



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

**Conjuntos transversales para familias de objetos  
geométricos**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Doctor en Ciencias (Computación)**

P R E S E N T A :

**Javier Cano Vila**

Tutores Principales:

Dr. Jorge Urrutia Galicia

Instituto de Matemáticas, UNAM

Dr. Fernando Alfredo Hurtado Díaz

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

MÉXICO, D.F.

Junio 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Conjuntos transversales para familias de objetos geométricos

Javier Cano Vila

Junio, 2014



*A mi Abito, mi tía Tonia y mi tío Jose.*

*All that is gold does not glitter,  
Not all those who wander are lost;  
The old that is strong does not wither,  
Deep roots are not reached by the frost.*



# Agradecimientos

Primero, quiero agradecer a mi abuelo Quino, por todo lo que me dio en vida: su apoyo incondicional, sus palabras, los tiburones rojos, el vino, el jamón, la confianza, pero sobretodo sus enseñanzas que nunca quedarán en el olvido, lo que soy se lo debo en su mayoría a él; algo que me emociona es que después de defender esta tesis podré ser llamado como él: *doctor*.

Después quiero agradecer a Jorge y Ferran, mis *padres académicos*, por guiarme por el camino de la ciencia, sus enseñanzas, los problemas *de investigación*, su experiencia, los artículos, la *buena* comida, el vino, y todos los altibajos que implica hacer matemáticas. Estos cuatro años de trabajo sin duda dejan una huella importante en mi y para con ellos estaré eternamente agradecido.

A Elena, por que ha decidido echarse el paquete de ser mi esposa, por el apoyo incondicional que me ha brindado a pesar y por esta vida maravillosa que comienzo junto a ella. A Pili por acompañarme y aguantar el suplicio de vivir conmigo durante esta aventura que fue el doctorado. A mis padres y mi abuela Meche por el apoyo y buenos deseos desde la distancia, al igual que mis demás hermanos Pau, Ricardín y Berni.

No puedo dejar de agradecer a Alfredo Garcia, Javier Tejel, Toshinori Sakai, Luis Felipe Barba, que fueron coautores de varios de los resultados presentados en esta tesis. Además debo mencionar a Clemens Huemer, Crevel Bautista, Csaba Tóth, Hernán González, José Miguel Díaz-Báñez y Ruy Fabila, con quienes tuve el privilegio de participar en la obtención y publicación de diversos resultados. Y con menor suerte, pero no me-

nos agradecido, quiero mencionar también a: Inmaculada Ventura, Pablo Pérez, Marco Heredia, Adriana Ramírez, Adrián Ruiz, Oswin Aischolzer, Birgit, Canek, Mayra Corvera, Joel Espinosa, Alberto Márquez, Carlos Seara, Karin Arikushi, Rodrigo Oliveira, con quienes también tuve la fortuna de trabajar, y de todos me llevo un muy buen recuerdo del trabajo y el exparsimiento adjunto al trabajo.

Quiero agradecer especialmente a Adriana, por todos los cursos que impartimos juntos, sin duda fue una experiencia que me marcó y siempre recordaré con mucho cariño. Pero sobretodo quiero agradecerle el apoyo que me brindó, gracias al cual esta tesis pudo ser terminada finalmente. La cuenta de chelas se ha vuelto no numerable ya.

Otra persona que le debo mi agradecimiento es a Miguel, por que gracias a el y a Jorge tuve la experiencia de dirigir, bien o mal, una tesis. Pero también por las discusiones suerrealistas, el pulque, absenta, Coyoacán y los tacos con birria al filo del amanecer. Y ya entrados en eso, también debo mencionar a Carlos y los emisarios de Embajada Jarocho, por el FIFA, retas de Marvel, conciertos y visitas al estadio, que ayudaron a tomar nuevas energías para continuar con el estudio.

Finalmente, pero no por eso menos, a mi familia extendida: Aby, mis suegros, Trufo y Tito, por que a pesar del corto tiempo me han hecho sentirme en familia.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Agradecimientos  | III       |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Geometría Combinatoria y Computacional . . . . .                  | 1         |
| 1.2. Conjuntos transversales . . . . .                                 | 3         |
| 1.3. $k$ -hoyos . . . . .  | 4         |
| 1.4. Algunos problemas . . . . .                                       | 6         |
| 1.4.1. Un punto en muchos triángulos . . . . .                         | 6         |
| 1.4.2. Bloqueadores de $k$ -hoyos en el plano . . . . .                | 9         |
| 1.4.3. Bloqueando simplejos con planos . . . . .                       | 9         |
| <b>2. Resultados anteriores relacionados</b>                           | <b>11</b> |
| 2.1. El teorema de Erdős-Szekeres . . . . .                            | 12        |
| 2.1.1. $k$ -hoyos . . . . .  | 15        |
| 2.2. Bloqueando los triángulos vacíos de conjuntos de puntos . . . . . | 18        |
| 2.3. Otros problemas sobre transversales . . . . .                     | 20        |
| 2.3.1. El teorema de Helly . . . . .                                   | 20        |
| 2.3.2. El teorema del corte del sandwich de jamón . . . . .            | 20        |
| <b>3. Un punto en muchos triángulos</b>                                | <b>23</b> |
| 3.1. Trabajo preliminar . . . . .                                      | 24        |
| 3.2. Triángulos vacíos y ajenos por aristas . . . . .                  | 25        |
| 3.3. Cubriendo con triangulaciones . . . . .                           | 27        |

|                     |  |           |
|---------------------|--|-----------|
| 3.3.1.              | Puntos en posición convexa . . . . .   | 28        |
| 3.3.2.              | Cubriendo los triángulos vacíos del conjunto de Horton . . . . .                     | 31        |
| 3.4.                | Un punto en muchos triángulos ajenos por aristas . . . . .                           | 34        |
| 3.4.1.              | Polígonos regulares . . . . .  | 42        |
| 3.5.                | Un punto en muchos triángulos vacíos ajenos por aristas . . . . .                    | 47        |
| <b>4.</b>           | <b>Bloqueando <math>k</math>-hoyos en conjuntos de puntos en el plano</b>            | <b>51</b> |
| 4.1.                | Introducción . . . . .   | 51        |
| 4.2.                | Bloqueando los 4-hoyos en conjuntos de puntos . . . . .                              | 53        |
| 4.3.                | Bloqueando los 5-hoyos . . . . .   | 56        |
| 4.3.1.              | Conjuntos de puntos en posición convexa . . . . .                                    | 56        |
| 4.3.2.              | Bloqueando los 5-hoyos en polígonos regulares . . . . .                              | 61        |
| 4.3.3.              | La geometría importa . . . . .   | 64        |
| 4.4.                | Conjuntos de puntos en posición general . . . . .                                    | 67        |
| 4.5.                | Bloqueando $k$ -hoyos con $k > 5$ . . . . .  | 71        |
| 4.6.                | Comentarios finales . . . . .  | 75        |
| <b>5.</b>           | <b>Bloqueando simplejos en <math>\mathbb{R}^2</math> y <math>\mathbb{R}^3</math></b> | <b>77</b> |
| 5.1.                | Introducción . . . . .   | 77        |
| 5.2.                | Conjuntos bien separados y cortes de sandwich de jamón . . . . .                     | 79        |
| 5.3.                | Bloqueadores en el plano . . . . .   | 80        |
| 5.4.                | Bloqueadores en $\mathbb{R}^3$ . . . . .   | 83        |
| 5.4.1.              | Bloqueando con líneas rectas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .                             | 85        |
| 5.4.2.              | Bloqueando con puntos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                    | 86        |
| 5.5.                | Comentarios finales . . . . .  | 87        |
| <b>Bibliografía</b> |  | <b>89</b> |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Geometría Combinatoria y Computacional

Dado un conjunto de objetos geométricos en un espacio, la Geometría Computacional, en un sentido, se ocupa de calcular diferentes propiedades geométricas entre dichos objetos. Así por ejemplo, dada una recta  $\ell$  y un punto  $p$ , ambos en  $\mathbb{R}^2$ , nos gustaría saber si  $p$  se encuentra sobre, por debajo, o por arriba de  $\ell$ . En otro sentido, la Geometría Computacional se ocupa del análisis y diseño de algoritmos para resolver problemas geométricos; más aún, podemos decir que esta área también se encarga del estudio de la complejidad computacional inherente a problemas geométricos, tomando en cuenta distintos modelos de cómputo. Es en este último sentido, que se tratan aspectos comparativos entre algoritmos que pueden resolver un mismo problema, ésto para determinar cuál tiene una menor complejidad en tiempo o espacio, o incluso para saber cuál es más propenso a errores numéricos.

Actualmente, la Geometría Computacional es vista como una disciplina relativamente nueva dentro de las Ciencias de la Computación, aunque desde el punto de vista histórico, se podría decir que la Geometría

Computacional ya existía en la antigua civilización griega, hace más de 2600 años; recordemos que Euclides en *Los Elementos* utilizaba algoritmos para construir ciertos objetos geométricos.

Por otra parte, la Geometría Combinatoria estudia las distintas configuraciones que puede tener un conjunto de objetos geométricos, en particular se pregunta cuántas configuraciones distintas de cierto tipo pueden obtenerse a partir de un conjunto de objetos geométricos, o también cómo pueden ser estas configuraciones.

La Geometría Computacional y la Geometría Combinatoria viven en una eterna y cooperativa simbiosis y resulta difícil hablar de una sin hablar de la otra. Por ejemplo, muchas veces la complejidad de un algoritmo dependerá en gran medida de las configuraciones diferentes que puede tener el conjunto de objetos con los que se está trabajando. De igual manera, muchas veces un algoritmo que calcula cierta propiedad de algún conjunto de objetos geométricos, nos puede dar mucha información respecto a la combinatoria de este conjunto, *i.e.* nos dice como construir ciertas configuraciones.

Esta tesis nace precisamente de la intersección de estas dos áreas; siendo un poco fatalistas podríamos decir que esta tesis se encuentra justo en medio de estas dos áreas. En particular, nos enfocaremos en diferentes tipos de transversales. Las transversales son objetos (o familias de objetos) que han fascinado a los geómetras desde épocas muy remotas y que han dado mucha actividad en diferentes áreas de la geometría combinatoria. Recientemente, gran parte de la investigación hecha en geometría combinatoria se ha enfocado en el estudio de los  $k$ -hoyos, que pueden ser pensados como polígonos inducidos por conjuntos finitos de puntos que no tienen a ningún elemento del conjunto en su interior. Esta tesis está enfocada en estos dos tipos de objetos.

El resto de este capítulo estará dedicado a hablar un poco sobre estos objetos y pondrá en contexto el trabajo de esta tesis.

## 1.2. Conjuntos transversales

Dados dos objetos geométricos  $M$  y  $M'$ , decimos que  $M$  *atraviesa* (*bloquea*) a  $M'$  si  $M$  contiene algún punto interior de  $M'$ . Por punto interior de  $M$  nos referimos a aquellos puntos que forman su interior cuando  $M$  vive en un espacio de dimensión lo más pequeña posible. Esto es, si  $M$  es un polígono, entonces sus puntos interiores son aquellos que no están en ninguna arista, si  $M$  fuera un poliedro, entonces sus puntos interiores son aquellos que no son parte de alguna cara.

Dado  $\mathcal{M}$  un conjunto finito de objetos geométricos y  $\ell \notin \mathcal{M}$  otro objeto geométrico, decimos que  $\ell$  es una transversal de  $\mathcal{M}$  si  $\ell$  atraviesa a todos los elementos de  $\mathcal{M}$ . Dado  $\mathcal{L}$  un conjunto de objetos geométricos distinto de  $\mathcal{M}$ , decimos que  $\mathcal{L}$  es un *conjunto transversal* de  $\mathcal{M}$  si la unión de todos los elementos de  $\mathcal{L}$  es una transversal de  $\mathcal{M}$ . Dicho de otra forma,  $\mathcal{L}$  es un conjunto transversal de  $\mathcal{M}$  si para todo elemento de  $\mathcal{M}$  existe un elemento de  $\mathcal{L}$  que lo atraviesa.

Los objetos transversales aparecen desde el comienzo de la geometría como ciencia, por ejemplo, los griegos estudiaban cómo eran los ángulos que formaba una recta transversal a otras dos rectas, encontrando propiedades interesantes cuando estas dos rectas eran paralelas. Sin retroceder tanto en el tiempo, los objetos transversales cobran mucha relevancia en el área de la geometría discreta, de hecho varios problemas del área pueden reducirse a la pregunta de si existe o no cierto objeto transversal para algún conjunto de objetos dado. Por ejemplo, el Teorema de Helly nos da una serie condiciones suficientes para garantizar la existencia de un punto transversal de algún conjunto de convexos en  $\mathbb{R}^d$ .

En computación, el estudio de objetos transversales también ha tenido cierto impacto, por ejemplo, uno de los problemas computacionales más conocidos, el del agente viajero, también puede ser reformulado en función de transversales. En particular, en el caso del agente viajero, se busca optimizar cierto parámetro del objeto transversal.

Algunos problemas relacionados con conjuntos transversales son conocidos como problemas *tipo Gallai*, se les dio este nombre gracias al problema siguiente que propuso Gallai:

**Problema 1.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos cerrados en el plano de forma que cada dos se intersectan, ¿cuál es el menor número de puntos necesarios para bloquear todos los discos?

Para esta pregunta se conoce la respuesta exacta: cuatro puntos son siempre suficientes y a veces necesarios. La mayor parte de esta tesis tratará de problemas similares. Aunque dentro de esta tesis no usaremos este nombre para referirnos los problemas estudiados aquí, pues la motivación, el contexto y las estrategias usadas en las demostraciones son muy diferentes en comparación a las usadas en el contexto de problemas de tipo Gallai. La diferencia principal entre los problemas tipo Gallai tradicionales y los estudiados en esta tesis es que la *entrada* no será la familia de objetos en si, si no un conjunto finito de puntos que son los que inducen a las familias que deseamos *bloquear*.

Hablando un poco más formal, los problemas estudiados serán del tipo siguiente: dado un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  y un conjunto  $\mathcal{O}$  de objetos inducidos por elementos de  $P$ , se desea encontrar un conjunto transversal  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{O}$ , tal que todos sus elementos sean de la misma clase. Por ejemplo,  $\mathcal{O}$  puede ser el conjunto de todos los triángulos con vértices en  $P$  y  $\mathcal{T}$  un conjunto de puntos. Entonces estaríamos buscando un conjunto de puntos tal que cualquier triángulo de  $P$  contenga al menos un punto de estos. En algunos casos se pide que este conjunto transversal, además tenga cardinalidad mínima.

Usaremos el verbo *bloquear* para referirnos a la acción que realiza una transversal sobre el conjunto de objetos, y como consecuencia, nos referiremos como *bloqueadores* a los elementos de un conjunto transversal al que también llamaremos *conjunto bloqueador*.

### 1.3. $k$ -hoyos

Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general. Decimos que  $P$  está *posición convexa* si los elementos de  $P$  son los vertices de algún polígono convexo. Un polígono convexo  $\mathcal{Q}$  con  $k$  vertices se le llama un  $k$ -gono de  $P$  si todos sus vértices están en  $P$ .  $\mathcal{Q}$  será un  $k$ -hoyo

de  $P$  si no contiene ningún elemento de  $P$  en su interior. Si el contexto lo permite, nos referiremos por  $k$ -hoyo tanto al polígono convexo, como a su conjunto de vértices.

El estudio de encontrar y contar  $k$ -hoyos en conjuntos de puntos ha sido una área activa de investigación desde que Erdős y Szekeres [13, 14] se preguntaron sobre la existencia  $k$ -hoyos en conjuntos de puntos en el plano. Se sabe que cualquier conjunto de puntos con al menos diez puntos contiene al menos un 5-hoyo [17]. Horton [18] demostró que para  $k \geq 7$  existen conjuntos de puntos que no tienen  $k$ -hoyos. La pregunta sobre la existencia de 6-hoyos permaneció abierta por varios años, y no fue si no hasta hace poco que Nicolás [21] probó que cualquier conjunto de puntos suficientemente grande contiene algún 6-hoyo.

El estudio de propiedades del conjunto de  $k$ -hoyos generados por conjuntos de puntos en el plano ha recibido mucho interés por varios años. Sea  $f_k(n)$  el número mínimo de  $k$ -hoyos que puede tener un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Katchalski y Meir [28] demostraron que  $\binom{n}{2} \leq f_3(n) \leq cn^2$  para  $c < 200$ . Su cota inferior fue mejorada por Dehnhardt [10] a  $n^2 - 5n + 10 \leq f_3(n)$ . El también demostró que  $\binom{n-3}{2} + 6 \leq f_4(n)$ . Bárány y Valtr [5] dieron construcciones para conjuntos de puntos con pocos  $k$ -hoyos, para  $3 \leq k \leq 6$ . Al lector interesado en este tema se le recomienda leer [?] para una descripción más precisa sobre los diferentes resultados obtenidos en esta materia.

Recientemente, Devillers, Hurtado, Károly, y Seara [11] estudiaron variantes del problema de Erdős-Szekeres en las que se asignan colores a los elementos del conjunto de puntos en cuestión. Entre otras cosas demostraron que cualquier conjunto de puntos bi-coloreado contiene  $\frac{n}{4} - 2$  triángulos monocromáticos (con todos los vértices con el mismo color) vacíos y ajenos. Aichholzer *et al.* [1] demostraron que cualquier conjunto de  $n$  puntos bi-coloreado siempre contiene  $\Omega(n^{5/4})$  3-hoyos monocromáticos, posteriormente Pach y Toth [22] mejoraron esta cota a  $\Omega(n^{4/3})$ .

## 1.4. Algunos problemas

Durante mis estudios de doctorado trabajé en diferentes temas relacionados con encontrar bloqueadores de diferentes objetos inducidos por un conjunto de  $n$  puntos. A continuación menciono de manera breve estos problemas, que son justamente los que se desarrollarán en esta tesis.

### 1.4.1. Un punto en muchos triángulos

Este es un problema que va un poco en el sentido contrario de los demás. En el resto de problemas tendremos un conjunto de objetos geométricos inducidos por un conjunto de puntos para el cual deseamos encontrar un conjunto transversal. En este caso, queremos encontrar un punto del plano, que sea transversal a un subconjunto *grande* del conjunto de todos los triángulos inducidos por  $P$ , imponiendo ciertas restricciones en estos triángulos.

Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general. Una *gráfica geométrica*  $G$  en  $P$  es el dibujo de una gráfica con  $n$  vértices, cada vértice es representado por un elemento de  $P$  y una aristas entre dos vértices es el segmento de recta que los conecta. Decimos que  $G$  es *plana* si no hay dos aristas que se intersecten (cruzen). Un triángulo de  $G$  consiste de tres puntos  $x, y, z \in P$ , tales que  $xy, yz, y zx$  son aristas de  $G$ ; lo denotaremos por  $\Delta(x, y, z)$ . Si además  $\Delta(x, y, z)$  no contiene elementos de  $P$  en su interior diremos que es *vacío*.

De forma similar si tenemos  $x, y, z \in P$ ,  $\Delta(x, y, z)$  es un *triángulo* de  $P$ , y que  $xy, yz, y zx$  son las aristas de  $\Delta(x, y, z)$ . Un 3-hoyo de  $P$ , puede ser pensado como un triángulo vacío de la gráfica geométrica completa  $\mathcal{K}_P$  en  $P$ .

### Cubriendo triángulos con triangulaciones

Un triángulo vacío  $t$  de un conjunto de puntos  $P$  es *cubierto* por una triangulación  $T$  de  $P$  si alguna de las caras de  $T$  es  $t$ . En esta sección estudiamos el problema:

**Problema 2.** *¿Cuántas triangulaciones hacen falta para cubrir todos los triángulos vacíos de  $P$ ?*

Se sabe que todo conjunto de puntos tiene  $\Omega(n^2)$  triángulos vacíos, y una triangulación de  $P$  tiene  $O(n)$  triángulos vacíos, por tanto, hacen falta al menos  $\Omega(n)$ , sin embargo, cuando  $P$  está en posición convexa hacen falta tantas triangulaciones como la cuarta parte de triángulos vacíos. Este problema está relacionado con el tema principal de esta sección ya que dos triángulos vacíos que comparten un punto interior no pueden ser cubiertos por la misma triangulación, y por tanto el número de triangulaciones necesarias es acotado por abajo por el número de triángulos que contienen a un mismo punto.

### Un punto en muchos triángulos ajenos por aristas

Consideremos el problema de encontrar un punto en muchos triángulos y después impondremos la condición de que estos triángulos además sean ajenos por aristas.

El problema de encontrar un punto en muchos triángulos fue estudiado por Boros y Füredi [6] y demostraron el teorema siguiente:

**Teorema 1.** *Para todo conjunto de  $n$  puntos en posición general y en el plano  $P$  siempre existe un punto en el interior de su envolvente convexa contenido en  $\frac{2}{9}\binom{n}{3} + O(n^2)$  triángulos de  $P$ . La cota es justa.*

Tratando de resolver el problema de encontrar el número de aristas máximo que tiene una gráfica geométrica sin triángulos en  $n$  puntos en el plano [2], nos preguntamos: *¿En cuántos triángulos ajenos por aristas determinados por  $n$  puntos puede encontrarse un punto del plano?* Esta pregunta resultó ser un problema bastante interesante. Dado un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en el plano y en posición general, sea  $\mathcal{T}(P, q)$  el conjunto de triángulos de  $P$  que contienen a  $q$ , un punto cualquiera del plano. Definimos la gráfica  $G(P, q)$  que tiene a  $\mathcal{T}(P, q)$  como conjunto de vértices, y dos triángulos serán adyacentes si comparten alguna arista, ver figura 1.1. Asumiremos que  $P \cup \{q\}$  está en posición general también, esto es  $q$  no está en ninguna recta que pase por dos elementos de  $P$ .

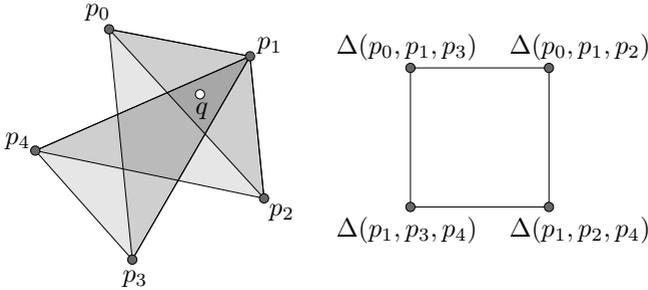


Figura 1.1:  $G(P, q)$ .

### Un punto en muchos 3-hoyos ajenos por aristas

A continuación retomamos el problema anterior, pero ahora con la restricción de que los triángulos, además de ser ajenos por aristas, también estén vacíos, esto es, que sean 3-hoyos. Claramente, si  $P$  está en posición convexa, entonces, cualquier triángulo está vacío y por tanto el problema es equivalente al de la sección anterior.

Dado  $P$ , y un punto  $q \notin P$ , sea  $\mathcal{T}_\emptyset(P, q)$  el conjunto de 3-hoyos que contienen a  $q$  en su interior. De manera similar a la sección anterior definiremos  $G_\emptyset(P, q)$  como la gráfica que tiene a  $\mathcal{T}_\emptyset(P, q)$  como conjunto de vértices y dos son adyacentes si comparten una arista. Esta gráfica se vuelve mucho más difícil de estudiar que la anterior, de hecho, simplemente el probar que esta gráfica tiene un vértice de grado algo, implicaría una respuesta afirmativa a una pregunta abierta hecha por Bárány y Károly. Ellos se preguntan si para cualquier  $P$ , existe un segmento de recta uniendo dos de sus elementos que sea una arista de un número alto de 3-hoyos

### 1.4.2. Bloqueadores de $k$ -hoyos en el plano

Otro problema en el que trabajé para esta tesis es el siguiente: dado un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en el plano, encontrar un conjunto  $B$  de puntos, ajeno a  $P$ , tal que  $B$  sea un conjunto transversal del conjunto de todos los  $k$ -hoyos de  $P$ . En este caso, a los elementos de  $B$  les llamaremos *bloqueadores* y decimos que un punto  $p$  *bloquea* a un  $k$ -hoyo, si lo atraviesa.

El problema de encontrar conjuntos bloqueadores de  $k$ -hoyos se ha estudiado antes, en particular cuando  $k$  vale 3 y 4. Se sabe que para bloquear el conjunto de todos los 3-hoyos (o triángulos vacíos) de un conjunto de  $n$  puntos en el plano  $2n - c + 2$  (donde  $c$  es el número de puntos en su envolvente convexa) son siempre suficientes y necesarios, la parte de la necesidad es fácil de ver, ya que cualquier triangulación de  $n$  puntos en el plano tiene esta cantidad de triángulos, por lo que un punto es necesario para bloquear cada triángulo. La parte de la suficiencia fue probada por Katchalski y Meir [28], y por Czyzowicz, Kranakis y Urrutia [9].

Recientemente Sakai y Urrutia [35] probaron que existen conjuntos de puntos para los que  $2n - o(n)$  bloqueadores son necesarios para bloquear todos sus 4-hoyos.

Mi aporte a este problema fue el estudio de conjuntos de bloqueadores para  $k$ -hoyos cuando  $k \geq 5$ . Este caso resultó interesante, ya que mientras que para triángulos y cuadriláteros, el número de vértices en el cierre convexo de  $P$  pareciera influenciar fuertemente en el número de bloqueadores necesarios, no resultó ser el caso para  $k$ -hoyos con al menos 5 vértices.

### 1.4.3. Bloqueando simplejos con planos

Los problemas presentados en la sección anterior surgen de la idea de *generalizar* el resultado de Katchalski y Meire [9, 28] respecto al número de bloqueadores necesario para bloquear a todos los triángulos de un conjunto de  $n$  puntos. El problema presentado en esta sección también surge con la misma motivación, sólo que ahora la generalización cambia el tipo de objetos transversales, esto es, ahora los objetos transversales pueden ser variedades lineales de alguna dimensión, esto es, puntos, rectas, o planos, y los objetos a ser bloqueados serán simplejos de ciertas dimen-

siones inducidos por nuestro conjunto de puntos, que ahora podrá estar en un espacio euclideo de dimensión  $d$  no necesariamente igual a 2. A continuación daré algunas definiciones necesarias.

Un  $m$ -simplejo es un politopo  $m$ -dimensional que es el cierre convexo de sus  $m + 1$  vértices. Por ejemplo, un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo es un segmento de recta y un 2-simplejo un triángulo. Un  $k$ -plano es un subespacio afín de dimensión  $k$ . Por ejemplo, un 0-plano es un punto, un 1-plano es una recta y un 2-plano un plano. Un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  está en *posición general* si para todo subconjunto con  $d + 1$  elementos forma los vértices de un  $d$ -simplejo. En esta sección consideramos el problema de encontrar un conjunto de  $k$ -planos que sea transversal al conjunto de los  $m$ -simplejos de un conjunto de  $n$  puntos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ , evidentemente debemos pedir que  $k < d$  y  $m \leq d$ . Decimos que un conjunto de  $k$ -planos es un conjunto  $m_k$ -bloqueador de  $P$ , si es un conjunto transversal de los  $m$ -simplejos de  $P$ .

En esta tesis también estudiamos los conjuntos  $m_k$ -bloqueadores de puntos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  y daremos unos pasos iniciales hacia dimensiones más altas.

## Capítulo 2

# Resultados anteriores relacionados

En este capítulo daremos algunos resultados anteriores de relevancia para esta tesis. En la primera sección daremos el teorema de Erdős-Szekerez, que sin duda puede ser considerado el primer antecedente de importancia para esta tesis, ya que a partir de este, el estudio sobre los objetos inducidos por familias de puntos comenzó a obtener tanta atención. Después, en la segunda sección hablaremos acerca de un problema sobre bloquear triángulos, el cual, sin duda alguna es el padre de esta tesis, dos capítulos de esta tesis son generalizaciones de este problema mientras que en el capítulo restante se parte de este para obtener varios resultados interesantes. Finalmente, la última sección tratará sobre problemas clásicos de transversales, que tal vez no tienen un impacto fuerte sobre esta tesis, pero al ser una tesis sobre transversales no podríamos dejarlos de lado.

Antes de comenzar, recordemos que se dice que un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en el plano está en *posición general* si no existen tres elementos de  $P$  sobre una misma recta. De igual forma, diremos que  $P$  está en *posición convexa* si  $P$  corresponde al conjunto de vértices de un polígono convexo

de  $n$  vértices. Observemos que posición convexa implica posición general, ya que si hubiera tres elementos en una misma recta, uno de estos puntos estaría en el interior del polígono convexo o sobre una de las aristas, en ambos casos este punto no puede ser vértice de dicho polígono.

## 2.1. El teorema de Erdős-Szekeres

Cuenta la leyenda que Erdős estaba visitando a Esther Klein y Szekeres cuando ella les mostró que en todo conjunto de 5 puntos en el plano en posición general, siempre se podían escoger cuatro de ellos que formaran los vértices de un polígono convexo, los tres, como buenos matemáticos buscan generalizar este resultado, se preguntaron lo siguiente:

**Pregunta 1.** *¿Será cierto que para cualquier número natural  $k$ , existe un número  $n(k)$  tal que para cualquier conjunto con al menos  $n(k)$  puntos del plano en posición general siempre existe un subconjunto de  $k$  puntos en posición convexa?*

Claramente es necesario que los puntos estén en posición general, pues de lo contrario podríamos ponerlos a todos en una recta, impidiendo así que se forme algún polígono convexo.

Szekeres dio una prueba muy elegante de que efectivamente existe  $n(k)$  para cualquier natural  $k$ . Su prueba consistía en aplicar el teorema de Ramsey, el cual estuvo mucho tiempo olvidado y gracias a este resultado comenzó a recobrar vida. Por medio del teorema de Ramsey, Szekeres dio una cota superior para  $n(k)$ , lo cual respondió afirmativamente esta pregunta. Sin embargo, en esta tesis poco hablaremos sobre la teoría de Ramsey, por fortuna, Erdős dio una prueba muy simple que no dependía en ninguna forma del teorema de Ramsey ni de algún otro teorema anterior y que, como pilón, da una cota mejor sobre  $n(k)$ . A continuación demostraremos:

**Teorema 2** (Erdős-Szekeres, [14]). *Para todo número natural  $k$  existe un número  $n(k)$  tal que cualquier conjunto de al menos  $n(k)$  puntos del plano en posición general contiene un subconjunto de  $k$  puntos en posición convexa.*

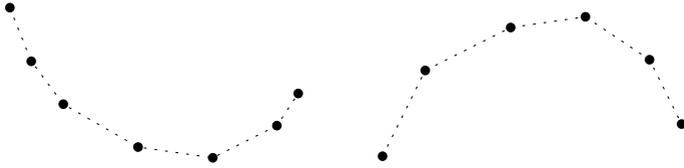


Figura 2.1: 7-cap y 6-cup.

Para poder demostrar esto usaremos una versión restringida de posición convexa que nos dará una cota superior para  $n(k)$ , lo cual es suficiente para probar este teorema. Primero asumiremos que en los conjuntos de puntos que nos referiremos no hay dos elementos con la misma coordenada  $x$ , esta suposición no es descabellada, ya que si hubiera dos puntos con la misma coordenada  $x$ , bastará hacer una rotación pequeña de los ejes coordenados para obtener la propiedad deseada.

Sea  $X$  un conjunto de puntos en posición convexa, diremos que es un *cup*, si el cierre convexo de  $X$  tiene una única arista en la parte de arriba, o dicho de otra forma, si los elementos de  $X$  se encuentran en la gráfica de una función convexa. Ver figura 2.1.

De forma similar, diremos que  $X$  es un *cap* si el cierre convexo tiene una única arista en la parte de abajo, o sea, si se ve como un *gorro*. Ver figura 2.1.

Un  $k$ -cap es un cap formado por  $k$  puntos, de forma similar definimos a un  $\ell$ -cup como un cup con  $\ell$  elementos.

Definimos  $f(k, \ell)$  como el menor número tal que cualquier conjunto de puntos con al menos  $f(k, \ell)$  puntos o tiene un  $k$ -cap o un  $\ell$ -cup. O sea, si un conjunto de  $f(k, \ell)$  puntos en posición general no tiene uno forzosamente tendrá el otro. Por definición, tanto el cap como el cup están posición convexa, de esta forma:

$$n(k) \leq f(k, k)$$

por lo que dar una cota para  $f(k, \ell)$  probaría el teorema 2.

**Lema 1.**

$$f(k, \ell) \leq \binom{k + \ell - 4}{k - 2} + 1$$

*Demostración.* Claramente, cuando  $k \leq 2$  o  $\ell \leq 2$ , la fórmula es cierta; sólo hacen falta 2 puntos para que haya un cap o cup de dos elementos. Procederemos de forma inductiva y sumiremos que  $k, \ell \geq 3$ . Sea  $P$  un conjunto con  $n = f(k - 1, \ell) + f(k, \ell - 1) - 1$  puntos en posición general, ningún par de estos repite coordenada  $x$ . Mostraremos que  $P$  contiene o un  $k$ -cap o un  $\ell$ -cup, esto probaría que  $f(k, \ell) \leq f(k - 1, \ell) + f(k, \ell - 1) - 1$ , lo cual demostraría el lema.

Supongamos que  $P$  no contiene ni un  $k$ -cap ni un  $\ell$ -cup. Tomemos los primeros  $f(k - 1, \ell)$  puntos de  $P$  recorridos de izquierda a derecha, denotemos a este subconjunto por  $X$  y sea  $Y = \emptyset$ . Como en  $X$  no puede haber ningún  $\ell$ -cup, entonces deberá existir un  $(k - 1)$ -cap, sea  $p$  el elemento más a la derecha de este  $(k - 1)$ -cap, entonces, haremos  $Y = Y \cup \{p\}$  y eliminaremos a  $p$  de  $X$  ( $X = X \setminus \{p\}$ ) y agregamos el siguiente elemento de  $P$  en  $X$ . Nuevamente  $|X| = f(k - 1, \ell)$ , por lo que deberá existir un  $(k - 1)$ -cap diferente en  $X$ , nuevamente tomaremos su elemento más a la derecha y lo agregaremos a  $Y$  y lo eliminaremos de  $X$  agregando otro elemento de  $P$  que no esté en  $X \cup Y$ .

Así repetiremos hasta que no quede ningún elemento en  $P$  que podamos agregar a  $X$  para formar un nuevo  $(k - 1)$ -cap, esto parará cuando  $Y$  tenga exactamente  $f(k, \ell - 1)$  puntos. No es posible que  $Y$  contenga un  $k$ -cap, por lo que entonces deberá tener un  $(\ell - 1)$ -cup. Por construcción, este  $(\ell - 1)$ -cup estará formado por puntos que son el final de algún  $(k - 1)$ -cap, en particular, también lo será el elemento más a la izquierda de este  $(\ell - 1)$ -cup, al cual le llamaremos  $p^*$ .

Sea  $x$  el penúltimo elemento del  $(k - 1)$ -cap del que tomamos a  $p^*$  y sea  $y$  el segundo elemento del  $(\ell - 1)$ -cup que exhibimos en el párrafo anterior. Estos tres puntos,  $p^*$ ,  $x$  y  $y$  no pueden estar alineados, por lo que o formarán un 3-cap o un 3-cup. En el primer caso, si agregamos a  $y$  en el  $(k - 1)$ -cap que contiene  $p^*$  y  $x$ , se formará un  $k$ -cap, lo cual sería una contradicción. Sin embargo, en el otro caso, el  $(\ell - 1)$ -cup que contiene  $p^*$  y  $y$  junto con  $x$  forma un  $\ell$ -cup, ver figura 2.2, contradiciendo la suposición

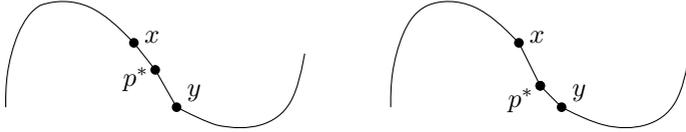


Figura 2.2: lustración de la demostración del teorema de Erdős-Szekeres.

de que no había ninguno de estos en  $P$ . Esto demuestra el lema.  $\square$

Este lema es suficiente para afirmar que el teorema 2 es verdadero. Vale la pena resaltar que existen conjuntos con  $\binom{k+\ell-4}{k-2}$  puntos, en los cuales no existe ni un  $k$ -cap así como tampoco un  $\ell$ -cup, esto demuestra que la cota sobre  $f(k, \ell)$  es exactamente justa.

Con respecto a la pregunta original no se conoce el valor exacto de  $n(k)$ , a pesar de que mucha gente ha trabajado en ello sólo se le ha podido ganar muy poco a la cota que dieron Erdős y Szekeres. Sin embargo, el estudio de esta ha dado pie a una cantidad enorme de problemas interesantes convirtiéndose en un sabor muy popular de la geometría combinatoria.

### 2.1.1. $k$ -hoyos

Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y sea  $H$  un subconjunto de  $k$  puntos de  $P$  en posición convexa. Diremos que  $H$  es un  $k$ -hoyo de  $P$  si el cierre convexo de  $H$  no contiene ningún elemento de  $P$  en su interior. También conocemos a los  $k$ -hoyos como convexo vacíos.

Una de las variantes más conocidas del problema de Erdős-Szekeres es sobre  $k$ -hoyos.

**Pregunta 2.** *¿Será cierto que para cualquier número natural  $k$ , existe un número  $n(k)$  tal que para cualquier conjunto con al menos  $n(k)$  puntos del plano en posición general siempre tiene un  $k$ -hoyo?*



Figura 2.3: Conjunto de Horton con ocho puntos.

Horton [18] sorprendió a la comunidad matemática cuando probó que esto no era posible para toda  $k \geq 7$ , por medio de una familia de conjuntos de puntos que no contienen ningún 7-hoyo. Un elemento con  $n$  puntos de esta familia se le denomina como *conjunto de Horton*. Este conjunto de puntos resulta de mucha utilidad para probar varios resultados de geometría combinatoria, en particular algunos de esta tesis.

Para cualquier entero  $k \geq 1$ , construimos al conjunto de Horton  $H_k$  con  $n = 2^k$  puntos de forma recursiva como se muestra a continuación:

1.  $H_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ .
2.  $H_k$  consiste de dos subconjuntos de puntos  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$  obtenidos de  $H_{k-1}$  como sigue: si  $p = (i, j) \in H_{k-1}$ , entonces  $p' = (2i, j) \in H_{k-1}^+$  y  $p'' = (2i + 1, j + d_k) \in H_{k-1}^-$ . Donde el valor  $d_k$  debe ser escogido lo suficientemente grande de forma que cualquier línea recta  $\ell$  que pase por dos puntos de  $H_{k-1}^+$  deje a todos los puntos de  $H_{k-1}^-$  abajo de esta. Ver figura 2.3.

Esta construcción tan simple de describir tiene muchísimas propiedades de las cuales usaremos unas pocas para probar que no tiene ningún 7-hoyo. Podemos ver que los elementos de  $H_k$  al ser recorridos de izquierda a derecha iremos *zigzagueando*, o más bien, alternando entre elementos de  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$ .

**Lema 2.** *Para todo 4-cap (simétricamente 4-cup) de  $H_k$  existe un punto debajo (sim. arriba) de el.*

*Demostración.* Lo probaremos por inducción en  $k$ . Para esto, tomaremos como caso base cuando  $k = 2$ , en este caso, tendremos 4 puntos que están en *zigzag*, por lo que ni si quiera tendremos un 4-cap (sim. 4-cup).

Entonces supongamos que  $H_k$  tiene un 4-cap  $C$  que no tiene ningún otro elemento de  $H_k$  debajo de el. Los elementos de  $C$  deberán estar repartidos entre los elementos de  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$ , de lo contrario  $C$  sería un 4-cap contenido en  $H_{k-1}^+$  o  $H_{k-1}^-$  que por hipótesis de inducción debería tener un elemento debajo de el.

Ahora,  $C$  tendrá forzosamente dos elementos en  $H_{k-1}^+$ , en caso contrario, si tiene 3 elementos en  $H_{k-1}^-$ , digamos  $x, y$  y  $z$ , no podríamos formar un 4-cap con  $x, y, z$  y cualquier otro elemento en  $H_{k-1}^+$  ya que este elemento estará por arriba de todas las rectas inducidas por  $x, y$  y  $z$ .

Entonces efectivamente, hay al menos dos elementos,  $x', y'$  de  $C$  en  $H_{k-1}^+$ . Sin embargo, entre  $x'$  y  $y'$  deberá existir un elemento de  $H_{k-1}^-$ , pues al recorrer los elementos de  $H_k$  de izquierda a derecha, no podemos llegar de  $x'$  a  $y'$  sin haber pasado por otro elemento de  $H_{k-1}^-$  que estará debajo de la arista  $x'y'$ , y por lo tanto  $C$  tendrá al menos un elemento de  $H_k$  debajo.  $\square$

A partir de este lema podemos demostrar que el conjunto de Horton no contiene ningún 7-hoyo. Podemos probarlo por inducción en  $k$ . Supondremos que para toda  $k' < k$  no hay 7-hoyos en  $H_{k'}$  y suponemos que hay un 7-hoyo  $h$  en  $H_k$ . Por hipótesis de inducción  $h$  no puede estar totalmente contenido en  $H_{k-1}^+$  ni en  $H_{k-1}^-$ , por lo que sus elementos estarán repartidos en  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$ , en uno de los cuales habrá al menos cuatro elementos de  $h$ , estos formarán un 4-cap en caso de estar en  $H_{k-1}^+$  o un

4-cup en caso contrario. En el primer caso implicaría que hay un elemento de  $H_{k-1}^+$  debajo de este 4-cap y por lo tanto deberá estar contenido en el interior del cierre convexo de  $h$  por lo que no podría ser un hoyo. El otro caso es simétrico, probando así que el conjunto de Horton no tiene 7-hoyos.

Para  $k$ -hoyos, con  $k < 7$  se sabe que cualquier conjunto de puntos con al menos 10 puntos contiene un 5-hoyo [17]. La existencia de 6-hoyos permaneció como incógnita por varios años, hasta hace poco que Nicolás [21] demostró que cualquier conjunto de puntos suficientemente grande contiene un 6-hoyo. Posteriormente, Gerken dio otra prueba de este resultado [16].

## 2.2. Bloqueando los triángulos vacíos de conjuntos de puntos

Para hacer la lectura un poco más intuitiva, en esta sección en lugar de hablar de 3-hoyos, hablaremos de triángulos vacíos. Un triángulo vacío de  $P$  es un triángulo que tiene como vértices a los elementos de algún 3-hoyo de  $P$ . Siempre que el contexto lo permita a lo largo de esta tesis nos referiremos indistintamente al triángulo como al polígono en sí (contando su frontera e interior) o al 3-hoyo (que definimos como subconjunto de puntos), por lo que si decimos *el interior de un 3-hoyo*, en realidad nos estaremos refiriendo al interior del triángulo que definen sus tres elementos.

Recordemos que un punto  $p$  *bloquea* un triángulo  $t$  de  $P$  si  $p$  está contenido en el interior de  $t$ . El problema de bloquear los triángulos vacíos de un conjunto de puntos  $P$  consiste en colocar la menor cantidad de puntos al interior del cierre convexo de  $P$  (de ahora en adelante, en toda la tesis lo denotaremos por  $CH(P)$ , por brevedad), de forma que cualquier triángulo vacío de  $P$  esté bloqueado por alguno de estos puntos.

Este problema, como mencionamos al inicio de este capítulo, resulta fundamental para esta tesis pues de este nacen todos los problemas estudiados en esta.

## 2.2 Bloqueando los triángulos vacíos de conjuntos de puntos 19

Sea  $c_P$  el número de vértices de  $CH(P)$ . Katchalski y Meir [28], e independientemente Czyzowicz, Kranakis and Urrutia [9] probaron que:

**Teorema 3.**  *$2n - c_P - 2$  puntos son necesarios y suficientes para bloquear todos los triángulos vacíos de un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general.*

*Demostración.* La parte de necesidad es fácil. Consideremos una triangulación de  $P$ , esta puede ser pensada como un conjunto de triángulos vacíos de  $P$  con interiores ajenos, claramente para bloquear todos estos triángulos necesitaremos un punto distinto por cada uno. Se sabe que el número de triángulos en una triangulación de un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en el plano y en posición general tiene exactamente  $2n - c_P - 2$  triángulos, sorprendentemente la cota resulta ser exacta.

Para probar la suficiencia, dado  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general, construiremos un conjunto  $B$  de  $2n - c_P - 2$  puntos que bloquearan todos los triángulos vacíos de  $P$ . Por ahora asumiremos que no hay dos elementos en  $P$  con la misma coordenada  $y$ . Por cada punto  $p_i \in P$  tracemos la horizontal  $\ell$  que pasa por  $p_i$ . Colocaremos dos puntos  $b_i$  y  $b'_i$  en  $B$  a distancia  $\varepsilon$  de  $p_i$ , el primero estará ligeramente arriba de  $\ell$  y a la izquierda de  $p_i$ , mientras que el segundo estará a la derecha de  $p_i$  y ligeramente abajo de  $\ell$ . Repetiremos esto para cada elemento de  $P$ , y eliminando de  $B$  a todos esos puntos que caigan fuera del cierre convexo de  $P$  pues estos no bloquearán ningún triángulo de  $P$ .

La cantidad de puntos en  $B$  será  $2n - c_P - 2$  ya que por cada elemento del cierre convexo sólo agregaremos un punto a  $B$ , y en el caso del punto más arriba y del punto más abajo no agregaremos ningún punto a  $B$ . Ahora comprobemos que cualquier triángulo vacío está bloqueado. Para esto tomemos cualquier triángulo vacío de  $P$ , de sus tres vértices tomemos el que queda en medio al ordenarlos de arriba hacia abajo, siempre habrá uno en medio pues no reptien coordenada  $y$ . Supongamos que  $p_i$  es este punto. Como  $p_i$  es el punto de en medio, si trazamos una recta horizontal sobre  $p_i$  estaremos cortando el interior del triángulo, entonces si escogimos a  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeña, podemos garantizar que  $b_i$  o  $b'_i$  están dentro de este triángulo y por tanto lo está bloqueando.  $\square$

En el capítulo 4 estudiaremos lo que sucede cuando los objetos a bloquear son  $k$ -hoyos, con  $k > 3$ , mientras que en el capítulo 5 trataremos de bloquear simplejos en general cambiando el tipo de objetos usados para bloquearlos. En el capítulo 3, este resultado nos será de mucha utilidad para probar cotas diferentes.

## 2.3. Otros problemas sobre transversales

Como ya dijimos en la introducción, en la geometría combinatoria se han estudiado los problemas tipo Gallai, que son muy parecidos a los tratados en esta tesis, además, existen varios sabores de problemas que tratan sobre transversales. En esta sección mencionaremos algunos de estos problemas, sin embargo, como no están tan relacionados con el trabajo de esta tesis no profundizaremos tanto en estos temas.

### 2.3.1. El teorema de Helly

Otro de los resultados más representativos en geometría combinatoria es el teorema de Helly. De hecho, existe toda una familia de problemas llamados *problemas tipo Helly*. El teorema de Helly es, evidentemente, un resultado sobre transversales. Este nos da una condición suficiente y necesaria para que exista un punto transversal a una familia de convexos. Anunciamos este teorema a continuación:

**Teorema 4** (Teorema de Helly). *Sea  $C_1, \dots, C_n$  una familia de  $n \geq d + 1$  convexos en  $\mathbb{R}^d$  tales que la intersección de cada  $d + 1$  es distinta del vacío. Entonces la intersección de todos los elementos de la familia también será distinta del vacío.*

### 2.3.2. El teorema del corte del sandwich de jamón

Este teorema pareciera no tener una relación tan directa con la idea de una transversal, sin embargo en el último capítulo usaremos conjuntos transversales que ya no estarán formados por puntos, y bajo ese contexto este teorema resultará relevante. Podemos pensar en un tipo especial de

transversal a la que le llamaremos *corte*. Un corte será un objeto que además de atravesar una familia de objetos geométricos también parte a cada uno de estos objetos en dos o más partes. Por esta última condición de partir los conjuntos, los cortes deberán tener la habilidad de partir, en este caso sólo usaremos hiperplanos, que evidentemente cumplen este requisito.

Para que quede más claro a qué nos referimos es buena idea pensar en cuando cortamos un sandwich de jamón. Tenemos dos objetos principales, el pan y el jamón, un corte bien hecho sobre este sandwich consigue que el pan y jamón se partan en dos partes iguales.

Un corte tal que nos divide en partes iguales a nuestros objetos es lo que se suele llamar *un corte de sandwich de jamón*, o en ocasiones simplemente *bisectriz*, pues si un corte nos parte en dos a un conjunto entonces se dice que lo *bisecta*.

En el capítulo 4 usaremos el siguiente resultado sobre sandwiches de jamón:

**Teorema 5** (Teorema del sandwich de jamón). *Para cualquier familia de  $d$  conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$  siempre existe un hiperplano que bisecta simultáneamente a todos los elementos de la familia.*

Este teorema puede ser demostrado usando diferentes resultados de topología algebraica, este tipo de herramientas suelen ser muy comunes en el estudio de transversales en general. Afortunadamente para esta tesis no usaremos técnicas de este tipo. De hecho, usaremos una versión discreta en la que en lugar de tener  $d$  convexos, tendremos  $d$  conjuntos finitos de puntos.



## Capítulo 3

# Un punto en muchos triángulos

Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general. Una gráfica geométrica sobre  $P$  es una gráfica  $G$  cuyos vértices son los elementos de  $P$  y dos de ellos serán adyacentes si los conecta un segmento de recta. Diremos que  $G$  es plana si no hay aristas que se crucen. Un triángulo de  $G$  consiste de tres puntos  $x, y, z \in P$  tales que  $xy, yz$  y  $zx$  son aristas de  $G$ . Denotaremos este triángulo por  $\Delta(x, y, z)$ . Si además no hay ningún elemento de  $P$  contenido en el interior de  $\Delta(x, y, z)$  diremos que está vacío.

De forma similar, diremos que si  $x, y, z \in P$ , entonces  $\Delta(x, y, z)$  es un triángulo de  $P$ , y que  $xy, yz$  y  $zx$  son aristas de  $\Delta(x, y, z)$ . Si  $\Delta(x, y, z)$  está vacío, diremos que es un 3-hoyo de  $P$ . Un 3-hoyo de  $P$  puede ser pensado como un triángulo vacío de la gráfica geométrica completa  $\mathcal{K}_P$  sobre  $P$ . Entonces  $\Delta(x, y, z)$  sería un triángulo tanto de  $P$  como de una gráfica geométrica.

Un resultado muy conocido en teoría de gráficas dice que para  $n = 6k + 1$  o  $n = 6k + 3$ , las aristas de la gráfica completa  $K_n$  con  $n$  vértices pueden descomponerse en un conjunto de  $\binom{n}{2}/3$  triángulos ajenos por

aristas. A este tipo de descomposición se le conoce como un *sistema de tripletas de Steiner* [34]; también se le refiere al lector al problema de la colegiala de Kirkman [29, 33]. En este capítulo estudiaremos algunas variantes de este problema pero desde un punto de vista geométrico.

Dado  $P$ , un conjunto de puntos, definimos a  $\delta(P)$  como el tamaño del conjunto más grande de triángulos vacíos de  $P$ . Es fácil ver que para puntos en posición convexa con  $n = 6k + 1$  o  $n = 6k + 3$  elementos,  $\delta(P) = \binom{n}{2}/3$ . De hecho, todos los triángulos de  $P$  están vacíos por lo que el problema es equivalente al mismo problema para gráficas abstractas. Por otro lado, probaremos que para algunos conjuntos, como el conjunto de Horton,  $\delta(P)$  es de orden  $O(n \log n)$ .

También estudiaremos el problema de cubrir los triángulos vacíos de conjuntos de puntos con la menor cantidad posible de triangulaciones. Esto es, queremos encontrar un conjunto  $\mathcal{T}(P)$  lo más pequeño posible de triangulaciones de  $P$ , de forma que todo triángulo vacío de  $P$  aparezca en al menos una triangulación en  $\mathcal{T}(P)$ . Probamos que para conjuntos de puntos en posición convexa hacen falta esencialmente  $\binom{n}{3}/4$  triangulaciones y además que es posible cubrirlos con esa cantidad de triangulaciones. También mostraremos que existen conjuntos de puntos tales que se pueden cubrir todos sus triángulos vacíos con a lo más  $O(n \log n)$  triangulaciones.

Finalmente consideraremos el problema de encontrar un punto  $q \notin P$  contenido en el interior de muchos triángulos vacíos y ajenos por aristas de  $P$ . Probamos que para cualquier conjunto de puntos en el plano y en posición general, existe al menos un punto del plano contenido en al menos  $n^2/12$  triángulos ajenos por arista, no todos vacíos. Además, cualquier punto en el plano está contenido en a lo más  $n^2/9$  triángulos ajenos por aristas de  $P$ . Mostraremos que, de hecho, esta cota es justa si  $P$  es el conjunto de vértices de algún polígono regular.

### 3.1. Trabajo preliminar

El estudio de contar y encontrar  $k$ -hoyos en conjunto de puntos ha sido un área activa de investigación desde que Erdős y Szekeres [13, 14] se preguntaron la existencia de éstos.

El estudio de las propiedades de conjuntos de triángulos generados por un conjunto de puntos también ha recibido mucha atención. Sea  $f_k(n)$  el número mínimo de  $k$ -hoyos que tiene un conjunto de puntos. Katchalski y Meir [28] probaron que  $\binom{n}{2} \leq f_3(n) \leq cn^2$  para alguna  $c < 200$ ; ver Purdy [24]. Su cota inferior fue mejorada por Dehnhardt [10] a  $n^2 - 5n + 10 \leq f_3(n)$ . También demostró que  $\binom{n-3}{2} + 6 \leq f_4(n)$ . Bárány y Valtr [5] encontraron conjuntos de puntos con pocos  $k$ -hoyos con  $3 \leq k \leq 6$ . Si el lector se encuentra interesado, puede leer [30] para obtener una perspectiva mejor respecto al panorama actual de esta línea de investigación.

Recientemente se han estudiado algunas variantes cromáticas para el problema de Erdős-Szekeres por Devillers, Hurtado, Károly y Seara [11]. Ellos probaron, entre varios resultados, que cualquier conjunto bicromático de puntos contiene al menos  $(n/4) - 2$  triángulos monocromáticos compatibles vacíos. Aichholzer et al. [1] probaron que cualquier conjunto bicromático de puntos contiene  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos. Posteriormente Pach y Tóth mejoraron esta cota a  $\Omega(n^{4/3})$  [22].

### 3.2. Conjuntos de triángulos vacíos ajenos por aristas en conjuntos de puntos

Sea  $P$  un conjunto de puntos en el plano, y sea  $\delta(P)$  el tamaño del conjunto más grande de triángulos vacíos y ajenos por aristas de la gráfica completa  $\mathcal{K}_P$  sobre  $P$ . En esta sección estudiamos el problema de ver qué tan pequeño puede llegar a ser  $\delta(P)$ .

Probaremos que si  $P$  es el conjunto de Horton, entonces  $\delta(P)$  es del orden de  $O(n \log n)$ . Por el resultado de Kirkman podemos concluir que si  $P$  está en posición convexa y  $n = 6k + 1$  y  $n = 6k + 3$ , entonces  $\delta(P) = \binom{n}{3}/3$ .

Recordemos el conjunto de Horton que describimos en el capítulo anterior. Horton [18] construyó, de forma recursiva, una familia de conjuntos de puntos  $H_k$  de tamaño  $2^k$  de la siguiente forma:

1.  $H_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ .

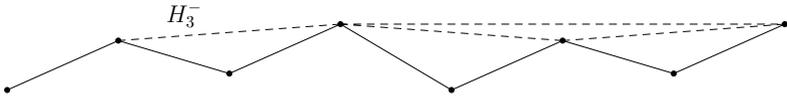
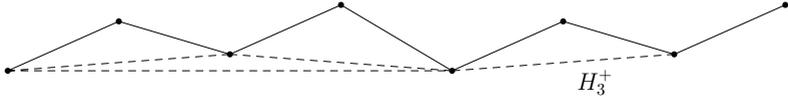


Figura 3.1:  $H_4$ . Se muestran las aristas de  $H_3^+$  (respectivamente  $H_3^-$ ) visibles por abajo (respectivamente visibles por arriba).

2.  $H_k$  consiste de dos subconjuntos de puntos  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$  obtenidos de  $H_{k-1}$  como sigue: si  $p = (i, j) \in H_{k-1}$ , entonces  $p' = (2i, j) \in H_{k-1}^-$  y  $p'' = (2i + 1, j + d_k) \in H_{k-1}^+$ . Donde el valor  $d_k$  debe ser escogido lo suficientemente grande para de forma que cualquier línea recta  $\ell$  que pase por dos puntos de  $H_{k-1}^+$  deje a todos los puntos de  $H_{k-1}^-$  abajo de esta. Ver figura 3.1.

Decimos que un segmento de recta  $pq$  que une dos elementos  $p$  y  $q$  de  $H_k$  es *visible por debajo* (respectivamente, *por arriba*) si no hay ningún punto de  $H_k$  debajo de  $pq$  (respectivamente, arriba de); esto es, que no haya ningún elemento  $r \in H_k$  tal que la línea vertical que pasa por  $r$  intersekte a  $pq$  arriba (respectivamente, debajo) de  $r$ . Sea  $B(H_k)$  el conjunto de segmentos de recta visibles por abajo de  $H_k$ . Más adelante haremos uso del siguiente resultado de Bárány y Valtar [5], ver también [2]:

**Lema 3.**  $|B(H_k)| = 2^{k+1} - (k + 2)$ .

En [2] demuestran este resultado usando el teorema siguiente:

**Teorema 6.** *Para toda  $n = 2^k, k \geq 1$ , existe una gráfica geométrica sobre  $H_k$  con  $\binom{n}{2} - O(n \log n)$  aristas sin triángulos vacíos.*

Dicho de otra forma, siempre es posible quitarle  $O(n \log n)$  aristas a la gráfica geométrica completa sobre  $H_k$  de modo que la gráfica resultante no tenga triángulos vacíos. La idea principal detrás de su demostración consiste en que al quitar todas las aristas visibles por abajo de  $H_{k-1}^+$  y las visibles por arriba de  $H_{k-1}^-$ , no quedará ningún triángulo vacío que tenga vértices tanto en  $H_{k-1}^+$  como en  $H_{k-1}^-$ . Se repite el argumento de forma recursiva en  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$ .

Podemos observar que si una gráfica geométrica tiene  $k$  triángulos vacíos ajenos por aristas, entonces necesitaremos quitar al menos  $k$  aristas para eliminar todos los triángulos vacíos de dicha gráfica. De esto se sigue que la gráfica geométrica completa tiene a lo más  $O(n \log n)$  triángulos vacíos ajenos por aristas. Por lo que hemos demostrado que:

**Teorema 7.** *Cualquier conjunto de triángulos vacíos ajenos por aristas de  $H_k$  contiene a lo más  $O(n \log n)$  elementos.*

Claramente, para cualquier conjunto de puntos  $P$ , el tamaño del conjunto más grande de triángulos vacíos ajenos por aristas es al menos lineal. Proponemos la conjetura siguiente:

**Conjetura 1.** *Cualquier conjunto de puntos  $P$  en posición general siempre contiene un conjunto de al menos  $O(n \log n)$  triángulos vacíos ajenos por aristas.*

### 3.3. Cubriendo los triángulos de un conjunto de puntos con triangulaciones

Diremos que un triángulo vacío  $t$  de un conjunto de puntos es cubierto por una triangulación  $T$  de  $P$  si una de las caras de  $T$  es  $t$ . En esta sección estudiamos el siguiente problema:

**Problema 3.** *¿Cuántas triangulaciones de un conjunto de puntos se necesitan para cubrir todos los triángulos vacíos de  $P$ ?*

Este problema, el cual es interesante por si mismo, nos ayudará a encontrar conjuntos de puntos para los cuales  $\delta(P)$  será grande. Empezaremos estudiando el problema 3 para conjuntos de puntos en posición convexa.

### 3.3.1. Puntos en posición convexa

Para esta sección asumiremos que todos los conjuntos de puntos están en posición convexa y que sus elementos están etiquetados  $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  en el orden correspondiente a recorrer la frontera de  $CH(P)$  en el sentido opuesto de las manecillas del reloj. Como cualquier triangulación de un conjunto de puntos en posición convexa es equivalente a una de un polígono regular, nos enfocaremos únicamente en conjuntos de puntos cuyos elementos correspondan a los vértices de un  $n$ -ágono regular. Entonces supongamos que  $P$  es el conjunto de vértices de un  $n$ -ágono regular y  $c$  el centro del círculo que lo circunscribe.

Un triángulo es *agudo* si todos sus ángulos son menores que  $\pi/2$ . La observación siguiente se puede probar como ejercicio de geometría elemental:

**Observación 1.** *Un triángulo  $t$  contiene el centro de su circuncírculo si y sólo si  $t$  es agudo.*

Claramente, si los vértices de  $t$  están  $P$ , entonces el centro del circuncírculo de  $t$  es  $c$ . El resultado siguiente es relativamente bien conocido:

**Lema 4.** *Sea  $P$  el conjunto de vértices de un polígono regular  $Q$  y  $c$  el centro de  $Q$ . Entonces:*

- *Si  $n$  es par,  $c$  está contenido en el interior de  $\frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} - \frac{n(n-2)}{2} \right]$  triángulos agudos de  $P$ .*
- *Si  $n$  es impar,  $c$  está contenido en el interior de  $\frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \right]$  triángulos agudos de  $P$ .*

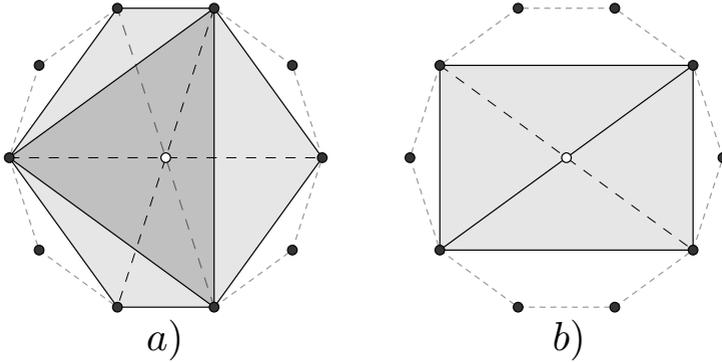


Figura 3.2: A la izquierda se muestra la construcción de  $t_4(i, j, k)$ . A la derecha se muestra dos triángulos que comparten una arista que contiene a  $c$  a la mitad.

Sea  $f(n) = \frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} - \frac{n(n-2)}{2} \right]$  cuando  $n$  es par y  $f(n) = \frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \right]$  si es impar. Probaremos que:

**Teorema 8.**  $f(n)$  triangulaciones son suficientes y siempre necesarias para cubrir todos los triángulos inducidos por los vértices de un polígono regular  $P$  con  $n$  vértices.

*Demostración.* Primero supongamos que  $n$  es par. Por cada vértice  $p_i$  de  $P$ , sea  $\alpha(p_i) = p_{i+\frac{n}{2}}$  (sumando en módulo  $n$ ) el vértice antipodal del  $p_i$  en  $P$ . Supongamos que el triángulo  $\Delta(p_i, p_j, p_k)$ , con  $i < j < k$ , es agudo y por lo tanto contiene a  $c$ . Sea  $t_4(i, j, k)$  el conjunto siguiente de cuatro triángulos:

$$t_4(i, j, k) = \{ \Delta(p_i, p_j, p_k), \Delta(\alpha(p_i), p_j, p_k), \Delta(p_i, \alpha(p_j), p_k), \Delta(p_i, p_j, \alpha(p_k)) \}$$

ver figura 3.2 izquierda.

Es fácil ver que todos los triángulos de  $P$ , excepto aquellos que son rectos, están contenidos en algún  $t_4(i, j, k)$ , donde  $i, j, k$  corresponden a un

triángulo  $\triangle(p_i, p_j, p_k)$  que es agudo. De esta forma, por cada  $t_4(i, j, k)$  de éstos, podemos completarlos a una triangulación, de forma que todos los triángulos que no son rectos aparecerán en al menos una de estas triangulaciones. Por lo que tendremos una triangulación por cada triángulo agudo.<sup>1</sup>

Por otro lado, si un triángulo es recto entonces contiene una arista (la hipotenusa) que contiene a  $c$ , la cual conecta a dos vértices antipodales de  $P$ , ver figura 3.2 derecha. Entonces tenemos exactamente:

$$\frac{n}{2} \times (n - 2)$$

triángulos rectos, y podemos encontrar

$$\frac{n(n - 2)}{4}$$

triangulaciones de  $P$  que cubran a todos estos triángulos, poniendo dos de estos triángulos que sean ajenos y completando el resto por cada una.

Entonces hemos encontrado un conjunto de triangulaciones de  $P$  donde cada una cubre o un triángulo agudo o dos rectos, se sigue que

$$\frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} - \frac{n(n - 2)}{2} \right] + \frac{n(n - 2)}{4} = \frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} + \frac{n(n - 2)}{2} \right]$$

triangulaciones son suficientes para cubrir a todos los triángulos de  $P$ . Este número resulta ser necesario ya que no podemos poner a dos triángulos agudos en una misma triangulación ya que se intersectan dado que ambos contienen a  $c$ , por razones similares, no podremos poner más de 2 triángulos rectos en una misma triangulación. Nuestro resultado se sigue si  $n$  es par.

Podemos argumentar de forma similar cuando  $n$  es impar, la diferencia es que ya no tendremos triángulos rectos y hay que definir con más detalle los  $t_4$ 's pues ya no existen los vértices antipodales.  $\square$

---

<sup>1</sup>De hecho, con estas ideas se puede probar el lema 4, pues cada triángulo no-recto aparece en exactamente una  $t_4(i, j, k)$  definida por un triángulo agudo por lo que el número de  $t_4$ 's definidos por triángulos agudos es la cuarta parte del número de triángulos no-rectos.

Esto quiere decir que el número de triangulaciones necesarias para cubrir los triángulos de un conjunto de puntos en posición convexa es asintóticamente  $\binom{n}{3}/4$ . El resultado siguiente se sigue trivialmente:

**Corolario 1.** *Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa y  $p$  algún punto en el interior de  $CH(P)$ . Entonces  $p$  está en el interior de a lo más  $\text{frac}\binom{n}{3}4 + O(n^2)$  triángulos de  $P$ .*

### 3.3.2. Cubriendo los triángulos vacíos del conjunto de Horton

Ahora mostraremos que se pueden cubrir los triángulos vacíos de  $H_k$  con  $O(n \log n)$  triangulaciones y que la cota es justa; con  $n = 2^k$ .

Considera una arista  $e$  de  $H_k$  que sea visible por debajo y  $\ell$  una vertical que intersecta a  $e$  en un punto  $q$ . La *profundidad hacia abajo* de  $e$  es el número de aristas de  $H_k$  visibles por debajo que intersectan  $\ell$  por debajo de  $q$ . Es fácil ver que la profundidad de una arista es a lo más  $k - 1$  y que la cota es justa, ver figura 3.3. Mas aún, es fácil ver que la unión de todas las aristas con la misma profundidad es un camino monótono,

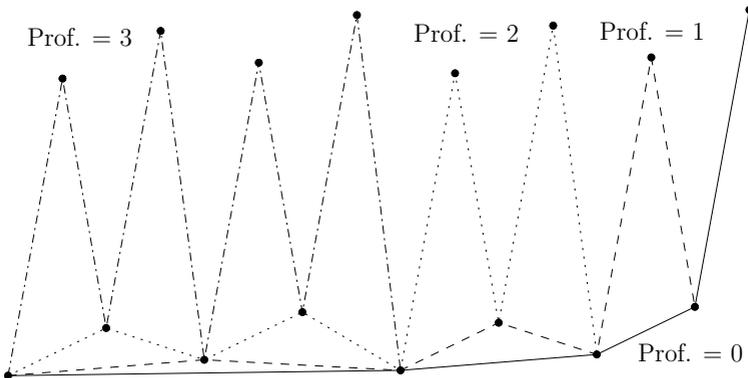


Figura 3.3: Niveles de profundidad de  $H_4$ .

al camino definido por las aristas con profundidad  $d$  le llamaremos el *nivel  $d$* . Análogamente podemos definir la *profundidad hacia arriba*. Ahora podemos probar:

**Teorema 9.**  $\Theta(n \log n)$  triangulaciones son suficientes y necesarias para cubrir todos los triángulos vacíos de  $H_k$ , con  $n = 2^k$ .

*Demostración.* Consideremos los conjuntos  $H_k^+$  y  $H_k^-$ . Primero mostraremos que es posible cubrir a todos los triángulos vacíos con dos vértices en  $H_k^+$  y uno en  $H_k^-$  con  $O(n \log n)$  triangulaciones. Observemos que cualquier triángulo vacío de esta forma, forzosamente estará formado por una arista visible por debajo de  $H_k^+$  y un elemento de  $H_k^-$ .

Etiquetamos los elementos de  $H_k^-$  de izquierda a derecha como  $p_0, \dots, p_{\frac{n}{2}-1}$ . Por cada  $0 \leq d \leq k-2$ , procedemos como sigue: por cada  $p_j \in H_k^-$ , lo conectaremos con los extremos de cada arista de  $H_k^+$  que tenga profundidad hacia abajo  $d$ . Esto nos da un conjunto  $ID_{d,j}^+$  de triángulos ajenos. Es fácil ver que si  $(d, j) \neq (d', j')$ , entonces  $ID_{d,j}^+ \cap ID_{d',j'}^+ = \emptyset$ .

Es fácil notar que la unión de estos conjuntos cubre todos los triángulos vacíos con dos vértices en  $H_{k-1}^+$  y uno en  $H_{k-1}^-$ . De forma similar, podemos cubrir todos los triángulos con dos vértices en  $H_{k-1}^-$  y uno en  $H_{k-1}^+$  con los conjuntos  $ID_{d,j}^-$ , construídos simétricamente.

Sea  $\ell_1$  la recta que conecta el punto más a la izquierda en  $H_{k-1}^+$  con el más a la derecha de  $H_{k-1}^-$ , y sea  $\ell_2$  la que conecta el más a la izquierda en  $H_{k-1}^-$  con el más a la derecha de  $H_{k-1}^+$ . Sea  $q$  un punto ligeramente arriba de la intersección de  $\ell_1$  y  $\ell_2$ .

Es claro que en cada  $ID_{d,j}^+$  existe exactamente un triángulo que contiene a  $q$ . Esto implica que  $q$  está contenido en  $\Omega(n \log n)$  triángulos vacíos y por lo tanto se necesita al menos esta cantidad de triangulaciones para cubrir a todos los triángulos vacíos de  $H_k$ .

Ahora mostraremos que  $O(n \log n)$  triangulaciones también son suficientes. Consideremos cada conjunto  $ID_{d,j}^+$  y  $ID_{d,j}^-$ , y completémoslo a una triangulación de forma arbitraria. Esto nos da un conjunto de  $O(n \log n)$  triangulaciones que cubren a todos los triángulos con vértices tanto en  $H_{k-1}^+$  como en  $H_{k-1}^-$ .

Tomemos un conjunto  $\mathcal{T}_{k-1}^+ = \{T_1^+, \dots, T_m^+\}$  de triangulaciones de  $H_{k-1}^+$  que cubran todos sus triángulos vacíos. Por construcción tenemos que  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$  son una copia trasladada del otro, por lo que existirá un conjunto  $\mathcal{T}_{k-1}^- = \{T_1^-, \dots, T_m^-\}$  de triangulaciones de  $H_{k-1}^-$  que cubren a todos los triángulos vacíos de  $H_{k-1}^-$ , donde  $T_i^+$  es isomorfa a  $T_i^-$ . Ahora por cada  $i$  podemos formar una triangulación  $T_i$  de  $H_k$  que contenga  $T_i^+$  y  $T_i^-$  simultáneamente, pues los cierres convexos de  $H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$  son ajenos.

Entonces podemos construir de forma recursiva un conjunto de triangulaciones de  $H_k$  que cubran a todos sus triángulos vacíos usando  $T(n)$  triangulaciones, donde  $T(n)$  se escribiría así:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

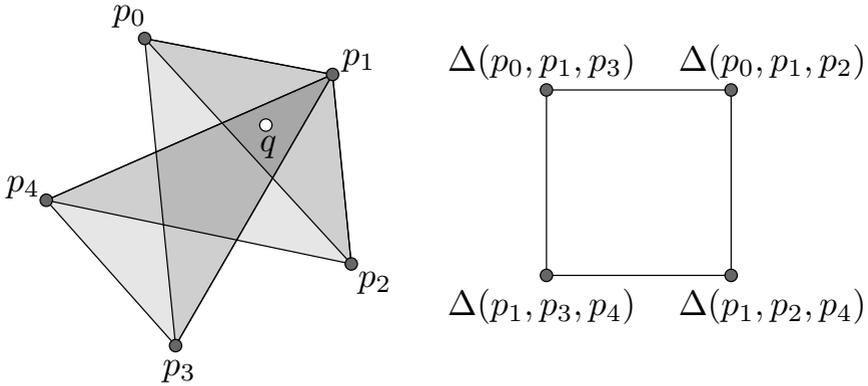
Esto nos da una cota superior por lo que nuestro resultado se sigue.  $\square$

Se puede probar trivialmente que  $\Omega(n)$  triangulaciones son necesarias para cubrir todos los triángulos vacíos de cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición general, pues todo conjunto de  $n$  puntos tiene  $\Omega(n^2)$  triángulos vacíos y toda triangulación cubre  $O(n)$  triángulos. Creemos que siempre se necesitan mucho más triangulaciones. Concluimos con la conjetura siguiente.

**Conjetura 2.** *Al menos  $\Omega(n \log n)$  triangulaciones son necesarias para cubrir todos los triángulos vacíos de un conjunto de  $n$  puntos en posición general.*

### 3.4. Un punto en muchos triángulos ajenos por aristas

Boros y Füredi [6] resolvieron el problema de un punto en muchos triángulos con el teorema siguiente:

Figura 3.4:  $G(P, q)$ .

**Teorema 10.** *Para cualquier conjunto  $P$  de  $n$  puntos en posición general, existe un punto en el interior de  $CH(P)$  contenido en  $\frac{2}{9}\binom{n}{3} + O(n^2)$  triángulos de  $P$ . La cota es justa.*

En este capítulo estudiaremos una variante a este problema, en la cual nos interesamos por encontrar un punto en muchos triángulos ajenos por aristas, cuando decimos que un conjunto de triángulos son ajenos por aristas quiere decir que no hay dos triángulos que compartan una misma arista. Consideramos los siguiente:

**Problema 4.** *Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y  $q \notin P$  otro punto del plano. ¿Cuál es el máximo número de triángulos ajenos por aristas de  $P$  que contienen a  $q$ ?*

Comenzaremos dando algunos resultados preliminares y después atacaremos este problema para conjuntos de puntos en posición general y para los vértices de un polígono regular.

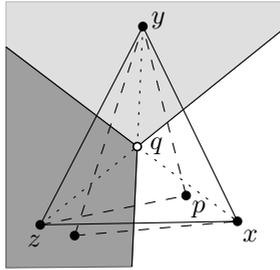


Figura 3.5: Ilustración del lema 5.

Dado un conjunto de puntos  $P$ , y un punto  $q \notin P$ , sea  $\mathcal{T}(P, q)$ , o  $\mathcal{T}(q)$  cuando se sobreentiende quién es  $P$ , el conjunto de triángulos de  $P$  que contienen  $q$ . Definimos la gráfica  $G(P, q)$  (o  $G(q)$ ), como aquella cuyo conjunto de vértices es  $\mathcal{T}(q)$  y dos triángulos (vértices) son adyacentes si comparten una arista, figura 3.4. Asumiremos que  $q$  no está contenido en ninguno de los segmentos definidos por pares de puntos de  $P$ . Probaremos que:

**Lema 5.** *El grado de cada vértice en  $G(P, q)$  es exactamente  $n - 3$ .*

*Demostración.* Sea  $\Delta(x, y, z)$  un triángulo que contiene a  $q$  en su interior. Sea  $p$  cualquier punto en  $P \setminus \{x, y, z\}$ . Entonces exactamente uno de los triángulos  $\Delta(x, y, p)$ ,  $\Delta(x, p, z)$  o  $\Delta(p, y, z)$  contiene  $q$ , ver figura 3.5. Esto es, exactamente un triángulo de estos pertenece a  $\mathcal{T}(q)$ . Por lo tanto,  $\Delta(x, y, z)$  será adyacente a exactamente  $n - 3$  triángulos; uno por cada uno de los elementos de  $P \setminus \{x, y, z\}$ .  $\square$

Notemos que encontrar conjuntos grandes de triángulos ajenos por aristas que contengan a  $q$  es equivalente a encontrar conjuntos independientes grandes en  $G(P, q)$ . Sea  $\tau(P, q)$  (o  $\tau(q)$ ) el mayor número de triángulos ajenos por aristas que contienen a  $q$ . Probaremos que:

**Lema 6.**

$$\frac{|\mathcal{T}(q)|}{n-2} \leq \tau(q) \leq \frac{3|\mathcal{T}(q)|}{n}$$

*Demostración.* Se sigue del lema 5 que el tamaño del conjunto independiente más grande de  $G(P, q)$  es al menos  $\frac{|\mathcal{T}(q)|}{n-2}$ . Para probar la cota superior, basta con observar que si algún vértice de  $G(P, q)$  no está en un conjunto independiente  $I$  de  $G(P, q)$ , entonces es adyacente a lo más a tres vértices en el, uno por cada una de las aristas del triángulo correspondiente al vértice. Entonces, contando el número de aristas que conectan un vértice en  $I$  con algún otro en  $\mathcal{T}(q) \setminus I$ , obtenemos:

$$(n-3)|I| \leq 3|\mathcal{T}(q) \setminus I|.$$

El resultado se sigue.  $\square$

A partir del teorema 10 y el lema 6 es fácil ver que cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición genral, existe algún punto  $q$  tal que:

$$\frac{n^2}{27} + O(n) \approx \frac{\frac{2}{9}\binom{n}{3} + O(n^2)}{n-2} \leq \tau(q) \leq \frac{3(\frac{2}{9}\binom{n}{3} + O(n^2))}{n} \approx \frac{n^2}{9} + O(n)$$

Sin embargo, podemos conseguir un resultado aún mejor. Para esto, necesitaremos primero el lema siguiente:

**Lema 7.** *Existen tres rectas que pasan por  $q$  y parten  $P$  en seis subconjuntos  $P_0, P_1, \dots, P_5$  en el sentido opuesto a las manecillas del reloj alrededor de  $q$ , con  $|P_0| = |P_2| = |P_4|$ , permitiendo que  $|P_i| = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $l_0$  una recta que pasa por  $q$  tal que uno de los semiplanos que acota, digamos el que está arriba, contiene un número par de elementos de  $P$ . Tomaremos otras dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  que pasaran por  $q$  y definirán los conjuntos  $P_i \subset P$ , con  $0 \leq i < 6$ , como se puede ver en la figura 3.6a, donde  $|P_0 \cup P_1 \cup P_2|$  es par. Sea  $l^*$  una recta que pasa por  $q$  y parte en dos partes iguales el conjunto  $P_0 \cup P_1 \cup P_2$ .

Primero escojamos  $l_1$  y  $l_2$  de forma que  $|P_0| = |P_2| = |P_3| = |P_5| = 0$ . A partir de su posición inicial, rotemos  $l_1$  en el sentido opuesto a las

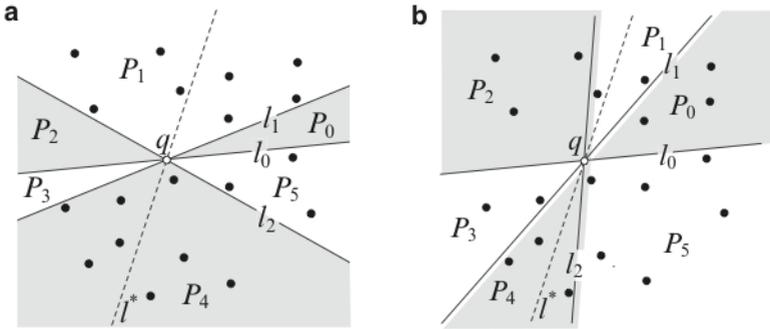


Figura 3.6: Particiones de  $P$ .

manecillas del reloj y  $l_2$  en el sentido de las manecillas del reloj, de forma que  $P_0$  y  $P_2$  siempre tengan la misma cantidad de puntos hasta que ambos alcancen al mismo tiempo la posición de  $l^*$ , y la frontera de  $P_4$  siempre contenga no más de un elemento de  $P$ .

Inicialmente,  $|P_4| \geq 0 = |P_0|$ . Por otro lado, cuando  $l_1$  y  $l_2$  alcancen la posición de  $l^*$  tendremos que  $|P_4| = 0 \leq |P_0|$ . Entonces, en algún momento al rotar  $l_1$  y  $l_2$  tendremos que  $|P_0| = |P_2| = |P_4|$ , ver figura 3.6b.  $\square$

Con esto, podemos demostrar que:

**Proposición 1.** *Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general. Entonces para cualquier punto  $q \notin P$ ,  $\tau(q) \leq n^2/9$ .*

*Demostración.* Sea  $q \notin P$  cualquier punto en el plano. Si  $q$  estuviera en una recta que pase por dos elementos de  $P$ , entonces podríamos moverlo un poco y estará contenido en más triángulos ajenos por arista. Por esto, asumiremos que  $q$  no está alineado con dos elementos de  $P$ .

Sean  $P_0, P_1, \dots, P_5$  como en el lema 7. Denotemos con  $n_i$  a la cardinalidad de  $P_i$ , tendremos  $n_0 = n_2 = n_4$ , tomaremos la suma de estos índices en módulo 6. Sea  $\mathcal{T}$  un conjunto de triángulos ajenos por aristas de  $P$ ,

tales que contienen a  $q$  en su interior. Dados tres enteros  $i, j, k$ , denotaremos por  $\mathcal{T}_{ijk}$  al subconjunto de  $\mathcal{T}$  tales que tienen un vértice en  $P_i$  otro en  $P_j$  y el otro en  $P_k$ , y denotemos por  $t_{ijk}$  a la cardinalidad de  $\mathcal{T}_{ijk}$ , ver figura 3.7.

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{ii(i+3)} \right] \cup \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{i(i+1)(i+3)} \right] \cup \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{i(i+1)(i+4)} \right] \\ &\quad \cup \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{i(i+2)(i+4)} \right] \\ &= \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{ii(i+3)} \right] \cup \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{i(i+2)(i+5)} \right] \cup \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{i(i+2)(i+3)} \right] \\ &\quad \cup \left[ \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{T}_{i(i+2)(i+4)} \right]. \end{aligned}$$

Para los enteros  $i, j$ , denotemos con  $E_{ij}$  al conjunto de todos los segmentos que conectan un elemento de  $P_i$  con uno de  $P_j$ . Entonces por cada entero  $i$ ,  $|E_{i(i+2)}| = n_i n_{i+2}$  y  $\mathcal{T}_{i(i+2)(i+3)} \cup \mathcal{T}_{i(i+2)(i+4)} \cup \mathcal{T}_{i(i+2)(i+5)}$  es el conjunto de elementos de  $\mathcal{T}$  que tienen un lado que pertenece a  $E_{i(i+2)}$ . Entonces

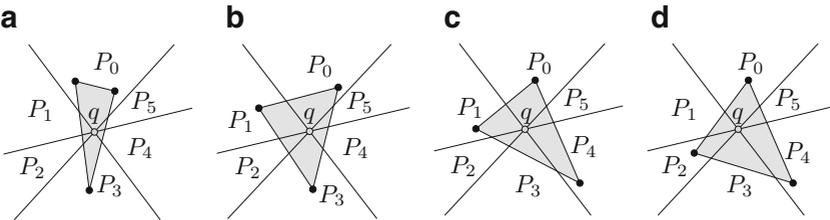


Figura 3.7: Triángulos en los  $\mathcal{T}_{ijk}$ 's.

tenemos:

$$f(i) \equiv t_{i(i+2)(i+3)} + t_{i(i+2)(i+4)} + t_{i(i+2)(i+5)} \leq n_i n_{i+2} \quad (3.1)$$

por cada  $i$ . De forma análoga, considerando la cardinalidad de  $E_{i(i+3)}$  obtenemos

$$g(i) \equiv 2t_{ii(i+3)} + t_{i(i+1)(i+3)} + t_{i(i+2)(i+3)} + 2t_{i(i+3)(i+3)} + t_{i(i+3)(i+4)} + t_{i(i+3)(i+5)} \leq n_i n_{i+3} \quad (3.2)$$

para cada  $i$ . Por las ecuaciones (3.1) y (3.2) tenemos:

$$\sum_{i=0}^5 f(i) + 2 \sum_{i=0}^2 g(i) \leq \sum_{i=0}^5 n_i n_{i+2} + 2 \sum_{i=0}^2 n_i n_{i+3} \quad (3.3)$$

Como  $g(i) = (t_{i(i+2)(i+2)} + t_{j(j+2)(j+3)}) + (t_{j'(j'+2)(j'+5)} + t_{j''(j''+2)(j''+5)}) + 2(t_{ii(i+3)} + t_{jj(j+3)})$ , donde  $j = i + 3$ ,  $j' = i + 1$ ,  $j'' = j' + 3$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 f(i) + 2 \sum_{i=0}^2 g(i) &= \sum_{i=0}^5 (t_{i(i+2)(i+3)} + t_{i(i+2)(i+4)} + t_{i(i+2)(i+5)}) \\ &\quad + 2 \sum_{i=0}^5 (t_{i(i+2)(i+3)} + t_{i(i+2)(i+5)}) + 4 \sum_{i=0}^5 t_{ii(i+3)} \\ &= 3|\mathcal{T}| + \sum_{i=0}^5 t_{ii(i+3)} \geq 3|\mathcal{T}| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por otro lado, si denotamos el lado derecho de (3.3) por  $S$ ,

$$\begin{aligned} S &= (n_0 n_2 + n_2 n_4 + n_4 n_0) + (n_1 n_3 + n_3 n_5 + n_5 n_1) \\ &\quad + 2(n_0 n_3 + n_2 n_5 + n_4 n_1) \\ &= \frac{l^2}{3} + \frac{2lm}{3} + (n_1 n_3 + n_3 n_5 + n_5 n_1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

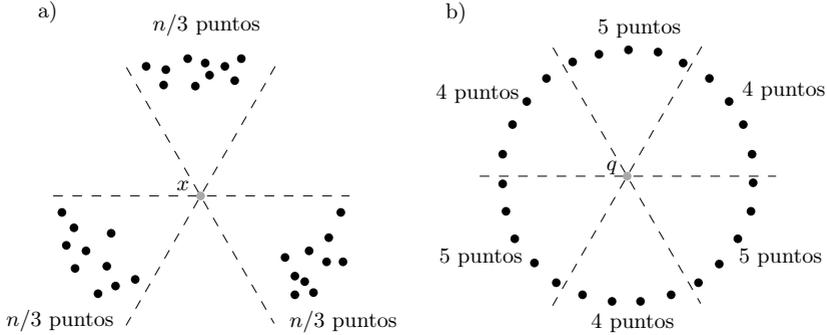


Figura 3.8: Ejemplos que podrían alcanzar la igualdad en la proposición 1.

donde  $l = n_0 + n_2 + n_4$  (recordemos que  $n_0 = n_2 = n_4$ ) y  $m = n_1 + n_3 + n_5$ . Dado que  $n_1 n_3 + n_3 n_5 + n_5 n_1 = [m^2 - (n_1^2 + n_3^2 + n_5^2)]/2$  y dado que  $n_1^2 + n_3^2 + n_5^2 \geq m^2/3$ . La igualdad se alcanza únicamente cuando  $n_1 = n_3 = n_5$ , tenemos que  $n_1 n_3 + n_3 n_5 + n_5 n_1 \leq m^2/3$ . De esto y (3.5) se sigue que

$$S \leq \frac{l^2}{3} + \frac{2lm}{3} + \frac{m^2}{3} = \frac{(l+m)^2}{3} = \frac{n^2}{3} \quad (3.6)$$

Combinando (3.3), (3.4) y (3.6), podemos concluir que  $|\mathcal{T}| \leq n^2/9$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Para alcanzar la igualdad, es necesario que  $n_0 = n_2 = n_4$  y  $n_1 = n_3 = n_5$  para alguna partición, figura 3.8.

Para dar una cota inferior para el valor del  $\tau(q)$  máximo en un  $P$  dado, usaremos el lema siguiente que demostró Ceder [8] y que aplicó Bukh [7]:

**Lema 8.** *Existen tres rectas que se intersectan en un punto  $q$  y parten el plano en seis regiones tales que cada una contiene al menos  $n/6-1$  elementos de  $P$ .*

Con esto podemos probar que:

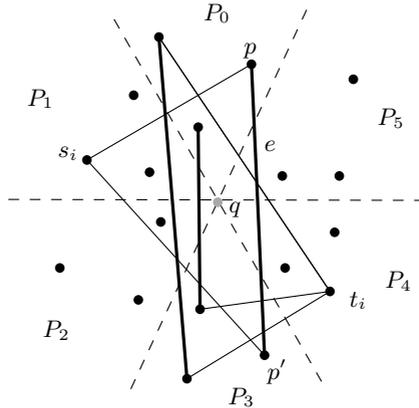


Figura 3.9: Emparejamiento  $M_i$  (líneas gruesas) y triángulos usando las aristas de  $M_i$ .

**Proposición 2.** *Sea  $n$  un entero positivo y  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general. Entonces existe un punto  $q \notin P$  tal que  $\tau(q) \geq \frac{n^2}{12}$ .*

*Demostración.* Sea  $q$  como en el lema 8. Asumimos que  $q$  no está alineado con dos elementos de  $P$ . Sea  $m = \lceil n/6 \rceil - 1$  y denotemos por  $D_0, D_1, \dots, D_5$  a las 6 regiones alrededor de  $q$  en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. Por cada  $0 \leq i \leq 5$ , sea  $P_i$  el conjunto  $P \cap D_i$  con  $|P_i| = m$ , ver figura 3.9.

Consideremos la gráfica bipartita completa geométrica con vértices  $P_0 \cup P_3$  y aristas  $E = \{pp' | p \in P_0, p' \in P_3\}$ . Entonces  $E$  puede ser descompuesto en  $m$  conjuntos  $M_i$ ,  $0 \leq i \leq m - 1$ , tales que cada  $M_i$  es un emparejamiento perfecto, *i.e.*,  $M_i$  consiste de  $m$  aristas independientes. Sea  $P_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  y  $P_4 = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ . Por cada  $i$  y cada arista  $e = pp' \in M_i$ , donde  $p \in P_1$  y  $p' \in P_3$ , sea  $u_i = s_i$  o  $u_i = t_i$  dependiendo si  $pp' \cap D_1 = \emptyset$  o  $pp' \cap D_4 = \emptyset$ , respectivamente. Entonces  $\triangle(p, p', u_i)$  contiene a  $q$  en su interior. Observemos que los  $m$  triángulos en  $\mathcal{T}_i = \{\triangle(p, p', u_i) | e \in M_i\}$  son ajenos por aristas y todos los  $m^2$

triángulos en  $\mathcal{T}_{03} = \bigcup_{i=0}^m \mathcal{T}_i$  también son ajenos por aristas.

Definamos análogamente los conjuntos  $\mathcal{T}_{14}$  y  $\mathcal{T}_{25}$ , esto es, los elementos de  $\mathcal{T}_{14}$  son triángulos con un vértice en  $P_1$ , otro en  $P_4$  y el otro en  $P_2 \cup P_5$ , mientras que los elementos de  $\mathcal{T}_{25}$  son triángulos con un vértice en  $P_2$ , otro en  $P_5$  y el otro en  $P_3 \cup P_0$ . Se puede ver todos los  $3m^2 = n^2/12 - O(n)$  triángulos en  $\mathcal{T}_{03}$ ,  $\mathcal{T}_{14}$  y  $\mathcal{T}_{25}$  son ajenos por aristas.  $\square$

Así, podemos concluir con el teorema siguiente que se sigue de las proposiciones 1 y 2.

**Teorema 11.** *Para cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición general existe un punto  $q \notin P$ , tal que:*

$$\frac{n^2}{12} \leq \tau(q) \leq \frac{n^2}{9}$$

De hecho, para cualquier  $q$ ,  $\tau(q) \leq \frac{n^2}{9}$ .

### 3.4.1. Polígonos regulares

Es fácil construir conjuntos de puntos para los cuales existe un punto  $q$  que alcanza el valor máximo posible de  $\tau(q)$ , esto es que  $\tau(q) = n^2/9$ , ver figura 3.8a, de hecho, esta cota puede ser alcanzada aún si los puntos están en posición convexa, figura 3.10. En esta sección demostraremos que los polígonos regulares también alcanzan esta cota. Probar esta cota resultó ser un problema bastante retador y en su momento inesperado. A partir de ahora asumiremos que  $n = 9m$ , para alguna  $m \geq 1$ , además  $P$  será un polígono regular con  $n$  vértices  $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  ordenados en sentido opuesto de las manecillas del reloj.

Sea  $(a_i, b_i, c_i)$  una tripla ordenada de enteros. Diremos que  $(a_i, b_i, c_i)$  es una tripla triangular si satisface las condiciones siguientes:

- (a)  $a_i, b_i$  y  $c_i$  son todos distintos,
- (b)  $a_i + b_i + c_i = n - 3$ , y
- (c)  $1 \leq a_i, b_i, c_i \leq \frac{n-3}{2}$ .

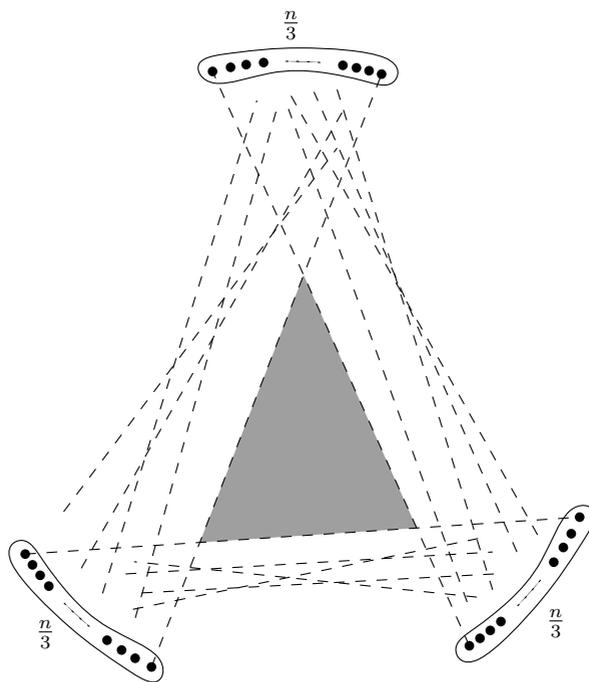


Figura 3.10: Conjunto de puntos en posición convexa tal que cualquier punto  $q$  en la zona gris cumple que  $\tau(q) = n^2/9$ .

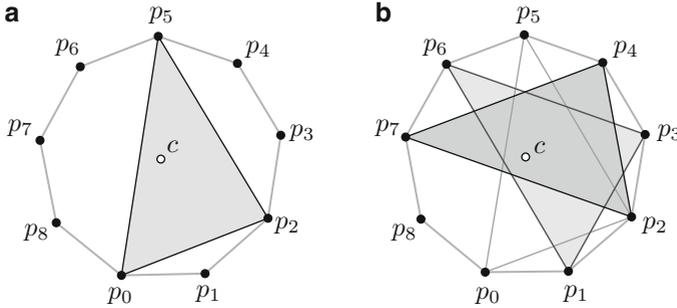


Figura 3.11: a) La tripla (1,2,3) y  $p_0$  determinan el triángulo  $\Delta(p_0, p_2, p_5)$ . b) Podemos construir  $S(1, 2, 3)$ , rotando el triángulo  $\Delta(p_0, p_2, p_5)$ , obteniendo así un conjunto de 9 triángulos ajenos por aristas que contienen a  $c$ .

Observemos que para cualquier vértice  $p_r$  de  $P$ , una tripla triangular  $(a_i, b_i, c_i)$ , define el triángulo  $\Delta(p_r, p_{r+a_i+1}, p_{r+a_i+b_i+2})$  de  $P$ . Más aún, la condición c) garantiza que este triángulo es agudo y por lo tanto contiene a  $c$ , el centro de  $P$ . La condición b) implica que  $p_r = p_{r+a_i+b_i+c_i+3}$ , tomando la suma en módulo  $n$ . Dicho de otra forma, las aristas del triángulo  $\Delta(p_r, p_{r+a_i+1}, p_{r+a_i+b_i+2})$  saltan  $a_i, b_i$  y  $c_i$  vértices de  $P$  cada una, por lo tanto, dado un vértice fijo  $p_r$  de  $P$ , cualquier triángulo agudo que lo contenga induce una tripla triangular. Ver figura 3.11a.

Sea  $S(a_i, b_i, c_i) = \{\Delta(p_r, p_{r+a_i+1}, p_{r+a_i+b_i+2}) | p_r \in P\}$ . El conjunto  $S(a_i, b_i, c_i)$  puede ser interpretado como el conjunto de triángulos obtenidos al rotar  $\Delta(p_0, p_{a_i+1}, p_{a_i+b_i+2})$  alrededor del centro de  $P$ , ver figura 3.11b. La observación siguiente será clave para probar nuestro resultado.

**Observación 2.** Sea  $(a_i, b_i, c_i)$  y  $(a_j, b_j, c_j)$  dos triplas triangulares de  $P$ , tales que  $\{a_i, b_i, c_i\} \cap \{a_j, b_j, c_j\} = \emptyset, i \neq j$ . Entonces, todos los triángulos en  $S(a_i, b_i, c_i) \cup S(a_j, b_j, c_j)$  son ajenos por aristas.

Consideremos un conjunto  $C = \{(a_0, b_0, c_0), \dots, (a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1})\}$  de

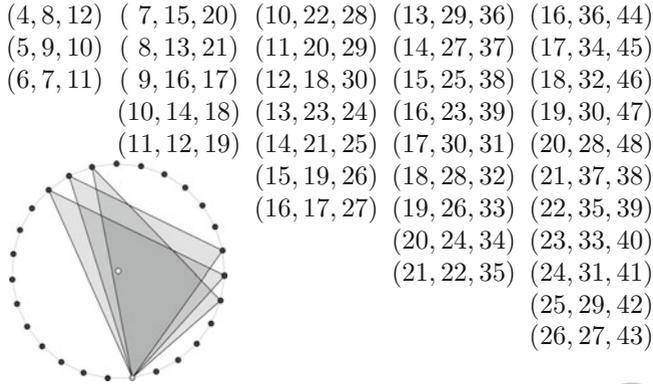


Figura 3.12: Triplas triangulares para  $n = 27, 45, 63, 81$  y  $99$ .

tripas triangulares ordenadas. Diremos que  $C$  es un conjunto generador de triplas triangulares si se cumple la condición siguiente:

$$\{a_i, b_i, c_i\} \cap \{a_j, b_j, c_j\} = \emptyset, i \neq j.$$

Notemos que  $|S(a_i, b_i, c_i)| = n$ , y por lo tanto

$$\bigcup_{(a_i, b_i, c_i) \in C} S(a_i, b_i, c_i)$$

contiene  $nk$  triángulos ajenos por aristas que contienen al centro de  $P$ . El problema se reduce entonces a encontrar un conjunto generador de triplas triangulares tan grande como sea posible.

**Teorema 12.** *Sea  $P$  el conjunto de vértices de un polígono regular con  $n = 9m$  vértices, y  $c$  su centro. Entonces, si  $m$  es impar,  $|\tau(c)| \geq \frac{n^2}{9}$ , y  $|\tau(c)| \geq \frac{n^2}{9} - n$  cuando  $m$  es par.*

*Demostración.* La demostración para  $m$  impar consiste en construir un conjunto generador  $C$  con  $n/9$  triplas triangulares. Sea  $k = \frac{9m-3}{6}$  y  $k' = k + 2m - 1$ . Dado  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , definimos la  $i$ -ésima tripla ordenada  $(a_i, b_i, c_i)$  como sigue (figura 3.12):

$$\begin{aligned} a_i &= k + i \\ b_i &= \begin{cases} k' - 2i - 1 & \text{si } i < \frac{m-1}{2} \\ k' - 2i + m - 1 & \text{si } i \geq \frac{m-1}{2} \end{cases} \\ c_i &= \begin{cases} k' + i + 1 + \frac{m+1}{2} & \text{si } i < \frac{m-1}{2} \\ k' + i + 1 - \frac{m-1}{2} & \text{si } i \geq \frac{m-1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora probaremos que estas triplas  $(a_i, b_i, c_i)$  son efectivamente triplas triangulares. Dado que  $b_i + c_i = 2k' - i + \frac{m+1}{2}$  para toda  $i$ :

$$a_i + b_i + c_i = k + 2k' + \frac{m+1}{2} = 9m - 3.$$

También es fácil ver que

$$\begin{aligned} k &\leq a_i \leq k + m - 1, \\ k + m &= k' - m + 1 \leq b_i \leq k', \\ k' + 1 &\leq c_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a_j < b_j < c_k$ , y también se puede verificar que  $a_i \neq a_j$ ,  $b_i \neq b_j$  y  $a_i \neq a_j$  para todas  $i \neq j$ .

Esto implica que el multiconjunto

$$\bigcup_{(a_i, b_i, c_i) \in C} \{a_i, b_i, c_i\}$$

no contiene elementos repetidos.

Finalmente, notemos que el valor máximo que puede alcanzar  $c_i$  ocurre cuando  $i = \frac{m-3}{2}$ , y entonces:

$$c_i \leq k' + 1 + \frac{m-3}{2} + \frac{m+1}{2} = k' + m = \frac{9m-3}{2}.$$

Por lo tanto,  $C$  es un conjunto generador de triplas triangulares. Luego,  $c$  está contenido en a lo más  $n^2/9$  triángulos ajenos por aristas de  $P$ .

### 3.5 Un punto en muchos triángulos vacíos ajenos por aristas 47

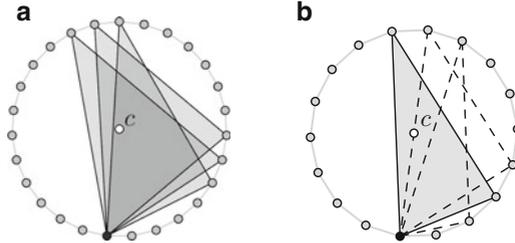


Figura 3.13: a) Triplas triangulares  $(a_i, b_i, c_i)$  para  $n = 9 \cdot 3 = 27$  y b) Triplas  $(a'_i, b'_i, c'_i) = (a_i - 3, b_i - 3, c_i - 3)$  para  $n = 9 \cdot 2 = 18$ .

Cuando  $m$  es par, la prueba también consiste en construir un conjunto de  $m$  triplas. Para esto, utilizamos exactamente las triplas que usaríamos para  $m + 1$  y las modificaremos de la forma siguiente: supongamos que tenemos el conjunto de  $m + 1$  triplas es  $\{(a_0, b_0, c_0), \dots, (a_m, b_m, c_m)\}$ .

Sea  $a'_i = a_i - 3$ ,  $b'_i = b_i - 3$  y  $c'_i = c_i - 3$ , y consideremos a  $C' = \{(a'_i, b'_i, c'_i) | 0 \leq i \leq m\}$ . Entonces,  $c'$  induce un conjunto de triángulos de  $P$ . Sin embargo, habrá  $2n$  triángulos que no contendrán el punto  $c$  en su interior, ver figura 3.13. Por lo tanto, esta construcción garantiza que  $c$  está contenido en al menos  $(m + 1)n - 2n = \frac{n^2}{9} - n$  triángulos ajenos por aristas.  $\square$

Esto, prueba que  $\tau(c)$  alcanza su cota superior.

### 3.5. Un punto en muchos triángulos vacíos ajenos por aristas

Concluimos el capítulo con un primer acercamiento al problema de la existencia de un punto en el interior de muchos triángulos vacíos y ajenos por aristas. Primero observemos que siempre existe un punto  $q$  en un número lineal de triángulos vacíos (sin pedir que sean ajenos por aristas). Esto se sigue de los hechos siguientes:

1. Cualquier conjunto de puntos con  $n$  elementos induce al menos un número cuadrático de triángulos vacíos.
2. Siempre podemos escoger  $2n - c - 2$  puntos del plano de forma que cualquier triángulo vacío contenga uno de ellos donde  $c$  es el número de vértices del cierre convexo.

Ahora probaremos lo siguiente:

**Teorema 13.** *Existen conjuntos de puntos  $P$  tales que cualquier  $q \notin P$  está contenido en a lo más un número lineal de triángulos vacíos ajenos por aristas de  $P$ .*

*Demostración.* Sean  $H_k, H_{k-1}^+$  y  $H_{k-1}^-$  los conjuntos que se definieron en la sección 3.2. Consideramos cualquier conjunto  $T_k^+$  (respectivamente  $T_k^-$ ) de triángulos vacíos ajenos por arista tales que cada uno de ellos tenga dos vértices en  $H_{k-1}^+$  (respectivamente en  $H_{k-1}^-$ ) y el otro en  $H_{k-1}^-$  (respectivamente  $H_{k-1}^+$ ). Sea  $t \in T_k^+$ , entonces la arista de  $t$  con su dos vértices en  $H_{k-1}^+$  es visible por debajo. Como  $T_k^+$  es un conjunto de triángulos ajenos por aristas, tendremos que la cardinalidad de éste estará acotada por el número de aristas visibles por debajo de  $H_{k-1}^+$  que es un número lineal en  $n$ . Por lo tanto  $|T_k^+| \in O(n)$ . Análogamente se puede probar que  $|T_k^-| \in O(n)$ .

Consideremos un punto  $q \in CH(H_k) \setminus CH(H_{k-1}^+) \cup CH(H_{k-1}^-)$ . Claramente, cualquier triángulo vacío que contenga a  $q$  pertenece a  $T_k^+ \cup T_k^-$ , y por lo tanto estará en a lo más un número lineal de triángulos vacíos y ajenos por aristas de  $H_k$ .

Ahora supongamos que  $q \in CH(H_{k-1}^+) \cup CH(H_{k-1}^-)$ . Asumamos, sin pérdida de generalidad que  $q \in CH(H_{k-1}^+)$ , y sea  $S$ , un conjunto maximal de triángulos vacíos y ajenos por aristas de  $H_k$  que contienen a  $q$ . Algunos elementos de  $S$  podrían ser también elementos de  $T_k^+ \cup T_k^-$ , pero estos serán a lo más un número lineal, el resto de elementos de  $S$  tienen todos sus vértices en  $H_k^+$ , por lo tanto, la cardinalidad de  $S$  puede ser expresada con la recurrencia siguiente:

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n),$$

### 3.5 Un punto en muchos triángulos vacíos ajenos por aristas 49

y por lo tanto,  $S$  tendrá a lo más un número lineal de triángulos de  $H_k$ .

Para mostrar que esta cota es justa, sea  $q$  como el que definimos en la demostración del teorema 9. Es fácil ver que  $q$  estará contenido en un número lineal de triángulos vacíos de  $H_k$ .  $\square$

Finalmente concluiremos este capítulo con la conjetura siguiente:

**Conjetura 3.** *Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano. Siempre existe un punto  $q \notin P$  del plano tal que está contenido en al menos  $\log n$  triángulos vacíos y ajenos por aristas de  $P$ .*



# Capítulo 4

## Bloqueando $k$ -hoyos en conjuntos de puntos en el plano

En este capítulo se dan cotas superiores e inferiores en el tamaño de un conjunto que bloquea los  $k$ -hoyos de un conjunto de  $n$  puntos en el plano.

### 4.1. Introducción

Diremos que un punto  $q \notin P$  *bloquea* un hoyo  $H$  de  $P$  si  $q \in CH(H)$ . Un conjunto de puntos  $B$  tal que  $B \cap P = \emptyset$  es un conjunto *bloqueador de  $k$ -hoyos* de  $P$ , *conjunto  $k$ -bloqueador* de  $P$ , si cualquier  $k$ -hoyo  $H$  de  $P$ ,  $CH(H)$  contiene algún elemento de  $B$ . En el resto de la sección,  $P$  siempre será un conjunto de  $n$  puntos en posición general con  $n \geq 3$ .

Dado un conjunto de puntos  $P$ , sea  $c_P$  el número de elementos de  $P$  en la frontera de  $CH(P)$ . En el capítulo 2 vimos que cualquier conjunto de puntos  $P$  siempre habrá un conjunto 3-bloqueador con exactamente

$2n - c_p - 2$  elementos, dado que cualquier triangulación de  $P$  contiene exactamente  $2n - c_p - 2$  elementos, la cota es justa.

Recientemente Sakai y Urrutia probaron en [35] que existen conjuntos de puntos para los cuales se necesitan  $2n - o(n)$  puntos para bloquear todos sus 4-hoyos, como  $2n - c_p - 2$  puntos son suficientes para bloquear todos los 3-hoyos de cualquier conjunto de puntos y en consecuencia los 4-hoyos, esta cota es esencialmente justa. De hecho, creemos que el número necesario de bloqueadores de 4-hoyos es esencialmente el mismo para bloqueadores de 3-hoyos, *i.e.*  $|P| - o(n)$ . En la sección 4.2, demostramos que este es el caso cuando  $P$  está en posición convexa. Probaremos que necesitamos al menos  $n - O(\sqrt{n})$  puntos.

Sorprendentemente, el problema de bloquear los  $k$ -hoyos de un conjunto de puntos cambia sustancialmente cuando  $k \geq 5$ . Se mostrarán conjuntos de puntos en posición general para los cuales el número necesario de puntos para bloquear sus 5-hoyos es un quinto del número de triángulos en una triangulación del conjunto de puntos.

Mostraremos que el número de puntos necesarios para bloquear los 5-hoyos de un conjunto de puntos depende de la geometría del conjunto de puntos en específico, lo cual no sucede en el caso de 3- y 4-hoyos, en los que sólo depende del número de puntos en el cierre convexo. Construiremos conjuntos de puntos distintos que tienen el mismo número de vértices en el cierre convexo, pero que requieren una cantidad distinta de bloqueadores de 5-hoyos.

Existen conjunto de puntos que no contienen ningún 7-hoyo, por lo que el número necesario de bloqueadores de  $k$ -hoyos es cero, cuando  $k \geq 7$ . Por esto, cuando tratemos valores grandes de  $k$  nos enfocaremos sólo en el caso en el que los puntos estén en posición convexa, el cual, parece ser el caso en el que se necesitan más puntos cuando  $k \geq 5$ .

Vale la pena mencionar que el caso en el que  $k = 2$ , *i.e.*, bloquear los segmentos entre pares de puntos, también ha recibido atención recientemente, ver [32].

Sea  $f_k(n)$  el número mínimo de  $k$ -hoyos que tiene un conjunto de puntos. Katchalski y Meir [28] demostraron que  $\binom{n}{2} \leq f_3(n) \leq cn^2$  para alguna  $c < 200$ ; también vea Purdy [24]. Esta cota inferior fue mejorada

por Dehnhardt [10] a  $n^2 - 5n + 10 \leq f_3(n)$ . El también demostró que  $\binom{n-3}{2} + 6 \leq f_4(n)$ . Bárány and Valtr [5] construyeron conjuntos con pocos  $k$ -hoyos con  $3 \leq k \leq 6$ .

Recientemente se han estudiado también variantes cromáticas del problema de Erdős-Szekeres por parte de Devillers, Hurtado, Károly, y Seara [11]. Ellos prueban, entre otros resultados, que cualquier conjunto de puntos bicolorado contiene al menos  $\frac{n}{4} - 2$  3-hoyos monocromáticos con interiores ajenos. Aichholzer *et al.* [1] demostraron que cualquier conjunto de puntos bicolorado contiene al menos  $\Omega(n^{5/4})$  3-hoyos monocromáticos; usando con más cuidado el mismo argumento Pach y Tóth [22] mejoran esta cota a  $\Omega(n^{4/3})$ .

## 4.2. Bloqueando los 4-hoyos en conjuntos de puntos

En esta sección estudiamos el problema de obtener cotas en el número de puntos necesarios para bloquear todos los 4-hoyos de un conjunto  $P$  de puntos en posición convexa. El objetivo de la sección consiste en probar el siguiente resultado:

**Teorema 14.** *Cualquier conjunto 4-bloqueador para  $P$  tiene al menos  $n - O(\sqrt{n})$  elementos.*

Para probar este resultado utilizaremos un resultado reciente sobre el número cromático de una gráfica de tipo Kneser geométrica introducida por Araujo, Dumitrescu, Hurtado, Noy y Urrutia [4]. Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, la *gráfica segmentos ajenos* de  $P$ , denotada como  $D_n$ , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los segmentos que conectan parejas de puntos en  $P$  y dos serán adyacentes si son ajenos. Claramente  $D_n$  no dependerá de qué conjunto  $P$  de puntos en posición convexa escojamos.

Sea  $\chi(D_n)$  el número cromático de  $D_n$ . Fabila-Monroy y Wood [15] probaron el resultado siguiente que nos será de mucha utilidad:

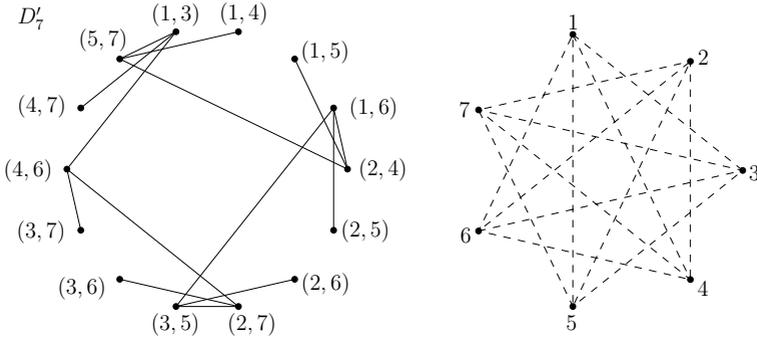


Figura 4.1: La gráfica  $D'_7$ .

**Teorema 15** ([15]).

$$n - \sqrt{2n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \leq \chi(D_n) < n - \sqrt{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2}(\log n) + 4$$

Sea  $D'_n$  la gráfica obtenida a partir de  $D_n$  al eliminar los vértices que corresponden a aristas del cierre convexo de  $P$ , ver figura 4.1. Claramente  $D'_n$  tiene  $\binom{n}{2} - n$  vertices. Se sigue de la demostración del teorema 15 que  $\chi(D'_n)$  satisface lo siguiente:

$$\chi(D'_n) \geq n - \sqrt{4n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

Esta cota nos permite dar una cota inferior en el número de puntos necesario para bloquear todos los 4-hoyos de un conjunto de puntos en posición convexa. En particular, nos dice cuántos puntos son necesarios para bloquear aquellos cuadriláteros que tengan dos de sus aristas en el cierre convexo de  $P$ . Dado un 4-hoyo de  $P$ , decimos que es un 2-cuadrilátero si tiene dos aristas no consecutivas del cierre convexo de  $P$ , ver figura 5.2.

Sea  $e_i$  una arista del cierre convexo de  $P$  y  $m_i$  su punto medio. Sea  $P'$  el conjunto de todos los  $m_i$ 's. Sean  $e_i$  y  $e_j$  dos aristas no consecutivas del

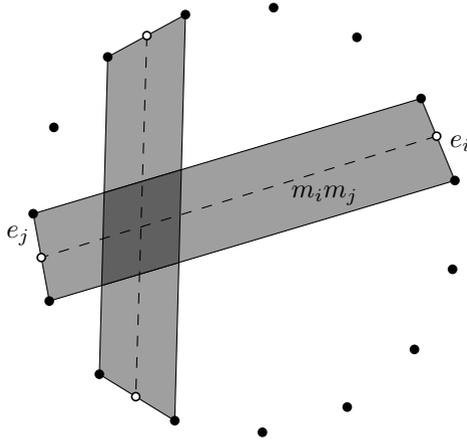


Figura 4.2: 2-cuadriláteros de  $P$  intersectándose.

cierre convexo de  $P$ , denotaremos con  $Q(i, j)$  al 2-cuadrilátero que estas inducen. Es fácil de ver que  $Q(i, j) \cap Q(r, s) \neq \emptyset$  si y sólo si los segmentos de línea  $m_i m_j$  y  $m_r m_s$  se intersectan. Si dos 4-hoyos son bloqueados por el mismo punto, entonces se intersectan.

Sea  $G'(P)$  la gráfica en la que sus vértices son los 2-cuadriláteros de  $P$ , y dos serán adyacentes si no se intersectan. Podemos observar que  $G'(P)$  es isomorfa a  $D'_n$ , de lo contrario  $P'$  induciría una gráfica de segmentos ajenos distinta que  $D_n$ .

Ahora supongamos que queremos bloquear todos los 4-hoyos de  $P$  con un conjunto  $B = \{b_1, \dots, b_t\}$  con  $t$  puntos. Ahora usaremos a  $B$  para colorear  $G'(P)$ . Por cada 2-cuadrilátero  $Q$ , seleccionamos algún  $b_i$  que lo bloquea y le asignamos el color  $i$ . Veamos que esta coloración es buena. Supongamos que existen dos vértices adyacentes con el mismo color  $i$ , esto implicaría que están bloqueados por  $b_i$ , lo cual implica que estos cuadriláteros se intersectan y no podrían ser adyacentes y por tanto la coloración es buena. Entonces  $t \geq \chi(D'_n) \geq n - \sqrt{4n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ . El

teorema 14 se sigue de lo anterior.

### 4.3. Bloqueando los 5-hoyos

En esta sección estudiaremos el problema de bloquear los 5-hoyos de conjuntos de puntos en el plano. Primero consideraremos conjuntos de puntos en posición convexa, que es cuando se maximiza el número de 5-hoyos, posteriormente estudiaremos conjuntos de puntos más generales.

#### 4.3.1. Conjuntos de puntos en posición convexa

El objetivo de esta sección es probar el teorema siguiente:

**Teorema 16.**  $\frac{n}{2} - 2$  puntos son siempre necesarios y a veces suficientes para bloquear todos los 5-hoyos de un conjunto de  $n = 4k$  puntos en posición convexa.

Para esto, primero necesitamos probar lo siguiente:

**Lema 9.** Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa. Entonces, cualquier conjunto 5-bloqueador para  $P$  tiene al menos  $2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 3$  elementos.

*Demostración.* Sea  $B$  un conjunto 5-bloqueador de  $P$  con  $r$  elementos y  $M$  un emparejamiento geométrico sin cruces de cardinalidad máxima de los elementos de  $B$ ; esto es, un conjunto de pares ajenos de elementos de  $B$  tales que los segmentos  $M = \{\ell_1, \dots, \ell_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\}$ , que conectan a cada par, no se intersectan. Cuando  $r$  es impar, nos quedaremos con un elemento aislado, sin emparejar, de  $B$ .

Uno a uno, extendemos los segmentos de  $M$  hasta que le peguen a otro segmento de  $M$  o algún segmento extendido previamente. Es posible que algunos elementos de  $M$  se extiendan hasta volverse rectas o semirectas en caso de nunca haber chocado con otro segmento. Si  $r$  fuera impar, extiende, a partir del punto aislado, una recta que pase por el, ver figure 4.3.

Esto nos da una descomposición del plano en exactamente  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$  regiones convexas. Si alguna de estas regiones contiene 5 o más puntos

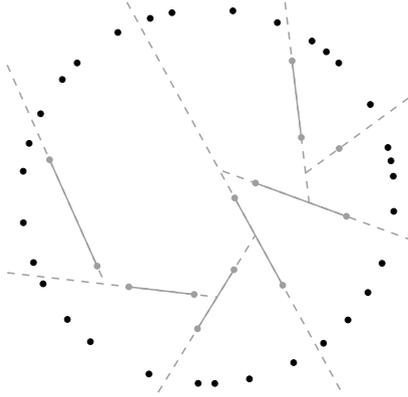


Figura 4.3: Ilustración del teorema 9.

de  $P$ , entonces se formaría un 5-hoyo que no podría ser bloqueado por ningún elemento de  $B$ . Por lo tanto, cada una de las  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$  regiones no puede tener más de 4 elementos de  $P$ , por lo tanto:

$$|B| = r \geq 2 \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 3.$$

□

Cuando  $n = 4k$ , podemos mejorar esta cota un poco.

**Corolario 2.** *Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa con  $n = 4k$ . Entonces, cualquier conjunto 5-bloqueador para  $P$  tiene al menos  $\frac{n}{2} - 2$  elementos.*

*Demostración.* Supongamos que tenemos un conjunto 5-bloqueador  $B$  para  $P$  con  $\frac{n}{2} - 3$  puntos, y  $n = 4k$ . Dividamos al plano como en la demostración del lema 9 a partir de un emparejamiento perfecto de los elementos de  $B$ . Como se argumentó entonces, cada región de la subdivisión contiene a lo más 4 elementos de  $P$ , de hecho, para alcanzar la cota inferior, cada

región debe contener exactamente 4 elementos de  $P$ , así que supongamos que este es el caso. Dado que  $|B|$  es impar, existe un elemento  $b$  de  $B$  que quedó fuera del emparejamiento, al crear la subdivisión hicimos crecer una recta  $\ell$  desde  $b$ . Rotemos a  $\ell$  al rededor de  $P$ , extendiéndola o encogiéndola de forma que se mantenga la subdivisión, como las dos regiones incidentes en  $\ell$  deben contener 4 elementos de  $P$ , al rotar  $\ell$  eventualmente tocaremos algún elemento de  $P$ , en este momento, tendremos una subdivisión en la cual una de las regiones contiene 5 elementos de  $P$ , por lo que tendríamos un 5-hoyo contradiciendo la suposición de que  $B$  era 5-bloqueador para  $P$ . Entonces podemos concluir que la cantidad de puntos en las dos regiones que inciden en  $\ell$  no puede ser mayor que 4, así podemos concluir que cualquier 5-bloqueador para cualquier conjunto  $P$  de  $n$  puntos en posición convexa debe de estar formado por al menos  $\frac{n}{2} - 2$  puntos.  $\square$

Ahora nos enfocaremos en construir un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa para el cual existe un 5-bloqueador con no más de  $\frac{n}{2} - 2$  puntos ( $n$  será potencia de 2). Este conjunto de puntos se obtiene a partir de conjuntos *casi convexos* de puntos en posición general.

Un conjunto de puntos  $P$  se llama casi convexo si se da que cualquier triángulo de  $P$  contiene a lo más un elemento de  $P$  en su interior, *i.e.* distinto que sus vértices. A continuación presentaremos una construcción propuesta por Károlyi, Pach y Tóth en [19] de un conjunto casi convexo, la cual será de mucha utilidad para construir un conjunto convexo que tiene un 5-bloqueador con sólo  $\frac{n}{2} - 2$  puntos.

Obtenemos una familia  $\mathcal{X}_j$  de conjuntos casi convexos de puntos en el plano como sigue:

Sean  $R_1$  los extremos de un segmento de recta horizontal  $\ell_1$  de longitud dos y definimos  $\mathcal{X}_1 = R_1$ . Ahora tomamos dos segmentos de recta verticales  $\ell_2$  y  $\ell_3$  de longitud 1 tales que sus puntos medios estén lo suficientemente cerca a los puntos extremos de  $\ell_1$ , ver figura 4.4. Así,  $R_2$  estará formado por los extremos de  $\ell_2$  y  $\ell_3$ . Definiremos a  $\mathcal{X}_2$ , como la unión de  $\mathcal{X}_1 \cup R_2$ .

Supongamos que ya tenemos definidos a  $R_1, \dots, R_j$ ,  $j \geq 2$ , de forma que se satisfagan las condiciones siguientes:

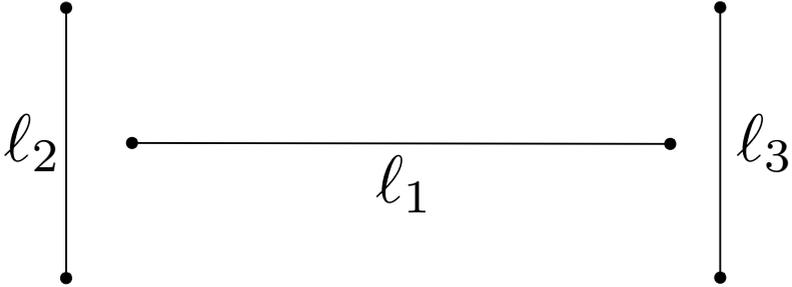


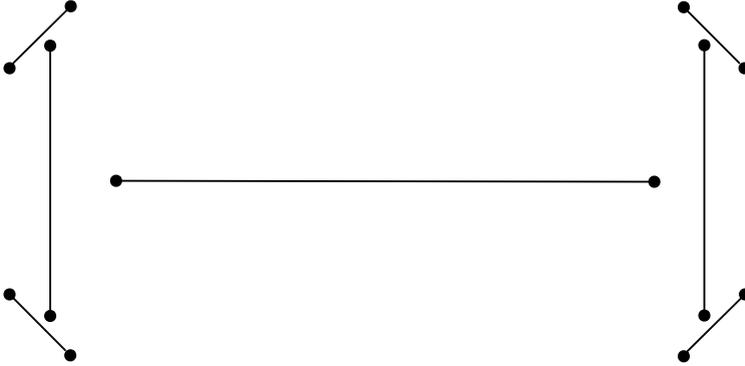
Figura 4.4: Conjunto  $\mathcal{X}_2$ , definido a partir de los segmentos  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  y  $\ell_3$ .

1.  $\mathcal{X}_j := R_1 \cup \dots \cup R_j$  está en posición general,
2. los vértices de  $CH(\mathcal{X}_j)$  serán los elementos de  $R_j$ , y
3. cualquier triángulo con 3 elementos de  $\mathcal{R}_j$  contiene exactamente un punto de  $\mathcal{X}_{j-1}$  en su interior.

Claramente  $\mathcal{X}_1$  y  $\mathcal{X}_2$  satisfacen las propiedades anteriores. La condición 3, implica que  $\mathcal{X}_{j-1}$  es un conjunto 3-bloqueador de  $R_j$ ,  $j \geq 2$ .

Ahora construimos a  $\mathcal{X}_{j+1}$  como sigue: Denotemos por  $z_1, \dots, z_r$  a los vértices de  $CH(\mathcal{X}_j)$  (los elementos de  $R_j$ ) en el sentido opuesto a las manecillas del reloj al rededor de  $CH(\mathcal{X}_j)$ . Para cualquier  $1 \leq i \leq r$ , sea  $\ell_i$  la recta que pasa por  $z_i$  y es ortogonal al bisector del ángulo de  $CH(\mathcal{X}_j)$  en  $z_i$ . Sean  $z'_i$  y  $z''_i$  los dos puntos en  $\ell_i$  a distancia  $\varepsilon$  de  $z_i$ . Ahora, movamos simultáneamente  $z'_i$  y  $z''_i$  ligeramente hacia fuera de  $CH(\mathcal{X}_j)$  a distancia  $\delta$  en la dirección ortogonal a  $\ell_i$ , denotaremos a los puntos resultantes como  $u'_i$  y  $u''_i$ , respectivamente, y tomamos  $\varepsilon > \delta$ .

En [19] muestran que podemos escoger una  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeña de forma que  $R_{j+1} = \{u'_i, u''_i \mid i = 1, \dots, r\}$  y  $\mathcal{X}_{j+1} := R_1 \cup \dots \cup R_{j+1}$  satisfagan las condiciones 1, 2 y 3. Ver figure 4.5. Ahora probaremos que:

Figura 4.5: Conjunto de puntos  $\mathcal{X}_3$ .

**Lema 10.** *Existe un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en posición convexa,  $n = 2^m$ , que tienen un conjunto 5-bloqueador con  $\frac{n}{2} - 2$  elementos.*

*Demostración.* Sean  $P = R_m$  y  $B = \mathcal{X}_{m-2}$ . Tenemos que  $|P| = n$  y  $|B| = \frac{n}{2} - 2$ . Ahora mostraremos que  $B$  es un conjunto 5-bloqueador para  $P$ . Para probarlo por contradicción supondremos que  $B$  no es un conjunto 5-bloqueador para  $P$ , por lo tanto deberá existir un 5-hoyo  $H$  de  $P$  que no contenga ningún elemento de  $B$  en su interior. Triangulemos  $H$  obteniendo 3 triángulos, todos formados con elementos de  $P$ , que a su vez son elementos de  $R_m$ , por lo que cada uno de ellos, por construcción, deberá contener un elemento de  $\mathcal{X}_{m-1}$ , y como  $B = \mathcal{X}_{m-2} = \mathcal{X}_{m-1} \setminus R_{m-1}$ , los tres elementos de  $\mathcal{X}_{m-1}$  contenidos en los tres triángulos de la triangulación de  $H$  deberán ser elementos de  $R_{m-1}$ , por lo que el triángulo formado por estos tres elementos deberá contener un elemento  $q$  de  $\mathcal{X}_{m-2} = B$ , lo cual es una contradicción, pues  $q$  estaría bloqueando  $H$ .  $\square$

La demostración del teorema 16 se sigue del corolario 2 y el lema 10.  $\square$

El teorema 16 resultó ser muy sorprendente. Por mucho tiempo creímos que, como en el caso de 4-hoyos, cualquier 5-bloqueador para un conjunto de puntos en posición convexa necesitaría tener al menos  $n - o(n)$  puntos. Lo que resultó más sorprendente es que en el caso de posición convexa parecía ser, como en el caso de 4-hoyos, un problema meramente combinatorio y para nuestra sorpresa parece que la geometría sí influye mucho. De hecho, creemos que este es el caso para muchos conjuntos de puntos en posición convexa, por lo que cerramos esta sub-sección con el problema siguiente:

**Problema 5.** *¿Será cierto que si  $P$  es el conjunto de vértices de un polígono regular con  $n$  vértices, entonces todo conjunto 5-bloqueador para  $P$  tiene al menos  $n - o(n)$  elementos?*

### 4.3.2. Bloqueando los 5-hoyos en polígonos regulares

Mientras que no hemos podido dar una respuesta exacta al problema 5, en esta sección daremos un resultado para un caso especial ya que la técnica será usada más adelante, además, esperamos que posteriormente pueda servir para dar una demostración más general.

Sea  $\mathcal{Q}_n = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  el conjunto de vértices de un polígono regular  $\mathcal{R}_n$  de  $n$  vértices, de modo que aparezcan alrededor de la frontera de  $\mathcal{R}_n$  en el sentido de las manecillas del reloj. Toda la aritmética que hagamos sobre los índices de los vértices será en módulo  $n$ . Un *k-hoyo lateral* será un subconjunto de  $\mathcal{Q}_n$  cuyos elementos serán  $k$  elementos consecutivos de  $\mathcal{Q}_n$ . Para ser un poco más precisos, usaremos la notación  $S_{i,k} = \{p_i, \dots, p_{i+k-1}\}$  para referirnos al  $i$ -ésimo  $k$ -hoyo lateral de  $\mathcal{Q}_n$ , con  $0 \leq i \leq n - 1$  y  $3 \leq k \leq n$ . El cierre convexo de  $S_{i,k}$  es un  $k$ -gono convexo, que denotaremos como  $R_{i,k}$ . Abusando un poco de la notación, también diremos que  $R_{i,k}$  es un *k-hoyo lateral* de  $\mathcal{R}_n$ .

**Lema 11.** *Cualquier conjunto 5-bloqueador para  $\mathcal{Q}_{19}$  tiene al menos ocho elementos.*

*Demostración.* Primero, recordemos que de acuerdo al lema 9 y al corolario 2, para bloquear los 5-hoyos de cualquier polígono convexo con 5, 8,

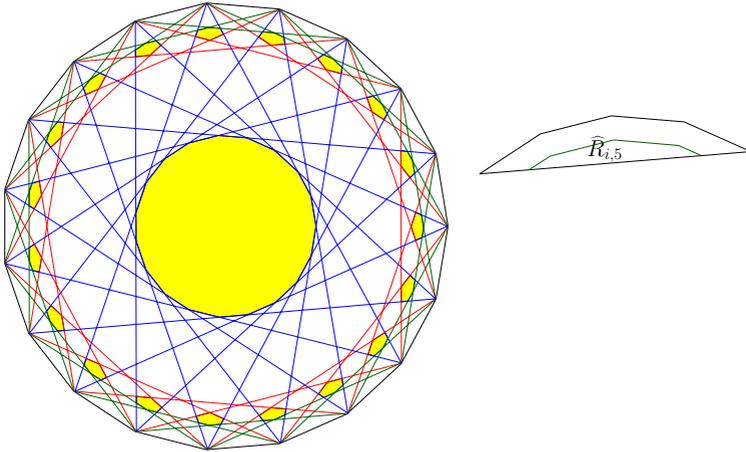


Figura 4.6: 19-gono regular.

13, 16, 17, y 19 vértices, necesitamos al menos 1, 2, 5, 6, 7, y 7 puntos, respectivamente.

Ahora probamos nuestra afirmación por contradicción: supongamos que hay un conjunto 5-bloqueador  $B$  para  $\mathcal{Q}_{19}$  que contenga sólo siete puntos. Observemos primero que si removemos un 4-hoyo lateral  $R_{i,4}$  de  $\mathcal{R}_{19}$ , obtenemos un polígono convexo de 17 vértices, llamado  $R_{i+3,17}$ . Como mencionamos en el párrafo anterior, para bloquear los 5-hoyos de  $R_{i+3,17}$  necesitaremos al menos 7 puntos. Esto implica que todos los elementos de  $B$  están en el interior de  $R_{i+3,17}$  y por lo tanto, no hay ningún 4-hoyo lateral  $R_{i,4}$  que contenga algún elemento de  $B$ . Sea  $W_4$  la unión de estas regiones, *i.e.*  $W_4 = \bigcup_{i=0}^{n-1} R_{i,4}$ , este será un anillo poligonal que no tiene ningún elemento de  $B$ .

A partir de  $R_{i,5}$ , un 5-hoyo lateral de  $\mathcal{R}_{19}$ , definimos a  $\widehat{R}_{i,5} = R_{i,5} \setminus W_4$  como se puede apreciar en la figura 4.6.

Ya que los elementos de  $B$  bloquean todos los 5 hoyos de  $\mathcal{Q}_{19}$ , cualquier 5-hoyo lateral  $R_{i,5}$  de  $\mathcal{R}_{19}$  contiene al menos un elemento de  $B$ , que debe

estar en  $\widehat{R}_{i,5}$ .

Observemos que la región poligonal que complementa a  $R_{i,5}$  en  $\mathcal{R}_{19}$  es precisamente  $R_{i+4,16}$ . Como sabemos, necesitamos al menos 6 puntos para bloquear los 5-hoyos de cualquier conjunto de 16 puntos en posición convexa, entonces cualquier 5-hoyo lateral de  $\mathcal{R}_{19}$  debe contener al menos un punto bloqueador.

De forma similar, si removemos un 8-hoyo lateral  $R_{i,8}$  de  $\mathcal{R}_{19}$ , nos queda el polígono convexo  $R_{i+7,13}$  que tiene 13 vértices, y por lo tanto, al menos 5 elementos de  $B$  deberán pertenecer al interior de  $R_{i+7,13}$ . Esto implica que cualquier 8-hoyo lateral de  $\mathcal{R}_{19}$  contiene exactamente dos elementos de  $B$ .

Observemos que por cada 8-hoyo lateral  $R_{i,8}$  de  $\mathcal{R}_{19}$ , hay exactamente dos 5-hoyos laterales de  $\mathcal{R}_{19}$ ,  $R_{i,5}$  y  $R_{i+3,5}$ , tales que sus regiones  $\widehat{R}_{i,5}$  y  $\widehat{R}_{i+3,5}$  son ajenas y están contenidas en  $R_{i,8}$ . Sea  $H_{i,8} = R_{i,8} \setminus (\widehat{R}_{i,5} \cup \widehat{R}_{i+3,5})$ . La discusión anterior implica que de los dos puntos bloqueadores de  $B$  en  $R_{i,8}$  debe haber uno en  $\widehat{R}_{i,5}$  y el otro en  $\widehat{R}_{i+3,5}$ , y que  $H_{i,8}$  no contiene ningún elemento de  $B$ .

Sea  $R_B$  la región obtenida al remover todas las regiones vacías  $H_{i,8}$  de  $\mathcal{R}_{19}$  definidas por los 8-hoyos laterales  $R_{i,8}$  de  $\mathcal{R}_{19}$ , con  $0 \leq i \leq n-1$ . Todos los elementos de  $B$  deben estar en  $R_B$ . No es difícil ver que  $R_B$  está formado por un polígono regular de 19 lados  $C_{19} = \bigcap_{i=0}^{19} R_{i,13}$ , con el mismo centro que  $R_{19}$ , y 19 hexágonos, que llamaremos  $A_i$ , para  $0 \leq i \leq n-1$ , donde  $A_i$  denota al hexágono más cercano a  $p_i$ . Para ser precisos,  $A_i = R_{i-3,5} \cap R_{i-1,5} \cap R_{i,12} \cap R_{i+1,17} \cap R_{i+2,17} \cap R_{i+7,12}$ . Las veinte componentes conexas de  $R_B$  se muestran sombreadas en amarillo en la figura 4.6.

Ningún punto en el 19-gono central  $C_{19}$  bloquea algún 5-hoyo lateral. Además, poniendo un bloqueador en las partes hexagonales  $A_i$ , sólo bloqueamos tres 5-hoyos laterales,  $R_{i-3,5}$ ,  $R_{i-2,5}$  y  $R_{i-1,5}$ .

Por lo tanto, para bloquear los diecinueve 5-hoyos laterales de  $\mathcal{R}_{19}$ , necesitamos poner los siete puntos bloqueadores de  $B$  en los hexágonos. Como cualquier 5-hoyo lateral contiene tres de esos hexágonos, uno de los 5-hoyos laterales de  $\mathcal{R}_{19}$  contendrá dos puntos bloqueadores, contradiciendo el hecho de que cada 5-hoyo lateral de  $\mathcal{R}_{19}$  contiene exactamente

un elemento de  $B$ . □

### 4.3.3. La geometría importa

Los lemas 10 y 11 indican que la geometría y distribución de los puntos debe ser considerada a la hora de buscar conjuntos 5-bloqueadores para conjuntos de puntos, aún en posición convexa. En esta sección profundizaremos más en esa dirección, mostrando dos conjuntos de 11 puntos en posición convexa para los cuales sus conjuntos 5-bloqueadores tendrán tamaños diferentes.

El primer conjunto será  $\mathcal{Q}_{11}$ , el conjunto de vértices del polígono regular  $\mathcal{R}_{11}$  de once vértices. Bajo la misma línea usada para probar el lema 11 es fácil ver que se pueden bloquear los 5-hoyos de  $\mathcal{Q}_{11}$  con exactamente tres puntos, ver figura 4.7.

Nuestro conjunto de puntos siguiente,  $\mathcal{S}_{11} = \{p_0, \dots, p_{10}\}$  se muestra en la figura 4.8. Primero notemos que los cuatro puntos azules en la figura 4.8, bloquean todos los 5-hoyos de  $\mathcal{S}_{11}$ . Ahora probaremos que no se pueden bloquear los 5-hoyos de  $\mathcal{S}_{11}$  con sólo tres puntos. Sea  $\mathcal{P}_{11}$  el polígono convexo cuyos vértices forman  $\mathcal{S}_{11}$ .

Para cualquier  $0 \leq i \leq 10$  sea  $T_i$  el triángulo acotado por los segmentos  $p_i - p_{i+1}$ ,  $p_i - p_{i+4}$  y  $p_{i-3} - p_{i+1}$ , tomando la suma en módulo 11. Observemos que cualquier punto del plano puede bloquear a lo más cuatro 5-hoyos laterales de  $\mathcal{S}_{11}$ , y si lo hace, deberá estar en algún  $T_i$ , que en dado caso bloquea los 5-hoyos laterales de  $\mathcal{S}_{11}$  con conjuntos de vértices  $\{p_{i-1}, \dots, p_{i+3}\}$ , y  $\{p_i, \dots, p_{i+4}\}$ . Ahora supongamos que podemos bloquear los 5-hoyos de  $\mathcal{S}_{11}$  con un conjunto de tres puntos  $\{x, y, z\}$ . En particular  $\{x, y, z\}$  deberán bloquear los once 5-hoyos laterales de  $\mathcal{S}_{11}$ , y por lo tanto, al menos dos puntos entre  $x, y, z$  bloquean cuatro 5-hoyos laterales de  $\mathcal{S}_{11}$ , y el otro debe bloquear tres o cuatro. De esto se infiere que dos puntos de  $x, y, z$ , digamos que  $x$  y  $y$ , estarán en dos triángulos  $T_i$  y  $T_j$  tales que  $j = i + 4$  para alguna  $0 \leq i \leq 10$ , sumando en módulo 11.

Ya que bloquear los 5-hoyos de nueve puntos en posición convexa requiere al menos tres bloqueadores, todos los 4-hoyos laterales de  $\mathcal{P}_{11}$  deberán estar vacíos. Como  $T_1, T_2, T_4, T_7, T_9$  y  $T_{10}$  están contenidos en

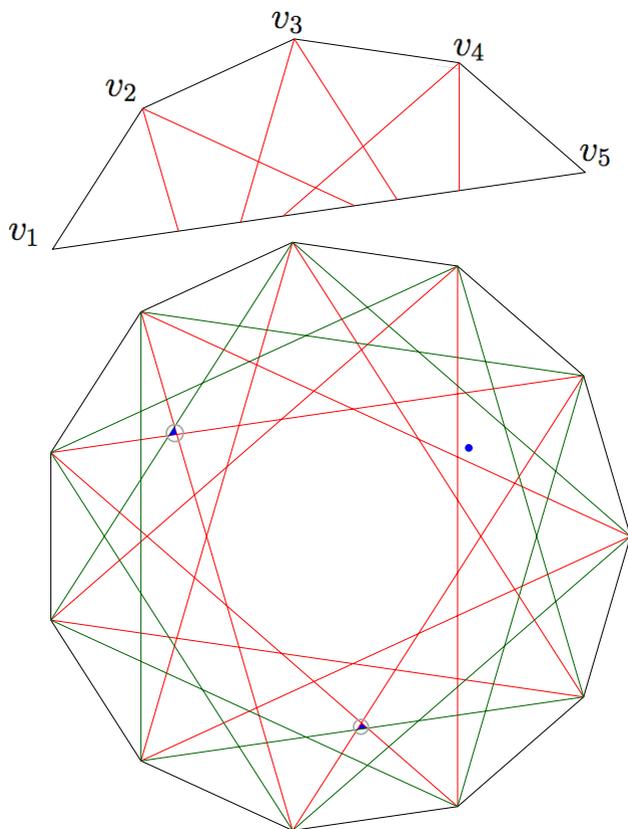


Figura 4.7: 11-gono regular.

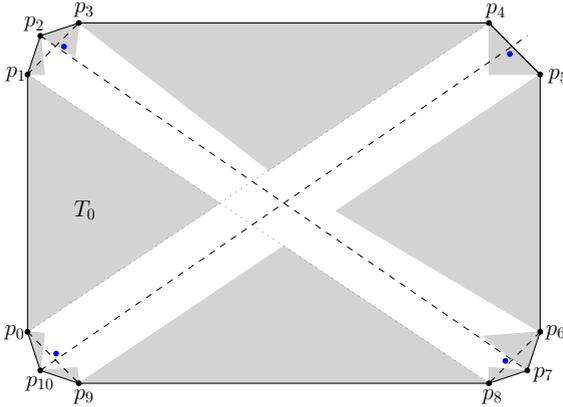


Figura 4.8: Conjunto de 11 puntos en posición convexa que requiere 4 puntos para bloquear sus 5-hoyos.

un 4-hoyo lateral de  $\mathcal{P}_{11}$ , no pueden contener ni  $x$ , ni  $y$ , y tampoco  $z$ . Entonces,  $x$  y  $y$  están en  $T_0, T_3, T_5, T_6$ , o en  $T_8$ .

Pero  $x$  y  $y$  deben pertenecer a  $T_i$  y  $T_{i+4}$ , lo cual no será posible: por lo tanto, para bloquear los 5-hoyos de  $\mathcal{S}_{11}$  necesitaremos al menos 4 puntos, como afirmábamos

Entonces, hemos demostrado:

**Teorema 17.** *Existen dos conjuntos de puntos en posición convexa diferentes tales que sus conjuntos 5-bloqueadores más pequeños tienen cardinalidades distintas.*

Por esto, podemos afirmar que para el caso de los 5-hoyos, el tamaño mínimo de un conjunto 5-bloqueador depende de la posición de los puntos.

## 4.4. Conjuntos de puntos en posición general

Como mencionamos en la introducción, el número de puntos necesarios para bloquear los triángulos de cualquier conjunto de puntos  $P$ , en posición general, es exactamente  $2n - c_P - 2$ , donde  $n = |P|$  y  $c_P$  es el número de elementos de  $P$  que son vértices de  $CH(P)$ . Para bloquear los 5-hoyos, no podemos dar una fórmula similar. A continuación construiremos dos conjuntos de puntos con la misma cardinalidad y con la misma cantidad de elementos en el cierre convexo para los cuales el número de puntos necesarios para bloquear sus 5-hoyos son diferentes.

En otras palabras, daremos un resultado similar al del teorema 17, para conjuntos de puntos que no están en posición convexa, demostrando que la geometría específica y distribución de los puntos puede cambiar el tamaño de los conjuntos 5-bloqueadores mínimos, aún cuando los puntos no estén en posición convexa.

Primero mostraremos que existen familias de conjuntos de puntos con  $4m$  elementos,  $2m$  de estos en el cierre convexo tales que todos sus 5-hoyos pueden ser bloqueados usando  $m - 2$  puntos.

**Lema 12.** *Para cualquier  $m$ , existen conjuntos de puntos  $P_{4m}$  en posición general con  $|P_{4m}| = n = 4m$  puntos y  $c_P = 2m$ , tales que  $m - 2$  puntos son suficientes y necesarios para bloquear todos los 5-hoyos de  $P_{4m}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R}_m = \{q_1, \dots, q_m\}$  un  $m$ -gono regular. Por los resultados en [9, 28], podemos escoger  $m - 2$  puntos  $B = \{b_1, \dots, b_{m-2}\}$  tales que cualquier triángulo con vértices en  $\mathcal{R}_m$  contiene exactamente un elemento de  $B$  en su interior. No es difícil notar que dado  $B$ , podemos mover los vértices de  $\mathcal{R}_m$  en un radio  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, de forma que cualquier triángulo del conjunto perturbado sigue conteniendo un elemento de  $B$ .

Construiremos  $P_{4m}$  a continuación. Sustituimos cada vértice  $q_i$  de  $\mathcal{R}_m$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , por un conjunto de 4 puntos  $S_i = \{p_i^1, p_i^2, p_i^3, p_i^4\}$ , cada uno a distancia menor que  $\varepsilon$  de  $q_i$ , entonces tendremos el conjunto  $P_{4m} = S_1 \cup \dots \cup S_m$ . Obtendremos los elementos de  $q_i$  como sigue: consideremos

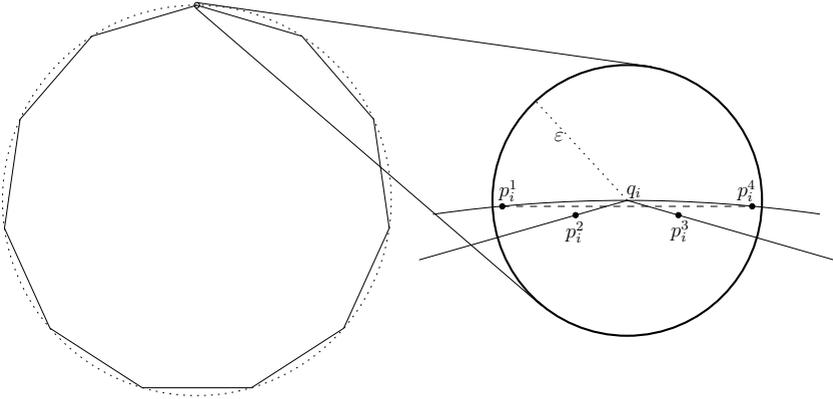


Figura 4.9: Un conjunto de puntos en posición general en el que  $\frac{n}{4} - 2$  puntos son suficientes y necesarios para bloquear todos sus 5-hoyos. La imagen a la derecha es un acercamiento a cada vértice del  $m$ -gono regular de la izquierda.

la bisectriz  $b_i$  del ángulo de  $\mathcal{R}_m$  en  $q_i$ . Sea  $\ell_i$  una recta ortogonal a  $b_i$  que corte las aristas de  $\mathcal{R}_m$ , que inciden en  $q_i$ , separada infinitesimalmente de  $q_i$ . Sean  $p_i^1$  y  $p_i^4$  los puntos de intersección de  $\ell_i$  con el circuncírculo  $C$  de  $\mathcal{R}_m$ . Sean  $p_i^2$  y  $p_i^3$  dos puntos equidistantes a  $q_i$ , debajo de  $\ell_i$ , uno en cada una de las aristas de  $\mathcal{R}_m$  que inciden en  $q_i$ , tales que los ángulos  $\angle p_i^1 p_i^2 p_i^3$  y  $\angle p_i^4 p_i^3 p_i^2$  sean muy cercanos a  $\pi$ , ver figura 4.9. Al tomar los  $S_i$ 's de esta forma, el cierre convexo de  $P_{4m}$  tiene  $2m$  vértices.

Podemos escoger  $p_i^1$  y  $p_i^4$  de forma que uno de los semiplanos abiertos acotados por la línea que pasa por  $p_i^1$  y  $p_i^3$  (resp.  $p_i^4$  y  $p_i^2$ ) contiene  $p_i^4$ , (resp.  $p_i^1$ ) y ningún otro elemento de  $P_{4m}$ . Ver figura 4.9.

Después observemos que no hay ningún 5-hoyo de  $P_{4m}$  que pueda usar más de dos elementos de  $S_i$ . Se sigue que cualquier 5-hoyo deberá ser formado por elementos de al menos tres conjuntos  $S_i$ ,  $S_j$  y  $S_k$  distintos.

Más aún, como los elementos de  $S_i$  están a distancia menor que  $\varepsilon$  de  $q_i$ , cualquier triángulo que contenga un punto en cualesquiera tres conjuntos

$S_i$ ,  $S_j$ , y  $S_k$  contiene un elemento de  $B$  en su interior. Por lo tanto, los elementos de  $B$  bloquean a todos los 5-hoyos de  $P_{4m}$ .

Ahora observemos que cualquier conjunto 5-bloqueador para  $P_{4m}$  no puede tener menos de  $m - 2$  puntos. Primero, supongamos que  $B'$  es un conjunto 5-bloqueador para  $P_{4m}$  con no más de  $m - 3$  elementos, entonces al menos un triángulo formado con los vértices de  $\mathcal{R}_m$  no está bloqueado pues el número de triángulos en toda triangulación de  $\mathcal{R}_m$  es  $m - 2$ . Supongamos que los vertices de este triángulo son  $q_i, q_j, q_k$ . Entonces, tomando dos elementos en  $S_i$  y en  $S_j$  y uno de  $S_k$  formamos un 5-hoyo de  $P_{4m}$  que no está siendo bloqueado por ningún elemento de  $B'$ . Esto implica que para bloquear los 5-hoyos de  $P_{4m}$  se necesitan  $m - 2$  puntos.  $\square$

Ahora construiremos una familia de conjuntos de puntos  $P'_{4m}$  con  $4m$  elementos,  $2m$  en su cierre convexo, tal que necesitaremos más de  $2m$  puntos para bloquear todos sus 5-hoyos; esencialmente el doble de los suficientes para bloquear los 5-hoyos de  $P_{4m}$ .

**Lema 13.** *Para cualquier entero positivo  $m$  múltiplo de 15, existe un conjunto  $P'_{4m}$  de puntos en posición general con  $|P'_{4m}| = n = 4m$  elementos y  $c_P = 2m$ , tal que necesitaremos más de  $2m$  puntos para bloquear todos los 5-hoyos de  $P'_{4m}$ .*

*Demostración.* Sea  $P'_{4m}$  un conjunto de  $4m = 30k$  puntos, con  $15k$  en su cierre convexo formando el conjunto de vértices de un polígono regular con  $15k$  lados. Tomaremos sobre la frontera de  $CH(P'_{4m})$  subconjuntos alternados con 10 y 5 vertices, dando un total de  $k$  subconjuntos de cada clase. Por cada subconjunto de 5 vértices, formamos un *bloque* conectando con un segmento de recta el primer y último elemento y agregando 15 puntos en el interior de esa región de forma que la región pueda ser descompuesta en 11 pentágonos convexos; el patrón corresponde con el dibujo plano clásico del 1-esqueleto de un dodecahedro. Ver figura 4.10, donde cada bloque está señalado como “a”.

La parte del cierre convexo de  $P'_{4m}$  que no está en los bloques forma un polígono convexo  $H$  con  $12k$  vértices:  $10k$  vendrán de los subconjuntos que no usamos en los bloques y  $2k$  vienen del primer y último punto de cada bloque.

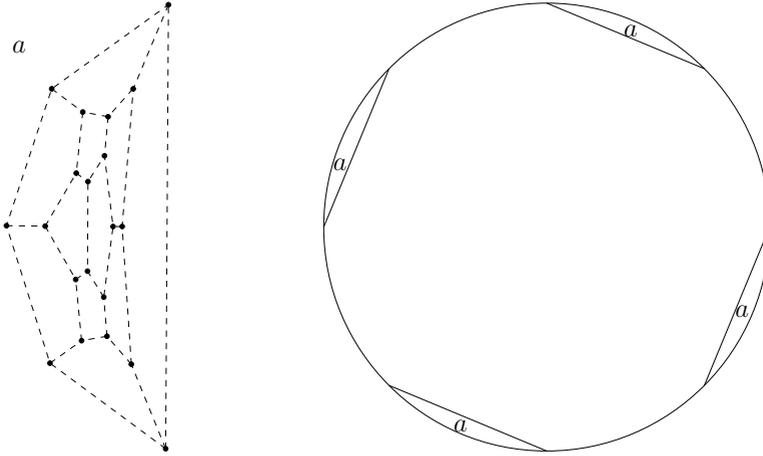


Figura 4.10:

Por el corolario 2,  $H$  necesita al menos  $12k/2 - 2$  puntos para bloquear todos sus 5-hoyos, y para los pentágonos contenidos en cada bloque necesitaremos  $11k$  bloqueadores. Entonces, cualquier conjunto 5-bloqueador para  $P'_{4m}$  contiene al menos  $(6k - 2) + 11k = 17k - 2$  puntos, que es mayor que  $2m = 15k$ .  $\square$

Al combinar los lemas 12 y 13 hemos demostrado que:

**Teorema 18.** *Existen dos conjuntos de puntos distintos con  $n = 4m$  puntos en posición no-convexa, tales que el número de vértices en el cierre convexo es  $2m$  y sus conjuntos 5-bloqueadores mínimos tienen cardinalidades diferentes.*

Concluimos esta sección con una cota inferior en el tamaño de todo conjunto 5-bloqueador para cualquier conjunto de puntos en posición general. Demostraremos que:

**Teorema 19.** *Sea  $P$  cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición general. Entonces, todo conjunto 5-bloqueador para  $P$  contiene al menos  $2\lceil \frac{n}{9} \rceil - 3$  puntos.*

*Demostración.* Harborth [17] demostró que cualquier conjunto de al menos 10 puntos en posición convexa tiene un 5-hoyo. Sea  $B$  un conjunto 5-bloqueador para  $P$ . De forma similar que en la demostración del lema 9, tomaremos un emparejamiento geométrico plano de los elementos de  $B$ , descomponiendo así el plano en regiones convexas. Entonces, de acuerdo al resultado de Harborth, cualquier región convexa de nuestra descomposición con 10 puntos tendría un 5-hoyo que no estaría bloqueado por ningún elemento de  $B$ . Por lo tanto, en cada una de estas regiones no podemos tener más de nueve elementos. Entonces, tal como en la prueba del lema 9, se sigue que  $|B| \geq 2\lceil \frac{n}{9} \rceil - 3$ .  $\square$

Creemos que esta cota está holgada, por lo que nos aventuramos a conjeturar lo siguiente:

**Conjetura 4.** *El número de puntos necesarios para bloquear todos los 5-hoyos de un conjunto de  $n$  puntos en posición general es mayor o igual a  $\frac{n}{4} \pm c$ , donde  $c$  es alguna constante que no depende de  $n$ .*

Si esta conjetura fuera cierta, implicaría, junto con el lema 12 que esta cota es justa.

## 4.5. Bloqueando $k$ -hoyos con $k > 5$

Finalmente considerarnos el problema de bloquear los  $k$ -hoyos, para valores mayores de  $k$ . Como se mencionó en la introducción, Horton [18] demostró que para  $k \geq 7$ , existen conjuntos de puntos en posición general que no tienen ningún  $k$ -hoyo. Esto ocasiona que la pregunta de encontrar el número mínimo de bloqueadores se vuelve interesante únicamente para algunas familias específicas de conjuntos de puntos que siempre tienen  $k$ -hoyos; ahora nos enfocaremos sólo en puntos en posición convexa.

Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa. Reciclando, nuevamente, el argumento de la demostración del lema 9, podemos verificar

que cualquier conjunto  $k$ -bloqueador para  $P$  tiene al menos  $2 \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil - 3$  elementos. Nuevamente, resulta que esta cota es esencialmente justa para valores impares de  $k$ , como mostraremos a continuación.

Construiremos un conjunto de puntos como sigue: sea  $\mathcal{R}_m$ ,  $C$ ,  $B$ , y  $\epsilon$  como en la demostración del lema 12, *i.e.*,  $\mathcal{R}_m$  es un  $m$ -gono regular,  $C$  su circuncírculo,  $B$  un conjunto de  $m - 2$  puntos que bloquean todos los triángulos de  $\mathcal{R}_m$ , y  $\epsilon$  es el radio de los discos infinitesimales con centro en los vértices de  $\mathcal{R}_m$  de tal forma que si perturbamos los vértices de  $\mathcal{R}_m$  en estos discos, el conjunto  $B$  continúa bloqueando todos los triángulos formados con los vértices perturbados. Sea  $k = 2s + 1$ . Reemplaza cada vértice  $p_i$  de  $\mathcal{R}_m$  con un conjunto  $S_i = \{p_1^i, \dots, p_s^i\}$  de  $s$  puntos sobre  $C$  dentro del círculo de radio  $\epsilon$  con centro en  $p_i$ , ver figura 4.11. Sea  $P = S_1 \cup \dots \cup S_m$ . Entonces  $P$  tiene  $n = m \times s$  elementos,

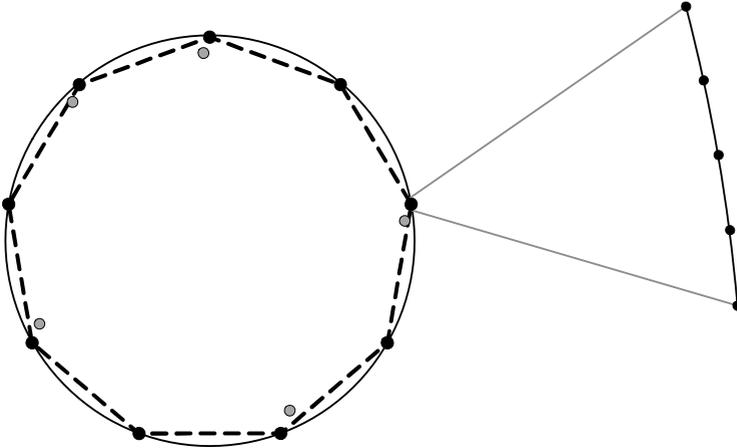


Figura 4.11: La construcción general cuando  $k = 11$ .

Entonces cualquier  $k$ -hoyo con vértices en  $P$  tiene vértices en al menos tres conjuntos  $S_i$ 's diferentes, y por lo tanto el conjunto  $B$  bloquea todos

los  $k$ -hoyos de  $P$ . Pero  $B$  tiene  $m - 2$  elementos, y  $2 \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil - 2 = 2 \left\lceil \frac{ms}{2s} \right\rceil - 2 = m - 2$ .

Por lo tanto, hemos demostrado:

**Teorema 20.**  $2 \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil - 3$  puntos siempre son necesarios, y a veces  $2 \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil - 2$  puntos son suficientes para bloquear los  $k$ -hoyos de un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa.

Ahora mostraremos que cuando  $k$  es par podemos dar una cota inferior mejor.

**Proposición 3.** Sea  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  un conjunto de  $n = mh$  puntos en posición convexa, con  $h \geq 2$ . Entonces,  $\frac{n}{h} - O(\sqrt{(n)})$  puntos son necesarios para bloquear todos los  $2(h+1)$ -hoyos de  $P$ .

*Demostración.* Denotemos por  $P'$  al conjunto de puntos  $p_{i,h}$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Entonces, el número de puntos en  $P'$  es  $n/h = m$ . La figura 4.12 muestra el caso con  $h = 2$  (6-hoyos), en el cual  $P'$  será el conjunto de puntos con índices pares.

Tomemos dos aristas arbitrarias  $p_{i,h}p_{(i+1)\cdot h}$  y  $p_{j,h}p_{(j+1)\cdot h}$ , con  $i+1 < j$ , y sea  $H_{i,j}$  el  $2(h+1)$ -hoyo de  $P$  determinado por el conjunto de puntos  $\{p_{i,h}, p_{i,h+1}, \dots, p_{(i+1)\cdot h}, p_{j,h}, p_{j,h+1}, \dots, p_{(j+1)\cdot h}\}$ . Ahora consideremos el 4-hoyo  $H'_{i,j}$  de  $P'$  determinado por  $p_{i,h}, p_{(i+1)\cdot h}, p_{j,h}$  y  $p_{(j+1)\cdot h}$ . Observamos que dos aristas de este 4-hoyo están en el cierre convexo de  $P'$  y las otras dos aristas son diagonales (ver figura 4.12).

Por lo tanto, podemos definir una biyección entre el conjunto  $Q'$  de 4-hoyos en  $P'$  definidos por pares  $p_{i,h}p_{(i+1)\cdot h}$  y  $p_{j,h}p_{(j+1)\cdot h}$ , y el conjunto  $Q$  de  $2(h+1)$ -hoyos  $H_{i,j}$  definidos anteriormente.

Ahora, tomemos un conjunto  $B$  de puntos que bloqueen los  $2h$ -hoyos de  $Q$ . Supongamos que uno de estos puntos,  $x$ , está en el interior del polígono con vértices  $p_{i,h}, p_{i,h+1}, \dots, p_{(i+1)\cdot h}$  (un triángulo cuando  $h = 2$ ). Sea  $R$  el conjunto de  $2(h+1)$ -hoyos de  $Q$  bloqueados sólo por  $x$ . Notemos que este punto sólo puede bloquear los  $2(h+1)$ -hoyos de  $Q$  formados por la arista  $p_{i,h}p_{(i+1)\cdot h}$ .

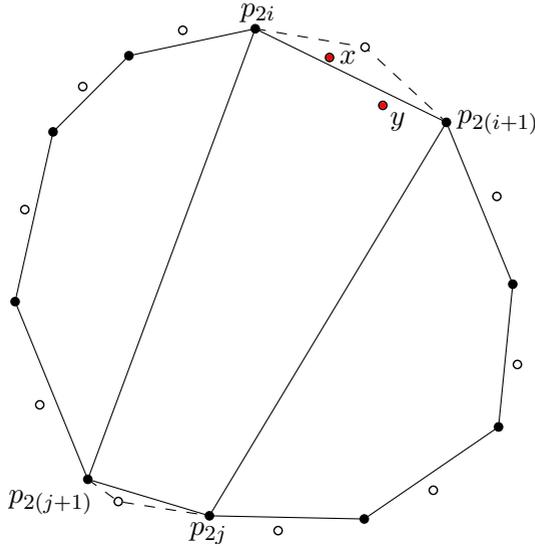


Figura 4.12: Ilustración de la proposición 3.

Entonces, podemos quitar a  $x$  y podemos agregar un punto  $y$  muy cerca del punto medio de la arista  $p_{i \cdot h} p_{(i+1) \cdot h}$ , dentro del cierre convexo de  $P'$ , tal que  $y$  bloquea al menos los  $2(h+1)$ -hoyos en  $R$  (ver figura 4.12).

Entonces podemos asumir que, para todo conjunto  $2(h+1)$ -bloqueador  $B$  para  $Q$ , todos sus elementos están en el cierre convexo de  $P'$ . Notemos que en este caso, si un punto  $z$  bloquea un  $2(h+1)$ -hoyo de  $Q$ , entonces su correspondiente 4-hoyo en  $Q$  también es bloqueado por  $z$  y viceversa.

Como tenemos una biyección entre  $Q$  y  $Q'$  y como necesitamos  $\frac{n}{h} - O(\sqrt{n})$  puntos para bloquear todos los 4-hoyos de  $Q'$ , es imposible que el tamaño de un conjunto  $2(h+1)$ -bloqueador para  $Q$  sea más pequeño que  $\frac{n}{h} - O(\sqrt{n})$ , de otro modo podríamos bloquear los 4-hoyos de  $Q'$  con menos puntos.  $\square$

## 4.6. Comentarios finales

Durante este capítulo nos enfocamos en dar cotas inferiores en el número de puntos necesarios para bloquear los  $k$ -hoyos de conjuntos de puntos en posición general, sin embargo, no pudimos realizar mucho respecto a cotas superiores. La única cota superior que conocemos es una consecuencia directa del hecho de que siempre podemos bloquear todos los triángulos de un conjunto de  $n$  puntos con  $2n - c - 2$  puntos. Entonces, para bloquear los  $k$ -hoyos podemos tomarnos un conjunto bloqueador de triángulos, al cual le quitaremos  $k - 3$  elementos arbitrarios, entonces, como toda triangulación de  $k$ -hoyo tiene exactamente  $k - 2$  triángulos entonces todo  $k$ -hoyo tendrá al menos un punto bloqueador. Cerrar el hueco que hay entre la cota inferior y superior es un problema abierto que resultó bastante complicado, sin embargo, conjeturamos que hay conjuntos de puntos en los que se necesitan esta cantidad de puntos, más aún, conjeturamos que para bloquear los  $k$ -hoyos en vértices de polígonos regulares necesitamos casi esta cantidad.



# Capítulo 5

## Bloqueando simplejos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

### 5.1. Introducción

Se dice que un conjunto  $\{x_0, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}^d$  de  $k + 1$  puntos es *linealmente independiente* si no existe alguna combinación lineal  $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k = \mathbf{0}$  con al menos un  $\lambda_i \neq 0$ ,  $k \leq d$ . Se dice que un conjunto de puntos  $\{x_0, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}^d$  es *afinmente independiente* si el conjunto  $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$  es linealmente independiente,  $k \geq 1$ . Un conjunto de un sólo punto también se considera afinmente independiente. Una combinación afín de un conjunto de  $k + 1$  puntos afinmente independiente en  $\mathbb{R}^d$  es una combinación lineal  $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k$  de  $x_0, \dots, x_k$  tal que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$ . El conjunto de todas las combinaciones afines de  $k + 1$  puntos afinmente independientes en  $\mathbb{R}^d$  se conoce como  $k$ -plano. En particular, un  $(d - 1)$ -plano en  $\mathbb{R}^d$  se le conoce como *hiperplano*. De acuerdo a nuestra intuición, un 1-plano es una línea recta, un 2-plano es un plano. Un  $k$ -plano es isomorfo al espacio  $k$ -dimensional  $\mathbb{R}^k$ . Así, podemos dar una definición de posición general para dimensiones más grandes: diremos que un conjunto de puntos  $S$  en  $\mathbb{R}^d$  está en posición general si todo

subconjunto de  $S$  con a lo más  $d + 1$  elementos es un conjunto afinmente independiente.

Un  $m$ -simplejo en  $\mathbb{R}^d$  es el cierre convexo de un conjunto de  $m + 1$  puntos afinmente independientes en  $\mathbb{R}^d$ , con  $m \leq d$ . Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$  un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo es un segmento y un 2-simplejo es un triángulo.

Dado un  $k$ -plano  $h$  y un  $m$ -simplejo  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^d$ , diremos que  $h$  *bloquea*  $\mathcal{P}$  si  $h$  interseca el interior relativo de  $\mathcal{P}$ . Diremos que un conjunto de  $k$ -planos  $\mathcal{H}$  es un *conjunto  $m_k$ -bloqueador* de un conjunto de puntos  $S$  si para todo  $m$ -simplejo inducido por los elementos de  $S$  existe un elemento en  $\mathcal{H}$  que lo bloquea.

Por ejemplo, un conjunto  $Q$  de puntos en el plano, (respectivamente líneas) es un  $3_0$ -bloqueador (respectivamente un  $3_1$ -bloqueador) de un conjunto de puntos  $S$  si todo triángulo con sus vértices en  $S$  contiene un elemento de  $Q$  en su interior (respectivamente, es intersectado por una línea en  $Q$ ).

En este capítulo estudiaremos el problema siguiente:

**Problema 6.** *Dados dos enteros  $k < m$ ,  $k < d$ , y  $m \leq d + 1$ , y un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  y en posición general, ¿cuántos  $k$ -planos son necesarios para bloquear todos los  $m$ -simplejos generados por los elementos de  $S$ ?*

En este capítulo nos enfocaremos en bloquear todos los  $m$ -simplejos de conjuntos de puntos en el plano o en  $\mathbb{R}^3$  y daremos algunos resultados iniciales para dimensiones mayores.

Este problema es una especie de generalización a los problemas estudiados en el capítulo anterior, antes nos enfocábamos a bloquear polígonos convexos vacíos en lugar de meros simplejos usando sólo puntos.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el problema de bloquear todos los 2-simplejos (triángulos) definidos por un conjunto de puntos en el plano y en posición general fue estudiado por Katchalsky y Meir [28], e independientemente por Czyzowicz, Kranakis, y Urrutia [9].

Dado un conjunto  $s$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , definimos  $f_k^m(S)$  como el tamaño del conjunto  $m_k$ -bloqueador más pequeño de  $S$ . Definiremos  $f_k^m(n)$

## 5.2 Conjuntos bien separados y cortes de sandwich de jamón 79

como el valor más grande de  $f_k^m(S)$  sobre todos los conjuntos  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ . Usando esta terminología, el teorema sobre bloquear triángulos se traduce a  $f_0^2(S) = 2n - c_P - 2$ .

En este capítulo daremos cotas esencialmente justas para  $f_k^m(n)$ , para conjuntos de puntos en el plano y en  $\mathbb{R}^3$ .

### 5.2. Conjuntos de puntos bien separados y cortes de sandwich de jamón generalizados

Decimos que una familia  $C_0, \dots, C_k$  de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$ ,  $k \leq d$ , están *bien separados* si para cualquier elección de  $x_i \in C_i$ , los puntos  $\{x_0, \dots, x_k\}$  son afinmente independientes. Una familia  $P_0, \dots, P_k$  de conjuntos finitos de puntos en  $\mathbb{R}^d$  están *bien separados* si sus cierres convexos  $CH(P_0), \dots, CH(P_k)$  están bien separados,  $k \leq d$ .

Notemos que en particular, esto implica que para cualquier par de índices diferentes  $i, j \leq k$ , los cierres convexos de  $P_i$  y  $P_j$  no se intersectan.

Sea  $P_0, \dots, P_k$  una familia de conjuntos finitos de puntos en  $\mathbb{R}^d$  ajenos por pares,  $k \leq d$ . Dados  $k + 1$  enteros positivos  $a_i \leq |P_i|$ , definimos un  $(a_0, \dots, a_k)$ -corte es un hiperplano  $h$  para el cual  $h \cap P_i \neq \emptyset$  y  $|h^+ \cap P_i| = a_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , donde  $h^+$  es el semiespacio acotado por debajo de  $h$ .

El resultado siguiente, de Steiger y Zao, será de muchísima utilidad:

**Teorema 21** ([36]). *Sea  $P_0, \dots, P_d$  una familia bien separada de conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^d$  tales que  $P_0 \cup \dots \cup P_d$  está en posición general, y sean  $a_0, \dots, a_d$  enteros positivos con  $a_i \leq |P_i|$ . Entonces existe un único  $(a_0, \dots, a_d)$ -corte de  $P_0, \dots, P_d$ .*

Finalmente, enunciamos la versión discreta del teorema del corte de sandwich de jamón.

**Teorema 22** (Teorema del sandwich de jamón discreto, [37]). *Cualquier familia de  $d$  conjuntos finitos de puntos en  $\mathbb{R}^d$  pueden ser bisectados simultáneamente por un hiperplano. Un hiperplano  $h$  bisecta un conjunto*

finito de puntos  $P$  si cada uno de los semiespacios abiertos definidos por  $h$  contienen a lo más  $\lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor$  elementos de  $P$ .

Con esto tenemos todas las herramientas que usaremos para dar un algoritmo para construir un conjunto  $m_k$ -bloqueador óptimo en el peor caso, para conjuntos de puntos en el plano y en  $\mathbb{R}^3$ .

### 5.3. Bloqueadores en el plano

Empezaremos estudiando el problema siguiente: ¿Cuántas rectas son necesarias para bloquear el conjunto de triángulos (segmentos) determinados por triplas (parejas) de elementos de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano? Usando nuestra terminología previa, la pregunta anterior se traduce a determinar cotas inferiores y superiores para  $f_1^1(n)$  y  $f_1^2(n)$  para conjuntos de puntos en el plano. Primero probaremos:

**Teorema 23.** *Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano  $r \leq f_1^2(S) \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ , dónde  $r$  es el número menor tal que  $\frac{n}{2} \leq 2 + 2 + 3 + \dots + r$ . Esta cota es justa.*

*Demostración.* La cota inferior se sigue del hecho de que  $r$  rectas, de las cuales no hay tres concurrentes, dividen el plano en  $2 + 2 + 3 + \dots + r$  regiones convexas. Ahora, si un conjunto de rectas cubre a todos los triángulos con vértices en  $S$ , entonces  $S$  tiene a lo más dos elementos en cada una de estas regiones.

Ahora probaremos que  $f_1^2(S) \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ . Con este propósito, mostraremos cómo obtener un conjunto  $\mathcal{H}$  de  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  rectas que formarán un conjunto  $2_1$ -bloqueador de  $S$ . Para esto será suficiente garantizar que en cualquiera de las caras del arreglo inducido por  $\mathcal{H}$  haya a lo más dos elementos de  $S$ , pues si en una cara no se diera esto, tendríamos tres puntos formando un triángulo que no estará bloqueado por ningún elemento de  $\mathcal{H}$ .

Primero, colocaremos en  $\mathcal{H}$  una recta  $\ell$  que separe  $S$  en dos subconjuntos de tamaño  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  y  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  respectivamente. Nos referiremos a estos subconjuntos como  $S_1$  y  $S_2$ . Claramente, estos subconjuntos están bien separados, y por el teorema 21 podemos encontrar un  $(2, 2)$ -corte para

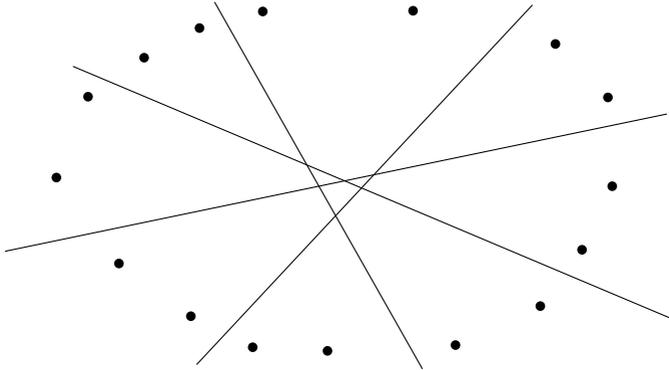


Figura 5.1: Para un conjunto de puntos en posición convexa se necesitan  $\frac{n}{4}$  rectas para bloquear todos sus triángulos.

$S_1$  y  $S_2$ . Este  $(2, 2)$ -corte es una recta  $\ell_1$  que dejará dos elementos  $x_1, x_2$  de  $S_1$  y dos elementos  $x'_1, x'_2$  de  $S_2$  arriba de ella. Además, estos puntos están separados del resto de elementos de  $S$  por  $\ell$  y  $\ell_1$ . Si hubiera algún elemento de  $S_1$  o  $S_2$  sobre  $\ell$  o  $\ell_1$  habrá que moverla ligeramente. Por tanto,  $\ell$  o  $\ell_1$  intersectarán cualquier triángulo con al menos un vértice en  $\{x_1, x_2, x'_1, x'_2\}$ .

Repetiremos esto recursivamente con  $S_1 \setminus \{x_1, x_2\}$  y  $S_2 \setminus \{x'_1, x'_2\}$ , por  $\lceil \frac{n}{4} \rceil - 2$  veces, esto nos dará  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  rectas, incluyendo  $\ell$  y  $\ell_1$ , estas rectas formarán un conjunto  $2_1$ -bloqueador de  $S$ .

Para mostrar que nuestra cota es justa, sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición convexa etiquetados como  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, con  $n$  par. Consideremos el conjunto de  $\frac{n}{2}$  triángulos  $p_i p_{i+1} p_{i+2}$ , con  $i \leq \frac{n}{2}$  para cualquier valor par de  $i$ . Observemos que para cualquier par de estos triángulos se intersectan en a lo más un vértices cuando  $n \geq 6$ .

Afirmamos que cualquier recta cubre a lo más dos de estos triángulos. Esto es verdad pues cualquier triángulo tiene exactamente dos aristas del

cierre convexo de  $S$ , por lo que cualquier recta que corte un triángulo de estos, está intersectando al menos una arista del cierre convexo de  $S$ . Cualquier recta intersecta a lo más dos aristas del cierre convexo, por lo que una recta puede bloquear a lo más dos de estos triángulos. Por lo que necesitaremos al menos una recta por cada dos de estos  $\frac{n}{2}$  triángulos, por lo que necesitaremos al menos  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  rectas para bloquear a estos triángulos. Por lo tanto, nuestra cota es justa.  $\square$

La propiedad clave de  $\mathcal{H}$  en la demostración anterior, es el hecho de que en cada cara del arreglo inducido por  $\mathcal{H}$  contiene a lo más dos elementos de  $S$ . Si en cada paso, en lugar de encontrar un  $(2, 2)$ -corte para  $S_1$  y  $S_2$ , buscamos un  $(m - 1, m - 1)$ -corte, obtendríamos un conjunto de rectas tales que cualquiera de las caras del arreglo inducido contendrá a lo más  $m - 1$  elementos de  $S$ . Esto nos permitirá dar un resultado más general.

Una  $m$ -isla de  $S$  es un subconjunto  $I \subset S$  de  $n$  elementos de forma tal que  $CH(I) \cap S = I$ ; que el cierre convexo de  $I$  no contenga ningún otro elemento de  $S$ . El resultado se puede demostrar usando la misma estrategia usada en la demostración del teorema 23.

**Teorema 24.** *Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano,  $\lceil \frac{n}{2(m-1)} \rceil$  rectas son suficientes y a veces necesarias para bloquear todas las  $m$ -islas de  $S$ .*

En particular, si hacemos  $m = 2$ , estaremos demostrando que  $f_1^1(S) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ; esto es, siempre podemos bloquear todos los segmentos de  $S$  con a lo más  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  rectas. Es fácil ver, nuevamente, que para un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa serán necesarias al menos  $\lceil \frac{n}{2(m-1)} \rceil$  rectas para bloquear todas sus  $m$ -islas.

Cerramos esta sección observando que el problema de calcular  $f_1^1(S)$  es equivalente a calcular el número mínimo de rectas tales que en cada cara del arreglo definido por estas haya a lo más un elemento de  $S$ . Este problema es conocido como el *problema del estallido* (*Shattering problem*, en inglés), el cual Freimer, Mitchell y Piatko demostraron que este problema es  $\mathcal{NP}$ -completo [31].

## 5.4. Bloqueadores en $\mathbb{R}^3$

Ahora consideramos el problema de bloquear los tetraedros inducidos por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  usando conjuntos de planos. La estrategia será muy parecida a la de la sección anterior.

Para la cota inferior, usaremos el siguiente conjunto  $C_n$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(a) = (a, a^2, a^3)$ . La imagen de  $f(\mathbb{R})$  es conocida como la *curva de momento* en  $\mathbb{R}^3$ . Claramente, cualquier plano en  $\mathbb{R}^3$  interseca  $f(\mathbb{R})$  en a lo más 3 puntos. Sea  $C_n = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  con  $p_i = f(i)$ . Como cualquier plano interseca  $f(\mathbb{R})$  en a lo más 3 puntos,  $C_n$  está en posición general. Dado cualquier segmento  $p_i p_j$ , sea  $f([i, j])$  la curva que contiene a todos los puntos  $f(x)$ , con  $i \leq x \leq j$ . Diremos que  $f([i, j])$  es la *sombra* del segmento  $p_i p_j$  en la curva de momento. La observación será muy útil:

**Observación 3.** *Sea  $p_i, p_j \in C_n$ . Cualquier plano que interseque al segmento  $p_i p_j$  también interseca su sombra  $f([i, j])$ .*

Consideramos el conjunto  $\{t_0, \dots, t_{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor}\}$  de tetraedros tales que el conjunto de vértices de  $t_i$  es  $\{p_{3i}, p_{3i+1}, p_{3i+2}, p_{3i+3}\}$ . Los interiores de estos tetraedros serán ajenos y  $t_i$  y  $t_{i+1}$  comparten exactamente un vértice que será  $p_{3i+3}$ .

**Observación 4.** *Si un plano interseca el interior de un tetraedro, entonces interseca el interior relativo de alguna de sus aristas.*

Definimos la *sombra* de  $t_i$  como la sombra del segmento  $p_{3i} p_{3i+3}$ , que de hecho puede ser pensada como la unión de las sombras de todas las aristas de  $t_i$ . Entonces, los interiores relativos de las sombras de  $\{t_0, \dots, t_{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor}\}$  son ajenos por pares. El lema siguiente es una consecuencia directa de las observaciones 3 y 4:

**Lema 14.** *Si un plano interseca  $t_i$ , entonces interseca el interior relativo de la sombra de  $t_i$ .*

Como cualquier plano interseca en a lo más tres puntos a la curva de momento, se sigue que cualquier plano interseca a lo más tres elementos de  $\{t_0, \dots, t_{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor}\}$ .

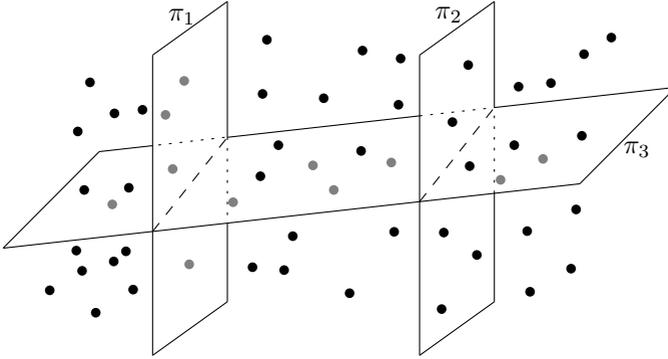


Figura 5.2: Ilustración de los tres planos iniciales que separan a  $S$  en seis partes.

Esto nos dice que:

**Lema 15.**  $f_2^3(n) \geq \lceil \frac{n-1}{9} \rceil$ , para conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora probaremos que  $f_2^3(n) \leq \lceil \frac{n}{9} \rceil + 2$ . Para esto, daremos un algoritmo que parte cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  en familias de subconjuntos bien separados de  $S$ .

Primero, encontremos dos planos paralelos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  tales que dividan  $S$  en tres subconjuntos ajenos  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  tales que  $||S_i| - |S_j|| \leq 1$ ,  $i \neq j \leq 3$ . Dicho de otra forma, que cada  $S_i$  contenga  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  o  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  elementos.

Ahora aplicamos el teorema del sandwich de jamón en  $\mathbb{R}^3$  para encontrar un tercer plano  $\pi_3$  que bisecta simultáneamente  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Sea  $S_i^+$  el subconjunto de  $S_i$  que queda arriba de  $\pi_3$  y  $S_i^-$  el que queda debajo de  $\pi_3$ , con  $i = 1, 2, 3$ . Esto nos da dos familias bien separadas y ajenas  $\mathcal{F} = \{S_1^+, S_2^-, S_3^+\}$  y  $\mathcal{F}' = \{S_1^-, S_2^+, S_3^-\}$ . Ahora, de forma similar que en el algoritmo usado en la sección anterior, vamos a buscar, iterativamente,  $(3, 3, 3)$ -cortes para  $\mathcal{F}$ , quitando los nueve puntos que queden arriba del corte hasta que cada conjunto en  $\mathcal{F}$  a lo más tres puntos, agregando los

planos de los cortes en el conjunto  $3_2$ -bloqueador. Después repetimos el mismo proceso para  $\mathcal{F}'$ .

Ahora es fácil ver que el conjunto de planos que obtenemos tiene exactamente  $\lceil \frac{n}{9} \rceil + 2$  elementos que forman un conjunto bloqueador para los tetraedros con vértices en  $S$ . Podemos concluir con el teorema siguiente:

**Teorema 25.** *En  $\mathbb{R}^3$ ,  $\lceil \frac{n-1}{9} \rceil \leq f_2^3(n) \leq \lceil \frac{n}{9} \rceil + 2$ .*

Usando  $(2, 2, 2)$ -cortes, podemos demostrar que  $f_2^3(n) \approx n/6$ , esto es, que con  $n/6$  planos (más una constante aditiva) podemos bloquear todos los triángulos inducidos por  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$ . De igual forma, si usáramos  $(2, 2, 2)$ -cortes llegaríamos a concluir que  $f_2^3(n) \approx n/3$  (planos suficientes para bloquear segmentos). Recurriendo al argumento de la curva de momentos, podemos demostrar que estas cotas son esencialmente justas también. Entonces, concluimos esta sección con el teorema siguiente, que es una versión más general que el anterior:

**Teorema 26.** *En  $\mathbb{R}^3$ ,  $\lceil \frac{n-1}{3m} \rceil \leq f_2^m(n) \leq \lceil \frac{n}{3m} \rceil + 2$ .*

### 5.4.1. Bloqueando con líneas rectas en $\mathbb{R}^3$

Para el problema de bloquear triángulos con rectas en el espacio, es fácil demostrar que algunas veces necesitaremos al menos  $n - 2$  rectas. De hecho, consideremos cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  y en posición convexa y general, esto es, que los elementos de  $S$  formen el conjunto de vértices de un poliedro convexo y en el que todas las caras son triángulos. Entonces, por la fórmula de Euler, podemos concluir que el cierre convexo de  $S$  está formado por exactamente  $2n - 4$  triángulos, y que cualquier recta intersecta el interior de a lo más dos de estos triángulos. Por lo que hemos probado que en  $\mathbb{R}^3$ ,  $f_1^2(n) \geq n - 2$ .

También es fácil probar que  $2n - 5$  rectas son siempre suficientes para bloquear los triángulos de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Para esto, simplemente proyectamos los elementos de  $S$  en algún plano, obteniendo un conjunto de puntos  $S'$  en  $\mathbb{R}^2$ . Por el teorema de bloquear triángulos, sabemos que si  $CH(S')$  tiene  $c$  vértices, entonces podemos encontrar un conjunto  $Q$  de  $2n - c - 2$  puntos que cubren todos los triángulos de  $S'$ .

Cada punto  $q \in Q$  produce una recta vertical  $\ell_q$  en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $q$ . Como cada triángulo  $t$  de  $S$  se proyecta a un triángulo  $t'$  de  $S'$ , existe una recta  $\ell_q$ ,  $q \in Q$  que cubre a  $t'$  y por lo tanto también cubre a  $t$ . Como en el peor caso,  $CH(S')$  tiene tres vértices, queda demostrado que:

**Teorema 27.** En  $\mathbb{R}^3$ ,  $n - 1 \leq f_1^2(n) \leq 2n - 5$ .

A diferencia de todas las cotas anteriores, en este caso no hemos encontrado ninguna cota más justa, el problema se vuelve más difícil puesto que ya no tienes propiedades tan fuertes como en el caso de los hiperplanos que siempre te parten en dos al espacio, o como en el caso de los puntos que se quedan *quietos* en único lugar. Hasta ahora no hemos dado con ninguna herramienta que nos permita *domar* a las rectas en  $\mathbb{R}^3$ .

Creemos que ninguna de las dos cotas es justa, sin embargo, carecemos de la calidad moral para establecer alguna conjetura al respecto. Por esto consideramos que el problema de determinar el valor exacto de  $f_1^m(n)$ , para  $m = 1, 2, 3$ , es un problema muy interesante, pero también muy resbaloso.

### 5.4.2. Bloqueando con puntos en $\mathbb{R}^3$

Ahora movemos nuestra atención al problema de bloquear a los tetraedros generados por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  por medio de puntos. Asumiremos que no hay dos puntos  $S$  en una misma recta ortogonal al plano  $z = 0$ .

De nueva cuenta, trabajaremos con la curva de momento  $f(a) = (a, a^2, a^3)$ , y el conjunto de puntos  $C_n = \{p_0, \dots, p_n\}$  que definimos anteriormente. Sean  $0 \leq i, j \leq n$  tales que  $i + 1 < j$ . Sea  $t_{i,j}$  el tetraedro con vértices  $\{p_i, p_{i+1}, p_j, p_{j+1}\}$ . Se puede probar [27] que los tetraedros  $t_{i,j}$ 's tienen interiores ajenos y forman una tetraedraelización del cierre convexo de  $C_n$ ; la unión de estos tetraedros es igual que  $CH(C_n)$ . Como cualquier conjunto de puntos que cubra a los tetraedros de  $S$  contiene al menos un elemento en cada uno de los  $t_{i,j}$ , se sigue que  $f_0^3(n+1)$  es al menos  $\binom{n-1}{2}$ .

Ahora daremos una cota superior para  $f_0^3(n+1)$ , para esto asumiremos que todos los elementos de  $S$  quedan arriba del plano  $z = 0$ . Construiremos

un conjunto bloqueador como sigue: para cada dos elementos  $x_i, x_j \in S$ , colocaremos un punto  $p_{i,j}$  un poco *arriba* del punto medio  $x_{i,j}$  del segmento de recta que conecta  $x_i$  con  $x_j$ , esto es,  $x_{i,j} = (a, b, c)$ , entonces  $p_{i,j} = (a, b, c + \varepsilon)$ . Después, para todo  $x_i \in S$ , colocaremos un punto  $p_i$  ligeramente *debajo* de  $x_i$ , esto es, si  $x_i = (a, b, c)$  entonces  $p_i = (a, b, c - \varepsilon)$ .

Ahora demostraremos que el conjunto  $Q$  formado de todos los puntos  $p'_{i,j}$ s y  $p_i$ 's cubren a todos los tetraedros de  $S$ . Consideremos cualesquiera cuatro puntos  $x_i, x_j, x_k, x_\ell$  de  $S$ . Sea  $t$  el cierre convexo de  $\{x_i, x_j, x_k, x_\ell\}$ ; el tetraedro inducido por estos cuatro puntos. Tendremos dos casos. En el primero,  $t$  se proyecta en el plano  $z = 0$  como un cuadrilátero convexo. En este caso, habrá una arista del cierre convexo de  $\{x_i, x_j, x_k, x_\ell\}$  que no sea visible por debajo; esto es, que si nos acostamos en el plano  $z = 0$ , y vemos a  $t$  como un sólido, habrá una arista que quedará oculta. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que esta es la arista que conecta  $x_k$  con  $x_\ell$ . Entonces el punto  $p_{i,j}$  estará contenido en  $t$  y por tanto lo estará cubriendo.

El segundo caso se da cuando  $t$  se proyecta como un triángulo en el plano  $z = 0$ . Entonces habrá un vértice, digamos  $x_i$ , que estará en el interior de la proyección de  $t$ . Ahora tenemos dos subcasos. En el primero, cuando vemos a  $t$  desde abajo y  $x_i$  no es visible, en este caso el punto  $p_i$  está contenido en  $t$ , y por tanto lo cubre. En el otro subcaso  $p_{i,j}$  está en  $t$  y por tanto lo cubre.

Entonces podemos concluir el teorema siguiente:

**Teorema 28.**  $\binom{n-1}{2} \leq f_0^3(n+1) \leq \binom{n+1}{2} + n - 9$ , para puntos en  $\mathbb{R}^3$ .

## 5.5. Comentarios finales

Los lemas 14 y 15, se generalizan facilmente a dimensiones mayores, aunque la demostración puede llegar a ser tediosa, dando el resultado siguiente:

**Lema 16.** En  $\mathbb{R}^d$ ,  $\lceil \frac{n-1}{d^2} \rceil \leq f_{d-1}^d(n)$ .

Y en general:

**Lema 17.** En  $\mathbb{R}^d$ ,  $\lceil \frac{n-1}{dm} \rceil \leq f_{d-1}^m(n)$ .

Nosotros conjeturamos que:

**Conjetura 5.**  $f_m^d(n) \approx \frac{n}{m \cdot d}$ .

Sin embargo, no tenemos una forma sistemática de encontrar para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ , un número constante de hiperplanos que lo separen en familias bien separadas con  $d$  conjuntos cada una. Esto probaría de forma automática que nuestra conjetura es verdadera.

Finalmente, dado que esta es una tesis para obtener un grado en computación cabe mencionar que Stiger y Zhao [36] presentan un algoritmo polinomial para calcular cortes generalizados de sandwich de jamón, este algoritmo implica que nuestro método para formar conjuntos bloqueadores de hiperplanos induce un algoritmo de complejidad  $O(n^2 \log^{d-3} n)$  para calcular conjuntos bloqueadores de cardinalidad óptima en el peor caso, el cual consiste en aplicar el algoritmo de Stiger y Zhao iterativamente, tal cual se menciona en nuestro método.

# Bibliografía

- [1] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, and J. Urrutia. Empty Monochromatic Triangles, *Computational Geometry, Theory and Applications*, **42** 9, (2009), 934–938.
- [2] C. Bautista-Santiago, M. Heredia, C. Huemer, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, and J. Urrutia. On the number of edges in geometric graphs without empty triangles. *Submitted*, January, 2011.
- [3] B. Vogtenhuber, Combinatorial aspects of colored point sets in the plane. Doctoral Thesis at Graz University of Technology, Nov. 2011.
- [4] G. Araujo, A. Dumitrescu, F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia, On the chromatic number of some geometric type Kneser graphs. *Computational Geometry Theory and Applications*, 32(1):59–69, 2005.
- [5] I. Bárány, and P. Valtr. Planar point sets with a small number of empty convex polygons, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, bf 41, 2, (2004), 243-266.
- [6] E. Boros y Z. Füredi. The number of triangles covering the center of an  $n$ -set. *Geom. Dedicata*, 17:69–77, 1984.
- [7] B. Bukh. A point in many triangles. *Electronic J. Combinatorics*, 13(10), 2006.
- [8] J. Ceder. Generalized sixpartite problems. *Bol. Soc. Math. Mexicana*, 2:28–32, 1964.

- [9] J. Czyzowicz, E. Kranakis, and J. Urrutia, Guarding the convex subsets of a point set, in *12th Canadian Conference on Computational Geometry*, Fredericton, New Brunswick, Canada, 2000, 47–50.
- [10] K. Dehnhardt. Leere konvexe Vielecke in ebenen Punktmengen, *Dissertation, TU Braunschweig*, (1987).
- [11] O. Devillers, F. Hurtado, G. Károlyi, and C. Seara. Chromatic variants of the Erdős-Szekeres Theorem, in *Computational Geometry Theory and Applications*, **26**, 3, (2003) 193–208.
- [12] V. Dujmović and D. Wood. Thickness and Antithickness, *Manuscript in preparation*, (2011).
- [13] P. Erdős. Some more problems on elementary geometry, *Austral. Math. Soc. Gaz.* , **5** (1978), 52–54.
- [14] P. Erdős, and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.*, (1935), **2**, 463–470.
- [15] R. Fabila-Monroy, and D.R. Wood, The chromatic number of the convex segment disjointness graph. In *Proceedings of XIV Spanish Meeting on Computational Geometry*, 2011.
- [16] T. Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets, *Discrete & Computational Geometry*, **39**, 1-3, (2008), 239–272.
- [17] H. Harborth, Konvexe, Fünfecke in ebenen Punktmengen. *Elemente Math.*, **33** (1978), 116–118.
- [18] J. D. Horton. *Sets with no empty convex 7-gons*. *Canad. Math. Bull.*, 26, 482 – 484 (1983).
- [19] G. Károlyi, J. Pach, and G. Tóth, A modular version of the Erdős-Szekeres theorem, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **51** (2001), 245–260.
- [20] M. Katchalski, and A. Meir, On empty triangles determined by points in the plane, *Acta Math. Hungar* **51** (1988), 323–328.

- 
- [21] C.M. Nicolás. The empty hexagon theorem, *Discrete & Computational Geometry*, **38** (2007), 389–397.
- [22] J. Pach and G. Tóth. Monochromatic empty triangles in two-colored point sets, *Geometry, Games, Graphs and Education: the Joe Malkevitch Festschrift*, S. Garfunkel and R. Nath, eds, COMAP, Bedford, MA., (2008), 195–198.
- [23] A. Pór, and D. R. Wood, On visibility and blockers, *Journal on Computational Geometry* **1(1)** (2010), 29–40.
- [24] G.B. Purdy. The minimum number of empty triangles, *AMS Abstracts*, **3**, (1982), 318.
- [25] T. Sakai, and J. Urrutia, Covering the convex quadrilaterals of point sets, *Graphs and Combinatorics* **38** (2007), 343–358.
- [26] J. Cano, A. García, F. Hurtado, T. Sakai, J. Tejel, J. Urrutia, Blocking the  $k$ -holes of point sets in the plane, *submitted*.
- [27] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. XVI, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney.
- [28] M. Katchalski, A. Meir, On empty triangles determined by points in the plane, *Acta Math. Hungar* **51** (1988), 323–328.
- [29] T. Kirkman. On a problem in combinatorics. *Cambridge Dublin Math. J.*, 2:191–204, 1847.
- [30] W. Morris and V. Soltan. The Erdős-Szekeres problem on points in convex position - a survey. *Bulletin (new series) American Math. Soc.*, 37(4), 437–458, 2000.
- [31] R. Freimer, J. S. B. Mitchell, C. D. Piatko, On the Complexity of Shattering Using Arrangements, in: *Proceedings of the 2nd Canadian Conference on Computational Geometry*, 1990, 218–222.

- 
- [32] A. Pór, D. R. Wood, On visibility and blockers, *J. Computational Geometry* **1(1)** (2010), 29–40.
- [33] D. Ray-Chaudhuri and R. Wilson. Solution to Kirkman’s schoolgirl problem. *Proc. Sym. Pure Math. 19, Amer. Math. Soc.*, 19:187–204, 1971.
- [34] H. J. Ryser. In *Combinatorial Mathematics*, pages 99–102, Buffalo, NY: Math. Assoc. Amer., 1963.
- [35] T. Sakai, J. Urrutia, Covering the convex quadrilaterals of point sets, *Graphs and Combinatorics* **38** (2007), 343–358.
- [36] W. Steiger, J. Zhao, Generalized Ham-Sandwich Cuts, *Discrete and Computational Geometry* **44(3)** (2010), 535–545.
- [37] H. Steinhaus, A note on the ham sandwich theorem, *Mathesis Polska* **9** (1938), 26–28.

*Renewed shall be blade that was broken...*