



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FRONTERAS EN HIPERESPACIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. en C. CLAUDIA GUADALUPE DOMÍNGUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS, BUAP
DR. HÉCTOR MENDEZ LANGO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F., AGOSTO DE 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México; en particular, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Al Profesor Adalberto García Máynez, mi tutor durante mis primeros dos años en la UNAM.

Al Profesor Alejandro Illanes Mejía, con su dirección presento este trabajo de tesis.

A los Profesores Raúl Escobedo Conde y Héctor Méndez Lango, mis tutores durante este proyecto de investigación.

A los Profesores Enrique Castañeda Alvarado, Jorge Marcos Martínez Montejano y María Isabel Puga Espinosa, mis sinodales para esta tesis doctoral.

Prefacio

En esta tesis presentamos un estudio de las fronteras, en el hiperespacio de un continuo, de los hiperespacios de los subcontinuos del continuo. Esto, que en primera instancia pareciera un trabalenguas (pero que a continuación se aclarará), se refiere a una temática que pertenece al campo de la matemática que se denomina topología; para ser más precisos, a la teoría de los hiperespacios de continuos. Esta teoría tiene una excelente exposición en los libros [3] y [5].

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Denotamos por $C(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos de un continuo X , el cual, equipado con la métrica de Hausdorff, es conocido como el hiperespacio de los subcontinuos del continuo X . Dado un elemento A de $C(X)$, $C(A)$ es naturalmente un subespacio de $C(X)$. Es un problema interesante conocer cómo se reflejan las propiedades topológicas de un continuo X en las fronteras de los hiperespacios, $C(A)$, donde A es un elemento de $C(X) - \{X\}$; y viceversa, es decir, conocer propiedades de un continuo X a través de las propiedades de estas fronteras en su hiperespacio $C(X)$. Los resultados que presentamos aquí se inscriben en el contexto de este problema general.

A continuación explicamos las aportaciones de esta tesis. En el Capítulo 1 incluimos hechos básicos de continuos e hiperespacios, así como algunos resultados conocidos en la literatura. Esto con el fin de facilitar la lectura de nuestras contribuciones.

En el Capítulo 2 exponemos los resultados más elementales que se obtienen con las fronteras de los hiperespacios; y demostramos que para todo subcontinuo propio A de un continuo X , $Fr(C(A))$ es un subcontinuo arco conexo de $C(X)$, más aún, probamos que para todo elemento B de $Fr(C(A)) - \{A\}$, existe un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde B hasta A .

En el Capítulo 3 presentamos resultados de conexidad local en fronteras de hiperespacios. En particular, demostramos que si A es un arco o una curva cerrada simple en un continuo X , entonces $Fr(C(A))$ es localmente conexo; además probamos que ésta es una propiedad característica de estos dos continuos, es decir, probamos que un continuo no degenerado X es un

arco o una curva cerrada simple si y sólo si para cualquier continuo Z que contiene a X se tiene que la frontera de $C(X)$ en $C(Z)$ es localmente conexa.

En el Capítulo 4 exponemos resultados de unicoherencia de fronteras de hiperespacios. Mostramos que éstas no siempre son unicoherentes; y exponemos un teorema que proporciona condiciones suficientes bajo las cuales $Fr(C(A))$ no es unicoherente, cuando A es un arco. Además, demostramos que si A es un arco o una curva cerrada simple en un continuo X tal que $Fr(A) = A$, entonces $Fr(C(A))$ es unicoherente si y sólo si $Fr(C(A)) = C(A)$.

En el Capítulo 5 demostramos que si todos los subcontinuos propios no degenerados de un continuo X tienen fronteras conexas y sus hiperespacios tienen fronteras que son 2-celdas, entonces X es un continuo indescomponible y cada uno de sus subcontinuos propios es un arco o un punto.

En el Capítulo 6 analizamos la semicontinuidad superior y la continuidad de la función frontera, es decir, de la función $F : C(X) - \{X\} \rightarrow C(C(X))$ definida por $F(A) = Fr(C(A))$ para todo $A \in C(X) - \{X\}$. Concretamente, demostramos que si X es un dendroide, entonces la función F no es semicontinua superiormente, y en consecuencia tampoco es continua en este caso. También demostramos que si F es continua para un continuo X , entonces todo subcontinuo propio de X es unicoherente. Aplicamos estos dos resultados para caracterizar a la circunferencia como el único continuo arco conexo para el cual la función F es continua.

Finalizamos esta tesis con el Capítulo 7, en el cual presentamos otras caracterizaciones del arco y la circunferencia con fronteras de hiperespacios, similares a las que se exponen en [2] usando semifronteras.

Claudia G. Domínguez López
Facultad de Ciencias e Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Enero de 2014

Contenido

Prefacio	i
1 Elementos básicos de continuos e hiperespacios	1
1.1 Continuos	1
1.2 Hiperespacios	17
1.3 Semifronteras en hiperespacios	28
2 Resultados generales	33
2.1 Hechos básicos	33
2.2 Arco conexidad	39
3 Conexidad local	43
4 Unicoherencia	65
5 Fronteras que son 2-celdas	79
6 Semicontinuidad superior y continuidad de la función frontera	91
7 Caracterizaciones del arco y de la circunferencia	107
Bibliografía	115

Capítulo 1

Elementos básicos de continuos e hiperespacios

En este capítulo incluimos conceptos y resultados de la topología de continuos y sus hiperespacios, con la finalidad de facilitar la lectura de nuestras contribuciones y, en la medida de lo posible, hacer una exposición autocontenida. Aquí sólo incluimos las demostraciones de los resultados para los cuales no encontramos una prueba en los libros conocidos de continuos e hiperespacios, que ya consideramos clásicos. Sin embargo, en la ausencia de cada prueba ponemos una referencia precisa.

1.1 Continuos

1.1 Notación. Para un subconjunto A de un espacio X escribimos \bar{A} , $\text{int}(A)$ y $\text{Fr}(A)$, para denotar la cerradura, el interior y la frontera de A en X , respectivamente. Algunas veces, por conveniencia, denotamos $\text{cl}(A)$ en lugar de \bar{A} . Asimismo, algunas veces, incluimos el símbolo X como un subíndice, por ejemplo, $\text{Fr}_X(A)$, para enfatizar la dependencia de estos conjuntos respecto del espacio X . El conjunto de todos los conjuntos singletons definidos por los puntos de un conjunto A es denotado por $F_1(A)$, es decir, $F_1(A) = \{\{x\} : x \in A\}$. Para indicar que una sucesión de puntos, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, en un espacio X converge a un punto x en X , escribimos $\lim x_n = x$. Para un espacio métrico X , con métrica d , $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ denotamos $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. A este conjunto se le llama la bola en X de radio ε con centro en el punto x , o para abreviar, la ε -bola de

x en X . A veces también lo denotamos por $B_X(x, \varepsilon)$.

El conjunto de los números enteros positivos, también llamados números naturales, es denotado por el símbolo \mathbb{N} ; y el conjunto de los números reales por el símbolo \mathbb{R} . El plano cartesiano es denotado por \mathbb{R}^2 . En general, para $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n denota el conjunto de las n -adas de números reales. Cuando consideramos una topología sobre estos conjuntos, ésta es siempre la topología inducida por la métrica euclidiana. En tal caso, los referimos como recta real, plano euclidiano, o en general, para $n \in \mathbb{N}$, n -espacio euclidiano, respectivamente.

A continuación incluimos una terminología que usamos con frecuencia en los capítulos que siguen.

Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si $h : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo, $h(0)$ y $h(1)$ se llaman los *puntos extremos* del arco A .

Una *curva cerrada simple*, a veces también referida como circunferencia, es un espacio homeomorfo a la circunferencia del plano euclidiano definida por $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Un *triodo simple* es un espacio homeomorfo al subespacio del plano euclidiano $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Si $h : T \rightarrow X$ es un homeomorfismo, $h((-1, 0))$, $h((1, 0))$ y $h((0, 1))$ se llaman los *puntos extremos* del triodo simple X .

Un *disco* es un espacio homeomorfo al *disco canónico* del plano euclidiano definido por $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Dado un entero positivo $n \geq 2$, una *n -celda* es un espacio homeomorfo al producto $\prod_{j=1}^n I_j$, donde $I_j = [0, 1]$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Notemos que una 2-celda es un disco.

Un cubo de Hilbert es un espacio homeomorfo al producto numerable $I^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, donde $I_n = [0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un subconjunto de un espacio que, con la topología de subespacio, es un continuo. Un continuo o subcontinuo, es *no degenerado* si contiene más de un punto. Un subcontinuo de un continuo es *propio* si no coincide con el continuo.

1.3 Ejemplos. El intervalo $[0, 1]$, la circunferencia S^1 , el triodo simple T , el disco D^2 y una n -celda son ejemplos de continuos. Como la metrizabilidad, la compacidad y la conexidad son propiedades topológicas, se sigue que todo arco, toda curva cerrada simple y todo triodo simple también son continuos.

Sabemos que un producto numerable de espacios metrizable es un espacio metrizable; y que la conexidad y la compacidad se preservan bajo el producto topológico. Así un cubo de Hilbert es un continuo.

1.4 Teorema. [1, Teorema 1.2]. Cada continuo es homeomorfo a un subcontinuo del cubo de Hilbert I^∞ .

1.5 Definición. Un espacio X es *localmente conexo* en un punto $x \in X$ si para cada conjunto abierto U en X tal que $x \in U$ existe un conjunto abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. Un espacio es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

1.6 Definición. Un espacio X es *conexo en pequeño* en un punto $x \in X$ si para cada conjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe un conjunto conexo V en X tal que $x \in \text{int}(V)$ y $V \subset U$.

1.7 Observación. De las definiciones se tiene que si un espacio X es localmente conexo en un punto $x \in X$, entonces X es conexo en pequeño en el punto x . El recíproco de este hecho es falso, véase por ejemplo [6, p. 83]. No obstante, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, entonces X es localmente conexo. Establecemos esto en la proposición que sigue.

1.8 Proposición. Para un espacio X las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) X es localmente conexo;
- (2) X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos; y
- (3) Para cada conjunto abierto U en X y cada componente C de U , se tiene que C es un conjunto abierto en X .

Demostración. (1) \rightarrow (2): Esta implicación se sigue directamente de las definiciones.

(2) \rightarrow (3): Sean U un conjunto abierto en X y C una componente de U . Fijemos un punto $x \in C$. Como X es conexo en pequeño en el punto x , existe un conjunto conexo V en X tal que $x \in \text{int}(V)$ y $V \subset U$. Como C es la componente de U que contiene al punto x , se tiene que $V \subset C$. Luego, $x \in \text{int}(C)$. Esto prueba que C es un conjunto abierto en X .

(3) \rightarrow (1): Sean x un punto en X y U un conjunto abierto en X tales que $x \in U$. Sea C la componente de U que contiene al punto x . Por hipótesis, C es un conjunto abierto en X . Se tiene que C es un conjunto abierto y conexo de X tal que $x \in C \subset U$. Así, X es localmente conexo. \square

1.9 Proposición. Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio conexo X tales que $X = A \cup B$. Sucede que:

- (1) Si $A \cap B$ es conexo, entonces A y B son conexos; y
- (2) Si X y $A \cap B$ son localmente conexos, entonces A y B son localmente conexos.

Demostración. (1) Supongamos que A no es conexo. Existen conjuntos E y F cerrados en A , ajenos y no vacíos tales que $A = E \cup F$. Como $A \cap B$ es un subconjunto conexo de A , sin perder generalidad podemos suponer que $A \cap B \subset F$. Se tiene que $X = E \cup (F \cup B)$. Notemos que $E \cap (F \cup B) = E \cap B \subset E \cap A \cap B \subset E \cap F = \emptyset$. Como E y F son cerrados en A y A es cerrado en X , se sigue que E y F son cerrados en X . Se obtiene que E y $F \cup B$ son conjuntos cerrados en X , ajenos, no vacíos y su unión es X . Esto es una contradicción porque X es conexo. Esta contradicción prueba que A es conexo. Similarmente se demuestra que B es conexo.

(2) Supongamos que X y $A \cap B$ son localmente conexos. Probaremos que A es localmente conexo. Para esto tomemos un punto $p \in A$ y un conjunto abierto U en A tales que $p \in U$. Sea V un conjunto abierto en X tal que $U = A \cap V$. Analicemos dos casos:

(i) $p \in A - B$; y

(ii) $p \in A \cap B$.

En el caso (i), notemos que, como B es cerrado en X y $A - B = X - B$, $A - B$ es abierto en X . Así, $(A - B) \cap V$ es un conjunto abierto en X . Además, $p \in (A - B) \cap V$. Luego, como X es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo en X , W , tal que $p \in W \subset (A - B) \cap V$. Como $(A - B) \cap V \subset A \cap V = U$, se sigue que W es un conjunto abierto en A , y conexo, tal que $p \in W \subset U$. Así, en el caso (i) se tiene lo requerido.

En el caso (ii), tomemos la componente C del conjunto $A \cap B \cap V$ que contiene al punto p . Como $A \cap B \cap V$ es abierto en $A \cap B$ y, por hipótesis, $A \cap B$ es localmente conexo, por la Proposición 1.8, se tiene que C es un conjunto abierto en $A \cap B$. Sea D un conjunto abierto en X tal que $C = A \cap B \cap D$. Notemos que C es un conjunto conexo contenido en $D \cap V$. Sea K la componente de $D \cap V$ tal que $C \subset K$. Observemos que $D \cap V$ es un conjunto abierto en X y, por hipótesis, X es localmente conexo, por la Proposición 1.8, se sigue que K es un conjunto abierto en X . Además, $C \subset A \cap B \cap K \subset A \cap B \cap D = C$, así $C = A \cap B \cap K$.

Por otra parte, tenemos que K es un espacio conexo tal que $K = (A \cap K) \cup (B \cap K)$ y, como A y B son cerrados en X , los conjuntos en esta unión son cerrados en K . Además, por la conclusión en el párrafo anterior, tenemos que $A \cap B \cap K$ es conexo. Luego, por el inciso (1) de esta proposición, se obtiene que $A \cap K$ es un conjunto conexo. Finalmente, como K es abierto en X , tenemos que $A \cap K$ es un conjunto abierto en A . Notemos que $p \in A \cap C$ y $C \subset K$, así $p \in A \cap K$; también notemos que $A \cap K \subset A \cap V = U$. Con esto, $A \cap K$ es un conjunto abierto y conexo en A tal que $p \in A \cap K \subset U$. Así, en el caso (ii) también se obtiene lo requerido.

En resumen, dados un punto p y un abierto U en A tales que $p \in U$, en ambos casos (i) y (ii), hemos encontrado un conjunto abierto y conexo

en A que contiene a p y que está contenido en U . Esto demuestra que A es localmente conexo. De manera similar se prueba que B es localmente conexo. \square

1.10 Proposición. Si X es una unión finita de continuos localmente conexos, entonces X es un espacio localmente conexo.

Demostración. Supongamos que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, donde cada A_i es un subcontinuo localmente conexo de X . Fijemos un punto $x \in X$ y un conjunto abierto U en X tal que $x \in U$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Como cada A_i es compacto y localmente conexo, podemos tomar una colección finita de conjuntos abiertos y conexos en A_i , $\{V_{i,1}, \dots, V_{i,m_i}\}$ tal que $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{i,j}$ y $\text{diam}(\overline{V}_{i,j}) < \varepsilon$ para todo $j \in \{1, \dots, m_i\}$. Se tiene que $X = \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^{m_i} V_{i,j})$.

Denotemos $V = \bigcup \{\overline{V}_{i,j} : x \in \overline{V}_{i,j}\}$. Notamos que V es la unión de conjuntos conexos que tienen un punto en común, así V es conexo. Además, si $y \in V$, entonces $y \in \overline{V}_{i,j}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y algún $j \in \{1, \dots, m_i\}$, se sigue que $d(x, y) \leq \text{diam} \overline{V}_{i,j} < \varepsilon$. Así, $V \subset B(x, \varepsilon)$. Por esto $V \subset U$. Observamos que $X - \bigcup \{\overline{V}_{i,j} : x \notin \overline{V}_{i,j}\}$ es un conjunto abierto que contiene al punto x y que está contenido en V . Esto implica que $x \in \text{int}(V)$. En resumen, V es un conjunto conexo que contiene en su interior al punto x y que está contenido en U . Esto prueba que X es conexo en pequeño en el punto x . Como el punto x fue tomado arbitrariamente de X , se tiene que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por la Proposición 1.8, se concluye que X es localmente conexo. \square

1.11 Lema. Si A es un subconjunto cerrado y conexo de un espacio conexo X es tal que $X - A = B \cup C$, donde B y C son conjuntos separados en X , entonces $A \cup B$ y $A \cup C$ son conexos. Además, si X es un continuo entonces $A \cup B$ y $A \cup C$ son subcontinuos de X .

Demostración. Primero veamos que $A \cup B$ es cerrado. Como $A \cap C = \emptyset$ y $\overline{B} \cap C = \emptyset$, observamos que $A \cup \overline{B} \subset A \cup B$. Así, puesto que $\overline{A \cup B} = A \cup \overline{B}$, se tiene que $\overline{A \cup B} \subset A \cup B$. Por esto, $A \cup B$ es cerrado. Similarmente se prueba que $A \cup C$ es cerrado.

Como $X = (A \cup B) \cup (A \cup C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A$, por el inciso (1) de la Proposición 1.9, se sigue que $A \cup B$ y $A \cup C$ son conexos.

Supongamos que X es un continuo. En particular, se tiene que X es compacto. Luego, como $A \cup B$ es cerrado en X , se sigue que $A \cup B$ es compacto. Así, $A \cup B$ es un subconjunto compacto y conexo de X , por lo cual $A \cup B$ es un subcontinuo de X . Similarmente se prueba que $A \cup C$ es un subcontinuo de X . \square

1.12 Definición. Un continuo X es *descomponible* si contiene dos subcontinuos propios A y B tales que $X = A \cup B$. Un continuo X es *indescomponible* si X no es descomponible. Un continuo es *hereditariamente descomponible* si todos sus subcontinuos propios no degenerados son descomponibles. Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos propios son indescomponibles.

1.13 Proposición. Un continuo X es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.

Demostración. (Necesidad). Supongamos que A es un subcontinuo propio de X tal que $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Analizamos dos casos:

- (i) $X - A$ es conexo; y
- (ii) $X - A$ no es conexo.

En el caso (i), como $\text{int}(A) \neq \emptyset$, se tiene que $\overline{X - A} \neq X$. Así, A y $\overline{X - A}$ son subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup \overline{X - A}$.

En el caso (ii) existen conjuntos separados en X , B y C , tales que $X - A = B \cup C$. Por el Lema 1.11, se tiene que $A \cup B$ y $A \cup C$ son subcontinuos de X . Como $C \neq \emptyset$ y $C \cap (A \cup B) = \emptyset$, se tiene que $A \cup B \neq X$. Similarmente, $A \cup C \neq X$. Así, $A \cup B$ y $A \cup C$ son subcontinuos propios de X tales que $X = (A \cup B) \cup (A \cup C)$.

En resumen, en cualquiera de los casos (i) o (ii) encontramos dos subcontinuos propios de X cuya unión es X . Por esto X es descomponible. Esto

prueba la necesidad.

(Suficiencia) Supongamos que X es descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Observamos que $X - B$ es un conjunto abierto y no vacío en X y que está contenido en A . Así, $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Es decir A es un subcontinuo propio de X con interior no vacío. Esto prueba la suficiencia. \square

1.14 Definición. La *composante de un punto* p de un continuo no degenerado X , denotada por $\kappa(p)$, es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen al punto p .

1.15 Proposición. Si p es un punto de un continuo no degenerado X , entonces la composante de p es la unión de una colección numerable de subcontinuos propios de X .

Demostración. Como X es un espacio métrico y compacto, podemos tomar una base numerable de X , $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Suponemos que $B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotemos $J = \{n \in \mathbb{N} : p \notin B_n\}$. Para cada $n \in J$ denotamos por C_n a la componente de $X - B_n$ que contiene al punto p . Notemos que $\{C_n : n \in J\}$ es una colección numerable de subcontinuos propios de X .

Probaremos que $\kappa(p) = \bigcup\{C_n : n \in J\}$. Es claro que $C_n \subset \kappa(p)$ para cada $n \in J$. Por esto basta demostrar que $\kappa(p) \subset \bigcup\{C_n : n \in J\}$. Fijemos un punto $x \in \kappa(p)$ y sea A un subcontinuo propio de X tal que $\{p, x\} \subset A$. Como $X - A$ es un conjunto abierto y no vacío de X , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subset X - A$. Observemos que $p \in A \subset X - B_m$. Así, $p \notin B_m$, por lo cual $m \in J$. Además, como A es conexo, se tiene que $A \subset C_m$. Luego, $x \in C_m$. Se sigue que $\kappa(p) \subset \bigcup\{C_n : n \in J\}$. Esto prueba la proposición. \square

1.16 Teorema. [4, Theorem 7.2, p. 294](Teorema de Baire) Ningún espacio métrico compacto es la unión de una colección numerable de sus subconjuntos cerrados de interior vacío.

1.17 Proposición. Si X es un continuo indescomponible y no degenerado, entonces $\kappa(p) \neq X$ para todo punto $p \in X$.

Demostración. Supongamos que $\kappa(p) = X$ para algún punto $p \in X$. Por la Proposición 1.15, existe una colección numerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subcontinuos propios de X tal que $X = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como cada A_n es un subconjunto cerrado de X , por el Teorema de Baire (Teorema 1.16), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(A_n) \neq \emptyset$. Por la Proposición 1.13, se sigue que X es un continuo descomponible. \square

1.18 Proposición. Si X es un continuo arco conexo y no degenerado, entonces X es descomponible.

Demostración. Supongamos que X es un continuo arco conexo, no degenerado e indescomponible. Fijemos un punto $p \in X$. Por la Proposición 1.17, podemos tomar un punto $q \in X - \kappa(p)$. Tomemos un arco A en X con puntos extremos p y q . Como q no pertenece a la componente de p y $p, q \in A$, se tiene que A no es un subcontinuo propio de X . Es decir, $A = X$. Así, X es un arco. Esto es una contradicción porque un arco es claramente un continuo descomponible. Esta contradicción prueba la proposición. \square

1.19 Teorema. [6, 5.2] Si A y B son conjuntos cerrados de un espacio métrico compacto X y para todo subconjunto conexo C de X se tiene que $A \cap C = \emptyset$ o $B \cap C = \emptyset$, entonces existen conjuntos cerrados y disjuntos en X , H y K , tales que $X = H \cup K$, $A \subset H$ y $B \subset K$.

1.20 Teorema. [1, Teorema 6.5] Si E es un subconjunto propio y no vacío de un continuo X y C es una componente de E , entonces $\overline{C} \cap \text{Fr}(E) \neq \emptyset$.

1.21 Proposición. [1, Lema 7.2] Si A es un subcontinuo de un continuo X y K es una componente de $X - A$, entonces $A \cup K$ es un subcontinuo de X que contiene propiamente a A .

1.22 Definición. Una función continua de un continuo X hacia la circunferencia, $f : X \rightarrow S^1$, tiene un levantamiento si existe una función continua $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \exp(l(x))$ para todo $x \in X$, donde $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es la función exponencial definida por $\exp(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen} 2\pi t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso la función l se llama un levantamiento de f .

1.23 Proposición. Sean X un continuo, A un subcontinuo de X y $f : X \rightarrow S^1$ una función continua.

- (1) Si $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento para f , entonces $l|_A$ es un levantamiento para $f|_A$.
- (2) Si f es un homeomorfismo, entonces f no tiene un levantamiento.

Demostración. (1) Esto es directo por la definición de levantamiento.

(2) Supongamos que f tiene un levantamiento $l : X \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $f = \exp \circ l$. Como f es inyectiva, se tiene que l es inyectiva. Se sigue que $l : X \rightarrow l(X)$ es un homeomorfismo. Esto implica que $l(X)$ es un continuo homeomorfo a S^1 contenido en \mathbb{R} . Esto es una contradicción. Así, (2) está demostrado. \square

1.24 Proposición. [3, Lemma 22.2] Supóngase que X es un continuo y que A y B son subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = H \cup K$, donde H y K son conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, en X . Supóngase que p y q son puntos en la circunferencia S^1 y que $S^1 = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son arcos tales que $S_1 \cap S_2 = \{p, q\}$. Si $g : X \rightarrow S^1$ es una función continua tal que $g(A) \subset S_1$, $g(B) \subset S_2$, $g(H) = \{p\}$ y $g(K) = \{q\}$, entonces la función g no tiene un levantamiento.

Demostración. Supongamos que, con las hipótesis mencionadas, la función g tiene un levantamiento, $l : X \rightarrow \mathbb{R}$. Denotemos $M = \exp(l(A) \cap l(B))$. Notemos que $l(A)$ y $l(B)$ son subcontinuos de \mathbb{R} . Por esto, $l(A) \cap l(B)$ es un subconjunto conexo de \mathbb{R} . Como \exp es un función continua, se sigue que M es un subconjunto conexo de S^1 .

Por otra parte, como la imagen bajo una función de una intersección de conjuntos está contenida en la intersección de las imágenes de tales conjuntos, se tiene que:

$$\exp(l(A \cap B)) \subset \exp(l(A) \cap l(B)) \subset \exp(l(A)) \cap \exp(l(B)).$$

Como $\exp \circ l = g$, de lo anterior y de la definición de M , se sigue que:

$$g(A \cap B) \subset M \subset g(A) \cap g(B).$$

Notemos que $g(A \cap B) = g(H \cup K) = g(H) \cup g(K) = \{p, q\}$; y que $g(A) \cap g(B) \subset S_1 \cap S_2 = \{p, q\}$. Esto implica que:

$$\{p, q\} \subset M \subset \{p, q\}.$$

Se obtiene que $M = \{p, q\}$. Esto es una contradicción porque M es conexo. Esta contradicción prueba que la función g no tiene un levantamiento. \square

1.25 Definición. Un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera dos de sus subcontinuos, A y B , tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es un conjunto conexo. Un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo de X es unicoherente.

1.26 Teorema. [7, Theorem (7.4)] Un continuo localmente conexo X es unicoherente si y sólo si toda función continua de X hacia la circunferencia S^1 tiene un levantamiento.

1.27 Teorema. [3, Lemmas 19.4 y 19.7] Una 2-celda es un continuo unicoherente.

1.28 Definición. Un *dendroide* es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.

1.29 Proposición. Todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.

Demostración. Sea Y un subcontinuo de un dendroide X . Veamos que Y es arco conexo. Sean p y q puntos distintos en Y . Sea pq el arco en X con puntos extremos p y q . Como X es hereditariamente unicoherente, se tiene que $pq \cap Y$ es un conjunto conexo. Como $pq \cap Y \subset pq$ y $\{p, q\} \subset pq \cap Y$, se sigue que $pq \cap Y = pq$. Por esto $pq \subset Y$. Así Y es arco conexo.

Claramente, Y es hereditariamente unicoherente. Esto prueba que Y es un dendroide. \square

1.30 Lema. Si X es un dendroide y a, b_1, b_2, \dots , son puntos en X tales que $ab_1 \subset ab_2 \subset \dots$, entonces existe $x \in X$ tal que $ab_n \subset ax$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, pongamos $Y_m = cl(\bigcup_{n \geq m} b_m b_n)$. Notemos que Y_m es un subcontinuo de X . Así, por la Proposición 1.29, Y_m es un dendroide. En particular Y_m es arco conexo. Luego, por la Proposición 1.18, Y_m es descomponible. Sean A_m y B_m subcontinuos propios de Y_m tales que $Y_m = A_m \cup B_m$. Como la familia $\{b_n : n > m\}$ está contenida en $A_m \cup B_m$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el conjunto, $\{n > m : b_n \in B_m\}$, es infinito. En seguida mostramos que $b_m \in A_m - B_m$. Supongamos que $b_m \in B_m$. Dado $n > m$, existe $r > n$ tal que $b_r \in B_m$. Como B_m es un dendroide y, en particular, es arco conexo, se tiene que $b_m b_r \subset B_m$ y, como $m < n < r$, entonces $b_m b_n \subset b_m b_r \subset B_m$. De aquí que, para todo $n > m$, $b_m b_n \subset B_m$. Así, $Y_m = cl(\bigcup_{n \geq m} b_m b_n) \subset B_m$ y por tanto, $Y_m = B_m$, esto es una contradicción con la elección de B_m . Por tanto, $b_m \notin B_m$, es decir, $b_m \in A_m - B_m$.

Ahora, elegimos $y \in B_m$; en el arco $b_m y$, tomamos el primer punto en B_m , yendo de b_m a y , y le llamamos u_m ; esto es, $b_m u_m \cap B_m = \{u_m\}$.

Afirmamos que $Y_m = b_m u_m \cup B_m$. En efecto, denotemos $Z_m = b_m u_m \cup B_m$. Notemos que Z_m es un subcontinuo de X y por tanto, un dendroide y así, arco conexo. Dada $n > m$, existe $r > n$ tal que $b_r \in B_m$. Así, $b_m b_n \subset b_m b_r$ y $b_m, b_r \in Z_m$. Luego, $b_m b_r \subset Z_m$ y, por lo tanto, $b_m b_n \subset Z_m$, lo que nos dice que $Y_m = cl(\bigcup_{n \geq m} b_m b_n) \subset Z_m$. De aquí que $Y_m = Z_m$, lo que verifica nuestra afirmación.

A continuación veamos que la familia $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Para esto probaremos que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \in B_m$ para todo $n \geq N_m$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $N_m \in \mathbb{N}$ tales que $b_{N_m} \in B_m$. Si $n > N_m$, existe $r > n$ tal que $b_r \in B_m$. Esto nos dice que $b_{N_m} b_n \subset b_{N_m} b_r \subset B_m$ y, por lo tanto, $b_n \in B_m$. Con esto, sean $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ y $N_{m_1}, \dots, N_{m_k} \in \mathbb{N}$. Escojamos $n > N_{m_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Se tiene que $b_n \in \bigcap_{i=1}^k B_{m_i}$. Esto muestra que la familia $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$, en efecto, tiene la propiedad de la intersección finita.

Elijamos $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ y veamos que $b_m \in ax$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $r > m$ tales que $b_r \in B_m$. Por hipótesis, sabemos que $ab_m \subset ab_r$; además, como $ax \cup B_m$ es un continuo que tiene a a y a b_r , tenemos que $ab_r \subset ax \cup B_m$. Luego, $ab_m \subset ab_r \subset ax \cup B_m$ y así, $b_m \in ax \cup B_m$, y dado que $b_m \notin B_m$, entonces $b_m \in ax$. Se concluye que $ab_m \subset ax$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto termina la demostración del lema. \square

1.31 Teorema. (Teorema de Reducción de Brouwer) Si X es un espacio con base numerable y \mathcal{K} es una colección no vacía de subconjuntos cerrados de X , con la propiedad de que para cada sucesión creciente, $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \dots$, de elementos de \mathcal{K} existe un elemento K de \mathcal{K} tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K$, entonces \mathcal{K} tiene un elemento maximal (i.e., un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de \mathcal{K}).

Demostración. Fijamos un elemento $K_0 \in \mathcal{K}$ y una base numerable $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ para la topología de X . Consideramos la subcolección \mathcal{K}_1 de la colección \mathcal{K} definida como sigue:

$$\mathcal{K}_1 = \{K \in \mathcal{K} : K_0 \subsetneq K \text{ y } K \cap B_1 \neq \emptyset\}.$$

Si \mathcal{K}_1 no es vacía fijamos un elemento $K_1 \in \mathcal{K}_1$ y si la colección \mathcal{K}_1 es vacía definimos $K_1 = K_0$.

Supongamos que se han determinado n elementos de \mathcal{K} , K_1, K_2, \dots, K_n , tales que $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n$ y, si K_{i-1} está contenido propiamente en K_i , entonces $K_i \cap B_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos la subcolección \mathcal{K}_{n+1} de la colección \mathcal{K} definida como sigue:

$$\mathcal{K}_{n+1} = \{K \in \mathcal{K} : K_n \subsetneq K \text{ y } K \cap B_{n+1} \neq \emptyset\}.$$

Si \mathcal{K}_{n+1} no es vacía fijamos un elemento $K_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$ y si la colección \mathcal{K}_{n+1} es vacía definimos $K_{n+1} = K_n$.

De este modo, inductivamente, se ha determinado una sucesión creciente,

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \dots,$$

de elementos de \mathcal{K} con la propiedad adicional de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si K_{n-1} está contenido propiamente en K_n , entonces

$$K_n \cap B_n \neq \emptyset.$$

Por hipótesis, existe un elemento K de \mathcal{K} tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K$.

Demostraremos que K es un elemento maximal en \mathcal{K} . Para esto, supongamos, por el contrario, que existe un elemento K' en \mathcal{K} que contiene propiamente a K y fijemos un punto $x \in K' - K$. Se tiene que $X - K$ es un conjunto abierto en X que contiene al punto x . Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset X - K$.

Por una parte, como $K_m \subset K$ y $K \cap B_m = \emptyset$, se tiene que $K_m \cap B_m = \emptyset$.

Por otra parte, puesto que $K_{m-1} \subset K$ y K está contenido propiamente en K' , entonces K_{m-1} está contenido propiamente en K' . Además, como $x \in K' \cap B_m$, se tiene que $K' \cap B_m \neq \emptyset$. Luego, K' es un elemento de la colección \mathcal{K}_m . Es decir, la colección \mathcal{K}_m , que usamos para determinar al elemento K_m de la sucesión construida, no es vacía. Luego, el elemento K_m está determinado de tal forma que $K_m \cap B_m \neq \emptyset$. Esto es una contradicción con lo establecido en el párrafo previo. Esta contradicción demuestra que K es un elemento maximal en \mathcal{K} . \square

1.32 Teorema. Si X es un dendroide entonces, para cualesquiera puntos a y b de X , existe un arco maximal que los contiene.

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{B} = \{cd : c, d \in X \text{ y } ab \subset cd\}$. Veamos que \mathcal{B} tiene un elemento maximal, usando el Teorema de Reducción de Brouwer, vea el Teorema 1.31. Sea $\{c_n d_n : n \in \mathbb{N}\}$ una subfamilia de \mathcal{B} tal que $c_n d_n \subset c_{n+1} d_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y elijamos $a_0 \in ab - \{a, b\}$. Obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b \in a_0 c_n$ o $b \in a_0 d_n$. Es claro que una de estas dos condiciones ocurre para un subconjunto infinito de \mathbb{N} , de modo que podemos suponer que $b \in a_0 d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se sigue que $a_0 d_1 \subset a_0 d_2 \subset \dots$ y $a_0 c_1 \subset a_0 c_2 \subset \dots$. Luego, por el Lema 1.30, existen x_c y x_d en X tales que $a_0 c_n \subset a_0 x_c$ y $a_0 d_n \subset a_0 x_d$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $a_0 c_n \cup a_0 d_n \subset a_0 x_c \cup a_0 x_d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $c_n d_n \subset x_c x_d$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Reducción de Brouwer, \mathcal{B} tiene un elemento maximal; o sea, un arco maximal. Esto prueba el teorema. \square

1.33 Teorema. [6, 8.26]. Todo conjunto abierto y conexo en un continuo localmente conexo es arco conexo.

1.34 Definición. Un punto p de un espacio X es *punto de corte* de X si $X - \{p\}$ no es conexo.

1.35 Teorema. [6, 6.6]. Todo continuo no degenerado tiene al menos dos puntos que no son de corte.

1.36 Teorema. [6, 8.40(b)] Si un continuo no degenerado y localmente conexo X no contiene triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Demostración. Sea X un continuo con las propiedades mencionadas y supongamos que X no es un arco. Probaremos que X es una curva cerrada simple.

Por el Teorema 1.35, podemos tomar dos puntos distintos p y q en X los cuales no son puntos de corte de X . Se tiene que X , $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ son conjuntos abiertos y conexos en X , luego, por el Teorema 1.33, estos tres conjuntos son arco conexos. Tomemos un arco A_1 en X con puntos extremos p y q . Por el supuesto inicial, $A_1 \neq X$. Fijemos un punto $r \in X - A_1$. Podemos tomar un arco A_2 en $X - \{q\}$ con puntos extremos r y p ; y un arco A_3 en $X - \{p\}$ con puntos extremos r y q . Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ tomamos un homeomorfismo $h_i : [0, 1] \rightarrow A_i$ de manera tal que $h_1(0) = p$; $h_1(1) = q$; $h_2(0) = r$, $h_2(1) = p$; $h_3(0) = r$ y $h_3(1) = q$.

Afirmamos que $A_1 \cap A_2 = \{p\}$. Para probar esto supongamos que existe un punto $a \in (A_1 \cap A_2) - \{p\}$. Sea $s_a \in [0, 1]$ tal que $h_2(s_a) = a$. Denotemos $s_0 = \inf \{s \in [0, 1] : h_2(s) \in A_1\}$. Notemos que $s_0 \leq s_a$. Como $a \neq p$ y $h_2(1) = p$, se tiene que $s_a \neq 1$, es decir $s_a < 1$. Así, $s_0 < 1$, por lo que $h_2(s_0) \neq p$. Por otra parte, como $h_2(s_0) \in A_2$ y $q \notin A_2$, se tiene que $h_2(s_0) \neq q$. Además, como A_1 es cerrado y h_2 es una función continua, se tiene que $h_2(s_0) \in A_1$. Por esto, y puesto que $h_2(0) = r$ y $r \notin A_1$, se sigue que $s_0 \neq 0$, es decir $0 < s_0$. Por la definición de s_0 , se tiene que $h_2(s) \notin A_1$ para todo $s \in [0, s_0)$.

Denotemos $z = h_2(s_0)$ y $B = h_2([0, s_0])$. Por los argumentos previos, se tiene que B es un arco en X con puntos extremos r y z . Además $A_1 \cap B = \{z\}$ y $z \notin \{p, q\}$. Se sigue que $A_1 \cup B$ es un triodo simple en X , lo cual es una contradicción porque X no contiene triodos simples. Esto demuestra que $A_1 \cap A_2 = \{p\}$.

Similarmente se demuestra que $A_1 \cap A_3 = \{q\}$ y $A_2 \cap A_3 = \{r\}$.

Vamos a definir un homeomorfismo de la circunferencia S^1 en $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Para hacer esto tomamos tres puntos distintos a, b y c en S^1 y tres arcos B_1, B_2 y B_3 , con puntos extremos a y b ; b y c ; y c y a , respectivamente, de tal manera que $B_1 \cap B_2 = \{b\}$, $B_2 \cap B_3 = \{c\}$ y $B_1 \cap B_3 = \{a\}$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tomemos un homeomorfismo $g_i : B_i \rightarrow A_i$, de tal forma que $g_1(a) = q$, $g_1(b) = p$; $g_2(b) = p$, $g_2(c) = r$; $g_3(c) = r$ y $g_3(a) = q$. Definimos $g : S^1 \rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3$ como

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{si } x \in B_1, \\ g_2(x), & \text{si } x \in B_2, \\ g_3(x), & \text{si } x \in B_3. \end{cases}$$

Como cada g_i es un homeomorfismo y las definiciones de g_i y g_j coinciden en $B_i \cap B_j$, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que g es un homeomorfismo. Esto demuestra que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es una curva cerrada simple.

Afirmamos que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Para probar esto supongamos que no es así, y tomemos un punto $x_0 \in X - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Como X es arco conexo, podemos tomar un arco C en X con puntos extremos x_0 y p . Sea $f : [0, 1] \rightarrow C$ un homeomorfismo tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = p$. Denotemos $t_0 = \inf \{t \in [0, 1] : f(t) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$. Con argumentos similares a los usados en la prueba de que $A_1 \cap A_2 = \{p\}$, se demuestra que $h([0, t_0]) \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ contiene un triodo simple. Esto es una contradicción pues, por hipótesis, X no contiene triodos simples. Esta contradicción prueba que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Con esto se concluye que X es una curva cerrada simple. \square

1.37 Definición. Un continuo X es una *compactación del rayo* $[0, \infty)$ si X contiene un subconjunto denso, S , homeomorfo al intervalo $[0, \infty)$. El conjunto $X - S$ se denomina el *residuo* en la compactación del rayo X .

1.38 Nota. Si X es una compactación del rayo $[0, \infty)$ y S es como en la definición previa, usualmente identificamos a S con el intervalo $[0, \infty)$; y escribimos $X = Y \cup [0, \infty)$, donde $Y = X - S$.

1.39 Nota. Si en la Definición 1.37 ponemos a la recta real \mathbb{R} en lugar del rayo $[0, \infty)$ obtenemos la definición de compactación de la recta real.

1.40 Definición. Dado un punto $z_0 \in D^2 - S^1$, definimos la *proyección radial* desde el punto z_0 hacia la circunferencia S^1 , $p_{z_0} : D^2 - \{z_0\} \rightarrow S^1$, como $p_{z_0}(z)$ es el único punto en la intersección de la circunferencia S^1 con la semirecta que inicia en el punto z_0 y que contiene al punto z , para cada $z \in D^2 - \{z_0\}$.

1.2 Hiperespacios

El conjunto de todos los subcontinuos de un continuo X es denotado por $C(X)$. Dados un elemento A en $C(X)$ y un número $\varepsilon > 0$, la ε -nube de A en X , denotada por $N(\varepsilon, A)$, es el conjunto de todos los puntos de X que distan menos que ε de algún punto de A , es decir, si d es la métrica en X :

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Ahora, dados A y B en $C(X)$, denotamos

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

y definimos $H : C(X) \times C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ como $H(A, B) = \inf E(A, B)$, para cada par (A, B) en $C(X) \times C(X)$.

1.41 Proposición. [1, Proposición 2.1], [5, (0.2)], [6, 4.2]. Para cualquier continuo X , la función H es una métrica en $C(X)$.

1.42 Definición. Si X es un continuo, la métrica H es llamada la *métrica de Hausdorff* en $C(X)$. Con ésta $C(X)$ se llama el *hiperespacio de los subcontinuos* de X .

1.43 Teorema. [1, Corolario 6.13], [5, (1.13)], [6, 5.25]. Para cualquier continuo X , el hiperespacio de los subcontinuos, $C(X)$, es un continuo.

1.44 Proposición. Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$, A y B elementos de $C(X)$. Se tiene que $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Demostración. Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Por la definición de H y la notación previa a la Proposición 1.41, existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$. Se tiene que $A \subset N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

Recíprocamente, supongamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in A - N(\varepsilon - \frac{1}{n}, B)$, por la compacidad de A , podemos suponer que existe un punto $x \in A$ tal que $\lim x_n = x$, y, puesto que la distancia de x_n a B es mayor o igual que $\varepsilon - \frac{1}{n}$, se obtiene que la distancia de x a B es mayor o igual que ε . Es decir, $x \in A - N(\varepsilon, B)$. Esto demuestra que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\varepsilon - \frac{1}{n_1}, B)$. Similarmente se justifica que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset N(\varepsilon - \frac{1}{n_2}, A)$. Denotemos $m = \max \{n_1, n_2\}$. Se tiene que $A \subset N(\varepsilon - \frac{1}{m}, B)$ y $B \subset N(\varepsilon - \frac{1}{m}, A)$. Luego, por la definición de H , se sigue que $H(A, B) \leq \varepsilon - \frac{1}{m} < \varepsilon$. \square

1.45 Proposición. Sean A y B subcontinuos de un continuo X y $\varepsilon > 0$. Se cumple lo siguiente:

- (1) $A \subset N(\varepsilon, A)$;
- (2) Si $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$, entonces $N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \subset N(\varepsilon, B)$;
- (3) $N(\varepsilon, A \cup B) = N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$.

Demostración. (1) Evidente.

(2) Si $x \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se sigue que $d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < \varepsilon$. Así, $x \in N(\varepsilon, B)$.

(3) Si $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$, entonces existe $y \in A \cup B$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Como $y \in A$ o $y \in B$, se sigue que $x \in N(\varepsilon, A)$ o $x \in N(\varepsilon, B)$. Por esto $N(\varepsilon, A \cup B) \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Recíprocamente, si $x \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$, entonces $x \in N(\varepsilon, A)$ o $x \in N(\varepsilon, B)$. Así, existe $y \in A$ o existe $y \in B$, es decir existe un punto $y \in A \cup B$, tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Luego, $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Por esto $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. \square

1.46 Teorema. Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $C(X)$. Si A y B son elementos de $C(X)$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, entonces

- (1) $x \in A$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$ y $\lim x_n = x$;
- (2) La condición $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, implica que $A \subset B$;
- (3) $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$; y
- (4) La condición $A_{n+1} \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, implica que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demostración. (1) Sea $x \in A$. Por compacidad, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $x_n \in A_n$ tal que $d(x, x_n) = \inf \{d(x, y) : y \in A_n\}$. Veamos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto x . Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $H(A, A_n) < \varepsilon$. En particular, para cada $n \geq N$, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$. Así, como $x \in A$, $x \in N(\varepsilon, A_n)$ si $n \geq N$. Luego, para cada $n \geq N$, existe $y_n \in A_n$ tal que $d(x, y_n) < \varepsilon$. Como $d(x, x_n) \leq d(x, y_n)$, se sigue que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto prueba que $\lim x_n = x$.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión como se dice en (1). Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$ y $\lim x_n = x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. En particular, por la Proposición 1.44, $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Como $x_n \in A_n$, se tiene que $x_n \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Luego, existe un punto $a \in A$ tal que $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se sigue que $d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a) < \varepsilon$. Esto demuestra que $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ y, en consecuencia, $x \in \overline{A}$. Como A es cerrado se concluye que $x \in A$. Así, lo que se afirma en (1) está demostrado.

(2) Fijemos un punto $x \in A$. Por (1), existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$ y $\lim x_n = x$. Por hipótesis, $A_n \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $x_n \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por (1), se obtiene que $x \in B$. Así, $A \subset B$.

(3) Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B, B_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$. Por la Proposición 1.44, se tiene que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$, $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, $B \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B_n)$ y $B_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$, para todo $n > N$. De

aquí, y de la Proposición 1.45, se sigue que $A \cup B \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A \cup B) = N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, B) \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n) = N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$, para todo $n > N$. Es decir, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ para todo $n > N$.

Similarmente se prueba que $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ para todo $n > N$. Por la Proposición 1.44, se sigue que $H(A \cup B, A_n \cup B_n) < \varepsilon$ para todo $n > N$. Esto demuestra (3).

(4) Denotemos $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Como $E \subset A_n$, se sigue que $E \subset N(\varepsilon, A_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\varepsilon, E)$. Para probar esto suponemos lo contrario, así $A_n - N(\varepsilon, E) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que para un conjunto finito $\{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$, si $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ entonces $\bigcap_{i=1}^k (A_{n_i} - N(\varepsilon, E)) = A_m - N(\varepsilon, E) \neq \emptyset$. Luego $\{A_n - N(\varepsilon, E) : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita. Como X es compacto, se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n - N(\varepsilon, E)) \neq \emptyset$.

Notamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n - N(\varepsilon, E)) = E - N(\varepsilon, E)$. Así, $E - N(\varepsilon, E) \neq \emptyset$, es decir, $E \not\subset N(\varepsilon, E)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba nuestra afirmación.

Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subset N(\varepsilon, E)$. Por hipótesis se tiene que $A_n \subset A_N$ para todo $n \geq N$. Así, $A_n \subset N(\varepsilon, E)$ para todo $n \geq N$. Por la Proposición 1.44, se sigue que $H(E, A_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Así, $\lim A_n = E$. Esto demuestra (4). \square

1.47 Notación. Para un subcontinuo A de un continuo X , denotamos por $C(A, X)$ al conjunto de todos los subcontinuos de X que contienen a A ; es decir, $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Si A consiste de un único punto, digamos $A = \{p\}$, denotamos $C(p, X)$, en lugar de $C(\{p\}, X)$.

1.48 Ejemplo. [1, Ejemplo 3.1] El hiperespacio $C([0, 1])$ del intervalo $[0, 1]$ es homeomorfo a un disco en el plano euclidiano. Para probar esto, dado un subcontinuo A del intervalo $[0, 1]$, observamos que existe un único par de números a y b en $[0, 1]$ tales que $a \leq b$ y $A = [a, b]$. Es decir A es un subintervalo cerrado, o un punto, y está completamente determinado por sus

puntos extremos a y b . Definimos $h : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $h(A) = (a, b)$, para todo $A \in C([0, 1])$. Se puede demostrar que h es una función continua e inyectiva.

Denotemos $L = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$, $L_0 = \{0\} \times [0, 1]$ y $L_1 = [0, 1] \times \{1\}$. Sea Δ la región en el plano euclidiano acotada por los segmentos L , L_0 y L_1 . Es decir, $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Notemos que $h(C([0, 1])) = \Delta$, o sea que h es un homeomorfismo de $C([0, 1])$ sobre Δ . Observemos que $h(F_1([0, 1])) = L$, $h(C(0, [0, 1])) = L_0$ y $h(C(1, [0, 1])) = L_1$. Sabemos que Δ es un disco en el plano euclidiano. Además, si $g : \Delta \rightarrow D^2$ es un homeomorfismo, entonces $g \circ h : C([0, 1]) \rightarrow D^2$ es un homeomorfismo y $g(h(F_1([0, 1]) \cup C(0, [0, 1]) \cup C(1, [0, 1]))) = S^1$.

1.49 Ejemplo. [1, Ejemplo 3.2] El hiperespacio $C(S^1)$ de la circunferencia S^1 es homeomorfo al disco canónico del plano euclidiano D^2 . Para probar esto, dado un subcontinuo propio A de S^1 (es decir A es un arco o un punto en la circunferencia), denotamos por $m(A)$ a su punto medio, y por $l(A)$ a su longitud. Notemos que si A es un punto, entonces $m(A) = A$ y $l(A) = 0$. Sea $O = (0, 0)$ el punto central del disco D^2 . Definimos $h : C(S^1) \rightarrow D^2$ como:

$$h(A) = \begin{cases} (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A), & \text{si } A \in C(S^1) - \{S^1\}, \\ O, & \text{si } A = S^1. \end{cases}$$

Se puede demostrar que h es una función continua e inyectiva y, en consecuencia, un homeomorfismo de $C(S^1)$ sobre D^2 . Notemos que $h(F_1(S^1)) = S^1$.

1.50 Ejemplo. [1, Ejemplo 3.3] En este ejemplo explicaremos que el hiperespacio $C(T)$ del triodo simple T es homeomorfo a una 3-celda con tres 2-celdas adjuntas. Para esto observemos que $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, donde $L_1 = [-1, 0] \times \{0\}$, $L_2 = [0, 1] \times \{0\}$ y $L_3 = \{0\} \times [0, 1]$. Denotemos $v = (0, 0)$, el origen del plano euclidiano. Notemos que $C(T) = C(v, T) \cup C(L_1) \cup C(L_2) \cup C(L_3)$.

Para cada $A \in C(v, T)$, denotemos por a_i a la longitud del subintervalo $A \cap L_i$ de L_i , para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Notemos que A está completamente determinado por estas tres longitudes, y $0 \leq a_i \leq 1$. Así, podemos establecer una correspondencia biyectiva entre $C(v, T)$ y la 3-celda $[0, 1]^3$; a saber, $h : C(v, T) \rightarrow [0, 1]^3$ definida por $h(A) = (a_1, a_2, a_3)$ para cada $A \in C(v, T)$.

Se puede demostrar que h es una función continua, y por lo tanto un homeomorfismo de $C(v, T)$ sobre la 3-celda $[0, 1]^3$.

Por otra parte, como cada L_i es un arco, por el Ejemplo 1.48, sabemos que cada $C(L_i)$ es una 2-celda de la forma $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Donde la colección de subcontinuos de L_i que contienen al punto v , es decir $C(v, L_i)$, se corresponde con la arista $\{0\} \times [0, 1]$. Observemos que $C(v, T) \cap C(L_i) = C(v, L_i)$. Esto implica que cada una de las tres 2-celdas debemos adjuntarla a la 3-celda $[0, 1]^3$ por la arista correspondiente a $C(v, L_i)$.

De esta manera se obtiene que $C(T)$ es homeomorfo a la 3-celda $[0, 1]^3$ con tres 2-celdas adjuntas. Notemos que en este modelo $F_1(T)$ está representado como la unión de las aristas de las tres 2-celdas que tienen a v como único punto en común con la 3-celda $[0, 1]^3$.

1.51 Notación. Para un subconjunto E de un continuo X , denotamos $\mathcal{C}(E) = \{A \in C(X) : A \subset E\}$ y $\mathcal{D}(E) = \{A \in C(X) : A \cap E \neq \emptyset\}$.

1.52 Proposición. Para un subconjunto E de un continuo X se tiene que:

- (1) Si E es cerrado, entonces $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{D}(E)$ son conjuntos cerrados en $C(X)$;
y
- (2) Si E es abierto, entonces $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{D}(E)$ son conjuntos abiertos en $C(X)$.

Demostración. (1) Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{C}(E)$ y $A \in C(X)$ tales que $\lim A_n = A$. Fijemos un punto $x \in A$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim x_n = x$ y $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $A_n \in \mathcal{C}(E)$, se tiene que $A_n \subset E$, así $x_n \in E$. Luego, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en E . Como E es cerrado, se sigue que $x \in E$. Esto prueba que $A \subset E$. Es decir, $A \in \mathcal{C}(E)$. Esto demuestra que si E es cerrado en X , entonces $\mathcal{C}(E)$ es cerrado en $C(X)$.

A continuación probaremos que si E es abierto en X , entonces $\mathcal{D}(E)$ es cerrado en $C(X)$. Para esto tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(E)$ y un elemento A de $C(X)$ tales que $\lim A_n = A$. Como $A_n \in \mathcal{D}(E)$, se tiene que $A_n \cap E \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in A_n \cap E$. Como X es compacto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y existe un punto $x \in X$ tales que $\lim x_{n_k} = x$. Como E es cerrado y $x_{n_k} \in E$ para todo

$k \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in E$. Por otra parte, como $\lim A_{n_k} = A$ y $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, se tiene que $x \in A$. Se sigue que $x \in A \cap E$. Así, $A \cap E \neq \emptyset$. Es decir $A \in \mathcal{D}(E)$. Esto demuestra que $\mathcal{D}(E)$ es cerrado, y concluye la prueba de (1).

(2) Si E es abierto entonces $X - E$ es cerrado. Así, por (1), $\mathcal{C}(X - E)$ y $\mathcal{D}(X - E)$ son cerrados en $C(X)$. Notemos que $\mathcal{C}(E) = C(X) - \mathcal{D}(X - E)$ y $\mathcal{D}(E) = C(X) - \mathcal{C}(X - E)$. Se sigue que $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{D}(E)$ son abiertos en $C(X)$. Esto demuestra (2). \square

1.53 Definición. Sean A y B subcontinuos de un continuo X tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Un *arco ordenado* en $C(X)$ desde A hasta B es una función continua, $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$, tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subset \alpha(t) \neq \alpha(s)$, si $0 \leq s < t \leq 1$.

1.54 Teorema. [1, Teorema 6.10], [5, (1.8) y (1.11)]. Para cualquier continuo X , y cualesquiera subcontinuos, A y B , de X tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, existe un arco ordenado en $C(X)$ desde A hasta B .

1.55 Definición. Una *función de Whitney* para el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X , es una función continua $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que:

- (1) si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$; y
- (2) $\mu(F_1(X)) = \{0\}$.

1.56 Teorema. [1, Teorema 5.3], [3, Theorem 13.4]. Para cualquier continuo X , existe una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$.

1.57 Teorema. [5, (1.4)]. Si X es un continuo y Λ es un subcontinuo no degenerado de $C(X)$, entonces Λ es la imagen de un arco ordenado si y sólo si para cualesquiera elementos A y B de Λ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Demostración. Si Λ es la imagen de un arco ordenado, entonces la condición de comparabilidad entre los elementos de Λ se tiene por la Definición 1.53.

Recíprocamente, supongamos que cualesquiera dos elementos de Λ son comparables por la inclusión de conjuntos. Por el Teorema 1.56 podemos tomar una función de Whitney, $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$. Denotemos por μ_0 a la restricción de μ a Λ . Notamos que si E y F son elementos de Λ , con $E \neq F$, entonces, puesto que $E \subset F$ o $F \subset E$, se tiene que $\mu_0(E) < \mu_0(F)$ o

$\mu_0(F) < \mu_0(E)$. Esto significa que $\mu_0 : \Lambda \rightarrow \mu_0(\Lambda)$ es una biyección continua y, en consecuencia, es un homeomorfismo. Como Λ es no degenerado, se tiene que $\mu_0(\Lambda)$ es un intervalo (no degenerado) contenido en $[0, 1]$. Luego, existen $a, b \in [0, 1]$, con $a < b$, tales que $\mu_0(\Lambda) = [a, b]$.

Tomemos el homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definido por $h(t) = (b-a)t + a$ para todo $t \in [0, 1]$. Definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\alpha(t) = \mu_0^{-1}(h(t))$ para todo $t \in [0, 1]$. Como h es un homeomorfismo del intervalo $[0, 1]$ sobre $[a, b]$ y μ_0 es un homeomorfismo del intervalo $[a, b]$ sobre Λ , se tiene que α es un homeomorfismo del intervalo $[0, 1]$ sobre Λ .

Veamos que α es un arco ordenado en $C(X)$. Sean $s, t \in [0, 1]$, con $s < t$. Como α es inyectiva, se tiene que $\alpha(s) \neq \alpha(t)$. Como $\alpha([0, 1]) = \Lambda$, se tiene que $\alpha(s)$ y $\alpha(t)$ son elementos de Λ . Luego, $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ o $\alpha(t) \subset \alpha(s)$ (esto último es por la propiedad que Λ tiene por hipótesis). Notamos que si $\alpha(t) \subset \alpha(s)$, entonces $\mu_0(\alpha(t)) < \mu_0(\alpha(s))$. Luego, $h(t) < h(s)$, es decir, $(b-a)t + a < (b-a)s + a$. De aquí, $t < s$. Esto demuestra que si $s < t$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t) \neq \alpha(s)$. Con esto, se concluye que α es un arco ordenado. \square

1.58 Proposición. Si P y Q son subconjuntos cerrados de un continuo X , entonces existe un subcontinuo M de X tal que $M \cap P \neq \emptyset$, $M \cap Q \neq \emptyset$ y para todo subcontinuo propio N de M se tiene que $N \cap P = \emptyset$ o $N \cap Q = \emptyset$.

Demostración. Denotemos $\mathcal{L} = \{A \in C(X) : A \cap P \neq \emptyset \text{ y } A \cap Q \neq \emptyset\}$. Es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D}(Q)$, véase la Notación 1.51. Por la Proposición 1.52, se tiene que \mathcal{L} es un subconjunto cerrado (y así compacto) de $C(X)$. Por el Teorema 1.56 podemos tomar una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$. Por continuidad, $\mu(\mathcal{L})$ es un subconjunto compacto del intervalo $[0, 1]$. Notemos que $X \in \mathcal{L}$. Así, $\mu(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Luego, existe un número $t_0 \in \mu(\mathcal{L})$ tal que $t_0 = \min \mu(\mathcal{L})$. Sea $M \in \mathcal{L}$ tal que $\mu(M) = t_0$. Como $M \in \mathcal{L}$, se tiene que $M \cap P \neq \emptyset$ y $M \cap Q \neq \emptyset$. Observemos que si N es un subcontinuo propio de M , entonces $\mu(N) < \mu(M) = t_0$. Se sigue que $\mu(N) \notin \mu(\mathcal{L})$. Así, $N \notin \mathcal{L}$. Luego, $N \cap P = \emptyset$ o $N \cap Q = \emptyset$. Esto prueba la proposición. \square

1.59 Nota. Si M es como en la Proposición 1.58, decimos que M es un subcontinuo de X *irreducible* entre P y Q .

1.60 Proposición. Si X es una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo un continuo no degenerado Y , entonces Y es el límite de una sucesión de arcos en el rayo $[0, \infty)$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos $X_n = Y \cup [n, \infty)$ y tomemos un arco ordenado $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde $\{n\}$ hasta X_n , véase el Teorema 1.54. Fijemos una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$, véase el Teorema 1.56. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu \circ \alpha_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua tal que $\mu \circ \alpha_n(0) = \mu(\{n\}) = 0$ y $\mu \circ \alpha_n(1) = \mu(X_n)$. Así, $\mu \circ \alpha_n(0) \leq \mu(Y) < \mu \circ \alpha_n(1)$. Luego, por el teorema del valor intermedio, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [0, 1]$ tal que $\mu(\alpha_n(t_n)) = \mu(Y)$.

Como cada α_n es un arco ordenado tal que $\alpha_n(0) = \{n\}$ y $\alpha_n(1) = X_n$, se tiene que $\{n\} \subset \alpha_n(t_n) \subset X_n$. Es decir, $\alpha_n(t_n)$ es un subcontinuo de X_n tal que $n \in \alpha_n(t_n)$. Notemos que si $\alpha_n(t_n) \cap Y \neq \emptyset$ entonces $\alpha_n(t_n) = X_n$, y así $\mu(X_n) = \mu(Y)$. Esto es una contradicción ya que $Y \subset X_n$ y $Y \neq X_n$. Esto prueba que $\alpha_n(t_n) \cap Y = \emptyset$, es decir $\alpha_n(t_n) \subset [0, \infty)$. Así, $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de arcos en el rayo $[0, \infty)$.

Como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión $\{\alpha_{n_k}(t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y existe un elemento $Z \in C(X)$ tales que $\lim \alpha_{n_k}(t_{n_k}) = Z$.

Probaremos que $Z = Y$. Para esto observemos que si $z \in [0, \infty)$, entonces $[0, z+1)$ es un conjunto abierto en X que contiene al punto z y que intersecta a lo más a un número finito de elementos de la sucesión $\{\alpha_{n_k}(t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$. Así, no existe una sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim z_k = z$ y $z_k \in \alpha_{n_k}(t_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, se sigue que $z \notin Z$. Esto demuestra que $[0, \infty) \cap Z = \emptyset$. Luego, $Z \subset Y$. Por otra parte, como μ es una función continua, se tiene que $\lim \mu(\alpha_{n_k}(t_{n_k})) = \mu(Z)$. En consecuencia, puesto que $\mu(\alpha_{n_k}(t_{n_k})) = \mu(Y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que $\mu(Z) = \mu(Y)$. Como μ es una función de Whitney, se concluye que $Z = Y$.

Con lo anterior hemos demostrado que Y es el límite de una sucesión de arcos en el rayo $[0, \infty)$. \square

1.61 Teorema. [5, (0.49)]. Para cualquier función continua entre continuos, $f : X \rightarrow Y$, la función inducida a los hiperespacios, $\hat{f} : C(X) \rightarrow C(Y)$, definida por $\hat{f}(A) = f(A)$, para cada $A \in C(X)$, es una función continua.

1.62 Teorema. [5, (1.49)]. Si Λ es un subcontinuo del hiperespacio $C(X)$ de un continuo X , entonces $\bigcup \Lambda$ es un subcontinuo de X .

1.63 Teorema. [5, (1.48) y (1.49)]. Para cualquier continuo X , la función unión, $\mathcal{U} : C(C(X)) \rightarrow C(X)$, definida por $\mathcal{U}(\Lambda) = \bigcup \Lambda$, para cada $\Lambda \in C(C(X))$, es una función continua.

1.64 Teorema. [3, 19.8], [5, (1.17)]. Para cualquier continuo X , el hiperespacio $C(X)$ es unicoherente.

1.65 Teorema. [5, (1.93)]. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si el hiperespacio $C(X)$ es localmente conexo.

1.66 Definición. Un continuo X es un *continuo de Kelley* si para cada punto x en X , para cada subcontinuo A de X , y para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X , tales que $x \in A$ y $\lim x_n = x$, existe una sucesión de subcontinuos de X $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$ y $\lim A_n = A$.

Para el siguiente resultado incluimos la noción de homogeneidad, para los otros conceptos involucrados véanse las Definiciones 1.5 y 1.12.

1.67 Definición. Un continuo X es *homogéneo* si para cualesquiera dos de sus puntos p y q existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(p) = q$.

1.68 Teorema. [5, (16.11), (16.26) y (16.27)]. Si X es un continuo localmente conexo, homogéneo o hereditariamente indescomponible, entonces X es un continuo de Kelley.

1.69 Definición. Un subcontinuo no degenerado A de un continuo X , es un *continuo de convergencia* en X si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$, $A \cap A_n = \emptyset$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$.

1.70 Teorema. [6, 5.12]. Si X es un continuo que no es conexo en pequeño en un punto $p \in X$, entonces X contiene un continuo de convergencia A tal que $p \in A$ y, para todo punto $x \in A$, X no es conexo en pequeño en x .

1.71 Definición. [3, 35.1]. Un continuo X es *absolutamente C^* -suave* si para cada continuo, Z , que contiene a X , la función $C^* : C(Z) \rightarrow C(C(Z))$, definida por $C^*(A) = C(A)$, para todo $A \in C(Z)$, es continua en X .

1.72 Nota. Si X es un continuo absolutamente C^* -suave y Z es un continuo que contiene a X , entonces para cada sucesión, $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, en $C(Z)$ tal que $\lim X_n = X$, se tiene que la sucesión $\{C(X_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a $C(X)$ en $C(C(Z))$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, esto significa que para cada $A \in C(X)$ existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim A_n = A$ y, $A_n \in C(X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

1.73 Definición. Una función continua entre continuos, $f : X \rightarrow Y$, es *débilmente confluyente* si para cada subcontinuo B de Y , existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.

1.74 Definición. Un continuo X pertenece a la Clase (W) si para todo continuo Z , y para toda función continua y suprayectiva $f : Z \rightarrow X$, se tiene que f es débilmente confluyente.

1.75 Proposición. Todo arco pertenece a la Clase (W).

Demostración. Sea X un arco con puntos extremos p y q . Supongamos que Z es un continuo, que $f : Z \rightarrow X$ es una función continua y suprayectiva, y que f no es débilmente confluyente. Entonces podemos elegir un subcontinuo B de X tal que para toda componente C de $f^{-1}(B)$ se tiene que $f(C) \neq B$. Por esta condición se tiene que B no es degenerado. Así, B es un subarco del arco X . Denotemos $B = ab$, de modo que $X = pa \cup ab \cup bq$.

Observamos que si C es una componente de $f^{-1}(B)$ tal que $f^{-1}(a) \cap C \neq \emptyset$ y $f^{-1}(b) \cap C \neq \emptyset$, entonces a y b pertenecen a $f(C)$. Se tiene que $f(C)$ es un subcontinuo del arco B que contiene a los puntos extremos de éste, así $f(C) = B$. Esto contradice la elección de B , y demuestra que para toda componente C de $f^{-1}(B)$ se tiene que $f^{-1}(a) \cap C = \emptyset$ o $f^{-1}(b) \cap C = \emptyset$. Por el Teorema 1.19, se sigue que existen conjuntos cerrados en $f^{-1}(B)$, y así cerrados en Z , tales que $f^{-1}(B) = H \cup K$, $f^{-1}(a) \subset H$, $f^{-1}(b) \subset K$ y $H \cap K = \emptyset$.

Denotemos $L = f^{-1}(pa) \cup H$ y $M = f^{-1}(bq) \cup K$. Notemos que L y M son conjuntos cerrados, no vacíos, en Z y que $Z = L \cup M$. Además, $L \cap M = (f^{-1}(pa) \cup H) \cap (f^{-1}(bq) \cup K) = (f^{-1}(pa) \cap K) \cup (H \cap f^{-1}(bq))$. Luego, como H y K están contenidos en $f^{-1}(ab)$, se obtiene que $L \cap M \subset (f^{-1}(pa) \cap f^{-1}(ab)) \cup (f^{-1}(ab) \cap f^{-1}(bq)) = f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b) = \emptyset$. En resumen, Z es la unión de los conjuntos L y M , y estos conjuntos son cerrados en Z ,

no vacíos y disjuntos. Esto contradice la conexidad de Z . Esta contradicción demuestra que el arco X pertenece a la Clase (W) . \square

1.76 Teorema. [3, p. 254] Un continuo X es absolutamente C^* -suave si y sólo si X pertenece a la Clase (W) .

El corolario que sigue es una consecuencia directa de la Proposición 1.75 y del Teorema 1.76.

1.77 Corolario. Todo arco es un continuo absolutamente C^* -suave.

1.3 Semifronteras en hiperespacios

1.78 Definición. [2]. Para un subcontinuo propio, A , de un continuo X , la *semifrontera* de $C(A)$ en $C(X)$, denotada por $SB(A)$, es el conjunto de todos los elementos, B , de $C(A)$, para los cuales existe una función continua, $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$, tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \in C(X) - C(A)$ para todo $t \in (0, 1]$.

1.79 Teorema. [2, Theorem 1.2]. Para todo continuo X y para todo subcontinuo propio, A , de X se cumple que:

- (1) $B \in SB(A)$ si y sólo si $B \in C(A)$ y existe un arco ordenado, β en $C(X)$, tal que $\beta(0) = B$ y $\beta(t) \not\subseteq A$ para todo $t \in (0, 1]$;
- (2) Si B y D son elementos de $C(A)$ tales que $B \subset D$ y $B \in SB(A)$, entonces $D \in SB(A)$;
- (3) $SB(A) \subset Fr(C(A))$; y
- (4) Si B y D son elementos de $C(X)$ tales que $B - D \neq \emptyset$ y E es una componente de $B \cap D$, entonces $E \in SB(D)$.

Demostración. (1) Supongamos que $B \in SB(A)$ y tomemos una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \not\subseteq A$, si $0 < t \leq 1$. Notemos que, por el Teorema 1.62, para cada $t \in [0, 1]$, $\bigcup \alpha([0, t])$ es un subcontinuo de X . De modo que podemos tomar la función $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ definida por $\gamma(t) = \bigcup \alpha([0, t])$ para cada $t \in [0, 1]$. Observamos que $\gamma = \mathcal{U} \circ \hat{\alpha} \circ i$, donde $i : [0, 1] \rightarrow C([0, 1])$ es el encaje dado por $i(t) = [0, t]$, para cada $t \in [0, 1]$; $\hat{\alpha} : C([0, 1]) \rightarrow C(C(X))$ es la función inducida por α , véase el Teorema

1.61; y $\mathcal{U} : C(C(X)) \rightarrow C(X)$ es la función unión, véase el Teorema 1.63. Puesto que estas tres funciones son continuas, se tiene que γ es una función continua. Denotemos $\Lambda = \gamma([0, 1])$. Tenemos que Λ es un subcontinuo no degenerado de $C(X)$ y, para cualesquiera elementos E y F de Λ , se tiene que $E \subset F$ o $F \subset E$. Luego, por el Teorema 1.57, existe un arco ordenado $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\beta([0, 1]) = \Lambda$. Notamos que $\beta([0, 1]) = \gamma([0, 1])$, luego $\beta(0) \in \gamma([0, 1])$ y $\gamma(0) \in \beta([0, 1])$. Por esto existen números s y t en $[0, 1]$ tales que $\beta(0) = \gamma(s)$ y $\gamma(0) = \beta(t)$. Como $\gamma(0) \subset \gamma(s)$, se sigue que $\beta(t) \subset \beta(0)$. Como β es un arco ordenado, se obtiene que $t = 0$. Es decir $\gamma(0) = \beta(0)$. Como $\gamma(0) = \alpha(0) = B$, se tiene que $\beta(0) = B$. Por otra parte, si $0 < t \leq 1$, se tiene que $\beta(t) \in \gamma([0, 1])$, luego existe $r \in [0, 1]$ tal que $\beta(t) = \gamma(r)$. Notamos que $r > 0$ (ya que $\gamma(r) = \beta(0) \neq \beta(t)$ si $t > 0$), además, $\alpha(r) \subset \gamma(r)$ y $\alpha(r) \not\subset A$. Se concluye que $\beta(t) \not\subset A$ si $0 < t \leq 1$. Esto demuestra que la condición dada en (1) es necesaria para que $B \in SB(A)$. El hecho de que esta condición también es suficiente se tiene directamente de la definición de semifrontera.

(2) Sean B y D elementos de $C(A)$ tales que $B \subset D$ y $B \in SB(A)$. Tomemos una función continua, $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$, tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \not\subset A$ si $0 < t \leq 1$. Definimos $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ por $\beta(t) = \alpha(t) \cup D$, para todo $t \in [0, 1]$. Por el inciso (2) del Teorema 1.46, se tiene que β es una función continua. Es claro que $\beta(0) = D$ y puesto que $\alpha(t) \not\subset A$ si $0 < t \leq 1$, $\beta(t) \not\subset A$ si $0 < t \leq 1$. Así, $D \in SB(A)$.

(3) Sean $B \in SB(A)$ y $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ una función continua tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \not\subset A$ si $0 < t \leq 1$. Se tiene que $\{\alpha(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ que converge a B . Así, $B \in Fr(C(A))$.

(4) Como $B - D \neq \emptyset$ y $E \subset B \cap D$, se tiene que E es un subcontinuo propio de B . Así, por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde E hasta B . Notemos que, para cada $t \in (0, 1]$ $E \subset \alpha(t) \neq E$ y $\alpha(t) \subset B$. Como E es una componente de $B \cap D$, se sigue que $\alpha(t) \not\subset D$. Esto prueba que $E \in SB(D)$. \square

1.80 Teorema. [2, Theorem 1.3]. Sean A un subcontinuo propio de un continuo X y B un subcontinuo de A . Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim B_n = B$, entonces cada una de las siguientes condiciones implica que $B \in SB(A)$:

- (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n no está contenido en A y $B_{n+1} \subset B_n$;
- (2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n no está contenido en A y $B_n \cap B \neq \emptyset$; y
- (3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in SB(A)$ y $B_n \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. (1) Como $B \subset A$ y $B_n \not\subset A$, $B \neq B_n$. Así, podemos suponer que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n \neq B_{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos un arco ordenado α_n en $C(X)$ desde B_{n+1} hasta B_n , véase el Teorema 1.54. Usando un homeomorfismo creciente entre los intervalos $[0, 1]$ y $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, podemos suponer que el dominio de definición de α_n es el intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ y que $\alpha_n(\frac{1}{n+1}) = B_{n+1}$ y $\alpha_n(\frac{1}{n}) = B_n$.

Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ si $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Notemos que si $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, entonces $B_{n+1} \subset \alpha_n(t)$, por lo cual $\alpha_n(t) \not\subset A$. Se sigue que $\alpha(t) \not\subset A$ si $t > 0$. De este modo, para concluir que $B \in SB(A)$, sólo resta justificar que α es una función continua. En lo que sigue hacemos esto.

Tomemos un número t y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tales que $\lim t_n = t$. Consideramos dos casos:

(a) $t \neq 0$.

En este caso existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m+1} < t \leq \frac{1}{m}$; y consideramos dos subcasos:

(a.1) $m = 1$.

En este subcaso se tiene que $\frac{1}{2} < t \leq 1$ y el intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $t \in (\frac{1}{2}, 1]$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in (\frac{1}{2}, 1]$ para todo $n \geq N$. Tenemos que α_1 es una función continua definida en $[\frac{1}{2}, 1]$, por lo que $\lim \alpha_1(t_n) = \alpha_1(t)$. Como $\alpha_1(t) = \alpha(t)$ y $\alpha_1(t_n) = \alpha(t_n)$. Se sigue que $\lim \alpha(t_n) = \alpha(t)$.

(a.2) $m \geq 2$.

En este subcaso el intervalo $(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m-1})$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ que tiene al número t , por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m-1})$ para todo $n \geq N$. Tomamos la función $h : [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m-1}] \rightarrow C(X)$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \alpha_m(x) & \text{si } \frac{1}{m+1} \leq x \leq \frac{1}{m}, \\ \alpha_{m-1}(x) & \text{si } \frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{m-1}. \end{cases}$$

Notamos que h es una función continua, por lo cual $\lim h(t_n) = h(t)$. Como $h(t) = \alpha(t)$ y $h(t_n) = \alpha(t_n)$ si $n \geq N$, se sigue que $\lim \alpha(t_n) = \alpha(t)$.

(b) $t = 0$.

En este caso podemos suponer que $0 < t_{n+1} < t_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_{n+1}} \leq t_n \leq \frac{1}{k_n}$. Se tiene que $\alpha(t_n) = \alpha_{k_n}(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $B_{k_{n+1}} \subset \alpha(t_n) \subset B_{k_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim B_{k_{n+1}} = B$ y $\lim B_{k_n} = B$, se sigue que $\lim \alpha(t_n) = B$, véase el inciso (2) del Teorema 1.46. Puesto que $B = \alpha(0)$, se obtiene que $\lim \alpha(t_n) = \alpha(0)$.

Los argumentos expuestos en los casos (a) y (b) demuestran que α es una función continua. Con esto el inciso (1) está demostrado.

(2) Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos $C_m = \{B\} \cup (\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n)$. Como $B \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que C_m es conexo para cada $m \in \mathbb{N}$. Veamos que C_m es cerrado. Para esto tomemos una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en C_m y un punto $x \in X$ tales que $\lim x_k = x$. Si existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $x_{k_j} \in B$ para todo $j \in \mathbb{N}$, como B es cerrado y $\lim x_{k_j} = x$, se sigue que $x \in B$, así $x \in C_m$. Similarmente, si existe $n \in \mathbb{N}$ y una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $x_{k_j} \in B_n$ para todo $j \in \mathbb{N}$ se obtiene que $x \in B_n$, así $x \in C_m$. Luego, podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \geq m$ tal que $x_k \in B_{n_k}$, donde $n_k \neq n_{k'}$ si $k \neq k'$. Como $\lim B_{n_k} = B$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, se sigue que $x \in B$, así $x \in C_m$. Esto prueba que cada C_m es un conjunto cerrado en X .

Por lo anterior, se tiene que $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$. Como $B_m \subset C_m$ y $B_m \not\subseteq A$, notamos que $C_m \not\subseteq A$. Además, por la definición de C_m , es claro que $C_{m+1} \subset C_m$.

Vamos a demostrar que $\lim C_m = B$. Para esto fijemos $\varepsilon > 0$. Como $\lim B_n = B$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(B, B_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Por la Proposición 1.44, se tiene que $B \subset N(\varepsilon, B_n)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$ para todo $n \geq N$. Como $B_m \subset C_m$ se tiene que $N(\varepsilon, B_m) \subset N(\varepsilon, C_m)$, luego $B \subset N(\varepsilon, C_m)$ para todo $m \geq N$. Además, si $m \geq N$, entonces $C_m \subset C_N = B \cup \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n \right) \subset N(\varepsilon, B)$. De aquí, por la Proposición 1.44, se sigue que $H(B, C_m) < \varepsilon$ para todo $m \geq N$. Esto prueba que $\lim C_m = B$.

Con lo anterior se tiene que $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión que satisface las hipótesis del inciso (1) de este teorema. Esto demuestra el inciso (2).

(3) Por el inciso (1) del Teorema 1.79, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un arco ordenado $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha_n(0) = B_n$ y $\alpha_n(t) \not\subseteq A$ para todo $t \in (0, 1]$. Como α_n es una función continua, podemos tomar un número $t_n > 0$ tal que $H(B_n, \alpha_n(t_n)) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $H(B, \alpha_n(t_n)) \leq H(B, B_n) + H(B_n, \alpha_n(t_n)) < H(B, B_n) + \frac{1}{n}$. Como $\lim B_n = B$, se obtiene que $\lim \alpha_n(t_n) = B$.

Como $t_n > 0$, se tiene que $\alpha_n(t_n) \not\subseteq A$. Como α_n es un arco ordenado que empieza en B_n , se tiene que $B_n \subset \alpha_n(t_n)$. Luego, como $B_n \cap B \neq \emptyset$, se sigue que $\alpha_n(t_n) \cap B \neq \emptyset$.

Con lo anterior se tiene que $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que satisface las hipótesis del inciso (2) de este teorema. Esto prueba el inciso (3). \square

Capítulo 2

Resultados generales

En este capítulo exponemos las propiedades más elementales que tienen las fronteras de los hiperespacios. Concretamente, probamos que si A es un subconjunto propio y no degenerado de un continuo X , entonces la frontera de $C(A)$ en $C(X)$ es un subcontinuo arco conexo y no degenerado, de $C(A)$; más aún, demostramos la existencia de arcos ordenados en $Fr(C(A))$.

2.1 Hechos básicos

Recordemos que si A es un subcontinuo de un continuo X , la frontera de $C(A)$ en $C(X)$ es denotada por $Fr(C(A))$, y es definida como:

$$Fr(C(A)) = C(A) \cap cl_{C(X)}(C(X) - C(A)).$$

2.1 Proposición. Para todo subcontinuo propio A de un continuo X se cumple lo que sigue:

- (1) $B \in Fr(C(A))$ si y sólo si $B \in C(A)$ y existe una sucesión, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim B_n = B$;
- (2) $F_1(Fr(A)) \subset Fr(C(A))$; y
- (3) $A \in Fr(C(A))$.

Demostración. (1) $B \in Fr(C(A))$ si y sólo si $B \in C(A)$ y $B \in \overline{C(X) - C(A)}$, o equivalentemente, $B \in C(A)$ y B es el límite de una sucesión en $C(X) - C(A)$. Esto prueba (1).

(2) Sea $x \in Fr(A)$. Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X - A$ tal que $\lim x_n = x$. Se tiene que $\{x\} \in C(A)$ y $\{\{x_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim \{x_n\} = \{x\}$. Por (1), se sigue que $\{x\} \in Fr(C(A))$. Esto prueba (2).

(3) Tomemos un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde A hasta X . Se tiene que $\alpha(0) = A$ y A está contenido propiamente en $\alpha(\frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{\alpha(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$. Además, por la continuidad de α , $\lim \alpha(\frac{1}{n}) = A$. Por (1), se sigue que $A \in Fr(C(A))$. \square

2.2 Teorema. Si A es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo X , entonces $Fr(C(A))$ es un subcontinuo no degenerado de $C(A)$.

Demostración. Por el inciso (3) de la Proposición 2.1, se tiene que $A \in Fr(C(A))$, así $Fr(C(A)) \neq \emptyset$. Por otra parte, por definición de frontera, se tiene que $Fr(C(A))$ es un subconjunto cerrado, y así compacto, de $C(A)$.

Veremos que $C(X) - C(A)$ es conexo. Para justificar esto fijemos un elemento B en $C(X) - C(A)$ tal que $B \neq X$, y un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde B hasta X . Como $B \not\subseteq A$ y $B \subset \alpha(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, se tiene que $\alpha(t) \not\subseteq A$, para todo $t \in [0, 1]$. Se sigue que $\alpha([0, 1])$ es un arco en $C(X) - C(A)$ que contiene a B y a X . Así, $C(X) - C(A)$ es conexo.

Con lo anterior, notamos que $C(A)$ y $\overline{C(X) - C(A)}$ son subcontinuos de $C(X)$ cuya unión es $C(X)$. Puesto que $C(X)$ es uncoherente (véase el Teorema 1.64), se sigue que $Fr(C(A))$ es conexo. Con esto se obtiene que $Fr(C(A))$ es un continuo.

Finalmente, como A es un subcontinuo propio de X , $Fr(A) \neq \emptyset$. Fijemos un punto $x \in Fr(A)$. Como A es no degenerado, se tiene que $\{x\} \neq A$. Por los incisos (2) y (3) de la Proposición 2.1, se tiene que $\{x\}$ y A pertenecen a $Fr(C(A))$. Se concluye que $Fr(C(A))$ es un subcontinuo no degenerado de $C(A)$. \square

El resultado que sigue dice que, para cualquier subcontinuo propio, A , de un continuo X , los elementos de la frontera de $C(A)$ intersectan a la frontera de A en X .

2.3 Teorema. Si A es un subcontinuo propio de un continuo X , entonces $Fr(C(A)) \subset \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Si $B \in C(A)$ y $B \cap Fr(A) = \emptyset$, entonces $B \subset int(A)$. Por la Proposición 1.52 (2), se tiene que $\mathcal{C}(int(A))$ es un conjunto abierto en $C(X)$. Además, $B \in \mathcal{C}(int(A)) \subset C(A)$. Así, $B \in int_{C(X)}(C(A))$, por lo cual $B \notin Fr(C(A))$. \square

A continuación damos un ejemplo que muestra que la inclusión obtenida en el teorema previo puede ser propia.

2.4 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por L_n al segmento de recta en el plano euclidiano que tiene como extremos a los puntos $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{n})$; y por L_0 al que tiene como extremos a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Definimos $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.

Es claro que Y es un subcontinuo de \mathbb{R}^2 . Este continuo es conocido como el *abanico armónico*. Denotemos por B al segmento que tiene como extremos a los puntos $(1, 0)$ y $(2, 0)$. Sea $X = Y \cup B$. Este continuo X es conocido como el *abanico armónico con arco límite alargado*. Sea $A = L_0 \cup B$. Se tiene que A es un subcontinuo propio de X , $B \in C(A)$, $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$ y $B \notin Fr(C(A))$, esto último se debe a que no existe una sucesión en $C(X) - C(A)$ convergente a B .

2.5 Teorema. Si A es un subcontinuo propio localmente conexo de un continuo X y $Fr(A)$ es un conjunto totalmente desconexo, entonces $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Por el Teorema 2.3, basta probar que los subcontinuos de A que intersectan a $Fr(A)$ pertenecen a $Fr(C(A))$. Para esto tomemos $B \in C(A)$ tal que $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$. Fijemos un punto $p \in B \cap Fr(A)$.

Probaremos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = \{p\}$, $p \in A_n$ y $A_n \not\subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para esto consideramos dos casos:

- (1) X es conexo en pequeño en p ; y
- (2) X no es conexo en pequeño en p .

En el caso (1), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in C(X)$ tal que $p \in \text{int}(A_n)$ y $A_n \subset B(p, \frac{1}{n})$. Como $p \in \text{Fr}(A)$, se tiene que $\text{int}(A_n) \cap (X - A) \neq \emptyset$. Así, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = \{p\}$, $p \in A_n$ y $A_n \not\subseteq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el caso (2), primero veamos que X es localmente conexo en cada punto de $A - \text{Fr}(A)$. Para ver esto sean $x \in A - \text{Fr}(A)$ y U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$. Como $x \notin \text{Fr}(A)$, se tiene que $x \in \text{int}(A)$. Como A es localmente conexo e $\text{int}(A) \cap U$ es un conjunto abierto en A que contiene al punto x , existe un conjunto abierto V en A tal que V es conexo y $x \in V \subset \text{int}(A) \cap U$. Como $\text{int}(A) \cap U$ es un conjunto abierto en X , se sigue que V es abierto en X . Esto prueba que X es localmente conexo en cada punto de $A - \text{Fr}(A)$.

Por otra parte, en este caso (2), por el Teorema 1.70, podemos tomar un subcontinuo no degenerado, K , de X tal que $p \in K$ y X no es conexo en pequeño en cada punto de K . Por la Observación 1.7, se tiene que X no es localmente conexo en cada punto de K . Se sigue que $K \cap (A - \text{Fr}(A)) = \emptyset$.

Por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde $\{p\}$ hasta K . Denotemos $A_n = \alpha(\frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $A_n \subset K$, se tiene que $A_n \cap (A - \text{Fr}(A)) = \emptyset$. Como A_n es no degenerado y $\text{Fr}(A)$ es totalmente desconexo, se tiene que $A_n \not\subseteq \text{Fr}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = \{p\}$, $p \in A_n$ y $A_n \not\subseteq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotemos $B_n = B \cup A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $p \in B \cap A_n$, se tiene que B_n es un subcontinuo de X . Como $A_n \not\subseteq A$, se tiene que $B_n \not\subseteq A$. Como $\lim A_n = \{p\}$, por el inciso (2) del Teorema 1.46, se tiene que $\lim B_n = B$. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.80, se obtiene que $B \in SB(A)$. Con esto, y el inciso (3) del Teorema 1.79, se concluye que $B \in \text{Fr}(C(A))$. \square

Si A es un arco en un continuo X con puntos extremos p y q , decimos que A es un *arco libre* en X si $A - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X . Usamos

esta noción en el corolario que sigue.

2.6 Corolario. Si A es un arco libre propiamente contenido en un continuo X , entonces $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Sean p y q los puntos extremos del arco A . Como $A - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X y está contenido en A , se tiene que $Fr(A) \subset \{p, q\}$. Así, A satisface las hipótesis del Teorema 2.5, por lo cual se obtiene la conclusión. \square

Los resultados que siguen aseguran que en la clase de los continuos de Kelley (Definición 1.66), y en cierta clase de compactaciones del rayo (Definición 1.37), la inclusión obtenida en el Teorema 2.3 es de hecho una igualdad.

2.7 Teorema. Si X es un continuo de Kelley, entonces para todo subcontinuo propio, A , de X , se tiene que $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr_X(A) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Tomemos un subcontinuo propio, A , de un continuo de Kelley, X . Por el Teorema 2.3, basta demostrar que los elementos de $C(A)$ que intersectan a la frontera de A en X pertenecen a la frontera de $C(A)$ en $C(X)$. Tomemos un elemento B de $C(A)$ tal que $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$. Fijemos un punto $x \in B \cap Fr(A)$. Tomemos una sucesión de puntos en $X - A$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_n = x$. Por la hipótesis sobre X , existe una sucesión de subcontinuos de X , digamos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_n$ y $\lim B_n = B$. Como $x_n \notin A$, se tiene que $B_n \not\subset A$. Así, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ que converge a B . Por el inciso (1) de la Proposición 2.1, se concluye que $B \in Fr(C(A))$. \square

El corolario que sigue se obtiene directamente de los Teoremas 1.68 y 2.7.

2.8 Corolario. Si X es un continuo localmente conexo, homogéneo, o hereditariamente indescomponible, entonces $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr_X(A) \neq \emptyset\}$.

2.9 Teorema. Si X es una compactación del rayo $[0, \infty)$, donde el residuo Y es un continuo absolutamente C^* -suave, entonces para cada subcontinuo propio, A , de X , se tiene que $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Tomemos un subcontinuo propio, A , de una compactación, X , del rayo $[0, \infty)$, con residuo un continuo absolutamente C^* -suave, Y . Tomemos un elemento B de $C(A)$ tal que $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$. En lo que sigue consideramos tres casos:

- (1) A es un arco en $[0, \infty)$;
- (2) $A \cap Y \neq \emptyset$ y $A \cap [0, \infty) \neq \emptyset$; y
- (3) $A \subset Y$.

En el caso (1), se tiene que A es un arco libre en X y la conclusión se obtiene por el Corolario 2.6.

En el caso (2), existe un punto $p \in (0, \infty)$ tal que $A = Y \cup [p, \infty)$. Además, $Fr(A) = \{p\}$. Luego, como $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$, se tiene que $p \in B$. Tomemos una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, p)$ tal que $\lim p_n = p$. Denotemos $B_n = B \cup [p_n, p]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ que converge a B . Así, $B \in Fr(C(A))$.

En el caso (3), por la Proposición 1.60 podemos tomar una sucesión de arcos en el rayo $[0, \infty)$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\lim Y_n = Y$. Como Y es absolutamente C^* -suave, se tiene que $\lim C(Y_n) = C(Y)$. Luego, como $B \in C(Y)$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \in C(Y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $B_n \subset Y_n$, $A \subset Y$ y $Y_n \cap Y = \emptyset$, se tiene que $A \cap B_n = \emptyset$. Es decir, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ convergente a B . Por el inciso (1) de la Proposición 2.1, se obtiene que $B \in Fr(C(A))$.

Hemos demostrado que $\{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\} \subset Fr(C(A))$. Así, por el Teorema 2.3, se concluye la igualdad mencionada. \square

Considerando las clases de continuos abarcadas en los Teoremas 2.7 y 2.9, nos parece interesante plantear el problema que sigue.

2.10 Problema. Caracterizar a todos los continuos, X , para los cuales se cumple que $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$, para todo subcontinuo propio, A , de X .

2.2 Arco conexidad

En esta sección demostramos la existencia de arcos ordenados en las fronteras de los hiperespacios. Como consecuencia obtenemos que para todo subcontinuo propio A de un continuo X la frontera de $C(A)$ en $C(X)$ es un continuo arcoconexo y localmente conexo en el elemento A .

2.11 Teorema. Para todo continuo X , para todo subcontinuo propio, A , de X y para todo elemento, B , de $Fr(C(A))$, diferente de A , existe un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde B hasta A .

Demostración. Fijemos un elemento $B \in Fr(C(A)) - \{A\}$. Tomemos una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X) - C(A)$, tal que $\lim B_n = B$ (véase el inciso (1) de la Proposición 2.1). Como $A \neq X$, se tiene que $B \neq X$. Luego, podemos suponer que $B_n \neq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.54, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un arco ordenado $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde B_n hasta X . Denotemos $\Lambda_n = \alpha_n([0, 1])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que cada Λ_n es un subcontinuo de $C(X)$. Es decir, $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $C(C(X))$. Como este hiperespacio es compacto, podemos suponer que existe $\Lambda \in C(C(X))$ tal que $\lim \Lambda_n = \Lambda$.

Como B_n y X pertenecen a Λ_n , por el inciso (1) del Teorema 1.46, se sigue que B y X pertenecen a Λ . Se tiene que Λ es un subcontinuo no degenerado de $C(X)$. Por otra parte, si E y F son elementos de Λ , por el inciso (1) del Teorema 1.46, existen sucesiones $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tales que $\lim \alpha_n(t_n) = E$ y $\lim \alpha_n(s_n) = F$. Como cada α_n es un arco ordenado, se tiene que $\alpha_n(t_n) \subset \alpha_n(s_n)$ o $\alpha_n(s_n) \subset \alpha_n(t_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notamos que una de estas dos condiciones ocurre para todos los elementos de un subconjunto infinito de \mathbb{N} , así, por el inciso (2) del Teorema 1.46, se tiene que $E \subset F$ o $F \subset E$. Luego, por el Teorema 1.57, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha([0, 1]) = \Lambda$.

De modo que $\lim \alpha_n([0, 1]) = \alpha([0, 1])$. Notemos que para cada $r \in [0, 1]$ existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\lim \alpha_n(r_n) = \alpha(r)$. Como cada α_n es un arco ordenado desde B_n hasta X , se tiene que $B_n \subset \alpha_n(r_n) \subset X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (2) del Teorema 1.46, se sigue que $B \subset \alpha(r) \subset X$ para todo $r \in [0, 1]$. Así, α es un arco ordenado en $C(X)$

desde B hasta X .

Denotemos $t_0 = \sup \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \subset A\}$. Observemos que $\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \subset A\} = \alpha^{-1}(C(A))$, que es un conjunto cerrado en $[0, 1]$. Así, $t_0 \in \alpha^{-1}(C(A))$. Luego, $\alpha(t_0) \subset A$. Como α es un arco ordenado, para cada $t \in [0, t_0]$ se tiene que $\alpha(t) \subset \alpha(t_0)$ y, en consecuencia, $\alpha(t) \subset A$. Es decir, $\alpha(t) \in C(A)$ para todo $t \in [0, t_0]$. Por otra parte, como $\lim \alpha_n([0, 1]) = \alpha([0, 1])$, para cada $t \in [0, 1]$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\lim \alpha_n(t_n) = \alpha(t)$ (véase el inciso (1) del Teorema 1.46). Como α_n es un arco ordenado tal que $\alpha_n(0) = B_n$, se tiene que $B_n \subset \alpha_n(t_n)$ y así, puesto que $B_n \not\subset A$, se sigue que $\alpha_n(t_n) \not\subset A$. Esto implica que $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$. En consecuencia, $\alpha(t) \in \overline{C(X) - C(A)}$. Por esto se tiene que, para cada $t \in [0, t_0]$, $\alpha(t) \in Fr(C(A))$. En lo que sigue analizamos dos casos:

- (1) $\alpha(t_0) = A$; y
- (2) $\alpha(t_0) \neq A$.

En el caso (1), observamos que $t_0 \neq 0$ porque $\alpha(0) = B$ y $B \neq A$. Definimos $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\beta(t) = \alpha(t_0 t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Notamos que si $0 \leq t \leq 1$ entonces $0 \leq t_0 t \leq t_0$ de aquí que $\alpha(t_0 t) \subset A$. Se sigue que $\beta(t) \in Fr(C(A))$ para todo $t \in [0, 1]$. Además, $\beta(0) = \alpha(0) = B$ y $\beta(1) = \alpha(t_0) = A$. Así, β es un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde B hasta A .

En el caso (2), primero probaremos que $\alpha(t_0) \in SB(A)$. Para esto definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\gamma(t) = \alpha((1 - t_0)t + t_0)$ para cada $t \in [0, 1]$. Se tiene que γ es una función continua tal que $\gamma(0) = \alpha(t_0)$. Como $\alpha(t_0) \subset A$ y $\alpha(1) = X \not\subset A$, se tiene que $t_0 < 1$. Luego, para todo $t \in (0, 1]$, $(1 - t_0)t + t_0 \geq t_0$. Así, por la definición de t_0 , se obtiene que $\alpha((1 - t_0)t + t_0) \not\subset A$. Se sigue que $\gamma(t) \not\subset A$ para todo $t \in (0, 1]$. Esto prueba que $\alpha(t_0) \in SB(A)$.

Como $\alpha(t_0)$ es un subcontinuo propio de A , por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado $\eta : [0, 1] \rightarrow C(A)$ desde $\alpha(t_0)$ hasta A . Como $\alpha(t_0) \subset \eta(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, por el inciso (2) del Teorema 1.79, se tiene que $\eta(t) \in SB(A)$ para todo $t \in [0, 1]$. Por el inciso (3) de ese mismo teorema, sabemos que $SB(A) \subset Fr(C(A))$. Se sigue que η es un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde $\alpha(t_0)$ hasta A . Definimos $\xi : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como

$$\xi(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } 0 \leq t \leq t_0, \\ \eta\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right), & \text{si } t_0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que ξ es un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde B hasta A . \square

2.12 Corolario. Para cualquier continuo X y para cualquier subcontinuo propio, A , de X , se tiene que $Fr(C(A))$ es un subcontinuo arco conexo de $C(A)$.

2.13 Observación. Por el inciso (2) del Teorema 1.79, observamos que si A es un subcontinuo propio de un continuo X , $B \in SB(A)$ y $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(A)$ es un arco ordenado tal que $\alpha(0) = B$, entonces $\alpha(t) \in SB(A)$ para todo $t \in [0, 1]$. En el ejemplo que sigue mostramos que no se puede establecer un resultado similar para $Fr(C(A))$.

2.14 Ejemplo. Sea X el abanico armónico con arco límite alargado, descrito en el Ejemplo 2.4; y sean A y B los segmentos definidos en ese mismo ejemplo. Denotemos $p = (1, 0)$. Definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(A)$ como $\alpha(t) = [1 - t, 1 + t] \times \{0\}$ para todo $t \in [0, 1]$. Se tiene que α es un arco ordenado en $C(A)$ desde $\{p\}$ hasta A .

Veamos que $\alpha(t) \notin Fr(C(A))$ para todo $t \in (0, 1)$. Para esto fijemos $t \in (0, 1)$ y una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim B_n = \alpha(t)$. Notemos que $\alpha(t)$ es un arco en A tal que $(0, 0) \notin \alpha(t)$ y el punto $(1 + t, 0)$ pertenece a $\alpha(t) \cap (B - \{p\})$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, podemos suponer que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(0, 0) \notin B_n$ y, puesto que $B - \{p\}$ es un conjunto abierto en X que tiene al punto $(1 + t, 0)$, que $B_n \cap (B - \{p\}) \neq \emptyset$. Se sigue que $B_n \subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $\alpha(t)$ no es el límite de una sucesión en $C(X) - C(A)$. Por el inciso (1) de la Proposición 2.1, esto prueba que $\alpha(t) \notin Fr(C(A))$.

En conclusión, α es un arco ordenado en $C(X)$ desde $\{p\}$ hasta A tal que $\alpha([0, 1]) \cap Fr(C(A)) = \{\{p\}, A\}$.

Por otra parte, por el Teorema 2.11, existe un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde $\{p\}$ hasta A . Por ejemplo $\beta : [0, 1] \rightarrow C(A)$ definido por:

$$\beta(t) = \begin{cases} [1 - 2t, 1] \times \{0\}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ [0, 2t] \times \{0\}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2.15 Corolario. Si A es un subcontinuo propio de un continuo X , entonces $Fr(C(A))$ es localmente conexo en el elemento A .

Demostración. Sea \mathcal{U} un conjunto abierto en $Fr(C(A))$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_{Fr(C(A))}(A, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Veremos que $B_{Fr(C(A))}(A, \varepsilon)$ es un conjunto arco conexo. Sea $B \in B_{Fr(C(A))}(A, \varepsilon)$ con $B \neq A$. Por el Teorema 2.11, podemos tomar un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = B$, $\alpha(1) = A$ y $\alpha(t) \in Fr(C(A))$ para todo $t \in [0, 1]$. Notemos que si $t \in [0, 1]$, entonces $B \subset \alpha(t) \subset A$, de aquí, y puesto que $A \subset N(B, \varepsilon)$, se sigue que $\alpha(t) \subset N(A, \varepsilon)$ y $A \subset N(\alpha(t), \varepsilon)$. Por la Proposición 1.44, se tiene que $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$. Luego, $\alpha([0, 1])$ es un arco contenido en $B_{Fr(C(A))}(A, \varepsilon)$ con puntos extremos A y B . Esto prueba que $B_{Fr(C(A))}(A, \varepsilon)$ es un conjunto arco conexo, lo cual demuestra el corolario. \square

Capítulo 3

Conexidad local

En este capítulo demostramos que, en cualquier continuo la frontera del hiperespacio de un arco, o de una circunferencia, es localmente conexa. Más aún, demostramos que ésta es una propiedad característica de estos dos continuos; es decir, probamos que un continuo X es un arco o una curva cerrada simple si y sólo si para cualquier continuo Z que contiene a X se tiene que la frontera de $C(X)$ en $C(Z)$ es localmente conexa. Por otra parte, probamos que si A es un subcontinuo propio de un continuo localmente conexo X , entonces la frontera de $C(A)$ en $C(X)$ es localmente conexa si y sólo si A es localmente conexo. Para obtener estos resultados incluimos una serie de lemas que por sí mismos son interesantes.

3.1 Lema. Si A es un subcontinuo localmente conexo de un continuo X y B es un elemento de $Fr(C(A)) - SB(A)$, entonces existe una sucesión, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, en $C(X)$ tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \cap A = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Tomemos una sucesión, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim B_n = B$. Por el inciso (3) del Teorema 1.80 podemos suponer que $B_n \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En lo que sigue demostraremos que existe una subsucesión, $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, de la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $B_{n_k} \cap A = \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo cual el lema estará demostrado.

Para esto suponemos que tal subsucesión no existe. Sin perder generalidad, podemos suponer que $B_n \cap A \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos una componente, C_n , de la intersección $B_n \cap A$. Por el Teorema 1.79, $C_n \in SB(A)$.

Como $C(A)$ es compacto, podemos suponer que existe un subcontinuo C de A tal que $\lim C_n = C$. Como $\lim B_n = B$ y $C_n \subset B_n$, por el inciso (2) del Teorema 1.46, se tiene que $C \subset B$. Fijemos un punto $x \in C$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim x_n = x$ y $x_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por U_k a la componente de la bola $B_A(x, \frac{1}{k})$ que contiene al punto x .

Como A es localmente conexo, tenemos que cada U_k es un conjunto abierto (y conexo) en A , véase la Proposición 1.8. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en A que converge al punto x , podemos tomar una sub-sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de esta sucesión tal que $x_{n_k} \in U_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Denotemos $D_k = C_{n_k} \cup \overline{U_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como C_{n_k} y $\overline{U_k}$ son subcontinuos de X tales que $C_{n_k} \cap \overline{U_k} \neq \emptyset$ (el punto x_{n_k} pertenece a esta intersección), cada D_k es un subcontinuo de A .

Notemos que $\{\overline{U_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subcontinuos de X , entonces $\overline{U_{k+1}} \subset \overline{U_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por esto, $\lim \overline{U_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U_k}$, véase el Teorema 1.46. Observemos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U_k} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_A(x, \frac{1}{k})} = \{x\}$. Así, $\lim \overline{U_k} = \{x\}$.

De lo anterior, y considerando que $\lim C_{n_k} = C$ y que $x \in C$, por el inciso (3) del Teorema 1.46, obtenemos que $\lim D_k = C \cup \{x\} = C$. Como $C_{n_k} \in SB(A)$ (véase el segundo párrafo de esta prueba) y como $C_{n_k} \subset D_k$, por el inciso (2) del Teorema 1.79, se tiene que $D_k \in SB(A)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $x \in U_k \cap C \subset D_k \cap C$, así $D_k \cap C \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Con esto podemos aplicar el inciso (3) del Teorema 1.80 para obtener que $C \in SB(A)$.

Finalmente, como $C \subset B$, por el inciso (2) del Teorema 1.79, obtenemos que $B \in SB(A)$. Esto es una contradicción, con lo cual el lema está demostrado. \square

3.2 Ejemplo. En el Lema 3.1 la condición de que A es localmente conexo es esencial para tener la conclusión. Para ver esto consideramos los continuos que describimos a continuación:

$$X = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right),$$

$$A = X - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 \right] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \text{ y}$$

$$B = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times \{0\}.$$

Notemos que B es un subcontinuo de A . Veamos que B pertenece a la frontera de $C(A)$ en $C(X)$. Para esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos $B_n = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\}$. Se tiene que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim B_n = B$. Así, $B \in Fr(C(A))$.

Afirmamos que B no pertenece a la semifrontera de $C(A)$ en $C(X)$. Para probar esto tomamos la bola en $C(X)$ con centro en B y de radio $\frac{1}{4}$, $B(B, \frac{1}{4})$, y denotamos por \mathcal{C} a la componente de esta bola que contiene a B . Notemos que si $E \in \mathcal{C}$, entonces $E \subset \left[\frac{1}{4}, 1 \right] \times \{0\}$. Así, los elementos de \mathcal{C} están contenidos en A .

Tomemos una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = B$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(t) \in B(B, \frac{1}{4})$ para todo $t \in [0, \varepsilon)$. Observamos que si $t \in [0, \varepsilon)$ entonces $\alpha([0, t])$ es un subcontinuo de $C(X)$ contenido en $B(B, \frac{1}{4})$ tal que $B \in \alpha([0, t])$, luego $\alpha([0, t]) \subset \mathcal{C}$. Se sigue que $\alpha(t) \subset A$ para todo $t \in [0, \varepsilon)$. Esto demuestra que $B \notin SB(A)$.

A continuación observamos que B no es el límite de una sucesión de continuos que no intersectan a A . Tomemos una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ y un elemento C de $C(X)$ tales que $\lim C_n = C$ y $C_n \cap A = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotemos $E = \overline{X - A}$. Nótese que E es un subcontinuo de X y $C_n \subset E$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (b) del Teorema 1.46, se tiene que $C \subset E$. Como $B \notin E$, se obtiene que $\lim C_n \neq B$.

3.3 Teorema. Si A es un arco o una curva cerrada simple en un continuo X , entonces $Fr(C(A))$ es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que A es un arco o una curva cerrada simple en un continuo X y que $Fr(C(A))$ no es localmente conexo. Por el inciso (2) de la Proposición 1.8, existe un elemento $B \in Fr(C(A))$ tal que $Fr(C(A))$ no es conexo en pequeño en B . Por el Corolario 2.15, se tiene que $B \neq A$. Así, B es un arco o un punto contenido en A .

Elijamos un conjunto abierto \mathcal{U} en $Fr(C(A))$ tal que $B \in \mathcal{U}$ y de manera tal que B no pertenece al interior, en $Fr(C(A))$, de ningún subconjunto conexo de \mathcal{U} . Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < H(A, B)$ y $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ y denotemos por \mathcal{C} a la componente de esta bola que contiene a B .

Se tiene que B no pertenece a $int_{Fr(C(A))}(\mathcal{C})$. Luego, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Fr(C(A)) - \mathcal{C}$ tal que $\lim B_n = B$. Podemos suponer que $B_n \in B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $B_n \notin \mathcal{C}$, remarcamos que:

(*) Para todo $n \in \mathbb{N}$, B y B_n pertenecen a diferentes componentes de $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$.

Por el Teorema 2.11, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un arco ordenado $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha_n(0) = B_n$, $\alpha_n(1) = A$ y $\alpha_n(t) \in Fr(C(A))$ para todo $t \in [0, 1]$. Denotemos $\Gamma_n = \alpha_n([0, 1])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que Γ_n es un subcontinuo de $C(X)$, así $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(C(X))$. Como $C(C(X))$ es compacto, podemos suponer que existe un elemento Γ en $C(C(X))$ tal que $\lim \Gamma_n = \Gamma$. Puesto que $\Gamma_n \subset Fr(C(A))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $Fr(C(A))$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$, se tiene que $\Gamma \subset Fr(C(A))$. Como B_n y A pertenecen a Γ_n y $\lim B_n = B$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, se tiene que B y A pertenecen a Γ . Se sigue que Γ es un subcontinuo no degenerado de $C(X)$. Asimismo, para cada par de elementos E y F de Γ , existen sucesiones $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tales que $\lim \alpha_n(t_n) = E$ y $\lim \alpha_n(s_n) = F$. Como α_n es un arco ordenado, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(t_n) \subset \alpha_n(s_n)$ o $\alpha_n(s_n) \subset \alpha_n(t_n)$. Como una de estas dos condiciones ocurre para todos los elementos de un subconjunto infinito de \mathbb{N} , por el inciso (2) del Teorema 1.46, se sigue que $E \subset F$ o $F \subset E$. Luego, por el Teorema 1.57, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\Gamma = \alpha([0, 1])$. Notemos que si $r \in [0, 1]$, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\lim \alpha_n(r_n) = \alpha(r)$. Como α_n es un arco ordenado desde B_n hasta A , se tiene que $B_n \subset \alpha_n(r_n) \subset A$ y, en consecuencia,

$B \subset \alpha(r) \subset A$. Así, α es un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde B hasta A .

En resumen, en el párrafo anterior, hemos demostrado que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un arco ordenado α_n en $Fr(C(A))$ desde B_n hasta A , y un arco ordenado α en $Fr(C(A))$ desde B hasta A tales que $\lim \alpha_n([0, 1]) = \alpha([0, 1])$.

En este párrafo probaremos que podemos suponer que B y cada B_n son no degenerados (en consecuencia que son subarcos de A). Para esto fijemos un número t tal que $0 < t < 1$ y $\alpha([0, t]) \subset B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Observamos que $\alpha(t)$ es un subcontinuo propio y no degenerado de A . Además, $\alpha([0, t])$ es un arco en la ε bola de B que une a B con $\alpha(t)$. Así, B y $\alpha(t)$ pertenecen a la misma componente de esta bola. Tomemos una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\lim \alpha_n(t_n) = \alpha(t)$. Podemos suponer que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(t_n)$ es un subcontinuo propio y no degenerado de A y $\alpha_n(t_n) \in B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Afirmamos que B_n y $\alpha_n(t_n)$ están a la misma componente de $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Para probar esto fijamos $s \in [0, t_n]$. Como α_n es un arco ordenado, se tiene que $B_n \subset \alpha_n(s) \subset \alpha_n(t_n)$. Por otra parte, como $H(B, B_n) < \varepsilon$ y $H(B, \alpha_n(t_n)) < \varepsilon$, por la Proposición 1.44, se tiene que $B \subset N(\alpha_n(s), \varepsilon)$ y $\alpha_n(s) \in B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Se sigue que $\alpha_n([0, t_n])$ es un arco que une a B_n con $\alpha_n(t_n)$ en esta bola. Esto prueba nuestra afirmación. Puesto que A es un arco o una curva cerrada simple, por lo anterior tenemos que $\alpha(t)$ es un arco en A y $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de arcos en A tal que $\lim \alpha_n(t_n) = \alpha(t)$. Además, $\alpha(t)$ y $\alpha_n(t_n)$ pertenecen a la frontera de $C(A)$. Más aún, $\alpha(t)$ y $\alpha_n(t_n)$ son elementos de $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$ y están en componentes diferentes de esta bola. Por esto, podemos suponer que B y B_n son arcos en A (pues en otro caso renombramos $B = \alpha(t)$ y $B_n = \alpha_n(t_n)$).

Denotemos $J = \{n \in \mathbb{N} : B_n \in SB(A)\}$. Probaremos que J es finito. Para hacer esto suponemos lo contrario. Luego existe una sucesión $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ en \mathbb{N} tal que $n_j \in J$ y $n_j < n_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{B_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $B_{n_j} \in SB(A)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\{B_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de arcos que converge al arco B en $C(A)$ y A es un arco o una curva cerrada simple, podemos suponer que $B \cap B_{n_j} \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por el inciso (3) del Teorema 1.80, se obtiene que $B \in SB(A)$. Por el inciso (2) del Teorema 1.79, se tiene que $B \cup B_{n_j} \in SB(A)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\lim B_{n_j} = B$, por el inciso (3) del Teorema 1.46, observamos que $\lim B \cup B_{n_j} = B$. Luego, podemos fijar

$j \in \mathbb{N}$ tal que $H(B, B_{n_j}) < \varepsilon$ y $H(B_{n_j}, B \cup B_{n_j}) < \varepsilon$.

Tomemos arcos ordenados, $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$, desde B hasta $B \cup B_{n_j}$ y desde B_{n_j} hasta $B \cup B_{n_j}$, respectivamente, y denotemos $\mathcal{A} = \beta([0, 1]) \cup \gamma([0, 1])$. Observamos que \mathcal{A} es la unión de dos continuos que tienen en común al elemento $B \cup B_{n_j}$; además, todo elemento de \mathcal{A} está contenido en $B \cup B_{n_j}$, y así en A , pues $B \cup B_{n_j} \subset A$. Se sigue que \mathcal{A} es un continuo en $C(A)$. Como B y B_{n_j} pertenecen a la semifrontera de $C(A)$ y cada elemento de \mathcal{A} contiene a B o a B_{n_j} , por el inciso (2) del Teorema 1.79, se sigue que $\mathcal{A} \subset SB(A)$. Así, \mathcal{A} es un continuo en $Fr(C(A))$. Por otra parte, notemos que si $0 \leq t \leq 1$, entonces $B \subset \beta(t) \subset B \cup B_{n_j}$. Así, $B \subset N(\beta(t), \varepsilon)$. También, puesto que $B \cup B_{n_j} \subset N(B, \varepsilon)$, se tiene que $\beta(t) \subset N(B, \varepsilon)$. Por la Proposición 1.44, se obtiene que $H(B, \beta(t)) < \varepsilon$. De una manera similar se demuestra que $H(B, \gamma(t)) < \varepsilon$ si $0 \leq t \leq 1$. Se sigue que $\mathcal{A} \subset B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Es decir \mathcal{A} es un continuo en esta bola que contiene a B y a B_{n_j} , lo cual es una contradicción con (*). Esto prueba que J es un conjunto finito. Por esto podemos suponer que:

(**) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in Fr(C(A)) - SB(A)$.

A continuación probaremos que:

(***) Existen $N \in \mathbb{N}$, $E \in \alpha([0, 1]) \cup \alpha_N([0, 1])$ y una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tales que $H(B, E) < \varepsilon$, $B \cup B_N \subset E$, $\lim E_n = E$ y $E_n \cap A = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar esto, considerando (**) y el Lema 3.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos una sucesión $\{B_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim B_k^{(n)} = B_n$ y $B_k^{(n)} \cap A = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, notemos que una de las tres condiciones $B \subset B_n$; $B_n \subset B$; o $B \not\subset B_n$ y $B_n \not\subset B$; ocurre para todos los elementos de un subconjunto infinito de \mathbb{N} . Así, para obtener lo que decimos en (***), podemos limitarnos a analizar tres casos.

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $B \subset B_n$;

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset B$ y

(3) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $B \not\subseteq B_n$ y $B_n \not\subseteq B$.

En el caso (1), tomamos $N = 1$, $E = B_1$ y $E_n = B_n^{(1)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $H(B, E) = H(B, B_1) < \varepsilon$; $B \cup B_1 = B_1 = E$; $\lim E_n = \lim B_n^{(1)} = B_1 = E$ y $E_n \cap A = B_n^{(1)} \cap A = \emptyset$. De este modo, en este caso, se tiene lo que se dice en (**).

En el caso (2), tomamos $N = 1$, $E = B$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_n, B_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n}$ y denotamos $E_n = B_{k_n}^{(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $H(B, E) = 0$; $B \cup B_1 = B = E$; como $H(E, E_n) = H(B, B_{k_n}^{(n)}) \leq H(B, B_n) + H(B_n, B_{k_n}^{(n)}) < H(B, B_n) + \frac{1}{n}$ y, puesto que $\lim H(B, B_n) = 0$, se sigue que $\lim H(E, E_n) = 0$, luego $\lim E_n = E$; además, $E_n \cap A = B_{k_n}^{(n)} \cap A = \emptyset$. Así, también en el caso (2), se tiene lo que dice (**).

En el caso (3), fijamos un subarco A' de A (recordemos que A puede ser una curva cerrada simple) tal que $B \subset A'$. Podemos suponer que $B_n \subset A'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos un orden en A' inducido naturalmente por un homeomorfismo del intervalo $[0, 1]$ sobre A' . Denotamos $B = [a, b]$ y $B_n = [a_n, b_n]$ donde $a < b$ y $a_n < b_n$. Notemos que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. Además, como $B \not\subseteq B_n$ y $B_n \not\subseteq B$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a < b_n < b$ o $a < a_n < b < b_n$. Como una de estas dos condiciones ocurre para un subconjunto infinito de \mathbb{N} , en este caso (3) podemos limitarnos a considerar los siguientes subcasos:

(3.1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} < a < b_n < b_{n+1} < b$; y

(3.2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a < a_{n+1} < a_n < b < b_{n+1} < b_n$.

Veamos el subcaso (3.1). Fijemos un número $s > 0$ tal que $H(B, \alpha(s)) < \varepsilon$. Como $\lim \alpha_n([0, 1]) = \alpha([0, 1])$, podemos tomar una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\lim \alpha_n(s_n) = \alpha(s)$. Sin perder generalidad podemos suponer que $H(B, \alpha_n(s_n)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con argumentos similares a los utilizados en los tres párrafos previos a (**), se justifica que $\alpha(s)$ y $\alpha_n(s_n)$ pertenecen a diferentes componentes de $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$, y con esto que el conjunto $\{n : \alpha_n(s_n) \in SB(A)\}$ es finito. Así, como en (**), podemos suponer que $\alpha_n(s_n) \in Fr(C(A)) - SB(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Lema 3.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión

$\{D_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ en $C(X)$ tal que $\lim D_k^{(n)} = \alpha_n(s_n)$ y $D_k^{(n)} \cap A = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Denotemos $\alpha(s) = [c, d]$ donde $c < d$. Como α es un arco ordenado tal que $\alpha(0) = B$, se tiene que $B \subset \alpha(s)$ y $B \neq \alpha(s)$. Así, $c \leq a < b \leq d$ y si $c = a$, entonces $b < d$. Por esto a continuación consideramos dos situaciones posibles:

(3.1.1) $c < a$; y

(3.1.2) $c = a$.

Analicemos (3.1.1). Aquí tenemos que $c < a < b \leq d$. Como $\lim a_n = a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c < a_N$; y como $a_n < a_{n+1} < a < b < b_n < b_{n+1} < b \leq d$, para todo $n > N$ se tiene que $c < a_N < a_n < a < b_n < b \leq d$. Luego, para todo $n \geq N$, $[a_n, b_n] \subset [c, d]$. Como $B_n = [a_n, b_n]$ y $\alpha(s) = [c, d]$ se tiene que $B_n \subset \alpha(s)$ para todo $n \geq N$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijemos $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $H(\alpha_n(s_n), D_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n}$. Finalmente denotemos $E = \alpha(s)$ y $E_n = D_{k_n}^{(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $H(B, E) = H(B, \alpha(s)) < \varepsilon$; $B \cup B_n \subset \alpha(s) = E$; $H(E, E_n) = H(\alpha(s), D_{k_n}^{(n)}) \leq H(\alpha(s), \alpha_n(s_n)) + H(\alpha_n(s_n), D_{k_n}^{(n)}) < H(\alpha(s), \alpha_n(s_n)) + \frac{1}{n}$, como $\lim \alpha_n(s_n) = \alpha(s)$, se sigue que $\lim E_n = E$; además, $E_n \cap A = D_{k_n}^{(n)} \cap A = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, en el caso (3.1.1), se tiene lo que decimos en (***) .

Consideremos el caso (3.1.2). Aquí tenemos que $c = a < b < d$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos $\alpha_n(s_n) = [c_n, d_n]$. Como α_n es un arco ordenado tal que $\alpha_n(0) = B_n$, se tiene que $B_n \subset \alpha_n(s_n)$, y puesto que $B_n = [a_n, b_n]$, se sigue que $[a_n, b_n] \subset [c_n, d_n]$. Así, $c_n \leq a_n < a < b_n \leq d_n$. Como $\lim \alpha_n(s_n) = \alpha(s)$ y $\alpha(s) = [c, d]$, se tiene que $\lim d_n = d$. Luego, como $b < d$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b < d_n$ para todo $n \geq N$. Se sigue que $c_N \leq a_N < a_n < a < b_N < b_n < b < d_N$ para todo $n \geq N$. Por esto, $[a, b] \subset [c_N, d_N]$ y $[a_n, b_n] \subset [c_N, d_N]$ si $n \geq N$. Es decir, $B \subset \alpha_N(s_N)$ y $B_n \subset \alpha_N(s_N)$ si $n \geq N$. Denotemos $E = \alpha_N(s_N)$ y $E_k = D_k^{(N)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $H(B, E) = H(B, \alpha_N(s_N)) < \varepsilon$; $B \cup B_n \subset \alpha_N(s_N) = E$ si $n \geq N$; $\lim E_k = \lim D_k^{(N)} = \alpha_N(s_N) = E$; y $E_k \cap A = D_k^{(N)} \cap A = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba (***) con las condiciones en (3.1.2).

Con esto hemos demostrado (***) en el subcaso (3.1) del caso (3). En el subcaso (3.2) se obtiene lo requerido con argumentos similares. Esto completa la demostración de (***) .

En relación con el elemento E obtenido en (**), como α y α_N son arcos ordenados desde B hasta A y desde B_N hasta A , respectivamente, observamos que $B \subset E \subset A$ o $B_N \subset E \subset A$. Como $H(B, E) < \varepsilon < H(B, A)$, se tiene $E \neq A$. Puesto que B y B_N son no degenerados, se sigue que E es un subcontinuo propio y no degenerado de A . Por esto E es un arco contenido en A . Para continuar recordemos que \mathcal{C} denota la componente de $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$ que contiene a B , y consideremos los siguientes dos casos:

- (i) $E \in \alpha([0, 1])$; y
- (ii) $E \in \alpha_N([0, 1])$.

En el caso (i), afirmamos que $E \in \mathcal{C}$. Para probar esto tomemos $r \in [0, 1]$ tal que $\alpha(r) = E$. Como α es un arco ordenado tal que $\alpha(0) = B$, se tiene que $B \subset \alpha(s) \subset \alpha(r)$ para todo $s \in [0, r]$. Se obtiene que $B \subset N(\alpha(s), \varepsilon)$ y, puesto que $\alpha(r) \subset N(B, \varepsilon)$, $\alpha(s) \subset N(B, \varepsilon)$ para todo $s \in [0, r]$. Así, por la Proposición 1.44, se obtiene que $H(B, \alpha(s)) < \varepsilon$ para todo $s \in [0, r]$. Luego, $\alpha([0, r])$ es un arco o un punto en $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$ que contiene a B y a E . Esto prueba $E \in \mathcal{C}$.

Como E es un arco tal que $B_N \subset E$ y $\lim E_n = E$, por el Corolario 1.77, existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ en $C(X)$ tal que $\lim F_n = B_N$ y $F_n \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (*) se tiene que $B_N \notin \mathcal{C}$, así $B_N \neq E$ y, dado que $\lim E_n = E$, podemos suponer que $F_n \neq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por esto podemos tomar un arco ordenado $\beta_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde F_n hasta E_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\beta_n([0, 1])$ es un subcontinuo de $C(X)$. Así, $\{\beta_n([0, 1])\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(C(X))$ y, por la compacidad de este hiperespacio, podemos suponer que existe un elemento Λ en $C(C(X))$ tal que $\lim \beta_n([0, 1]) = \Lambda$. Con argumentos similares a los utilizados en el párrafo que sigue a (*), se demuestra que existe un arco ordenado $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde B_N hasta E tal que $\Lambda = \beta([0, 1])$.

Probaremos que $\beta([0, 1]) \subset Fr(C(A))$. Para esto observemos que para cada $t \in [0, 1]$, $\beta(t) \subset E$. Así, como $E \subset A$, se tiene que $\beta(t) \subset A$, es decir

$\beta(t) \in C(A)$, para cada $t \in [0, 1]$. Se sigue que $\beta([0, 1]) \subset C(A)$. Por otra parte notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $t \in [0, 1]$, $\beta_n(t) \subset E_n$. Luego, puesto que $E_n \cap A = \emptyset$, $\beta_n(t) \cap A = \emptyset$, así $\beta_n(t) \in C(X) - C(A)$. Esto significa que $\beta_n([0, 1]) \subset C(X) - C(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim \beta_n([0, 1]) = \beta([0, 1])$ se obtiene que $\beta([0, 1]) \subset \overline{C(X) - C(A)}$. Esto demuestra que $\beta([0, 1]) \subset Fr(C(A))$.

Veamos que $\beta([0, 1])$ está contenido en $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Para esto, sea $t \in [0, 1]$. Como β es un arco ordenado desde B_N hasta E , se tiene que $B_N \subset \beta(t) \subset E$. Como $H(B, B_N) < \varepsilon$ y $H(B, E) < \varepsilon$, por la Proposición 1.44, se sigue que $B \subset N(B_N, \varepsilon)$ y $E \subset N(B, \varepsilon)$. De aquí que $B \subset N(\beta(t), \varepsilon)$ y $\beta(t) \subset N(B, \varepsilon)$, por lo cual $H(B, \beta(t)) < \varepsilon$ (por la Proposición 1.44).

En conclusión, en el caso (i), $\beta([0, 1])$ es un arco en $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$ que contiene a los elementos B_N y E . Esto es una contradicción porque $E \in \mathcal{C}$ y $B_N \notin \mathcal{C}$.

En el caso (ii) afirmamos que $E \notin \mathcal{C}$. Para probar esto tomemos $r \in [0, 1]$ tal que $\alpha_N(r) = E$. Como α_N es un arco ordenado tal que $\alpha_N(0) = B_N$, se tiene que $B_N \subset \alpha_N(s) \subset \alpha_N(r)$ para todo $s \in [0, r]$. Como $H(B, B_N) < \varepsilon$, se tiene que $B \subset N(B_N, \varepsilon)$ (Proposición 1.44) y, se sigue que $B \subset N(\alpha_N(s), \varepsilon)$ para todo $s \in [0, r]$. Además, $H(B, \alpha_N(r)) = H(B, E) < \varepsilon$, se tiene que $\alpha_N(r) \subset N(B, \varepsilon)$ (Proposición 1.44), así $\alpha_N(s) \subset N(B, \varepsilon)$ para todo $s \in [0, r]$. En consecuencia, $H(B, \alpha_N(s)) < \varepsilon$ para todo $s \in [0, r]$ (Proposición 1.44). Luego, $\alpha_N([0, r])$ es un continuo en $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$ que contiene a los elementos B_N y E . Se sigue que B_N y E están en una misma componente de esta bola. Por (*) se tiene que $B_N \notin \mathcal{C}$. Esto demuestra que $E \notin \mathcal{C}$.

Como E es un arco tal que $B \subset E$ y $\lim E_n = E$, por el Corolario 1.77, existe una sucesión $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim G_n = B$ y $G_n \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $E \notin \mathcal{C}$ se tiene que $B \neq E$ y, puesto que $\lim E_n = E$, podemos suponer que $G_n \neq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por esto podemos tomar un arco ordenado $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde G_n hasta E_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Con argumentos similares a los utilizados en el caso (i), podemos encontrar un arco ordenado $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde B hasta E tal que $\lim \gamma_n([0, 1]) = \gamma([0, 1])$. También en forma análoga al caso (i) se obtiene que $\gamma([0, 1])$ es un arco en $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Esto es una contradicción porque, en este caso (ii), B y E están en componentes diferentes de esta bola.

Las contradicciones obtenidas en los casos (i) y (ii) demuestran que $Fr(C(A))$ es localmente conexo si A es un arco o una curva cerrada simple. \square

3.4 Nota. Sea T un triodo simple con puntos extremos a , b y c . Decimos que un subtriodo A de T es un triodo largo en T si $A \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$.

3.5 Lema. Si un continuo X contiene un triodo simple, entonces existe un continuo Z que contiene a X tal que $Fr_{C(Z)}(C(X))$ no es localmente conexa.

Demostración. Sea X un continuo que contiene un triodo simple T . Denotamos por T_0 al triodo simple en el plano euclidiano definido por:

$$T_0 = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea T_n el subtriodo del triodo T_0 definido por:

$$T_n = \left(\left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right] \times \{0\} \right) \cup \left(\{0\} \times \left[0, \frac{n}{n+1} \right] \right).$$

Sea $Y_0 = T_0 \cup S_0$ una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo T_0 , donde $S_0 \approx [0, \infty)$, tal que un subcontinuo A de T_0 es el límite de una sucesión de arcos en S_0 si y sólo si A es un punto, un arco, o un triodo largo en T_0 . Por ejemplo la compactación que se ilustra en la Figura 3.1 tiene esta propiedad.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Y_n = T_n \cup S_n$ una copia topológica de la compactación Y_0 de tal forma que $Y_n \cap Y_0 = T_n$ y $Y_n \cap Y_m = T_n$ si $n < m$, y $\lim Y_n = T_0$. Denotamos $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$. Observamos que:

$$Y = T_0 \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \right) \text{ y } S_n \cap S_m = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$

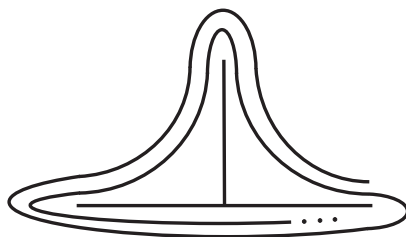


Figura 3.1:

Sea Z el continuo que se obtiene de la unión ajena de X y Y , identificando al triodo T de X con el triodo T_0 de Y . Esto es

$$Z = X \cup Y, \text{ donde } X \cap Y = T = T_0.$$

El continuo X es naturalmente un subcontinuo del continuo Z , véase [6, 3.17-3.20]. Probaremos que $Fr_{C(Z)}(C(X))$ no es localmente conexa. Para hacer esto primero vamos a demostrar que un elemento A de $C(X)$ pertenece a $Fr_{C(Z)}(C(X))$ si y sólo si ocurre una de las siguientes condiciones:

- (i) $A \in F_1(T)$;
- (ii) A es un arco en T ;
- (iii) A es un triodo largo en T_n para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; o
- (iv) A contiene a T_1 .

Observemos que si A es un subcontinuo de X que satisface (i) o (ii), entonces existe una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el rayo S_0 tal que $\lim A_n = A$; y si A cumple (iii), entonces existe una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el rayo S_n tal que $\lim A_n = A$. Por otra parte si A cumple (iv), entonces tomamos

una sucesión creciente y no acotada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en el rayo S_1 y denotamos $A_n = A \cup [a_n, \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; se tiene que $\lim A_n = A$. De esta manera, si A es un subcontinuo de X que satisface alguna de las condiciones de (i) a (iv), se encuentra una sucesión de elementos de $C(Z) - C(X)$ que converge a A , por lo que $A \in Fr_{C(Z)}(C(X))$.

Recíprocamente, supongamos que A es un subcontinuo de X que no satisface ninguna de las condiciones de (i) a (iv). Demostraremos que A no pertenece a $Fr_{C(Z)}(C(X))$. Para hacer esto denotamos:

$$\mathcal{L} = \{E \in C(T) : E \text{ satisface (i), (ii) o (iv)}\}; \text{ y}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{L} \cup \{E \in C(X) : E \text{ satisface (iii)}\}.$$

Vamos a demostrar lo que sigue:

(1) Los conjuntos \mathcal{L} y \mathcal{F} son cerrados en $C(X)$.

Veamos primero que el conjunto \mathcal{L} es cerrado. Para esto, notemos que $F_1(T)$ es cerrado (pues éste es homeomorfo al triodo T); también $C(T_1, X)$ es cerrado (esto se sigue del inciso (2) del Teorema 1.46). Así, basta probar que $cl(\{A \in C(T) : A \text{ es un arco}\}) \subset \mathcal{L}$. Tomemos una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que E_n es un arco en T para cada $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que existe $E \in C(X)$ tal que $\lim E_n = E$. Existe una subsucesión $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que todo E_{n_k} está contenido en la unión de dos de los tres arcos que conforman al triodo T , $[-1, 0] \times \{0\}$, $[0, 1] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, 1]$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $E_{n_k} \subset ([-1, 0] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{0\})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim E_{n_k} = E$, por el inciso (2) del Teorema 1.46, se sigue que $E \subset ([-1, 0] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{0\})$, es decir, $E \subset [-1, 1] \times \{0\}$. Se obtiene que E es un arco o un punto en T . Así, $E \in \mathcal{L}$. Con esto hemos demostrado que \mathcal{L} es cerrado en $C(X)$.

Ahora veamos que el conjunto \mathcal{F} es cerrado. Como \mathcal{L} es cerrado, basta demostrar que $cl(\{A \in C(T) : A \text{ es un triodo largo en } T_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}) \subset \mathcal{F}$. Tomemos una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que E_n es un triodo largo en T_{k_n} , y supongamos que existe $E \in C(X)$ tal que $\lim E_n = E$. Sin perder generalidad podemos suponer que existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\lim T_{k_n} = T_m$. Por el inciso (2) del Teorema 1.46,

se tiene que $E \subset T_m$. Además, como cada E_n contiene algún punto extremo del triodo T_{k_n} , se tiene que E contiene algún punto extremo del triodo T_m . Se sigue que E es un triodo largo o un arco en $T_m \subset T_0$. Por esto $E \in \mathcal{F}$. Esto demuestra que \mathcal{F} es un conjunto cerrado en $C(X)$.

Como $C(X)$ es cerrado en $C(Z)$, por (2) se tiene que \mathcal{F} es cerrado en $C(Z)$. Denotemos $\mathcal{U} = (C(Z) - \mathcal{F}) \cap (C(Z) - C(Y))$. Se tiene que \mathcal{U} es un conjunto abierto en $C(Z)$ y, como A es un subcontinuo de X que no cumple ninguna de las condiciones de (i) a (iv), $A \in \mathcal{U}$.

Veamos que $\mathcal{U} \subset C(X)$. Para ver esto tomemos $E \in \mathcal{U}$ y supongamos que E no está contenido en X . Así, existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $E \cap S_n \neq \emptyset$. Como E no pertenece a $C(Y)$, notamos que $E \cap X \neq \emptyset$. Se sigue que $T_n \subset E$. Como $T_1 \subset T_n$, se obtiene que $T_1 \subset E$. Así, $E \in \mathcal{L}$, por lo que $E \in \mathcal{F}$. Esto es una contradicción porque $\mathcal{U} \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Por lo anterior se tiene que $A \in \text{int}_{C(Z)}(C(X))$. Así, A no pertenece a $\text{Fr}_{C(Z)}(C(X))$. Hemos demostrado un subcontinuo A de X pertenece a $\text{Fr}_{C(Z)}(C(X))$ si y sólo si A satisface alguna de las condiciones de (i) a (iv).

Denotemos $A_0 = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{4}])$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = ([-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{4}])$.

Notamos que A_0 es un triodo largo en T_0 ; y A_n es un triodo largo en T_n . Así, A_0 y A_n pertenecen a la frontera de $C(X)$ en $C(Z)$. Observemos también que $\lim A_n = A_0$.

Notemos que $A_0 \notin \mathcal{L}$. Luego, como \mathcal{L} es cerrado (y así compacto), podemos tomar un número $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < H(A_0, \mathcal{L})$.

Por simplicidad denotemos por $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$ a la ε -bola de A_0 en $\text{Fr}_{C(Z)}(C(X))$, es decir, $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0) = B_{\text{Fr}_{C(Z)}(C(X))}(A_0, \varepsilon)$. Por la elección de ε , $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Además, como $\lim A_n = A_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$ para todo $n \geq N$.

Denotemos por \mathcal{K}_0 y \mathcal{K}_n (si $n \geq N$) a las componentes de la ε -bola $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$ que contienen a \mathcal{A}_0 y a \mathcal{A}_n , respectivamente. Probaremos la siguiente afirmación:

(2) Para todo $n \geq N$ $\mathcal{K}_0 \neq \mathcal{K}_n$.

Para probar esto, fijemos $n \geq N$ y un número s tal que $\frac{n}{n+1} < s < \frac{n+1}{n+2}$. Denotemos

$$T_s = ([-s, s] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, s]) \quad \text{y} \quad \mathcal{M} = \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap C(T_s).$$

Como $C(T_s)$ es un conjunto cerrado en $C(Z)$, se tiene que \mathcal{M} es un conjunto cerrado en la bola $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$. Notemos que $A_n \subset T_n \subset T_s$, así $A_n \in \mathcal{M}$. Por otra parte, como A_0 tiene dos puntos extremos del triodo T y T_s no contiene a ninguno de estos puntos, se tiene que $A_0 \not\subset T_s$, y así $A_0 \notin \mathcal{M}$.

Afirmamos que \mathcal{M} es un conjunto abierto en la bola $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$. Para probar esta afirmación tomemos un número r tal que $s < r < \frac{n+1}{n+2}$, y denotemos $V = ((-r, r) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, r))$. Observemos que V es un conjunto abierto en el triodo T . Así, podemos tomar un conjunto abierto U en Z tal que $V = T \cap U$. Por el inciso (2) de la Proposición 1.52, se tiene que $\mathcal{C}(U)$ es un conjunto abierto en $C(Z)$, por lo cual $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap \mathcal{C}(U)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$. Vamos a probar que \mathcal{M} coincide con este conjunto. Por la elección de r , se tiene que $T_s \subset V$. Luego, como $V \subset U$, $C(T_s) \subset \mathcal{C}(U)$. Se sigue que $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap \mathcal{C}(U)$. Recíprocamente, si $B \in \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap \mathcal{C}(U)$, entonces $B \in Fr_{C(Z)}(C(X)) - \mathcal{L}$ y $B \subset U$. Por la definición de \mathcal{L} y las condiciones en (i)-(iv), se tiene que B es un triodo largo en T_k para algún $k \in \mathbb{N}$. Por la elección de r , se tiene que $T_m \not\subset U$ para todo $m \geq n+1$. Así, $k \leq n$. Como $T_k \subset T_n \subset T_s$ se sigue que $B \subset T_s$. Esto implica que $B \in \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap C(T_s)$, es decir $B \in \mathcal{M}$. Esto prueba que $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap \mathcal{C}(U) \subset \mathcal{M}$. Con esto se obtiene que $\mathcal{M} = \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) \cap \mathcal{C}(U)$. Como $\mathcal{C}(U)$ es un conjunto abierto en $C(Z)$, se concluye que \mathcal{M} es un conjunto abierto en la bola $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$.

Con lo anterior se tiene que \mathcal{M} es un conjunto abierto y cerrado en la bola $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$. Además, $A_n \in \mathcal{M}$ y $A_0 \notin \mathcal{M}$. Luego, $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0) = \mathcal{M} \cup (\mathcal{V}_\varepsilon(A_0) - \mathcal{M})$, y los conjuntos en esta unión son abiertos en $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$, obviamente ajenos, $A_n \in \mathcal{M}$ y $A_0 \in \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) - \mathcal{M}$, se sigue que $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}$ y $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A_0) - \mathcal{M}$. Así, $\mathcal{K}_n \neq \mathcal{K}_0$. Esto demuestra lo que afirmamos en (2).

Por (2) se tiene que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $Fr_{C(Z)}(C(X)) - \mathcal{K}_0$. Como $\lim A_n = A_0$ y $A_0 \in \mathcal{K}_0$, se sigue que \mathcal{K}_0 no es abierto en $Fr_{C(Z)}(C(X))$.

Como \mathcal{K}_0 es una componente de $\mathcal{V}_\varepsilon(A_0)$, por la Proposición 1.8, se obtiene que $Fr_{C(Z)}(C(X))$ no es localmente conexa. \square

3.6 Lema. Todo continuo X es homeomorfo a un subcontinuo X' de un cubo de Hilbert Z tal que $Fr_{C(Z)}(C(X')) = C(X')$.

Demostración. Sea X un continuo. Por el Teorema 1.4 existen un subcontinuo Y del cubo de Hilbert I^∞ y un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Denotemos $Z = I^\infty \times [0, 1]$ y definamos $i : X \rightarrow Z$ como $i(x) = (h(x), 0)$ para todo $x \in X$. Denotemos $X' = i(X)$.

Se tiene que Z es un cubo de Hilbert y que X' es un subcontinuo de Z homeomorfo al continuo X ($i : X \rightarrow X'$ es un homeomorfismo). Veamos que X' satisface la conclusión del lema. Sea $B \in C(X')$. Existe $A \in C(X)$ tal que $B = h(A) \times \{0\}$. Hacemos $B_n = h(A) \times \{\frac{1}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $X' \subset I^\infty \times \{0\}$, se tiene que $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(Z) - C(X')$. De aquí, y puesto que $\lim B_n = B$, por el inciso (1) de la Proposición 2.1, se sigue que B pertenece a la frontera de $C(X')$ en $C(Z)$. Esto prueba que $Fr_{C(Z)}(C(X')) = C(X')$. \square

3.7 Lema. Sea X un continuo. Si para todo continuo Z y para todo subcontinuo propio Y de Z tal que Y es homeomorfo a X se tiene que $Fr_{C(Z)}(C(Y))$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Por el Lema 3.6, existe un subcontinuo X' de un cubo de Hilbert Z tal que X' es homeomorfo a X y $Fr_{C(Z)}(C(X')) = C(X')$. Por hipótesis, se tiene que $Fr_{C(Z)}(C(X'))$ es localmente conexo. Así, $C(X')$ es localmente conexo. Por el Teorema 1.65, se sigue que X' es localmente conexo. Como X es homeomorfo a X' , se concluye que X es localmente conexo. \square

3.8 Teorema. Para un continuo no degenerado X las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) X es un arco o una curva cerrada simple; y
- (2) Para todo continuo Z y para todo subcontinuo propio Y de Z tal que Y es homeomorfo a X , se tiene que $Fr_{C(Z)}(C(Y))$ es localmente conexo.

Demostración. (1) \rightarrow (2): Sea X un arco o una curva cerrada simple. Supongamos que Y es un subcontinuo propio de un continuo Z y que Y es homeomorfo a X . Se tiene que Y es un arco o una curva cerrada simple en el continuo Z . Por el Teorema 3.3, se sigue que $Fr_{C(Z)}(C(Y))$ es localmente conexo.

(2) \rightarrow (1): Supongamos que X es un continuo que satisface la hipótesis del inciso (2). Por el Lema 3.5, se tiene que X no contiene triodos simples. Por el Lema 3.7, se tiene que X es localmente conexo. Luego, por el Teorema 1.36, se obtiene que X es un arco o una curva cerrada simple. \square

3.9 Teorema. Si A es un subcontinuo propio y localmente conexo de un continuo X y $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$, entonces $Fr(C(A))$ es localmente conexo.

Demostración. Tomemos un elemento $B \in Fr(C(A))$ y un número $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe un conjunto abierto y conexo en $Fr(C(A))$ que contiene a B y que está contenido en la bola $B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$.

Como $B \subset A$ y A es localmente conexo, para cada punto $x \in B$ podemos tomar un conjunto abierto en A , V_x , tal que V_x es conexo y $x \in V_x \subset B_A(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Notemos que la colección $\{V_x : x \in B\}$ es una cubierta abierta de B en A , y B es un subconjunto compacto de A . Por esto, existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset B$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$.

Por el inciso (2) de la Proposición 1.52, se tiene que $\mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}) \cap (\bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(V_{x_i}))$ es un conjunto abierto en $C(A)$. Denotemos

$$\mathcal{V} = \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}) \cap (\bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(V_{x_i})) \cap Fr(C(A)).$$

Se tiene que:

(1) \mathcal{V} es un conjunto abierto en $Fr(C(A))$.

Tenemos que $B \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, así $B \in \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i})$; $x_i \in B \cap V_{x_i}$, así $B \cap V_{x_i} \neq \emptyset$, por lo que $B \in \mathcal{D}(V_{x_i})$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, luego $B \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(V_{x_i})$; y como $B \in Fr(C(A))$, se sigue que:

$$(2) B \in \mathcal{V}.$$

A continuación probaremos que:

$$(3) \mathcal{V} \subset B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon).$$

Para probar (3) fijemos un elemento $C \in \mathcal{V}$. Tomemos un punto $x \in B$. Como $B \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in V_{x_j}$. Notemos que $C \in \mathcal{D}(V_{x_j})$. Así, $C \cap V_{x_j} \neq \emptyset$. Fijemos un punto $y \in C \cap V_{x_j}$. Como $\{x, y\} \subset V_{x_j} \subset B_A(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$, se tiene que $d(x, y) < \varepsilon$. Esto prueba que $B \subset N(\varepsilon, C)$. Similarmente, como $C \in \mathcal{V}$ se tiene que $C \in \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{x_i})$, es decir, $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{x_i}$. Luego, si $z \in C$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in V_{x_j}$. Como $V_{x_j} \subset B_A(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$, se sigue que $d(x_j, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto prueba que $C \subset N(\varepsilon, B)$. Con esto, por la Proposición 1.44, se obtiene que $H(B, C) < \varepsilon$. Así, lo que decimos en (3) está demostrado.

En lo que sigue probaremos que:

$$(4) \mathcal{V} \text{ es conexo.}$$

Para probar (4) tomemos un elemento arbitrario $C \in \mathcal{V}$ tal que $C \neq B$. Vamos a demostrar que existe una trayectoria en \mathcal{V} desde C hasta B . Para esto fijemos un punto $p \in C$. Como $C \in \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i})$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p \in V_{x_j}$. Como $B \in \mathcal{D}(V_{x_j})$, podemos tomar un punto $q \in B \cap V_{x_j}$. Como V_{x_j} es un conjunto abierto y conexo en A , y A es un continuo localmente conexo, por el Teorema 1.33, se tiene que V_{x_j} es un conjunto arco conexo. Así, podemos tomar un arco D en V_{x_j} tal que $\{p, q\} \subset D$. Por el Teorema 1.54, podemos tomar arcos ordenados $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$ para

$i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tales que:

$$\gamma_1(0) = \{p\} \text{ y } \gamma_1(1) = \{D\};$$

$$\gamma_2(0) = \{q\} \text{ y } \gamma_2(1) = \{B\};$$

$$\gamma_3(0) = \{p\} \text{ y } \gamma_3(1) = \{C\}; \text{ y}$$

$$\gamma_4(0) = \{q\} \text{ y } \gamma_4(1) = \{D\}.$$

Definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} C \cup \gamma_1(4t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ C \cup D \cup \gamma_2(4t - 1), & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ D \cup B \cup \gamma_3(3 - 4t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ B \cup \gamma_4(4 - 4t), & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por el inciso (2) del Teorema 1.46, se tiene que γ es una función continua en cada uno de los cuatro intervalos en que dividimos al intervalo $[0, 1]$ para su definición. Además, como las definiciones de γ coinciden en $\frac{1}{4}$, en $\frac{1}{2}$ y en $\frac{3}{4}$, se sigue que γ es una función continua.

Notemos que $\gamma(0) = C \cup \{p\} = C$ y $\gamma(1) = B \cup \{q\} = B$. Así, γ es una trayectoria en $C(X)$ desde C hasta B .

Demostraremos que γ es una trayectoria en \mathcal{V} , es decir que $\gamma(t) \in \mathcal{V}$ para todo $t \in [0, 1]$. Para esto fijemos un número $t \in [0, 1]$. Notemos que $\gamma(t) \subset B \cup C \cup D \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, así $\gamma(t) \in \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i})$. También observemos que si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, entonces $C \subset \gamma(t)$; y si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, entonces $B \subset \gamma(t)$; luego, puesto que $C \cap V_{x_i} \neq \emptyset \neq B \cap V_{x_i}$, se sigue que $\gamma(t) \cap V_{x_i} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, $\gamma(t) \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(V_{x_i})$.

Por otra parte, como B y C pertenecen a $Fr(C(A))$, por el Teorema 2.3, se tiene que $B \cap Fr(A) \neq \emptyset \neq C \cap Fr(A)$. Luego, como vimos $C \subset \gamma(t)$ o $B \subset \gamma(t)$, se obtiene que $\gamma(t) \cap Fr(A) \neq \emptyset$. Así, por hipótesis, se sigue que $\gamma(t) \in Fr(C(A))$. Con esto, y la definición de \mathcal{V} , se concluye que $\gamma(t) \in \mathcal{V}$.

En resumen, hemos demostrado que γ es una trayectoria en \mathcal{V} desde C hasta B . Esto prueba que \mathcal{V} es conexo, como decimos en (4).

Con (1), (2), (3) y (4), se tiene que \mathcal{V} es un conjunto abierto en $Fr(C(A))$, tal que \mathcal{V} es conexo y $B \in \mathcal{V} \subset B_{Fr(C(A))}(B, \varepsilon)$. Esto demuestra que $Fr(C(A))$ es localmente conexo. \square

3.10 Teorema. Si X es un continuo localmente conexo y A es un subcontinuo propio de X , entonces $Fr(C(A))$ es localmente conexo si y sólo si A es localmente conexo.

Demostración. Necesidad: Supongamos que $Fr(C(A))$ es localmente conexo. Como X es localmente conexo, por el Teorema 1.65, se tiene que $C(X)$ es localmente conexo. Como $C(X) = C(A) \cup \overline{C(X) - C(A)}$ y $Fr(C(A)) = C(A) \cap \overline{C(X) - C(A)}$, por la Proposición 1.9 (2), se tiene que $C(A)$ es localmente conexo. Luego, usando nuevamente el Teorema 1.65, se sigue que A es localmente conexo.

Suficiencia: Supongamos que A es localmente conexo. Como X es localmente conexo, por el Corolario 2.8 se tiene que $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$. Con esto, y el Teorema 3.9, se obtiene que $Fr(C(A))$ es localmente conexo. \square

3.11 Teorema. [2, Theorem 5.1] Para un continuo X las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) X es localmente conexo;
 - (2) Para todo subcontinuo propio A de X , se tiene que $F_1(Fr(A)) \subset SB(A)$;
 - (3) Para todo subcontinuo propio A de X , se tiene que $F_1(Fr(A)) \subset Cl_{C(X)}(SB(A))$;
 - (4) Para todo subcontinuo propio A de X , se tiene que $SB(A) = Fr(C(A))$;
- y

(5) Para todo subcontinuo propio A de X , se tiene que $Cl_{C(X)}(SB(A)) = Fr(C(A))$.

Demostración. Probaremos que (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1); y que (2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (3).

(1) \rightarrow (2) : Supongamos que X es un continuo localmente conexo. Sean A un subcontinuo propio de X y p un punto en $Fr(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por C_n a la componente de la $\frac{1}{n}$ -bola $B(\frac{1}{n}, p)$ que contiene al punto p . Por la Proposición 1.8, se tiene que C_n es un conjunto abierto en X . Notemos que $p \in \overline{X - A}$. Se sigue que $C_n \cap (X - A) \neq \emptyset$. Luego, $\{\overline{C_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim \overline{C_n} = \{p\}$ y $\overline{C_{n+1}} \subset \overline{C_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (1) del Teorema 1.80, se concluye que $\{p\} \in SB(A)$.

(2) \rightarrow (3) : Esto es evidente porque $SB(A) \subset Cl_{C(X)}(SB(A))$.

(3) \rightarrow (1) : Supongamos que X no es localmente conexo. Por la Proposición 1.8, existe un conjunto abierto U en X que tiene una componente C tal que C no es abierto en X . Tomemos un punto $p \in C - int(C)$, y tomemos un conjunto abierto V en X tal que $p \in V$ y $\overline{V} \subset U$. Sea A la componente de \overline{V} que contiene al punto p . Notemos que $A \subset C$. Así, $p \notin int(A)$. Luego, $p \in Fr(A)$.

Afirmamos que $\{p\} \notin Cl_{C(X)}(SB(A))$. Para esto tomemos una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(A)$ tal que $\lim B_n = \{p\}$. Se tiene que $\mathcal{C}(V)$ es un conjunto abierto en $C(X)$ que tiene a $\{p\}$, véase la Proposición 1.52. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \in \mathcal{C}(V)$ para todo $n \geq N$. Tomemos un arco ordenado α_n en $C(X)$ tal que $\alpha_n(0) = B_n$ para cada $n \geq N$. Por continuidad, para cada $n \geq N$, existe $t_n > 0$ tal que $\alpha_n(t_n) \in \mathcal{C}(V)$, es decir $\alpha_n(t_n) \subset V$. Observemos que $B_n \subset A$ y $B_n \subset \alpha_n(t_n) \subset \overline{V}$. Como A es una componente de \overline{V} , se sigue que $\alpha_n(t_n) \subset A$. Por el inciso (1) del Teorema 1.79, se obtiene que $B_n \notin SB(A)$ para todo $n \geq N$. Esto prueba nuestra afirmación.

Se sigue que $F_1(Fr(A))$ no está contenido en $Cl_{C(X)}(SB(A))$, lo cual demuestra que (3) implica (1).

(2) \rightarrow (4) : Sea A un subcontinuo propio de X , y tomemos un elemento B en $Fr(C(A))$. Por el Teorema 2.3, podemos tomar un punto $p \in B \cap Fr(A)$.

Por la hipótesis en (2), $\{p\} \in SB(A)$. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.79, se tiene que $B \in SB(A)$. Esto prueba que $Fr(C(A)) \subset SB(A)$. Por el inciso (3) del Teorema 1.79, sabemos que $SB(A) \subset Fr(C(A))$. Así, $SB(A) = Fr(C(A))$.

(4) \rightarrow (5) : Como $Fr(C(A))$ es un conjunto cerrado en $C(X)$, la hipótesis en (4) implica que $SB(A)$ coincide con su cerradura, y entonces se cumple (5).

(5) \rightarrow (3) : Sea A un subcontinuo propio de X y tomemos un punto $p \in Fr(A)$. Por el inciso (2) de la Proposición 2.1, sabemos que $\{p\} \in Fr(C(A))$. Luego, por la hipótesis en (5), $\{p\} \in Cl_{C(X)}(SB(A))$. Esto prueba que $F_1(Fr(C(A))) \subset Cl_{C(X)}(SB(A))$. \square

Capítulo 4

Unicoherencia

En este capítulo mostramos que las fronteras en los hiperespacios no siempre son unicoherentes. Iniciamos con un ejemplo, y después exponemos un resultado que proporciona condiciones suficientes bajo las cuales $Fr(C(A))$ no es unicoherente, cuando A es un arco. También demostramos que si A es un arco o una curva cerrada simple en un continuo X tal que $Fr(A) = A$, entonces $Fr(C(A))$ es unicoherente si y sólo si $Fr(C(A)) = C(A)$.

4.1 Nota. Dados puntos x y y en un arco A , si $x \neq y$ denotamos por xy al subarco de A que tiene como puntos extremos a los puntos x y y . Si $x = y$, entonces con xy denotamos al conjunto $\{x\}$. Por otra parte, podemos definir naturalmente una relación de orden en el arco A : fijamos un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow A$, y para dos puntos x y y en A decimos que $x \leq y$ si y sólo si $h^{-1}(x) \leq h^{-1}(y)$ en el orden usual del intervalo $[0, 1]$.

4.2 Ejemplo. Sea $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ el abanico armónico definido en el Ejemplo 2.4. Denotemos $Y' = \{(2 - x, -y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in Y\}$. Pongamos $X = Y \cup Y'$. Notamos que Y' es la reflexión en la recta $y = 0$, de la reflexión de Y en la recta $x = 1$. Así, Y' es un continuo homeomorfo a Y y $Y \cap Y' = \{p\}$, donde $p = (1, 0)$. El continuo X está representado en el primer dibujo de la Figura 4.1. Sea A el arco en X que tiene como puntos extremos a los puntos $a = (0, 0)$ y $b = (2, 0)$. Notamos que si B es un arco en $A - \{a, b\}$ tal que $p \in B$ y p no es punto extremo de B , entonces no existe una sucesión en $C(X) - C(A)$ convergente al arco B . Esto implica que $Fr(C(A)) \subset C(ap) \cup C(a, A) \cup C(pb) \cup C(b, A)$. Veamos que esta inclusión es en realidad una igualdad. Para ver esto notemos que si B

pertenece a $C(ap)$, entonces existe una sucesión de arcos $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \subset L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $B \in Fr(C(A))$. Por otra parte, si B pertenece a $C(a, A)$ entonces tomamos una sucesión de puntos en L_1 , digamos $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, tal que $\lim a_n = a$; sea A_n el arco en L_1 con puntos extremos a y a_n , y denotemos $B_n = B \cup A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ y $\lim B_n = B$. Así, $B \in Fr(C(A))$. Hemos demostrado que $C(ap) \cup C(a, A)$ está contenido en $Fr(C(A))$. Similarmente se prueba que $\cup C(pb) \cup C(b, A)$ está contenido en $Fr(C(A))$. Por esto $Fr(C(A)) = C(ap) \cup C(a, A) \cup C(pb) \cup C(b, A)$, lo cual se representa en el segundo dibujo de la Figura 4.1.

Observamos que $C(ap) \cup C(a, A)$ y $C(pb) \cup C(b, A)$, son subcontinuos de $Fr(C(A))$ y la intersección de éstos es el conjunto de dos elementos $\{\{p\}, A\}$, es decir, tal intersección no es conexa. Se concluye que $Fr(C(A))$ no es unicoherente.

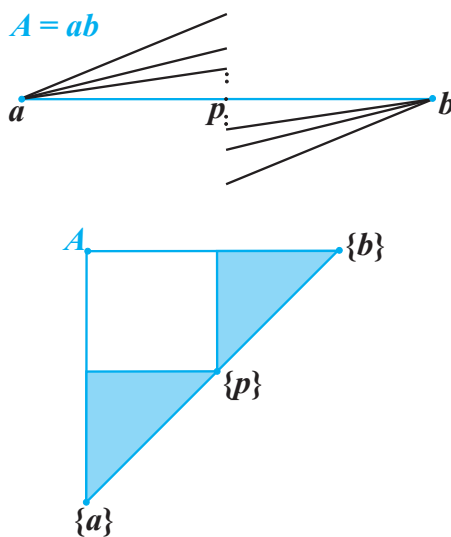


Figura 4.1

Ejemplos como el previo sugieren las hipótesis del teorema que sigue.

4.3 Teorema. Si A es un arco en un continuo X , K es un subcontinuo de A y U es un conjunto abierto en X que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) K está contenido en U y la componente de U que contiene a K está contenida en A ;
- (2) $U = (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n y D_n son componentes de U ; y
- (3) Las sucesiones $\{\overline{C_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\overline{D_n}\}_{n=1}^{\infty}$ convergen en $C(X)$ y $K = (\lim \overline{C_n}) \cap (\lim \overline{D_n})$;

entonces $Fr(C(A))$ no es unicoherente.

Demostración. Denotamos por W a la componente de U que contiene a K . Por hipótesis $W \subset A$. Probaremos que:

- (1) W es un subconjunto abierto de A .

Para probar esto, denotamos por L a la componente de $U \cap A$ que contiene a K . Como $U \cap A$ es un conjunto abierto de A y A es localmente conexo, tenemos que L es un subconjunto abierto de A , véase el inciso (3) de la Proposición 1.8. Por otra parte, como L es conexo y $K \subset L \subset U$, notamos que $L \subset W$, ya que W es la componente de U que contiene a K . También, como W es conexo y $K \subset W \subset U \cap A$, observamos que $W \subset L$, ya que L es la componente de $U \cap A$ que contiene a K . Esto prueba que $L = W$. Así, lo que decimos en (1) está demostrado.

A continuación demostraremos que:

- (2) El conjunto de las componentes de U que están contenidas en A es finito.

Para demostrar esto supongamos lo contrario. Luego podemos suponer que existe una subsucesión $\{C_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $C_{n_j} \subset A$ y $C_{n_j} \neq C_{n_i}$ si $j \neq i$. Fijemos un punto $x \in K$. Como $K \subset \lim \overline{C_n}$ y $\lim \overline{C_n} = \lim \overline{C_{n_j}}$, tenemos que $x \in \lim \overline{C_{n_j}}$. Así, por el inciso (1) de el Teorema 1.46, existe una sucesión de puntos $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_j = x$ y $x_j \in \overline{C_{n_j}}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Notamos que $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en A (pues $x_j \in \overline{C_{n_j}} \subset A$), y W es un conjunto abierto de A tal que $x \in W$ (esto se tiene por (1) y porque $x \in K \subset W$). Luego,

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in W$ para todo $j \geq N$. Así, $\overline{C_{n_j}} \cap W \neq \emptyset$ para todo $j \geq N$. Luego, C_{n_j} y W son conjuntos que no están separados en X si $j \geq N$. Como C_{n_j} y W son componentes de U , se sigue que $C_{n_j} = W$ para todo $j \geq N$. Esto es una contradicción, ya que $C_{n_j} \neq C_{n_i}$ si $j \neq i$. Esta contradicción demuestra lo que decimos en (2).

Denotamos $C^* = \lim \overline{C_n}$ y $D^* = \lim \overline{D_n}$. Por hipótesis, tenemos que $K = C^* \cap D^*$. Denotamos por C y D a las componentes de $C^* \cap A$ y $D^* \cap A$ que contienen a K , respectivamente. Probaremos lo que sigue:

(3) C y D pertenecen a $Fr(C(A))$. Más aún, si $C \neq C^*$, entonces C pertenece a $SB(A)$. Similarmente, si $D \neq D^*$, entonces D pertenece a $SB(A)$.

Para justificar esto, primero supongamos que $C = C^*$. Así, $C = \lim \overline{C_n}$. Por (2), podemos suponer que C_n no está contenido en A para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{\overline{C_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ que converge a $C \in C(A)$. Así, $C \in Fr(C(A))$, véase el inciso (1) de la Proposición 2.1. Ahora, supongamos que $C \neq C^*$, y tomemos un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde C hasta C^* . Notamos que si $t \in [0, 1]$ y $\alpha(t) \subset A$, entonces $\alpha(t) \subset C^* \cap A$. Como $C \subset \alpha(t)$ y C es una componente de $C^* \cap A$, se sigue que $C = \alpha(t)$. Puesto que α es un arco ordenado y $\alpha(0) = C$, se tiene que $t = 0$. Esto demuestra que $\alpha(t)$ no está contenido en A para ningún $t \in (0, 1]$. Luego, por el inciso (1) del Teorema 1.79, se obtiene que $C \in SB(A)$. Similarmente se prueba que $D \in Fr(C(A))$ y que si $D \neq D^*$, entonces $D \in SB(A)$.

A continuación probaremos que:

(4) C no está contenido en U y D no está contenido en U .

Para probar esto suponemos que $C \subset U$. Por el Teorema 1.20, tenemos que $\overline{C_n} \cap (X - U) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $X - U$ es cerrado y $\lim \overline{C_n} = C^*$, por el inciso (1) de la Proposición 1.52, se sigue que $C^* \cap (X - U) \neq \emptyset$. Por esto $C \neq C^*$. Tomemos un arco ordenado α en $C(X)$ tal que $\alpha(0) = C$. Notemos que $\mathcal{C}(U)$ es un conjunto abierto en $C(X)$ y C pertenece a éste, véase la Proposición 1.52. Luego, por la continuidad de α , existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \in \mathcal{C}(U)$, es decir $\alpha(t) \subset U$. Como $K \subset C \subset \alpha(t)$ y puesto que W es la componente de U que contiene a K , se tiene que $\alpha(t) \subset W$. Por hipótesis

$W \subset A$, así $\alpha(t) \subset A$. Por el inciso (1) del Teorema 1.79, se sigue que C no pertenece a $SB(A)$. Esto contradice (3), ya que $C \neq C^*$. Esta contradicción demuestra que C no está contenido en U . Similarmente se demuestra que D no está contenido en U .

Demostraremos lo que sigue:

(5) C y D son arcos en A que contienen propiamente a K y $K = C \cap D$. Además, C no está contenido en D y D no está contenido en C .

Por las definiciones de C y D se tiene que $K \subset C \cap D \subset C^* \cap D^*$. Por hipótesis $K = C^* \cap D^*$. Se sigue que $K = C \cap D$. Por otra parte, también por hipótesis $K \subset U$, y por (4) $C \not\subset U$, por lo que $K \neq C$. Similarmente, $K \neq D$. Además, si $C \subset D$ entonces $C = C \cap D = K$, lo cual es una contradicción. De este modo se obtiene que $C \not\subset D$. Similarmente se justifica que $D \not\subset C$. Con esto está demostrado lo que decimos en (5).

A los puntos en A que son los puntos extremos de los arcos C y D los denotaremos por c_1 y c_2 ; y d_1 y d_2 , respectivamente. Es decir, $C = c_1c_2$ y $D = d_1d_2$. Por (5), C y D son no degenerados, por lo que $c_1 \neq c_2$ y $d_1 \neq d_2$. También tomamos los puntos k_1 y k_2 en A tales que $K = k_1k_2$. Observamos que si K es degenerado entonces $k_1 = k_2$ y $k_1k_2 = \{k_1\}$. Además, con un orden natural en el arco A (véase la Nota 4.1), podemos suponer que $c_1 < c_2$, $d_1 < d_2$ y $k_1 \leq k_2$. Por (5), tenemos que $k_1k_2 \subset c_1c_2$, $k_1k_2 \subset d_1d_2$, $c_1c_2 \not\subset d_1d_2$ y $d_1d_2 \not\subset c_1c_2$, por lo cual también podemos suponer que $c_1 < d_1 \leq k_1 \leq k_2 \leq c_2 < d_2$. Como $k_1k_2 = c_1c_2 \cap d_1d_2$, se sigue que $d_1 = k_1$ y $k_2 = c_2$. En resumen se tiene que $c_1 < d_1 = k_1 \leq k_2 = c_2 < d_2$. Usaremos esto para probar lo que sigue:

(6) $W \subset C \cup D$.

Para demostrar esto suponemos que $W \not\subset C \cup D$ y fijamos un punto $x \in W - (C \cup D)$. Se tiene que x no pertenece al arco c_1d_2 , por lo cual $x < c_1$ o $d_2 < x$. Sin perder generalidad suponemos que $x < c_1$. Como los puntos x y k_2 pertenecen a W y W es un subconjunto conexo de A , se tiene que el arco xk_2 está contenido en W . Notamos que $x < c_1 < k_1 \leq k_2 = c_2$. Se sigue que el arco c_1c_2 está contenido en el arco xk_2 . Es decir $c_1c_2 \subset xk_2 \subset W$. Como $C = c_1c_2$ y $W \subset U$, se obtiene que $C \subset U$, lo cual contradice lo establecido

en (4). Esto prueba lo que decimos en (6).

A continuación demostraremos lo siguiente:

(7) Si $B \in Fr(C(A))$ y $K \subset B \subset W$, entonces $B \subset C$ o $B \subset D$.

Sea B como se dice y tomemos una sucesión $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim B_k = B$. Como $B \subset W$ y $W \subset U$, por el inciso (2) de la Proposición 1.52, podemos suponer que $B_k \subset U$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis tenemos que $U = (\bigcup_{n=1}^\infty C_n) \cup (\bigcup_{n=1}^\infty D_n)$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n y D_n son componentes de U , por esto ocurre una de las siguientes situaciones:

(i) Existen una subsucesión $\{B_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ de la sucesión $\{B_k\}_{k=1}^\infty$, y una subsucesión $\{C_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ de la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^\infty$, tales que $B_{k_j} \subset C_{n_j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$; o

(ii) Existen una subsucesión $\{B_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ de la sucesión $\{B_k\}_{k=1}^\infty$, y una subsucesión $\{D_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ de la sucesión $\{D_n\}_{n=1}^\infty$, tales que $B_{k_j} \subset D_{n_j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Supongamos que ocurre (i). En este caso, observamos que $B = \lim B_{k_j}$ y $C^* = \lim \overline{C_{n_j}}$. Por el inciso (3) del Teorema 1.46 se sigue que $B \subset C^*$. Así, tenemos que $B \subset C^* \cap A$. Como C es la componente de $C^* \cap A$ que contiene a K y $K \subset B$, se concluye que $B \subset C$.

Si ocurre (ii), similarmente se demuestra que $B \subset D$. Esto prueba lo que se afirma en (7).

En lo que sigue continuamos con la notación y los supuestos establecidos justo antes de (6). Es decir, $C = c_1c_2$ y $D = d_1d_2$ son arcos en A , $K = k_1k_2$ es un arco o un punto en A y $c_1 < d_1 = k_1 \leq k_2 = c_2 < d_2$. Probaremos lo que sigue:

(8) Existe un arco ordenado β_1 en $Fr(C(A))$ desde $\{c_2\}$ hasta C . Similarmente, existe un arco ordenado β_2 en $Fr(C(A))$ desde $\{d_1\}$ hasta D .

Por (3) sabemos que $C \in Fr(C(A))$. Para probar (8) primero veremos

que $\{c_2\}$ también pertenece a $Fr(C(A))$. Para esto notamos que $c_2 \in C^*$ (porque $c_2 \in C \subset C^*$) y $C^* = \lim \overline{C_n}$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, existe una sucesión de puntos en X , digamos $\{q_n\}_{n=1}^\infty$, tal que $c_2 = \lim q_n$ y $q_n \in \overline{C_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \notin A$ para todo $n \geq N$; porque si tal N no existe entonces se encuentra una subsucesión $\{q_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ de la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $q_{n_j} \in A$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Así, $\{q_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ es una sucesión de puntos de A tal que $q = \lim q_{n_j}$. Luego, como W es un conjunto abierto de A (véase (1)) tal que $c_2 \in W$ (pues $c_2 \in K \subset W$), existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{n_j} \in W$ para todo $j \geq j_0$. Se sigue que $\overline{C_{n_j}} \cap W \neq \emptyset$ para todo $j \geq j_0$. Lo cual es una contradicción ya que C_{n_j} y W son componentes de U diferentes entre sí. Esto demuestra nuestra afirmación. Por ésta podemos suponer que $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de puntos en $X - A$. Se sigue que $c_2 \in Fr(A)$ y, en consecuencia, por el inciso (2) de la Proposición 2.1, $\{c_2\} \in Fr(C(A))$.

Como $c_2 \in U$ y $c_2 = \lim q_n$, podemos suponer que $q_n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.20, sabemos que $\overline{C_n} \cap (X - U) \neq \emptyset$, por lo que $\{q_n\} \neq \overline{C_n}$, es decir $\overline{C_n}$ contiene propiamente a $\{q_n\}$. Tomemos un arco ordenado $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde $\{q_n\}$ hasta $\overline{C_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{\alpha_n([0, 1])\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de elementos del hiperespacio $C(C(X))$. Como éste es compacto, podemos suponer que existe un elemento Λ de $C(C(X))$ tal que $\Lambda = \lim \alpha_n([0, 1])$. Observamos que $\{q_n\}$ y $\overline{C_n}$ son elementos de $\alpha_n([0, 1])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, puesto que $\{c_2\} = \lim \{q_n\}$ y $C^* = \lim \overline{C_n}$, $\{c_2\}$ y C^* son elementos de Λ . También, por el inciso (1) de el Teorema 1.46, notamos que para cualesquiera E y F en Λ existen sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ tales que $E = \lim \alpha_n(s_n)$ y $F = \lim \alpha_n(t_n)$. Como α_n es un arco ordenado, $\alpha_n(s_n)$ y $\alpha_n(t_n)$ son comparables por la inclusión de conjuntos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que existe una sucesión $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ en \mathbb{N} tal que $\alpha_{n_j}(s_{n_j}) \subset \alpha_{n_j}(t_{n_j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $E = \lim \alpha_{n_j}(s_{n_j})$ y $F = \lim \alpha_{n_j}(t_{n_j})$, se obtiene que $E \subset F$, véase el inciso (2) del Teorema 1.46. Hemos demostrado que Λ es un subcontinuo no degenerado de $C(X)$ tal que cualesquiera dos de sus elementos son comparables por la inclusión de conjuntos. Por el Teorema 1.57, Λ es la imagen de un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$. Se tiene que $\lim \alpha_n([0, 1]) = \alpha([0, 1])$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, para cada $t \in [0, 1]$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\lim \alpha_n(t_n) = \alpha(t)$. Como cada α_n es un arco ordenado desde $\{q_n\}$ hasta $\overline{C_n}$, se tiene que $\{q_n\} \subset \alpha_n(t_n) \subset \overline{C_n}$. Luego, por

el inciso (2) del Teorema 1.46, se sigue que $\{c_2\} \subset \alpha(t) \subset C^*$. Esto implica que α es un arco ordenado en $C(X)$ desde $\{c_2\}$ hasta C^* .

Denotamos $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \subset A\}$. Observamos que si $0 \leq t \leq t_0$, entonces $c_2 \in \alpha(t) \subset C^* \cap A$. Como C es la componente de $C^* \cap A$ que contiene a K , se sigue que $\alpha(t) \subset C$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Por otra parte, dado $t \in [0, 1]$, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, 1]$ tal que $\alpha(t) = \lim \alpha_n(r_n)$ ya que $\alpha(t) \in \Lambda$ y $\Lambda = \lim \alpha_n([0, 1])$. Como $q_n \in \alpha_n(r_n)$ y $q_n \notin A$, tenemos que $\alpha_n(r_n) \not\subset A$. Así, $\{\alpha_n(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ que converge a $\alpha(t)$. Además, $\alpha(t) \in C(A)$ para todo $t \in [0, t_0]$. Se sigue que $\alpha(t) \in Fr(C(A))$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Si $\alpha(t_0) = C$, entonces definimos $\beta_1 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\beta_1(t) = \alpha(t_0 t)$ para todo $t \in [0, 1]$; y obtenemos que β_1 es un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde $\{c_2\}$ hasta C .

Si $\alpha(t_0) \neq C$, entonces definiremos β_1 de otra manera. Primero veamos que $\alpha(t_0) \in SB(A)$. Para esto notamos que $\alpha(t_0)$ está contenido propiamente en C y $\alpha(1) = C^*$, por lo cual $t_0 < 1$. Definamos $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\gamma(t) = \alpha(t + t_0(1 - t))$ para cada $t \in [0, 1]$. Observamos que γ es una función continua tal que $\gamma(0) = \alpha(t_0)$ y, por la definición de t_0 , $\gamma(t) \not\subset A$ para todo $t > 0$. Por esto $\alpha(t_0) \in SB(A)$. Por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado $\eta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde $\alpha(t_0)$ hasta C . Por el inciso (1) del Teorema 1.79, sabemos que $\eta(t) \in SB(A)$ para todo $t \in [0, 1]$. Ahora definimos

$$\beta_1(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } 0 \leq t \leq t_0, \\ \eta\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right), & \text{si } t_0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que β_1 es un arco ordenado en $Fr(C(A))$ desde $\{c_2\}$ hasta C .

De esta manera, independientemente de que $\alpha(t_0) = C$ o $\alpha(t_0) \neq C$, hemos demostrado que existe un arco ordenado β_1 en $Fr(C(A))$ desde $\{c_2\}$ hasta C . Similarmente se prueba que existe un arco ordenado β_2 en $Fr(C(A))$ desde $\{d_1\}$ hasta D . Así, lo que decimos en (8) está demostrado.

Sean β_1 y β_2 los arcos ordenados obtenidos en (8). Afirmamos que existen

números s_1 y s_2 en $[0, 1]$ tales que $\beta_1(s_1) = K$ y $\beta_2(s_2) = K$. Para probar esto denotamos $I_1 = \{t \in [0, 1] : \beta_1(t) \subset K\}$ e $I_2 = \{t \in [0, 1] : K \subset \beta_1(t)\}$. Como K es cerrado y β_1 es continua, con el inciso (2) del Teorema 1.46, se obtiene que I_1 e I_2 son cerrados en $[0, 1]$. Notamos que $0 \in I_1$ y $1 \in I_2$. Además, para cada $t \in [0, 1]$, $\beta_1(t)$ y K son subarcos o puntos del arco C y comparten al punto extremo c_2 , por lo que $\beta_1(t) \subset K$ o $K \subset \beta_1(t)$. Se sigue que $[0, 1] = I_1 \cup I_2$. Luego, por la conexidad de $[0, 1]$, existe $s_1 \in I_1 \cap I_2$. Se tiene que $\beta_1(s_1) = K$. Similarmente se prueba que existe $s_2 \in [0, 1]$ tal que $\beta_2(s_2) = K$.

Denotemos $\mathcal{A}_1 = \{B \in C(A) : K \subset B \subset C\} \cup \{B \in C(A) : K \subset B \subset D\}$. Probaremos lo que sigue:

(9) \mathcal{A}_1 es un arco en $Fr(C(A))$ con puntos extremos C y D .

Para demostrar esto, veremos que $\mathcal{A}_1 = \beta_1([s_1, 1]) \cup \beta_2([s_2, 1])$. Como β_1 es un arco ordenado tal que $\beta_1(s_1) = K$ y $\beta_1(1) = C$, se tiene que para todo $t \in [s_1, 1]$, $K \subset \beta_1(t) \subset C$. Así, $\beta_1([s_1, 1]) \subset \mathcal{A}_1$. Similarmente se justifica que $\beta_2([s_2, 1]) \subset \mathcal{A}_1$. Recíprocamente, sea $B \in C(A)$ tal que $K \subset B \subset C$. Denotemos $J_1 = \{t \in [s_1, 1] : \beta_1(t) \subset B\}$ y $J_2 = \{t \in [s_1, 1] : B \subset \beta_1(t)\}$. Con argumentos semejantes a los expuestos en el párrafo previo a (8), se prueba que existe un número $s \in J_1 \cap J_2$. Se tiene que $s \in [s_1, 1]$ y $\beta_1(s) = B$. Así, $B \in \beta_1([s_1, 1])$. Análogamente, si $B \in C(A)$ y $K \subset B \subset D$ se justifica que $B \in \beta_2([s_2, 1])$. Esto prueba que $\mathcal{A}_1 \subset \beta_1([s_1, 1]) \cup \beta_2([s_2, 1])$. Así, hemos demostrado que \mathcal{A}_1 coincide con la unión de $\beta_1([s_1, 1])$ y $\beta_2([s_2, 1])$.

Por (8) β_1 y β_2 son arcos ordenados en $Fr(C(A))$, es decir, $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$ pertenecen a $Fr(C(A))$ para todo $t \in [0, 1]$. Por esto se tiene que $\mathcal{A}_1 \subset Fr(C(A))$. Definimos $h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_1$ como

$$h(t) = \begin{cases} \beta_1((1 - s_1)(1 - 2t) + s_1), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta_2((1 - s_2)(2t - 1) + s_2), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que h es un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre \mathcal{A}_1 tal que $h(0) = C$ y $h(1) = D$. Así, \mathcal{A}_1 es un arco con puntos extremos C y D contenido en la frontera de $C(A)$. Esto termina la prueba de (9).

Tomemos arcos ordenados en la frontera de $C(A)$, γ_1 y γ_2 , desde C hasta A y desde D hasta A , respectivamente, esto es posible por el Teorema 2.11.

Denotemos $r_1 = \inf \{t \in [0, 1] : \gamma_1(t) \in \gamma_2([0, 1])\}$. Como γ_1 es continua y $\gamma_2([0, 1])$ es compacto, se tiene que $\gamma_1(r_1) \in \gamma_2([0, 1])$. Sea $r_2 \in [0, 1]$ tal que $\gamma_2(r_2) = \gamma_1(r_1)$; y denotemos $\mathcal{A}_2 = \gamma_1([0, r_1]) \cup \gamma_2([0, r_2])$. Afirmamos que:

(10) \mathcal{A}_2 es un arco en $Fr(C(A))$ con puntos extremos C y D , además $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{C, D\}$.

Para esto observemos que la función $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_2$ definida como:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2r_1t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2r_2 - 2r_2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es un homeomorfismo tal que $\gamma(0) = C$ y $\gamma(1) = D$. Por otra parte, notemos que si $t \in [0, r_1]$ y $\gamma_1(t) \in \mathcal{A}_1$, entonces, por la definición de \mathcal{A}_1 , se tiene que $\gamma_1(t) \subset C$ o $\gamma_1(t) \subset D$. Como γ_1 es un arco ordenado que inicia en C , se tiene que $C \subset \gamma_1(t)$; y, por (5), se tiene que $C \not\subset D$. Se sigue que $\gamma_1(t) \not\subset D$. Luego, $\gamma_1(t) \subset C$. Esto implica que $\gamma_1(t) = C$, y así $\gamma_1([0, r_1]) \cap \mathcal{A}_1 = \{C\}$. Similarmente se demuestra que $\gamma_2([0, r_2]) \cap \mathcal{A}_1 = \{D\}$. Se sigue que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{C, D\}$. Esto prueba lo que decimos en (10).

Denotemos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Por lo demostrado en (9) y (10), se tiene que \mathcal{A} es una curva cerrada simple en la frontera de $C(A)$.

Por otra parte, observemos que, por (1), $W \cap C$ es un conjunto abierto en C . Como K es un conjunto cerrado y $K \subset W \cap C$, se tiene que esta inclusión es propia. Así, podemos tomar un punto $e_1 \in (W \cap C) - K$. Similarmente, podemos tomar un punto $e_2 \in (W \cap D) - K$. Denotemos por E al subarco de A que tiene puntos extremos e_1 y e_2 . Notemos que $K \subset E \subset W$, $E \not\subset C$ y $E \not\subset D$. Por lo establecido en (7), se sigue que E no pertenece a la frontera de $C(A)$. Es decir, se tiene que $E \in C(A) - Fr(C(A))$.

Identificamos a $C(A)$ con la región triangular del plano euclidiano definida por $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, véase el Ejemplo 1.48. Notemos que Δ es la región acotada por los segmentos $L = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$, $L_0 = \{0\} \times [0, 1]$ y $L_1 = [0, 1] \times \{1\}$. Con esta identificación observamos que los puntos K , C , D y $C \cup D$ constituyen los vértices de un rectángulo R contenido en Δ . Además, $E \in int_\Delta(R)$; más aún, si denotamos $\mathcal{W} = \{B \in C(A) : K \subset B \subset W, B \not\subset C, \text{ y } B \not\subset D\}$, entonces $\mathcal{W} \subset int_\Delta(R)$ y

$$\mathcal{W} \cap FrC(A) = \emptyset.$$

Por lo anterior podemos definir una proyección continua desde el punto E , $p_E : Fr(CA) \rightarrow L \cup L_0 \cup L_1$, de la frontera de $C(A)$ hacia $L \cup L_0 \cup L_1$; de tal manera que los lados del rectángulo R se proyectan así: $p_E(CK \cup KD) = L$, $p_E(CC \cup D) = L_0$ y $p_E(C \cup DD) = L_1$.

Notemos que en este modelo para $C(A)$ el arco \mathcal{A}_1 se corresponde con la unión de los dos lados del rectángulo R determinados por los elementos C y K ; y K y D . Es decir $\mathcal{A}_1 = CK \cup KD$. Por esto $p_E(\mathcal{A}_1) = L$.

Por otra parte, tomando en cuenta la definición del arco \mathcal{A}_2 dada en el párrafo previo a (10), y denotando por L_C y L_D a los segmentos maximales en el triángulo Δ que contienen a los elementos C y D ; y que son paralelos a los segmentos L_0 y L_1 , respectivamente, observamos que $\gamma_1([0, r_1])$ está contenido en la región de Δ acotada por los segmentos L_0 y L_C ; y $\gamma_2([0, r_2])$ está contenido en la región de Δ acotada por los segmentos L_1 y L_D . Por esto $p_E(\mathcal{A}_2) = L_0 \cup L_1$. Véase la Figura 4.2

Como $L \cup L_0 \cup L_1$ es una curva cerrada simple, podemos tomar un homeomorfismo $h : L \cup L_0 \cup L_1 \rightarrow S^1$. Definamos $g : Fr(C(A)) \rightarrow S^1$ como $g(B) = h(p_E(B))$ para todo $B \in Fr(C(A))$. Se tiene que g es una función continua.

Denotemos $p = g(C)$, $q = g(D)$, $S_1 = g(\mathcal{A}_1)$ y $S_2 = \mathcal{A}_2$. Observamos que S_1 y S_2 son arcos en la circunferencia S^1 tales que $S^1 = S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{p, q\}$. Por la Proposición 1.24, la función $g|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow S^1$ no tiene un levantamiento. Luego, por el inciso (1) de la Proposición 1.23, se sigue que la función $g : Fr(C(A)) \rightarrow S^1$ no tiene un levantamiento.

Como A es un arco, por el Teorema 3.3, se tiene que $Fr(C(A))$ es un continuo localmente conexo. Por esto, y por el Teorema 1.26, lo anterior implica que $Fr(C(A))$ no es unicoherente. \square

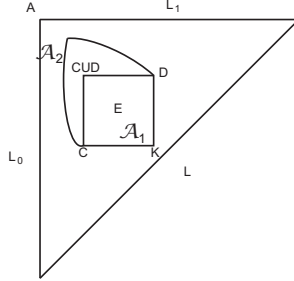


Figura 4.2

4.4 Teorema. Si A es un arco contenido en un continuo X y $Fr(A) = A$, entonces $Fr(C(A))$ es unicoherente si y sólo si $Fr(C(A)) = C(A)$.

Demostración. (Necesidad). Primero observemos que, por hipótesis y por el inciso (2) del Teorema 2.1, $F_1(A) \subset Fr(C(A))$. Denotemos por a_1 y a_2 a los puntos extremos del arco A . Por el Teorema 2.11, para cada $i \in \{1, 2\}$ podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha_i(0) = a_i$, $\alpha_i(1) = A$ y $\alpha_i(t) \in Fr(C(A))$ para todo $t \in [0, 1]$.

Sabemos que $C(a_i, A)$ es un arco en $C(A)$ con puntos extremos $\{a_i\}$ y A . Como α_i es arco ordenado y $\alpha_i(0) = \{a_i\}$, se tiene que $a_i \in \alpha_i(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Se sigue que $\alpha_i([0, 1])$ es un arco contenido en el arco $C(a_i, A)$ y contiene a los puntos extremos de éste. Luego, $\alpha_i([0, 1]) = C(a_i, A)$. Se obtiene que $C(a_i, A) \subset Fr(C(A))$.

Denotemos $\mathcal{A} = F_1(A) \cup C(a_1, A) \cup C(a_2, A)$. Por lo anterior se tiene que $\mathcal{A} \subset Fr(C(A))$.

Por otra parte, sabemos que existe un homeomorfismo $h : C(A) \rightarrow D^2$ y que $h(\mathcal{A}) = S^1$, véase el Ejemplo 1.48.

Supongamos que $Fr(C(A)) \neq C(A)$. Probaremos que $C(A)$ no es unicoherente. Para esto fijemos un elemento $E \in C(A) - Fr(C(A))$. Usa-

remos la proyección radial desde el punto $h(E)$ de D^2 hacia la circunferencia S^1 , $p_{h(E)} : D^2 - \{h(E)\} \rightarrow S^1$, véase la Definición 1.40. Como $h(Fr(C(A))) \subset D^2 - \{h(E)\}$, podemos definir $g : Fr(C(A)) \rightarrow S^1$ como $g(B) = p_{h(E)}(h(B))$ para todo $B \in Fr(C(A))$.

Como h y $p_{h(E)}$ son funciones continuas, se tiene que g es una función continua. Notemos que $h|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo de \mathcal{A} en S^1 ; y la proyección radial $p_{h(E)}$ es la función identidad en S^1 . Por esto, $g|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo. Por el inciso (2) de la Proposición 1.23, la función $g|_{\mathcal{A}}$ no tiene un levantamiento. Luego, por el inciso (1) de esa misma proposición, se sigue que la función $g : Fr(C(A)) \rightarrow S^1$ no tiene un levantamiento.

Como A es un arco, por el Teorema 3.3, se tiene que $Fr(C(A))$ es un continuo localmente conexo. Por esto, y por el Teorema 1.26, lo anterior implica que $Fr(C(A))$ no es unicoherente. Esto prueba la necesidad.

(Suficiencia). Por el Teorema 1.64, $C(A)$ es un continuo unicoherente. De modo que si $Fr(C(A)) = C(A)$, entonces $Fr(C(A))$ es unicoherente. \square

4.5 Teorema. Si A es una curva cerrada simple contenida en un continuo X y $Fr(A) = A$, entonces $Fr(C(A))$ es unicoherente si y sólo si $Fr(C(A)) = C(A)$.

Demostración. (Necesidad). Supongamos que $Fr(C(A)) \neq C(A)$. Fijemos un elemento $E \in C(A) - Fr(C(A))$. Sabemos que existe un homeomorfismo $h : C(A) \rightarrow D^2$ y que $h(F_1(A)) = S^1$, donde D^2 es el disco canónico en el plano euclidiano, véase el Ejemplo 1.49. Denotemos por $p_{h(E)} : D^2 - \{h(E)\} \rightarrow S^1$ a la proyección radial desde el punto $h(E)$ hacia la circunferencia S^1 , véase la Definición 1.40.

Como $h(Fr(C(A))) \subset D^2 - \{h(E)\}$, podemos definir $g : Fr(C(A)) \rightarrow S^1$ como $g(B) = p_{h(E)}(h(B))$ para todo $B \in Fr(C(A))$. Observamos que g es una función continua, porque es la composición de funciones continuas.

Por hipótesis se tiene que $F_1(Fr(A)) = F_1(A)$. Así, por el inciso (2) de la Proposición 2.1, se sigue que $F_1(A) \subset Fr(C(A))$. Además, como $h(F_1(A)) = S^1$ y $p_{h(E)}|_{S^1}$ es la función identidad en S^1 , se tiene que $g|_{F_1(A)}$ es un homeomorfismo de $F_1(A)$ en S^1 . Por el inciso (2) de la Proposición 1.23,

se tiene que la función $g|_{Fr(C(A))}$ no tiene un levantamiento. Por esto, y por el inciso (1) de esa misma proposición, se sigue que la función $g : Fr(C(A)) \rightarrow S^1$ no tiene un levantamiento.

Como A es una curva cerrada simple, por el Teorema 3.3, se tiene que $Fr(C(A))$ es un continuo localmente conexo. Por esto y el Teorema 1.26, lo anterior implica que $Fr(C(A))$ no es unicoherente. Esto prueba la necesidad.

(Suficiencia). Por el Teorema 1.64, se tiene que $C(A)$ es un continuo unicoherente. Así, la igualdad mencionada obviamente implica que $Fr(C(A))$ es unicoherente. \square

Capítulo 5

Fronteras que son 2-celdas

En este capítulo demostramos que si los subcontinuos propios, no degenerados, de un continuo X tienen fronteras conexas y sus hiperespacios tienen fronteras que son 2-celdas, entonces X es un continuo indescomponible y cada uno de sus subcontinuos propios es un arco, o un punto. Para esto primero presentamos cinco lemas en relación con la condición de que las fronteras de los hiperespacios sean 2-celdas.

5.1 Lema. Si para todo subcontinuo propio y no degenerado, A , de un continuo X se tiene que $Fr(C(A))$ es un 2-celda, entonces X no contiene arcos libres.

Demostración. Supongamos que A es un arco libre en un continuo X . Se tiene $A - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X contenido en A . Se sigue que $Fr(A) \subset \{p, q\}$. Por el Corolario 2.6, $Fr(C(A)) = \{B \in C(A) : B \cap Fr(A) \neq \emptyset\}$. Luego, $Fr(C(A)) \subset C(p, A) \cup C(q, A)$. Como $C(p, A) \cup C(q, A)$ es un arco en $C(A)$, véase el Ejemplo 1.48, se concluye que $Fr(C(A))$ no es una 2-celda. Esto demuestra el lema. \square

5.2 Lema. Si para todo subcontinuo propio y no degenerado, A , de un continuo X se tiene que $Fr(C(A))$ es un 2-celda, entonces X no contiene triodos simples.

Demostración. Supongamos que X tiene un triodo simple T .

Afirmamos que $Fr(T) = T$. Para demostrar esta afirmación, supongamos que $Fr(T) \neq T$. Así, $int(T) \neq \emptyset$. Luego, $int_X(T) - \{r\}$, donde r es el punto de ramificación de T , es un conjunto abierto en X , no vacío, contenido en T .

Tomemos una componente K del conjunto $int_X(T) - \{r\}$. Como T es localmente conexo, K es un conjunto abierto en T , además K es un conjunto arco conexo, véanse los Teoremas 1.8 y 1.33. Fijemos dos puntos distintos p y q en K y un arco A en K con puntos extremos p y q . Notemos que $A - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en T contenido en $int(T)$ y éste es un conjunto abierto en X , se sigue que $A - \{p, q\}$ es abierto en X . Esto es, A es un arco libre en X . Esto es una contradicción con el Lema 5.1. Así, lo que afirmamos está demostrado.

Por el inciso (2) de la Proposición 2.1, se tiene que $F_1(T) \subset Fr(C(T))$. Notemos que, para cada $x \in T$, ningún conjunto abierto en $C(T)$ que contiene a $\{x\}$ es homeomorfo a la bola abierta del plano euclidiano $B_{\mathbb{R}^2}((0, 0), 1)$, véase el Ejemplo 1.50. Como por hipótesis $Fr(C(T))$ es una 2-celda, se sigue que $F_1(T)$ está contenido en la variedad frontera de esta 2-celda. Esto es una contradicción, ya que $F_1(T)$ es un triodo simple y la variedad frontera de una 2-celda es una curva cerrada simple. Con esto el lema está demostrado. \square

5.3 Lema. Si un continuo X contiene un 4-odo, entonces X contiene un subcontinuo A tal que $Fr(C(A))$ contiene una 3-celda.

Demostración. Supongamos que Y es un 4-odo en un continuo X . Esto es, Y contiene un subcontinuo B tal que $Y - B = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, donde $H_i \neq \emptyset$ y $\overline{H_i} \cap H_j = \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $i \neq j$. Tomemos una componente E_i de $Y - B$ tal que $E_i \subset H_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Por la Proposición 1.21, se tiene que $B \cup E_i$ es un continuo. Notemos que éste contiene propiamente a B . Por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde B hasta $B \cup E_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Denotemos $D = \alpha_1(\frac{1}{2})$ y $A = D \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$. Como $B \subset D$, se tiene que $A = D \cup (B \cup E_2) \cup (B \cup E_3) \cup (B \cup E_4)$, así A es la unión de cuatro subcontinuos de X que contienen a B . Así, A es un subcontinuo de X .

Veamos que $D \in SB(A)$. Para esto definimos $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\beta(t) = \alpha_1(\frac{t+1}{2})$ para todo $t \in [0, 1]$. Se tiene que β es una función continua tal que $\beta(0) = D$. Observamos que si $t \in (0, 1]$, entonces $\frac{t+1}{2} > \frac{1}{2}$ y así, puesto que α_1 es un arco ordenado y $\alpha_1(\frac{1}{2}) = D$, se tiene que D está contenido propiamente en $\alpha_1(\frac{t+1}{2})$, es decir, $D \subset \beta(t)$ y $D \neq \beta(t)$. Fijemos un punto $x \in \beta(t) - D$. Como $\beta(t) = \alpha_1(\frac{t+1}{2}) \subset B \cup E_1$ y $B \subset D$, se tiene que $x \in E_1 - D$. Además, como $E_1 \cap E_i = \emptyset$ para cada $i \in \{2, 3, 4\}$, se tiene que $x \notin A$. Esto prueba que $\beta(t)$ no está contenido en A para ninguna $t \in (0, 1]$.

Luego, $D \in SB(A)$.

Denotemos $\mathcal{D} = \{D \cup \alpha_2(r) \cup \alpha_3(s) \cup \alpha_4(t) : 0 \leq r, s, t \leq 1\}$.

Observamos que cada elemento de \mathcal{D} es un continuo en X , por ser la unión de cuatro continuos en X que contienen a B . Más aún, como $D \subset A$ y $\alpha_i(t) \subset E_i \subset A$ para cada $i \in \{2, 3, 4\}$ se tiene que cada elemento de \mathcal{D} es un subcontinuo de A , es decir, $\mathcal{D} \subset C(A)$. Además, como cada elemento de \mathcal{D} contiene a D , por el inciso (2) del Teorema 1.79, se tiene que $\mathcal{D} \subset SB(A)$. Por el inciso (3) de ese mismo teorema, $SB(A) \subset Fr(C(A))$, por esto $\mathcal{D} \subset Fr(C(A))$.

Finalmente, veamos que \mathcal{D} es una 3-celda. Para esto definimos naturalmente $h : [0, 1]^3 \rightarrow \mathcal{D}$ como $h((r, s, t)) = D \cup \alpha_2(r) \cup \alpha_3(s) \cup \alpha_4(t)$ para todo punto $(r, s, t) \in [0, 1]^3$. Como cada α_i es una función continua, usando el inciso (3) del Teorema 1.46, se obtiene que h es una función continua. Veamos que h es inyectiva. Tomemos dos puntos distintos (r, s, t) y (u, v, w) en $[0, 1]^3$, digamos $r \neq u$. Supongamos que $r < u$. Como α_2 es un arco ordenado, se tiene que $\alpha_2(r)$ está contenido propiamente en $\alpha_2(u)$. Fijemos un punto $x \in \alpha_2(u) - \alpha_2(r)$. Así $x \in h((u, v, w))$. Como $B \subset \alpha_2(r)$, se tiene que $x \in \alpha_2(u) - B$. Como $D - B \subset E_1$, $\alpha_2(u) - B \subset E_2$, $\alpha_3(s) - B \subset E_3$ y $\alpha_4(t) - B \subset E_4$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se sigue que $x \notin D \cup \alpha_2(r) \cup \alpha_3(s) \cup \alpha_4(t)$, es decir, $x \notin h((r, s, t))$. Así, $h((r, s, t)) \neq h((u, v, w))$. Esto prueba que h es inyectiva. Se sigue que h es una biyección continua de $[0, 1]^3$ en \mathcal{D} . Como $[0, 1]^3$ es compacto y \mathcal{D} es un espacio de Hausdorff, se concluye que h es un homeomorfismo. Se concluye que \mathcal{D} es una 3-celda contenida en la frontera de $C(A)$. \square

5.4 Lema. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si un continuo X contiene un subcontinuo A tal que $Fr(A)$ tiene al menos n componentes, entonces X contiene un n -odo.

Demostración. Supongamos que A es un subcontinuo de X tal que $Fr(A)$ tiene al menos n componentes. Tomemos n componentes de $Fr(A)$ distintas dos a dos, C_1, \dots, C_n . Analizaremos dos casos:

(1) Existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que para toda componente K de $X - A$ se tiene que $C_i \cap \overline{K} = \emptyset$; y

(2) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una componente K_i de $X - A$ tal que $C_i \cap \overline{K_i} \neq \emptyset$.

En el caso (1) fijemos un punto $x \in C_i$ y una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ en $X - A$ tal que $\lim x_m = x$. Denotemos por K_m a la componente de $X - A$ que contiene al punto x_m . Afirmamos que existe una subsucesión $\{K_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ de la sucesión $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ tal que $K_{m_j} \neq K_{m_k}$ si $j \neq k$. Para probar esta afirmación suponemos lo contrario. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = K_N$ para todo $n \geq N$. Se sigue que $x \in \overline{K_N}$, por lo cual $C_i \cap \overline{K_N} \neq \emptyset$. Esto es una contradicción con la hipótesis en este caso (1). De este modo nuestra afirmación está demostrada.

Denotemos $Y = A \cup K_{m_1} \cup \dots \cup K_{m_n}$. Por el Teorema 1.21, se tiene que Y es un subcontinuo de X . Notemos que $Y - A = K_{m_1} \cup \dots \cup K_{m_n}$; además, como K_{m_i} y K_{m_j} son componentes de $X - A$, se tiene que K_{m_i} y K_{m_j} son conjuntos separados si $i \neq j$. Con esto, el continuo Y es un n -odo en X .

En el caso (2), para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tomemos una componente K_i de $X - A$ tal que $C_i \cap \overline{K_i} \neq \emptyset$. Como C_i y $\overline{K_i}$ son subcontinuos de X se sigue que $C_i \cup \overline{K_i}$ es un subcontinuo de X . Notemos que $C_i \cup \overline{K_i}$ contiene propiamente a C_i (pues $\emptyset \neq K_i \subset X - A$ y $C_i \subset A$). Luego, por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$ desde C_i hasta $C_i \cup \overline{K_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Afirmamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y para cada $t \in (0, 1]$ se tiene que $\alpha_i(t)$ no está contenido en A . Para probar esto supongamos que $\alpha_i(t) \subset A$. Como $C_i \subset \alpha_i(t) \subset C_i \cup \overline{K_i}$, observamos que $\alpha_i(t) = C_i \cup (\alpha_i(t) \cap \overline{K_i})$ y, puesto que $\overline{K_i} \subset \overline{X - A}$, se sigue que $\alpha_i(t) \subset C_i \cup (A \cap \overline{X - A}) = Fr(A)$. Así, $\alpha_i(t)$ es un continuo en $Fr(A)$ que contiene a la componente C_i , por lo cual $\alpha_i(t) = C_i$. Como α_i es un arco ordenado que inicia en C_i , se tiene que $t = 0$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Por otra parte, como C_i y C_j son conjuntos cerrados y disjuntos en el continuo X si $i \neq j$, podemos tomar n conjuntos abiertos y disjuntos en X , U_1, \dots, U_n , tales que $C_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por la Proposición 1.52, se tiene que $\mathcal{C}(U_i)$ es un conjunto abierto en $C(X)$. Notemos que $C_i \in \mathcal{C}(U_i)$. Así, por la continuidad de α_i , podemos tomar un número $t_i > 0$ tal que $\alpha_i(t_i) \in \mathcal{C}(U_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Denotemos $Y = A \cup \alpha_1(t_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n)$. Como $C_i \subset A \cap \alpha_i(t)$, se tiene que Y es un subcontinuo de X . Además, $Y - A = \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i(t_i) - A)$. Como $t_i > 0$, se tiene que $\alpha_i(t_i) - A \neq \emptyset$ y, por la elección de t_i , $\alpha_i(t_i) - A$ y $\alpha_j(t_j) - A$ son conjuntos separados si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$. Esto prueba que Y es un n -odo en X . \square

5.5 Lema. Si para todo subcontinuo propio y no degenerado, A , de un continuo X se tiene que $Fr(C(A))$ es un 2-celda, entonces $Fr(A)$ es localmente conexo para todo subcontinuo A de X .

Demostración. Supongamos que X contiene un subcontinuo A tal que $Fr(A)$ no es localmente conexo. Por la hipótesis y los Lemas 5.3 y 5.4, se tiene que $Fr(A)$ tiene a lo más tres componentes. Por la Proposición 1.10, existe una componente C de $Fr(A)$ tal que C no es localmente conexas. Es decir, C es un continuo que no es localmente conexo. Por el Teorema 1.70, C contiene un continuo de convergencia K . Entonces K es un subcontinuo no degenerado de C y existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de C tal que $\lim K_n = K$, $K_n \cap K = \emptyset$ y $K_n \cap K_m = \emptyset$ si $n \neq m$, véase la Definición 1.69. Fijemos un punto $x \in K$. Por el inciso (1) de la Proposición 1.46 existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim x_n = x$ y $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos un conjunto abierto U en X tal que $x \in U$ y $K \not\subset \bar{U}$. Por la Proposición 1.52, se tiene que $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{D}(X - \bar{U})$ son conjuntos abiertos en $\mathcal{C}(X)$. Notemos que $\{x\} \in \mathcal{C}(U)$ y $K \in \mathcal{D}(X - \bar{U})$. Como $\lim \{x_n\} = \{x\}$ y $\lim K_n = K$, podemos suponer que $\{x_n\} \in \mathcal{C}(U)$ y $K_n \in \mathcal{D}(X - \bar{U})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como x y x_n pertenecen a $Fr(A)$, por el inciso (2) de la Proposición 2.1, se tiene que los conjuntos singulares $\{x\}$ y $\{x_n\}$ pertenecen a $Fr(C(A))$. Por hipótesis $Fr(C(A))$ es localmente conexo, por esto existe un conjunto abierto y conexo \mathcal{V} en $Fr(C(A))$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{C}(U) \cap Fr(C(A))$. Podemos suponer que $\{x_n\} \in \mathcal{V}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotemos $M = \bigcup \bar{\mathcal{V}}$. Por el Teorema 1.62, se tiene que M es un subcontinuo de X . Como $\bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{C}(U)$, para todo $E \in \bar{\mathcal{V}}$ se tiene que $E \subset U$. Así, $M \subset U$. Denotemos $Y = M \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$. Como $x_i \in M \cap K_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, observamos que Y es un subcontinuo de X . Notemos que $Y - M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (K_i - M)$. Como $K_i \in \mathcal{D}(X - \bar{U})$, se tiene que $K_i \cap (X - \bar{U}) \neq \emptyset$,

así $K_i \not\subseteq U$. Luego, puesto que $M \subset U$, se sigue que $K_i - M \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. También se tiene que $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Se concluye que $Y - M$ es la unión de cuatro conjuntos separados dos a dos. Esto es, Y es un 4-odo en X . Luego, por el Lema 5.3, X contiene un subcontinuo Z tal que $Fr(C(Z))$ contiene una 3-celda. Esto es una contradicción con la hipótesis. Esta contradicción prueba que $Fr(A)$ es localmente conexo. \square

5.6 Teorema. Si para todo subcontinuo propio y no degenerado, A , de un continuo X se tiene que $Fr(A)$ es conexo y $Fr(C(A))$ es una 2-celda, entonces X es un continuo indescomponible y cada uno de sus subcontinuos propios y no degenerados es un arco.

Demostración. Primero demostraremos que, bajo tales condiciones, X es un continuo indescomponible. Por la Proposición 1.13, probaremos que todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío. Para esto suponemos lo contrario. Sea A un subcontinuo propio de X tal que $int(A) \neq \emptyset$. Se sigue que $Fr(A) \neq A$. Notemos que si $Fr(A) = \overline{X - A}$, entonces $\overline{X - A} \subset A$, así $X - A \subset A$. Luego, $X - A = \emptyset$, lo cual es una contradicción porque $A \neq X$. Esta contradicción prueba que $Fr(A) \neq \overline{X - A}$. Como $Fr(A)$ es conexo y $X = A \cup \overline{X - A}$, por el inciso (1) de la Proposición 1.9, se tiene que $\overline{X - A}$ es conexo. Como $int(A) \neq \emptyset$, se tiene que $\overline{X - A} \neq X$. Con esto, observamos que A y $\overline{X - A}$ son subcontinuos propios de X que contienen propiamente a $Fr(A)$.

Tomemos conjuntos abiertos U_1 y U_2 de A y $\overline{X - A}$, respectivamente, tales que $Fr(A) \subset U_1 \cap U_2$, $\overline{U_1} \neq A$ y $\overline{U_2} \neq \overline{X - A}$. Denotemos por C_1 y C_2 a las componentes de $\overline{U_1}$ y $\overline{U_2}$ que contienen a $Fr(A)$, respectivamente. Probaremos lo que sigue:

$$(1) Fr(C_1) - Fr(A) \neq \emptyset \text{ y } Fr(C_2) - Fr(A) \neq \emptyset.$$

Para demostrar (1), por el Teorema 1.20, podemos tomar un punto $x \in C_1 \cap Fr_A(\overline{U_1})$. Luego, podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $A - \overline{U_1}$ tal que $\lim x_n = x$. Como $C_1 \subset \overline{U_1}$, se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en $X - C_1$, así $x \in Fr(C_1)$. Por otra parte, por la elección de U_1 se tiene que $Fr(A) \subset U_1$; y de la definición de frontera se tiene que $Fr_A(\overline{U_1}) \subset Fr_A(U_1)$, además, como U_1 es abierto en A , $U_1 \cap Fr_A(U_1) = \emptyset$. Como $x \in Fr_A(\overline{U_1})$, se sigue que $x \notin U_1$, por lo que $x \notin Fr(A)$. Así, $x \in Fr(C_1) - Fr(A)$, por lo que $Fr(C_1) - Fr(A) \neq \emptyset$. Con argumentos similares se prueba que

$$Fr(C_2) - Fr(A) \neq \emptyset.$$

(2) $Fr(A)$ está contenida propiamente en $Fr(C_1)$.

Para probar (2), fijemos un punto $x \in Fr(A)$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X - A$ tales que $\lim x_n = x$. Como $C_1 \subset A$, se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en $X - C_1$. Se sigue que $x \in \overline{X - C_1}$. Por otra parte, como $x \in Fr(A)$ y $Fr(A) \subset C_1$, se tiene que $x \in C_1$. Luego, $x \in Fr(C_1)$. Así, $Fr(A) \subset Fr(C_1)$. Con esto, y con (1), se tiene la prueba de (2).

En lo que sigue demostraremos que:

$$(3) \emptyset \neq Fr(C_1) \cap Fr(C_2) \subset Fr(A).$$

Como $Fr(A) \subset Fr(C_1)$, notamos que $Fr(C_1) = Fr(A) \cup \overline{Fr(C_1) - Fr(A)}$. Por hipótesis $Fr(C_1)$ es conexo, así $Fr(A)$ y $\overline{Fr(C_1) - Fr(A)}$ no son disjuntos. Fijemos un punto $x \in Fr(A) \cap \overline{Fr(C_1) - Fr(A)}$. Por (2) se tiene que $Fr(A) \subset Fr(C_1)$. Así, $x \in Fr(C_1)$. Probaremos que x también pertenece a $Fr(C_2)$. Como $Fr(A) \subset C_2$, se tiene que $x \in C_2$. Para continuar tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Fr(C_1) - Fr(A)$ tal que $\lim x_n = x$. Notemos que $x_n \in Fr(C_1) \subset C_1 \subset A$, así como $x_n \notin Fr(A)$, se sigue que $x_n \notin \overline{X - A}$. Luego, puesto que $C_2 \subset \overline{X - A}$ se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en $X - C_2$. Esto prueba que $x \in \overline{X - C_2}$. Se sigue que $x \in Fr(C_2)$. Esto demuestra que $Fr(C_1) \cap Fr(C_2) \neq \emptyset$. Por otra parte, como $Fr(C_1) \subset C_1 \subset A$ y $Fr(C_2) \subset C_2 \subset \overline{X - A}$, se tiene que $Fr(C_1) \cap Fr(C_2) \subset Fr(A)$. Así, lo que decimos en (3) está demostrado.

Por hipótesis se tiene que $Fr(C_1)$ y $Fr(C_2)$ son continuos. En (3) probamos que estos continuos se intersectan. Así, $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ es un continuo en X . Por el Lema 5.5, se tiene que $Fr(C_1)$ y $Fr(C_2)$ son localmente conexos. Por la Proposición 1.10 se sigue que $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ es localmente conexo. Sabemos que X no tiene triodos simples, véase el Lema 5.2. Luego, por el Teorema 1.36, se sigue que $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ es un arco o una curva cerrada simple. Por (1) y (3) se tiene que $Fr(C_1)$ y $Fr(C_2)$ son subcontinuos propios, no degenerados, de $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$. Así, $Fr(C_1)$ y $Fr(C_2)$ son arcos en $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$. Notemos que si $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ es una curva cerrada simple, entonces los puntos extremos del arco $Fr(C_1)$ pertenecen a la intersección $Fr(C_1) \cap Fr(C_2)$, pues en otro caso encontramos un triodo simple en la

unión $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$, lo que es imposible por el Lema 1.36. Por esto, y por (3), se sigue que los puntos extremos de $Fr(C_1)$ pertenecen a $Fr(A)$. Como $Fr(A)$ es un subcontinuo del arco $Fr(C_1)$, se sigue que $Fr(A) = Fr(C_1)$. Esto contradice (2). Esta contradicción prueba que $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ no es una curva cerrada simple. Luego, $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ es un arco. En resumen hemos demostrado que:

$Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ es un arco en X tal que $Fr(C_1) \cap Fr(C_2) \subset Fr(A) \subset Fr(C_1)$ y $Fr(C_i) - Fr(A) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Denotemos por Y al arco $Fr(C_1) \cup Fr(C_2)$ y por a y b a sus puntos extremos. Tomemos un subarco E de Y tal que $Fr(A) \subset E \subset Y - \{a, b\}$ y $E \cap (Fr(C_i) - Fr(A)) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Probaremos lo que sigue:

(4) E no pertenece a la semifrontera de $C(Y)$.

Para demostrar esto suponemos lo contrario, o sea que $E \in SB(Y)$, con lo cual vamos a demostrar que existe un subcontinuo C de X que satisface las siguientes condiciones:

(i) $Fr(C) \cap \{a, b\} = \emptyset$;

(ii) $Fr(C) \cap Y \neq \emptyset$; y

(iii) $Fr(C) \cap (X - Y) \neq \emptyset$.

Para probar que existe un subcontinuo de X con estas tres propiedades, tomamos un conjunto abierto V en X tal que $E \subset V$ y $\bar{V} \cap \{a, b\} = \emptyset$. Como $E \in SB(Y)$, por el inciso (1) del Teorema 1.79, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = E$ y $\alpha(t) \not\subset Y$ para todo $t \in (0, 1]$. Por la Proposición 1.52, se tiene que $\mathcal{C}(V)$ es un conjunto abierto en $C(X)$. Luego, puesto que $\alpha(0) = E \in \mathcal{C}(V)$, por la continuidad de α podemos tomar un número $t_0 > 0$ tal que $\alpha(t_0) \in \mathcal{C}(V)$, es decir $\alpha(t_0) \subset V$. A continuación analizamos dos casos en relación con la frontera de $\alpha(t_0)$ en X :

(4.1) $Fr(\alpha(t_0)) \cap (X - Y) \neq \emptyset$; y

(4.2) $Fr(\alpha(t_0)) \cap (X - Y) = \emptyset$.

En el primer caso, observamos que $E \subset Y \cap \alpha(t_0)$, así $Y \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$; además, $\{a, b\} \subset Y \cap (X - \alpha(t_0))$, así $Y \cap (X - \alpha(t_0)) \neq \emptyset$. Por la conexidad de Y , se tiene que $Fr(\alpha(t_0)) \cap Y \neq \emptyset$. Luego, en el caso (4.1), denotando $C = \alpha(t_0)$, se tiene que C es un subcontinuo de X que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii).

En el segundo caso, se tiene que $Fr(\alpha(t_0)) \subset Y$. Por otra parte, como $t_0 > 0$, se tiene que $\alpha(t_0) \not\subset Y$. Fijemos un punto $p \in \alpha(t_0) - Y$. Se tiene que $p \in int(\alpha(t_0))$. Tomemos un conjunto abierto W en X tal que $p \in W \subset \alpha(t_0)$ y $\overline{W} \cap Y = \emptyset$. Como $E \subset Y \cap \alpha(t_0)$, se tiene que $E \subset \alpha(t_0) - W$. Denotemos por C a la componente de $\alpha(t_0) - W$ que contiene a E . Como C es un conjunto cerrado en $\alpha(t_0) - W$ y $\alpha(t_0) - W$ es un conjunto cerrado en X , se tiene que C es un conjunto cerrado en X . Se sigue que $Fr(C) \subset C$. Dado que $C \subset \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_0) \cap \{a, b\} = \emptyset$, se obtiene que $Fr(C) \cap \{a, b\} = \emptyset$. Como $E \subset Y \cap C$ y $\{a, b\} \subset Y \cap (X - C)$, se tiene que $Y \cap C \neq \emptyset$ y $Y \cap (X - C) \neq \emptyset$. Como Y es conexo, se sigue que $Fr(C) \cap Y \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.20, se tiene que $\overline{C} \cap Fr(\alpha(t_0) - W) \neq \emptyset$. Puesto que $C = \overline{C}$ y $Fr(\alpha(t_0) - W) \subset \overline{W}$, se sigue que $C \cap \overline{W} \neq \emptyset$. Fijemos un punto $x \in C \cap \overline{W}$. Como $x \in \overline{W}$, podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en W tal que $\lim x_n = x$. Como $C \subset \alpha(t_0) - W$, se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X - C$, por lo cual $x \in Fr(C)$. Además, como $\overline{W} \cap Y = \emptyset$, se tiene que $x \in X - Y$. Esto prueba que $Fr(C) \cap (X - Y) \neq \emptyset$. Con esto, en el caso (4.2), se tiene que C es un subcontinuo de X que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii).

Con lo anterior, con el supuesto de que E pertenece a la semifrontera de $C(Y)$, hemos demostrado que existe un subcontinuo C de X que satisface (i), (ii) y (iii).

Fijemos puntos $p \in Fr(C) \cap (X - Y)$ y $q \in Fr(C) \cap Y$. Por el Lema 5.5, se tiene que $Fr(C)$ es un continuo localmente conexo. Por el Teorema 1.33, se sigue que $Fr(C)$ es arco conexo. Así, podemos tomar un arco J en $Fr(C)$ con punto extremos p y q . Tomemos un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow J$ tal que $h(0) = p$ y denotemos $t_0 = \inf \{t \in [0, 1] : h(t) \in Y\}$. Se tiene que $h([0, t_0]) \cup Y$ es un triodo simple en X . Esto es una contradicción con el Lema 5.2. Esta contradicción demuestra lo que decimos en (4), o sea que $E \notin SB(Y)$.

A continuación probaremos que:

(5) E no pertenece a la frontera de $C(Y)$. Así, $Fr(C(Y)) \neq C(Y)$.

Para demostrar esto supongamos lo contrario, es decir supongamos que $E \in Fr(C(Y))$. Por (4) tenemos que $E \notin SB(Y)$. Por el Lema 3.1, podemos tomar una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim E_n = E$ y $E_n \cap E = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la elección de E se tiene que $Fr(A) \subset E$. Se sigue que $E_n \cap Fr(A) = \emptyset$. Por esto $E_n \subset X - Fr(A) = (X - A) \cup int(A)$. Como E_n es conexo y $X - A$ e $int(A)$ son conjuntos abiertos ajenos, se tiene que $E_n \subset X - A$ o $E_n \subset int(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que existe una subsucesión $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

(i) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $E_{n_k} \subset X - A$; o

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $E_{n_k} \subset int(A)$.

Si ocurre (i), fijamos un punto $x \in E \cap (Fr(C_1) - Fr(A))$, lo cual es posible por la elección del arco E . Por el inciso (1) del Teorema 1.46, podemos tomar una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_k = x$ y $x_k \in E_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $E_{n_k} \subset X - A$, se tiene que $x_k \in X - A$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, $x \in \overline{X - A}$. Por otro lado, como $x \in C_1 \subset A$, se tiene que $x \in A$. De aquí, $x \in Fr(A)$, lo cual es una contradicción con la elección del punto x .

Si ocurre (ii), fijamos un punto $x \in E \cap (Fr(C_2) - Fr(A))$, lo cual es posible por la elección del arco E . Por el inciso (1) del Teorema 1.46, podemos tomar una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_k = x$ y $x_k \in E_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $E_{n_k} \subset int(A)$, se tiene que $x_k \in A$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, $x \in A$. Por otro lado, como $x \in C_2 \subset \overline{X - A}$, se tiene que $x \in \overline{X - A}$. Por esto, $x \in Fr(A)$, nuevamente una contradicción con la elección del punto x .

En resumen, por suponer que $E \in Fr(C(Y))$, en cualquiera de los casos (i) o (ii) se obtiene una contradicción. De este modo hemos demostrado que $E \notin Fr(C(Y))$ como lo afirmamos en (5).

En lo que sigue vamos a demostrar que:

(6) $Fr(Y) = Y$.

Para probar esto fijamos un punto $y \in Y$. Vamos a encontrar una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X - Y$ tal que $\lim y_n = y$. Analizamos tres casos:

$$(i) \ y \in Fr(C_1) \cap Fr(C_2);$$

$$(ii) \ y \in Fr(C_1) - Fr(C_2); \text{ y}$$

$$(iii) \ y \in Fr(C_2) - Fr(C_1).$$

En el caso (i), por (3) se tiene que $Fr(C_1) \cap Fr(C_2) \subset Fr(A)$, se sigue que $y \in Fr(A)$. Luego, podemos tomar una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X - A$ tal que $\lim y_n = y$. Como $Fr(C_1) \subset C_1 \subset A$, se tiene que $y_n \notin Fr(C_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \notin Fr(C_2)$ para todo $n \geq N$, entonces $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ es una sucesión en $X - Y$ que converge al punto y , es decir se tiene lo requerido. Por esto, para lo que sigue en este primer caso, podemos suponer que $y_n \in Fr(C_2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar una sucesión $\{y_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ en $X - C_2$ tal que $\lim y_{n,m} = y_n$. Como $X - A$ es un conjunto abierto en X y $y_n \in X - A$, podemos suponer que $y_{n,m} \in X - A$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, como $C_1 \subset A$, $y_{n,m} \in X - C_1$. Luego, como $Y \subset C_1 \cup C_2$, $y_{n,m} \in X - Y$, es decir $\{y_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en $X - Y$. Por otro lado, como $\lim y_{n,m} = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_n, y_{m_n}) < \frac{1}{n}$, donde d es la métrica en el continuo X . Notemos que $d(y, y_{m_n}) \leq d(y, y_n) + d(y_n, y_{m_n}) < d(y, y_n) + \frac{1}{n}$. Como $\lim d(y, y_n) = 0$, se obtiene que $\{y_{n,m_n}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X - Y$ tal que $\lim y_{n,m_n} = y$. Esto prueba, en este caso, que $y \in Fr(Y)$.

En el caso (ii), tomamos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X - C_1$ tal que $\lim y_n = y$. Como $Fr(C_2) \subset C_2$ y $y \notin Fr(C_2)$, se tiene que $y \notin C_2$, es decir $y \in X - C_2$. Como $X - C_2$ es un conjunto abierto en X , podemos suponer que $y_n \in X - C_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, puesto que $Y \subset C_1 \cup C_2$, se tiene que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en $X - Y$ y, como $\lim y_n = y$, se concluye que $y \in Fr(Y)$.

En el caso (iii), con argumentos similares al caso (ii) se demuestra que $y \in Fr(Y)$.

En resumen, con lo expuesto en estos casos (i), (ii) y (iii), hemos demostrado lo que decimos en (6), $Fr(Y) = Y$.

Con lo anterior se tiene que Y es un arco contenido propiamente en X tal que $Fr(C(Y)) \neq C(Y)$ y $Fr(Y) = Y$, véanse (5) y (6). Por el Teorema 4.4, se sigue que $Fr(C(Y))$ no es unicoherente. Por otra parte, puesto que por hipótesis, $Fr(C(Y))$ es una 2-celda, por el Teorema 1.27 se tiene que $Fr(C(Y))$ es unicoherente. Esta contradicción demuestra que $int(A) = \emptyset$ para todo subcontinuo propio A de X . Luego, por la Proposición 1.13, se sigue que X es un continuo indescomponible.

Por otra parte, si A es un subcontinuo propio y no degenerado de X , por hipótesis y por el Lema 5.5, se tiene que $Fr(A)$ es un continuo localmente conexo. Así, puesto que $Fr(A) = A$ pues X es indescomponible, se sigue que A es localmente conexo. Por el Lema 5.2, se tiene que X no contiene triodos simples. Luego, A es un continuo localmente conexo que no contiene triodos simples, por el Teorema 1.36, se sigue que A es un arco o una curva cerrada simple en X . Vamos demostrar que A es un arco.

Para probar que A es un arco tomemos un conjunto abierto U en X tal que $A \subset U$ y $\bar{U} \neq X$. Denotemos por K a la componente de U que contiene a A . Notemos que \bar{K} es un subcontinuo propio de X , porque $\bar{K} \subset \bar{U} \neq X$. Luego, por los mismos argumentos del párrafo previo, se tiene que \bar{K} es un arco o una curva cerrada simple. Por el Teorema 1.20, se tiene que $\bar{K} \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Como $A \subset U$, observamos que $A \cap Fr(U) = \emptyset$. Así, $A \neq \bar{K}$. Se sigue que \bar{K} es un arco o una curva cerrada simple en X y contiene propiamente a A . Se concluye que A es un arco en X . Con esto el Teorema 5.6 está demostrado. \square

5.7 Problema. ¿Es necesaria la condición de que las fronteras de los subcontinuos propios sean conexas en el Teorema 5.6?

Capítulo 6

Semicontinuidad superior y continuidad de la función frontera

Por el Teorema 2.2, sabemos que para cada subcontinuo propio A de un continuo X la frontera de $C(A)$ en $C(X)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Por esto es natural estudiar la función $F : C(X) - \{X\} \rightarrow C(C(X))$ definida por $F(A) = Fr(C(A))$ para todo $A \in C(X) - \{X\}$.

En este capítulo presentamos resultados relacionados con la continuidad y la semicontinuidad superior de esta función F . Concretamente, demostramos que si el continuo X es un dendroide, entonces la función F no es semicontinua superiormente, y en consecuencia tampoco es continua en este caso. Además probamos que si F es continua para un continuo X , entonces todo subcontinuo propio de X es unicoherente. Con estos dos resultados caracterizamos a la circunferencia como el único continuo arco conexo para el cual la función F es continua.

6.1 Definición. Sean Z un espacio topológico y Y un continuo. Una función $G : Z \rightarrow C(Y)$ es *semicontinua superiormente en un punto* $z \in Z$ si para cada conjunto abierto V en Y tal que $G(z) \subset V$, existe un conjunto abierto U en Z tal que $z \in U$ y $G(u) \subset V$ para todo punto $u \in U$. La función G es *semicontinua superiormente* si satisface esta propiedad en todo punto de Z .

6.2 Observación. Notamos que la métrica de Hausdorff en el hiperespacio $C(Y)$, no juega ningún papel en la definición de semicontinuidad superior. Sin embargo, afirmamos que si la función G es continua con la topología inducida por esta métrica, entonces G es semicontinua superiormente.

Para probar la afirmación anterior, supongamos que la función G es continua. Tomemos un punto $z \in Z$ y un conjunto abierto V en Y tal que $G(z) \subset V$. Se tiene que $\mathcal{C}(V)$ es un conjunto abierto en $C(Y)$ y $G(z) \in \mathcal{C}(V)$, véase la Proposición 1.52. Luego, por hipótesis, existe un conjunto abierto U en Z tal que $G(U) \subset \mathcal{C}(V)$. Es decir, $G(u) \in \mathcal{C}(V)$ para cada $u \in U$. Equivalentemente, $G(u) \subset V$ para cada $u \in U$. Así, G es semicontinua superiormente.

6.3 Teorema. La función F no es semicontinua superiormente en los dendroides.

Demostración. Sea X un dendroide. Como X es arco conexo, por el Teorema 1.18 sabemos que X es descomponible. Pongamos $X = E \cup D$, donde E y D son subcontinuos propios de X . Notemos que E y D son dendroides, véase el Teorema 1.29. Fijemos puntos $e \in E - D$ y $d \in D - E$. Sea w_0z_0 un arco maximal en X que contiene al arco ed , véase el Teorema 1.32. Como todo subcontinuo de X es unicoherente, si $\{w_0, z_0\} \subset E$, entonces $w_0z_0 \subset E$; lo cual implica que $d \in E$, esto es una contradicción con la elección del punto d . Luego, tenemos que $\{w_0, z_0\} \not\subset E$. Similarmente se prueba que $\{w_0, z_0\} \not\subset D$. Así, podemos suponer que $w_0 \in E - D$ y $z_0 \in D - E$.

Denotemos $A = E \cup w_0z_0$. Entonces $A \in C(X)$. Dado que $E - D = X - D$, se tiene que $E - D$ es un conjunto abierto en X , el cual contiene al punto w_0 y está contenido en A . Así, $w_0 \in \text{int}_X(A)$. Se obtiene que $\{w_0\} \in \text{int}_{C(X)}(C(A))$. En consecuencia, $\{w_0\} \notin \text{Fr}(C(A))$.

En lo que sigue probaremos que existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X) - \{X\}$ tal que $\lim B_n = A$ y $\{w_0\} \in \lim \sup \text{Fr}(C(B_n))$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $z_0 \notin B(w_0, \varepsilon)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por A_n a la componente de $A - B(w_0, \frac{\varepsilon}{n})$ tal que $z_0 \in A_n$. Notemos que A_n es un subcontinuo propio de X y $A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotemos

$A_0 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. Se tiene que $\lim A_n = A_0$ y $A_0 \subset A$. Veamos que $A = A_0$; dado $x \in A - \{w_0, z_0\}$, existe $y \in w_0z_0$ tal que $xy \cap w_0z_0 = \{y\}$. Por la maximalidad de w_0z_0 , se tiene que $w_0 \neq y$. Así, $w_0 \notin xy$. Más aún, $w_0 \notin xy \cup yz_0$. Se sigue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(w_0, \frac{\varepsilon}{n}) \cap xy \cup yz_0 = \emptyset$. Luego, $xy \cup yz_0 \subset A - B(w_0, \frac{\varepsilon}{n})$, por lo cual $xy \cup yz_0 \subset A_n$. Así, $x \in A_n$. Esto prueba que $A \subset A_0$, y se tiene que $A = A_0$. En consecuencia, $\lim A_n = A$.

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow w_0z_0$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = w_0$. Por la continuidad de α , para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $t_n > 0$ tal que $\alpha([0, t_n]) \subset B(w_0, \frac{\varepsilon}{n})$. Denotemos $w_n = \alpha(t_n)$. Así, $\alpha([0, t_n]) = w_0w_n$. Además, $w_n \in w_0z_0 - \{w_0\}$, $d(w_0, w_n) < \frac{\varepsilon}{n}$ y $w_0w_n \cap A_n = \emptyset$.

Denotemos $B_n = A_n \cup w_nz_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $w_0w_n \cap B_n = \{w_n\}$, por esto $w_n \in Fr(B_n)$. Luego, $\{w_n\} \in Fr(C(B_n))$, véase el inciso (2) de la Proposición 2.1. Como $d(w_0, w_n) < \frac{1}{n}$, se tiene que $\lim \{w_n\} = \{w_0\}$ y $\lim B_n = A \cup w_0z_0 = A$. Por otra parte, como $\{w_0\} \notin Fr(C(A))$, podemos tomar dos conjuntos abiertos y disjuntos en $C(X)$, \mathcal{W} y \mathcal{V} , tales que $\{w_0\} \in \mathcal{W}$ y $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$. Notemos que para cada conjunto abierto \mathcal{U} en $C(X) - \{X\}$ tal que $A \in \mathcal{U}$ podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \in \mathcal{U}$ y $\{w_n\} \in \mathcal{W}$. Se sigue que $Fr(C(B_n)) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$, lo cual implica que $Fr(C(B_n)) \not\subset \mathcal{V}$. Esto prueba que la condición de semicontinuidad para la función F , falla en el elemento A y el conjunto abierto \mathcal{V} que contiene a $Fr(C(A))$. Es decir, la función F no es semicontinua superiormente. \square

Como la continuidad implica la semicontinuidad superior, véase la Observación 6.2, se tiene el corolario que sigue.

6.4 Corolario. La función F no es continua en los dendroides.

6.5 Teorema. Si la función F es continua para un continuo X , entonces todo subcontinuo propio de X es unicoherente.

Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo propio, A , de X que no es unicoherente. Sean H y K subcontinuos de A tales que $A = H \cup K$ y $H \cap K$ no es conexo. Tomemos conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos, P

y Q , tales que $H \cap K = P \cup Q$.

Por la Proposición 1.58, podemos tomar un subcontinuo M de H tal que M es irreducible entre P y Q . Es decir, M es un subcontinuo de H tal que $M \cap P \neq \emptyset$, $M \cap Q \neq \emptyset$ y para todo subcontinuo propio N de M se tiene que $N \cap P = \emptyset$ o $N \cap Q = \emptyset$. Fijemos un punto $p \in P \cap M$. Por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado α en $C(M)$ desde $\{p\}$ hasta M . Denotemos $B = K \cup M$. A continuación probamos lo que sigue:

$$(1) M \in Fr(C(B)).$$

Para esto denotemos $B_n = K \cup \alpha(1 - \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\alpha(1 - \frac{1}{n})$ es un continuo contenido en B_n y en M . Denotemos por C_n a la componente de la intersección $B_n \cap M$ que contiene a $\alpha(1 - \frac{1}{n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $B_n \not\subseteq M$ y $M \not\subseteq B_n$. Para demostrar esta afirmación notamos que:

$$B_n \cap M = (K \cup \alpha(1 - \frac{1}{n})) \cap M = (K \cap M) \cup \alpha(1 - \frac{1}{n}).$$

Como $M \subset H$, se tiene que $K \cap M = K \cap (H \cap M) = (M \cap P) \cup (M \cap Q)$. Se sigue que:

$$B_n \cap M = \alpha(1 - \frac{1}{n}) \cup (M \cap P) \cup (M \cap Q).$$

Además, $\alpha(1 - \frac{1}{n}) \cup (M \cap P) \neq \emptyset$, $M \cap Q \neq \emptyset$ y $[\alpha(1 - \frac{1}{n}) \cup (M \cap P)] \cap (M \cap Q) = \emptyset$. Esto implica que $B_n \cap M$ no es conexo. Esto prueba lo que afirmamos, es decir que $B_n \not\subseteq M$ y $M \not\subseteq B_n$.

Por el inciso (4) del Teorema 1.79, se sigue que $C_n \in SB(B_n)$. Así, por el inciso (3) de ese mismo teorema, se obtiene que $C_n \in Fr(C(B_n))$.

Por otro lado, como $\lim \alpha(1 - \frac{1}{n}) = M$ y $\alpha(1 - \frac{1}{n}) \subset C_n \subset M$, con el inciso (2) del Teorema 1.46, se obtiene que $\lim C_n = M$. Como $\lim B_n = B$ y como la función F es continua (por hipótesis), se tiene que $\lim Fr(C(B_n)) = Fr(C(B))$.

Con esto, y el inciso (1) del Teorema 1.46, se sigue que $M \in Fr(C(B))$. Así, lo que decimos en (1) está demostrado.

Sean U y V conjuntos abiertos en X tales que $P \subset U$, $Q \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Como M y K son continuos que intersectan a U y a V , notamos que $M - (U \cup V) \neq \emptyset$ y $K - (U \cup V) \neq \emptyset$. Como $M \cap K \subset H \cap K = P \cup Q \subset U \cup V$, se sigue que $M - (U \cup V)$ y $K - (U \cup V)$ son conjuntos ajenos. Observemos también que estos conjuntos son cerrados en X . Tomemos conjuntos abiertos ajenos, W y W' , en X tales que $M - (U \cup V) \subset W$ y $K - (U \cup V) \subset W'$. Denotemos $\mathcal{U} = \mathcal{C}(U \cup V \cup W) \cap \mathcal{D}(U) \cap \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{D}(W)$. Por el inciso (2) de la Proposición 1.52, se tiene que \mathcal{U} es un conjunto abierto en $C(X)$. Observemos que $M \in \mathcal{U}$.

Por (1), y por el Teorema 2.11, podemos tomar un arco ordenado β en $Fr(C(B))$ desde M hasta B . Por la continuidad de β podemos fijar $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\beta(t_0) \in \mathcal{U}$.

Notemos que $M \subset \beta(t_0) \subset B = K \cup M$ y $M \neq \beta(t_0)$. Así, $\beta(t_0) - M \neq \emptyset$ y $\beta(t_0) - M \subset K$.

Afirmamos que $\beta(t_0) - M \subset U \cup V$. Para ver esto supongamos que existe un punto $x \in (\beta(t_0) - M) - (U \cup V)$. Se tiene que $x \in K - (U \cup V) \subset W'$. Puesto que $\beta(t_0) \in \mathcal{C}(U \cup V \cup W)$ (es decir $\beta(t_0) \subset U \cup V \cup W$), se sigue que $x \in W$. Así, $x \in W \cap W'$, lo cual es una contradicción porque W y W' son ajenos. Esto prueba lo que afirmamos.

Por lo anterior se tiene que:

- (i) $(\beta(t_0) - M) \cap U \neq \emptyset$; o
- (ii) $(\beta(t_0) - M) \cap V \neq \emptyset$.

Supongamos que ocurre (i). Fijemos un punto $q \in Q \cap M$ y tomemos un arco ordenado γ en $C(M)$ desde $\{q\}$ hasta M . Denotemos $B'_n = K \cup \gamma(1 - \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\{B'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - \{X\}$ tal que $\lim B'_n = B$. Como la función F es continua (por hipótesis), se sigue que $\lim Fr(C(B'_n)) = Fr(C(B))$. Como $\beta(t_0) \in Fr(C(B))$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim E_n = \beta(t_0)$ y

$E_n \in Fr(C(B'_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que $U - M$ es un conjunto abierto en X . Así, por la Proposición 1.52 (2), $\mathcal{D}(U - M)$ es un conjunto abierto en $C(X)$. Como supusimos (i), se tiene que $\beta(t_0) \cap (U - M) \neq \emptyset$. Así $\beta(t_0) \in \mathcal{D}(U - M)$. Recordemos que $\beta(t_0) \in \mathcal{U}$. Luego, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \in \mathcal{U}$ y $E_n \in \mathcal{D}(U - M)$. Esto implica que $E_n \subset U \cup V \cup W$, $E_n \cap U \neq \emptyset$, $E_n \cap V \neq \emptyset$, $E_n \cap W \neq \emptyset$ y $E_n \cap (U - M) \neq \emptyset$.

Demostremos las afirmaciones (2), (3), (4) y (5) que hacemos a continuación:

$$(2) E_n \subset (K \cap \bar{U}) \cup (\gamma(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{V}).$$

Esto se tiene porque $E_n \subset B'_n = K \cup \gamma(1 - \frac{1}{n})$, $K - (U \cup V) \subset W'$, $E_n \subset U \cup V \cup W$ y $W \cap W' = \emptyset$.

$$(3) (K \cap \bar{U}) \cap (\gamma(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{V}) = \emptyset.$$

Para probar esto recordemos que $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, por lo cual $(K \cap \bar{U}) \cap (\gamma(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{V}) = K \cap \bar{U} \cap \gamma(1 - \frac{1}{n})$. Como $\gamma(1 - \frac{1}{n}) \subset M \subset H$, se tiene que $K \cap \bar{U} \cap \gamma(1 - \frac{1}{n}) = K \cap H \cap \bar{U} \cap \gamma(1 - \frac{1}{n})$. Dado que $K \cap H = P \cup Q$, se sigue que $(K \cap \bar{U}) \cap (\gamma(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{V}) = (P \cup Q) \cap \bar{U} \cap \gamma(1 - \frac{1}{n})$. Como $P \subset \bar{U}$, $Q \subset \bar{V}$ y $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, se sigue que $(K \cap \bar{U}) \cap (\gamma(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{V}) = P \cap \gamma(1 - \frac{1}{n})$. Notemos que $\gamma(1 - \frac{1}{n})$ es un subcontinuo propio de M que intersecta a Q . Así, como M es un subcontinuo de H irreducible entre P y Q , se obtiene que $P \cap \gamma(1 - \frac{1}{n}) = \emptyset$. Esto demuestra lo que afirmamos en (3).

$$(4) E_n \cap (K \cap \bar{U}) \neq \emptyset.$$

Para ver esto tomemos un punto $x \in E_n \cap (U - M)$. Como $E_n \subset B'_n = K \cup \gamma(1 - \frac{1}{n})$ y $\gamma(1 - \frac{1}{n}) \subset M$, se tiene que $x \in K \cap U$, lo cual demuestra (4).

$$(5) E_n \cap (\gamma(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{V}) \neq \emptyset.$$

Esto se tiene porque $E_n \in \mathcal{U}$ y, en consecuencia $E_n \in \mathcal{D}(V)$, es decir $E_n \cap V \neq \emptyset$.

En resumen, con lo establecido en (2)–(5), se tiene que E_n está contenido en la unión de dos conjuntos cerrados y ajenos, e intersecta a ambos. Esto es una contradicción porque E_n es conexo.

Si ocurre (ii), entonces usamos la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $B_n = K \cup \alpha(1 - \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y los conjuntos $K \cap \bar{V}$ y $\alpha(1 - \frac{1}{n}) \cup \bar{U}$ para obtener una contradicción similar. Con esto el teorema está demostrado. \square

Más adelante damos un ejemplo para mostrar que en el Teorema 6.5, la condición de continuidad no se puede substituir por la de semicontinuidad superior. Para esto primero exponemos las siguientes proposiciones.

6.6 Proposición. Sean X un continuo y $A \in C(X) - \{X\}$. Si la función F no es semicontinua superiormente en A , entonces existen un conjunto abierto \mathcal{V} en $C(X)$ y una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tales que $\lim B_n = A$, $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$ y $Fr(C(B_n))$ no está contenido en \mathcal{V} para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por definición, si F no es semicontinua superiormente en A , entonces existe un conjunto abierto \mathcal{V} en $C(X)$ tal que $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$ y para cada conjunto abierto \mathcal{U} en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$ existe un elemento $B \in \mathcal{U}$ tal que $F(B)$ no está contenido en \mathcal{V} . En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un elemento B_n en la $\frac{1}{n}$ -bola de A en $C(X)$ tal que $Fr(C(B_n))$ no está contenido en \mathcal{V} . Como $H(A, B_n) < \frac{1}{n}$, se tiene que $\lim B_n = A$. Esto prueba la proposición. \square

6.7 Proposición. Sean X un continuo y $A \in C(X) - \{X\}$. Si $Fr(C(A)) = C(A)$, entonces la función F es semicontinua superiormente en el elemento A .

Demostración. Para probar esto, supongamos lo contrario. Por la Proposición 6.6, existen un conjunto abierto \mathcal{V} en $C(X)$ y una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tales que $\lim B_n = A$, $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$ y $Fr(C(B_n))$ no está contenido en \mathcal{V} para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Tomemos un elemento $E_n \in Fr(C(B_n)) - \mathcal{V}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - \mathcal{V}$. Por compacidad, sin perder generalidad, podemos suponer que existe un elemento $E \in C(X) - \mathcal{V}$ tal que $\lim E_n = E$. Como $E_n \subset B_n$, se sigue que $E \subset A$.

Así, $E \in C(A)$. Luego, por hipótesis, $E \in Fr(C(A))$. Como $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$, se sigue que $E \in \mathcal{V}$. Esto es una contradicción porque $E \notin \mathcal{V}$. Esta contradicción demuestra que F es semicontinua superiormente en el elemento A . \square

6.8 Ejemplo. Sea X una compactación de la recta real \mathbb{R} cuyo residuo es la circunferencia S^1 como la que se muestra en la Figura 6.1.

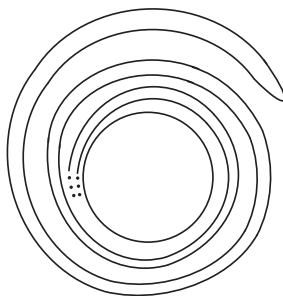


Figura 6.1

Probaremos que la función F es semicontinua superiormente para este continuo X . Fijemos un elemento $A \in C(X) - \{X\}$. Notemos que si $A \subset S^1$ entonces A es el límite de una sucesión de arcos en la recta real \mathbb{R} . Esto implica que $Fr(C(A)) = C(A)$. Luego, por la Proposición 6.7, se tiene que F es semicontinua superiormente en A . Por esto en lo que sigue suponemos que A no está contenido en S^1 .

Supongamos que la función F no es semicontinua superiormente en el elemento A . Por la Proposición 6.6, existe un conjunto abierto \mathcal{V} en $C(X)$ y existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tales que $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$, $\lim B_n = A$ y $Fr(C(B_n))$ no está contenido en \mathcal{V} para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos un elemento $E_n \in Fr(C(B_n)) - \mathcal{V}$. Por compacidad, podemos suponer que existe un elemento $E \in C(X) - \mathcal{V}$ tal que $\lim E_n = E$. Como $E_n \subset B_n$ y $\lim B_n = A$, se tiene que $E \subset A$, véase el Teorema 1.46. Así, $E \in C(A)$.

Vamos a demostrar que $E \in Fr(C(A))$. Para esto, como A no está contenido en S^1 , analizaremos los siguientes tres casos:

(1) $A \subset \mathbb{R}$.

En este caso observamos que A es un arco libre en X . Denotemos por a y b a los puntos extremos de A . Por el Corolario 2.6, sabemos que $Fr(C(A)) = C(a, A) \cup C(b, A)$. Podemos suponer que cada B_n es un arco en \mathbb{R} con puntos extremos a_n y b_n , y que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. Notemos que $Fr(C(B_n)) = C(a_n, B_n) \cup C(b_n, B_n)$. Sin perder generalidad podemos suponer que $a_n \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim E_n = E$, por el inciso (2) del Teorema 1.46 se tiene que $a \in E$. Así $E \in C(a, A)$. Se sigue que $E \in Fr(C(A))$.

(2) $A = S^1 \cup [a, \infty)$ o $A = S^1 \cup (-\infty, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Analizamos el caso $A = S^1 \cup [a, \infty)$, el otro es similar. Afirmamos que $Fr(C(A)) = C(a, A) \cup C(S^1, A) \cup C(S^1)$.

Para ver esto primero observamos que si B es un subcontinuo de A que no pertenece a $C(a, A) \cup C(S^1, A) \cup C(S^1)$, entonces B es un arco contenido en el intervalo abierto en (a, ∞) . Se tiene que $\mathcal{C}((a, \infty))$ es un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $B \in \mathcal{C}((a, \infty)) \subset C(A)$. Así, $B \in int(C(A))$. Por esto B no pertenece a $Fr(C(A))$. Esto prueba que $Fr(C(A)) \subset C(a, A) \cup C(S^1, A) \cup C(S^1)$.

Recíprocamente, dado $B \in C(a, A)$, tomamos $B_n = B \cup [a, a - \frac{1}{n}]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ y $\lim B_n = B$. Así, $B \in Fr(C(A))$. Esto prueba que $C(a, A) \subset Fr(C(A))$. Si $B \in C(S^1, A)$, entonces tomamos $B_n = B \cup (-\infty, -n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$ y $\lim B_n = B$. Así, $B \in Fr(C(A))$, lo cual demuestra que $C(S^1, A) \subset Fr(C(A))$. Si $B \in C(S^1)$, entonces existe una sucesión de arcos en el rayo $(-\infty, a]$ que converge a B . Por esto $B \in Fr(C(A))$. Así, $C(S^1) \subset Fr(C(A))$.

Con lo anterior hemos demostrado lo que afirmamos en el inicio de este caso.

Como $\lim B_n = A$, sin perder generalidad, basta analizar los casos que enunciamos a continuación en (2.1) y (2.2):

(2.1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = S^1 \cup [b_n, \infty)$, donde $\lim b_n = a$.

En este caso se tiene que $Fr(C(B_n)) = C(b_n, B_n) \cup C(S^1, B_n) \cup C(S^1)$. Por esto podemos limitarnos a estudiar los siguientes tres subcasos:

(2.1.1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in C(b_n, B_n)$.

En este subcaso, como $b_n \in E_n$ y $\lim b_n = a$, se tiene que $a \in E$. Así, $E \in C(a, A)$. Por esto $E \in Fr(C(A))$.

(2.1.2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in C(S^1, B_n)$.

Se tiene que $S^1 \subset E_n$, de lo cual se sigue que $S^1 \subset E$, véase el Teorema 1.46. Así, $E \in C(S^1, A)$. Luego, $E \in Fr(C(A))$.

(2.1.3) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in C(S^1)$.

En este caso, como $C(S^1)$ es cerrado, se tiene que $E \in C(S^1)$. Luego, como $C(S^1) \subset Fr(C(A))$, $E \in Fr(C(A))$.

Con lo anterior, en este caso (2.1), se obtiene que $E \in Fr(C(A))$.

(2.2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = S^1 \cup [b_n, \infty) \cup (-\infty, c_n]$, donde $\lim b_n = a$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente en $(-\infty, a]$ que no tiene cota inferior.

En este caso observemos que $S^1 \cup (-\infty, c_n) \cup (b_n, \infty)$ es un conjunto abierto en X contenido en B_n . Por esto, $Fr(B_n) = \{b_n, c_n\}$. Luego, por el Teorema 2.3, $Fr(C(B_n)) \subset C(b_n, B_n) \cup C(c_n, B_n)$. Por otra parte, con argumentos similares a los expuestos en el segundo párrafo del caso (2), se prueba que $C(b_n, B_n)$ y $C(c_n, B_n)$ están contenidos en $Fr(C(B_n))$. Así, $Fr(C(B_n)) = C(b_n, B_n) \cup C(c_n, B_n)$. Por esto podemos limitarnos a estudiar los siguientes dos subcasos:

(2.2.1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in C(b_n, B_n)$.

En este subcaso, por los mismos argumentos que en el subcaso (2.1.1) se tiene que $E \in Fr(C(A))$.

(2.2.2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in C(c_n, B_n)$.

En este subcaso, por la compacidad de X , existe una subsucesión $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y existe un punto $c \in S^1$ tales que $\lim c_{n_k} = c$. Como $c_{n_k} \in E_{n_k}$ y $\lim E_{n_k} = E$, se sigue que $c \in E$, véase el Teorema 1.46. Así, $E \cap S^1 \neq \emptyset$. Luego, $E \subset S^1$ o $S^1 \subset E$. Es decir, $E \in C(S^1) \cup C(S^1, E)$. Esto implica que $E \in Fr(C(A))$.

(3) $A = S^1 \cup (-\infty, a] \cup [b, \infty)$, donde $a < 0 < b$.

En este caso, con argumentos similares a los expuestos en el párrafo que sigue a (2.2), se prueba que $Fr(C(A)) = C(a, A) \cup C(b, A)$.

Sin perder generalidad podemos suponer que $B_n = S^1 \cup (-\infty, a_n] \cup [b_n, \infty)$, donde $a_n < 0 < b_n$, $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. Observemos que $Fr(C(B_n)) = C(a_n, B_n) \cup C(b_n, B_n)$.

Sin perder generalidad podemos suponer que $a_n \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.46, se sigue que $a \in E$. Así, $E \in C(a, A)$. Por esto, $E \in Fr(C(A))$.

Con lo anterior hemos demostrado que $E \in Fr(C(A))$. Como $Fr(C(A)) \subset \mathcal{V}$, se tiene que $E \in \mathcal{V}$. Esto es una contradicción porque $E \in C(X) - \mathcal{V}$. Esta contradicción demuestra que la función F es semicontinua superiormente en A .

En conclusión hemos demostrado que la función F es semicontinua superiormente si X es la compactación de la recta real con residuo la circunferencia, que se describe en el Ejemplo 6.8. Comparando con el Teorema 6.5, observamos que este continuo X contiene un subcontinuo propio no unicoherente.

6.9 Teorema. Si X es un continuo arco conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) El continuo X es una curva cerrada simple
- (2) La función F es continua para el continuo X .

Demostración. (1) implica (2). Supongamos que X es una curva cerrada simple. Sean A y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ un elemento y una sucesión, respectivamente, en $C(X) - \{X\}$ tales que $\lim A_n = A$. Se tiene que A , y cada A_n , son arcos en X . Denotemos por a y b a los puntos extremos de A ; y por a_n y b_n a los puntos extremos de A_n . Sin perder generalidad podemos suponer que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$.

Por el Corolario 2.6, $Fr(C(A)) = C(a, A) \cup C(b, A)$ y $Fr(C(A_n)) = C(a_n, A_n) \cup C(b_n, A_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $\lim Fr(C(A_n))$ existe. Debemos probar que éste coincide con la frontera de $C(A)$.

Fijemos un elemento $B \in \lim Fr(C(A_n))$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \in Fr(C(A_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in B_n$ o $b_n \in B_n$. Así, una de estas dos condiciones ocurre para n en un subconjunto infinito de \mathbb{N} . Luego, sin perder generalidad, podemos suponer que $a_n \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por esto, y puesto que $\lim a_n = a$, $B_n \subset A_n$ y $\lim A_n = A$, se sigue que $a \in B$ y $B \subset A$ (véase el inciso (2) del Teorema 1.46). Así, $B \in C(a, A)$. Esto demuestra que $\lim Fr(C(A_n)) \subset Fr(C(A))$.

Ahora, fijemos un elemento $C \in Fr(C(A))$. Demostremos que $C \in \lim Fr(C(A_n))$. Sin perder generalidad suponemos que $C \neq A$ y $a \in C$. Tomemos una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ y denotemos $t = \mu(C)$. Se tiene que $t < \mu(A)$. Como $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$, podemos suponer que $t < \mu(A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único subarco o singletón C_n de A_n tal que $a_n \in C_n$ y $\mu(C_n) = t$. Notamos que $C_n \in Fr(C(A_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\lim C_n = C$. Para esto, sin perder generalidad podemos suponer que $\lim C_n$ existe. Como $a_n \in C_n \subset A_n$, $\lim a_n = a$ y $\lim A_n = A$, se tiene que $a \in \lim C_n$ y $\lim C_n \subset A$. Así, C y $\lim C_n$ son subarcos del arco A y tienen en común el punto extremo a . Se obtiene que $C \subset \lim C_n$ o $\lim C_n \subset C$. Por otro lado, notemos que $\mu(\lim C_n) = \lim \mu(C_n) = t$. Es decir $\mu(\lim C_n) = \mu(C)$. Se sigue que $\lim C_n = C$. Esto prueba que $C \in \lim Fr(C(A_n))$, por lo que

$$Fr(C(A)) \subset \lim Fr(C(A_n)).$$

Con lo anterior hemos demostrado que $\lim Fr(C(A_n)) = Fr(C(A))$. Así, la función F es continua en $C(X) - \{X\}$.

(2) implica (1). Supongamos que la función F es continua. Por el Teorema 6.5, cada subcontinuo propio de X es unicoherente. Si X contiene una curva cerrada simple, digamos S , como S no es unicoherente se tiene que $X = S$. Así, se tiene la conclusión. Luego, en lo que sigue, suponemos que X no contiene curvas cerradas simples. Se sigue que X es un continuo únicamente arco conexo, es decir, para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un único arco con puntos extremos x y y (pues de lo contrario podríamos encontrar una curva cerrada simple en X), tal arco único es denotado por xy . Probaremos que:

(1) Todo subcontinuo propio de X es arco conexo.

Para probar esta afirmación supongamos que existe un subcontinuo propio A de X que no es arco conexo. Luego, existen puntos $x_0, y_0 \in A$ tales que $x_0y_0 \cap A = \{x_0, y_0\}$. Notemos que $A - \{x_0, y_0\}$ y $x_0y_0 - \{x_0, y_0\}$ son conjuntos separados. Además, $A \cup x_0y_0$ es un subcontinuo de X el cual no es unicoherente. Así $X = A \cup x_0y_0$. Elijamos un punto $p \in x_0y_0 - \{x_0, y_0\}$. Dado $a \in A$, $x_0 \in ap$ o $y_0 \in ap$. Definamos $H = \{a \in A : x_0 \in ap\}$ y $K = \{a \in A : y_0 \in ap\}$. Luego $A = H \cup K$. Para obtener la prueba de (1), primero demostraremos lo que afirmamos a continuación en (2) y (3).

(2) Los conjuntos H y K son ajenos y arco conexos.

Veamos que $H \cap K = \emptyset$; supongamos que existe $a \in A$ con $a \in H \cap K$. Se sigue que $x_0, y_0 \in ap$. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow ap$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = p$. Denotemos por s, t los elementos en $[0, 1]$ tal que $\alpha(s) = x_0$ y $\alpha(t) = y_0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $s < t$. Luego $\alpha([0, s]) \cup x_0p$ es un arco de a a p diferente del arco ap ya que $y_0 \notin \alpha([0, s]) \cup x_0p$ contradiciendo el hecho de que X es únicamente arco conexo.

Veamos que H es arco conexo; dado que A es conexo podemos suponer que $\overline{H} \cap K \neq \emptyset$. Dado $b \in H$, $bx_0 - \{x_0\}$ es un subconjunto conexo de $(A - \{x_0, y_0\}) \cup (x_0y_0 - \{x_0, y_0\})$ lo que implica que $bx_0 \subset A$. Además, dado

$c \in bx_0$, se tiene que $cx_0 \cup x_0p$ es el arco de c a p , de donde $c \in H$. Así $bx_0 \subset H$ ($x_0 \in H$). Por lo tanto, para cualquier $b \in H$ el arco que une a b con x_0 se queda contenido en H . Con lo cual se concluye que H es arco conexo. De manera análoga se obtiene que K es arco conexo. Así lo que afirmamos en (2) está demostrado.

Por otro lado, tomemos un punto $x_1 \in \overline{H} \cap K$ y tal que $x_1y_0 \cap \overline{H} = \{x_1\}$. Notemos que $x_1 \neq x_0$ ya que $x_1 \in K$ y $x_0 \in H$. Se sigue que $y_0 \in x_1p$, de donde $x_1x_0 = x_1y_0 \cup y_0x_0$, así $p \in x_1x_0 - \{x_1, x_0\}$. Además, como $x_1y_0 \cap \overline{H} = \{x_1\}$ y $x_0y_0 \cap A = \{x_0, y_0\}$, se tiene que $x_1x_0 \cap \overline{H} = \{x_1, x_0\}$. En consecuencia, $\overline{H} \cup x_1x_0$ es un subcontinuo de X el cual no es unicoherente, por lo cual $X = \overline{H} \cup x_1x_0$. Ahora, vamos a probar la siguiente afirmación.

$$(3) \quad \overline{H} \cap K = \{x_1\}.$$

Para probar esto supongamos que existe $x_2 \in (\overline{H} \cap K) - \{x_1\}$. Veamos $x_2 \notin x_1x_0$. Para ver esto supongamos $x_2 \in x_1x_0$. Como $X - \overline{H} = x_1x_0 - \{x_0, x_1\}$ y $x_2 \in \overline{H}$, se sigue que $x_2 \in \{x_0, x_1\}$. Como $x_2 \neq x_1$, se tiene que $x_2 = x_0$. Así, como $x_0 \in H$, $x_2 \in H$. Esto implica que $x_2 \in H \cap K$. Esto es una contradicción porque H y K son ajenos. Por esto $x_2 \notin x_1x_0$. Se sigue que $x_2 \in \text{int}(\overline{H})$, así $\{x_2\}$ no pertenece a $\text{Fr}(C(\overline{H}))$.

Tomemos un subconjunto denso y numerable $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ en H . Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = x_0a_1 \cup \dots \cup x_0a_n$. Observemos que $B_n \subset H$ y $x_2 \notin B_n$ ($x_2 \notin H$). Sea $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_2, a_{m_n}) < \frac{1}{n}$ y $a_{m_n} \notin B_n$. Es claro que $m_n > n$. Elijamos un punto $c_n \in x_0a_{m_n} - \{a_{m_n}\}$ tal que $c_n a_{m_n} \cap B_n = \emptyset$ y $d(a_{m_n}, c_n) < \frac{1}{n}$. Definimos $C_n = B_n \cup x_0c_n$. Notemos que $C_n \in C(H) \subset C(\overline{H})$ y $c_n a_{m_n} \cap C_n = \{c_n\}$. Veamos que $\lim C_n = \overline{H}$. Sea $\varepsilon > 0$, basta probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{H} \subset N(\varepsilon, C_n)$ para todo $n \geq N$. Como \overline{H} es un conjunto compacto, existe $\{z_1, \dots, z_k\} \subset \overline{H}$ tal que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^k B(z_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Luego, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_i} \in B(z_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Dado que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $B(z_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(a_{n_i}, \varepsilon)$ se tiene que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^k B(a_{n_i}, \varepsilon)$. Si tomamos $N = \text{máx} \{n_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$, entonces $\{a_{n_1}, \dots, a_{n_k}\} \subset \{a_1, \dots, a_N\} \subset B_N \subset$

$B_n \subset C_n$ para todo $n \geq N$. Se sigue que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^k B(a_{n_i}, \varepsilon) \subset N(\varepsilon, C_n)$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto $\lim C_n = \overline{H}$.

Notemos que $\{c_n\} \in Fr(C_n)$, además $\lim \{c_n\} = \{x_2\}$. Por hipótesis $\lim Fr(C(C_n)) = Fr(C(\overline{H}))$. Así, por el Teorema 1.46 (1), $\{x_2\} \in Fr(C(\overline{H}))$. Esto es una contradicción que prueba lo que afirmamos en (3).

Tomemos un arco ordenado, α , en $C(X)$ desde $\{x_1\}$ hasta \overline{H} . Para cada número $n \in \mathbb{N}$ denotemos $t_n = \frac{1}{n}$ y elijamos un punto $p_n \in \alpha(t_n) - (\alpha(t_{n+1}) \cup x_0x_1)$. Como $p_n \in \overline{H} \subset A$, $\overline{H} \cap K = \{x_1\}$, $p_n \neq x_1$ y $A = H \cup K$ se tiene que $p_n \in H$. Luego $x_0 \in p_n p$ y $p \in p_n x_1$ ($p_n \in H$ y $p_n x_1 = p_n p \cup p x_1$). Notemos que $\alpha(t_n) \cap p_n x_1$ no es conexo ya que de serlo, sería un subconjunto conexo del arco $p_n x_1$ que tiene a los puntos extremos de éste, de modo que se tendría que $\alpha(t_n) \cap p_n x_1 = p_n x_1$; esto es una contradicción porque $p \in p_n x_1$ y $p \notin \alpha(t_n)$. Por esto $\alpha(t_n) \cap p_n x_1$ no es conexo. Por otro lado $x_1 \in \alpha(t_n) \cap p_n x_1$ y tanto $\alpha(t_n)$ como $p_n x_1$ son subcontinuos de X , en consecuencia $\alpha(t_n) \cup p_n x_1$ es un subcontinuo de X el cual no es unicoherente. Se sigue que $X = \alpha(t_n) \cup p_n x_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que $X = \alpha(t_{n+1}) \cup p_{n+1} x_1$ y $p_n \notin \alpha(t_{n+1})$, se tiene que $p_n \in (p_{n+1} x_1 - \{p_{n+1}\})$. Se sigue que $(p_{n+1} p_n - p_n) \cap p_n x_1 = \emptyset$ lo que implica que $p_{n+1} p_n \subset \alpha(t_n)$. Así $\lim p_n p_{n+1} = \{x_1\}$. Denotemos $S = x_1 p_1 \cup p_1 p_2 \cup \dots$. Dado que $p_n \in p_{n+1} x_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n p_{n+1} = \{x_1\}$ se tiene que S es una curva cerrada simple. Una contradicción con el supuesto inicial en esta prueba. Esta contradicción demuestra lo que decimos en (1).

Con lo anterior probaremos que:

(4) X es unicoherente.

Para probar esta afirmación supongamos que existen dos subcontinuos de X , Y y Z , tales que $X = Y \cup Z$ y que $Y \cap Z$ no es conexo. Tomemos dos puntos y y z en diferentes componentes de $Y \cap Z$. Por lo establecido en (1), podemos tomar arcos L_1 y L_2 con puntos extremos y y z tales que $L_1 \subset Y$ y $L_2 \subset Z$. Se sigue que $L_1 \cup L_2$ es un subcontinuo de X el cual contiene una curva cerrada simple. Esto es una contradicción con nuestra suposición inicial, con lo cual (4) está demostrado.

Con (4), y el Teorema 6.5, se obtiene que X es un continuo hereditariamente unicoherente. Como X es arco conexo, se sigue que X es un dendroide. Luego, por el Teorema 6.3, la función F no es continua, una contradicción con la hipótesis. Esta contradicción demuestra que X es una curva cerrada simple. \square

Capítulo 7

Caracterizaciones del arco y de la circunferencia

7.1 Lema. Sea X un continuo tal que para todo subcontinuo propio no degenerado A de X se tiene que $Fr(C(A))$ es un arco, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X no es localmente conexo. Por el Teorema 1.8, X tiene un punto en el cual X no es conexo en pequeño. Por el Teorema 1.70, X contiene un continuo de convergencia K . Esto significa que K es un subcontinuo no degenerado de X y que existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim K_n = K$ y $K_n \cap K = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46, de esto último se sigue que $K = Fr(K)$. Luego, por el inciso (2) de la Proposición 2.1, se tiene que $F_1(K) \subset Fr(C(K))$. Observemos que K es un subcontinuo propio (pues X contiene subcontinuos ajenos de K) y no degenerado (por definición de continuo de convergencia) de X . Así, por hipótesis, $Fr(C(K))$ es un arco. Se sigue que $F_1(K)$ es un arco, por lo que K es un arco en X .

Fijemos dos puntos a y b en K diferentes entre sí y diferentes de los puntos extremos de K . Denotemos por A al subarco de K que tiene como puntos extremos a los puntos a y b . Como $A \subset K$ y K es límite de una sucesión de subcontinuos de $X - K$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, se tiene que $A = Fr(A)$. Así, por el inciso (2) de la Proposición 2.1, se obtiene que $F_1(A) \subset Fr(C(A))$. Además, observemos que si $B \in C(a, A)$ entonces existe una sucesión de subarcos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en K tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \cap (K - A) \neq \emptyset$ (así $B_n \in C(X) - C(A)$). Por esto, $C(a, A) \subset$

$Fr(C(A))$. Similarmente se observa que $C(b, A) \subset Fr(C(A))$. Por otra parte, sabemos que $F_1(A) \cup C(a, A) \cup C(b, B)$ es una curva cerrada simple, véase el Ejemplo 1.48. Esto prueba que $Fr(C(A))$ contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción pues por hipótesis $Fr(C(A))$ es un arco. Esta contradicción demuestra que X es localmente conexo. \square

7.2 Lema. Si un continuo X contiene un triodo simple, entonces X contiene un subcontinuo A tal que $Fr(C(A))$ contiene una 2-celda.

Demostración. Supongamos que T es un triodo simple en un continuo X . Sin perder generalidad podemos suponer que $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Sean $A = ([-\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ y $B = [-\frac{1}{2}, 0] \times \{0\}$. Denotemos $B_n = [-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, 0] \times \{0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim B_n = B$, B_n no está contenido en A y $B_{n+1} \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (1) del Teorema 1.80, se sigue que $B \in SB(A)$. Luego, por los incisos (2) y (3) del Teorema 1.79, se obtiene que $C(B, A)$ está contenido en $Fr(C(A))$.

Observemos que para cada elemento $E \in C(B, A)$ existe un único par (s, t) tal que $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ y $E = B \cup ([0, s] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, t])$. Esto define un homeomorfismo entre $C(B, A)$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Así, $C(B, A)$ es una 2-celda contenida en la frontera de $C(A)$. \square

7.3 Teorema. Un continuo no degenerado X es un arco o una curva cerrada simple si y sólo si para todo subcontinuo propio y no degenerado A de X se tiene que $Fr(C(A))$ es un arco.

Demostración. Necesidad: Supongamos que X es un arco o una curva cerrada simple, y tomemos un subcontinuo propio y no degenerado A de X . Notemos que A es un arco libre en X . Sean p y q los puntos extremos de A . Se tiene que $Fr(A) \subset \{p, q\}$. Por el Corolario 2.6, se sigue que $Fr(C(A)) \subset C(p, A) \cup C(q, A)$. En el Ejemplo 1.48 vimos que $C(p, A) \cup C(q, A)$ es un arco contenido en $C(A)$. Se sigue que $Fr(C(A))$ es un arco o un punto. Como A es no degenerado, por el Teorema 2.2, se tiene que $Fr(C(A))$ es un continuo no degenerado. Esto implica que $Fr(C(A))$ es un arco.

Suficiencia: Supongamos que para todo subcontinuo propio y no degenerado A de X se tiene que $Fr(C(A))$ es un arco. Por los Lemas 7.1 y 7.2, se sigue que X es un continuo localmente conexo que no contiene triodos

simples. Por el Teorema 1.36, se concluye que X es un arco o una curva cerrada simple. \square

7.4 Lema. Si A es un arco en un continuo X con puntos extremos p y q y $Fr(C(A)) - (F_1(A) \cup C(p, A) \cup C(q, A)) \neq \emptyset$, entonces $Fr(C(A))$ contiene una 2-celda.

Demostración. Tomemos un elemento B en $Fr(C(A)) - (F_1(A) \cup C(p, A) \cup C(q, A)) \neq \emptyset$. Se tiene que B es un arco contenido en A y $B \cap \{p, q\} = \emptyset$. A continuación analizamos dos casos:

(1) $B \in SB(A)$.

En este caso, por los incisos (2) y (3) del Teorema 1.79, se tiene que $C(B, A) \subset Fr(C(A))$. Por otra parte, tomemos un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $h(0) = p$ y $h(1) = q$. Existe un intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$ tal que $h([a, b]) = B$. Como B es un arco que no intersecta a los puntos extremos de A , observamos que $0 < a < b < 1$. Además, para cada $E \in C(B, A)$ existe un único par (s, t) tal que $0 \leq s \leq a < b \leq t \leq 1$ y $h([s, t]) = E$. Esto define un homeomorfismo entre $C(B, A)$ y el cuadrado $[0, a] \times [b, 1]$. Así, en este caso, se tiene que $C(B, A)$ es una 2-celda contenida en la frontera de $C(A)$.

(2) $B \in Fr(C(A)) - SB(A)$.

En este caso afirmamos que $C(B) \subset Fr(C(A))$. Para probar esto tomemos un elemento $E \in C(B)$. Por el Lema 3.1, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \cap A = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como B es un arco, por el Corolario 1.77, sabemos que B es un continuo absolutamente C^* -suave. Por esto existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim E_n = E$ y $E_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, véase la Nota 1.72. Como $B_n \cap A = \emptyset$, se tiene que $E_n \cap A = \emptyset$. Así, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$. Por el inciso (1) de la Proposición 2.1, se sigue que $E \in Fr(C(A))$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Por otra parte, como B es un arco, sabemos que $C(B)$ es una 2-celda, véase el Ejemplo 1.48. Así, en este segundo caso, se tiene que $C(B)$ es una 2-celda contenida en la frontera de $C(A)$. \square

7.5 Teorema. Un continuo no degenerado X es un arco si y sólo si para todo subcontinuo propio y no degenerado A de X se tiene que X es homeomorfo a $Fr(C(A))$.

Demostración. Necesidad: Supongamos que X es un arco y sea A un subcontinuo propio y no degenerado de X . Por el Teorema 7.3, se tiene que $Fr(C(A))$ es un arco. Así, X es homeomorfo a $Fr(C(A))$.

Suficiencia: Primero vamos a demostrar que:

(1) X es homeomorfo a un subcontinuo del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Sea A un subcontinuo propio y no degenerado de X . Por el Teorema 2.11, sabemos que $Fr(C(A))$ es un continuo arco conexo. Por hipótesis X es homeomorfo a $Fr(C(A))$, así X es un continuo arco conexo. Tomemos un arco B contenido propiamente en X . Notemos que $C(B)$ es una 2-celda (véase el Ejemplo 1.48) y que X es homeomorfo a $Fr(C(B))$ (por hipótesis). Esto prueba lo que decimos en (1).

Sean p y q los puntos extremos del arco B que tomamos en el párrafo anterior. A continuación probaremos que:

(2) $Fr(C(B)) - F_1(B) \subset C(p, B) \cup C(q, B)$.

Supongamos que (2) es falso y tomemos un elemento E en $Fr(C(B)) - F_1(B)$ tal que $E \cap \{p, q\} = \emptyset$. Por el Lema 7.4, $Fr(C(B))$ contiene una 2-celda \mathcal{D} . Como X es homeomorfo a $Fr(C(B))$, X contiene un subcontinuo D homeomorfo al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Tomemos un triodo simple T contenido en D . Notemos que si $H \in C(T)$, entonces existe una sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de la 2-celda D tal que $\lim H_n = H$ y $H_n \cap (D - T) \neq \emptyset$, i. e., $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X) - C(T)$, lo cual significa que $H \in Fr(C(T))$. Esto prueba que $Fr(C(T)) = C(T)$. Como por hipótesis X es homeomorfo a $Fr(C(T))$, se sigue que X es homeomorfo a $C(T)$. Por otra parte, sabemos que $C(T)$ contiene una 3-celda, véase el Ejemplo 1.50. Esto implica que X contiene un subcontinuo homeomorfo al cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, lo cual contradice (1). Esta contradicción demuestra lo que decimos en (2).

Ahora probaremos lo que sigue:

$$(3) F_1(B) \cap Fr(C(B)) \subset \{p, q\}.$$

Para probar (3) tomemos un punto $x \in B$ tal que $\{x\} \in Fr(C(B))$. Por el Teorema 2.11, existe un arco ordenado α en $Fr(C(B))$ desde $\{x\}$ hasta B . Por (2), para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha(\frac{1}{n}) \in C(p, B) \cup C(q, B)$, i. e. $p \in \alpha(\frac{1}{n})$ o $q \in \alpha(\frac{1}{n})$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $p \in \alpha(\frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim \alpha(\frac{1}{n}) = \alpha(0) = \{x\}$, por el inciso (2) del Teorema 1.46, se sigue que $p \in \{x\}$, es decir $x = p$. Esto demuestra (3).

Por (2) y (3) se tiene que $Fr(C(B)) \subset C(p, B) \cup C(q, B)$. Sabemos que $C(p, B) \cup C(q, B)$ es un arco en $C(B)$, véase el Ejemplo 1.48. Se sigue que $Fr(C(B))$ es un arco. Así, por la hipótesis, se concluye que X es un arco. \square

7.6 Teorema. Para un continuo X las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) El continuo X es una curva cerrada simple;
- (2) Para todo subcontinuo propio y no degenerado A de X , el conjunto $Fr(C(A)) \cap F_1(A)$ tiene exactamente dos elementos; y
- (3) Para todo subcontinuo propio y no degenerado A de X , el conjunto $Fr(C(A)) - \{A\}$ no es conexo.

Demostración. (1) \rightarrow (2) : Supongamos que X es una curva cerrada simple y sea A un subcontinuo propio y no degenerado de X . Se tiene que A es un arco libre en X . Sean a y b los puntos extremos de A . Notemos que $Fr(A) = \{a, b\}$. Por el Corolario 2.6, se sigue que $Fr(C(A)) = C(a, A) \cup C(b, B)$. Luego, $Fr(C(A)) \cap F_1(A) = \{\{a\}, \{b\}\}$. Esto prueba (2).

(2) \rightarrow (1) : Supongamos que X es un continuo que satisface la condición (2). Afirmamos que X es localmente conexo. Para ver esto supongamos que no es así. Por la Proposición 1.8 y el Teorema 1.70, se sigue que X contiene un continuo de convergencia A . Esto significa que A es un subcontinuo no degenerado de X y que existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$ y $A_n \cap A = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De estas condiciones, y del inciso (1) del Teorema 1.46, se sigue que $Fr(A) = A$. Luego, por el inciso

(2) de la Proposición 2.1, se tiene que $F_1(A) \subset Fr(C(A))$. Se obtiene que $Fr(C(A)) \cap F_1(A) = F_1(A)$, en contradicción con la condición (2). Esto prueba que X es localmente conexo.

Afirmamos que X no contiene triodos simples. Para probar esta segunda afirmación supongamos que X contiene un triodo simple T . Sin perder generalidad podemos suponer que $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Denotemos $A = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}])$. Notemos que los puntos $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ pertenecen a $Fr(A)$. Luego, por el inciso (2) de la Proposición 2.1, se sigue que $\{(-\frac{1}{2}, 0)\}, \{(\frac{1}{2}, 0)\}, \{(0, \frac{1}{2})\} \subset Fr(C(A))$. Así, el conjunto $Fr(C(A)) \cap F_1(A)$ tiene por lo menos tres elementos, en contradicción con la condición (2). Esto prueba que X no contiene triodos simples.

Hemos demostrado que si X cumple la condición (2), entonces X es localmente conexo y no contiene triodos simples. Por el Teorema 1.36, se obtiene que X es un arco o una curva cerrada simple. Supongamos que X es un arco. Sin perder generalidad podemos suponer que $X = [0, 1]$. Sea $A = [0, \frac{1}{2}]$. Notemos que $Fr(C(A)) = C(\frac{1}{2}, A)$. Se tiene que $Fr(C(A)) \cap F_1(A) = \{\{\frac{1}{2}\}\}$. Esto implica que un arco no satisface la condición (2). Esto demuestra que si un continuo X cumple la condición (2), entonces X es una curva cerrada simple.

(1) \rightarrow (3) : Supongamos que X es una curva cerrada simple y sea A un subcontinuo propio y no degenerado de X . Se tiene que A es un arco en X . Sean a y b los puntos extremos de A . Como en la prueba de (1) \rightarrow (2), notamos que $Fr(C(A)) = C(a, A) \cup C(b, A)$. Observemos que $C(a, A)$ es un arco en $C(A)$ con puntos extremos $\{a\}$ y A ; similarmente $C(b, A)$ es un arco en $C(A)$ con puntos extremos $\{b\}$ y A ; además, $C(a, A) \cap C(b, A) = \{A\}$. Se sigue que $Fr(C(A))$ es un arco en $C(A)$ con puntos extremos $\{a\}$ y $\{b\}$. Como $A \in Fr(C(A)) - \{\{a\}, \{b\}\}$, se concluye que el conjunto $Fr(C(A)) - \{A\}$ no es conexo.

(3) \rightarrow (1) : Supongamos que X es un continuo que satisface la condición (3). Probaremos que X es localmente conexo. Para esto suponemos lo contrario y, como en la prueba de (2) \rightarrow (1), obtenemos que X contiene un subcontinuo no degenerado A tal que $F_1(A) \subset Fr(C(A))$.

Afirmamos que la componente de $Fr(C(A)) - \{A\}$ que contiene a $F_1(A)$

es $Fr(C(A)) - \{A\}$. Para probar esto tomemos un elemento $B \in Fr(C(A)) - (\{A\} \cup F_1(A))$ y una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ en $C(X) - C(A)$ tal que $\lim B_n = B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos un punto $x_n \in B_n - A$. Sin perder generalidad podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a un punto $x \in X$. Por el inciso (1) del Teorema 1.46 se tiene que $x \in B$. Como B no está en $F_1(A)$, observamos que $B \neq \{x\}$. Luego, como $\lim B_n = B$ y $\lim \{x_n\} = \{x\}$, sin perder generalidad podemos suponer que $B_n \neq \{x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 1.54, podemos tomar un arco ordenado α_n en $C(X)$ desde $\{x_n\}$ hasta B_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{\alpha_n([0, 1])\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(C(X))$ y, por la compacidad de este hiperespacio, podemos suponer que existe un elemento Λ en $C(C(X))$ tal que $\lim \alpha_n([0, 1]) = \Lambda$. Como $\{x_n\}$ y B_n pertenecen a $\alpha_n([0, 1])$, por el inciso (1) del Teorema 1.46, se tiene que $\{x\}$ y B pertenecen a Λ . Además, también por el inciso (1) de ese mismo teorema, para cada $E \in \Lambda$ existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ en $C(X)$ tal que $\lim E_n = E$ y $E_n \in \alpha_n([0, 1])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $x_n \in E_n$ y, en consecuencia, E_n no está contenido en A , para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(X) - C(A)$. Se sigue que $E \in Fr(C(A))$. Por otra parte, observamos que $E_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.46 se sigue que $E \subset B$. Dado que $B \neq A$, se tiene que $E \neq A$. Esto demuestra que $\Lambda \subset Fr(C(A)) - \{A\}$. En resumen, se tiene que Λ es un continuo en $C(X)$ tal que $B \in \Lambda \subset Fr(C(A)) - \{A\}$ y $\Lambda \cap F_1(A) \neq \emptyset$. Esto demuestra nuestra afirmación, es decir que la componente del conjunto $Fr(C(A)) - \{A\}$ que contiene a $F_1(A)$ es este mismo conjunto.

Por lo anterior se tiene que $Fr(C(A)) - \{A\}$ es un conjunto conexo, en contradicción con la condición (3). Esto prueba que X es localmente conexo.

A continuación probaremos que X no contiene triodos simples. Para esto suponemos lo contrario, que X contiene un triodo simple T . Sin perder generalidad podemos suponer que $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Denotemos $A = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}])$, $p = (-\frac{1}{2}, 0)$ y $q = (\frac{1}{2}, 0)$. Se tiene que A es un subtriodo de T y que p y q son dos de sus puntos extremos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $B_n = [-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, -\frac{1}{2}] \times \{0\}$. Observamos que $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim B_n = \{p\}$, B_n no está contenido en A y $B_{n+1} \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (1) del Teorema 1.80, se tiene que $\{p\} \in SB(A)$. Similarmente se prueba que $\{q\}$ pertenece a $SB(A)$.

Probaremos que $SB(A) - \{A\}$ es un conjunto conexo. Para esto, denote-

mos por \mathcal{C} a la componente de $SB(A) - \{A\}$ que contiene a $\{p\}$. Tomemos un arco ordenado α en $C(X)$ desde $\{p\}$ hasta $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$. Por el inciso (2) del Teorema 1.79, sabemos que $\alpha(t) \in SB(A)$ para todo $t \in [0, 1]$. Como $\alpha(t) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$, se sigue que $\alpha([0, 1])$ es un arco en $SB(A) - \{A\}$ que contiene a $\{p\}$ y a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$. Así, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\} \in \mathcal{C}$. Ahora tomamos un arco ordenado β en $C(X)$ desde $\{q\}$ hasta $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$. Con argumentos similares a los previos, se obtiene que $\beta([0, 1])$ es un arco en $SB(A) - \{A\}$ que contiene a $\{q\}$ y a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$, de lo cual se sigue que $\{q\} \in \mathcal{C}$.

Tomemos un elemento arbitrario $D \in SB(A) - \{A\}$ distinto de $\{p\}$ y $\{q\}$. Observemos que si $p \in D$, tomando un arco ordenado desde $\{p\}$ hasta D concluimos que $D \in \mathcal{C}$. En lo que sigue supongamos que $p \notin D$. Tomemos un número $t \in (-\frac{1}{2}, 0]$ tal que $[-\frac{1}{2}, t] \cap D = \emptyset$, y denotemos $E = ([t, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}])$. Observemos que E es un subcontinuo propio de A y que D es un subcontinuo propio de E . Sean γ y η arcos ordenados en $C(X)$ desde $\{q\}$ hasta E y desde D hasta E , respectivamente. Como en argumentos anteriores, por el inciso (2) del Teorema 1.79, se tiene que $\gamma([0, 1])$ es un arco en $SB(A) - \{A\}$ que contiene a $\{q\}$ y a E . Como $\{q\} \in \mathcal{C}$, se sigue que $E \in \mathcal{C}$. Similarmente, $\eta([0, 1])$ es un arco en $SB(A) - \{A\}$ que contiene a E y a D , de lo cual se sigue que $D \in \mathcal{C}$. Esto demuestra que $\mathcal{C} = SB(A) - \{A\}$. Así, $SB(A) - \{A\}$ es un conjunto conexo.

Como X es localmente conexo, por la equivalencia entre (1) y (4) del Teorema 3.11, sabemos que $SB(A) = Fr(C(A))$. Así, por lo anterior, se tiene que $Fr(C(A)) - \{A\}$ es un conjunto conexo, lo cual es una contradicción con la condición (3). Ésta demuestra que X no contiene triodos simples.

Hemos demostrado que la condición (3) implica que X es localmente conexo y que no contiene triodos simples. Por el Teorema 1.36, se sigue que X es un arco o una curva cerrada simple. Supongamos que X es un arco. Sin perder generalidad podemos suponer que $X = [0, 1]$. Denotemos $A = [0, \frac{1}{2}]$. Observemos que $Fr(C(A)) = C(\frac{1}{2}, A)$. Como $C(\frac{1}{2})$ es un arco en $C(A)$ y A es uno de sus puntos extremos, se sigue que $Fr(C(A)) - \{A\}$ es un conjunto conexo. Esto prueba que un arco no satisface la condición (3). Así, si X es un continuo que cumple la condición (3), entonces X es una curva cerrada simple. \square

Referencias

- [1] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, Textos Nivel Medio, 28, 2004.
- [2] A. Illanes, *Semi-boundaries in hyperspaces*, Topology Proc. Vol. 16, (1991), 63-87.
- [3] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.
- [4] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [5] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [7] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Providence, Rhode Island, 1942.