probaremos a continuación, la transitividad de $CL(f)$ es equivalente al hecho de que f sea débilmente mezcladora.

Teorema 2.47. *Sean X un espacio topológico T_1 y $f : X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *f es débilmente mezcladora;*

2) *$CL(f)$ es débilmente mezcladora;*

3) *$CL(f)$ es transitiva.*

Demostración. Por el Teorema 2.41, 2) implica 3). Supongamos ahora que $CL(f)$ es transitiva. Por el Corolario 2.46, para probar que f es débilmente mezcladora, basta verificar que f satisface la propiedad 1) del Teorema 2.45. Tomemos entonces tres conjuntos U, V_1 y V_2 abiertos y no vacíos en X. Como $CL(f)$ es transitiva y los conjuntos $\langle U\rangle$ y $\langle V_1, V_2\rangle$ son abiertos no vacíos en $CL(X)$, existen $K \in \langle U\rangle$ y $n \in \mathbb{N}$ de modo que que

$$f^n(K) = (CL(f))^n(K) \in \langle V_1, V_2\rangle.$$

En particular $f^n(K) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(K) \cap V_2 \neq \emptyset$. Entonces podemos tomar $x, y \in K \subset U$ tales que $f^n(x) \in V_1$ y $f^n(y) \in V_2$. Luego $f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. Esto muestra que f satisface la propiedad 1) del Teorema 2.45. De esta manera, 3) implica 1).

Supongamos ahora que f es débilmente mezcladora. Para ver que la función $CL(f)\colon CL(X) \to CL(X)$ es débilmente mezcladora, debemos verificar que la función producto

$$CL(f) \times CL(f)\colon CL(X) \times CL(X) \to CL(X) \times CL(X)$$

es transitiva. Para esto tomemos dos parejas $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ y $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ de abiertos no vacíos en $CL(X)$. Entonces existen cuatro abiertos básicos y no vacíos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en $CL(X)$ tales que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{U}_2$, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{V}_2$. Además, por el Teorema 1.20, podemos escoger dichos abiertos básicos con el mismo número de entradas. Escribamos entonces, para $i \in \{1, 2\}$,

$$\mathcal{B}_i = \langle U_{i,1}, \ldots, U_{i,k}\rangle \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_i = \langle V_{i,1}, \ldots, V_{i,k}\rangle. \tag{2.5.1}$$

Notemos que, para $i \in \{1, 2\}$, $U_{i,j} \neq \emptyset$ y $V_{i,j} \neq \emptyset$ para toda $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vamos a probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(CL(f))^n(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{V}_i \neq \emptyset \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2\}.$$

Hagamos $m = 2k$, así como

$$U = U_{1,1} \times \cdots \times U_{1,k} \times U_{2,1} \times \cdots \times U_{2,k} \tag{2.5.2}$$

y

$$V = V_{1,1} \times \cdots \times V_{1,k} \times V_{2,1} \times \cdots \times V_{2,k}, \tag{2.5.3}$$

entonces U y V son abiertos no vacíos de

$$\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces}.$$

Como f es débilmente mezcladora, por el Teorema 2.43, la función producto

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{m-veces} : \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces} \longrightarrow \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{m-veces}$$

es transitiva. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\underbrace{f \times \cdots \times f}_{m-veces})^n(U) \cap (V) \neq \emptyset. \tag{2.5.4}$$

Luego $f^n(U_{i,j}) \cap V_{i,j} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1,2\}$ y cada $j \in \{1,2,\ldots,k\}$. Ahora bien, para cada $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,\ldots,k\}$, tomemos $x_{i,j} \in U_{i,j}$ y $y_{i,j} \in V_{i,j}$ tales que $y_{i,j} = f^n(x_{i,j})$. Definamos ahora, para $i \in \{1,2\}$,

$$K_i = \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,k}\} \quad \text{y} \quad L_i = \{y_{i,1}, \ldots, y_{i,k}\}. \tag{2.5.5}$$

Como X es T_1, tenemos que $K_i, L_i \in CL(X)$, para $i \in \{1,2\}$. Además

$$K_i \in \langle U_{i,1}, \ldots, U_{i,k} \rangle \quad \text{y} \quad L_i \in \langle V_{i,1}, \ldots, V_{i,k} \rangle, \quad \text{para cada } i \in \{1,2\}.$$

Luego, para $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned}(CL(f))^n(K_i) = CL(f^n)(K_i) = f^n(K_i) = \{f^n(x_{i,1}), \ldots, f^n(x_{i,k})\} = \\ = \{y_{i,1}, \ldots, y_{i,k}\} = L_i \in \langle V_{i,1}, \ldots, V_{i,k} \rangle.\end{aligned}$$

Como, para $i \in \{1,2\}$, tenemos que $K_i \in \langle U_{i,1}, \ldots, U_{i,k} \rangle = \mathcal{B}_i \subset \mathcal{U}_i$ y $L_i \in \langle V_{i,1}, \ldots, V_{i,k} \rangle = \mathcal{C}_i \subset \mathcal{V}_i$, deducimos que $(CL(f))^n(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{V}_i \neq \emptyset$. Esto prueba que la función producto $CL(f) \times CL(f)$ es transitiva. Luego $CL(f)$ es débilmente mezcladora. Por tanto 1) implica 2). $\square$

La demostración empleada en el teorema anterior, puede utilizarse para obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.48. *Sean X un espacio topológico y T_1 y $f : X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *f es débilmente mezcladora;*

2) 2^f *es débilmente mezcladora;*

3) 2^f *es transitiva.*

El teorema que enunciamos a continuación, aparece probado en [16, Teorema 3.16, p. 82].

Teorema 2.49. *Sean X un espacio topológico y T_1 y $f : X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *f es débilmente mezcladora;*

2) *$F_k(f)$ es débilmente mezcladora, para cada $k \in \mathbb{N}$;*

3) *$F_k(f)$ es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$;*

4) *$F_k(f)$ es débilmente mezcladora, para alguna $k \in \mathbb{N} - \{1\}$;*

5) *$F_k(f)$ es transitiva, para alguna $k \in \mathbb{N} - \{1\}$.*

Demostración. La prueba de que 1) implica 2), es similar a la que dimos en el Teorema 2.47. En efecto, tomemos $k \in \mathbb{N}$ y dos parejas $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ y $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ de abiertos no vacíos en $F_k(X)$. Entonces existen cuatro abiertos básicos y no vacíos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en $F_k(X)$ tales que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{U}_2$, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{V}_2$. Por el Teorema 1.19, para $i \in \{1, 2\}$, podemos escribir

$$\mathcal{B}_i = \langle U_{i,1}, \ldots, U_{i,k} \rangle \cap F_k(X) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_i = \langle V_{i,1}, \ldots, V_{i,k} \rangle \cap F_k(X). \tag{2.5.6}$$

Notemos que los conjuntos $\mathcal{B}_i$ y $\mathcal{C}_i$ definidos en (2.5.6), son como los que definimos en (2.5.1). Hagamos $m = 2k$ y consideremos los subconjuntos U y V de X^m como se definen en (2.5.2) y (2.5.3). Como indicamos en la prueba del Teorema 2.47, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que (2.5.4) se cumple. Siguiendo la demostración, formamos los conjuntos K_i y L_i como en (2.5.5). Entonces $K_i, L_i \in F_k(X)$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Más aún

$$K_i \in \mathcal{B}_i \subset \mathcal{U}_i, \quad L_i \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{V}_i \quad \text{y} \quad (F_k(f))^n(K_i) = L_i.$$

Por tanto $((F_k(f))^n(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{V}_i \neq \emptyset$. Esto prueba que $F_k(f)$ es débilmente mezcladora. De esta manera 1) implica 2).

Como las funciones débilmente mezcladoras son transitivas, se tiene que 2) implica 3) y 4) implica 5). La prueba de que 5) implica 1), es idéntica a la prueba de que 3) implica 1) en el Teorema 2.47 (cambiando $\langle U \rangle$ y $\langle V_1, V_2 \rangle$

por $\langle U\rangle \cap F_k(X)$ y $\langle V_1, V_2\rangle \cap F_k(X)$, respectivamente). Falta probar que 3) implica 4). Para ver esto notemos que 3) evidentemente implica 5). Además 5) implica 1), 1) implica 2) y 2) evidentemente implica 4). Por tanto 3) implica 4). □

Como consecuencia del Corolario 3.13, existen continuos X y funciones continuas $f: X \to X$ de modo que f es débilmente mezcladora, mientras que la función inducida $C(f)$ no es débilmente mezcladora. Por el Teorema 2.48, para dichos continuos X y tales funciones f, se sigue que 2^f es débilmente mezcladora, mientras que $C(f)$ no es débilmente mezcladora.

2.6. Transitividad total en las funciones inducidas

El siguiente teorema aparece probado en [13, Teorema 4.3, p. 753], para espacios métricos y compactos.

Teorema 2.50. *Sean X un espacio T_1 y $f: X \to X$ una función continua y cerrada. Si $CL(f)$ es totalmente transitiva, entonces f es totalmente transitiva.*

Demostración. Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Como $CL(f): CL(X) \to CL(X)$ es totalmente transitiva, la función composición $(CL(f))^m: CL(X) \to CL(X)$ es transitiva. Por la parte 3) del Lema 2.26, $(CL(f))^m = CL(f^m)$. Entonces $CL(f^m)$ es transitiva y, por el Teorema 2.27, la m-ésima función composición $f^m: X \to X$ es transitiva. Luego f es totalmente transitiva. □

En la Sección 2.8, veremos una función totalmente transitiva f, cuya función inducida $CL(f)$ no es totalmente transitiva. Por el Teorema 2.28, en el Teorema 2.50, podemos reemplazar $CL(X)$ por cualquiera de los hiperespacios 2^X, $CLC(X)$, $C(X)$ y $F_n(X)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Como consecuencia del Corolario 2.57 y del Teorema 2.58, inciso 1), existen continuos X y funciones continuas $f: X \to X$ de modo que f es totalmente transitiva, mientras que la función inducida $C(f)$ no es totalmente transitiva.

2.7. Exactitud en las funciones inducidas

Con respecto a las funciones exactas, tenemos el siguiente resultado, originalmente probado en [12, Lema 5, p. 5], para espacios métricos y compactos. Posteriormente aparece probado en [15, Teorema 3.1.2, p. 35], para un continuo X y la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ de una función continua $f\colon X \to X$. En su demostración, utilizamos el hecho de que si $g\colon Y \to Z$ es una función, $C \subset Y$ y $D \subset Z$ son tales que $D \subset g(C)$, entonces

$$g^{-1}(D) \cap C \neq \emptyset \quad \text{y} \quad g\left(g^{-1}(D) \cap C\right) = D. \tag{2.7.1}$$

Teorema 2.51. *Sean X un espacio T_3 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces f es exacta si y sólo si $CL(f)$ es exacta.*

Demostración. Supongamos que f es exacta. Para ver que $CL(f)$ también es exacta, sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío en $CL(X)$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ en X tales que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{U}$. Como X es regular, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe un abierto no vacío V_i en X tal que $\mathrm{Cl}_X(V_i) \subset U_i$. Además, como f es exacta, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_i}(V_i) = X$. Sea $m = \text{máx}\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Como f es suprayectiva (Teorema 2.9), se tiene que $f^m(V_i) = X$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vamos a probar que

$$CL(X) \subset (CL(f))^m(\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle). \tag{2.7.2}$$

Tomemos, por tanto, $A \in CL(X)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea

$$B_i = f^{-m}(A) \cap \mathrm{Cl}_X(V_i).$$

Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como f^m es continua, B_i es una intersección de subconjuntos cerrados de X. Luego B_i es cerrado en X. Además $A \subset X = f^m(V_i)$. Por tanto $A \subset f^m\left(\mathrm{Cl}_X(V_i)\right)$. Utilizando (2.7.1) (con $Y = Z = X$, $g = f^m$, $C = \mathrm{Cl}_X(V_i)$ y $D = A$), tenemos que

$$B_i = f^{-m}(A) \cap \mathrm{Cl}_X(V_i) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^m(B_i) = A.$$

Entonces $B_i \in CL(X)$ y, como $\mathrm{Cl}_X(V_i) \subset U_i$, tenemos que $B_i \subset U_i$. En particular, $B_i \cap U_i \neq \emptyset$. Definamos ahora

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n.$$

Notemos que $B \in CL(X)$. Más aún $B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y

$$\begin{aligned}(CL(f))^m(B) = f^m(B) = f^m(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) =& \\ = f^m(B_1) \cup f^m(B)_2 \cup \cdots \cup f^m(B_n) = A.&\end{aligned}$$

Esto prueba (2.7.2) y, como consecuencia de esto,

$$CL(X) \subset (CL(f))^m(\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle) \subset (CL(f))^m(\mathcal{U}).$$

Por tanto $(CL(f))^m(\mathcal{U}) = CL(X)$ y, de esta manera, $CL(f)$ es exacta.

Ahora supongamos que $CL(f)$ es exacta. Para probar que f es exacta, utilizaremos solamente que X es T_1. Sea U un abierto no vacío en X. Como X es T_1, $\langle U \rangle$ es un abierto no vacío en $CL(X)$. Esto implica, pues $CL(f)$ es exacta, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(CL(f))^m(\langle U \rangle) = CL(X)$. Por la parte 3) del Lema 2.26, $(CL(f))^m = CL(f^m)$. Tomemos ahora $x \in X$. Entonces $\{x\} \in CL(X) = (CL(f))^m(\langle U \rangle) = CL(f^m)(\langle U \rangle)$, por lo que existe $A \in \langle U \rangle$ tal que $CL(f^m)(A) = \{x\}$. Por tanto $A \subset U$ y $f^m(A) = \{x\}$. Luego $x \in f^m(A) \subset f^m(U)$. Esto implica que $f^m(U) = X$, probando así que f es exacta. $\square$

Recordemos que un espacio X es *localmente compacto* si cada $x \in X$ tiene una vecindad compacta N_x. Como los espacios localmente compactos y T_2 son T_3 ([8, Teorema 6.2, Capítulo XI]) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.52. *Sean X un espacio localmente compacto y T_2 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces f es exacta si y sólo si $CL(f)$ es exacta.*

Para la función inducida 2^f, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.53. *Sean X un espacio localmente compacto y T_2 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces f es exacta si y sólo si 2^f es exacta.*

Demostración. Supongamos f exacta. Sea $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap 2^X$ un abierto básico no vacío en 2^X. Como X es localmente compacto y T_2 entonces cada punto de X tiene una base local de vecindades compactas ([27, Teorema 18.2]). Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean $N_i \subset U_i$ tal que N_i es compacto y $W_i \subset N_i$ abierto no vacío. De la misma manera que en el Teorema 2.51, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(W_i) = X_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap 2^X$, definimos los conjuntos $A_i = f^{-m}(A) \cap N_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como A es compacto y X es T_2, entonces A es cerrado. Luego, $f^{-m}(A)$ es cerrado y N_i es compacto, entonces A_i es compacto, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Además, $f^m(A_i) = A$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y si $A' = \bigcup_{i=1}^n A_i$, entonces $A' \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap 2^X$. Por lo tanto, $(2^f)^m(\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap 2^X) = 2^X$, es decir, 2^f es exacta. Para el regreso solo es necesario que X sea T_1 (ver Teorema 2.51).

$\square$

Para las funciones inducidas $F_n(f)$, tenemos el siguiente resultado, en donde el axioma de separación T_1 es necesario y suficiente.

Teorema 2.54. *Sean X un espacio T_1, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Entonces f es exacta si y sólo si $F_n(f)$ es exacta.*

Demostración. Supongamos que f es exacta. Sea $\mathcal{U}$ abierto no vacío en $F_n(X)$. Por el Teorema 1.19, podemos elegir un abierto básico no vacío $\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ tal que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap F_n(X) \subset \mathcal{U}$. Siguiendo la prueba para $CL(f)$, obtenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) = X$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tomemos ahora $A \in F_n(X)$. Sean $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$ tales que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Como $f^m(U_i) = X$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $u_i \in U_i$ tal que $f^m(u_i) = a_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Si $k + 1 \leq j \leq n$, tomamos $u_j \in U_j$ de tal manera que $f^m(u_j) = a_k$. Sea $A' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in \langle U_1, U_2 \ldots, U_n\rangle \cap F_n(X)$, entonces $F_n(f)^m(A') = \{f^m(u_1), f^m(u_2), \ldots, f^m(u_n)\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = A$. Por lo tanto,

$$F_n(X) \subset F_n(f)^m(\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap F_n(X)) \subset F_n(f)(\mathcal{U}).$$

Es decir, $F_n(f)^m(\mathcal{U}) = F_n(X)$ y así, $F_n(f)$ es exacta.

La demostración del regreso es similar a la que se hizo cuando $CL(f)$ es exacta.

□

Para $CLC(f)$ y $C(f)$, siguiendo la prueba de $CL(f)$ exacta implica f exacta, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.55. *Sean X un espacio T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si alguna de las funciones inducidas $CLC(f)$ y $C(f)$ es exacta, entonces f es exacta.*

Como consecuencia del Corolario 3.13, existen continuos X y funciones continuas $f\colon X \to X$ de modo que f es exacta, mientras que la función inducida $C(f)$ no es exacta. Por el Teorema 2.53, para dichos continuos X y tales funciones f se sigue que 2^f es exacta, mientras que $C(f)$ no es exacta.

2.8. Ejemplos de funciones transitivas

En la presente sección veremos ejemplos de funciones transitivas que no son exactas, así como de funciones transitivas cuyas funciones inducidas no son transitivas. También daremos un ejemplo de una función transitiva f cuya función inducida $CL(f)$ no es transitiva y una función totalmente transitiva g, cuya función inducida $CL(g)$ no es totalmente transitiva. Utilizaremos la Definición 1.54, de punto periódico de una función continua.

2.8.1. Rotaciones sobre la circunferencia

Consideremos, en el plano complejo $\mathbb{C}$, la circunferencia unitaria

$$S^1 = \left\{ e^{i\theta} \colon \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ sea $T_\lambda : S^1 \to S^1$ la función definida, para $e^{i\theta} \in S^1$, como

$$T_\lambda \left(e^{i\theta} \right) = e^{i(\theta + 2\pi\lambda)}.$$

A la función T_λ se le llama la *rotación de* S^1 *con ángulo* λ. Cuando λ es un número irracional, diremos que T_λ es una *rotación irracional* de S^1.

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos la n-ésima iteración de T_λ, por T_λ^n. Tomemos $e^{i\theta} \in S^1$. Afirmamos que

$$T_\lambda^n \left(e^{i\theta} \right) = e^{i(\theta + 2n\pi\lambda)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.8.1}$$

Para $n \in \{0, 1\}$ el resultado es claro. Supongamos que (2.8.1) se cumple para $n = k$. Entonces

$$T_\lambda^{k+1} \left(e^{i\theta} \right) = T_\lambda \left(T_\lambda^k \left(e^{i\theta} \right) \right) = T_\lambda \left(e^{i(\theta + 2k\pi\lambda)} \right) = \\ = e^{i(\theta + 2k\pi\lambda + 2\pi\lambda)} = e^{i(\theta + 2(k+1)\pi\lambda)}.$$

Esto prueba (2.8.1). Supongamos que λ es racional. Entonces $\lambda = \frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Luego, por (2.8.1),

$$T_\lambda^q \left(e^{i\theta} \right) = e^{i(\theta + 2q\pi\lambda)} = e^{i\left(\theta + 2q\pi\frac{p}{q}\right)} = e^{i(\theta + 2p\pi)} = e^{i\theta}.$$

Como $e^{i\theta}$ es un punto arbitrario de S^1, hemos probado que la órbita, bajo T_λ, de cada punto de S^1 es finita y de la misma cardinalidad (de hecho es de cardinalidad q si suponemos que la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible). En otras palabras, cuando λ es racional, todos los puntos de S^1 son periódicos de T_λ y del mismo periodo.

Supongamos ahora que λ es irracional. Vamos a probar que la órbita de cada punto de S^1, se comporta de un modo bastante diferente. El siguiente resultado se conoce como el Teorema de Jacobi.

Teorema 2.56. *Si λ es irracional, entonces la órbita bajo T_λ de cada punto de S^1, es densa en S^1.*

Demostración. Tomemos $e^{i\theta} \in S^1$ y $\epsilon > 0$. Para ver que $\operatorname{orb}\left(e^{i\theta}, T_\lambda\right)$, la órbita de $e^{i\theta}$ bajo T_λ es denso en S^1, mostraremos que

$$B_{S^1}\left(e^{i\theta}, \epsilon\right) \cap \operatorname{orb}\left(e^{i\theta}, T_\lambda\right) \neq \emptyset. \tag{2.8.2}$$

Si se muestra lo de arriba, tendriamos que para cada $\epsilon > 0$, existiría $n \in \mathbb{N}$ talque $|(T_\lambda)^n(e^{i\theta}) - e^{i\theta}| < \epsilon$. En general, se tendría que

$$|(T_\lambda)^{(k+1)n}(e^{i\theta}) - (T_\lambda)^{kn}(e^{i\theta})| < \epsilon,$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Asi, los puntos

$$e^{i\theta}, (T_\lambda)^n(e^{i\theta}), (T_\lambda)^{2n}(e^{i\theta}), \ldots$$

estarían a distancia menor a ϵ uno del anterior. En otras palabras, partirían a S^1 en segmentos de longitud menor a ϵ, y estos puntos pertenecen a $\operatorname{orb}\left(e^{i\theta}, T_\lambda\right)$.

Entonces, para mostrar (2.8.2), supongamos primero que existen $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $T_\lambda^n(e^{i\theta}) = T_\lambda^m(e^{i\theta})$. Entonces, por (2.8.1), $e^{i(\theta+2n\pi\lambda)} = e^{i(\theta+2m\pi\lambda)}$. Esto implica que $e^{i(2(n-m)\pi\lambda)} = 1$. Por tanto $(n-m)\lambda$ es un entero y, como λ es irracional, $n = m$. Con esto hemos probado, que si $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son tales que $n \neq m$, entonces $T_\lambda^n(e^{i\theta}) \neq T_\lambda^m(e^{i\theta})$. Por tanto el conjunto

$$\operatorname{orb}\left(e^{i\theta}, T_\lambda\right) = \left\{T_\lambda^n\left(e^{i\theta}\right) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

es infinito. Como S^1 es métrico y compacto, S^1 es secuencialmente compacto. Entonces la sucesión $\{T_\lambda^n(e^{i\theta}) \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tiene una subsucesión convergente. Utilizando dicha subsucesión y su punto límite, se tiene que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ y

$$\left|T_\lambda^n\left(e^{i\theta}\right) - T_\lambda^m\left(e^{i\theta}\right)\right| < \epsilon.$$

Como $|e^{i\omega}| = 1$ para toda ω en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\left|T_\lambda^n\left(e^{i\theta}\right) - T_\lambda^m\left(e^{i\theta}\right)\right|}{\left|e^{i(m\lambda 2\pi)}\right|} < \epsilon.$$

Desarrollando la parte superior de la desigualdad tenemos, por (2.8.1), que

$$\frac{\left|e^{i(\theta+n\lambda 2\pi)} - e^{i(\theta+m\lambda 2\pi)}\right|}{\left|e^{i(m\lambda 2\pi)}\right|} < \epsilon,$$

entonces

$$\left|\frac{e^{i(\theta+n\lambda 2\pi)}}{e^{i(m\lambda 2\pi)}} - e^{i\theta}\right| < \epsilon,$$

o bien $\left|T_{\lambda}^{n-m}(e^{i\theta}) - e^{i\theta}\right| < \epsilon$. Esto implica que

$$T_{\lambda}^{n-m}\left(e^{i\theta}\right) \in B_{S^1}\left(e^{i\theta}, \epsilon\right) \cap \operatorname{orb}\left(e^{i\theta}, T_{\lambda}\right).$$

□

Corolario 2.57. *Si λ es irracional, entonces T_{λ} es transitiva. Más aún, T_{λ} es totalmente transitiva.*

Demostración. Notemos que S^1 es un espacio T_1 sin puntos aislados y que, por el Teorema 2.56, todos los puntos en S^1 tienen órbita densa, bajo T_{λ}. Entonces, por el Teorema 2.10, T_{λ} es transitiva.

Para ver que T_{λ} es, de hecho, totalmente transitiva, tomemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $\eta = n\lambda$. Como λ es irracional y n es un número natural, η es irracional. Ahora bien, por (2.8.1), si $e^{i\theta} \in S^1$, entonces

$$T_{\lambda}^{n}\left(e^{i\theta}\right) = e^{i(\theta+2n\pi\lambda)} = e^{i(\theta+2\pi(n\lambda))} = T_{n\lambda}\left(e^{i\theta}\right) = T_{\eta}\left(e^{i\theta}\right).$$

Esto prueba que $T_{\lambda}^{n} = T_{\eta}$ y, como η es irracional, por lo que ya probamos, T_{η} es transitiva. Luego la función T_{λ}^{n} es transitiva. Por tanto T_{λ} es totalmente transitiva. □

Del Teorema 2.56 se sigue que la función T_{λ} no tiene puntos periódicos, cuando λ es irracional. Notemos ahora que, como S^1 es compacto y T_2, $CL(S^1) = 2^{S^1}$ y $CLC(S^1) = C(S^1)$. Por tanto $CL(T_{\lambda}) = 2^{T_{\lambda}}$ y $CLC(T_{\lambda}) = C(T_{\lambda})$.

En el siguiente teorema, supondremos que $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, que

$$\Lambda(S^1) \in \left\{CL(S^1), 2^{S^1}, CLC(S^1), C(S^1), F_n(S^1)\right\}$$

y que $\Lambda(T_{\lambda})$ es la correspondiente función inducida de T_{λ} al hiperespacio $\Lambda(S^1)$ elegido.

Teorema 2.58. *Si λ es irracional, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *la función inducida* $\Lambda(T_\lambda)\colon \Lambda(S^1) \to \Lambda(S^1)$ *no es transitiva ni totalmente transitiva;*

2) *la función* $T_\lambda\colon S^1 \to S^1$ *no es débilmente mezcladora ni exacta.*

Demostración. La prueba de 1), que presentamos aquí, aparece en [22, Ejemplo 4.1, p. 101], para la función inducida 2^{T_λ}. Como T_λ es una rotación, tenemos que

$$\text{diám}(K) = \text{diám}\left(T_\lambda(K)\right) = \text{diám}\left(\Lambda(T_\lambda)(K)\right), \quad \text{para cada } K \in \Lambda(S^1).$$

Por tanto $\text{diám}(K) = \text{diám}\left(T_\lambda^k(K)\right)$, para cada $K \in \Lambda(S^1)$ y toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tomemos $K \in \Lambda(S^1)$ tal que $\text{diám}(K) = 1$ y $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Entonces $1 - \epsilon > \epsilon$. Definimos

$$\mathcal{U} = B_{\Lambda(S^1)}\left(K, \frac{\epsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = B_{\Lambda(S^1)}\left(\{1\}, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Entonces $F \in \mathcal{U}$ si y sólo si $H(K, F) < \frac{\epsilon}{2}$. Esto implica que $K \subset N_{S^1}\left(F, \frac{\epsilon}{2}\right)$ y así,

$$1 = \text{diám}(K) \le \text{diám}\left(N_{S^1}\left(F, \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \le \text{diám}(F) + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$1 - \epsilon \le \text{diám}(F), \quad \text{para cada } F \in \mathcal{U}.$$

Por otra parte, $G \in \mathcal{V}$ si y sólo si $H(G, \{1\}) < \frac{\epsilon}{2}$. Esto último implica que $G \subset N_{S^1}\left(\{1\}, \frac{\epsilon}{2}\right)$, entonces $\text{diám}(G) \le \text{diám}(N_{S^1}(\{1\}, \frac{\epsilon}{2}))$, es decir, $\text{diám}(G) \le \text{diám}(\{1\}) + \epsilon = \epsilon$. Luego

$$\text{diám}(G) \le \epsilon, \quad \text{para cada } G \in \mathcal{V}.$$

Dados $k \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{U}$ y $G \in \mathcal{V}$, por lo que hemos comentado, tenemos que

$$\text{diám}\left(T_\lambda^k(F)\right) = \text{diám}(F) \ge 1 - \epsilon > \epsilon \ge \text{diám}(G).$$

Es decir $\text{diám}\left(T_\lambda^k(F)\right) > \text{diám}(G)$. Esto prueba que

$$\Lambda\left(T_\lambda^k\right)(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} = \emptyset, \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto $\Lambda(T_\lambda)$ no es transitiva. Si $\Lambda(T_\lambda)$ es totalmente transitiva, entonces $\Lambda(T_\lambda)$ es transitiva. Como esto es una contradicción, $\Lambda(T_\lambda)$ no es totalmente transitiva. Esto prueba 1).

Si T_λ es débilmente mezcladora entonces, por el Teorema 2.48, $CL(T_\lambda)$ es transitiva. Como esto contradice 1), T_λ no es débilmente mezcladora. Como las funciones exactas son débilmente mezcladoras, tenemos que T_λ no es exacta. Esto prueba 2). □

De los teoremas anteriores tenemos que T_λ es una función transitiva cuyas funciones inducidas no son transitivas. También T_λ es una función totalmente transitiva, cuyas funciones inducidas no son totalmente transitivas. Además T_λ es una función transitiva que no es exacta, y T_λ es una función transitiva que no es débilmente mezcladora. Notemos que T_λ es además una función totalmente transitiva que no es débilmente mezcladora. También se tiene que $F_1(T_\lambda)$ es transitiva, pues $F_1(T_\lambda) = T_\lambda$.

2.8.2. Función tienda de campaña

Sea $X = [0, 1]$ con su métrica usual. Consideremos la siguiente función continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Diremos que f es la *función tienda de campaña*. Una observación inmediata que podemos hacer sobre esta función es, que $f(x) = f(1-x)$, para toda $x \in X$. La gráfica se ve como en la Figura 2.1.

Vamos a probar una serie de propiedades de f. Primero veremos que la gráfica de f^n, está determinada por 2^n segmentos de recta de la forma $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$, donde $p \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$. Dichos segmentos, como podemos observar, son de longitud $\frac{1}{2^n}$, y los puntos extremos forman un subconjunto denso de X, si $n \rightsquigarrow \infty$.

Teorema 2.59. *Si $f \colon X \to X$ es la función tienda de campaña y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$f^n\left(\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1], \ \textit{para cada } p \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Demostración. Sabemos que la gráfica de $f^1 = f$ está compuesta por dos segmentos de recta. El primero se encuentra definido en el intervalo $[0, \frac{1}{2}] = [\frac{0}{2}, \frac{1}{2}]$ y el segundo en el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}] = [\frac{1}{2}, 1]$, como se puede ver en la Figura 2.1. Además, $f([0, \frac{1}{2}]) = [0, 1] = f([\frac{1}{2}, 1])$.

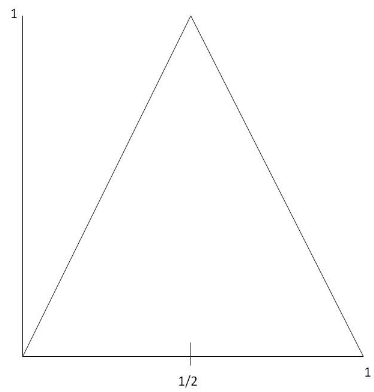

Figura 2.1: Función tienda de campaña.

Para $f^2 = f \circ f$, los segmentos de recta están determinados de la siguiente forma. La gráfica de f está dividida en dos segmentos de recta cuyas proyecciones sobre el eje x son los segmentos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$. Por otra parte, tenemos las siguientes igualdades,

$$f\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$f\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$f\left(\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$f\left(\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Por lo tanto, la gráfica de f^2 se divide en cuatro segmentos de recta, como se muestran en la Figura 2.2.

Para el paso inductivo, supongamos que f^n está dividida en 2^n segmentos de longitud $\frac{1}{2^n}$, y que

$$f^n\left(\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1].$$

Para analizar f^{n+1} consideremos los intervalos $[\frac{p}{2^{n+1}}, \frac{p+1}{2^{n+1}}]$, donde

$$p \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}.$$

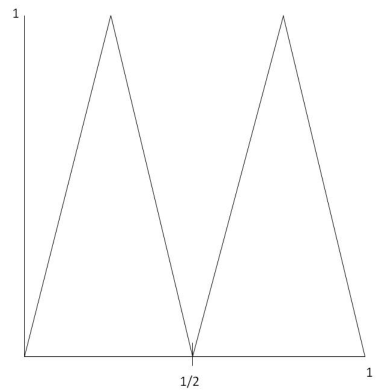

Figura 2.2: Gráfica de f^2.

Tenemos dos casos.

Caso 1. $\frac{p+1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2}$. Para este caso, las igualdades se desarrollan de la siguiente manera.

$$f^{n+1}\left(\left[\tfrac{p}{2^{n+1}}, \tfrac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right) = f^n\left(f\left[\tfrac{p}{2^{n+1}}, \tfrac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right) =$$
$$f^n\left(\left[f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right), f\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}\right)\right]\right) = f^n\left(\left[\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}\right]\right) =$$
$$f^n\left(\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]\right) = [0,1].$$

Caso 2. $\frac{p+1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$. Bajo esta hipótesis, se tiene de manera adicional que $\frac{p}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$f^{n+1}\left(\left[\tfrac{p}{2^{n+1}},\tfrac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right)=f^{n}\left(f\left[\tfrac{p}{2^{n+1}},\tfrac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right)=$$

$$f^{n}\left(\left[f\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}\right),f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right]\right)=f^{n}\left(\left[2\left(1-\frac{p+1}{2^{n+1}}\right),2\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right]\right)=$$

$$f^{n}\left(\left[2\left(\frac{2^{n+1}-(p+1)}{2^{n+1}}\right),2\left(\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}\right)\right]\right)=$$

$$f^{n}\left(\left[\frac{2^{n+1}-(p+1)}{2^{n}},\frac{2^{n+1}-p}{2^{n}}\right]\right).$$

Como $p\geq 2^{n}$, entonces $2^{n+1}-p\in\{1,2,3,\ldots,2^{n}\}$. Por lo tanto, el resultado final es nuevamente $[0,1]$.

□

Ahora mostraremos, usando el Teorema 2.59, el siguiente resultado.

Teorema 2.60. *La función tienda de campaña es exacta.*

Demostración. Sea U abierto no vacío en $[0,1]$. Tomemos $n\in\mathbb{N}$ y $p\in\{0,1,\ldots,2^{n}-1\}$ tales que $[\frac{p}{2^{n}},\frac{p+1}{2^{n}}]\subset U$. De esta manera, tenemos que

$$[0,1]=f^{n}\left(\left[\frac{p}{2^{n}},\frac{p+1}{2^{n}}\right]\right)\subset f^{n}(U)\subset[0,1].$$

Por lo tanto $f^{n}(U)=[0,1]$ y f es exacta.

□

Combinando el Teorema 2.9 y el Teorema 2.60 se tiene que la función tienda de campaña f es transitiva. En el siguiente resultado analizamos la transitividad de 2^{f}.

Teorema 2.61. *Si $f\colon X\to X$ es la función tienda de campaña, entonces $2^{f}\colon 2^{X}\to 2^{X}$ es transitiva.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos no vacíos en 2^{X}, $K\in\mathcal{U}$, $F\in\mathcal{V}$ y $\epsilon>0$ tales que $B_{2^X}(K,\epsilon)\subset\mathcal{U}$ y $B_{2^X}(F,\epsilon)\subset\mathcal{V}$. Por el Teorema 1.25, sabemos que existen K' y F' subconjuntos finitos de $[0,1]$ tales que $H(K,K')<\frac{\epsilon}{3}$ y $H(F,F')<\frac{\epsilon}{3}$. Por el Teorema 1.36, tenemos que existen K_1' y F_1' subconjuntos de $[0,1]$ tales que

$$q=|K_1'|=|F_1'|\geq\max\{|K'|,|F'|\},$$

$H(K', K_1') < \frac{\epsilon}{3}$ y $H(F', F_1') < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces

$$H(K, K_1') \leq H(K, K') + H(K', K_1') < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3},$$

es decir, $K_1' \in B_{2^X}(K, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Análogamente se ve que $F_1' \in B_{2^X}(F, \epsilon) \subset \mathcal{V}$.

Consideremos que $K_1' = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ y $F_1' = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$. Elegimos $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $2^n > q$ y

$$\frac{1}{2^n} < \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{3}, \text{mín}_{i \neq j}\left\{|x_i - x_j|\right\}\right\}. \tag{2.8.3}$$

Sabemos que

$$[0,1] = \bigcup_{p=0}^{2^n-1} \left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right],$$

por la forma en que se tomó n, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ $x_i \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$, para algún único $p \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Tomamos $z_i \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ de manera que $f^n(z_i) = y_i$. Si $G = \{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ entonces, por (2.8.3), tenemos

$$H(K_1', G) < \frac{\epsilon}{3},$$

además, $2^{f^n}(G) = F_1'$. Por último,

$$H(K, G) \leq H(K, K_1') + H(K_1', G) < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Así que

$$G \in B_{2^X}(K, \epsilon) \subset U \quad y \quad 2^{f^n}(G) \in B_{2^X}(F, \epsilon) \subset V.$$

Con lo cual, 2^f es transitiva.

$\square$

Teorema 2.62. *Si $f\colon X \to X$ es la función tienda de campaña, entonces $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ no es transitiva.*

Demostración. Notemos que

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Así que $\frac{2}{3}$ es un punto fijo de f. Afirmamos que

$$\text{Si} \quad K \in B_{C(X)}\left(X, \frac{1}{10}\right) \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ entonces } \frac{2}{3} \in C(f^n)(K). \quad (2.8.4)$$

Para probar (2.8.4) sea $K \in B_{C(X)}(X, \frac{1}{10})$. Entonces $H(K, X) < \frac{1}{10}$, por lo que $X \subset N_X(K, \frac{1}{10})$. En particular, $0, 1 \in N_X(K, \frac{1}{10})$. Luego existen $a, b \in K$ tales que $|a - 0| < \frac{1}{10}$ y $|b - 1| < \frac{1}{10}$. En vista de que $a < \frac{1}{10} < \frac{2}{3} < \frac{9}{10} < b$, K es un subconjuto conexo de $[0, 1]$ que intersecta a los intervalos $[0, \frac{2}{3})$ y $(\frac{2}{3}, 1]$. Luego $\frac{2}{3} \in K$. Como $\frac{2}{3}$ es un punto fijo de f, esto implica que $\frac{2}{3} \in C(f^n)(K)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y, así, (2.8.4) se cumple.

Supongamos ahora que existen $n \in \mathbb{N}$ y $K \in B_{C(X)}(X, \frac{1}{10})$, de modo que $F = C(f^n)(K) \in B_{C(X)}(\{0\}, \frac{1}{10})$. Entonces $H(F, \{0\}) < \frac{1}{10}$, por lo que $F \subset N_X(\{0\}, \frac{1}{10}) \subset [0, \frac{1}{10}]$. Además, por (2.8.4), $\frac{2}{3} \in F$, así que $\frac{2}{3} \in [0, \frac{1}{10}]$. Como esto es una contradicción, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$C(f^n)\left(B_{C(X)}\left(X, \frac{1}{10}\right)\right) \cap B_{C(X)}\left(\{0\}, \frac{1}{10}\right) = \emptyset.$$

Esto prueba que $C(f)$ no es transitiva.

□

2.8.3. Una función φ transitiva tal que 2^{φ} no es transitiva.

Consideremos la función continua $\varphi \colon [0, 1] \to [0, 1]$, que aparece en [2, p. 841] y se define como

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 1 - x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En [15, Ejemplo 2.2.1, p. 27] se muestran las gráficas de φ y φ^2, las cuales se ven como en la Figura 2.3.

Veremos primero que la función φ es transitiva. Para esto demostraremos antes el siguiente resultado.

Teorema 2.63. *Dado un conjunto U abierto y no vacío en $[0, 1]$, si $U \subset [\frac{1}{2}, 1]$ entonces, para algún $N \in \mathbb{N}$, $\varphi^{2N}(U) = [\frac{1}{2}, 1]$.*

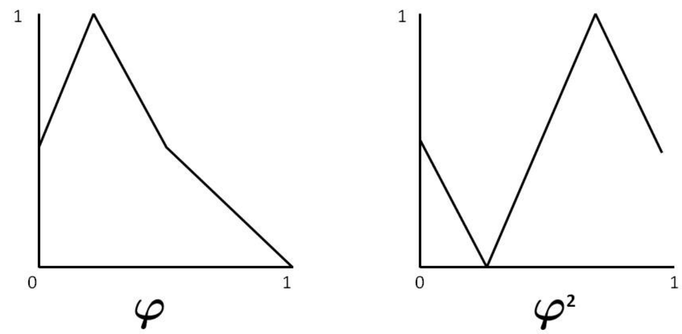

Figura 2.3: Gráficas de φ y φ^2.

Demostración. Primero veamos que φ^{2n} se puede reescribir de la siguiente manera.

$$\varphi^{2n}(x) = \begin{cases} \frac{1-f^n(2x)}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{f^n(2x-1)+1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y f es la función tienda de campaña. Podemos argumentar este hecho de manera inductiva. Se puede comprobar, mediante una serie de cuentas, que

$$\varphi^{2}(x) = \begin{cases} \frac{1-f(2x)}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{f(2x-1)+1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Visto este paso, suponiendo el resultado cierto en el caso n, procedemos al paso inductivo mediante los siguientes casos.

Caso 1. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces $\varphi^{2(n+1)}(x) = \varphi^{2n+2}(x) = \varphi^2 \circ \varphi^{2n}(x) = \varphi^2\left(\frac{1-f^n(2x)}{2}\right) = \frac{1-f(2(\frac{1-f^n(2x)}{2}))}{2} = \frac{1-f(1-f^n(2x))}{2} = \frac{1-f(f^n(2x))}{2} = \frac{1-f^{n+1}(2x)}{2}$.

Caso 2. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces $\varphi^{2(n+1)}(x) = \varphi^{2n+2}(x) = \varphi^2 \circ \varphi^{2n}(x) =$

$\varphi^2\left(\frac{f^n(2x-1)+1}{2}\right) = \frac{f(2(\frac{f^n(2x-1)+1}{2})-1)+1}{2} = \frac{f(f^n(2x-1)+1-1)+1}{2} = \frac{f(f^n(2x-1))+1}{2}$
$= \frac{f^{n+1}(2x-1)+1}{2}$.

Por otra parte, también es cierto que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{2n}([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{1}{2}]$ y $\varphi^{2n}([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$ por la siguiente razón. Sean $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = 2x - 1$, $g_1(x) = \frac{1-x}{2}$ y $g_2(x) = \frac{x+1}{2}$ (notemos que estas cuatro funciones son abiertas). Las siguientes composiciones son suprayectivas, pues cada una de ellas lo es.

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \xrightarrow{h_1} \left[0, 1\right] \xrightarrow{f^n} \left[0, 1\right] \xrightarrow{g_1} \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

y

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \xrightarrow{h_2} \left[0, 1\right] \xrightarrow{f^n} \left[0, 1\right] \xrightarrow{g_2} \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Además,

$$\varphi^{2n}(x) = \begin{cases} g_1 \circ f^n \circ h_1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ g_2 \circ f^n \circ h_2, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ahora, tomemos U abierto no vacío en $[0, 1]$ tal que $U \subset [\frac{1}{2}, 1]$. En el Teorema 2.60 se demostró que la función tienda de campaña f es exacta. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(h_2(U)) = [0, 1]$. Por lo tanto, $\varphi^{2N}(U) = g_2 \circ f^N \circ h_2(U) = g_2(f^N(h_2(U))) = g_2([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$.

□

Como se puede observar, el resultado también es valido si cambiamos $[\frac{1}{2}, 1]$ por $[0, \frac{1}{2}]$.

Con este resultado demostraremos la transitividad de φ.

Teorema 2.64. *La función φ es transitiva.*

Demostración. Tomemos entonces U y V dos abiertos no vacíos en $[0, 1]$. Si $U \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$ existe entonces un abierto $(a, b) \subset U \cap [\frac{1}{2}, 1]$ y, por el Teorema 2.63, para algún $N \in \mathbb{N}$ tenemos que $[\frac{1}{2}, 1] = \varphi^{2N}((a, b)) \subset \varphi^{2N}(U)$, pero $[0, \frac{1}{2}] = \varphi([\frac{1}{2}, 1]) = \varphi(\varphi^{2N}((a, b))) = \varphi^{2N+1}((a, b)) \subset \varphi^{2N+1}(U)$. Así, tenemos entonces que $\varphi^{2N}(U) \cap V \neq \emptyset$ o $\varphi^{2N+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Si por el contrario, $U \cap [\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$ entonces $U \subset [0, \frac{1}{2}]$ y repetimos el argumento, usando el Teorema 2.63 con la versión para el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$. □

Veamos a continuación qué ocurre con la transitividad de 2^{φ}. Para ello, consideremos los conjuntos abiertos en $[0,1]$, $U=[0,\frac{1}{2})$ y $V=(\frac{1}{2},1]$. Como ya sabemos, los vietóricos $\langle U\rangle$ y $\langle U,V\rangle$ resultan ser abiertos básicos para la topología de 2^X.

Por otra parte, por la manera en que se definió la función $\varphi(x)$, tenemos que $\varphi([0,\frac{1}{2}])=[\frac{1}{2},1]$ y $\varphi([\frac{1}{2},1])=[0,\frac{1}{2}]$. De aquí, se decuce lo siguiente. Si $A\in\langle U\rangle$ (y por lo tanto $A\subset U$), para toda $n\in\mathbb{N}$, $2^{\varphi n}(A)=\varphi^n(A)\subset[0,\frac{1}{2}]$ cuando n es par, mientras que $2^{\varphi n}(A)=\varphi^n(A)\subset[\frac{1}{2},1]$ cuando n es impar. Es decir, $2^{\varphi n}(A)\cap V=\emptyset$ si n es par y $2^{\varphi n}(A)\cap U=\emptyset$ si n es impar. Por lo tanto, $2^{\varphi n}(A)\notin\langle U,V\rangle$.

Este hecho nos muestra entonces que 2^{φ} no es transitiva y así, φ resulta ser una función transitiva cuya función inducida 2^{φ} no es transitiva. Por lo tanto, de la transitividad de una función, no se sigue la transitividad de sus funciones inducidas.

Capítulo 3

Transitividad en continuos

3.1. Introducción

En el presente capítulo veremos una serie de resultados que involucran la transitividad de la función inducida $C(f)$ de una función continua f. Mostraremos que, cuando X es un continuo que contiene un arco libre (Definición 1.3) y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces la función inducida $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ no es transitiva. Como las funciones exactas son transitivas, bajo las circunstancias anteriores, la función $C(f)$ tampoco es exacta.

También, en el presente capítulo, daremos un ejemplo de un continuo Y, de dimensión infinita, y de una función continua $g\colon Y \to Y$ tal que la función inducida $C(g)$ es transitiva. Terminaremos el capítulo con una serie de preguntas abiertas.

3.2. Transitividad en $C(f)$

Comenzaremos la sección con el siguiente resultado que aparece en [3, Teorema 4, p. 683], para continuos.

Teorema 3.1. *Sean X un espacio conexo y T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $CLC(f)$ es transitiva, entonces f es débilmente mezcladora.*

Demostración. Sean U, V y W tres abiertos no vacíos de X. Como X es T_1, para cada $u \in U$, resulta que $\{u\} \in \langle U \rangle \cap CLC(X)$. Luego $\langle U \rangle \cap CLC(X) \neq \emptyset$. También $\langle V, W, X \rangle \cap CLC(X)$ es no vacío, pues tiene a X.

Usando la transitividad de $CLC(f)$, para algún $K \in \langle U\rangle \cap CLC(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, $f^n(K) \in \langle V, W, X\rangle \cap CLC(X)$. Entonces $f^n(K) \cap V \neq \emptyset$ y $f^n(K) \cap W \neq \emptyset$. Como $K \subset U$, entonces $f^n(K) \subset f^n(U)$, así que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^n(U) \cap W \neq \emptyset.$$

Por el Corolario 2.46, f es débilmente mezcladora. □

Corolario 3.2. *Sean X un espacio compacto, conexo y T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $C(f)$ es transitiva, entonces f es débilmente mezcladora.*

Combinando los teoremas 3.1 y 2.47, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio conexo y T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $CLC(f)$ es transitiva, entonces $CL(f)$ es transitiva.*

Combinando el Corolario 3.2 y el Teorema 2.48, tenemos el siguiente resultado, probado originalmente en [1, Teorema 3.4, p. 1016], para continuos.

Teorema 3.4. *Sean X un espacio compacto, conexo y T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $C(f)$ es transitiva, entonces 2^f es transitiva.*

De los teoremas 3.1 y 2.49, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea X un espacio conexo y T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $CLC(f)$ es transitiva, entonces $F_n(f)$ es transitiva, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Finalmente, del Corolario 3.2 y el Teorema 2.49, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sean X un espacio compacto, conexo y T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $C(f)$ es transitiva, entonces $F_n(f)$ es transitiva, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

En los teoremas anteriores, la hipótesis de que X es conexo es muy importante. Si quitamos dicha condición, obtenemos el siguiente resultado, tomado de [1, Teorema 3.5, p. 1016]). Recordemos que un espacio topológico X es *totalmente disconexo* si sus únicos subconjuntos conexos son degenerados.

Teorema 3.7. *Existen un espacio métrico, compacto y no conexo X y una función continua $f\colon X \to X$, de modo que $C(f)$ es transitiva, mientras que 2^f y $F_n(f)$ no son transitivas, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.*

Demostración. Consideremos el espacio discreto $\{0,1\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $I_k = \{0,1\}$. Consideramos ahora el producto cartesiano

$$X = \prod_{k\in\mathbb{N}} I_k,$$

con la topología producto. No es difícil probar que X es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados (ver [27, Teorema 17.8, p.120] y [27, Teorema 20.3, p.161]). Entonces, por [21, Teorema 7.14, p. 109], X es homeomorfo al conjunto de Cantor. Ahora bien, dados $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ en X, definimos

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots) = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$$

donde $z_1 = x_1 + y_1(\text{mód } 2)$ y $z_2 = x_2 + y_2 + t_1(\text{mód } 2)$. Aquí $t_1 = 0$ si $x_1 + y_1 < 2$, y $t_1 = 1$ si $x_1 + y_1 = 2$. Por tanto sumamos y "llevamos uno" en el segundo caso. Continuamos sumando y "llevando uno", de esta manera, para obtener z_3, z_4, etc. Ahora consideramos la función $f\colon X \to X$, definida en $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X$ como

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots) + (1, 0, 0, \ldots).$$

A la función f se le conoce como la *máquina de sumar binaria*. No es difícil probar que f es un homeomorfismo, solamente debemos mostrar que f es biyectiva y continua [17, Proposición 2.6]. Haciendo cálculos se puede ver que esta suma es asociativa. Así, si denotamos

$$1_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots) \text{ y } \widehat{1} = (1, 1, 1, 1, \ldots),$$

tenemos que, dados $\widehat{x}, \widehat{y} \in X$, si $\widehat{x} + 1_1 = \widehat{y} + 1_1$, entonces $\widehat{x} + (1_1 + \widehat{1}) = \widehat{y} + (1_1 + \widehat{1})$ y como $1_1 + \widehat{1} = (0, 0, 0, \ldots)$, entonces $\widehat{x} = \widehat{y}$. Por lo tanto, f es inyectiva. Para ver que f es suprayectiva notemos que

$$(\widehat{x} + \widehat{1}) + 1_1 = \widehat{x}.$$

Para la continuidad de f, diremos que $\widehat{x}_i = p_i(\widehat{x})$, donde p_i es la proyección sobre la i-ésima coodenada. Observemos que, si $\widehat{x}, \widehat{y} \in X$ son tales que $d(\widehat{x}, \widehat{y}) < \frac{1}{2^n}$ (ver [7, p. 276]), entonces $\widehat{x}_i = \widehat{y}_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tomemos $\widehat{x} \in X$ y $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Si $d(\widehat{y}, \widehat{x}) < \frac{1}{2^n}$, entonces $\widehat{x}_i = \widehat{y}_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $f(\widehat{y})_i = f(\widehat{x})_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así, tenemos que $d(f(\widehat{y}), f(\widehat{x})) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Entonces, f es continua.

En [7, p. 277] se muestra que, para cada $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X$, el conjunto $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X. Entonces, por el Teorema 2.10, f es transitiva. Como X es totalmente disconexo, $C(X) = F_1(X)$. Además $F_1(X)$ es homeomorfo a X. Por tanto $C(f) = F_1(f)$ es transitiva.

Si 2^f es transitiva o bien existe $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que $F_n(f)$ es transitiva entonces, por los teoremas 2.48 y 2.49, f es débilmente mezcladora. Luego, por el Teorema 2.44, f es totalmente transitiva. Sin embargo, como se muestra en [3, p. 684], para cada $m \in \mathbb{N}$, la 2^m-ésima composición f^{2^m} no es transitiva. Por tanto f no es totalmente transitiva. De esto se deduce que 2^f no es transitiva y que $F_n(f)$ no es transitiva, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. $\square$

La función $f\colon X \to X$ dada en la prueba del teorema anterior, no tiene puntos periódicos. Por tanto, el conjunto de puntos periódicos de f no es denso en X. En [3, p. 684], se prueba que el conjunto de puntos periódicos de la función inducida 2^f es denso en 2^X. En el siguiente capítulo veremos otros resultados que involucran la densidad de los puntos periódicos entre una función y sus funciones inducidas.

3.3. Continuos con arcos libres

En la presente sección veremos una serie de resultados que se utilizarán, posteriormente, para probar que si X es un continuo con arcos libres y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces la función $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ no es transitiva. Todos estos resultados están comprendidos en la Sección 4 de [1].

El siguiente resultado, lo probaremos suponiendo que X es un continuo y que $f\colon X \to X$ es una función continua. Sin embargo, permanece válido si suponemos, en su lugar, que X es un espacio infinito, compacto y T_2, que 2^X es primero numerable y que f es una función continua.

Teorema 3.8. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Supongamos que existen $A, B \in 2^X$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\omega(B, 2^f) = 2^X$ y $A \subset f^m(B)$. Entonces*

1) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \not\subseteq f^{m+n}(B)$;*

2) *$A \not\subseteq f(A)$ y $f(A) \not\subseteq A$.*

Demostración. Para probar 1) supongamos, por el contrario, que $A \subset f^{m+n}(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\Lambda = \{D \in 2^X : A \subset D\}$. Como X es compacto, infinito y T_1, por los teoremas 1.21 y 1.22, Λ es cerrado en 2^X y no es denso en 2^X. Vamos a probar ahora que $\omega(B, 2^f) \subset \Lambda$. Para ver esto, notemos primero que

$$\operatorname{orb}(f^m(B), 2^f) = \{f^{m+n}(B) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Utilizando esto y el hecho de que $A \subset f^{m+n}(B)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, resulta que $\operatorname{orb}(f^m(B), 2^f) \subset \Lambda$. Luego, como Λ es cerrado en 2^X y 2^X es primero numerable, por el Teorema 1.64, $\omega(B, 2^f) \subset \Lambda$. Ahora bien, por hipótesis $\omega(B, 2^f) = 2^X$. Entonces $2^X = \Lambda$ y, con esto, Λ es denso en 2^X. Como esto es una contradicción, 1) es cierto.

Para probar 2), supongamos primero que $f(A) \subset A$. Entonces $f^{n+1}(A) \subset f^n(A)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\{f^n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en 2^X. Luego, por el Teorema 1.27, dicha sucesión converge a

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$$

y, además, $C \in 2^X$ y $C \subset A$. Notemos que C es un elemento de 2^X, que $m \in \mathbb{N}$ y que $C \subset f^m(B)$. Entonces, por 1) tenemos que para algún $n' \in \mathbb{N}$, $C \not\subset f^{m+n'}(B)$. Pero, por otro lado, $A \subset f^m(B)$, así que

$$C \subset f^{n'}(A) \subset f^{m+n'}(B).$$

Tenemos entonces una contradicción, que proviene de haber supuesto que $f(A) \subset A$. Por lo tanto, $f(A) \not\subset A$.

Supongamos ahora que $A \subset f(A)$. Entonces $f^n(A) \subset f^{n+1}(A)$, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En particular, $A \subset f^n(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $A \subset f^m(B)$, entonces $f^n(A) \subset f^{m+n}(B)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, así que $A \subset f^{m+n}(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como esto contradice 1), se concluye entonces que $A \not\subset f(A)$. Esto prueba 2). □

Utilizando la misma demostración que la dada en el Teorema 3.8, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.9. *Sea X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Supongamos que existen $A, B \in C(X)$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\omega(B, C(f)) = C(X)$ y $A \subset f^m(B)$. Entonces*

1) *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $A \not\subseteq f^{m+n}(B)$;

2) $A \not\subseteq f(A)$ *y* $f(A) \not\subseteq A$.

Supongamos ahora que X es un continuo y que $f\colon X \to X$ es una función continua tal que la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es transitiva. Como 2^X es un espacio métrico y compacto, por el Corolario 2.20, existe $B \in 2^X$ tal que $\mathrm{orb}(B, 2^f)$ es denso en 2^X y $\omega(B, 2^f) = 2^X$. Entonces la órbita de B, bajo 2^f, pasa arbitrariamente cerca de cualquier subconjunto cerrado y no vacío de X. En el siguiente resultado, veremos que el interior de cada elemento en la órbita de B bajo 2^f es vacío. Por tanto, por subconjuntos cerrados y no vacíos de X con interior vacío (los de la órbita de B bajo 2^f), nos podemos aproximar tanto como queramos a cualquier subconjunto cerrado y no vacío de X, incluso a aquellos con interior no vacío.

En la demostración del siguiente resultado utilizaremos los teoremas 1.23, 1.27 y 1.33. También utilizaremos el hecho de que, si $f\colon X \to X$ es una función continua de un continuo X en sí mismo, entonces la imagen de los elementos de una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, es también una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y no vacíos de X.

Teorema 3.10. *Sean* X *un continuo y* $f\colon X \to X$ *una función continua. Supongamos que* $2^f : 2^X \to 2^X$ *es transitiva y que* $B \in 2^X$ *es tal que* $\omega(B, 2^f) = 2^X$. *Entonces* $\mathrm{Int}_X(f^n(B)) = \emptyset$, *para toda* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Supongamos que, por el contrario, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$\mathrm{Int}_X(f^{n_0}(B)) \neq \emptyset.$$

Sea $D = f^{n_0}(B)$. Como $D \in \mathrm{orb}(B, 2^f)$, por el Teorema 1.63, $\omega(D, 2^f) = \omega(B, 2^f) = 2^X$. Tomemos $x \in \mathrm{Int}_X(D)$ y $\epsilon > 0$ tales que $B_X(x, \epsilon) \subset D$. Como $\{x\} \in \omega(D, 2^f)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^k(D), \{x\}) < \epsilon$ y así, por el Teorema 1.33,

$$f^k(D) \subset N_X(\{x\}, \epsilon) = B_X(x, \epsilon) \subset D.$$

Por lo tanto, $f^k(D) \subset D$. Aplicando f^{kn} en ambos miembros de la contención anterior, sucede que $f^{k(n+1)}(D) \subset f^{kn}(D)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{f^{kn}(D)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en 2^X. Por el Teorema 1.27, esta sucesión converge en 2^X al elemento

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{kn}(D). \tag{3.3.1}$$

Como $f^{kn}(D) \rightsquigarrow C$, de (3.3.1) se tiene que $\omega(D, 2^{f^k}) = \{C\}$. También, debido a que $f^{kn}(D) \rightsquigarrow C$, para cada $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos, por la continuidad de la función $(2^f)^s$, que

$$f^{kn+s}(D) \rightsquigarrow f^s(C). \tag{3.3.2}$$

Como $\omega(D, 2^{f^k})$ es fuertemente invariante bajo 2^{f^k} y $\omega(D, 2^{f^k}) = \{C\}$, tenemos que

$$\left\{f^k(C)\right\} = 2^{f^k}(\{C\}) = 2^{f^k}\left(\omega\left(D, 2^{f^k}\right)\right) = \omega\left(D, 2^{f^k}\right) = \{C\}.$$

Así, $f^k(C) = C$. Probaremos ahora lo siguiente.

a) si m es un número natural tal que $m \geq k$ y $m \equiv i(\text{mod } k)$, para alguna $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, entonces $f^i(C) \subset f^m(D)$.

Supongamos que $m = tk + i$. Entonces $C \subset f^{tk}(D)$ y, aplicando f^i de ambos lados

$$f^i(C) \subset f^i(f^{tk}(D)) = f^{i+tk}(D) = f^m(D).$$

Ahora bien, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, sea

$$\Lambda_i = \{A \in 2^X : f^i(C) \subset A\}.$$

Por el Teorema 1.21, Λ_i es cerrado en 2^X. Entonces

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_{k-1}$$

es cerrado en 2^X. Además, por el Teorema 1.23, Λ no es denso en 2^X.

b) $\omega(D, 2^f) \subset \Lambda$.

Para ver esto, sea $A \in \omega(D, 2^f)$. Entonces $A \in 2^X$ y, además, existe una sucesión estrictamente creciente $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{m_s}(D) \rightsquigarrow A$. Como la sucesión $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente podemos suponer, sin perder generalidad, que $m_s \geq k$, para cada $s \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como todo número natural es congruente, módulo k, con algún elemento del conjunto finito $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, existen una subsucesión $\{m_{s_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ y un número $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, de forma que $m_{s_l} \equiv i(\text{mod } k)$, para toda $l \in \mathbb{N}$. Luego $\{f^{m_{s_l}}(D)\}_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X que converge a A y, por a), $f^i(C) \subset f^{m_{s_l}}(D)$, para cada $l \in \mathbb{N}$. Como Λ_i es cerrado en 2^X y, por lo que hemos probado, $\{f^{m_{s_l}}(D)\}_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Λ_i que converge a A, tenemos que $A \in \Lambda_i \subset \Lambda$. Esto prueba b).

Como $\omega(D, 2^f) = 2^X$, de b) resulta que $\Lambda = 2^X$. Entonces Λ es denso en 2^X. Esto contradice el hecho de que Λ no es denso en 2^X. Dicha contradicción provino de haber supuesto que existe $n_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $\mathrm{Int}_X(f^{n_0}(B)) \neq \emptyset$. Luego $\mathrm{Int}_X(f^n(B)) = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. $\square$

Teorema 3.11. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Supongamos que $C(f) : C(X) \to C(X)$ es transitiva y que $B \in C(X)$ es tal que $\omega(B, C(f)) = C(X)$. Entonces $\mathrm{Int}_X(f^n(B)) = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.*

Demostración. La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 3.10, usando esta vez el Teorema 1.24. $\square$

El Teorema 3.10 es una parte importante de la Tesis de Maestría [15]. En dicho trabajo se prueban los siguientes resultados:

1) existen un espacio X, homeomorfo al conjunto de Cantor, una función continua $f\colon X \to X$ y un elemento $A \in 2^X$, de modo que $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_0\}$, $a_n \rightsquigarrow a_0$ y $\mathrm{orb}(A, 2^f)$ es denso en 2^X ([15, Teorema 4.1.2, p. 48]);

2) supongamos que X es un espacio métrico y compacto sin puntos aislados y que $f\colon X \to X$ es una función continua tal que 2^f es transitiva. Entonces existe $A \in 2^X$ de modo que $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_0\}$, $a_n \rightsquigarrow a_0$ y $\mathrm{orb}(A, 2^f)$ es denso en 2^X ([15, Teorema 4.1.4, p. 53]).

Así pues, bajo las hipótesis indicadas en 2), se muestra que siempre es posible encontrar un elemento $A \in 2^X$, con órbita densa bajo 2^f y de la forma más simple (pues A no puede ser finito): una sucesión convergente junto con su punto límite.

Estamos listos para probar el resultado principal de esta sección. En realidad dicho resultado es más un corolario del Teorema 3.11. Pero, por su importancia, lo enunciamos como teorema y como el principal. En esencia, el resultado nos ayuda a descartar la posibilidad de que la función inducida $C(f)$ de una función continua $f\colon X \to X$, definida en un continuo X, sea transitiva.

Teorema 3.12. *Sean X un continuo que contiene un arco libre y $f : X \to X$ una función continua. Entonces la función inducida $C(f) : C(X) \to C(X)$ no es transitiva.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $C(f) : C(X) \to C(X)$ es transitiva. Sean $B \in C(X)$ tal que $\omega(B, C(f)) = C(X)$ y A un arco libre en X, con extremos p y q. Sean x y y en $A - \{p, q\}$ tales que $x \neq y$ y C el subarco de A con extremos x y y. Como $A - \{p, q\}$ es abierto en X y contiene a C, por el Teorema 1.34, existe $\epsilon > 0$ tal que $N_X(C, \epsilon) \subset A - \{p, q\}$. Como X es T_2 y $x \neq y$, podemos pedir además que dicha ϵ sea tal que $B_X(x, \epsilon) \cap B_X(y, \epsilon) = \emptyset$.

Notemos que $C \in C(X) = \omega(B, C(f))$, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^k(B), C) < \epsilon$. Entonces $f^k(B) \subset N_X(C, \epsilon) \subset A - \{p, q\}$. Esto implica que $f^k(B)$ es un subcontinuo de X, contenido en el arco A. Luego $f^k(B)$ es un subarco de A. Además, como $x, y \in C \subset N_X(f^k(B), \epsilon)$, resulta que

$$f^k(B) \cap B_X(x, \epsilon) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^k(B) \cap B_X(y, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Tenemos entonces que $f^k(B)$ es un subarco de A que intersecta a los conjuntos ajenos $B_X(x, \epsilon)$ y $B_X(y, \epsilon)$. Entonces $f^k(B)$ es no degenerado. Así, $\mathrm{Int}_X(f^k(B)) \neq \emptyset$. Como esto último contradice el Teorema 3.11, deducimos que $C(f)$ no es transitiva. □

Corolario 3.13. *Sean X un continuo que contiene un arco libre y $f : X \to X$ una función continua. Entonces la función inducida $C(f) : C(X) \to C(X)$ no es exacta ni débilmente mezcladora ni totalmente transitiva.*

Demostración. El resultado es consecuencia del teorema anterior y del hecho de que las funciones exactas, las débilmente mezcladoras y las totalmente transitivas, son transitivas. □

Existen varias familias importantes de continuos que contienen arcos libres. Entre ellas se encuentran las gráficas finitas. Recordemos que un continuo X es una *gráfica finita* si X se puede escribir como una unión finita de arcos tales que cada dos de ellos, si se intersectan lo hacen en uno o en sus dos puntos extremos. Toda gráfica finita contiene arcos libres. Entonces si X es una gráfica finita y $f \colon X \to X$ es una función continua, por el Teorema 3.12, la función inducida $C(f)$ no es transitiva, sin importar si f es transitiva o no (y, por el Corolario 3.13, $C(f)$ tampoco es exacta, ni débilmente mezcladora ni totalmente transitiva). Aplicando este resultado, es fácil ver que para las funciones T_λ y f mostradas en las secciones 2.8.1 y 2.8.2, las funciones inducidas $C(T_\lambda)$ y $C(f)$ no son transitivas. Recordemos que la función 2^f es transitiva. Esto implica que el Teorema 3.12 no es válido si cambiamos $C(f)$ por 2^f.

En la Sección 5 de [1] se muestra otra clase de continuos, llamados *tipo* λ. Algunos continuos tipo λ contienen arcos libres, y otros no. En [1, Teorema 5.3, p. 1018], se muestra que si X es un continuo tipo λ y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces la función inducida $C(f)$ no es transitiva.

En la Sección 6 de [1], se muestra otra clase más de continuos, llamados *dendritas*. Un dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene copias topológicas de la circunferencia unitaria. Es conocido que algunas dendritas poseen arcos libres, mientras que otras no. En [1, Teorema 6.2, p. 1019] se muestra que si X es una dendrita y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces la función inducida $C(f)$ no es transitiva.

En vista de los ejemplos anteriores, uno podría conjeturar que si X es un continuo y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces la función inducida $C(f)$ no es transitiva. Como veremos en la siguiente sección, esto no es así.

3.4. Una dendrita especial

En esta sección, vamos a construir una dendrita y un homeomorfismo $f\colon X \to X$. Posteriormente, con la ayuda de X y de f, construiremos un continuo Q y una función continua $\sigma\colon Q \to Q$ de modo que la función inducida $C(\sigma)$ es transitiva.

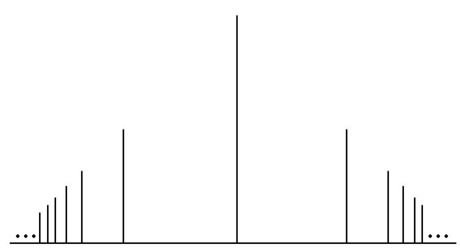

Figura 3.1: Dendrita X.

Definimos la dendrita X de la siguiente manera: primero ubicamos en el plano cartesiano los puntos $(-1,0)$, $(1,0)$ y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, con

$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n+1}, & \text{si } n \geq 0; \\ -\left(1 - \frac{1}{|n-1|}\right), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Notemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es creciente, $a_{-n} = -a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, además,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to-\infty} a_n = -1.$$

Dada $n \in \mathbb{Z}$, definimos el segmento de recta

$$L_n = \{a_n\} \times \left[0, \frac{1}{|n|+1}\right].$$

Si denotamos

$$L = \{(r,0)\colon -1 \leq r \leq 1\},$$

podemos definir la dendrita X, como el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = L \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} L_n\right).$$

Una manera de representar a esta dendrita se puede ver en la Figura 3.1

Notemos que X tiene arcos libres así que, por el Teorema 3.12, para cualquier función continua $f : X \to X$, $C(f)$ no es transitiva. No obstante, estudiaremos la función $f : X \to X$ definida de la siguiente manera. Primero, si $n \in \mathbb{Z}$ y $x = (a,0) \in [a_n, a_{n+1}) \times \{0\}$, definimos

$$x_a = \left(\frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}}\right)(a - a_n) + a_{n+1}.$$

Si $x = (a_n, a) \in L_n$, definimos

$$y_a = \left(\frac{|n|+1}{|n+1|+1}\right)a.$$

Hacemos ahora

$$f(x) = \begin{cases} (-1,0), & \text{si } x = (-1,0); \\ (1,0), & \text{si } x = (1,0); \\ (x_a, 0), & \text{si } x = (a,0) \in [a_n, a_{n+1}) \times \{0\}, \text{ con } n \in \mathbb{Z}; \\ (a_{n+1}, y_a), & \text{si } x = (a_n, a) \in L_n \text{ con } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Podemos observar, aunque f no se define de forma sencilla, se entiende lo que hace. Primero que nada, $f_{|_L} : L \to L$ es un homeomorfismo lineal tal que $f((-1,0)) = (-1,0)$ y $f((1,0)) = (1,0)$. Además, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f((a_n,0)) = (a_{n+1},0)$ y, la imagen bajo f del intervalo $[(a_n,0),(a_{n+1},0)]$ es el intervalo $[(a_{n+1},0),(a_{n+2},0)]$. Como $a_n \rightsquigarrow 1$ cuando $n \rightsquigarrow \infty$, se deduce que

$$\omega([(a_n,0),(a_{n+1},0)], C(f)) = \{(1,0)\}, \text{ para toda } \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.4.1}$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f_{|_{L_n}} : L_n \to L_{n+1}$ es un homeomorfismo lineal tal que $f(a_n,0) = (a_{n+1},0)$ y

$$f\left(\left(a_n, \frac{1}{|n|+1}\right)\right) = \left(a_{n+1}, \frac{1}{|n+1|+1}\right).$$

Notemos que

$$\omega(L_n, C(f)) = \{(1,0)\}, \text{ para toda } \ n \in \mathbb{Z} \tag{3.4.2}$$

y

$$\omega(A, C(f)) = \{(1,0)\}, \text{ para toda } \ A \in C(X) \text{ con } \ (-1,0) \notin A. \tag{3.4.3}$$

Probaremos solamente (3.4.2). Dada $\epsilon > 0$ (podemos pedir $\epsilon < 1$), elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(\left(a_n, \frac{1}{|n|+1}\right), (1,0)\right) < \epsilon.$$

Con esto se asegura que $L_n \subset B_X((1,0),\epsilon)$. Es claro también que, si $m > n$, entonces $L_m \subset B_X((1,0),\epsilon)$. También es cierto que $(1,0) \in N_X(L_n,\epsilon)$ y $(1,0) \in N_X(L_m,\epsilon)$, pues

$$d\left((1,0), \left(a_m, \frac{1}{|m|+1}\right)\right) < d\left((1,0), \left(a_n, \frac{1}{|n|+1}\right)\right) < \epsilon.$$

Notemos ahora que, por la manera en la cual fue definida f, el conjunto de puntos fijos de f es $\{(-1,0),(1,0)\}$. Luego

$$\omega((-1,0), f) = \{(-1,0)\} \ \text{ y } \ \omega((1,0), f) = \{(1,0)\}. \tag{3.4.4}$$

Además,

$$\omega(x, f) = \{(1, 0)\} \text{ para toda } x \in X - \{(-1, 0)\}. \tag{3.4.5}$$

Por tanto, no existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$. Esto implica, por el Teorema 2.23, que f no es transitiva. Además, por el Teorema 2.28, la función inducida $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ tampoco es transitiva. También podemos usar el Teorema 3.12 para probar que $C(f)$ no es transitiva, pues X es un continuo que contiene arcos libres.

Recordemos que $f\colon X \to X$ es un homeomorfismo. Entonces, por el Teorema 1.45, la función inducida $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ también es un homeomorfismo. Como hemos visto, la dinámica de f no es interesante pues, por (3.4.4) y (3.4.5), el ω-conjunto límite de cada elemento de X es un conjunto degenerado. Además, por (3.4.1), (3.4.2) y (3.4.3), la dinámica de $C(f)$ tampoco es interesante en los subcontinuos indicados en (3.4.1), (3.4.2) y (3.4.3). Vamos a encontrar sin embargo, un subespacio Λ de $C(X)$, fuertemente invariante bajo $C(f)$, de modo que la dinámica de la función, restringida $C(f)_{|_\Lambda}\colon \Lambda \to \Lambda$ es muy interesante.

La prueba de lo que se indicó al final del párrafo anterior, la realizaremos por partes, dividiendo la presente sección en varias subsecciones, en donde se destaque algún aspecto importante.

3.4.1. Los subconjuntos Λ y Q.

Definimos el conjunto

$$\Lambda = \{A \in C(X)\colon (-1, 0) \text{ y } (1, 0) \text{ están en } A\}.$$

Observemos que, si $A \in \Lambda$, entonces $L \subset A$. Además, Λ es cerrado en $C(X)$, pues podemos escribirlo como $\Lambda = \{A \in C(X)\colon L \subset A\}$ que, por el Teorema 1.21, es cerrado en $C(X)$. También se tiene que Λ es fuertemente invariante bajo $C(f)$ por la siguiente razón. Si $A \in \Lambda$, entonces $L \subset A$. Como $f(L) = L$, entonces $L \subset f(A)$, por lo tanto, $C(f)(A) \in \Lambda$. Por otra parte, f^{-1} también es continua, así que $f^{-1}(L) = L$ y, por el mismo razonamiento, $f^{-1}(A) \in \Lambda$. Es decir, $C(f)(\Lambda) = \Lambda$. Notemos que cada $A \in \Lambda$ se puede escribir como

$$A = L \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_{A,n} \right), \tag{3.4.6}$$

donde, para $n \in \mathbb{Z}$, $J_{A,n} = \{a_n\} \times [0, b_n]$ y $0 \leq b_n \leq \frac{1}{|n|+1}$.

Trabajaremos entonces con $C(f)_{|\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$. Para ello nos fijaremos primero en el siguiente conjunto. Definimos

$$Q = \prod_{n\in\mathbb{Z}} I_n,$$

con $I_n = [0,1]$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que

$$Q = \{t = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \colon t_n \in [0,1] \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Definimos la métrica D para el espacio Q de la siguiente manera.

$$D(t,t') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}}.$$

Haremos dos observaciones al respecto.

Observación 1. Sean t y $t' \in Q$ y $M > 0$ tales que, si $n \in [-M, M]$, entonces $t_n = t'_n$. Así, se tiene que

$$D(t,t') = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n-t'_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\in[-M,M]} \frac{|t_n-t'_n|}{2^{|n|}} + \sum_{|n|>M} \frac{|t_n-t'_n|}{2^{|n|}} =$$
$$\sum_{n\in[-M,M]} \frac{0}{2^{|n|}} + \sum_{|n|>M} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}} \leq \sum_{|n|>M} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n\geq M+1} \frac{1}{2^n} =$$
$$2\left(\frac{1}{2^{M+1}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\left(\frac{1}{2^{M+1}}\right) 2 = \frac{1}{2^{M-1}}.$$

Observación 2. Sean $\epsilon > 0$ y t y $t' \in Q$ tales que, $|t_n - t'_n| < \epsilon$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$D(t,t') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}} < \epsilon\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}}\right) = \epsilon\left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1\right) = \epsilon(2+1) = 3\epsilon.$$

3.4.2. La identificación entre Λ y Q.

En esta parte, definiremos un homeomorfismo $\phi : \Lambda \to Q$. Primero que nada, denotaremos por π_1 y π_2 a la primera y la segunda proyección de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, respectivamente. Las proyecciones de Q a cada uno de los factores $I_n = [0,1]$, se denotaran por $P_n : Q \to I_n$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por la observación que hicimos en (3.4.6), la manera en la cual debemos definir ϕ es la siguiente. Si $A \in \Lambda$, entonces A se puede escribir de la forma

$$A = L \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_{A,n}$$

y así,

$$\phi(A) = (t_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

donde $t_n = (|n| + 1) \max\{\pi_2(J_{A,n})\}$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *La función $\phi : \Lambda \to Q$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Nuevamente, por el Teorema 1.1, solo debemos mostrar que ϕ es continua y biyectiva. Empecemos por la biyectividad.

1. ϕ es inyectiva. Si A_1 y $A_2 \in \Lambda$, son tales que $A_1 \neq A_2$ y además,

$$A_1 = L \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_{A_1,n} \quad y \quad A_2 = L \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_{A_2,n},$$

como ambos conjuntos contienen a L, entonces $J_{A_1,n} \neq J_{A_2,n}$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Tanto $J_{A_1,n}$ como $J_{A_2,n}$ son subcontinuos que contienen a $(a_n, 0)$. Sin perdida de generalidad, tomamos $x \in J_{A_1,n} - J_{A_2,n}$, entonces $\max(\pi_2(J_{A_1,n})) \geq x > \max(\pi_2(J_{A_2,n}))$. Esto último nos dice que $\phi(A_1) \neq \phi(A_2)$.

2. ϕ es suprayectiva. Sea $t = (t_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in Q$, definimos $A \in \Lambda$ como

$$A = L \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_{A,n},$$

donde $J_{A,n} = \{a_n\} \times [0, \frac{t_n}{|n|+1}]$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Denotemos $b_n = \frac{t_n}{|n|+1}$. Es claro que $\phi(A) = t$.

Probemos la continuidad. Sea $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\Lambda(A, \delta)) \subset B_Q(t, \epsilon),$$

donde $t = \phi(A)$.

Tomemos $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\left(\sum_{n\geq M+1}\frac{1}{2^n}\right)<\frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\delta=\text{mín}\left\{\left\{\frac{\epsilon}{6(M+1)}\right\}\cup\left\{|a_n-a_{n+1}|\colon n\in\{0,1,\ldots,2M-1\}\right\}\right\}.$$

Sea $A'\in\Lambda$ tal que $A'\in B_\Lambda(A,\delta)$ y digamos que

$$A'=L\cup\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}J_{A',n},$$

donde $J_{A',n}=\{a_n\}\times[0,b'_n]$ y $0\leq b'_n\leq\frac{1}{|n|+1}$, para toda $n\in\mathbb{Z}$. En este caso, $\phi(A')=t'=(t'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, con $t'_n=(|n|+1)b'_n$, para toda $n\in\mathbb{Z}$.

Si $H(A,A')<\delta$, entonces $A\subset N_X(A',\delta)$ y $A'\subset N_X(A,\delta)$. Aquí, tenemos dos opciones para cada $n\in[-M,M]$.

Caso 1. Supongamos $b_n\leq b'_n$, como $A'\subset N_X(A,\delta)$, existe $(a',a'')\in A$ tal que $d((a_n,b'_n),(a',a''))<\delta$. Debido a que $\delta<|a_n-a_{n+1}|$ y $\delta<|a_{n-1}-a_n|$, $(a',a'')\notin J_m$ para toda $m\neq n$, es decir, $(a',a'')\in((a_{n-1},0),(a_{n+1},0))\cup J_n$, luego

$$|b'_n-b_n|\leq d((a_n,b'_n),(a',a''))<\delta.$$

Caso 2. Suponemos que $b'_n<b_n$. En este caso, usamos la contención $A\subset N_X(A',\delta)$ y, procediendo de manera análoga al caso 1, obtenemos que $|b'_n-b_n|<\delta$.

En cualquiera de los dos casos, se tiene que

$$|b'_n-b_n|<\delta\leq\frac{\epsilon}{6(M+1)}.$$

Así, tenemos los siguientes desarrollos.

$$\sum_{n\in[-M,M]}\frac{|t_n-t'_n|}{2^{|n|}}=\sum_{n\in[-M,M]}\frac{|(|n|+1)b_n-(|n|+1)b'_n|}{2^{|n|}}$$
$$=\sum_{n\in[-M,M]}\frac{(|n|+1)|b_n-b'_n|}{2^{|n|}}\leq\sum_{n\in[-M,M]}\frac{(M+1)|b_n-b'_n|}{2^{|n|}}$$

$$= (M+1) \sum_{n\in[-M,M]} \frac{|b_n - b'_n|}{2^{|n|}} < (M+1)(3\delta),$$

pues esto último es análogo a la Observación 2. Pero,

$$(M+1)(3\delta) \leq (M+1)3\left(\frac{\epsilon}{6(M+1)}\right) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, tenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\in[-M,M]} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}} + \sum_{|n|\geq M+1} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{|n|\geq M+1} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{|n|}} = \frac{\epsilon}{2} + 2\left(\sum_{n\geq M+1} \frac{|t_n - t'_n|}{2^{n}}\right)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + 2\left(\sum_{n\geq M+1} \frac{1}{2^{n}}\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Podemos entonces pensar a Λ como el cubo Q. Definimos ahora la función $\sigma : Q \to Q$ de la siguiente forma. Si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, entonces

$$\sigma(t) = s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \tag{3.4.7}$$

donde $s_n = t_{n-1}$. Dicha función, pensada en Λ, resulta ser una especie de «corrimiento». Sin embargo, definida en Q es más fácil de comprender.

Teorema 3.15. *La función $\sigma : Q \to Q$ es un homeomorfismo.*

Demostración. La función σ es continua, pues sabemos que $P_{n-1}(t) = t_{n-1} = (\sigma(t))_n = P_n(\sigma(t))$, para toda $n \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$P_n \circ \sigma = P_{n-1},$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Todas las proyecciones son continuas, por lo tanto, σ es continua. También es fácil ver que σ es biyectiva.

1) Si $\sigma((t_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sigma((t'_n)_{n\in\mathbb{Z}})$, entonces

$$t_{n-1} = P_n(\sigma((t_n)_{n\in\mathbb{Z}})) = P_n(\sigma((t'_n)_{n\in\mathbb{Z}})) = t'_{n-1},$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (t'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2) Si $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$, definimos $t^{+1} \in Q$ como $P_n(t^{+1}) = t_{n+1}$. Así,

$$P_n(\sigma(t^{+1})) = P_{n-1}(t^{+1}) = t_{(n-1)+1} = t_n,$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. En otras palabras, $\sigma(t^{+1}) = t$. Por el Teorema 1.1, σ es un homeomorfismo. □

Una de las propiedades dinámicas que tiene σ es la transitividad.

Teorema 3.16. *La función $\sigma : Q \to Q$ es transitiva.*

Demostración. Sean $t = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q, $\epsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{1}{2^M} = \sum_{n>M} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Definimos $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \sigma^{-3M}(s)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $c_n = (\sigma^{-3M}(s))_n = s_{n+3M}$, esta última igualdad se debe a que $\sigma^{3M}(s_{n+3M}) = s_{(n+3M)-3M} = s_n$.

Por cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$u_n = \begin{cases} t_n, & \text{si } n \in [-M, M]; \\ c_n, & \text{si } n \in [-4M, -2M]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Como $u_n = t_n$, para toda $n \in [-M, M]$, entonces

$$D(t, u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - u_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\in[-M,M]} \frac{|t_n - u_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n\notin[-M,M]} \frac{|t_n - u_n|}{2^{|n|}}$$
$$= \sum_{n\notin[-M,M]} \frac{|t_n - u_n|}{2^{|n|}} \leq 2\left(\sum_{n>M} \frac{1}{2^n}\right) < 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon.$$

Fijemonos ahora en $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \sigma^{3M}(u)$. Notemos que, si $n \in [-M, M]$, entonces $n - 3M \in [-4M, -2M]$ y así, $v_n = (\sigma^{3M}(u))_n = u_{n-3M} = c_{n-3M} = s_n$.

Entonces, $v_n = (\sigma^{3M}(u))_n$, para toda $n \in [-M, M]$. Por la Observación 1,

$$D(s, v) \leq \frac{1}{2^{M-1}} = \frac{2}{2^M} < 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon.$$

En conclusión, $u \in Q$ es tal que para $N = 3M \in \mathbb{N}$, se tiene que $D(t,u) < \epsilon$ y $D(s, \sigma^N(u)) < \epsilon$. Por lo tanto, σ es transitiva. $\square$

Para ver que $C(\sigma)$ es transitiva veremos primero una definición y un resultado que nos facilitará el trabajo en la demostración del último teorema de este capítulo.

Definición 3.17. *Sea $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q y $N_0 \in \mathbb{N}$. Definimos la función $g[s, N_0] : Q \to Q$ de la siguiente manera. Si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$, entonces $g[s, N_0](t) = u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, donde*

$$u_n = \begin{cases} t_n, & si\ n \in [-N_0, N_0]; \\ s_n, & si\ n \notin [-N_0, N_0]. \end{cases}$$

Para simplificar la notación, escribiremos g en vez de $g[s, N_0]$, salvo que sea necesario especificar.

Teorema 3.18. *La función que acabamos de definir, $g : Q \to Q$, es continua.*

Demostración. Basta con demostrar que si t y $r \in Q$, entonces

$$D(g(t), g(r)) \leq D(t,r).$$

Pero esto se deduce en el siguiente desarrollo.

$$D(g(t), g(r)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n\notin[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}}$$

$$= \sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|s_n - s_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n\notin[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\notin[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}}$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} = d(t,r).$$

$\square$

Notemos también que, si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$, entonces

$$\begin{aligned}
D(t, g(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - (g(t))_n|}{2^{|n|}} = \\
\sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - (g(t))_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n\notin[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - (g(t))_n|}{2^{|n|}} \\
= \sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|s_n - s_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n\notin[-N_0-N_0]} \frac{|t_n - (g(t))_n|}{2^{|n|}} = \\
\sum_{n\notin[-N_0-N_0]} \frac{|t_n - (g(t))_n|}{2^{|n|}} \\
\leq \sum_{|n|\geq N_0+1} \frac{1}{2^{|n|}} = 2\left(\sum_{n\geq N_0+1} \frac{1}{2^n}\right) = 2\left(\frac{1}{2^{N_0}}\right) = \frac{1}{2^{N_0-1}}.
\end{aligned}$$

Por tal motivo, si $A \in Q$, tanto $A \subset N_Q(g(A), \frac{1}{2^{N_0-1}} + \epsilon)$ como $g(A) \subset N_Q(A, \frac{1}{2^{N_0-1}} + \epsilon)$, para toda $\epsilon > 0$. Así,

$$H(A, g(A)) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}}.$$

Ahora si, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.19. *Las funciones inducidas $C(\sigma) : C(Q) \to C(Q)$ y $2^\sigma : 2^Q \to 2^Q$ son transitivas.*

Demostración. Por el Teorema 3.4, es suficiente con demostrar que $C(Q)$ es transitiva. Sean A y $B \in Q$ y $\epsilon > 0$. Queremos ver que existe $K \in B_{C(Q)}(B, \epsilon)$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que $\sigma^M(K) \in B_{C(Q)}(A, \epsilon)$.

Sean $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, con $a \in A$ y $b \in B$. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N_0}} < \frac{\epsilon}{4}$. Definimos $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \sigma^{-3N_0}(a)$, entonces tenemos que

$$c_n = (\sigma^{-3N_0}(a))_n = a_{n+3N_0}.$$

Consideremos $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$, donde

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \geq N_0 + 1; \\ b_n, & \text{si } n \in [-N_0, N_0]; \\ 0, & \text{si } n \in [-2N_0 + 1, -N_0 - 1]; \\ c_n, & \text{si } n \in [-4N_0, -2N_0]; \\ 0, & \text{si } n \leq -4N_0 - 1. \end{cases}$$

Definimos $r = (r_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \sigma^{3N_0}(s)$, entonces tenemos que

$$r_n = (\sigma^{3N_0}(s))_n = s_{n-3N_0}.$$

Sean $g_1 = g[s, N_0]$ y $g_2 = g[r, N_0]$. Sabemos que estas funciones son continuas, así que $g_1(B)$, $g_2(A)$ y $\sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \in C(Q)$. Sabemos además que

$$H(B, g_1(B)) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}} < \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$H(A, g_2(A)) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dada $n \in [-N_0, N_0]$, tenemos que $-4N_0 \leq n - 3N_0 \leq -2N_0$. Luego $(g_1(b))_n = s_n$ y $r_n = s_{n-3N_0} = c_{n-3N_0} = a_{n-3N_0+3N_0} = a_n = (g_2(a))_n$.

Si $|n| > N_0$, entonces $(g_1(b))_n = s_n$ y $(g_2(a))_n = r_n$. Por tanto, $g_1(b) = s$ y $g_2(a) = r$. Como $\sigma^{3N_0}(s) = r = g_2(a)$, se tiene que $s \in g_1(B) \cap \sigma^{-3N_0}(g_2(A))$, de donde

$$K = g_1(B) \cup \sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \in C(Q).$$

Haremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $\sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \subset B_Q(s, \frac{\epsilon}{2})$

Razón. Sean $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A$ y $n \in [-N_0, N_0]$. Entonces $n + 3N_0 \in [2N_0, 4N_0]$. Así, $n + 3N_0 \geq N_0 + 1$, por lo que

$$(\sigma^{-3N_0}(g_2(u)))_n = (g_2(u))_{n+3N_0} = r_{n+3N_0} = s_{n+3N_0-3N_0} = s_n.$$

Tenemos que s y $\sigma^{-3N_0}(g_2(u))$ son tales que $s_n = (\sigma^{-3N_0}(g_2(u)))_n$, para toda $n \in [-N_0, N_0]$. Por lo tanto, por la Observación 1,

$$D(\sigma^{-3N_0}(g_2)(u), s) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Afirmación 2. $H(g_1(B), K) < \frac{\epsilon}{2}$ y $H(B, K) < \epsilon$.

Razón. Sabemos que $g_1(B) \subset K \subset N_Q(K, \frac{\epsilon}{2})$. Además, $s \in g_1(B)$ y por la Afirmación 1, tenemos que

$$\sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \subset B_Q\left(s, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset N_Q\left(g_1(B), \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Entonces,

$$K = g_1(B) \cup \sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \subset N_Q\left(g_1(B), \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Como $g_1(B) \subset K \subset N_Q(K, \frac{\epsilon}{2})$, sucede que $H(g_1(B), K) < \frac{\epsilon}{2}$. También se tiene que $H(B, g_1(B)) < \frac{\epsilon}{2}$, pues $b_n = g_1(b)_n$, para toda $n \in [-N_0, N_0]$ y $b \in B$ y, por la Observación 1, la desigualdad es cierta. Por lo tanto,

$$H(B, K) \leq H(B, g_1(B)) + H(g_1(B), K) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Notemos en este momento que $\sigma^{3N_0}(K) = \sigma^{3N_0}(g_1(B)) \cup g_2(A)$ es un subcontinuo de Q. Tenemos así, la última afirmación.

Afirmación 3. $\sigma^{3N_0}(g_1(B)) \subset B_Q(r, \frac{\epsilon}{2})$.

Razón. Sea $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B$. Si $n \in [-N_0, N_0]$, entonces $n - 3N_0 \leq -2N_0$. Así,

$$(\sigma^{3N_0}(g_1(v)))_n = (g_1(v))_{n-3N_0} = s_{n-3N_0} = r_n.$$

Por lo tanto, para toda $n \in [-N_0, N_0]$, $D(\sigma^{3N_0}(g_1(v)), r) < \frac{\epsilon}{2}$, nuevamente por la Observación 1. Con lo cual, tenemos la Afirmación 3.

Ahora bien, si usamos la Afirmación 3 y seguimos los pasos de la demostración de la Afirmación 2, se tiene que

$$H(g_2(A), \sigma^{3N_0}(K)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } H(\sigma^{3N_0}(K), A) < \epsilon,$$

pues $K = g_1(B) \cup \sigma^{-3N_0}(g_2(A))$. Entonces,

$$\sigma^{3N_0}(K) = \sigma^{3N_0}(g_1(B) \cup \sigma^{-3N_0}(g_2(A))) = \sigma^{3N_0}(g_1(B)) \cup g_2(A).$$

Por otro lado, $g_2(A) \subset \sigma^{3N_0}(K) \subset N_Q(\sigma^{3N_0}(K), \frac{\epsilon}{2})$ y como $r = \sigma^{3N_0}(s) \in g_2(A)$, entonces $\sigma^{3N_0}(g_1(B)) \subset B_Q(\sigma^{3N_0}(s), \frac{\epsilon}{2}) \subset N_Q(g_2(A), \frac{\epsilon}{2})$, es decir $\sigma^{3N_0}(K) \subset N_Q(g_2(A), \frac{\epsilon}{2})$. Por tanto,

$$H(g_2(A), \sigma^{3N_0}(K)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $H(g_2(A), A) < \frac{\epsilon}{2}$, entonces

$$H(\sigma^{3N_0}(K), A) \leq H(\sigma^{3N_0}(K), g_2(A)) + H(g_2(A), A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto, $C(\sigma)$ es transitiva. $\square$

Otra propiedad que tiene $\sigma\colon Q \to Q$, la cual se estudiará más en general en el próximo capítulo, dice los siguiente.

Teorema 3.20. *El conjunto de puntos periódicos, bajo la función*

$$\sigma\colon Q \to Q,$$

es denso en Q.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Q$. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^M} = \sum_{j>M} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|n| > M$. Como $[-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2}]$ es un segmento de tamaño $2M + 1$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n - m(2M+1) \in \left[-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2} \right].$$

Pero $n-m(2M+1)$ es un número entero, entonces $n-m(2M+1) \in [-M, M]$.

Notemos que $S_M = \{-M, \ldots, M\}$ es un sistema completo de residuos módulo $2M + 1$. Así, en el caso en que $|n| > M$, definimos

$$j(n) = n - m(2M+1) \in [-M, M]$$

y, si $|n| \leq M$, entonces $j(n) = n$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{Z}$, sea $s_n = t_{j(n)}$ y $s \in Q$ definida como $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Como $s_n = t_n$ para toda $n \in [-M, M]$ entonces, por la Observación 1, se tiene que

$$D(t, s) \leq \frac{2}{2^M} < \epsilon.$$

Por otra parte,

$$f^{2M+1}(s)_n = t_{j(n)-(2M+1)(\text{mód}(S_M))},$$

pero $j(n) - (2M+1) \equiv j(n)(\text{mód}(2M+1))$, por lo tanto,

$$t_{j(n)-(2M+1)(\text{mód}(S_M))} = t_{j(n)} = s_n.$$

Es decir, $s \in Q$ es de periodo un divisor de $2M+1$. □

Dos preguntas que en [1] aparecen al final del árticulo y que siguen estando abiertas son las siguientes:

1. ¿Existe $f\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ continua tal que $C(f)\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ es transitiva?

2. ¿Existen continuos X de dimensión finita y funciones continuas $f\colon X \to X$ tales que $C(f)\colon C(X) \to C(X)$ es transitiva?

Capítulo 4

Densidad de puntos periódicos.

4.1. Resultados generales

Este capítulo tiene como propósito analizar el concepto de punto periódico y la densidad de estos en sus respectivos espacios. Al conjunto de puntos periódicos de $f\colon X \to X$ lo denotaremos como $\mathrm{Per}(f)$. Un primer resultado muy inmediato que se demostrará en el Teorema 4.4 de este capítulo dice que, dado X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ continua, si $\overline{\mathrm{Per}(f)} = X$, entonces $\overline{\mathrm{Per}(2^f)} = 2^X$. Aunque el regreso de este resultado es válido para ciertos continuos, se exhibirá un continuo al final del capítulo en donde se demostrará que el regreso no es cierto. Dicho ejemplo aparece en [20].

Recordemos que en la Definición 1.54 se dice que, si X es un espacio topológico, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$, entonces decimos que x es un **punto periódico** de f, si para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^n(x) = x$.

Definición 4.1. *Sea X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Diremos que X tiene **densidad de puntos periódicos** bajo f, si $\overline{Per(f)} = X$.*

Un ejemplo de densidad de puntos periódicos lo tenemos en el Teorema 3.20. Otros conceptos relacionados con la densidad de puntos periódicos son los siguientes.

Definición 4.2. *Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Un punto $x \in X$ se dice que es **recurrente** si para cualquier* *abierto U en X que contiene a x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Si además, $f^{kn}(x) \in U$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces diremos que x es* ***regularmente recurrente****.*

Notamos claramente que si un punto x es regularmente recurrente, entonces es recurrente.

Al conjunto de puntos recurrentes de X bajo f lo denotaremos por $\mathrm{R}(f)$, mientras que al de puntos regularmente recurrentes, se le denotará por $\mathrm{RR}(f)$. Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *Sean X un espacio T_2 y $f\colon X \to X$ continua. Entonces*

$$x \in \omega(x, f) \text{ si y sólo si } x \in R(f).$$

Demostración. Supongamos primero que $x \in \omega(x, f)$. Sea U abierto en X tal que $x \in U$. Como x es un punto a acumulación de $\mathrm{orb}(x, f)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{R}(f)$

Supongamos ahora que $x \in \mathrm{R}(f)$. Sean U un abierto en X tal que $x \in U$ y $k \in \mathbb{N}$. Sea

$$J = \{i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \colon f^i(x) \neq x\}.$$

Si existe $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} - J$, entonces $f^i(x) = x$ y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $im \geq k$. Luego $f^{im}(x) = x \in U$. Podemos suponer entonces que $J = \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Como X es T_2, para cada $i \in J$ existen abiertos V_i y W_i en X tales que $x \in V_i$, $f^i(x) \in W_i$ y $V_i \cap W_i \neq \emptyset$. Sea $V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_{k-1}$. Entonces V es un abierto en X tal que $x \in V$ y, como $x \in \mathrm{R}(f)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in V$. Por construcción, $n \geq k$, así que x es un punto de acumulación de $\mathrm{orb}(x, f)$. Luego $x \in \omega(x, f)$. $\square$

Otro aspecto que se puede notar es que

$$\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{RR}(f) \subset \mathrm{R}(f),$$

pues si $f^n(x) = x$, también $f^{kn}(x) = x$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Puesto que nos interesa analizar la relación de estos conceptos entre espacios y sus hiperspacios, el primer cuestionamiento que inmediatamente nos hacemos es, ¿la densidad de $\mathrm{Per}(f)$ o la de $\mathrm{Per}(2^f)$ implica la del otro? Una implicación es casi trivial.

Teorema 4.4. *Sean X un espacio T_1 y $f\colon X \to X$ una función continua y cerrada. Si $\overline{Per(f)} = X$, entonces $\overline{Per(2^f)} = 2^X$.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $\mathcal{U}$ abierto en 2^X tal que $A \in \mathcal{U}$. Podemos tomar un básico de tal manera que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots U_n \rangle \subset \mathcal{U}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $U_i \cap \mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$. Tomemos entonces $x_i \in U_i \cap \mathrm{Per}(f)$ por cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Hagamos $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Digamos que el periodo de cada x_i es p_i. Si hacemos $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$, o bien p igual al mínimo común múltiplo de $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, entonces $f^p(x_i) = x_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así, tenemos que $f^p(F) = F$ y además, $F \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Por lo tanto, $F \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \mathrm{Per}(2^f) \neq \emptyset$. $\square$

Como podemos notar, la demostración tendría que ser diferente para el caso $C(f)$, pues el conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \notin C(X)$.

En la siguiente sección, veremos el ejemplo de un continuo $K_{\{M\}}$ y una función continua $G : K_{\{M\}} \to K_{\{M\}}$, tal que $K_{\{M\}}$ no tiene densidad de puntos periódicos bajo G, pero $2^{K_{\{M\}}}$ sí tiene densidad de puntos periódicos bajo 2^G. Dicho ejemplo nos mostrará que el recíproco del Teorema 4.4 no es cierto en general. Antes de ver este resultado, mostraremos unos casos particulares en los cuales, la implicación es verdadera. Recordemos que si X es compacto, Y es T_2 y $f\colon X \to Y$ es continua, entonces f es cerrada. Así, en los siguientes teoremas de esta sección no requerimos pedir que la función sea cerrada.

Teorema 4.5. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Si $\overline{Per(CL(f))} = CL([0,1])$, entonces $\overline{Per(f)} = [0,1]$.*

Demostración. Un abierto básico en $[0,1]$ es un intervalo (a,b), con $0 \leq a < b \leq 1$. Consideramos un abierto de este tipo. Definimos $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $\epsilon = \frac{b-a}{2}$. Como $\mathrm{Per}(CL(f))$ es denso en $CL([0,1])$, existe $A \in CL([0,1])$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $H(\{x_0\}, A) < \epsilon$ y $f^N(A) = (CL(f))^N(A) = A$.

De $H(\{x_0\}, A) < \epsilon$ se implica que, si $x \in A$, entonces

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}.$$

Pero esta desigualdad nos dice que $x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$, que es lo mismo a decir que $x < \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} = b$ o bien, $\frac{a+b}{2} - x < \frac{b-a}{2}$, que a su vez implica que $a = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} < x$. Así, $x \in (a,b)$ y, por lo tanto, $A \subset (a,b)$.

Si $\alpha = \text{mín}\, A$ y $\beta = \text{máx}\, A$, entonces $f^N(\alpha) \geq \alpha$ y $f^N(\beta) \leq \beta$. Por ser f^N una función continua en $[0,1]$ y por el Teorema 1.9, existe $x \in [\alpha, \beta] \subset (a,b)$ tal que $f^N(x) = x$. $\square$

Se puede demostrar algo más general a este resultado. Para ello veamos primero la siguiente definición.

Definición 4.6. *Sea X un continuo. Diremos que X es una **gráfica** si X puede expresarse como la unión finita de arcos, donde cada par de ellos se intersecta, a lo más, en un punto extremo de los arcos. En el caso en que X sea una gráfica conexa y sin ciclos, es decir, sin subcontinuos homeomorfos a S^1, diremos que X es un **árbol**.*

Teorema 4.7. *Sean X un árbol y $f\colon X \to X$ una función continua. Si 2^X tiene densidad de puntos periódicos bajo 2^f, entonces X tiene densidad de puntos periódicos bajo f.*

Demostración. Sea U un abierto de X. Podemos elegir $V \subset U$ abierto que sea arcoconexo y homeomorfo al interior de un arco. Esto se puede hacer en cualquier gráfica, no necesariamente en un árbol.

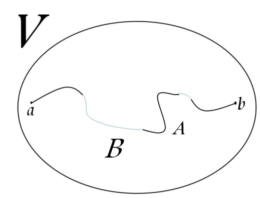

Figura 4.1: Abierto V.

Como $\Gamma(V)$ (ver Definición 1.15) es abierto en 2^X, existe $A \in \Gamma(V)$ tal que $(2^f)^n(A) = A$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea B el conjunto conexo más pequeño que contiene a A. Digamos que a y b son los extremos de B. Es claro que a y b pertenecen a A, pues A es un conjunto cerrado. Además, $f^n(a)$ y $f^n(b)$ pertenecen a B. Como B es un arco, lo denotaremos como $B = [a,b]$.

Sea $h = f^n_{|_{[a,b]}}$. Entonces $h\colon [a,b] \to X$ es una función continua. Sean $a' \in [a,b]$ tal que si $x \in [a',b]$ y $h(x) = a$, entonces $x = a'$ y $b' \in [a,b]$ tal que si $x \in [a,x]$ y $h(x) = b$, entonces $x = b'$. Tenemos dos casos.

Caso 1. Si $a' < b'$. Como X es un árbol, no hay manera de recorrer, mediante la imagen de h, un camino de a a b sin recorrer B. Es decir,

$h([a',b']) = [a,b]$. Por lo tanto, por el Corolario 1.6, tenemos que existe $p \in [a,b]$ tal que $f^n(p) = h(p) = p$.

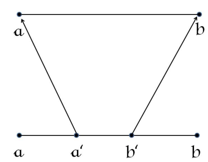

Figura 4.2: Caso 1.

Caso 2. Si $a' > b'$. En este caso elegimos $b'' \in [a,b]$ tal que $h(b'') = b$ y $h(x) \neq b$, para toda $x \in (b'',a')$. Después, tomamos $a'' \in [b'',a]$ tal que $h(a'') = a$ y $h(x) \neq a$, para toda $x \in (b'',a'')$. Al igual que en el caso 1, tenemos que $h([b'',a'']) = [a,b]$, con $h(b'') = b$ y $h(a'') = a$ y, por el Corolario 1.8, tenemos que existe $p \in (b'',a'') \subset [a,b]$ tal que $f^n(p) = h(p) = p$.

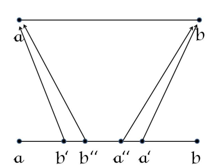

Figura 4.3: Caso 2

De cualquier manera, $p \in V \cap \mathrm{Per}(f) \subset U \cap \mathrm{Per}(f)$. $\square$

Uno podría pensar entonces que quizá, si pedimos que X sea un continuo, la densidad de $\mathrm{Per}(2^f)$ en 2^X implica la densidad de $\mathrm{Per}(f)$ en X. Sin embargo, el ejemplo que veremos en la siguiente sección nos mostrará que esto no es cierto.

4.2. El continuo $K_{\{M\}}$.

Denotaremos por I al intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n \colon I \to I$ de la siguiente manera.

$$g_n(x) = \begin{cases} nx - r & \text{si } r \text{ es par y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subset [0,1] \\ -nx + r + 1 & \text{si } r \text{ es impar y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subset [0,1], \end{cases}$$

donde $r \in \{0, \dots, n-1\}$.

Observemos que g_1 es la función identidad, mientras que g_2 es la función del ejemplo de la Sección 2.8.2. Esta familia de funciones es más grande que la de dicho ejemplo. Veamos una característica importante de estas funciones.

Teorema 4.8. *Si g_n y g_m son dos funciones como las definidas arriba, entonces $g_n \circ g_m = g_m \circ g_n = g_{nm}$.*

Demostración. La demostración de este resultado consiste en verificar la igualdad de las composiciones por pedazos. Estos pedazos son de tamaño $\frac{1}{nm}$. Lo que haremos será partir al intervalo I en m pedazos de tamaño $\frac{1}{m}$ y, posteriormente, partiremos cada uno de estos segmentos en otros de tamaño $\frac{1}{mn}$ (dividiendo en n secciones iguales).

La igualdad que nos interesa demostrar entonces es

$$g_n \circ g_m \left[\frac{r}{m} + \frac{r'}{nm}, \frac{r}{m} + \frac{r'+1}{nm} \right] = g_{nm} \left[\frac{r}{m} + \frac{r'}{nm}, \frac{r}{m} + \frac{r'+1}{nm} \right],$$

donde $0 \leq r \leq m-1$ y $0 \leq r' \leq n-1$.

Esta igualdad nos diría que no importa el orden de la composición, ambas son equivalentes a g_{nm}. Dividiremos en cuatro casos la demostración. En cada caso, seguiremos los desarrollos mediante la forma en que se definieron estas funciones. Observemos también que $[\frac{r}{m}+\frac{r'}{nm}, \frac{r}{m}+\frac{r'+1}{nm}] = [\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}]$. En adelante, si $a < b$, escribiremos $\overline{[b,a]}$ para denotar al intervalo $[a,b]$ en sentido contrario.

Caso 1. Tanto r como r' son pares. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} g_n \circ g_m \left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm} \right] &= g_n \left[m \left(\frac{nr+r'}{nm} \right) - r, m \left(\frac{nr+r'+1}{nm} \right) - r \right] \\ &= g_n \left[\frac{nr+r'}{n} - r, \frac{nr+r'+1}{n} - r \right] = g_n \left[\frac{r'}{n}, \frac{r'+1}{n} \right] \end{aligned}$$

$$= \left[n\left(\frac{r'}{n}\right) - r', n\left(\frac{r'+1}{n}\right) - r'\right] = [0,1]$$

Así, en este tipo de pedazos la gráfica de la función es un segmento de recta que va del punto $(\frac{nr+r'}{nm}, 0)$ al punto $(\frac{nr+r'+1}{nm}, 1)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} g_{nm}&\left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\ &= \left[nm\left(\frac{nr+r'}{nm}\right) - (nr+r'), nm\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right) - (nr+r')\right] \\ &= [0,1]. \end{aligned}$$

Ambas funciones coinciden en la gráfica correspondiente a estos segmentos de rectas. Veamos qué ocurre en los otros casos.

Caso 2. r par y r' impar.

$$\begin{aligned} g_n \circ g_m\left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] &= g_n\left[m\left(\frac{nr+r'}{nm}\right) - r, m\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right) - r\right] \\ &= g_n\left[\frac{nr+r'}{n} - r, \frac{nr+r'+1}{n} - r\right] = g_n\left[\frac{r'}{n}, \frac{r'+1}{n}\right] \\ &= \overline{\left[-n\left(\frac{r'}{n}\right) + r' + 1, -n\left(\frac{r'+1}{n}\right) + r' + 1\right]} \\ &= \overline{\left[-r' + r' + 1, -r' - 1 + r' + 1\right]} = \overline{[1,0]}. \end{aligned}$$

Aquí, el intervalo que obtuvimos al final fue el $\overline{[1,0]}$, esto nos dice entonces que la gráfica correspondiente ahora es un segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(\frac{nr+r'}{nm}, 1)$ y $(\frac{nr+r'+1}{nm}, 0)$. Por otra parte, $nr + r'$ es impar, entonces

$$\begin{aligned} g_{nm}&\left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\ &= \overline{\left[-nm\left(\frac{nr+r'}{nm}\right) + nr + r' + 1, -nm\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right) + nr + r' + 1\right]} \\ &= \overline{[-nr - r' + nr + r' + 1, -nr - r' - 1 + nr + r' + 1]} = \overline{[1,0]}. \end{aligned}$$

Caso 3.a. r impar, r' par y n par. En este caso tenemos que $nr + r'$ es par. Así,

$$
\begin{aligned}
g_n \circ g_m & \left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\
&= g_n \overline{\left[-m\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)+r+1, -m\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)+r+1\right]} \\
&= g_n \overline{\left[-\left(\frac{nr+r'}{n}\right)+r+1, -\left(\frac{nr+r'+1}{n}\right)+r+1\right]} \\
&= g_n \overline{\left[\frac{n-r'}{n}, \frac{n-(r'+1)}{n}\right]} \\
&= \Bigg[-n\left(\frac{n-r'-1+1}{n}\right)+n-r'-1+1, \\
&\qquad -n\left(\frac{n-r'-1}{n}\right)+n-r'-1+1\Bigg] \\
&= [0,1].
\end{aligned}
$$

Por otra parte, tenemos que

$$
\begin{aligned}
g_{nm} & \left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\
&= \left[nm\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)-(nr+r'), nm\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)-(nr+r')\right] \\
&= [0,1].
\end{aligned}
$$

Caso 3.b r impar, r' par y n impar. Aquí, $nr + r'$ es impar. Entonces,

$$
\begin{aligned}
g_n \circ g_m & \left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\
&= g_n \overline{\left[-m\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)+r+1, -m\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)+r+1\right]} \\
&= g_n \overline{\left[\frac{n-r'}{n}, \frac{n-(r'+1)}{n}\right]} \\
&= \overline{\left[n\left(\frac{n-r'-1+1}{n}\right)-(n-r'-1), n\left(\frac{n-r'-1}{n}\right)-(n-r'-1)\right]} \\
&= \overline{[1,0]}.
\end{aligned}
$$

Además,

$$g_{nm}\left[\frac{nr+r'}{nm},\frac{nr+r'+1}{nm}\right]=$$

$$=\overline{\left[-nm\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)+(nr+r')+1,\right.}$$

$$\overline{\left.-nm\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)+(nr+r')+1\right]}$$

$$=\overline{[1,0]}.$$

Caso 4.a r impar, r' impar y n par. Entonces, $nr+r'$ es impar

$$g_n\circ g_m\left[\frac{nr+r'}{nm},\frac{nr+r'+1}{nm}\right]$$

$$=g_n\overline{\left[-m\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)+r+1,-m\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)+r+1\right]}$$

$$=g_n\overline{\left[\frac{n-r'}{n},\frac{n-r'-1}{n}\right]}$$

$$=\overline{\left[n\left(\frac{n-r'-1+1}{n}\right)-(n-r'-1),n\left(\frac{n-r'-1}{n}\right)-(n-r'-1)\right]}$$

$$=\overline{[1,0]}.$$

También,

$$g_{nm}\left[\frac{nr+r'}{nm},\frac{nr+r'+1}{nm}\right]$$

$$=\overline{\left[-nm\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)+nr+r'+1,-nm\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)+nr+r'+1\right]}$$

$$=\overline{[1,0]}.$$

Caso 4.b r impar, r' impar y n impar. Entonces $nr+r'$ es par.

$$
\begin{aligned}
g_n \circ g_m &\left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\
&= g_n \overline{\left[-m\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)+r+1, -m\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)+r+1\right]} \\
&= g_n \overline{\left[\frac{n-r'}{n}, \frac{n-r'-1}{n}\right]} \\
&= \left[-n\left(\frac{n-r'-1+1}{n}\right)+n-r'-1+1,\right. \\
&\qquad \left. -n\left(\frac{n-r'-1}{n}\right)+n-r'-1+1\right] = [0,1].
\end{aligned}
$$

Para terminar,

$$
\begin{aligned}
g_{nm} &\left[\frac{nr+r'}{nm}, \frac{nr+r'+1}{nm}\right] \\
&= \left[nm\left(\frac{nr+r'}{nm}\right)-(nr+r'), nm\left(\frac{nr+r'+1}{nm}\right)-(nr+r')\right] \\
&= [0,1].
\end{aligned}
$$

En cualquier caso, tenemos la igualdad. □

Otros resultados importantes que debemos conocer sobre estas funciones son los siguientes.

Teorema 4.9. *Las funciones g_n son funciones abiertas.*

Demostración. Sea (a,b) un abierto en I. Tenemos los siguientes casos.

Caso 1. Si existe $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que $[\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subset (a,b)$, entonces $g_n(a,b) = [0,1]$. La imagen es por supuesto abierta.

Caso 2. Si existe $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que $(a,b) \subset [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}]$, entonces $g_n(a,b) = (g_n(a), g_n(b))$, o bien, $g_n(a,b) = (g_n(b), g_n(a))$. Cualquiera que sea el caso la imagen es abierta.

Caso 3. Si existe $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que $\frac{r-1}{n} < a < \frac{r}{n} < b < \frac{r+1}{n}$ entonces tenemos dos opciones. La primera es que r sea par. Si este es el caso, entonces $g_n(\frac{r}{n}) = 0$ y así, $g_n(a,b) = [0, \text{máx}\{g_n(a), g_n(b)\})$, que es abierto en I. Si r es impar, entonces $g_n(\frac{r}{n}) = 1$ y por lo tanto, $g_n(a,b) = (\text{mín}\{g_n(a), g_n(b)\}, 1]$, que también es abierto. $\square$

Teorema 4.10. *Para toda $n \geq 2$ y todo intervalo $(a,b) \subset [0,1]$ (con $a < b$), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g_n^m((a,b)) = [0,1]$. Es decir, g_n es una función exacta.*

Demostración. Sean $n \geq 2$ y $(a,b) \subset [0,1]$. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que, para algún $r \in [1, n^k - 1]$, se tiene que

$$\left[\frac{r}{n^k}, \frac{r+1}{n^k}\right] \subset (a,b).$$

Tenemos además que,

$$[0,1] = g_{n^k}\left(\left[\frac{r}{n^k}, \frac{r+1}{n^k}\right]\right) \subset g_{n^k}((a,b)),$$

y así, $g_{n^k}((a,b)) = [0,1]$. Si $m = n^k$, entonces

$$\begin{aligned} g_n^m((a,b)) = g_{n^m}((a,b)) = g_{n^{n^k}}((a,b)) &= g_{n^{n^k - k}} \circ g_{n^k}((a,b)) \\ &= g_{n^{n^k - k}}[0,1] = [0,1]. \end{aligned}$$

$\square$

Algo que podemos notar en la prueba es que, como $g_{n^k}([\frac{r}{n^k}, \frac{r+1}{n^k}]) = [0,1]$, existe $x_r \in [\frac{r}{n^k}, \frac{r+1}{n^k}]$ tal que $(g_n)^k(x_r) = g_{n^k}(x_r) = x_r$, para cada $r \in \{1, \ldots, n^k - 1\}$. Así, tenemos que $\text{Per}(g_n)$ es denso en $[0,1]$.

Construiremos poco a poco el ejemplo. Primero consideremos el conjunto M formado por números enteros mayores a 1,

$$M = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}.$$

Consideremos el límite inverso de la sucesión de funciones $g_{n_1}, g_{n_2}, g_{n_3}, \ldots$. Recordando la definición de límite inverso lo denotaremos como

$$K_{\{M\}} = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \colon x_i = g_{n_{i+1}}(x_{i+1}) \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\}.$$

Recordemos también que, si $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$, entonces la métrica en $K_{\{M\}}$ está definida como

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{2^n}.$$

Por otra parte, sabemos que para toda $i \in \mathbb{N}$,

$$g_i(g_2(x_{i+1})) = g_2(g_i(x_{i+1})) = g_2(x_i).$$

Podemos definir entonces $G \colon K_{\{M\}} \to K_{\{M\}}$ como,

$$G(x_1, x_2, \ldots) = (g_2(x_1), g_2(x_2), \ldots).$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} K_{\{M\}} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\pi_n"'] & K_{\{M\}} \arrow[d, "\pi_n"] \\ I \arrow[r, "g_2"'] & I \end{tikzcd}$$

Tenemos la siguiente afirmación.

Teorema 4.11. *Las proyecciones π_n son abiertas.*

Demostración. Veamos primero que los conjuntos de la forma

$$\pi_m\left(\prod_{i=1}^{m} U_i \cap K_{\{M\}}\right),$$

son abiertos. Para ello fijémonos en las siguientes equivalencias, no sin antes mencionar que denotaremos por $g_{n_r}^{n_s}$ la composición $g_{n_s} \circ \cdots \circ g_{n_r}$, donde $s < r$. En el caso de que $r = s$ estaremos refiriéndonos a la función $g_{n_s} = g_{n_r}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} v \in \pi_m&\left(\prod_{i=1}^{m} U_i \cap K_{\{M\}}\right) \\ &\Leftrightarrow v \in \{u \in U_m \colon g_{n_{m-1}}^{n_i}(u) \in U_i, \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, m-1\}\} \\ &\Leftrightarrow v \in \bigcap_{i=1}^{m-1} \{u \in U_m \colon g_{n_{m-1}}^{n_i}(u) \in U_i\} \Leftrightarrow v \in \bigcap_{i=1}^{m-1} (g_{n_{m-1}}^{n_i})^{-1}(U_i) \cap U_m. \end{aligned}$$

Este último conjunto es abierto, por lo tanto, el primer conjunto también lo es. Ahora bien, sea

$$U^* = \prod_{i=1}^{m} U_i \cap K_{\{M\}},$$

un básico en $K_{\{M\}}$ y π_k una proyección sobre $K_{\{M\}}$. Si $k = m$ ya lo tenemos. Supongamos $k < m$, consideramos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & U^* \arrow[dl, "\pi_k"'] \arrow[dr, "\pi_m"] & \\ I & & I \arrow[ll, "g^{n_k}_{n_{m-1}}"] \end{tikzcd}$$

Observemos que $\pi_k(U*) = g^{n_k}_{n_{m-1}} \circ \pi_m(U^*)$, pero las funciones g_n son abiertas, así que $\pi_k(U^*)$ es un abierto.

Si por el contrario $m < k$, entonces notamos que

$$U^* = \prod_{i=1}^{m}(U_i) \cap K_M = \prod_{i=1}^{m}(U_i) \times \prod_{j>m}^{k} I_j \cap K_{\{M\}},$$

donde $I_j = I$ para toda $j \in \{m+1, \ldots, k\}$, que es el caso $k = m$. □

La sucesión que nos servirá para construir el ejemplo es la sucesión creciente de números pares, $M = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. En lo que resta de la sección trabajaremos entonces con esta sucesión. El siguiente resultado nos deja ver la primera de las características que buscamos en este ejemplo.

Teorema 4.12. *Si $x \in K_{\{M\}}$ es un punto periódico bajo $G\colon K_{\{M\}} \to K_{\{M\}}$, entonces $x = (0, 0, 0, \ldots)$.*

Demostración. Sea $x \in K_{\{M\}}$ un punto periódico. Digamos que p es el periodo de x bajo G. Entonces

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x = \\ G^p(x) = G^p(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \\ (g_2^p(x_1), g_2^p(x_2), g_2^p(x_3), \ldots).\end{aligned}$$

Es decir, $g_2^p(x_i) = x_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, el periodo p_i de x_i es un divisor de p y además, la cantidad de puntos en I cuyo periodo es p_i, es un número finito. Como el número de divisores de p es finito, existe $q > 0$ tal que, para toda $i \in \mathbb{N}$,

$$x_i \in \left\{ \frac{0}{q}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q}{q} \right\} = B.$$

El conjunto B es invariante bajo g_2, es decir, $g_2(B) \subset B$. Ahora, si $\pi_q(x) = x_q$, como $x_{q+1} = \frac{r}{q}$ para algún $r \in \{0, \ldots, q\}$, entonces

$$x_q = g_{2q}(x_{q+1}) = g_{2q}\left(\frac{r}{q}\right) = g_{2q}\left(\frac{2r}{2q}\right) = 0.$$

Si $t \in \mathbb{N}$ y $s \in \{0, 1, \ldots, q\}$, tenemos que

$$x_{tq} = g_{2tq}(x_{tq+1}) = g_{2tq}\left(\frac{s}{q}\right) = 0.$$

Lo que hemos probado es que para una infinidad de $i's$, $x_i = 0$ y en estas funciones, $g_n(0) = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\pi_i(x) = x_i = 0$, para toda $i \in \mathbb{N}$. O bien, $x = (0, 0, 0, \ldots)$. □

Veremos a continuación algunas características importantes que debemos conocer sobre esta función G.

Teorema 4.13. *La función $G\colon K_{\{M\}} \to K_{\{M\}}$ es débilmente mezcladora.*

Demostración. Sean A, B, C y E abiertos no vacíos de $K_{\{M\}}$. Sean $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ y $e \in E$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_{K_{\{M\}}}(a, \epsilon) \subset A$, $B_{K_{\{M\}}}(b, \epsilon) \subset B$, $B_{K_{\{M\}}}(c, \epsilon) \subset C$ y $B_{K_{\{M\}}}(e, \epsilon) \subset E$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>k}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon,$$

entonces diám$(\pi_k^{-1}(t)) < \epsilon$, para toda $t \in [0, 1]$. Ahora, $\pi_k(B_{K_{\{M\}}}(a, \epsilon))$ y $B_{K_{\{M\}}}(b, \epsilon)$ son abiertos de I. Existe $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$g_2^l(\pi_k(B_{K_{\{M\}}}(a, \epsilon))) = I \quad \text{y} \quad g_2^l(\pi_k(B_{K_{\{M\}}}(b, \epsilon))) = I.$$

Así, para alguna $t \in B_{K_{\{M\}}}(a, \epsilon)$ y $s \in B_{K_{\{M\}}}(b, \epsilon)$, se tiene que

$$g_2^l(\pi_k(t)) = c_k = \pi_k(c) \quad \text{y} \quad g_2^l(\pi_k(s)) = e_k = \pi_k(e).$$

Entonces, $\pi_k \circ G^l(t) = \pi_k(c)$ y $\pi_k \circ G^l(s) = \pi_k(e)$. Por lo tanto,

$$d(G^l(t), c) < \epsilon \quad \text{y} \quad d(G^l(s), e) < \epsilon.$$

Es decir, $G^l(A) \cap C \neq \emptyset$ y $G^l(B) \cap E \neq \emptyset$. □

Usando el Teorema 2.48 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.14. *La función inducida $2^G\colon 2^{K_{\{M\}}} \to 2^{K_{\{M\}}}$ es débilmente mezcladora.*

Otro corolario que se obtiene fácilmente de las definiciones es el siguiente.

Corolario 4.15. *La función $G\colon K_{\{M\}} \to K_{\{M\}}$ es transitiva.*

Cabe mencionar que algunos de estos resultados aparecen en forma más general en [20]. Sin embargo, nos interesa analizar el caso específico de este ejemplo.

Podemos observar que $\pi_n \circ G = g_2$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir, todas las proyecciones son funciones continuas, por lo cual, la función G también lo es. Pero se puede decir más al respecto de esta función.

Teorema 4.16. *La función $G\colon K_{\{M\}} \to K_{\{M\}}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el Corolario 4.15, sabemos que G es transitiva. El Teorema 2.7 nos dice que G es suprayectiva. Por el Teorema 1.1, sólo es necesario probar que G es inyectiva. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$ dos elementos en $K_{\{M\}}$ tales que $G(x) = G(y)$, entonces

$$g_2(x_i) = g_2(y_i),$$

para toda $i \in \mathbb{N}$. Pero esta igualdad se da, para cada $i \in \mathbb{N}$, si sucede alguno de los dos siguientes casos. Tenemos que $x_i = y_i$, o bien, $x_i + y_i = 1$. Como este fenómeno ocurre con todas las $i \in \mathbb{N}$, en particular se tiene que $x_{i+1} = y_{i+1}$ o $x_{i+1} + y_{i+1} = 1$. Pero en ambos casos $x_i = g_{2i}(x_{i+1}) = g_{2i}(y_{i+1}) = y_i$. Es decir, $x_i = y_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$. □

El objetivo ahora es demostrar que $2^G\colon 2^{K_{\{M\}}} \to 2^{K_{\{M\}}}$ tiene densidad de puntos periódicos. Para ello se introducirán unas cuantas definiciones que nos recordaran conceptos definidos al principio del capítulo.

Definición 4.17. *Sea X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ continua. Dada $\epsilon > 0$, definimos el conjunto $RR(f)_\epsilon$ como el conjunto*

$$\{x \in X\colon \text{ para algún } N \in \mathbb{N}, d(x, f^{Nk}(x)) < \epsilon, \text{ para toda } k \in \mathbb{N}\}.$$

Un hecho general, que no sólo aplica a este ejemplo en específico, es el siguiente resultado.

Teorema 4.18. *Sea X un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ continua. Entonces, para toda $\epsilon > 0$, el conjunto $RR_\epsilon(f)$ es denso en X $\Leftrightarrow$ $Per(2^f)$ es denso en 2^X.*

Demostración. Empecemos por la ida. Sea $x_0 \in X$ y $\delta > 0$. Veremos que existe $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset B_X(x_0, \delta)$ y $f^N(A) = A$. Por hipótesis, existe $y \in \mathrm{RR}_{\frac{\delta}{2}}(f) \cap B_X(x_0, \frac{\delta}{2})$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(y, f^{Nk}(y)) < \frac{\delta}{2}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Así,

$$\omega(y, f^N) \subset \overline{B_X\left(y, \frac{\delta}{2}\right)} \subset B_X(x_0, \delta),$$

pues si $d(z, y) \leq \frac{\delta}{2}$, entonces $d(z, x_0) \leq d(z, y) + d(y, x_0) \leq \frac{\delta}{2} + d(y, x_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Sea $A = \omega(y, f^N)$, tenemos que $A \subset B_X(x_0, \delta)$ y $f^N(A) = A$.

Sean $B \in 2^X$ y $\delta > 0$. Como B es compacto, existe $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subset B$, con $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B_X\left(b_i, \frac{\delta}{2}\right).$$

Por cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tomamos $A_i \in 2^X$ y $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(\{b_i\}, A_i) < \tfrac{\delta}{2} \text{ y } f^{N_i}(A_i) = A_i.$$

Tomemos $N = \text{m.c.m.}\{N_1, \ldots, N_m\}$ y

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Primero que nada, notemos que

$$f^N(A) = f^N\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{m} f^N(A_i) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = A.$$

Segundo, $H(A, B) < \delta$ por la siguiente razón. Como $H(\{b_i\}, A_i) < \frac{\delta}{2}$, entonces $A_i \subset N_X(\{b_i\}, \frac{\delta}{2}) = B_X(b_i, \frac{\delta}{2})$ y $b_i \in N_X(A_i, \frac{\delta}{2})$, para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así, se tiene que

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_X\left(b_i, \frac{\delta}{2}\right) \subset N_X(B, \delta).$$

Por otra parte, si $x \in B_X(b_i, \frac{\delta}{2})$, entonces $d(b_i, x) < \frac{\delta}{2}$. Como $b_i \in N_X(A_i, \frac{\delta}{2})$, existe $a_i \in A_i$ tal que $d(b_i, a_i) < \frac{\delta}{2}$ y, por la desigualdad del triángulo, $d(a_i, x) < \delta$, es decir, $x \in N_X(A_i, \delta)$. Por lo tanto,

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_X\left(b_i, \frac{\delta}{2}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} N_X(A_i, \delta) = N_X(A, \delta).$$

Tenemos entonces las dos contenciones que nos garantizan que $H(A, B) < \delta$.

Para el regreso, supongamos $\mathrm{Per}(2^f)$ denso en 2^X y tomemos $\epsilon > 0$. Sean $\delta > 0$ y $x_0 \in X$. Existe $A \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $(2^f)^N(A) = A$ y además, $H(\{x_0\}, A) < \text{mín}\{\delta, \frac{\epsilon}{2}\}$. Tomemos cualquier $a \in A$, resulta que

$$f^{Nk}(a) \in (CL(f))^{Nk}(A) = A \subset B_X\left(x_0, \frac{\epsilon}{2}\right),$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$d(a, f^{Nk}(a)) < d(a, x_0) + d(x_0, f^{Nk}(a)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir, $a \in \mathrm{RR}_\epsilon(f)$. Como $d(x_0, a) < \delta$, entonces $\mathrm{RR}_\epsilon(f)$ es denso en X. □

Podría decirse que este resultado es el motor para llegar al resultado final del ejemplo. El siguiente teorema es el que pondrá en función este último resultado.

Teorema 4.19. *Para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $RR_\epsilon(G)$ es denso en $K_{\{M\}}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $t = (t_1, t_2, \ldots) \in K_{\{M\}}$ y $\delta > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \text{mín}\left\{\frac{\delta}{2}, \epsilon\right\}.$$

Las funciones $g_2, g_4, g_6, \ldots, g_{2(N-1)}$ son continuas, entonces existe como punto de partida $0 < \gamma_1 < \frac{\delta}{2}$ tal que si $|s - t_N| < \gamma_1$, entonces

$$|g_{2(N-1)}(s) - g_{2(N-1)}(t_N)| = |g_{2(N-1)}(s) - t_{N-1}| < \frac{\delta}{2}.$$

Tomamos después $0 < \gamma_2 < \frac{\delta}{2}$ tal que si $|s - t_N| < \gamma_2$, entonces

$$\left|g_{2(N-1)}^{2(N-2)}(s) - g_{2(N-1)}^{2(N-2)}(t_N)\right| = \left|g_{2(N-1)}^{2(N-2)}(s) - t_{N-2}\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Siguiendo este proceso, finalizamos con la elección de $0 < \gamma_{N-1} < \frac{\delta}{2}$ tal que si $|s - t_N| < \gamma_{N-1}$, entonces

$$\left| g^2_{2(N-1)}(s) - g^2_{2(N-1)}(t_N) \right| = \left| g^2_{2(N-1)}(s) - t_1 \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Así, al tomar $\gamma = \text{mín}\{\gamma_i\}_{i=1}^{N-1}$, garantizamos que

$$\left| g^{2k}_{2(N-1)}(s) - g^{2k}_{2(N-1)}(t_N) \right| = \left| g^{2k}_{2(N-1)}(s) - t_k \right| < \frac{\delta}{2},$$

para toda $k \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Por otra parte, sabemos que $\text{Per}(g_2)$ es denso en $[0,1]$ así que existe $s_N \in \text{Per}(g_2)$ tal que $|s_N - t_N| < \gamma$. Como las funciones g_n son suprayectivas podemos elegir $s \in K_{\{M\}}$ de manera que $\pi_N(s) = s_N$. De esta manera, tenemos que

$$\begin{gathered} d(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ < \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{\delta}{2} < \sum_{i=1}^{N} \frac{\frac{\delta}{2}}{2^i} + \frac{\delta}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{2^{i+1}} + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2^N - 1}{2^N}\right) + \frac{\delta}{2} \\ < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{gathered}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ el periodo de s_N bajo g_2. Para cada $1 \leq i \leq N_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} (g_2)^{n_0}(\pi_i(s)) &= (g_2)^{n_0}(g^{2i}_{2(N-1)}(s_N)) = g^{2i}_{2(N-1)} \circ g_2(s_N) \\ &= g^{2i}_{2(N-1)}(s_N) = \pi_i(s). \end{aligned}$$

Es decir, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\pi_i(s)$ es un punto periódico de g_2 con periodo un divisor de n_0. Además

$$\pi_i(G^{kn_0}(s)) = (g_2)^{kn_0}\pi_i(s) = \pi_i(s),$$

para toda $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$. Por lo tanto,

$$d(G^{kn_0}(s), s) \leq \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

En otras palabras, $s \in \text{RR}_\epsilon(G)$. □

Tenemos de esta manera, usando los teoremas 4.18 y 4.19, el resultado con el cual, el ejemplo queda terminado.

Corolario 4.20. *La función* $2^G \colon 2^{K_{\{M\}}} \to 2^{K_{\{M\}}}$ *tiene densidad de puntos periódicos.*

4.3. Otras topologías y conceptos de caos.

Este trabajo se centró en estudiar los conceptos que definen el caos desde el punto de vista de Devaney, los cuales son: *transitividad, densidad de puntos periódicos y sensibilidad de condición inicial*. Posteriormente se demostró que bastaba con pedir *transitividad y densidad de puntos periódicos* [5]. No obstante, existen otras formas de definir el caos y se pueden encontrar diversos trabajos al respecto. Algunas de estas definiciones de caos se pueden ver en [12].

Si bien es cierto que a lo largo de esta tesis se trabajó solamente con la topología de Vietoris, también se estudian a los hiperespacios dotados con otros tipos de topologías. Tal es el caso de la topología «hit-or-miss», la cual es estudiada en diferentes artículos, como por ejemplo en [26].

En fin, quedaron fuera de este trabajo varios conceptos relacionados con la teoría de hiperespacios de continuos que son muy estudiados y que en futuros trabajos espero encontrarme.

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes, H. Méndez-Lango. *The transitivity of induced maps*, Topology and its Applications 156 (2009) 1013–1033.

[2] LL. Alsedà, M. A. Del Río y J. A. Rodríguez, *A note on the totally transitive graph maps*, International Journal of Bifurcation and Chaos. 11 (3) (2001), 841–843.

[3] J. Banks. *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos, Solitons and Fractals 25 (2005) 681–685.

[4] J. Banks. *Topological mapping properties defined by digraphs*, Discrete and Continous Dynamical Systems. Volume 5, Numbre 1, January 1999.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, P. Stacey. *On the Devaney's definition of chaos.* The American Mathematical Monthly , 1992. Vol. 99. No. 4, 332-334.

[6] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, 1992. Springer.

[7] J. Buescu y I. Stewart, *Liapunov stability and adding machines*, Ergod. Th. & Dinam. Sys. 15 (1995), 271–290.

[8] J. Dugundji. *Topology*, 1966. Allyn and Bacon, Inc.

[9] R. Engelking, *General Topology*, 1989. Heldermann Verlag Berlin.

[10] A. Fedeli. *On chaotic set-valued discrete dynamical systems*, Chaos, Solitons and Fractals 23 (4) (2005) 1381–1384.

[11] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophanthine approximation*, Math. Systems Theory 1 (1967), 1–50.

[12] J. L. García Guirao, D. Kwientniak, M. Lampart, P. Oprocha y A. Peris, *Chaos on hyperspace*, Nonlinear Analysis, 71 (1-2)(2009), 1–2.

[13] R. Gu y W. Guo, *On mixing property in set-valued discrete systems*, Chaos, Solitons and Fractals 28 (2006) 747–754.

[14] W. H. Gottschalk y G. A. Hedlund, *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Vol. 36, Providence R. I., 1955.

[15] P. Hernández Zapata, *Navegando por el Hiperespacio*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., 2011.

[16] G. Higuera Rojo, *Funciones Inducidas en Productos Simétricos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., 2009.

[17] Sze-Tsen Hu. *Elements of General Topology*, 1964. Holden-Day, Inc.

[18] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc. New York and Bassel, 1999.

[19] E. Kreyszig: *Introductory Funtional Analysis with Applications*, 1989. John Wiley & Sons.

[20] H. Méndez-Lango. *Some dynamical properties of mappings defined on Knaster continua*, Topology and its Applications 126 (2002) 419–428.

[21] S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction*, 1992. Marcel Dekker, Inc.

[22] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos, Solitons and Fractals 17 (1) (2003) 99–104.

[23] S. Ruette, *Chaos for continuous interval maps- A survey of relationship between the various sorts of chaos*, Preprint, disponible en http://www.math.u-psud.fr/ ruette/articles/chaos-int.pdf.

[24] S. Silverman, *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain J. Math. 22(1)(1992), 353–375.

[25] R. E. Smithson, *First countable hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 56 No. 1 (1976), 325–328.

[26] Y. Wang, G. Wei, W.H. Campbell, S. Bourquin, *A framework of induced hyperspace dynamical systems equipped with the hit-or-miss topology*, Chaos, Solitons and Fractals 41 (2009) 1708-1717.

[27] S. Willard. *General Topology*, 1968. Addison-Wesley Publishing Company.