



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

NOMBRE DE LA TESINA

**ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF DE ECUACIONES
DIFERENCIALES BINARIAS CUADRÁTICAS EN UN PUNTO
SINGULAR AISLADO.**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO(A) EN CIENCIAS**

P R E S E N T A

MIGUEL ÁNGEL GUADARRAMA GARCÍA

DIRECTOR(A) DE LA TESINA: DRA. ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ

MÉXICO, D.F.

FEBRERO, 2012.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la Memoria de
Ulises Guadarrama Garcia*

Índice general

Introducción	III
1. Teorema del índice de Poincaré-Hopf para el disco.	1
1.1. Índice de Poincaré-Hopf en un punto singular aislado de un campo vectorial.	1
1.2. Índice de un campo de direcciones definido en el disco.	3
2. Ecuaciones diferenciales binarias.	5
2.1. Índice de Poncaré-Hopf de una ecuación diferencial binaria.	5
2.2. Doble cubierta asociada a una ecuación diferencial binaria	7
2.2.1. El campo vectorial tangente a la superficie M	9
2.3. Formas normales de ecuaciones diferenciales binarias lineales.	10
2.4. Teorema del índice de Poincaré-Hopf para una ecuación diferencial binaria.	12
2.5. Ecuaciones de las líneas asintóticas de superficies determinadas por funciones polinomiales homogéneas.	14
Bibliografía	19

Introducción

Centraremos la atención en *ecuaciones diferenciales binarias cuadráticas* de la forma

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dydx + c(x, y) dx^2 = 0, \quad (1)$$

en las que a, b y c son funciones con valores reales diferenciables en una vecindad del origen, que se anulan en $(0, 0)$ y tienen parte lineal distinta de cero. Supondremos también que la función $\Delta = b^2 - ac$ es no negativa en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ y que el origen es un punto aislado de la curva discriminante $(b^2 - ac)(x, y) = 0$.

El estudio de las ecuaciones diferenciales binarias ha sido motivado por la geometría diferencial de superficies. En el siglo XIX, dentro del contexto de líneas de curvatura sobre superficies, G. Darboux y A. Cayley sugieren un método para integrar este tipo de ecuaciones diferenciales. Tiempo después, P. Hartman y A. Wintner obtienen un teorema sobre la existencia de una curva que tiende al origen y que es solución de la ecuación diferencial (para las dos familias de soluciones existe tal curva [23]). Más adelante, en 1982 A. G. Kuzmin describe una clasificación geométrica de los puntos singulares de la ecuación diferencial [20]. En los trabajos de J. Sotomayor y C. Gutierrez [25], J. W. Bruce y D. L. Fidal [7], se dan modelos locales del comportamiento de las líneas de curvatura en una vecindad de un punto umbílico. La clasificación es atribuida a Darboux [11] y los nombres a J. H. Hannay [5].

En los trabajos de Hartman y Wintner [16],[17],[18] y en los de Kuzmin [20],[21] se estudian estas ecuaciones bajo la hipótesis de que los coeficientes de la ecuación diferencial están en posición general. Una condición de genericidad que aquí supondremos sobre la ecuación diferencial (1) es que la función $b^2 - ac$ tenga una singularidad de Morse en el origen.

En cada uno de los puntos $(x, y) \in V$ donde la función $b^2 - ac$ es positiva la ecuación (1) define dos direcciones distintas. Así, se tiene en V dos campos de direcciones los cuales tienen un punto singular en el origen. Considerando estos dos campos de direcciones se construye una superficie $\widehat{M} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ de la siguiente manera. Para cada punto $(x, y) \in V$ distinto del origen, se tienen dos direcciones $[\alpha_i, \beta_i] \in \mathbb{R}P^1$, $i = 1, 2$. Formemos entonces las ternas $(x, y, [\alpha_i, \beta_i])$, $i = 1, 2$. Los puntos de \widehat{M} son aquellos puntos de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ que satisfacen $a(x, y)\alpha^2 + 2b(x, y)\alpha\beta + c(x, y)\beta^2 = 0$. Intuitivamente, \widehat{M} se obtiene de asignarle a cada punto $(x, y) \in V \setminus \{(0, 0)\}$ dos puntos en $\{(x, y)\} \times \mathbb{R}P^1$ que respectivamente están situados a la “altura” determinada por la pendiente de cada una de las dos rectas definidas en (x, y) . Ciertamente, $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ está contenida en \widehat{M} .

Una manera de estudiar ecuaciones diferenciales binarias es levantar los dos campos de direcciones a un único campo vectorial ξ tangente a la superficie $\widehat{M} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Tomando una carta afín de $\mathbb{R}P^1$ la superficie \widehat{M} es, en general, una superficie diferenciable M en \mathbb{R}^3 y la proyección vertical

$\pi : M \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es localmente un difeomorfismo fuera de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. El campo ξ tiene en $\pi^{-1}(0, 0)$ uno o tres puntos singulares de ξ los cuales son del tipo silla o nodo.

En el capítulo uno se da la definición del índice de Poincaré-Hopf para campos vectoriales, ésta definición tiene la ventaja de generalizarse a campos de direcciones no necesariamente orientables [22]. Además, se prueba, para campos vectoriales diferenciables, la fórmula del índice de Poincaré-Hopf para el disco, la cual da una manera geométrica de calcular el índice de un punto singular aislado.

Veremos que el índice de Poincaré-Hopf es igual para los dos campos de direcciones que define (1), definiendo así el índice de Poincaré-Hopf de la ecuación diferencial (1). El principal interés de este trabajo es relacionar el índice de una ecuación diferencial binaria (con las condiciones antes mencionadas) con la suma de los índices de los puntos singulares del campo vectorial ξ .

En [7] y [9], J. W. Bruce y F. Tari muestran que genéricamente las curvas integrales de ecuaciones diferenciales binarias con parte lineal distinta de cero son topológicamente equivalentes a una ecuación diferencial binaria lineal y que la parte lineal de las funciones a, b y c determina el tipo al que pertenecen. Hay tres tipos topológicos lineales, a saber, *Lemon*, *Monstar* y *Star*.

El índice de Poincaré-Hopf de una ecuación diferencial binaria con las hipótesis del teorema 9, basta ser calculado para la parte lineal de la ecuación. Es conocido que los índices para los casos *Lemon* y *Monstar* es $\frac{1}{2}$, mientras que para el caso *Star* es $\frac{-1}{2}$, en el capítulo dos veremos una prueba de esto.

La última sección de este trabajo se enfoca en probar la existencia de campos de direcciones con índice $J = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Veremos que la segunda forma fundamental que define las líneas asintóticas de superficies dadas como la gráfica de una función polinomial son ejemplos que realizan los índices $j < 0$. Los polinomios que realizan estos índices son homogéneos de grado n y se factorizan como producto de n distintos polinomios lineales homogéneos. Los índices positivos son realizados por ecuaciones diferenciales binarias tales que las funciones a, b y c satisfacen que $Re(\bar{z}^n) = -a = c$ y $-Im(\bar{z}^n) = b$.

Capítulo 1

Teorema del índice de Poincaré-Hopf para el disco.

1.1. Índice de Poincaré-Hopf en un punto singular aislado de un campo vectorial.

Sea ξ un campo vectorial diferenciable en el plano y p un punto singular aislado de ξ . Sea Γ una circunferencia con centro en p , orientada positivamente, tal que en el interior de Γ y sobre Γ misma el único punto singular del campo vectorial es p .

El índice de Poincaré-Hopf del campo vectorial ξ en el punto p , denotado por $Ind(\xi, p)$ es el número de vueltas que da el vector $\xi(q)$ al variar positivamente el punto q a lo largo de Γ .

De manera equivalente tenemos lo siguiente. Sobre el plano definamos el campo vectorial constante ζ tal que todos los puntos del plano tienen asociado el vector $\xi(p_0)$. Sea $\theta(q)$ el ángulo entre el vector $\xi(q)$ y el vector $\zeta(q) = \xi(p_0)$. Denotemos por $\delta_{\Gamma \triangleleft}(\xi, \zeta)$ el cambio total del ángulo θ después de haber variado el punto q a lo largo de Γ , en la dirección positiva. Entonces $Ind(\xi, p)$ es el número entero

$$j = \frac{1}{2\pi} \delta_{\Gamma \triangleleft}(\xi, \zeta).$$

A continuación veremos una descripción de $Ind(\xi, p)$ en términos del número de vectores tangentes del campo vectorial ξ sobre una circunferencia Γ , suponiendo que este número de vectores es finito. Similar a ésta, Bendixon dió una descripción del índice en el contexto de los sectores elípticos, hiperbólicos y parabólicos determinados por sistemas dinámicos analíticos (Ver [15] y pág. 511 de [1]).

Definición. Sea α el ángulo entre el vector $\xi(q)$ y la recta tangente a Γ en q . Si $\xi(q_0)$ es tangente a Γ decimos que $\xi(q_0)$ es *tangente interior* a Γ si el ángulo α incrementa al variar positivamente el punto $q \in \Gamma$ en una vecindad de q_0 y decimos que $\xi(q_0)$ es *tangente exterior* a Γ si el ángulo α disminuye al variar (positivamente) el punto $q \in \Gamma$ en una vecindad de q_0 .

Observación. Entre dos tangentes interiores el ángulo α incrementa en π . Entre dos tangentes exteriores el ángulo α disminuye en π . Entre una tangente exterior y una tangente interior la variación del ángulo es nula.

Teorema 1 *Sea ξ un campo vectorial diferenciable en el plano y p el único punto singular de ξ en un disco cerrado D del cual su frontera es la circunferencia orientada Γ con centro en p . Supóngase que ξ tiene un número finito de vectores tangentes a Γ . Sea i el número de tangentes interiores y e el número de tangentes exteriores a Γ . Entonces*

$$Ind(\xi, p) = 1 + \frac{i - e}{2}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que p es el origen $(0, 0)$. Sea $\eta = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, el campo de vectores tangentes a cada circunferencia centrada en p .

Consideremos primero el caso en el que el número de tangentes interiores, i de ξ y el número de tangentes exteriores, e de ξ , son ambos iguales a cero. En un disco cerrado D , lo suficientemente pequeño, se tiene que el ángulo entre ξ y η no es un múltiplo de π para todo punto $q \in D$. Definamos $H(s, q) = (1 - s)\xi(q) + s\eta(q)$ con $s \in [0, 1]$, $q \in D$. Así, para cada $s \in [0, 1]$ se tiene un campo vectorial diferenciable $H(s, \cdot)$ en D . Para todo $s \in [0, 1]$, el único punto singular de $H(s, \cdot)$ es p . Además, $H(0, q) = \xi(q)$, $H(1, q) = \eta(q)$. Se sigue que el campo ξ es deformado a η de manera continua y no se anula fuera del origen a lo largo de la deformación. Por lo tanto, se tiene que $Ind(\xi, p) = Ind(\eta, p)$. Como $Ind(\eta, p) = 1$, entonces $Ind(\xi, p) = 1 = 1 + \frac{i - e}{2}$, lo cual muestra la fórmula en el caso considerado.

Ahora supongamos que i y e no son ambos iguales a cero. Sea $J = \widehat{AB}$ un arco de Γ tal que $\xi(A)$ y $\xi(B)$ son tangentes interiores o tangentes exteriores pero en ningún otro punto de J el campo ξ es tangente a Γ . Si $\xi(A)$ y $\xi(B)$ son ambos tangentes interiores, entonces el ángulo entre los campos η y ξ aumenta π unidades. Si $\xi(A)$ y $\xi(B)$ son tangentes exteriores, entonces el ángulo entre los campos η y ξ disminuye π unidades. Si $\xi(A)$ es tangente interior (exterior) y $\xi(B)$ es tangente exterior (interior), entonces el ángulo entre los campos η y ξ tiene variación nula. Cualquiera de los casos queda expresado en la siguiente igualdad:

$$\delta_{J\triangleleft}(\xi, \zeta) = \delta_{J\triangleleft}(\eta, \zeta) + \frac{\pi}{2}(i_J - e_J),$$

donde $i_J, e_J \in \{0, 1, 2\}$. Estos denotan el número de tangencias interiores o exteriores en J , ζ es el campo vectorial constante con valor $\xi(A)$ y $\delta_{J\triangleleft}(\xi, \zeta)$ es la variación del ángulo entre los campos ξ y ζ a lo largo de J .

Así, al considerar todos los arcos J de Γ , cuyos puntos inicial y final son los puntos en los que ξ es tangente a Γ (y en ningún otro punto de J el campo ξ es tangente a Γ), se tiene que

$$2\pi Ind(\xi, p) = 2\pi Ind(\eta, p) + \pi(i - e),$$

pues nótese que $2\pi = \sum_J \delta_{J\triangleleft}(\eta, \zeta) = \delta_{\Gamma\triangleleft}(\eta, \zeta) = 2\pi Ind(\eta, p)$ y que $\frac{1}{2} \sum_J i_J = i$, $\frac{1}{2} \sum_J e_J = e$. En consecuencia, se obtiene la conclusión del teorema. ■

1.2. Índice de un campo de direcciones definido en el disco.

Sea F un campo de direcciones continuo, definido en un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 . Sea p una singularidad aislada del campo de direcciones F y sea Γ una circunferencia con centro en p , orientada, tal que en el interior de Γ y sobre Γ misma, la única singularidad del campo de direcciones sea p . Sea $F(q_0)$ la recta definida por F en el punto $q_0 \in \Gamma$, y dotemos de un sentido a $F(q_0)$. Esto determina, por continuidad del campo de direcciones, un sentido en todas las rectas $F(q)$, para cada $q \in \Gamma$.

Notemos que al dar un sentido a cada recta del campo de direcciones en los puntos de Γ , estamos definiendo un campo vectorial sobre Γ , que por supuesto, en general no será continuo. En consecuencia, las definiciones de *tangente interior* y *tangente exterior de un campo de direcciones* son las mismas definiciones que para campos vectoriales.

Consideremos el campo vectorial constante $F(q_0)$ tal que a todo punto del plano le asocia el vector $F(q_0)$ (con el sentido dado anteriormente) y sea $\sphericalangle(F(q_0), F(q))$ el ángulo entre los vectores $F(q_0)$ y $F(q)$, con $q \in \Gamma$. Evaluemos $\delta_\Gamma \sphericalangle(F(q_0), F(q))$, el cambio total de este ángulo al haber recorrido Γ en sentido positivo.

Definición. El índice de Poncaré-Hopf del campo de direcciones F en el punto p , denotado por $Ind(F, p)$ se define como el número

$$Ind(F, p) = \frac{1}{2\pi} \delta_\Gamma \sphericalangle(F(q_0), F(q)).$$

Análogo al teorema 1 tenemos el siguiente para campos de direcciones.

Teorema 2 Sean F un campo de direcciones en el plano, p un punto singular aislado de ξ en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\Gamma \subset V$ una circunferencia con centro en p orientada positivamente. Supóngase que F tiene un número finito de vectores tangentes a Γ . Sea i el número de tangencias interiores y e el número de tangencias exteriores del campo de direcciones F en Γ . Entonces

$$Ind(F, p) = 1 + \frac{i - e}{2}.$$

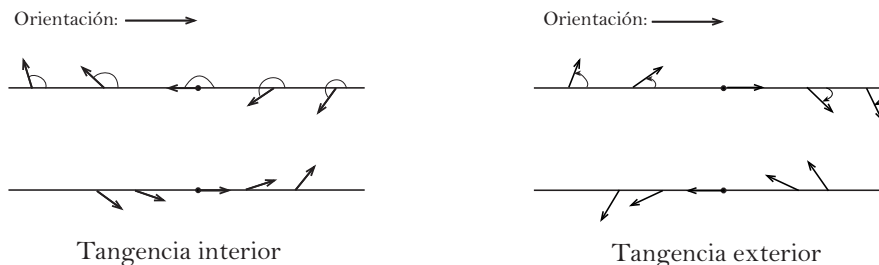


Figura 1.1: Comportamiento de los campos de direcciones o vectoriales alrededor en una tangencia interior o exterior.

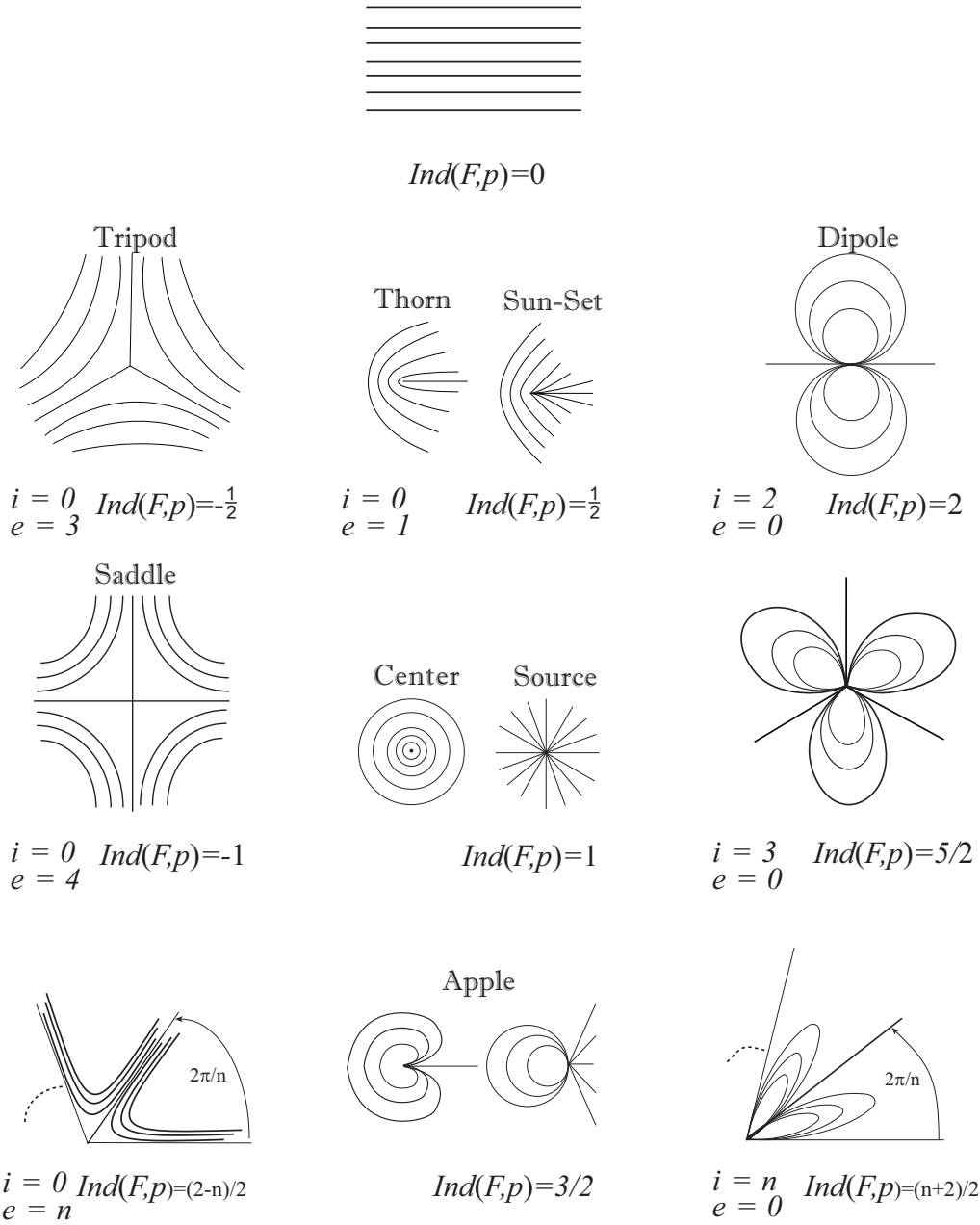


Figura 1.2: Para cada $J = \frac{n}{2}$ existe un campo de direcciones con una singularidad con índice j .

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales binarias.

2.1. Índice de Poncaré-Hopf de una ecuación diferencial binaria.

Vamos a considerar *ecuaciones diferenciales binarias* de la forma

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dydx + c(x, y) dx^2 = 0, \quad (2.1)$$

con a, b y c funciones real valuadas diferenciables que se anulan en el origen, tienen parte lineal distinta de cero y que además satisfacen la desigualdad $b^2 - ac \geq 0$ en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^2$ del origen y tal que $(0, 0)$ es el único punto en V en el que la función $b^2 - ac$ se anula.

Lema 1 *La ecuación diferencial binaria (2.1) define dos campos direcciones continuos en el conjunto $U = \{(x, y) \in V \mid b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0\}$. Las dos direcciones son distintas para todos los puntos de U .*

Definición. Decimos que un punto $(x, y) \in V$ es un *punto singular de la ecuación diferencial binaria (2.1)* si $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$.

Obsérvese que el origen es el único punto singular en V de la ecuación diferencial binaria (2.1).

Proposición 3 *Consideremos una ecuación diferencial binaria de la forma (2.1), entonces el índice de Poncaré-Hopf en el origen es igual para los dos campos de direcciones que define.*

Demostración. Sean F_1, F_2 los campos de direcciones que define una ecuación diferencial binaria y $m_j = \text{Ind}(F_j, 0) - 1$. Supongamos que $\text{Ind}(F_1, 0) \neq \text{Ind}(F_2, 0)$. Por el teorema 2, $m_1 = i_1 - e_1 \neq i_2 - e_2 = m_2$, donde i_j y e_j denotan el número de tangentes interiores y exteriores de F_j , respectivamente.

Si $m_j > 0$ entonces F_j tiene más tangentes interiores que exteriores. Si $m_j < 0$ entonces F_j tiene más tangentes exteriores que interiores. Y $m_j = 0$ si F_j tiene igual número de tangentes exteriores que interiores. Como $m_1 \neq m_2$ el número de tangentes interiores que tiene F_1 es distinto al número de tangentes interiores que tiene F_2 o bien, el número de tangentes exteriores que tiene F_1 es distinto al número de tangentes exteriores que tiene F_2 . En cualquiera de estos casos se sigue que los campos de direcciones coinciden en algún punto. Para hacer visible ésto, consideremos $\Gamma \subset V$ una circunferencia con centro en el origen y para cada $j \in \{1, 2\}$ la función $\alpha_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}P^1$ tal que a cada punto $p \in \Gamma$ le

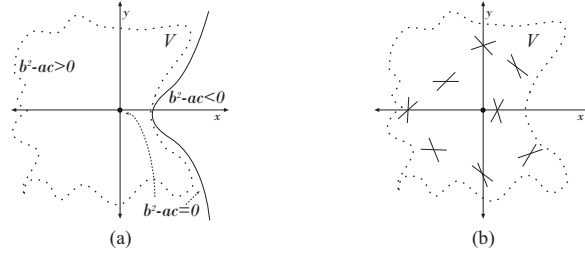


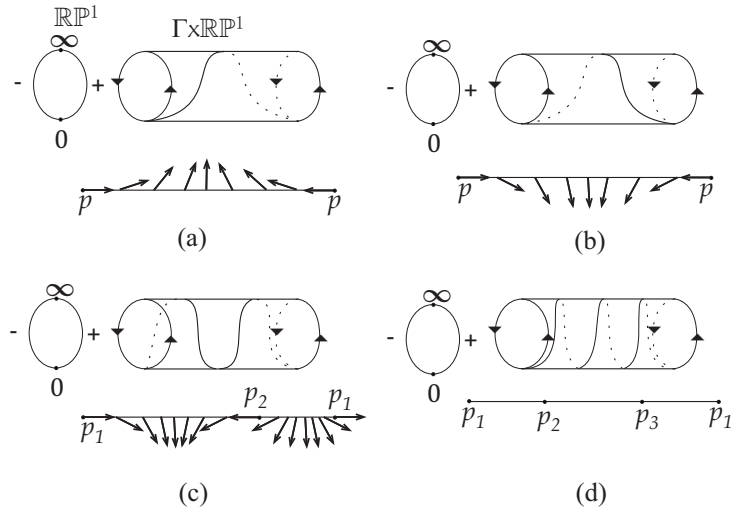
Figura 2.1: (a) Curva $b^2 - ac = 0$ con un punto aislado en el origen. (b) La ecuación (2.1) define dos campos de direcciones distintos en U , para ambos el origen es un punto singular aislado.

asocia la dirección determinada por el ángulo entre el vector $F_j(p)$ (habiendo elegido un sentido en el campo de direcciones) y el vector tangente a Γ en p que apunta en dirección positiva. Es decir, α_j le asocia a cada punto en Γ un punto en $\mathbb{R}P^1$.

La gráfica de α_j es una curva en $\Gamma \times \mathbb{R}P^1$, homotópica a una curva en $\Gamma \times \mathbb{R}P^1$, la cual da una vuelta con respecto de los paralelos, es decir, recorre una vez a Γ y da m_j vueltas con respecto de los meridianos, esto es, recorre m_j veces a $\mathbb{R}P^1$. Los recorridos con respecto de los meridianos, son en sentido positivo si el signo de m_j es positivo (las pendientes van de positivas a negativas pero pasando por la pendiente infinita) o en sentido negativo si el signo de m_j es negativo (las pendientes van de negativas a positivas pero pasando por la pendiente infinita) (ver figura 2.2).

Como $m_1 \neq m_2$ entonces las gráficas de α_1 y α_2 se intersecan, lo cual implica que los campos de direcciones coinciden en un punto de Γ , una contradicción al lema 1. Por lo tanto $Ind(F_1, 0) = Ind(F_2, 0)$. ■

Figura 2.2: (a) Gráfica de la función α_j si el campo de direcciones F_j tiene un punto con una tangencia interior en p . (b) Gráfica de α_j si el campo de direcciones F_j tiene un punto con una tangencia exterior en p . (c) Gráfica de α_j si el campo de direcciones F_j tiene una tangencia exterior en p_1 y una tangencia interior en p_2 . (d) Gráfica de α_j si en p_1, p_2 y p_3 el campo de direcciones F_j tiene tres tangencias interiores. Note que los signos $+$ y $-$ denotan respectivamente a los puntos de $\mathbb{R}P^1$ que corresponden a rectas en \mathbb{R}^2 con pendiente positiva y pendiente negativa.



Definición. Sea $\omega = 0$ una ecuación diferencial binaria de la forma (2.1). Definimos el *índice de Poincaré-Hopf de $\omega = 0$ en el origen* como el índice de Poincaré-Hopf de cualquiera de los campos de direcciones que define y lo denotamos por $ind(\omega, 0)$.

2.2. Doble cubierta asociada a una ecuación diferencial binaria

Consideremos una ecuación diferencial binaria de la forma (2.1) y un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}P^1$. Sea \widehat{M} el subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ definido de la siguiente manera:

$$\widehat{M} = \{((x, y), [\alpha : \beta]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : a(x, y)\alpha^2 + 2b(x, y)\alpha\beta + c(x, y)\beta^2 = 0\}.$$

Como $(0, 0) \in V$ es un punto singular de la ecuación diferencial, entonces \widehat{M} contiene a $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$.

Por el lema 1, para cada pareja $(x, y) \in U$, hay dos direcciones $[\alpha_1 : \beta_1], [\alpha_2 : \beta_2] \in \mathbb{R}P^1$ tales que $((x, y), [\alpha_1 : \beta_1])$ y $((x, y), [\alpha_2 : \beta_2])$ pertenecen a \widehat{M} . Así, \widehat{M} constituye una doble cubierta de U . Llamamos a \widehat{M} la *doble cubierta de la ecuación diferencial binaria (2.1)*.

Tomando $p = \frac{dy}{dx}$, $dx \neq 0$ se elige una carta afín de la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$. Entonces, en \mathbb{R}^3 definimos la función diferenciable

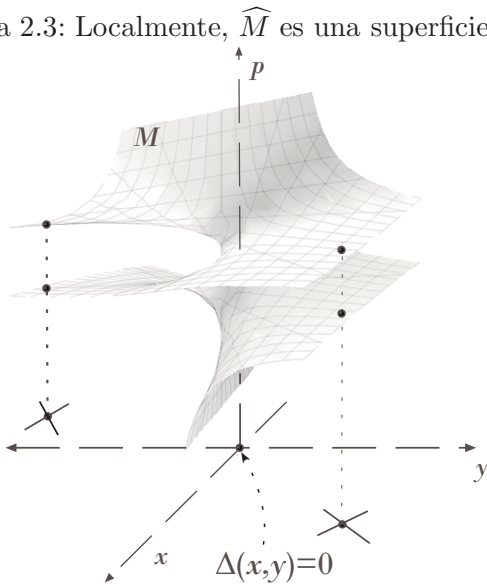
$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y).$$

La ecuación implícita $F(x, y, p) = 0$ define el conjunto

$$M = \{((x, y), p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0\}.$$

Si un punto $(x, y) \in U$ y es distinto del origen, entonces existen $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y, p_i) \in M, i = 1, 2$. Si $(x, y) = (0, 0)$ se tiene que $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R} \subset M$.

Figura 2.3: Localmente, \widehat{M} es una superficie en \mathbb{R}^3



Consideremos una ecuación (2.1) y supongamos que las funciones a, b y c están dadas de la siguiente forma: $a(x, y) = a_1x + a_2y + O(2)$, $b(x, y) = b_1x + b_2y + O(2)$ y $c(x, y) = c_1x + c_2y + O(2)$.

Proposición 4 *La superficie M es diferenciable en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ si y sólo si la función $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ tiene una singularidad de tipo Morse en $(0, 0)$, es decir, si y sólo si $(0, 0)$ es un punto crítico no degenerado de Δ .*

Demostración. Notemos que los puntos (x, y, p) en los cuales M no es una superficie diferenciable son aquéllos puntos de M que satisfacen que $F_x(x, y, p) = F_y(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$.

Como $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$, entonces todo punto en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ anula a $F_p(x, y, p) = 2pa(x, y) + 2b(x, y)$. Se sigue que M no es una superficie diferenciable en algún punto de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} F_x(0, 0, p) &= a_1p^2 + 2b_1p + c_1, \\ F_y(0, 0, p) &= a_2p^2 + 2b_2p + c_2, \end{aligned}$$

se anulan simultáneamente para algún p . Si consideramos las expresiones $F_x(0, 0, p)$ y $F_y(0, 0, p)$ como polinomios en p , entonces estos polinomios tienen una raíz común si y sólo si el resultante R se anula,

$$R = \begin{vmatrix} c_1 & 2b_1 & a_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 2b_1 & a_1 \\ c_2 & 2b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 2b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1c_2 - a_2c_1)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1). \quad (2.2)$$

Por otro lado, la expansión en serie de Taylor de orden 2 de la función $\Delta(x, y)$ es

$$b^2 - ac = (b_1^2 - a_1c_1)x^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)xy + (b_2^2 - a_2c_2)y^2 + O(2). \quad (2.3)$$

La parte cuadrática de $b^2 - ac$ es degenerada si y sólo si la matriz A de derivadas parciales de segundo orden de la función $b^2 - ac$ es singular.

Mediante un cálculo directo podemos ver que el determinante de A es

$$-(a_1c_2 - a_2c_1)^2 + 4(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1). \quad (2.4)$$

De (2.2) y (2.4) tenemos que $R = 0$ si y sólo si $\det A = 0$. En consecuencia la función Δ tiene una singularidad de Morse en el origen si y sólo si M es diferenciable en una vecindad de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. ■

En el espacio real de seis dimensiones cuyas coordenadas son los parámetros $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$, el conjunto de puntos que satisface $R = 0$ es un conjunto de medida cero. Así, genéricamente, dada una ecuación diferencial binaria, ésta define una superficie diferenciable M y en tal caso la función Δ tiene una singularidad de Morse en el origen.

Observación. Consideremos una ecuación diferencial binaria tal que la función $\Delta = b^2 - ac$ tiene una singularidad de tipo Morse. El pedir que en alguna vecindad V de $(0, 0)$ el único punto que anula a la función $\Delta = b^2 - ac$ es el $(0, 0)$ es equivalente a pedir que los coeficientes a_i, b_i y $c_i, i \in \{1, 2\}$ cumplan la desigualdad:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) < 0, \quad (2.5)$$

en una vecindad agujereada del origen.

Proposición 5 La proyección $\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x, y, p) = (x, y)$, es localmente un difeomorfismo en puntos $(x, y, p) \in M$ tales que $(x, y) \neq (0, 0)$.

Observación. Si tomamos la carta afín $q = \frac{dx}{dy}$, con $dy \neq 0$, de la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$, entonces se obtienen la función $G(x, y, q) = c(x, y)q^2 + 2b(x, y)q + a(x, y)$, la superficie $N = G^{-1}(0)$ y la proyección $\bar{\pi} : N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\bar{\pi}(x, y, q) = (x, y)$, y se cumplen resultados semejantes a los dados en las proposiciones 4 y 5.

2.2.1. El campo vectorial tangente a la superficie M.

Definición. Supóngase que la superficie M es diferenciable. A un campo vectorial ξ tangente a M le llamamos *levantamiento de la ecuación (2.1)*, o *levantamiento de los campos de direcciones determinados por la ecuación diferencial binaria* si $d\pi|_{(x,y,p)}(\nu)$ es una recta de pendiente p en el punto (x, y) , para todo punto $(x, y, p) \in M$ y para todo vector $\nu \in \xi$.

Proposición 6 El campo vectorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

es un levantamiento de la ecuación (2.1) en una vecindad del origen.

Demostración. El vector $(F_p, pF_p, -(F_x + pF_y))$ es claramente tangente a M en (x, y, p) pues

$$(F_p, pF_p, -F_x - pF_y) \cdot (F_x, F_y, F_p) = 0.$$

La diferencial de π en (x, y, p) transforma al vector $(F_p, pF_p, -(F_x + pF_y))$ en el vector (F_p, pF_p) anclado en (x, y) y este último genera una recta de pendiente p en el punto (x, y) . ■

Proposición 7 El campo vectorial ξ definido en M tiene genéricamente uno o tres puntos singulares en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$, los cuales son del tipo nodo o silla.

Demostración. Los puntos singulares de ξ en M son aquellos puntos (x, y, p) que satisfacen cada una de las igualdades siguientes: $F(x, y, p) = 0$, $F_p(x, y, p) = 0$, $(F_x + pF_y)(x, y, p) = 0$.

El sistema $F(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$, se satisface si la pareja (x, y) satisface $(b^2 - ac)(x, y) = 0$. Por lo tanto, los puntos singulares del campo ξ en M se proyectan bajo π en puntos del conjunto $\Delta(x, y) = 0$. Consideraremos únicamente los puntos singulares ξ que están en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Como $F(0, 0, p) = 0 = F_p(0, 0, p)$, los puntos singulares de ξ en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ están dados por:

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(0, 0, p) + pF_y(0, 0, p) \\ &= a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1 \\ &= \phi(p). \end{aligned}$$

El conjunto discriminante de los polinomios cúbicos $\phi(p)$, formado por los polinomios con una raíz real repetida, es un conjunto de medida cero en el espacio real de seis dimensiones cuyas coordenadas

son los parámetros $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$. Genéricamente, un polinomio $\phi(p)$ tiene una raíz real o bien tres raíces reales distintas.

Analizando la parte lineal del campo vectorial ξ en cada punto singular en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ se obtiene el resultado. Notemos que el tipo de punto singular $(0, 0, p_1)$ queda determinado por los valores

$$\begin{aligned} \alpha_1(p_1) &= 2(a_2 p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1), \\ \beta_2 &= -\phi'(p_1). \end{aligned}$$

Observemos que $\alpha_1(p_1)$ y β_2 son los valores propios correspondientes a la parte lineal de un campo vctorial $\bar{\xi}$ equivalente al campo vectorial ξ .

Como p_1 no es raíz repetida de ϕ entonces $\phi'(p_1) \neq 0$. Vamos a suponer que $\alpha_1(p_1) \neq 0$ y que α_1 y ϕ no tienen raíces comunes. Por lo tanto, topológicamente los ceros de $\tilde{\xi}$ son nodos o sillas dependiendo del signo de α_1 y β_2 . ■

2.3. Formas normales de ecuaciones diferenciales binarias lineales.

Con el propósito de conocer el índice de Poincaré-Hopf de una ecuación diferencial binaria dada, vamos a calcular primero el índice para ecuaciones lineales. Como el índice es invariante bajo cambio de coordenadas, en esta sección, veremos que existe un cambio de coordenadas lineal con el cual una ecuación diferencial binaria lineal puede ser transformada a una en la que las funciones lineales a y c sólo dependen de la variable y . Después tendremos el análisis cualitativo de los puntos singulares del campo ξ para la forma normal lineal.

Proposición 8 *Sea $a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dydx + c(x, y) dx^2 = 0$ una ecuación diferencial binaria lineal tal que la función $\Delta = b^2 - ac$ es positiva en una vecindad agujereada del origen, se anula en $(0, 0)$ y tiene una singularidad de Morse en $(0, 0)$. Supongamos que el polinomio $\phi(p)$ no tiene raíces repetidas, y que los polinomios $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$ no tienen raíces comunes, entonces existe un cambio de coordenadas del plano que transforma una ecuación diferencial binaria lineal que satisface (2.5) en la forma normal*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx - ydx^2 = 0.$$

Consideremos la identificación entre el conjunto de ecuaciones diferenciales binarias de la forma $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx - ydx^2 = 0$ y \mathbb{R}^2 , la cual asigna a cada ecuación diferencial el punto (b_1, b_2) . A continuación, veremos que con tal identificación hay una partición del plano con coordenadas (b_1, b_2) determinada por el tipo de puntos singulares del campo vectorial ξ definido en la superficie M .

Las siguientes curvas dividen al plano de acuerdo al tipo y número de los puntos singulares del campo vectorial ξ determinado por la forma normal $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y) dydx - ydx^2 = 0$.

1. En la curva “no Morse” $b_1 = 0$, se tiene que la parte cuadrática de la función Δ es degenerada. Esto implica que Δ no tiene una singularidad de Morse en el origen.

La curva $b_1 = 0$ es también la curva con raíces comunes de $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$. Pues el eigenvalor α_1 para este tipo de ecuación diferencial binaria es:

$$\alpha_1(p) = 2(p^2 + b_2p + b_1).$$

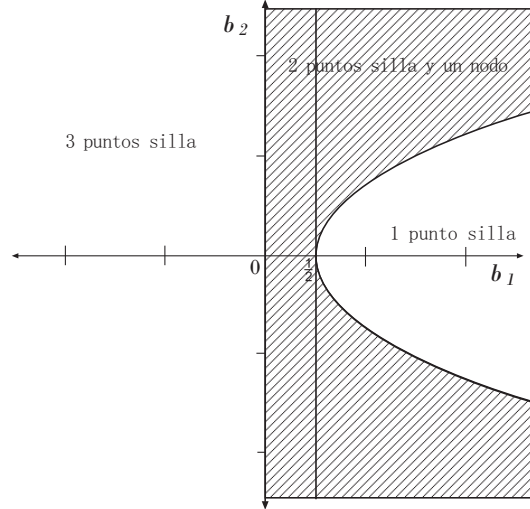


Figura 2.4: Partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ determinado por $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx - ydx^2 = 0$.

Si $b_1 = 0$ entonces α_1 tiene a cero como raíz, así α_1 y $\phi(p)$ tienen una raíz común, en consecuencia se tiene una situación no genérica.

- En las curvas $2b_1 - 1 = 0$ y $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$ el polinomio $\phi(p)$ tiene la siguiente forma

$$\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 - 1)p.$$

Las raíces de $\phi(p)$ son 0 , $-b_2 + \sqrt{b_2^2 - (2b_1 - 1)}$ y $-b_2 - \sqrt{b_2^2 - (2b_1 - 1)}$. Por lo tanto, si $2b_1 - 1 = 0$ ó $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$ el polinomio $\phi(p)$ tiene una raíz doble, una situación no genérica.

Ahora analizaremos los subconjuntos del plano que están limitados por dichas curvas (figura 2.4).

En el conjunto $\{(b_1, b_2) : \frac{1}{2} < b_1, b_2^2 - 2b_1 + 1 < 0\}$, el polinomio $\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 - 1)p$, tiene una única raíz real, $p = 0$. Las otras dos raíces son complejas conjugadas, pues $b_2^2 - (2b_1 - 1) < 0$. Como los valores propios correspondientes a la parte lineal del campo vectorial $\bar{\xi}$ en el punto $(0, 0)$ son

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= 2b_1 > 0, \\ -\phi(0) &= -(2b_1 - 1) < 0, \end{aligned}$$

entonces el punto singular del campo vectorial $\bar{\xi}$ es un punto silla. Como $\bar{\xi}$ es la proyección en el plano $\{(x, p)\}$ del campo ξ , entonces $(0, 0, 0)$ es topológicamente un punto silla.

En el conjunto $\{(b_1, b_2) : 0 < b_1, b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0\}$, el polinomio $\phi(p)$ tiene tres raíces reales distintas, que corresponden a tres puntos singulares del campo ξ . Topológicamente, dos de ellos son silla y uno es un nodo. El análisis de tal afirmación es similar al anterior.

En el conjunto $\{(b_1, b_2) : b_1 < 0, b_2^2 - 2b_1 + 1 > 0\}$, el polinomio $\phi(p)$ tiene tres raíces reales distintas que corresponden a tres puntos singulares del campo ξ . Topológicamente, cada uno de ellos es un punto singular de tipo silla.

Observación. Si el campo vectorial ξ tiene sólo un punto singular el cual es un punto silla, entonces el origen es de tipo *lemon*. Si ξ tiene tres puntos singulares los cuales son tres puntos sillas, entonces

se tiene el caso *star*. El caso *monstar* se consigue si el campo ξ tiene dos puntos silla y un nodo (Ver figura 2.5).

Ahora enunciaremos el siguiente teorema con el que se obtiene una clasificación topológica local de las curvas solución de la ecuación (1) la cual, tiene un punto singular que es aislado de la curva $\Delta = 0$.

Teorema 9 *Sea una ecuación diferencial binaria (1) tal que la función $\Delta : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativa, se anula sólo en el origen y tiene una singularidad de Morse en $(0,0)$. Supongamos que el polinomio $\phi(p)$ no tiene raíces repetidas, y que los polinomios $\alpha_1(p)$ y $\phi(p)$ no tienen raíces comunes. Entonces existe un germen de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ que lleva las curvas integrales de una ecuación diferencial (1) a las curvas integrales de alguna de las formas normales*

$$\begin{aligned} i) \text{Lemon} & \quad ydy^2 + 2xdydx - ydx^2 = 0, \\ ii) \text{Monstar} & \quad ydy^2 + \frac{1}{2}xdydx - ydx^2 = 0, \\ iii) \text{Star} & \quad ydy^2 - 2xdydx - ydx^2 = 0. \end{aligned}$$

El tipo está determinado por la parte lineal de las funciones a, b y c . Además, el homeomorfismo es un difeomorfismo en el complemento de ciertas direcciones que pasan por el origen.

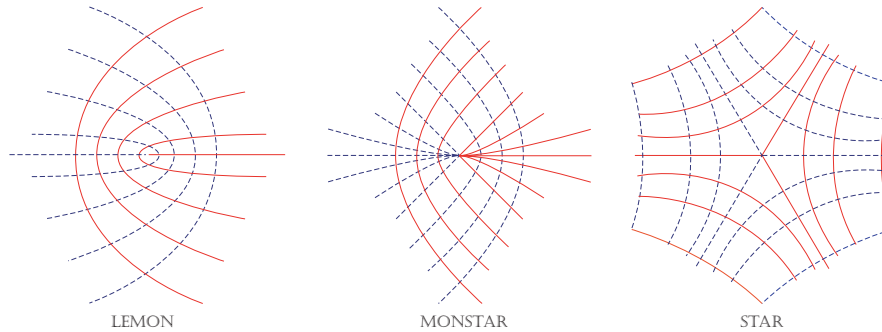


Figura 2.5: Modelos locales de la forma normal lineal $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx - ydx^2 = 0$.

2.4. Teorema del índice de Poincaré-Hopf para una ecuación diferencial binaria.

En la sección 2.1, se definió el índice de Poincaré-Hopf para una ecuación diferencial binaria (2.1) como el índice de Poincaré-Hopf de cualquiera de los campos de direcciones que determina en el plano. En este apartado vamos a usar la partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ considerada en la sección precedente, para calcular el índice de Poincaré-Hopf de la forma normal lineal $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dydx - ydx^2 = 0$. Primero veremos que el índice es constante en cada uno de los abiertos determinados por la identificación de la forma normal lineal con el punto (b_1, b_2) del plano.

Lema 2 *Sean $\omega_0 = (b_{1_0}, b_{2_0}), \omega_1 = (b_{1_1}, b_{2_1})$ dos puntos en alguno de los subconjuntos abiertos determinados por la partición en el plano $\{(b_1, b_2)\}$ y tales que el segmento de recta que une a ω_0 con ω_1 permanece contenido en dicho subconjunto, entonces existe una isotopía que lleva los campos de direcciones que define ω_0 en los campos de direcciones que define ω_1 . En consecuencia, $ind(\omega_0, 0) = ind(\omega_1, 0)$.*

Demostración. Para cada $t \in [0, 1]$ tenemos $\omega_t = ((1-t)b_{1_0} + tb_{1_1}, (1-t)b_{2_0} + tb_{2_1}) = (B_0(t), B_1(t))$, es decir, la familia de ecuaciones diferenciales siguiente

$$ydy^2 + 2(B_0(t)x + B_1(t)y)dydx - ydx^2 = 0.$$

Por continuidad, el índice de Poincaré-Hopf de los campos de direcciones que define $\omega_t = 0$ es constante para toda $t \in [0, 1]$ y en consecuencia $ind(\omega_t, 0)$ es constante para toda $t \in [0, 1]$. ■

Proposición 10 *Sea $\omega = (b_1, b_2)$ una ecuación diferencial binaria. Si el campo vectorial ξ tiene 3 puntos silla entonces $ind(\omega, 0) = -\frac{1}{2}$. Si el campo vectorial ξ tiene 2 puntos silla y un nodo entonces $ind(\omega, 0) = \frac{1}{2}$. Si el campo vectorial ξ tiene 1 punto silla entonces $ind(\omega, 0) = \frac{1}{2}$.*

Demostración. Por el lema 2, es suficiente considerar las componentes conexas determinadas por la partición del plano $\{(b_1, b_2)\}$ y un punto (b_1, b_2) en cada una de ellas para calcular el índice de Poincaré-Hopf de la ecuación $\omega = (b_1, b_2)$. De manera conveniente tomaremos los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{4}, 0)$ y $(1, 2)$.

Sea $\Gamma = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ un círculo de radio lo suficientemente pequeño y $\Delta \arg(z)(\varphi)|_0^{2\pi}$ la variación del argumento del número complejo z a lo largo de Γ , cuando φ va de 0 a 2π .

Sean $z = x + iy$, $dz = (dx + idy)$ y consideremos la forma cuadrática $z(dz)^2$. La forma normal lineal $ydy^2 - 2xdydx - ydx^2 = 0$ es igual a $Im(z(dz)^2) = 0$, con $Im(z(dz)^2)$ la parte imaginaria de $z(dz)^2$. Así, el índice de esta forma normal es el número (ver [19] pág 138) $J = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (\Delta \arg(z)(\varphi)|_0^{2\pi}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} 2\pi = -\frac{1}{2}$.

La forma normal $ydy^2 + 2xdydx - ydx^2 = 0$ es igual a $Im(\bar{z}(dz)^2) = 0$. Por lo tanto el índice de esta forma normal es el número $J = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (\Delta \arg(\bar{z})(\varphi)|_0^{2\pi}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (-2\pi) = \frac{1}{2}$.

De forma similar la forma normal $ydy^2 + \frac{1}{2}xdydx - ydx^2 = 0$ es igual a $Im((\frac{1}{4}x - iy)(dz)^2) = 0$. Así, el índice de esta forma normal es el número $J = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (\Delta \arg(\frac{1}{4}x - iy)(\varphi)|_0^{2\pi}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (-2\pi) = \frac{1}{2}$. Por último, la forma $ydy^2 + 2(x + 2y)dydx - ydx^2 = 0$ es igual a $Im(x + 2y - iy)(dz)^2 = 0$. Así, su índice es el número $J = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (\Delta \arg(x + 2y - iy)(\varphi)|_0^{2\pi}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (-2\pi) = \frac{1}{2}$. ■

Para ecuaciones diferenciales binarias lineales genéricas el siguiente teorema es consecuencia de la proposición 8, el lema 2 y la proposición 10. Para una ecuación genérica, no necesariamente lineal, por el teorema 9 es suficiente considerar únicamente la parte lineal, así:

Teorema 11 *Sea ω una ecuación diferencial binaria de la forma (2.1) tal que en una vecindad V del origen la función $\Delta : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la desigualdad $\Delta = b^2 - ac \geq 0$, se anula sólo en el origen y tiene una singularidad de Morse en $(0, 0)$. Supongamos que los coeficientes lineales de las funciones a, b, c no son todos nulos y que el polinomio $\phi(p)$ no tiene raíces repetidas ni raíces en común con $\alpha_1(p)$. Entonces*

$$ind(\omega, 0) = 1 + \frac{n-s}{2},$$

donde s es el número de puntos silla que tiene el campo vectorial ξ en el eje p y n es el número de puntos singulares del campo vectorial ξ en el eje p del tipo nodo.

2.5. Ecuaciones de las líneas asintóticas de superficies determinadas por funciones polinomiales homogéneas.

En esta sección veremos que para cada número de la forma $j = \frac{n}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$, existen ecuaciones diferenciales binarias con índice de Poincaré-Hopf igual a j . En particular, esto mostrará que para todo número de la forma $j = \frac{n}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$ existen campos de direcciones con índice j . Comenzaremos con lo siguiente.

En general, los puntos de una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 pueden ser clasificados como elípticos, parabólicos o hiperbólicos, de acuerdo a que la curvatura Gaussiana de la superficie sea positiva, cero o negativa, respectivamente. Las definiciones siguientes están dadas en términos de la multiplicidad de intersección de las rectas tangentes a la superficie en un punto con la superficie.

Definición. Sea S una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 y $p \in S$. Un punto $p \in S$ es *elíptico* si toda recta tangente en $T_p S$ tiene multiplicidad de intersección con la superficie igual a dos.

Definición. Sea S una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 y $p \in S$. Una recta tangente a S en p es una *recta asintótica* si su multiplicidad de intersección con la superficie es mayor que dos.

Definición. Un punto p en una superficie diferenciable S en \mathbb{R}^3 es *parabólico* si existe únicamente una recta tangente asintótica a la superficie en p . Un punto $p \in S$ es *hiperbólico* si existen exactamente dos rectas tangente asintóticas a la superficie en p .

Si es S una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 , para cada punto $p \in S$ existe una vecindad $U \subset S$ con $p \in U$ y una función diferenciable $f : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que U es la gráfica de f . Así, a un punto $p = (x, y, f(x, y))$ de la gráfica de $f|_v$ le asociamos la forma cuadrática

$$f_{xx}(x, y) dx^2 + 2f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2, \quad (2.6)$$

llamada la *segunda forma fundamental* de S .

En consecuencia, los puntos hiperbólicos de S son aquéllos en los que la forma cuadrática (2.6) se anula en dos rectas asintóticas distintas. Equivalentemente, en donde $f_{yy}(x, y) f_{xx}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) < 0$. Mientras que los puntos parabólicos son aquéllos donde $f_{yy}(x, y) f_{xx}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 0$. Los puntos elípticos son aquéllos donde $f_{yy}(x, y) f_{xx}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) > 0$.

En particular, nos enfocaremos en superficies que son la gráfica de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = p(x, y)$, una función polinomial, donde $p(x, y)$ es un *polinomio homogéneo factorizable de grado k* , es decir, es un polinomio homogéneo de grado k con coeficientes reales que es el producto $p(x, y) = l_1 \cdots l_k$ de k distintos polinomios reales homogéneos de grado 1 tales que las rectas $l_i = 0, i = 1, \dots, k$, son conjuntos distintos.

Lema 3 *Sea f una función polinomial determinada por un polinomio homogéneo factorizable $p(x, y) = l_1 \cdots l_k$. Entonces la gráfica de f consta de puntos hiperbólicos para todo $(x, y, f(x, y)) \neq (0, 0, f(0, 0))$.*

Demostración. Si $q = (x, y) \neq (0, 0)$, entonces q está en un sector Ω determinado por dos rectas, digamos $l_i = 0$ y $l_j = 0$, o bien, q está en una de las rectas $l_i = 0$.

En el primer caso, sean $\tilde{l}_i = 0$ y $\tilde{l}_j = 0$, dos rectas que pasan por q , paralelas a $l_i = 0$ y $l_j = 0$, respectivamente. El complemento en el plano de las rectas $l_i = 0$ y $l_j = 0$ consiste de cuatro sectores,

uno de ellos, que llamaremos Λ , está contenido en Ω . Sea $m \subset \mathbb{R}^2$ una recta que pasa por q y que corta al sector Λ , pero que no pasa por el origen y no es paralela a ninguna de las rectas $l_i = 0, i \in \{1, \dots, k\}$. Así, las intersecciones de m con las rectas $l_i = 0, i \in \{1, \dots, k\}$ están de un solo lado con respecto a q . Para continuar con la demostración haremos uso del siguiente lema.

Lema 4 Sean l_1, \dots, l_k polinomios homogéneos de grado 1. La restricción $f|_m$ de $f = l_1 \cdots l_k$ a una recta $m \subset \mathbb{R}^2$ que no pasa por el origen y no es paralela a $l_i = 0, i = 1, \dots, k$, es un polinomio de una variable que tiene k raíces distintas, $k - 1$ extremos locales y $k - 2$ puntos de inflexión los cuales son del tipo más simple. Además, entre dos puntos extremos de $f|_m$ existe sólo un punto de inflexión. Si m es una recta paralela pero no igual a alguna de las rectas $l_i = 0$, entonces $f|_m$ es un polinomio de grado $k - 1$, con $k - 1$ raíces distintas, $k - 2$ puntos extremos y $k - 3$ puntos de inflexión.

Continuemos con la prueba del lema 3. Sin perder generalidad supongamos que $f(q) > 0$. Por el lema 4 los puntos extremos y los puntos de inflexión están de un solo lado con respecto a q y como $f(q) > 0$, el punto crítico de $f|_m$ más cercano a q es un mínimo. Se sigue que la derivada de $f|_m$ es positiva en q . Así $f|_m$ es creciente en q y no hay cambio de convexidad en q . Se tiene así que $f|_m$ es convexa en q .

Ahora, consideremos la recta tangente \varkappa a la curva de nivel $f(x, y) = f(q)$ en el punto q . La derivada de f en dirección de la recta \varkappa en el punto q se anula, por lo que la derivada de $f|_\varkappa$ en q es igual a cero, así, la recta \varkappa no intersecta al sector Λ y además no pasa por el origen. El punto q es un máximo de $f|_\varkappa$ ya que $f(q) > 0$ y porque todos los puntos críticos de $f|_\varkappa$ son genéricos. Se sigue que $f|_\varkappa$ es cóncava en q . Concluimos que el punto $(q, f(q))$ es un punto hiperbólico de la gráfica de f .

Ahora supongamos que q está en una de las rectas $l_i = 0$, para alguna $i \in \{1, \dots, k\}$. Cada recta $l_i = 0$ es una recta tangente en cada uno de sus puntos a la superficie, es decir, $l_i = 0$ es una recta tangente contenida en la superficie, así la multiplicidad de intersección de $l_i = 0$ con la superficie es infinita, en consecuencia $l_i = 0$ es una recta asintótica en cada uno de sus puntos. Así, cada punto en la recta $l_i = 0$ no puede ser elíptico y en consecuencia el hessiano de f , $hess(f) = f_{yy}(x, y)f_{xx}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$ es menor o igual a cero para todos los puntos en una vecindad de la recta $l_i = 0$.

Ahora veremos que el hessiano de f se anula solo en el origen. Mediante un cambio de coordenadas podemos llevar a la recta $l_1 = 0$, por ejemplo, en la recta $y = 0$. Así, en las nuevas coordenadas el polinomio f es igual a $f(x, y) = yg(x, y)$, donde $g = l_2 \cdots l_k$ es el producto de los $k - 1$ polinomios restantes l_2, \dots, l_k , (en las nuevas coordenadas), es decir, es un polinomio factorizable de grado $k - 1$. El hessiano de f es $hess(f) = yg_{xx}(yg_{yy} + 2g_y) - (yg_{xy} + g_x)^2$. Por lo tanto, $hess(f)|_{y=0} = -g_x^2|_{y=0}$, donde $g_x^2|_{y=0}$ es un polinomio real en x de grado $2(k - 2)$ de la forma $Ax^{2(k-2)}$, con A una constante. Se sigue que la restricción del hessiano de f a la recta $y = 0$ es igual cero sólo en el origen y es negativo en el resto de la recta $y = 0$.

En consecuencia, si $q \neq 0$ está en alguna de las rectas $l_i = 0$ entonces $hess(f) < 0$ en q , por lo que $(q, f(q))$ es un punto hiperbólico de la gráfica de f . ■

Así, en una superficie dada como la gráfica de una función $f(x, y) = p(x, y)$, donde $p(x, y)$ es un polinomio homogéneo factorizable tenemos la ecuación diferencial binaria asociada

$$f_{xx}(x, y) dx^2 + 2f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2 = 0, \quad (2.7)$$

la cual satisface que el origen es un punto singular aislado. Por lo que para todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene que $f_{xy}^2(x, y) - f_{yy}(x, y) f_{xx}(x, y) > 0$. Las curvas integrales de (2.7) son las curvas asintóticas de la gráfica de f . Lo siguiente es calcular el índice de (2.7).

El espacio de las formas cuadráticas con coeficientes reales definidas en \mathbb{R}^2 es isomorfo a \mathbb{R}^3 , de la siguiente forma: a una forma cuadrática $au^2 + 2buv + cv^2$ se le asigna el punto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ en forma biunívoca. Una forma cuadrática es llamada *elíptica*, *parabólica* o *hiperbólica* si el determinante $ac - b^2$ de la matriz simétrica asociada es positivo, nulo o negativo, respectivamente.

En \mathbb{R}^3 las formas cuadráticas parabólicas determinan el cono $\mathcal{C} = \{(a, b, c) | ac - b^2 = 0\}$ de formas degeneradas. El complemento en \mathbb{R}^3 del cono \mathcal{C} consiste de tres componentes conexas. El exterior del cono, es decir, el conjunto $\{(a, b, c) | ac - b^2 < 0\}$ corresponde a la formas cuadráticas hiperbólicas, mientras que las dos componentes conexas restantes, es decir, el conjunto $\{(a, b, c) | ac - b^2 > 0\}$ corresponde a las formas cuadráticas elípticas.

Definición. Una función continua $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del círculo en el espacio de formas cuadráticas es llamada *curva hiperbólica* si para cada $\varphi \in S^1$ la forma cuadrática $\gamma(\varphi)$ es hiperbólica.

Definición. Sea $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva hiperbólica. Al número de vueltas que da la curva γ alrededor del cono de formas degeneradas \mathcal{C} le llamamos el *índice de la curva hiperbólica* γ y es denotado por $Ind(\gamma)$.

Notemos que si $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva hiperbólica entonces

$$Ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(a - c + 2bi)(\varphi) \Big|_0^{2\pi},$$

donde $\frac{1}{2}(a - c + 2bi)(\varphi)$ es el punto que se obtiene al proyectar ortogonalmente $\gamma(\varphi)$ al plano $a + c = 0$ y $\Delta \arg(a - c + 2bi)(\varphi) \Big|_0^{2\pi}$ denota la variación del argumento del número complejo $(a - c + 2bi)(\varphi)$ cuando φ va de 0 a 2π . Notemos que se ha hecho un abuso de notación al identificar el punto $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ del círculo de radio r con el ángulo $\varphi \in [0, 2\pi]$, lo cual hace corta la expresión $\Delta \arg(a - c + 2bi)((r \cos \varphi, r \sin \varphi)) \Big|_0^{2\pi}$.

Sea $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva hiperbólica. Si a cada $\varphi \in S^1$ le asignamos las dos rectas en las que la forma cuadrática $\gamma(\varphi)$ se anula, entonces γ define sobre S^1 dos campos continuos de direcciones los cuales no coinciden en ningún punto $\varphi \in S^1$. En consecuencia, el índice de cada campo de direcciones determinado por γ sobre S^1 es el mismo.

En [2] V. I. Arnol'd prueba los siguientes teoremas. Aquí, haremos uso de ellos para calcular el índice de la ecuación diferencial (2.7).

Teorema 12 *El índice de una curva hiperbólica γ es dos veces el índice de uno de los campos de direcciones determinados por γ .*

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función polinomial homogénea de grado D en coordenadas polares $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ tiene la expresión $f(x, y) = r^D F(\varphi)$.

Sea $f(x, y) = r^D F(\varphi)$ una función polinomial homogénea de grado $D > 1$. Si para cada $r > 0$, f define una curva hiperbólica $\gamma(\varphi) = (f_{xx}(\varphi), f_{xy}(\varphi), f_{yy}(\varphi))$, decimos que la función F es *D-hiperbólica*.

El siguiente teorema indica una forma de calcular el índice de curvas hiperbólicas correspondientes a funciones *D-hiperbólicas*.

Teorema 13 *El índice de una curva hiperbólica γ correspondiente a una función D -hiperbólica F es igual a*

$$ind(\gamma) = 2 - \frac{1}{2} \# \{ \varphi_0 \mid F(\varphi_0) = 0 \}.$$

Una ecuación diferencial binaria $\omega = a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2 = 0$ tal que para todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ en una vecindad V del origen la función $b^2 - ac$ es positiva y $(b^2 - ac)(0, 0) = 0$, determina una curva hiperbólica γ para cada círculo C contenido en V . Así, fijando un círculo $C \subset V$ con centro en $(0, 0)$ por el teorema 12 se tiene que $Ind(\gamma) = 2Ind(\omega, 0)$, es decir, el índice de la curva hiperbólica $\gamma : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el doble del índice de Poincaré-Hopf de la ecuación diferencial binaria $\omega = 0$.

Si $f(x, y) = p(x, y)$ es una función polinomial con p un polinomio homogéneo factorizable de grado D , el lema 3 afirma que la gráfica de f es hiperbólica fuera del origen, esto implica en particular que la ecuación diferencial (2.7), satisface $f_{xy}^2(x, y) - f_{yy}(x, y) f_{xx}(x, y) > 0$, para todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$. Así, por el teorema 12, el índice de Poincaré-Hopf de la ecuación diferencial binaria queda determinado por el índice de la curva hiperbólica $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(\varphi) = (f_{xx}(\varphi), f_{xy}(\varphi), f_{yy}(\varphi))$.

Corolario. *Sea $f(x, y) = p(x, y)$ una función polinomial con p un polinomio homogéneo factorizable de grado $D \geq 3$. Entonces el índice de Poincaré-Hopf de la ecuación diferencial de las líneas asintóticas (2.7) de la gráfica de f es negativo e igual a*

$$Ind(\omega, 0) = 1 - \frac{1}{2}D.$$

Demostración. Para $f(x, y) = p(x, y)$ una función polinomial con p un polinomio homogéneo factorizable de grado $D \geq 3$, la función D -hiperbólica F está determinada por la restricción de p al círculo unitario del plano $\{(x, y)\}$. Así, $F(\varphi) = 0$ si y sólo si $p(\varphi) = 0$. El número de elementos que tiene el conjunto $\{\varphi_0 \mid p(\varphi_0) = 0\}$ es $2D$, que es exactamente el número de veces en que el polinomio p cambia de signo al recorrer S^1 una vez. Por lo tanto, el índice de la curva hiperbólica $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(\varphi) = (f_{xx}(\varphi), f_{xy}(\varphi), f_{yy}(\varphi))$ es $ind(\gamma) = 2 - D$. En consecuencia, el índice de Poincaré-Hopf de (2.7), es $Ind(\omega, 0) = \frac{1}{2}ind(\gamma) = 1 - \frac{1}{2}D$. ■

Para encontrar ecuaciones diferenciales binarias con índice $j = \frac{n}{2} > 0$, consideremos la forma cuadrática $\bar{z}^n (dz)^2$, donde $\bar{z} = x - iy$, $dz = dx + idy$. La parte real $Re(\bar{z}^n (dz)^2)$ y la parte imaginaria $Im(\bar{z}^n (dz)^2)$ de $\bar{z}^n (dz)^2$ son formas cuadráticas con coeficientes reales.

Afirmación 1 *El índice de Poincaré-Hopf de la ecuación diferencial binaria $Re(\bar{z}^n (dz)^2) = 0$ es positivo e igual a $\frac{n}{2}$.*

Demostración. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \bar{z}^n (dz)^2 &= (Re(\bar{z}^n) + iIm(\bar{z}^n)) (dx^2 - dy^2 + 2idxdy) \\ &= Re(\bar{z}^n) (dx^2 - dy^2) - 2Im(\bar{z}^n) (dxdy) + i(2Re(\bar{z}^n) (dxdy) + Im(\bar{z}^n) (dx^2 - dy^2)). \end{aligned}$$

Así, tomando una curva hiperbólica $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ determinada por la ecuación diferencial

$$Re(\bar{z}^n) (dx^2 - dy^2) - 2Im(\bar{z}^n) (dxdy) = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg (2\text{Re}(\bar{z}^n) - 2\text{Im}(\bar{z}^n))(\varphi)|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg (2z^n)(\varphi)|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg (2z^n)(\cos \varphi, \text{sen} \varphi)|_0^{2\pi} = n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Ind}(\omega, 0) = \frac{n}{2}$. ■

Bibliografía

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic systems*, J. Wiley, New York 1973.
- [2] Arnol'd. V. I., *Astroidal geometry of hypocycloids and the Hessian topology of hyperbolic polynomials*, Russian Math. Survey 56:6, (2001), 1019-1083.
- [3] Arnol'd V. I., *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, (Berlín : Springer), 1983.
- [4] Arnol'd. V. I., *Ordinary differential equations*, Springer-Verlag, third edition, 1984.
- [5] Berry M. V. and Hannay J. H., *Umbilic points on Gaussian random surfaces*, J. Phys. A. Math. Gen., Vol. **10** No. 11, 1977, 1809-1821.
- [6] Brocker T. and Lander L. C., *Differentiable germs and catastrophes*, London Math. Soc. Lectures notes series 17, Cambridge University press.
- [7] Bruce J. W. and D.L. Fidal A., *On binary differential equations and umbilics*, Proc. R. Soc. Edinburgh, **111A**, (1989), 147-168.
- [8] Bruce J. W. and Giblin P.J., *Curves and singularities second edition*, Cambridge University press.
- [9] Bruce J. W. and Tari F., *On binary differential equations*, Nonlinearity **8**, (1955), 255-271.
- [10] Dara L., *Singularités génériques des équations différentielles multiformes*, Bol.Soc.Brasil Math **6**, (1975), 95-128.
- [11] Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Vol 4 (Paris: Gauthiers Villars), 1896.
- [12] Do Carmo M. P., *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial, 1990.
- [13] Gibson C. G., *Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction*, Cambridge University press, 1998.
- [14] Guíñez V., *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 309,2, (1998).
- [15] Hartman P., *Ordinary differential equations*, Secon Editionm Birkhauser. 1982.
- [16] Hartman P., Wintner A., *Envelopes and discriminant curves*, Amer. J. of Math. 75, 1953, 142-158.

- [17] Hartman P., Wintner A., *On the behavior of the solutions of real binary differential systems at singular points*, Amer. J. of Math. 75, 1953, 117-126.
- [18] Hartman P., Wintner A., *On the singularities in nets of curves defined by differential equations*, Amer. J. of Math. 75, 1953, 277-297.
- [19] Hopf H., *Differential geometry in the large*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- [20] Kuzmin A. G., *The behavior of the integral curves in a neighborhood of a branch point of the discriminant curve*, Vestnik Leningrad Univ. Math. 14, (1982), 143-149.
- [21] Kuzmin A. G., *Indices of singular and irregular point of direction fields in the plane*, Vestnik Leningrad Univ. Math. 14, (1982), 285-292.
- [22] Nemytskii V.V., Stepanov V.V., *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press., 1960.
- [23] Nikolaev I., *Foliations on surfaces*, Springer, 2000.
- [24] Porteous I. R., *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Second Edition, Cambridge University press.
- [25] Sotomayor J., Gutierrez C., *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*, Astérisque, (1982), 98-99.
- [26] Thom R., *Sur les equations differential multiformes et leur integral singulieres*, Bol Soc Brasil. Math. **3**, (1971), 1-11.