



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESTRUCTURA DE CIRCUITOS DE MATROIDES INTERCALADOS  
COMPLETOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:  
MARINA DURÁN OROZCO

DIRECTOR DE LA TESIS:  
DR. GILBERTO CALVILLO VIVES  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA, UNAM

MÉXICO, D.F. (6 DE FEBRERO DE 2015)



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi abuela, que me dio un gran ejemplo de vida.



# Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que hicieron posible la culminación de mis estudios de maestría, espero no olvidar a nadie.

En primer lugar a Dios por nunca abandonarme aún cuando yo lo he hecho, gracias Señor por ponerme con personas tan maravillosas de las cuales he aprendido tanto.

A Gilberto Calvillo Vives por su esfuerzo, dedicación y paciencia. Doctor, gracias por el enorme apoyo que me ha brindado y por presentarme a los Matroides. Gracias por estar siempre ahí para guiarme, aconsejarme y sobretodo gracias por aguantarme durante todo este tiempo.

A mis padres, gracias por todo su apoyo incondicional, pero sobre todo gracias por el amor, la educación y los valores que nos inculcaron.

A mis hermanas, gracias por haber sido unos de mis modelos a seguir, por estar siempre pendiente de mí y ¿Por qué no? gracias por las llamadas de atención, las amo.

A Gerino, gracias por aparecer en mi vida, gracias por acompañarme en este camino, por ser mi amigo y mi pareja, gracias por ser mi compañero de vida.

A mi familia muégano, gracias por todo el amor que me han dado, le agradezco a Dios el haberme puesto en esta familia y el darme la oportunidad de conocer a esa magnífica mujer a la cual pude gloriarme de llamar abuela. Los amo familia a todos y cada uno de ustedes.

Así mismo quiero agradecer a mis amigos: Lydia, Sist gracias por que a pesar de la distancia siempre has estado conmigo; Karliux gracias por tu amistad la cual espero que continúe por mucho tiempo más; Antonio, gracias por estar siempre conmigo, por aconsejarme, por escucharme y por tu grandiosa amistad; Pedro, mi mma, gracias por tu amistad, por los buenos momentos que pasamos juntos y por todas las sonrisas; Alejandro, gracias por aguantarme tantos años, por ser mi primer hogar en Cuernavaca

y sobre todo por tu amistad; Lupita, gracias por tu amistad y compañía, gracias por permitirme ser parte de tu vida.

Un agradecimiento especial a Elizabeth Dominguez Soto, por su amistad y por estar siempre al pendiente de los estudiantes, por ayudarnos con todos los trámites, por recomendarnos para becas, gracias mi Liz, sin ti este trabajo no sería posible.

A mis maestros: Dra. Takane, gracias por todo el apoyo que me brindó siempre, por presentarme a Gilberto y a los matroides, estoy infinitamente agradecida con usted; A Carlos Cabrera, Jose Luis Cisneros, Adolfo Guillot y Aubin Arrollo por ser mis maestros durante la maestría, gracias por todo lo que me enseñaron. Aubin y Adolfo en particular gracias por aguantarnos a Pedro y a mi en clase juntos. Gracias a todos los Investigadores del IMATE Cuernavaca, por siempre tener las puertas de sus cubículos abiertas, para cualquier duda.

Agradezco también a mis sinodales: José Luis Cisneros, David Romero, Isabel Hubbard y Criel Merino por las observaciones, sugerencias y correcciones que enriquecieron esta tesis.

Agradezco a CONACyT por otorgarme la beca para realizar mis estudios de maestría.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por medio del proyecto IN101211 “Dinámica y geometría compleja”.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Notación</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Matroides</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones y Resultados Generales . . . . .	1
1.1.1. Conjuntos Independientes y Circuitos . . . . .	1
1.1.2. Bases . . . . .	7
1.1.3. Rango . . . . .	12
1.1.4. Cerradura . . . . .	16
1.1.5. Dualidad . . . . .	20
1.2. Matroides Binarios . . . . .	25
1.2.1. Matroides Eulerianos y Bipartitos . . . . .	31
<b>2. Matrices Intercaladas</b>	<b>33</b>
2.1. Definición y Resultados Principales . . . . .	33
2.2. Matrices Intercaladas Diádicas $D_n$ . . . . .	34
2.2.1. La Estructura Recursiva de $D_n$ . . . . .	36
2.3. Criterios para reconocer Matrices Diádicas . . . . .	37
2.3.1. Criterio de Cointercalaciones . . . . .	37
2.3.2. Criterio de Intercalaciones . . . . .	38
2.4. Matrices Intercaladas No Diádicas . . . . .	40

2.5. El Problema de Signado de una Matriz . . . . .	41
<b>3. Matroides Intercalados</b>	<b>45</b>
3.1. Los Matroides Intercalados y su Relación con el Signado de Matrices Intercaladas . . . . .	45
<b>4. Mapeos Combinatorios y Circuitos de Matroides Intercalados</b>	<b>55</b>
4.1. Definiciones. . . . .	55
4.1.1. Dibujo de Mapeos . . . . .	61
4.2. Mapeos Combinatorios de Circuitos de Matroides Intercalados . . . . .	62
<b>5. Estructura de los Circuitos de Matroides Intercalados</b>	<b>73</b>
5.1. El Matroide $\mathcal{M}(D_2)$ y sus Circuitos . . . . .	74
5.1.1. Circuito Fundamental $C(A_9, B)$ . . . . .	77
5.1.2. Circuito Fundamental $C(A_{12}, B)$ . . . . .	84
5.1.3. Circuito Fundamental $C(A_8, B)$ . . . . .	85
5.1.4. Circuito Fundamental $C(A_{11}, B)$ . . . . .	86
5.2. Espacio de Circuitos del Matroide $\mathcal{M}(D_2)$ . . . . .	87
5.3. El Matroide $\mathcal{M}(D_3)$ y sus Circuitos . . . . .	89
5.4. Caso General . . . . .	110
<b>6. Conclusiones y Conjeturas</b>	<b>113</b>
<b>A. Implementación del algoritmo</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>127</b>

# Notación

- $C(B, e)$  Circuito fundamental de  $e$  con respecto a la base  $B$ . 10
- $E(\mathcal{M})$  Conjunto base  $E$  del matroide  $\mathcal{M}$ . 2
- $U_{m,n}$  Matroide uniforme de rango  $m$  en un conjunto de  $n$  elementos. 12
- $V(m, F)$  Espacio vectorial de dimensión  $m$  sobre el campo  $F$ . 2
- $\mathcal{B}$  Familia de bases de un matroide. 8
- $\mathcal{C}$  Familia de circuitos de un matroide. 3
- $\mathcal{I}$  Familia de subconjuntos independientes de un matroide. 1
- $\mathcal{J}(\mathcal{M})$  Familia de subconjuntos independientes del matroide  $\mathcal{M}$ . 2
- $\mathcal{M}(E)$  Matroide en  $E$ . 2
- $\mathcal{M}|_X$  La resticción de un matroide  $\mathcal{M}$  a  $X$ . 13
- $\mathcal{M}^*(E)$  El matroide dual de  $\mathcal{M}(E)$ . 21
- $\mathbf{r}$  Función rango de un matroide. 13
- $cl(X)$  La cerradura del conjunto  $X$ . 16



# Introducción

La presente tesis surge como continuación de los trabajos hechos por Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler y Jose Martínez-Bernal [CGMB97a], [CGMB97b] en éstos se dan condiciones necesarias y suficientes para reconocer a un tipo especial de matrices llamadas *Matrices Diádicas*. Dichas matrices aparecen al tratar de resolver el problema de composición de formas cuadráticas.

La teoría de composición de formas cuadráticas sobre campos comenzó en el Siglo XIX con la búsqueda de identidades  $n$ -cuadradas del tipo

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

donde  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  son sistemas de indeterminados y cada  $z_k = z_k(X, Y)$  es una forma bilineal en  $X$  e  $Y$ .

La identidad 2-cuadrada puede interpretarse como la multiplicación de módulos de los números complejos.

El problema de composición de formas cuadradas está relacionado con las álgebras de división normadas; si tenemos una identidad  $n$ -cuadrada obtenemos un álgebra de división normada y viceversa.

Sir William Rowan Hamilton buscaba encontrar un álgebra de división normada de dimensión 3, sin embargo, la imposibilidad de tal condición ya había sido probada en 1830 por Legendre en su libro *Essai sur la théorie des nombres* [Leg09]. Fue en Octubre de 1843, mientras Hamilton caminaba con su esposa por el Canal Real dirigiéndose a una reunión de la Academia Real Irlandesa en Dublín, Irlanda, cuando una idea llegó a su mente y en un acto de vandalismo matemático grabó las siguientes ecuaciones en el Puente de Brougham:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Con esto demostró la existencia de un álgebra de división normada no conmutativa de dimensión 4, a la cual conocemos por el nombre de cuaternios. Cabe mencionar que en 1748 Leonhard Euler usó una identidad 4-cuadrada en un intento de probar que todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados; esta identidad se interpreta como la multiplicación de módulos de los cuaternios.

Después del descubrimiento de su amigo Hamilton, John T. Graves comenzó a trabajar con la idea de generalizar los cuaternios y en Diciembre de 1843 Graves le escribió a Hamilton para contarle de una nueva álgebra de división de dimensión 8, para la cual había encontrado una manera de escribir la multiplicación de dos sumas de 8 cuadrados perfectos como otra suma de 8 cuadrados perfectos [Ham67]. Es decir, había encontrado una identidad 8-cuadrada. Tal identidad ya había sido encontrada en 1818 por Degran en Rusia, pero su trabajo no era muy conocido. Graves buscaba generalizar esta idea en dimensión  $2^m$ , así que se dedicó a buscar una generalización para dimensión 16, pero comenzó a dudar que esto fuese posible. Simultáneamente Artur Cayley, después de haber leído sobre el descubrimiento de los cuaternios, comenzó a estudiar las relaciones de las funciones hiperelípticas y los cuaternios. En 1845 publicó un artículo en el cual hacía una breve descripción de los octonios [Cay45]. Debido a la falta de interés de Hamilton el artículo de Cayley fue publicado antes que el artículo de Graves. A pesar de que el descubrimiento de Graves había sido desde 1843 y que Hamilton había respaldado las afirmaciones de Graves ante la comunidad matemática, ya era demasiado tarde, los octonios eran ya conocidos como números de Cayley.

En 1898 Hurwitz publicó un artículo para estas identidades [Hur98]. Mostró que existía una identidad  $n$ -cuadrada con coeficientes complejos si y sólo si  $n = 1, 2, 4, 8$ . Su prueba involucraba álgebra lineal elemental, pero su uso de matrices e independencia lineal no era muy conocida en 1898. Con este teorema Hurwitz probó que las únicas álgebras de división normadas son: los números reales  $\mathbb{R}$ , los números complejos  $\mathbb{C}$ , los cuaternios  $\mathbb{H}$  y los octonios  $\mathbb{O}$ . Al final de su artículo Hurwitz postuló un problema general: ¿Para cuáles enteros  $r, s, n$  existe una fórmula de composición  $[r, s, n]$ ?:

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

donde  $X = (x_1, \dots, x_r)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_s)$  son sistemas de indeterminados y cada  $z_k = z_k(X, Y)$  es una forma bilineal en  $X$  e  $Y$ .

Después del planteamiento de este problema, muchos matemáticos se dedicaron a

buscar condiciones para las cuales existiera una fórmula de composición del tipo  $[r, s, n]$ . Existen varios métodos para construir fórmulas de sumas de cuadrados y la mayoría usa coeficientes enteros. Un método para realizar estas construcciones es usar la terminología de matrices intercaladas para reescribir el problema de composición de fórmulas.

Sea  $M$  una matriz de  $r \times s$  y  $M(i, j)$  la entrada que se encuentra en el renglón  $i$  y la columna  $j$  de  $M$ . Decimos que  $M$  es una matriz intercalada si:

- (a) Sus entradas en cada renglón y cada columna son distintas.
- (b) Si  $M(i, j) = M(i', j')$  entonces  $M(i, j') = M(i', j)$ .

Una matriz intercalada es del tipo  $(r, s, n)$  si es una matriz de  $r \times s$  y tiene a lo más  $n$  entradas distintas. Las submatrices de tamaño  $2 \times 2$  de una matriz intercalada que tienen exactamente dos entradas distintas son llamadas intercalaciones, mientras que las que tienen cuatro entradas distintas, son llamadas cointercalaciones.

Yuzvinsky [Yuz81] replanteó el problema de composición  $[r, n, s]_{\mathbb{Z}}$  como sigue:

- (a) ¿Para que valores  $r, s, n$  existe una matriz intercalada del tipo  $(r, s, n)$ ?
- (b) Dada una matriz intercalada, ¿cuándo es signable?

Decimos que una matriz intercalada es signable, si se pueden asignar signos menos en algunas de las entradas de la matriz intercalada de tal forma de que todas las intercalaciones tengan un número impar de signos menos. El trabajo de Yuzvisnky fue considerablemente extendido por los trabajos de Yiu [Yiu87], en los que investigó el aspecto combinatorio de las matrices intercaladas y su signado.

Un caso particular de matrices intercaladas son las matrices del tipo  $(2^n, 2^n, 2^n)$ , las cuales son llamadas *matrices diádicas*. Una matriz intercalada es diádica si es isotópica a una tabla de Cayley de un grupo de exponente 2. Donde dos matrices  $M$  y  $M'$  son isotópicas si puede transformarse una en la otra por medio de operaciones elementales y posiblemente por un renombramiento de sus entradas.

En este trabajo hacemos un análisis de las matrices diádicas  $D_n$  desde el punto de vista de matroides. Los matroides que surgen de las matrices diádicas los llamamos matroides diádicos, los cuales se obtienen a partir de la matriz diádica  $D_n$  de la siguiente manera: a la matriz diádica le asociamos una hipergráfica, después encontramos la matriz de incidencia de la hipergráfica y consideramos el matroide vectorial binario asociado a esta matriz y lo denotamos por  $\mathcal{M}(D_n)$ .

Buscamos, entre otras cosas, analizar los circuitos de estos matroides desde un punto de vista topológico. Isidoro Gitler [Git00] hizo una compilación de varias ideas y trabajos realizados con Gilberto Calvillo sobre matrices intercaladas. En este artículo aparecen resultados acerca de la trialdad de los mapeos de Tutte. Un mapeo de Tutte es un mapeo combinatorio que nos permite analizar los circuitos que surgen de los matroides diádicos. En esta compilación se observa que algunos de los circuitos que se obtienen de los matroides diádicos son superficiales. Nosotros queremos continuar con este análisis para ver qué superficies pueden obtenerse a partir de los circuitos fundamentales de estos matroides. Por ello analizamos cada uno de los circuitos fundamentales que se obtienen de los matroides diádicos  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  mediante dos métodos: los mapeos de Tutte y mediante un proceso topológico que surge de la topología cociente. El matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  cuenta con 8 circuitos fundamentales, por lo que en el capítulo cinco se muestra el análisis de cada uno de ellos. El matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  cuenta con 67 circuitos fundamentales, así que mientras el análisis se hizo para cada uno de ellos, incluir en este trabajo el análisis paso a paso de cada uno de los circuitos fundamentales, parece no tener mucho sentido. Por ello decidimos explicar con el análisis de uno de sus circuitos paso a paso hasta llegar a la superficie que forma y resumir para los demás circuitos en forma de tablas la superficie en la cual se encajan.

Más aún, buscamos probar que todo circuito en los matroides diádicos  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  puede verse como diferencia simétrica de sus circuitos más pequeños, que son los de tamaño seis. Marcel Wild [Wil93] probó que la clase de matroides binarios simples también puede caracterizarse a partir de los circuitos cerrados de un matroide. En el presente trabajo mostramos que para los matroides diádicos  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  los circuitos de tamaño 6 son cerrados y generan los circuitos del matroide; sin embargo, existen circuitos cerrados de tamaño mayor que 6, por lo que nuestro resultado no se sigue de manera directa del artículo de Marcel Wild.

La estructura de esta tesis es la siguiente:

En el capítulo uno hacemos un estudio de las definiciones principales de la teoría de matroides.

El capítulo dos estudia las definiciones y algunos resultados importantes de matrices intercaladas y abordamos el problema de signado de matrices intercaladas y su relación con el problema de formas cuadráticas.

En el capítulo tres definimos los matroides intercalados y su relación con el problema de signado de matrices intercaladas.

En el capítulo cuatro estudiamos los mapeos combinatorios de Tutte, los cuales serán necesarios para el estudio de los circuitos que surgen del matroide diádico  $\mathcal{M}(D_2)$ .

Los resultados principales de la tesis aparecen en el capítulo cinco, en el cual presentamos un análisis completo de los circuitos del matroide diádico  $\mathcal{M}(D_2)$ , caracterizamos los circuitos del matroide diádico de  $8 \times 8$  y mostramos que nuestra conjetura es cierta para los matroides  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$ .

Finalmente, en el capítulo seis presentamos las conclusiones y conjeturas de este trabajo.

Se incluye un apéndice en el cual aparece la implementación del algoritmo que se utilizó para los cálculos de las matrices de incidencia y reducción sobre  $\mathbb{Z}_2$  de las mismas.



# Capítulo 1

## Matroides

Con el objeto de que esta tesis sea autocontenida, en este capítulo presentamos definiciones y resultados conocidos de la teoría de matroides que serán utilizados en la tesis. La terminología y definiciones que utilizamos para el desarrollo de esta sección provienen del libro *Matroid Theory*, de J.G. Oxley [Oxl92].

### 1.1. Definiciones y Resultados Generales

Hay varias maneras equivalentes de definir un matroide. En esta sección utilizaremos la definición de matroide a partir de sus subconjuntos independientes y a partir de ésta probaremos su equivalencia con otras definiciones.

#### 1.1.1. Conjuntos Independientes y Circuitos

**Definición 1.1.1.** Un **matroide**  $\mathcal{M}$  es un par ordenado  $(E, \mathcal{J})$  que consiste de un conjunto finito  $E$  y una colección  $\mathcal{J}$  de subconjuntos de  $E$  llamados **conjuntos independientes**, tales que las siguientes condiciones se satisfacen:

(I1)  $\emptyset \in \mathcal{J}$ .

(I2) Si  $X \in \mathcal{J}$  y  $Y \subseteq X$  entonces  $Y \in \mathcal{J}$ .

(I3) Si  $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$  con  $|I_1| < |I_2|$  entonces existe  $x \in I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ .

Un subconjunto de  $E$  que no pertenezca a  $\mathcal{J}$  es llamado **dependiente**.

Si  $\mathcal{M}$  es el matroide  $(E, \mathcal{J})$ , entonces  $\mathcal{M}$  es llamado un matroide en  $E$ . Los elementos de  $\mathcal{J}$  son llamados los conjuntos independientes de  $\mathcal{M}$  y  $E$  es llamado el conjunto base

de  $\mathcal{M}$ . Frecuentemente escribiremos  $\mathcal{M}(E)$  en lugar de  $(E, \mathcal{J})$ ,  $\mathcal{J}(\mathcal{M})$  por  $\mathcal{J}$  y  $E(\mathcal{M})$  por  $E$  en particular cuando consideremos varios matroides y resulte necesario tener una manera de especificar de cual de los matroides estamos hablando.

El término “matroide” fue ideado por Whitney [Whi35], ya que una clase fundamental de ejemplos de estos objetos surge de las matrices en la siguiente manera.

**Proposición 1.1.2.** *Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  con entradas en un campo  $F$  y sea  $E$  el conjunto de etiquetas para las columnas de  $A$ . Definimos  $\mathcal{J}$  como el conjunto de los subconjuntos  $X$  de  $E$  tales que las columnas asociadas a los índices de  $X$  son linealmente independientes en el espacio vectorial  $V(m, F)$ . Entonces  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide.*

**Demostración:** Es fácil ver que  $\mathcal{J}$  cumple **(I1)** e **(I2)**. Para probar **(I3)** sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$ . Sea  $W$  el subespacio generado en  $V(m, F)$  por el conjunto  $I_1 \cup I_2$ . Entonces  $\dim W$  la dimensión de  $W$  es al menos  $|I_2|$ . Supongamos ahora que para toda  $x \in I_2 - I_1$  se tiene que  $I_1 \cup \{x\}$  es linealmente dependiente. De lo anterior tenemos que  $W \subseteq \text{Span}(I_1)$ , por lo que  $|I_2| \leq \dim W < |I_1| < |I_2|$ ; lo que es una contradicción. Por lo que podemos concluir que existe  $x \in I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ . ■

Los matroides obtenidos como en la proposición 1.1.2 son llamados **matroides vectoriales**. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.1.** Sea  $A \in M_{2 \times 5}(\mathbb{R})$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y su colección de subconjuntos independientes es:

$$\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Por lo que la colección de subconjuntos dependientes del matroide está dada por:

$$\{\{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\} \cup \{X \subseteq E : |X| \geq 3\}$$

en esta colección tenemos elementos con una característica especial, por ejemplo, el subconjunto  $\{1, 4\}$  cumple que cualquier subconjunto propio de él es un subconjunto independiente, por lo cual decimos que el conjunto  $\{1, 4\}$  es un subconjunto dependiente minimal del matroide.

La colección de subconjuntos dependientes minimales de este matroide vectorial aparece enseguida:

$$\{\{5\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

□

Los subconjuntos dependientes minimales de  $\mathcal{M}$  son llamados **circuitos**. A la colección de los circuitos de un matroide lo denotaremos por  $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ , o simplemente  $\mathcal{C}$  cuando del contexto no sea necesario indicar el matroide.

Del ejemplo 1.1 podemos ver que una vez que tenemos los conjuntos independientes del matroide, podemos obtener sus circuitos. De la misma manera, podemos definir el matroide por medio de sus circuitos y de ellos obtener los conjuntos independientes. Veamos algunas propiedades de  $\mathcal{C}$ . Es fácil ver que

**(C1)**  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

**(C2)** Si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  y  $C_1 \subseteq C_2$ , entonces  $C_1 = C_2$ .

Más aún:

**Lema 1.1.3.** *El conjunto  $\mathcal{C}$  de circuitos de un matroide cumple con la siguiente propiedad:*

**(C3)** *Si  $C_1$  y  $C_2$  son miembros distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_1 \cap C_2$ , entonces existe un circuito  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$ .*

**Demostración:** Supongamos que  $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$  no contiene ningún circuito. Entonces  $(C_1 \cup C_2) - \{e\} \in \mathcal{J}$ , como  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos distintos, por **(C2)** sabemos que  $C_2 - C_1$  es no vacío. Sea  $f \in C_2 - C_1$ , como  $C_2$  es un dependiente minimal tenemos que  $C_2 - \{f\} \in \mathcal{J}$ . Sea  $I \subseteq C_1 \cup C_2$  con  $I \in \mathcal{J}$ , el conjunto más grande que contiene a

$C_2 - \{f\}$ . Como  $C_1$  es un circuito, existe un elemento  $g$  en  $C_1$  que no pertenece a  $I$ . Luego, dado que  $f \in C_2 - C_1$  tenemos que  $g$  y  $f$  son elementos distintos. De aquí que:

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) - \{f, g\}| < |(C_1 \cup C_2) - \{e\}|$$

por la propiedad **(I3)** existe un elemento  $h$  en  $[(C_1 \cup C_2) - \{e\}] - \{I\}$  tal que  $I \cup \{h\} \in \mathcal{J}$  lo cual contradice la maximalidad de  $I$ . ■

A continuación mostraremos que  $(C_1) - (C_3)$  caracteriza la colección de circuitos de un matroide.

**Teorema 1.1.4.** *Sea  $E$  un conjunto y  $\mathcal{C}$  la colección de subconjuntos de  $E$  que satisface  $(C_1) - (C_3)$ . Sea  $\mathcal{J}$  la colección de subconjuntos de  $E$  que no contiene miembros de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide que tiene a  $\mathcal{C}$  como su colección de circuitos.*

**Demostración:** Queremos mostrar que  $\mathcal{J}$  satisface **(I1)**-**(I3)**. Es fácil ver que las propiedades **(I1)** e **(I2)** se cumplen. Por lo que resta mostrar que **(I3)** se satisface. Sean  $I_1$  e  $I_2$  miembros de  $\mathcal{J}$  con  $|I_1| < |I_2|$ . Supongamos que para todo  $e \in I_2 - I_1$  se tiene que  $I_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{J}$ . Observemos que  $\mathcal{J}$  tiene un subconjunto  $I_3$  de  $I_1 \cup I_2$  el cual contiene más elementos que  $I_1$ , al menos  $I_2$  cumple esta condición, y escogemos dicho conjunto con la propiedad de que  $|I_1 - I_3|$  sea minimal.

Como **(I3)** no se cumple,  $I_1 - I_3$  es no vacío, ya que si lo fuese entonces  $I_1 \subseteq I_3$  y como  $I_3$  tiene mas elementos que  $I_1$  entonces existiría un elemento  $x \in I_2$  tal que  $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ . Podemos entonces escoger un elemento  $e$  en  $I_1 - I_3$ . Ahora, para cada elemento  $f$  de  $I_3 - I_1$  sea  $T_f = (I_3 \cup \{e\}) - \{f\}$  entonces  $T_f \in I_1 \cup I_2$  y  $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_3|$  por lo que  $T_f \notin \mathcal{J}$  ya que  $I_3$  es el que hace  $|I_1 - I_3|$  minimal. Entonces  $T_f$  contiene un miembro  $C_f$  de  $\mathcal{C}$ . Más aún  $e \in C_f$ , de otro modo  $C_f \subseteq I_3$  contradiciendo el hecho de que  $I_3 \in \mathcal{J}$ . Sea  $g \in I_3 - I_1$  entonces  $C_g \subseteq (I_3 \cup \{e\}) - \{g\}$ ; si  $C_g \cap (I_3 - I_1) = \emptyset$  tenemos que  $C_g \subseteq ((I_1 \cap I_3) \cup \{e\}) - \{g\} \subseteq I_1$  lo cual es una contradicción ya que  $I_1 \in \mathcal{J}$ , de aquí que existe  $h \in C_g \cap (I_3 - I_1)$ . Luego, como  $e \in C_g \cap C_h$  y por **(C3)** existe  $C$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $C \subseteq (C_g \cup C_h) - \{e\}$ , pero  $C_g$  y  $C_h$  son subconjuntos de  $I_3 \cup \{e\}$  lo que implica que  $C \subseteq I_3$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto **(I3)** se cumple. Entonces  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide  $\mathcal{M}$ .

Para probar que  $\mathcal{C}$  es  $\mathcal{C}(\mathcal{M})$  la colección de circuitos de  $\mathcal{M}$ , observamos que los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i)  $C$  es un circuito de  $\mathcal{M}$ ;
- (ii)  $C \notin \mathcal{J}(\mathcal{M})$  y  $C - \{x\} \in \mathcal{J}(\mathcal{M})$  para toda  $x \in C$ ;
- (iii)  $C$  tiene un miembro  $C'$  de  $\mathcal{C}$  como un subconjunto, pero  $C'$  no es un subconjunto propio de  $C$ ;
- (iv)  $C \in \mathcal{C}$ . ■

Combinando el teorema 1.1.4, el lema 1.1.3 y las observaciones anteriores obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 1.1.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  un conjunto de subconjuntos de  $E$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es la colección de circuitos de un matroide en  $E$  si y sólo si  $\mathcal{C}$  satisface las siguientes condiciones:*

- (C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .
- (C2) Si  $C_1$  y  $C_2$  pertenecen a  $\mathcal{C}$  y  $C_1 \subseteq C_2$  entonces  $C_1 = C_2$ .
- (C3) Si  $C_1$  y  $C_2$  son miembros distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_1 \cap C_2$  entonces existe  $C_3$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$ . ■

La siguiente es una proposición elemental, pero muy utilizada de los matroides

**Proposición 1.1.6.** *Sea  $I$  un conjunto independiente de un matroide  $\mathcal{M}(E)$  y  $e$  un elemento de  $E$  tal que  $I \cup \{e\}$  es dependiente. Entonces  $\mathcal{M}$  contiene un circuito en  $I \cup \{e\}$  el cual es único.*

**Demostración:** Como  $I \cup \{e\}$  es dependiente debe contener un circuito  $C$ . Más aún, cada circuito de  $I \cup \{e\}$  contiene a  $e$ . Supongamos que existe un circuito  $C'$  en  $I \cup \{e\}$  distinto de  $C$ , por (C3) tenemos que  $(C \cup C') - \{e\}$  contiene un circuito, lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $C$  es único. ■

Anteriormente vimos el ejemplo de matroides vectoriales, uno de los dos tipos de matroides discutidos en [Whi35]. La segunda clase es un matroide derivado de las gráficas, el cual veremos a continuación. Recordemos que un ciclo en una gráfica es un camino cerrado en el cual todos sus vértices tienen grado dos. Utilizaremos la notación y definiciones de [BM08].

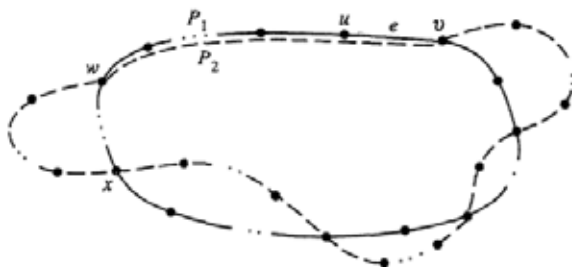


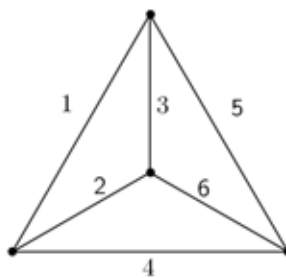
Figura 1.1: Los ciclos en una gráfica satisfacen el axioma (C3)

**Proposición 1.1.7.** *Sea  $E$  el conjunto de aristas de una gráfica  $G$  y  $\mathcal{C}$  el conjunto de ciclos de  $G$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es el conjunto de circuitos de un matroide en  $E$ .*

**Demostración:** Es claro que  $\mathcal{C}$  satisface (C1) y (C2). Para probar (C3) sean  $C_1$  y  $C_2$  ciclos de  $G$  con una arista  $e \in E(G)$  común. Sean  $u$  y  $v$  los vértices de la arista  $e$ . Construiremos un ciclo de  $G$  cuyo conjunto de aristas esté contenido en  $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$ . Para  $i \in \{1, 2\}$ , sea  $P_i$  un camino de  $u$  a  $v$  en  $G$  cuyo conjunto de aristas esta contenido en  $C_i - \{e\}$ . Comenzando en  $u$ , avanzamos sobre  $P_1$  hacia  $v$ , sea  $w$  el primer vértice en el cual la siguiente arista de  $P_1$  no pertenece a  $P_2$ . Continuamos avanzando sobre  $P_1$  de  $w$  a  $v$  hasta que encontremos un vértice  $x$  distinto de  $w$  pero que también pertenezca a  $P_2$ . Debido a que  $P_1$  y  $P_2$  tienen término en  $v$ , este vértice debe de existir. Ahora, adjuntamos la sección de  $P_1$  de  $w$  a  $x$  a la sección de  $P_2$  de  $x$  a  $w$ . El resultado es un ciclo (ver figura 1.1), el cual tiene un conjunto de aristas contenido en  $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}$  satisface (C3). ■

Los matroides obtenidos de la forma anterior son llamados matroides cíclicos o matroides poligonales de  $G$ . Se denotan por  $\mathcal{M}(G)$ . Es claro que un conjunto  $X$  de aristas de  $G$  es un independiente en  $\mathcal{M}(G)$  si y sólo si  $X$  no contiene el conjunto de aristas de un ciclo, o equivalentemente, que la subgráfica inducida por  $X$  sea un árbol.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos la gráfica completa con cuatro vértices, a la cual se denota  $K_4$  y etiquetemos sus aristas con las etiquetas  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , como se muestra a continuación.



Entonces el conjunto de circuitos de  $\mathcal{M}(K_4)$  es:

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 6, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}\}.$$

Al trabajar con matroides nos interesa saber cuando dos matroides  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  tienen la misma estructura, es decir, cuando dos matroides son isomorfos. Al igual que en teoría de gráficas necesitamos que exista una biyección  $\psi$  de  $E(\mathcal{M}_1)$  a  $E(\mathcal{M}_2)$ , tal que  $X \subseteq E(\mathcal{M}_1)$  es independiente en  $\mathcal{M}_1$  si y sólo si  $\psi(X)$  es independiente en  $\mathcal{M}_2$ .

Un matroide isomorfo a un matroide cíclico es llamado un matroide gráfico. Si  $\mathcal{M}$  es isomorfo a un matroide vectorial de una matriz  $D$  sobre un campo  $F$ , entonces se dice que  $\mathcal{M}$  es representable sobre  $F$  ó  $F$ -representable y  $D$  es llamada una representación de  $\mathcal{M}$  sobre  $F$  o una  $F$ -representación.

Siguiendo la terminología de gráficas llamaremos a un elemento  $e \in E$  un lazo de un matroide  $\mathcal{M}(E)$ , si  $\{e\}$  es un circuito de  $\mathcal{M}$ . Más aún, si  $f$  y  $g$  son elementos de  $E$  tales que  $\{f, g\}$  es un circuito, entonces  $f$  y  $g$  son llamados *paralelos* en  $\mathcal{M}(E)$ . Una *clase paralela* de  $\mathcal{M}(E)$  es un subconjunto maximal  $X$  de  $E$  tal que cualesquiera dos pares de elementos de  $X$  son paralelos y ningún elemento de  $X$  es un lazo. Si  $\mathcal{M}$  no tiene lazos y no posee clases paralelas no triviales es llamado un *matroide simple* o *geometría combinatoria*.

### 1.1.2. Bases

Una lista de los subconjuntos independientes maximales de un matroide  $\mathcal{M}$  es claramente una forma más eficiente de describir al matroide, al igual que en espacios vectoriales los subconjuntos independientes maximales de  $\mathcal{M}$  son llamados **bases**.

Al hablar de bases de un matroide nos damos cuenta de las semejanzas que existen con las bases de un espacio vectorial. Por ejemplo:

**Lema 1.1.8.** *Las bases de una matroide son equicardinales, esto es, si  $B_1$  y  $B_2$  son bases de un matroide  $\mathcal{M}$ , entonces  $|B_1| = |B_2|$ .*

**Demostración:** Si suponemos que  $|B_1| < |B_2|$  como  $B_1$  y  $B_2$  son independientes, por **(I3)** tenemos que existe  $x \in B_2 - B_1$  tal que  $B_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ , lo que contradice la maximalidad de  $B_1$ . Por lo que  $|B_1| \leq |B_2|$  y de manera análoga tenemos que  $|B_2| \leq |B_1|$ , por lo tanto  $|B_2| = |B_1|$ . ■

A la colección de bases de  $\mathcal{M}$  la denotaremos por  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ , en caso de que sea necesario especificar el matroide del que estamos hablando.

Si  $\mathcal{M}$  es un matroide y  $\mathcal{B}$  la colección de bases, entonces, por **(I1)**, tenemos que:

**(B1)**  $\mathcal{B}$  es no vacío.

**Lema 1.1.9.** *La colección de bases de un matroide  $\mathcal{B}$  satisface la siguiente condición:*

**(B2)** *Si  $B_1$  y  $B_2$  son miembros de  $\mathcal{B}$  y  $x \in B_1 - B_2$ , entonces existe un elemento  $y$  de  $B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ .*

**Demostración:**  $B_1 - \{x\}$  y  $B_2$  son subconjuntos independientes de  $\mathcal{M}$ . Más aún, por el lema 1.1.8 sabemos que  $|B_1| = |B_2|$ , entonces  $|B_1 - \{x\}| < |B_2|$ . Ahora por **(I3)** tenemos que existe  $y \in B_2 - (B_1 - \{x\})$  tal que  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$  con  $|(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$  por lo tanto  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . ■

A continuación demostraremos que **(B1)** y **(B2)** caracterizan las bases de un matroide.

**Teorema 1.1.10.** *Sea  $E$  un conjunto finito y  $\mathcal{B}$  la colección de subconjuntos de  $E$  que satisfacen **(B1)** y **(B2)**. Sea  $\mathcal{J}$  la colección de subconjuntos de  $E$  que están contenidos en algún miembro de  $\mathcal{B}$ . Entonces  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide que tiene a  $\mathcal{B}$  como su colección de bases.*

**Demostración:** Como  $\mathcal{B}$  cumple **(B1)** entonces satisface **(I1)**. Para probar **(I2)** sea  $X \in \mathcal{J}$  e  $Y \subseteq X$ , como  $X$  pertenece a  $\mathcal{J}$  entonces existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B$  lo que implica que  $Y \subseteq B$  por lo tanto  $Y \in \mathcal{J}$ . Para demostrar **(I3)** necesitamos el siguiente lema.

**Lema 1.1.11.** *Los miembros de  $\mathcal{B}$  tienen la misma cardinalidad.*

**Demostración:** Sean  $B_1$  y  $B_2$  miembros distintos de  $\mathcal{B}$  para los cuales  $|B_1| > |B_2|$  y con la propiedad de que  $|B_1 - B_2|$  sea minimal. Sea  $x \in (B_1 - B_2)$  por **(B2)** tenemos que existe un elemento  $y \in (B_2 - B_1)$  tal que  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Luego  $|(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1| > |B_2|$  y  $|((B_1 - \{x\}) \cup \{y\}) - B_2| < |B_1 - B_2|$ . Lo que contradice la elección de  $B_1$  y  $B_2$  por lo que hemos probado el lema. ■

Continuando con la demostración del teorema 1.1.10; Supongamos que **(I3)** falla para  $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$  con  $|I_1| < |I_2|$ . Esto es, para todo  $e \in I_2 - I_1$  tenemos que  $I_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{J}$ . Como  $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$  existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $I_1 \subseteq B_1$  e  $I_2 \subseteq B_2$ . Supongamos que  $B_2$  es tal que  $|B_2 - (I_2 \cup B_1)|$  sea minimal. De la elección de  $I_1$  e  $I_2$  tenemos la siguiente igualdad:

$$I_2 - B_1 = I_2 - I_1 \quad (1)$$

la contención  $I_2 - B_1 \subseteq I_2 - I_1$  es obvia. Ahora, si existiera  $e \in I_2 - I_1$  tal que  $e \notin I_2 - B_1$  entonces  $I_1 \cup \{e\} \subseteq B_1$  contradiciendo la elección de  $I_2$ , por lo que obtenemos la igualdad.

Supongamos que  $B_2 - (I_2 \cup B_1)$  es no vacío, por lo que podemos escoger un elemento  $x \in B_2 - (I_2 \cup B_1)$ , por **(B2)** tenemos que existe  $y \in B_1 - B_2$  tal que  $(B_2 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Pero entonces  $|((B_2 - \{x\}) \cup \{y\}) - (I_2 \cup B_1)| < |B_2 - (I_2 \cup B_1)|$  contradiciendo la minimalidad de  $B_2$ , por lo que  $B_2 - (I_2 \cup B_1)$  es vacío, entonces  $B_2 - B_1 = I_2 - B_1$ . Por (1) tenemos que:

$$B_2 - B_1 = I_2 - I_1 \quad (2)$$

Mostraremos ahora que  $B_1 - (I_1 \cup B_2)$  es vacío. Si no lo fuese existe un elemento  $x \in B_1 - (I_1 \cup B_2)$  por **(B2)** existe  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Ahora,  $I_1 \cup \{y\} \subseteq (B_1 - \{x\}) \cup \{y\}$ . Lo que implica que  $I_1 \cup \{y\} \in \mathcal{J}$ . Como  $y \in B_2 - B_1$  por (2)  $y \in I_2 - I_1$  lo que contradice el supuesto de que **(I3)** falla. Por lo tanto  $B_1 - (I_1 \cup B_2)$  es vacío. Por lo que  $B_1 - B_2 = I_1 - B_2$ . Dado que  $I_1 - B_2 \subseteq I_1 - I_2$  tenemos que:

$$B_1 - B_2 \subseteq I_1 - I_2. \quad (3)$$

Por el lema 1.1.11 tenemos que  $|B_1| = |B_2|$  entonces  $|B_2 - B_1| = |B_1 - B_2|$ . Por (2) y (3) tenemos  $|I_2 - I_1| \leq |I_1 - I_2|$  por lo tanto  $|I_1| > |I_2|$ . Esta contradicción completa la prueba de que  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide. Como  $\mathcal{B}$  es claramente el conjunto de bases de este matroide, el teorema queda probado. ■

Combinando el lema 1.1.9 y el teorema 1.1.10 obtenemos lo siguiente.

**Corolario 1.1.12.** *Sea  $\mathcal{B}$  un conjunto de subconjuntos de un conjunto  $E$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es la colección de bases de un matroide  $\mathcal{M}$  en  $E$  si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

**(B1)**  $\mathcal{B}$  es no vacío.

**(B2)** *Si  $B_1$  y  $B_2$  son miembros de  $\mathcal{B}$  y  $x \in B_1 - B_2$  entonces existe  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ .* ■

En la Proposición 1.1.6 vimos que si  $I$  es un subconjunto independiente de un matroide  $\mathcal{M}$  y  $I \cup \{e\}$  es dependiente en  $\mathcal{M}$ , entonces  $\mathcal{M}$  posee un único circuito en  $I \cup \{e\}$  y este circuito contiene a  $e$ . El siguiente resultado es una consecuencia inmediata.

**Corolario 1.1.13.** *Sea  $B$  una base de un matroide  $\mathcal{M}$ . Si  $e \in E(\mathcal{M}) - B$ , entonces  $B \cup \{e\}$  contiene un único circuito  $C(B, e)$ , llamado el circuito fundamental de  $e$  con respecto a la base  $B$ . Más aún  $e \in C(B, e)$ .* ■

A continuación probaremos que todo circuito se puede escribir como circuito fundamental con respecto a alguna base.

**Proposición 1.1.14.** *Sea  $C$  un circuito de un matroide  $\mathcal{M}$  y  $e \in C$ , entonces existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $C = C(B, e)$ .*

**Demostración:** Sea  $C$  un circuito de  $\mathcal{M}$  y  $e \in C$ , como  $C$  es circuito entonces  $C - \{e\} \in \mathcal{J}$ . Si  $C - \{e\}$  es base de  $\mathcal{M}$  por el corolario 1.1.13 habremos terminado. Supongamos pues que  $C - \{e\}$  no es base de  $\mathcal{M}$  y sea  $B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ , entonces  $|C - \{e\}| < |B_1|$  por **(I3)** existe un elemento  $x \in B_1 - (C - \{e\})$  tal que  $(C - \{e\}) \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ . Continuando este proceso encontramos una base  $B$  de  $\mathcal{M}$  que contiene a  $C - \{e\}$  y tal que  $e \notin B$ . Por el corolario anterior tenemos que  $B \cup \{e\}$  contiene un único circuito  $C(B, e)$ , pero  $C \in B \cup \{e\}$ , por lo tanto  $C = C(B, e)$ . ■

El siguiente es un resultado más fuerte.

**Teorema 1.1.15.** *Si  $\mathcal{M}$  es un matroide sobre  $E$ , y  $B$  una base para  $\mathcal{M}$ , entonces para cualquier  $x \in E - B$ ,  $(B - \{y\}) \cup \{x\}$  es una base para  $\mathcal{M}$  si y sólo si  $y \in C(B, x)$  o  $y = x$ .*

**Demostración:** Sea  $(B - \{y\}) \cup \{x\}$  una base. Entonces, si  $y \notin C(B, x)$  tenemos que  $C(B, x) \subseteq (B - \{y\}) \cup \{x\}$ , por lo que no podría ser base. Recíprocamente, supongamos que  $y \in C(B, x)$  pero  $(B - \{y\}) \cup \{x\}$  no es base. Entonces  $B \cup \{x\}$  debe contener un circuito  $C'$  el cual claramente no puede estar en  $C(B, x)$ . Por lo que  $(B - \{y\}) \cup \{x\}$  contiene dos circuitos lo que contradice la proposición anterior. ■

El siguiente teorema prueba una condición más fuerte que **(C3)** acerca de los circuitos de un matroide.

**Teorema 1.1.16.** *Si  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos distintos de un matroide  $\mathcal{M}$  y  $x \in C_1 \cap C_2$ , entonces para cualquier elemento  $y \in C_1 - C_2$  existe un único circuito  $C$  tal que*

$$y \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}.$$

**Demostración:** Supongamos que  $C_1, C_2, x, y$ , son tales que el teorema no se cumple, y que  $|C_1 \cup C_2|$  es minimal con esta propiedad. Por **(C3)** existe un circuito  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}$  pero  $y \notin C_3$ . Ahora  $C_3 \cap (C_2 - C_1)$  no puede ser nulo ya que de lo contrario  $C_3$  estaría contenido en  $C_1$ .

Sea  $z \in C_3 \cap (C_2 - C_1)$  y consideremos ahora,  $C_2$  y  $C_3$ ;  $z \in C_2 \cap C_3$ ,  $x \in C_2 - C_3$  y dado que  $y \notin C_2 \cup C_3$ ,  $C_2 \cup C_3$  es un subconjunto propio de  $C_1 \cup C_2$ , lo que implica que hemos encontrado dos circuitos que no cumplen el teorema y tales que  $|C_2 \cup C_3| < |C_1 \cup C_2|$  lo que contradice la minimalidad de  $C_1 \cup C_2$ , por lo que debe existir un circuito  $C_4$  tal que

$$x \in C_4 \subseteq (C_2 \cup C_3) - \{z\}.$$

Consideremos ahora,  $C_1$  y  $C_4$ ;  $x \in C_1 \cup C_4$ ,  $y \notin C_1 - C_4$  por lo que  $y \in C_1 - C_4$ , lo que implica que  $C_1 \cup C_4 \subset C_1 \cup C_2$ , de nuevo por la minimalidad del argumento debe existir un circuito  $C_5$  tal que

$$y \in C_5 \subseteq (C_1 \cup C_4) - \{x\}.$$

Como  $C_1 \cup C_4 \subset C_1 \cup C_2$  hemos encontrado un circuito tal que

$$y \in C_5 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\},$$

lo cual es una contradicción. ■

Veamos otro tipo especial de matroides al cual definimos a partir de sus bases y que son de importantes en teoría de matroides.

**Proposición 1.1.17.** Sean  $m$  y  $n$  enteros no negativos tales que  $m \leq n$ . Sea  $E$  un conjunto con  $n$  elementos. Definimos  $\mathcal{B}$  como el conjunto de los subconjuntos  $X$  de  $E$  tales que  $|X| = m$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es el conjunto de bases de un matroide en  $E$ .

**Demostración:** Es fácil ver que  $\mathcal{B}$  cumple **(B1)**. Para probar **(B2)**, sean  $B_1$  y  $B_2$  elementos de  $\mathcal{B}$  y  $x \in B_1 - B_2$ . Como  $|B_1 - \{x\}| < |B_2|$  entonces existe  $y \in B_2 - (B_1 - \{x\})$ . Luego,  $|(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}| = m$  por lo tanto  $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . ■

Denotamos a este matroide  $U_{m,n}$  y lo llamamos el **matroide uniforme** de rango  $m$  en un conjunto de  $n$  elementos.

Claramente,

$$\mathcal{J}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq m\}$$

y

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n = m, \\ \{X \subseteq E : |X| > m\}, & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Observemos que si  $m = 0$  entonces todo elemento en  $U_{m,n}$  es un lazo. Si  $m = 1$ , cada par de puntos distintos forma un circuito (un paralelo) y si  $m \geq 2$ ,  $U_{m,n}$  es simple. Los matroides de la forma  $U_{n,n}$  son aquellos que no tienen conjuntos dependientes. Llamamos a estos matroides *libres*. Uno de estos matroides,  $U_{0,0}$ , es el único matroide cuyo conjunto base es el conjunto vacío y es llamado el *matroide vacío*.

Hasta ahora hemos analizado algunas de las propiedades que cumplen los conjuntos independientes, circuitos y bases de un matroide. También la equivalencia entre las definiciones de matroide con respecto a estos mismos. Sin embargo, veremos enseguida que hay otra manera equivalente de definir un matroide.

### 1.1.3. Rango

En álgebra lineal contamos con las nociones de dimensión de un espacio vectorial y espacio generado por un conjunto de vectores. Lo que haremos a continuación es generalizar estos conceptos a matroides.

Comenzaremos por definir otro matroide a partir de un matroide  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{J})$ , sean  $X \subseteq E$  y  $\mathcal{J}|_X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{J}\}$  es claro que el par ordenado  $(X, \mathcal{J}|_X)$  es un matroide sobre  $X$ . Llamamos a este matroide *la restricción* de  $\mathcal{M}$  a  $X$  o *el borrado de  $E - X$*

de  $\mathcal{M}$  y lo denotaremos por  $\mathcal{M}|_X$  o  $\mathcal{M} \setminus (E - X)$ . Podemos verificar fácilmente que  $\mathcal{C}(\mathcal{M}|_X) = \{C \subseteq X : C \in \mathcal{C}(\mathcal{M})\}$ . Como  $\mathcal{M}|_X$  es un matroide sabemos que sus bases son equicardinales. Definiremos el *rango*  $\mathfrak{r}(X)$  de  $X$  como la cardinalidad de una de las bases  $B$  de  $\mathcal{M}|_X$  y llamamos a  $B$  una base para el subconjunto  $X$ .

**Definición 1.1.18.** Sea  $\mathcal{M}$  un matroide. La función rango de un matroide es una función  $\mathfrak{r}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $\mathfrak{r}(X) = |B|$  donde  $B$  es una base de  $\mathcal{M}|_X$ .

**Teorema 1.1.19.** Una función  $\mathfrak{r}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  es la función rango de un matroide  $\mathcal{M}$  en  $E$  si y sólo si cumple:

**(R1)** Si  $X \subseteq E$ , entonces  $0 \leq \mathfrak{r}(X) \leq |X|$ .

**(R2)** Si  $X \subseteq Y \subseteq E$ , entonces  $\mathfrak{r}(X) \leq \mathfrak{r}(Y)$ .

**(R3)** Si  $X, Y \subseteq E$ , entonces  $\mathfrak{r}(X \cup Y) + \mathfrak{r}(X \cap Y) \leq \mathfrak{r}(X) + \mathfrak{r}(Y)$ .

**Demostración:** Sean  $\mathcal{M}$  un matroide en  $E$ ,  $X \subseteq Y \subseteq E$  y  $\mathfrak{r}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  la función rango de  $\mathcal{M}$ . Es claro que la función  $\mathfrak{r}$  cumple las propiedades **(R1)** y **(R2)**. Probaremos pues que  $\mathfrak{r}$  cumple con la propiedad **(R3)**. Sea  $B_{X \cap Y}$  una base para  $\mathcal{M}|_{(X \cap Y)}$ . Entonces  $B_{X \cap Y}$  es un subconjunto independiente de  $\mathcal{M}|_{(X \cup Y)}$ , por lo que  $B_{X \cap Y}$  está contenido en una base  $B_{X \cup Y}$  de  $\mathcal{M}|_{(X \cup Y)}$ . Ahora,  $B_{X \cup Y} \cap X$  y  $B_{X \cup Y} \cap Y$  son subconjuntos independientes de  $\mathcal{M}|_X$  y  $\mathcal{M}|_Y$ , respectivamente. De aquí que,

$$|B_{X \cup Y} \cap X| \leq \mathfrak{r}(X) \text{ y } |B_{X \cup Y} \cap Y| \leq \mathfrak{r}(Y).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(X) + \mathfrak{r}(Y) &\geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| \\ &= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\ &\quad + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\ &= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap X \cap Y|. \end{aligned}$$

Pero  $B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y) = B_{X \cup Y}$  y  $B_{X \cup Y} \cap X \cap Y = B_{X \cap Y}$ . Por lo que,

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(X) + \mathfrak{r}(Y) &\geq |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| \\ &= \mathfrak{r}(X \cup Y) + \mathfrak{r}(X \cap Y) \end{aligned}$$

con lo que hemos probado que  $\mathfrak{r}$  cumple **(R3)**

Ahora, para probar el regreso, sea  $E$  un conjunto y  $\mathfrak{r} : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  una función que satisface **(R1)** – **(R3)** Sea  $\mathcal{J}$  la colección de subconjuntos  $X$  de  $E$  para los cuales  $\mathfrak{r}(X) = |X|$ . Vamos a mostrar que  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide que tiene como función rango  $\mathfrak{r}$ , pero para ello necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 1.1.20.** *Sea  $E$  un conjunto y  $\mathfrak{r}$  una función en  $2^E$  que satisface **(R2)** y **(R3)**. Si  $X$  e  $Y$  son subconjuntos de  $E$  tales que para toda  $y \in Y - X$ ,  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$ , entonces  $\mathfrak{r}(X \cup Y) = \mathfrak{r}(X)$ .*

**Demostración:** Sea  $Y - X = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ . Probaremos por inducción sobre  $k$ . Si  $k = 1$  el resultado es inmediato. Supongamos que se cumple para  $k = n$  y veamos que es válido para  $k = n + 1$ . Entonces por inducción y por **(R3)**

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(X) + \mathfrak{r}(X) &= \mathfrak{r}(X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) + \mathfrak{r}(X \cup \{y_{n+1}\}) \\ &\geq \mathfrak{r}((X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) \cup (X \cup \{y_{n+1}\})) \\ &\quad + \mathfrak{r}((X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) \cap (X \cup \{y_{n+1}\})) \\ &= \mathfrak{r}(X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}) + \mathfrak{r}(X) \\ &\geq \mathfrak{r}(X) + \mathfrak{r}(X), \end{aligned}$$

donde el último paso se cumple por **(R2)** Dado que la primera y última línea son iguales, la igualdad debe cumplirse también para las ecuaciones intermedias. Por lo tanto  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\})$ . Entonces por inducción el lema se cumple. ■

Probaremos el regreso del teorema. Como **(R1)** se cumple tenemos  $0 \leq \mathfrak{r}(\emptyset) \leq |\emptyset|$ , entonces  $\mathfrak{r}(\emptyset) = |\emptyset|$  por lo que  $\emptyset \in \mathcal{J}$ . Por lo tanto  $\mathcal{J}$  satisface (I1). Ahora, sea  $I \in \mathcal{J}$  e  $I' \subseteq I$  entonces  $\mathfrak{r}(I) = |I|$ . Por **(R3)**,

$$\mathfrak{r}(I' \cup (I - I')) + \mathfrak{r}(I' \cap (I - I')) \leq \mathfrak{r}(I') + \mathfrak{r}(I - I')$$

esto es

$$\mathfrak{r}(I) + \mathfrak{r}(\emptyset) \leq \mathfrak{r}(I') + \mathfrak{r}(I - I'), \quad (1)$$

pero  $\mathfrak{r}(I) = |I|$  y  $\mathfrak{r}(\emptyset) = 0$ . Más aún, por **(R1)**,  $\mathfrak{r}(I') \leq |I'|$  y  $\mathfrak{r}(I - I') \leq |I - I'|$ . De aquí que, por (1),

$$|I| \leq \mathfrak{r}(I') + \mathfrak{r}(I - I') \leq |I'| + |I - I'| = |I|$$

por lo tanto  $\mathfrak{r}(I') + \mathfrak{r}(I - I') = |I|$ , lo que implica que  $|I'| = \mathfrak{r}(I')$ , concluimos entonces  $I' \in \mathcal{J}$ , por lo que  $\mathcal{J}$  satisface (I2). Para probar que  $\mathcal{J}$  satisface (I3), asumimos lo contrario, esto es sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$  con  $|I_2| > |I_1|$  y supongamos que para toda  $e \in (I_2 - I_1)$  tenemos que  $I_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{J}$ . Entonces para tales elementos  $e$ , tenemos  $\mathfrak{r}(I_1 \cup \{e\}) \neq |I_1 \cup \{e\}|$ . De lo anterior, por (R1), (R2) y el hecho de que  $I_1 \in \mathcal{J}$  tenemos que para tales elementos  $e$  se cumple:

$$|I_1| + 1 > \mathfrak{r}(I_1 \cup \{x\}) \geq \mathfrak{r}(I_1) = |I_1|$$

por lo que,

$$\mathfrak{r}(I_1 \cup \{x\}) = |I_1|. \quad (2)$$

Ahora, aplicando el lema 1.1.20 con  $X = I_1$ , e  $Y = I_2$  tenemos  $\mathfrak{r}(I_1 \cup I_2) = \mathfrak{r}(I_1)$ , pero  $I_2 \subseteq I_1 \cup I_2$  entonces por (R2) tenemos  $|I_2| = \mathfrak{r}(I_2) \leq \mathfrak{r}(I_1 \cup I_2) = |I_1|$  por lo que  $|I_1| \geq |I_2|$  lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que  $\mathcal{J}$  satisface (I3) por lo que  $(E, \mathcal{J})$  es un matroide.

Para concluir la demostración es necesario probar que  $\mathfrak{r}$  es la función rango  $\mathfrak{r}_{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$ . Sea  $X \subseteq E$ . Si  $X \in \mathcal{J}$  entonces  $\mathfrak{r}(X) = |X|$  y como  $X$  es una base para  $\mathcal{M}|_X$  entonces  $\mathfrak{r}_{\mathcal{M}}(X) = |X|$ . Entonces si  $X \in \mathcal{J}$  tenemos que  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}_{\mathcal{M}}(X)$ . Supongamos que  $X \notin \mathcal{J}$  y sea  $B$  una base para  $\mathcal{M}|_X$ . Entonces  $\mathfrak{r}_{\mathcal{M}}(X) = |B|$ . Más aún,  $B \cup \{x\} \notin \mathcal{J}$  para toda  $x \in X - B$ , de aquí que  $|B| = \mathfrak{r}(B) \leq \mathfrak{r}(B \cup \{x\}) < |B \cup \{x\}|$ , por lo que  $\mathfrak{r}(B \cup \{x\}) = |B|$ . Por el lema 1.1.20, se sigue que  $\mathfrak{r}(B \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(B)$ , esto es,  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(B) = |B|$ . Entonces si  $X \notin \mathcal{J}$ , entonces  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}_{\mathcal{M}}(X)$ . Concluimos que  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathcal{M}}$ . ■

Los conjuntos independientes y circuitos pueden caracterizarse fácilmente a partir de la función rango.

**Proposición 1.1.21.** *Sea  $\mathcal{M}$  un matroide con función rango  $\mathfrak{r}$  y supongamos que  $X \subseteq E(\mathcal{M})$ . Entonces:*

- (i)  $X$  es independiente si y sólo si  $|X| = \mathfrak{r}(X)$ .
- (ii)  $X$  es una base si y sólo si  $|X| = \mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(E)$ .
- (iii)  $X$  es un circuito si y sólo si  $X$  es no vacío y para toda  $x$  en  $X$ ,  $\mathfrak{r}(X - \{x\}) = |X| - 1 = \mathfrak{r}(X)$ .

**Demostración:** Para probar (i) sea  $X \in \mathcal{J}$ , entonces  $X$  es base para  $\mathcal{M}|_X$  por lo que  $\mathfrak{r}(X) = |X|$ . Ahora si  $\mathfrak{r}(X) = |X|$  esto quiere decir que  $X$  es base para  $\mathcal{M}|_X$  por lo tanto  $X$  está en  $\mathcal{J}$ .

Probemos ahora (ii),  $X$  es base de  $\mathcal{M}$  si y sólo si  $\mathfrak{r}(E(\mathcal{M})) = |X|$  y por (i)  $X \in \mathcal{J}$  si y sólo si  $|X| = \mathfrak{r}(X)$ .

Para probar (iii) sea  $X$  un circuito y  $x \in X$ , entonces  $X - \{x\}$  está en  $\mathcal{J}$  y por (i) se cumple que  $\mathfrak{r}(X - \{x\}) = |X - \{x\}| = |X| - 1$ , como  $X - \{x\} \subseteq X$  por **(R1)** y **(R2)** tenemos  $|X| - 1 = |X - \{x\}| \leq \mathfrak{r}(X) < |X|$  por lo tanto  $\mathfrak{r}(X) = |X| - 1$ . Ahora supongamos que  $X \subseteq E$  es tal que  $\mathfrak{r}(X - \{x\}) = |X| - 1 = \mathfrak{r}(X)$  para toda  $x \in X$ . Como  $\mathfrak{r}(X - \{x\}) = |X| - 1$  entonces por (i) tenemos  $X - \{x\} \in \mathcal{J}$  para toda  $x \in X$  y como  $X \notin \mathcal{J}$  esto quiere decir que  $X$  es un dependiente minimal de  $\mathcal{M}$  por lo tanto  $X$  es circuito de  $\mathcal{M}$ . ■

#### 1.1.4. Cerradura

En álgebra lineal dado un subconjunto  $S$  de un espacio vectorial  $V$ , definimos el subespacio generado por  $S$  denotado por  $\text{Span } S$ , como la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a  $S$ , y decimos que  $v \in V$  esta en  $\text{Span } S$  si y sólo si  $\text{Span } S = \text{Span}(S \cup \{v\})$  esto es, si y sólo si la dimensión de  $\text{Span } S$  es la misma que  $\text{Span}(S \cup \{v\})$ . Lo que haremos en esta sección es generalizar este concepto a matroides y mostrar algunas de sus propiedades.

**Definición 1.1.22.** Sea  $\mathcal{M}(E, \mathcal{J})$  un matroide y  $\mathfrak{r}$  su función rango. El operador cerradura de  $\mathcal{M}$  denotado por  $cl$  es una función de  $2^E$  en  $2^E$  definida para todo  $X \subseteq E$ , como

$$cl(X) = \{x \in E : \mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)\}.$$

Nota: Por el lema 1.1.20 tenemos que  $\mathfrak{r}(cl(X)) = \mathfrak{r}(X)$ .

**Lema 1.1.23.** *El operador cerradura de un matroide  $\mathcal{M}(E, \mathcal{J})$  cumple con las siguientes propiedades:*

**(CL1)** *Si  $X \subseteq E$ , entonces  $X \subseteq cl(X)$ .*

**(CL2)** Si  $X \subseteq Y \subseteq E$ , entonces  $cl(X) \subseteq cl(Y)$ .

**(CL3)** Si  $X \subseteq E$ , entonces  $cl(cl(X)) = cl(X)$ .

**(CL4)** Si  $X \subseteq E$ ,  $x \in E$  e  $y \in cl(X \cup \{x\}) - cl(X)$ , entonces  $x \in cl(X \cup \{y\})$ .

**Demostración:** El hecho de que el operador cerradura satisface la propiedad **(CL1)** es inmediato de la definición. Ahora, para mostrar que se cumple la propiedad **(CL2)** sean  $X \subseteq Y \subseteq E$  y  $x \in cl(X) - X$ , entonces  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)$ . Esto quiere decir que una base  $B_X$  para  $X$  es una base para  $X \cup \{x\}$ . Entonces  $Y \cup \{x\}$  tiene una base  $B_{Y \cup \{x\}}$  que contiene a  $B_X$ , pero que no contiene a  $x$ , por lo que  $B_{Y \cup \{x\}}$  debe ser una base para  $Y$ , se sigue que  $\mathfrak{r}(Y \cup \{x\}) = |B_{Y \cup \{x\}}| = \mathfrak{r}(Y)$ , por lo tanto  $y \in cl(Y)$ . Concluimos entonces que  $cl(X) \subseteq cl(Y)$ , por lo que la propiedad **(CL2)** se cumple.

Para probar **(CL3)**, comencemos por observar que por **(CL1)** se tiene que  $cl(X) \subseteq cl(cl(X))$ . Ahora para mostrar la otra inclusión, sea  $x \in cl(cl(X))$  entonces  $\mathfrak{r}(cl(X) \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(cl(X))$ . Pero para toda  $y \in cl(X) - X$ ,  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$ . Entonces, por el lema 1.1.20,  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(X \cup (cl(X) - X)) = \mathfrak{r}(cl(X))$ . De aquí que  $\mathfrak{r}(cl(X) \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)$ . Pero por **(R2)**,  $\mathfrak{r}(cl(X) \cup \{x\}) \geq \mathfrak{r}(X \cup \{x\}) \geq \mathfrak{r}(X)$ . Por lo que  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)$ , por lo tanto  $x \in cl(X)$ . Con lo que hemos probado que  $cl(cl(X)) \subseteq cl(X)$ , por lo que **(CL3)** se cumple.

Para la prueba de **(CL4)** usaremos el siguiente resultado.

**Lema 1.1.24.** Si  $X \subseteq E$  y  $x \in E$ , entonces  $\mathfrak{r}(X) \leq \mathfrak{r}(X \cup \{x\}) \leq \mathfrak{r}(X) + 1$

**Demostración:** Sea  $B_X$  una base para  $X$ . Entonces  $B_X$  o  $B_X \cup \{x\}$  es base para  $X \cup \{x\}$ , por lo que  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\})$  es  $\mathfrak{r}(X)$  o  $\mathfrak{r}(X) + 1$ . ■

Continuamos con la prueba de **(CL4)**: Supongamos que  $y \in cl(X \cup \{x\}) - cl(X)$ . Entonces  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X \cup \{x\})$  y  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) \neq \mathfrak{r}(X)$ . De la última desigualdad del lema 1.1.24, deducimos que  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X) + 1$ . Entonces,

$$\mathfrak{r}(X) + 1 = \mathfrak{r}(X \cup \{y\}) \leq \mathfrak{r}(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X \cup \{x\}) \leq \mathfrak{r}(X) + 1.$$

De aquí que,  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X \cup \{y\})$ , por lo tanto  $x \in cl(X \cup \{y\})$ . ■

**Lema 1.1.25.** Sean  $X \subseteq E(\mathcal{M})$  y  $x \in E(\mathcal{M})$ . Si  $X \in \mathcal{J}$ , pero  $X \cup \{x\}$  no pertenece a  $\mathcal{J}$ , entonces  $x \in cl(X)$ .

**Demostración:** Como  $X \in \mathcal{J}$ , por la proposición 1.1.21 (i) tenemos que  $\mathfrak{r}(X) = |X|$ . Ahora bien, usando el lema 1.1.24 se cumple  $|X| = \mathfrak{r}(X) \leq \mathfrak{r}(X \cup \{x\}) \leq \mathfrak{r}(X) + 1 = |X| + 1$ . Si  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = |X| + 1$ , por la proposición 1.1.21 (i) tendríamos que  $X \cup \{x\}$  pertenece a  $\mathcal{J}$ , lo cual sería una contradicción. Por tanto  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)$ , con lo que podemos concluir que  $x \in cl(X)$ . ■

Si  $\mathcal{M}$  es un matroide en  $E$  y  $X \subseteq E$ , llamamos a  $cl(X)$  la *cerradura* de  $X$  en  $\mathcal{M}$ . Si  $X = cl(X)$ , entonces  $X$  es llamado *un conjunto cerrado* de  $\mathcal{M}$ . Un *hiperplano* de  $\mathcal{M}$  es un conjunto cerrado de rango  $\mathfrak{r}(E) - 1$ . Un subconjunto  $X$  de  $E(\mathcal{M})$  es llamado un *conjunto generador* de  $\mathcal{M}$  si  $cl(X) = E$ .

La siguiente proposición muestra que las bases y los hiperplanos son un tipo especial de conjuntos generadores y no generadores respectivamente. Para probar esto utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 1.1.26.** *Supongamos que  $\mathcal{M}$  es un matroide y que  $X \subseteq E(\mathcal{M})$ . Si  $x \in cl(X)$ , entonces  $cl(X \cup \{x\}) = cl(X)$ .*

**Demostración:** Sean  $X \subseteq E(\mathcal{M})$  y  $x \in cl(X)$ . Por **(CL1)**  $X \subseteq X \cup \{x\}$  implica que  $cl(X) \subseteq cl(X \cup \{x\})$ .

Veamos la otra inclusión:

Sea  $y \in cl(X \cup \{x\})$  entonces  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X \cup \{x\})$ . Como  $x \in cl(X)$  tenemos que  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)$ , lo que implica que  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$ . Por el lema 1.1.24 y **(R2)**  $\mathfrak{r}(X) \leq \mathfrak{r}(X \cup \{y\}) \leq \mathfrak{r}(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$ , por lo tanto  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$ . Entonces  $y \in cl(X)$  con lo que hemos mostrado que  $cl(X \cup \{x\}) \subseteq cl(X)$ . ■

**Proposición 1.1.27.** *Sea  $\mathcal{M}$  un matroide y  $X$  un subconjunto de  $E(\mathcal{M})$ . Entonces*

- (i)  $X$  es un conjunto generador si y sólo si  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(E)$ .
- (ii)  $X$  es una base si y sólo si es un conjunto generador minimal.
- (iii)  $X$  es un hiperplano si y sólo si es un conjunto no generador maximal.

**Demostración:** (i) Sea  $X$  un conjunto generador de  $\mathcal{M}$ . Entonces  $cl(X) = E$ . Sea  $B$  una base para  $X$ . Entonces, para toda  $x \in X - B$ , el conjunto  $B \cup \{x\} \notin \mathcal{J}(\mathcal{M}|_X)$ . Luego, por el lema 1.1.25,  $x \in cl(B)$ . De lo anterior tenemos que  $X \subseteq cl(B)$  y entonces

$E = cl(X) \subseteq cl(B) \subseteq E$ . Por lo que para toda  $y \in E - B$ , tenemos que  $y \in cl(B)$ , entonces por la proposición 1.1.27 (ii),  $B \cup \{y\} \notin \mathcal{J}(\mathcal{M})$ . Por lo tanto  $B$  es base para  $\mathcal{M}$ . Para probar la recíproca, sea  $X \subseteq E(\mathcal{M})$  tal que  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Tenemos que  $cl(X) \subseteq E(\mathcal{M})$ , por lo que basta mostrar que  $E \subseteq cl(X)$ . Sea  $B$  una base para  $X$ , como  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$  tenemos que  $B$  es base para  $\mathcal{M}$ . Sea  $x \in E - B$  entonces  $B \cup \{x\} \notin \mathcal{J}(\mathcal{M})$ , por el lema 1.1.25  $x \in cl(B)$ . Entonces  $E \subseteq cl(B) \subseteq cl(X)$ . Por lo tanto  $cl(X) = E$ .

(ii) Sea  $X$  una base para  $\mathcal{M}$ . Por la proposición 1.1.21 tenemos que  $|X| = \mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ , entonces por (i)  $X$  es un conjunto generador. Para probar la minimalidad, sea  $Y \subset X$ . Por **(I2)**  $Y \in \mathcal{J}$  y por lo tanto  $\mathfrak{r}(Y) = |Y|$ . Entonces,  $|Y| < |X| = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ , por lo cual  $Y$  no es un conjunto generador de  $\mathcal{M}$ , por lo tanto  $X$  es minimal. Ahora, supongamos que  $X$  es un conjunto generador minimal de  $\mathcal{M}$ . Entonces, por (i),  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Sea  $B_X$  una base para  $\mathcal{M}|_X$ , entonces  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(B_X)$  por lo que  $B_X$  es generador. Luego como  $B_X \subseteq X$  y  $X$  es minimal, se sigue que  $B_X = X$ . Por lo tanto,  $X$  es base.

(iii) Sea  $X$  un hiperplano de  $\mathcal{M}$ . Entonces  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M}) - 1$ . Por (i)  $X$  no es un conjunto generador. Para probar la maximalidad, sea  $Y \subset E$  un conjunto no generador de  $\mathcal{M}$ . Por (i),  $\mathfrak{r}(Y) < \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Como  $\mathfrak{r}(Y) \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\mathfrak{r}(Y) \leq \mathfrak{r}(\mathcal{M}) - 1 = \mathfrak{r}(X)$ . Ahora, si además se cumple que  $X \subseteq Y$  entonces  $\mathfrak{r}(X) \leq \mathfrak{r}(Y)$ , por lo que  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(Y)$ . Sea  $y \in Y - X$ , entonces  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$ , por lo tanto  $y \in cl(X) = X$ . Entonces  $Y - X$  es vacío, de donde se sigue que  $X = Y$ . Por lo tanto si  $X$  es un hiperplano,  $X$  es un conjunto no generador maximal de  $\mathcal{M}$ .

Ahora, sea  $X$  un conjunto no generador maximal. Por (i), tenemos que  $\mathfrak{r}(X) < \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Sean  $B_X, B$  bases para  $X$  y  $\mathcal{M}$  respectivamente. Entonces,  $|B_X| < |B|$  y por **(I3)** existe  $x \in B - B_X$  tal que  $B_X \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ . Es claro que  $x \notin X$ . Consideremos el subconjunto  $X \cup \{x\}$  de  $E(\mathcal{M})$ , por el lema 1.1.24  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) \leq \mathfrak{r}(X) + 1$ , pero por lo anterior  $B_X \cup \{x\} \subseteq X \cup \{x\}$ , entonces  $\mathfrak{r}(X) + 1 \leq \mathfrak{r}(X \cup \{x\}) \leq \mathfrak{r}(X) + 1$ . Por lo tanto  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X) + 1$ .

Ahora bien, como  $X \subset X \cup \{x\}$  tenemos que  $\mathfrak{r}(X) \leq \mathfrak{r}(X \cup \{x\})$ . Si  $X \cup \{x\}$  es un conjunto no generador, por la maximalidad de  $X$  tenemos que  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(X \cup \{x\})$ , lo cual es una contradicción ya que  $\mathfrak{r}(X) < \mathfrak{r}(X \cup \{x\})$ . Entonces,  $X \cup \{x\}$  es un conjunto generador de  $\mathcal{M}$ . Luego,  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ , pero  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X) + 1$ , entonces  $\mathfrak{r}(\mathcal{M}) = \mathfrak{r}(X) + 1$ , de donde se sigue que  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M}) - 1$ . Por lo que basta mostrar que  $X = cl(X)$ .  $X \subseteq cl(X)$ , como para toda  $y \in cl(X) - X$  tenemos que  $\mathfrak{r}(X \cup \{y\}) = \mathfrak{r}(X)$

por el lema 1.1.20 tenemos que  $\mathfrak{r}(cl(X)) = \mathfrak{r}(X)$ , por lo tanto  $cl(X)$  es un conjunto no generador y contiene a  $X$ , entonces por la maximalidad de  $X$  tenemos que  $X = cl(X)$ . Por lo tanto si  $X$  es un conjunto no generador entonces  $X$  es un hiperplano. ■

Hasta ahora hemos relacionado el operador cerradura con los conjuntos independientes, bases, conjuntos generadores e hiperplanos. Ahora lo relacionaremos con los circuitos.

**Proposición 1.1.28.** *Sea  $\mathcal{M}$  un matroide y  $X$  un subconjunto de  $E(\mathcal{M})$ . Entonces,*

- (i)  *$X$  es un circuito si y sólo si  $X$  es un conjunto minimal con la propiedad de que para todo  $x$  en  $X$ ,  $x \in cl(X - \{x\})$ .*
- (ii)  *$cl(X) = X \cup \{x : \mathcal{M} \text{ tiene un circuito } C \text{ tal que } x \in C \subseteq X \cup \{x\}\}$ .*

**Demostración:** La parte (i) solo enuncia de otra manera el hecho de que un circuito es un dependiente minimal. Para probar (ii), comencemos por suponer que  $x \in cl(X) - X$ , entonces  $\mathfrak{r}(X \cup \{x\}) = \mathfrak{r}(X)$ . De aquí que si  $B$  es una base para  $X$ , el conjunto  $B \cup \{x\}$  es dependiente. Por el corolario 1.1.13, existe un circuito  $C$  tal que  $x \in C \subseteq B \cup \{x\}$ . De aquí que,  $x \in C \subseteq X \cup \{x\}$ . Por otra parte, si tal circuito existe, entonces por (i) y **(CL2)**,  $x \in cl(C - \{x\}) \subseteq cl(X)$ , por lo tanto (ii) se cumple. ■

### 1.1.5. Dualidad

Una de las propiedades más atractivas de la teoría de matroides es la existencia de una teoría de dualidad. Esta teoría que fue introducida por Whitney [Whi35], extiende la noción de ortogonalidad de espacios vectoriales y el concepto de dualidad planar de una gráfica plana.

Enseguida presentamos la definición de dual de un matroide, probaremos que es un matroide y estableceremos algunas relaciones entre los matroides y sus duales.

**Teorema 1.1.29.** *Sea  $\mathcal{M}$  un matroide y  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  el conjunto  $\{E(\mathcal{M}) - B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\}$ . Entonces  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  es el conjunto de bases de un matroide en  $E(\mathcal{M})$ .*

La prueba de este teorema requerirá el siguiente resultado.

**Lema 1.1.30.** *El conjunto  $\mathcal{B}$  de bases de un matroide  $\mathcal{M}$  satisface la siguiente condición:*

**(B2)\*** *Si  $B_1$  y  $B_2$  pertenecen a  $\mathcal{B}$  y  $x \in B_2 - B_1$ , entonces existe un elemento  $y$  en  $B_1 - B_2$  tal que  $(B_1 - \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ .*

Cabe hacer notar que hay una genuina diferencia entre **(B2)\*** y **(B2)**. Obsérvese que una no puede obtenerse de la otra al renombrar las bases.

**Demostración:**[Lema 1.1.30] Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $\mathcal{M}$  y  $x \in B_2 - B_1$ . Entonces  $B_1 \cup \{x\}$  es un conjunto dependiente, por el corolario 1.1.13 tenemos que  $B_1 \cup \{x\}$  contiene un único circuito  $C(B_1, x)$ . Como  $C(B_1, x)$  es dependiente y  $B_2$  es independiente, el conjunto  $C(B_1, x) - B_2$  es no vacío. Sea  $y \in C(B_1, x) - B_2$ , es evidente que  $y \in B_1 - B_2$ . Más aún, como  $(B_1 - \{y\}) \cup \{x\}$  no contiene a  $C(B_1, x)$ , el conjunto es independiente y como  $|(B_1 - \{y\}) \cup \{x\}| = |B_1|$ , tenemos que  $(B_1 - \{y\}) \cup \{x\}$  es una base de  $\mathcal{M}$ . ■

**Demostración:**[Teorema 1.1.29] Como  $\mathcal{B}(\mathcal{M})$  es no vacío entonces  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  es no vacío. Entonces  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  satisface la propiedad **(B1)**. Para probar que cumple la propiedad **(B2)** supongamos que  $B_1^*$  y  $B_2^*$  pertenecen a  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  y que  $x \in B_1^* - B_2^*$ . Hacemos  $B_i = E(\mathcal{M}) - B_i^*$  para  $i = 1, 2$ . Entonces  $B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$  y  $B_1^* - B_2^* = (E(\mathcal{M}) - B_1) - (E(\mathcal{M}) - B_2) = B_2 - B_1$ . Por **(B2)\*** como  $x \in B_2 - B_1$  existe un elemento  $y \in B_1 - B_2$  tal que  $(B_1 - \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ . Se sigue que  $y \in B_2^* - B_1^*$  y que  $E(\mathcal{M}) - [(B_1 - \{y\}) \cup \{x\}] \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) \in \mathcal{B}^*(\mathcal{M})$ . Pero  $E(\mathcal{M}) - [(B_1 - \{y\}) \cup \{x\}] = [(E(\mathcal{M}) - B_1) - \{x\}] \cup \{y\} = (B_1^* - \{x\}) \cup \{y\}$ . Concluimos pues que  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  satisface **(B2)**. Por lo tanto  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  es el conjunto de bases para un matroide en  $E(\mathcal{M})$ . ■

El matroide cuyo conjunto base es  $E(\mathcal{M})$  y cuyo conjunto de bases es  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$  es llamado el **matroide dual** de  $\mathcal{M}(E)$  y se denota por  $\mathcal{M}^*(E)$ . Entonces  $\mathcal{B}^*(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathcal{M}^*)$ , más aún es claro que:

$$(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}.$$

El corolario 1.1.12 nos da una caracterización de un matroide en términos de su colección de bases. Una consecuencia del teorema anterior es una caracterización alternativa y tal caracterización se da como sigue.

**Corolario 1.1.31.** *Sea  $\mathcal{B}$  un conjunto de subconjuntos de un conjunto  $E$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es la colección de bases de un matroide en  $E$  si y sólo si  $\mathcal{B}$  satisface **(B1)** y **(B2)\***.*

**Demostración:** Si  $\mathcal{B}$  es la colección de bases de un matroide, por el corolario 1.1.12 y el lema 1.1.30 satisface **(B1)** y **(B2)\***. Ahora supongamos que  $\mathcal{B}$  satisface **(B1)** y **(B2)\*** y consideremos  $\mathcal{B}' = \{E - B : B \in \mathcal{B}\}$ . Claramente  $\mathcal{B}'$  satisface **(B1)** y **(B2)**, por el corolario 1.1.12 tenemos que  $\mathcal{B}'$  es el conjunto de bases para un matroide  $\mathcal{M}$  en  $E$ . Por lo tanto  $\mathcal{B}$  es el conjunto de bases para el matroide dual  $\mathcal{M}^*$ . ■

Las bases, subconjuntos independientes, circuitos, hiperplanos y conjuntos generadores de  $\mathcal{M}^*$  son llamados las **cobases, subconjuntos coindependientes, cocircuitos, cohiperplanos y conjuntos cogeneradores** de  $\mathcal{M}$ , respectivamente. La siguiente proposición nos da algunas relaciones elementales entre estos conjuntos.

**Proposición 1.1.32.** *Sea  $\mathcal{M}(E, \mathcal{J})$  un matroide y sea  $X \subseteq E$ . Entonces,*

- (i)  *$X$  es independiente si y sólo si  $E - X$  es cogenerador.*
- (ii)  *$X$  es generador si y sólo si  $E - X$  es coindependiente.*
- (iii)  *$X$  es un hiperplano si y sólo si  $E - X$  es cocircuito.*
- (iv)  *$X$  es un circuito si y sólo si  $E - X$  es un cohiperplano.*

**Demostración:** (i) Sea  $X \subseteq E(\mathcal{M})$  con  $X \in \mathcal{J}(\mathcal{M})$ . Si  $X$  es base para  $\mathcal{M}$  entonces  $E - X$  es base para  $\mathcal{M}^*$  y por la proposición 1.1.27 (ii) tenemos que  $E - X$  es un conjunto generador de  $\mathcal{M}^*$ , es decir es un cogenerador de  $\mathcal{M}$ . Si  $X$  no es base, entonces existe una base  $B$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $X \subseteq B$ . Entonces  $E - B \subseteq E - X$ , por lo que  $\mathfrak{r}(E - X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M}^*)$ . De lo anterior, por la proposición 1.1.27 (i)  $E - X$  es un conjunto generador de  $\mathcal{M}^*$ . Ahora, si  $E - X$  es un conjunto cogenerador, se cumple que  $\mathfrak{r}(E - X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M}^*)$ . Entonces  $E - X$  contiene una base de  $\mathcal{M}^*$  sea  $E - B$  ésta, donde  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ . Luego,  $E - B \subseteq E - X$  de donde se sigue que  $X \subseteq B$ , por **(I2)** tenemos que  $X$  es independiente.

(ii) Sea  $X$  un conjunto generador, entonces  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(E)$ . Por lo que  $X$  contiene una base  $B$  de  $\mathcal{M}$ . Luego,  $E - X \subseteq E - B$  por propiedad  $(I_2)$  tenemos que  $E - X$  es independiente en  $\mathcal{M}^*$ . Ahora, sea  $E - X$  coindependiente, de aquí que  $E - X$  está contenido en una base  $E - B$  de  $\mathcal{M}^*$ , donde  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ . Se sigue que,  $B \subseteq X$ , por lo que  $\mathfrak{r}(X) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Por lo tanto  $X$  es generador.

(iii) Sea  $X$  un hiperplano de  $\mathcal{M}$ , por (ii) y por la proposición 1.1.27 (iii) tenemos que los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a)  $X$  es un hiperplano de  $\mathcal{M}$ .
- (b)  $X$  es un conjunto no generador de  $\mathcal{M}$ , pero  $X \cup \{y\}$  es generador para toda  $y \notin X$ .
- (c)  $E - X$  es dependiente en  $\mathcal{M}^*$  pero  $(E - X) - \{y\}$  es independiente en  $\mathcal{M}^*$  para toda  $y \in E - X$ .
- (d)  $E - X$  es un cocircuito de  $\mathcal{M}$ .

El inciso (iv) se deduce aplicando el inciso (iii) a  $\mathcal{M}^*$ . ■

En general, agregamos un asterisco a un símbolo para denotar asociación con el dual. Por ejemplo,  $\mathfrak{r}^*$  denotará la función rango de  $\mathcal{M}^*$  mientras que  $\mathcal{C}^*$  denota su colección de circuitos. Es evidente que la siguiente proposición se cumple.

**Proposición 1.1.33.**  $\mathfrak{r}(\mathcal{M}) + \mathfrak{r}^*(\mathcal{M}) = |E(\mathcal{M})|$ .

**Lema 1.1.34.** Sean  $I$  e  $I^*$  subconjuntos disjuntos de  $E(\mathcal{M})$  tales que  $I$  es independiente e  $I^*$  es coindependiente. Entonces  $\mathcal{M}$  tiene una base  $B$  y una cobase  $B^*$  tales que  $I \subseteq B$ ,  $I^* \subseteq B^*$  con  $B$  y  $B^*$  disjuntas.

**Demostración:** En  $\mathcal{M} \setminus (E - I^*)$  el conjunto  $I$  es independiente. Por lo que está contenido en alguna base  $B$  de  $E - I^*$ . Entonces,  $\mathfrak{r}(B) = \mathfrak{r}(E - I^*)$ . Pero por la proposición 1.1.32(ii),  $E - I^*$  es un conjunto generador de  $\mathcal{M}$ , por lo que  $\mathfrak{r}(B) = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . De lo anterior tenemos que  $B$  es base para  $\mathcal{M}$ . Como  $I \subseteq B$  e  $I^* \subseteq E - B$ , se sigue que  $B$  y  $E - B$  son la base y la cobase requeridas. ■

La siguiente proposición nos da una relación entre los circuitos y los cocircuitos de un matroide.

**Proposición 1.1.35.** Si  $C$  es un circuito y  $C^*$  es un cocircuito de un matroide  $\mathcal{M}$ , entonces  $|C \cap C^*| \neq 1$ .

**Demostración:** Supongamos que  $C \cap C^* = \{x\}$ . Sea  $E(\mathcal{M}) - C^* = H$ . Por la proposición 1.1.32(iii),  $H$  es un hiperplano de  $\mathcal{M}$ , entonces  $cl(H) = H$ . Pero,  $x \in C \subseteq H \cup \{x\}$ , por la proposición 1.1.28(ii),  $x \in cl(H) - H$ , lo que es una contradicción. ■

**Proposición 1.1.36.** *Si  $x, y$  son miembros distintos de un circuito  $C$  de un matroide  $\mathcal{M}(E)$ , entonces existe un cocircuito  $C^*$  de  $\mathcal{M}(E)$  tal que  $C \cap C^* = \{x, y\}$*

**Demostración:** Dado que  $C - \{x\} \in \mathcal{J}$ , podemos extenderlo a una base  $B$  de  $\mathcal{M}$  la cual no puede contener a  $x$ . Entonces,  $E - B$  es una base para  $\mathcal{M}^*$  que interseca a  $C$  en  $x$ . Consideremos el circuito fundamental  $C^*(y, E - B)$  el cual está contenido en  $(E - B) \cup \{y\}$  e interseca a  $C$  en  $y$ . Por la proposición 1.1.35,  $C$  y  $C^*(y, E - B)$  deben intersectarse en al menos otro elemento de  $C$ . Dado que  $C \cap [(E - B) \cup \{y\}] = \{x, y\}$  se sigue que  $x \in C^*(y, E - B)$ . Por lo que  $C^*(y, E - B)$  es el cocircuito de  $\mathcal{M}$  que buscábamos. ■

Para matroides representables es más sencillo obtener su dual, más aún, el dual de un matroide  $F$ -representable es  $F$ -representable.

Debido a que los matroides  $F$ -representables están dados por una etiquetación de las columnas de una matriz sobre  $F$ , los conjuntos independientes del matroide están dados por las columnas linealmente independientes de la matriz y ya que la independencia lineal de las columnas se mantiene aplicando operaciones elementales sobre las columnas y renglones, el matroide vectorial también preserva la estructura del matroide original mediante la aplicación de estas operaciones.

Supongamos que  $A$  es una matriz no cero. Un resultado conocido de álgebra lineal es que mediante el uso de operaciones elementales, podemos reducir la matriz  $A$  a la forma  $[I_r|D]$  donde  $I_r$  es la matriz identidad de  $r \times r$ ,  $r$  es el rango de la matriz  $A$  y  $D$  es alguna matriz  $(n - r) \times r$  sobre  $F$ .

**Teorema 1.1.37.** *Si  $\mathcal{M}$  es el matroide vectorial de  $[I_r|D]$ , entonces  $\mathcal{M}^*$  es el matroide vectorial de  $[-D^T|I_{n-r}]$ .*

**Demostración:** Sea  $B$  una base para  $\mathcal{M}$ . Es suficiente probar que  $E - B$  es una base para  $[-D^T|I_{n-r}]$ . El único efecto que tiene en  $[-D^T|I_{n-r}]$  un reordenamiento de las columnas y renglones de  $[I_r|D]$  es un reordenamiento de los renglones y las columnas de  $[-D^T|I_{n-r}]$ . Supongamos que las etiquetas de las columnas de  $[I_r|D]$  y  $[-D^T|I_{n-r}]$  son  $\{e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n\}$  y que se encuentran en ese orden. Supongamos que con tal reordenamiento, para algún  $t \in \{0, 1, \dots, r\}$ ,  $B = \{e_{r-t}, e_{r-t+1}, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{2r-t}\}$ .

Entonces,  $[I_r|D]$  puede partirse en bloques de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} e_1 \dots e_{r-t} & e_{r-t+1}, \dots, e_r & e_{r+1}, \dots, e_{2r-t} & e_{2r-t+1}, \dots, e_n \\ I_{r-t} & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & I_t & D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & D_1 \\ \hline I_t & D_3 \end{array} \right)$$

tiene rango  $r$  ya que  $B$  es una base. Entonces,  $D_1$  y por lo tanto  $D_1^T$ , tienen rango  $r-t$ . La partición de  $[I_r|D]$  induce la siguiente partición en  $[-D^T|I_{n-r}]$ :

$$\begin{pmatrix} e_1 \dots e_{r-t} & e_{r-t+1}, \dots, e_r & e_{r+1}, \dots, e_{2r-t} & e_{2r-t+1}, \dots, e_n \\ -D_1^T & -D_3^T & I_{r-t} & 0 \\ -D_2^T & -D_4^T & 0 & I_{n-(2r-t)} \end{pmatrix}$$

En esta matriz, la submatriz correspondiente a  $E - B$  es:

$$\left( \begin{array}{c|c} -D_1^T & 0 \\ \hline -D_2^T & I_{n-(2r-t)} \end{array} \right)$$

Su rango, es la suma de los rangos de  $I_{n-(2r-t)}$  y  $-D_1^T$ , que es  $(n-(2r-t)) + (r-t) = n-r$ . Por lo tanto,  $E - B$  es una base para el matroide vectorial  $[-D^T|I_{n-r}]$ . ■

## 1.2. Matroides Binarios

H. Whitney fue el primero en considerar el problema de buscar condiciones necesarias para que un matroide  $\mathcal{M}$  sea gráfico. Por lo que se comenzaron a observar propiedades de los matroides gráficos que no se cumplían para matroides en general.

Por ejemplo, es un resultado conocido que si  $C_1$  y  $C_2$  son dos conjuntos distintos de ciclos de una gráfica  $G$ , la diferencia simétrica  $C_1 \Delta C_2 = (C_1 - C_2) \cup (C_2 - C_1)$  debe ser unión de ciclos disjuntos de  $G$ . Por lo que una condición necesaria para que un matroide sea gráfico, es que para cualesquiera dos circuitos  $C_1$  y  $C_2$  de  $\mathcal{M}$ , su diferencia simétrica debe ser unión disjunta de circuitos. En un matroide arbitrario la diferencia simétrica podría ser un conjunto independiente.

La caracterización final para que un matroide sea gráfico fue dada por Tutte, quien introdujo el concepto de matroide binario como un matroide determinado por un grupo de cadenas sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Un **Matroide Binario** es aquél que es representable sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Los matroides binarios pueden caracterizarse de varias maneras. Ocho de las cuales se mencionan en el primer teorema de esta sección. La prueba de este teorema requerirá el siguiente lema.

**Lema 1.2.1.** *Si  $e$  es un elemento de un conjunto independiente  $I$  de un matroide  $\mathcal{M}$ , entonces  $\mathcal{M}$  tiene un cocircuito  $C^*$  tal que  $C^* \cap I = \{e\}$ .*

**Demostración:** Sea  $I$  un subconjunto independiente de  $\mathcal{M}$  y sea  $e \in I$ . Podemos extender  $I$  a una base  $B$  de  $\mathcal{M}$ , entonces  $E - B = B^*$  es una base de  $\mathcal{M}^*$  que no contiene a  $e$ , por lo que existe un cocircuito fundamental  $C^*(B^*, e)$  que contiene a  $e$  y es tal que  $C^*(B^*, e) \cap I = \{e\}$ . ■

**Teorema 1.2.2.** *Los siguientes enunciados son equivalentes para un matroide  $M$  :*

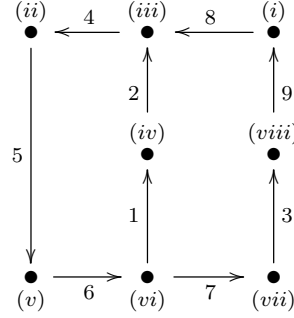
- i.  $M$  es binario.*
- ii. Si  $C$  es un circuito y  $C^*$  es un cocircuito, entonces  $|C \cap C^*|$  es par.*
- iii. Si  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos distintos, entonces  $C_1 \Delta C_2$  contiene un circuito.*
- iv. Si  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos distintos, entonces  $C_1 \Delta C_2$  es unión disjunta de circuitos.*
- v. La diferencia simétrica de cualquier conjunto de circuitos es vacía o bien contiene un circuito.*
- vi. La diferencia simétrica de cualquier conjunto de circuitos es una unión disjunta de circuitos.*
- vii. Si  $B$  es una base y  $C$  un circuito, entonces*

$$C = \Delta_{e \in C-B} C(B, e)$$

- viii. Existe una base  $B$  de  $M$  tal que si  $C$  es un circuito, entonces*

$$C = \Delta_{e \in C-B} C(B, e)$$

En el siguiente diagrama cada flecha corresponde a una implicación y los números corresponden al orden en el cual se probarán las implicaciones.



**Demostración:** Las tres primeras implicaciones son fáciles de ver. Comenzaremos entonces por mostrar la implicación (4) del diagrama. Supongamos que  $M$  satisface (iii) pero no (ii). Sea  $C$  un circuito y  $C^*$  un cocircuito para el cual  $|C \cap C^*|$  es impar y tal que de todos los pares  $(C, C^*)$  se tenga que  $|C \cap C^*|$  es mínima. Por la proposición 1.1.35,  $C$  y  $C^*$  no pueden intersectarse en un solo elemento, por lo que podemos encontrar tres elementos distintos  $x, y$  y  $z$  en su intersección. Por el dual de la proposición 1.1.36, existe un circuito  $C_1$  tal que  $C^* \cap C_1 = \{x, y\}$ . Dado que  $x \in C \cap C_1$  y  $z \in C - C_1$ , existe un circuito  $C_2$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $z \in C_2 \subseteq (C \cup C_1) - \{x\}$ . Escogemos  $C_2$  de manera que  $C_2 \cup C$  sea minimal. Sea  $C_3$  un circuito tal que  $x \in C_3 \subseteq (C \cup C_2) - \{z\}$ , y sea  $C_4$  un circuito tal que  $z \in C_4 \subseteq (C \cup C_3) - \{x\}$ . Es claro que  $C \cup C_4 \subseteq C \cup C_3 \subseteq C \cup C_2$ . Pero  $z \in C_4$  y es fácil ver que  $C_4 \subseteq (C \cup C_1) - \{x\}$ . Por la minimalidad de  $C \cup C_2$  tenemos que  $C \cup C_2 \subseteq C \cup C_4 \subseteq C \cup C_3 \subseteq C \cup C_2$ . Entonces  $C_3 - C = C_2 - C$  y por lo tanto

$$C_2 \Delta C_3 = (C_2 - C_3) \cup (C_3 \cup C_2) \subseteq C.$$

Como  $C_2 \neq C_3$  se sigue de (iii) que  $C_2 \Delta C_3$  contiene un circuito, por lo que  $C_2 \Delta C_3 = C$ .

Pero por construcción  $|C_2 \cap C^*|$  y  $|C_3 \cap C^*|$  son positivas y estrictamente menor que  $|C \cap C^*|$ . Pero si  $C_2 \Delta C_3 = C$ ,  $C \Delta C_2 = C_3$  por lo que si  $|C_2 \cap C^*|$ ,  $|C_3 \cap C^*|$  son ambas pares, entonces  $|C \cap C^*|$  debe ser par. Por lo cual una de las dos cardinalidades debe de ser impar, lo que contradice la minimalidad de la cardinalidad de  $C \cap C^*$ . Lo anterior demuestra que (iii) implica (ii).

Para probar la implicación (5), supongamos que (ii) se cumple pero (v) no. Entonces  $\mathcal{M}$  tiene un conjunto de circuitos distintos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  tales que  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k$  es no vacía e independiente. Por lo que por el lema 1.2.1, existe un cocircuito  $C^*$

tal que intersecta a  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k$  en un solo elemento. Por lo que  $1 = |C^* \cap (C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k)| = |(C^* \cap C_1) \Delta (C^* \cap C_2) \Delta \dots \Delta (C^* \cap C_k)|$ . Pero por (ii)  $|C^* \cap C_i|$  es par para toda  $i$ . Por lo cual  $|(C^* \cap C_1) \Delta (C^* \cap C_2) \Delta \dots \Delta (C^* \cap C_k)|$  es par. Se sigue de esta contradicción que (v) implica (vi).

Ahora asumamos que (v) se cumple pero (vi) no. Sea  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  un conjunto de circuitos para los cuales  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k$  no es unión disjunta de circuitos de entre estos tomamos el cual tiene  $|C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k|$  minima. Por (v),  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k$  contiene un circuito  $D_1$ , y claramente  $|C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k \Delta D_1| < |C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k|$ . Por lo que  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k \Delta D_1$  es unión disjunta de circuitos, por lo cual también  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k$ . Lo cual es una contradicción lo cual completa la prueba (v) implica (vi).

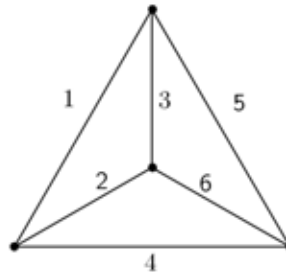
Para mostrar que (vi) implica (vii), asumamos que (vi) se cumple, sea  $C$  un circuito y  $B$  una base de  $\mathcal{M}$ . Evidentemente  $C - B = (\Delta_{e \in C-B} C(B, e)) - B$ . Si  $C \neq \Delta_{e \in C-B} C(B, e)$ , entonces  $C \Delta (\Delta_{e \in C-B} C(B, e))$  es no vacía y por (vi), es dependiente. Lo cual es una contradicción ya que  $C \Delta (\Delta_{e \in C-B} C(B, e)) \subseteq B$ . Entonces  $C = \Delta_{e \in C-B} C(B, e)$  por lo que (vi) implica (vii).

Ahora mostraremos que (i) implica (iii). Supongamos que (i) se cumple y que  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos distintos de  $\mathcal{M}$ . Sea  $\psi : E(\mathcal{M}) \rightarrow V(r, 2)$  una coordenalización de  $\mathcal{M}$  donde  $r = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Dado que  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos,  $\sum_{e \in C_1} \psi(e) = 0 = \sum_{e \in C_2} \psi(e)$ . Por lo que  $\sum_{e \in C_1} \psi(e) + \sum_{e \in C_2} \psi(e) = 0$ . Si  $e \in C_1 \cap C_2$ , entonces  $\psi(e)$  aparece dos veces en la ecuación anterior. Por lo que  $\sum_{e \in C_1 \Delta C_2} \psi(e) = 0$ , por lo que  $C_1 \Delta C_2$  debe de contener un circuito de  $\mathcal{M}$ . Se concluye que (i) implica (iii).

Finalmente probaremos que (viii) implica (i). La prueba hará uso de las implicaciones que ya probamos. En particular, usaremos el hecho de que si un matroide binario satisface (iii), satisface (i) - (vii). Supongamos que  $\mathcal{M}$  satisface (viii), esto es,  $\mathcal{M}$  posee una base  $B$  tal que si  $C$  es un circuito de  $\mathcal{M}$ , entonces  $C = \Delta_{e \in C-B} C(B, e)$ . Sea  $X$  el  $B$ -circuito-fundamental de matriz de incidencia de  $\mathcal{M}$  y sea  $\mathfrak{r}(\mathcal{M}) = r$ . Entonces, visto sobre  $\mathbb{Z}_2$ , la matriz  $[I_r | X]$  representa un matroide binario. Mostraremos que este matroide es igual a  $\mathcal{M}$ . Primero observemos que  $B$  es una base para  $\mathcal{M}([I_r | X])$  y que si  $e \in E(\mathcal{M}) - B$ , entonces  $C_{\mathcal{M}}(e, B)$  es un circuito de  $\mathcal{M}([I_r | X])$ . Por lo que podemos omitir el subíndice sin causar ambigüedad. Sea  $C$  un circuito de  $\mathcal{M}$ . Entonces por (viii),  $C = \Delta_{e \in C-B} C(B, e)$ . Dado que  $C(B, e)$  es un circuito del matroide binario  $\mathcal{M}([I_r | X])$ , se sigue por (vi), que  $\Delta_{e \in C-B} C(B, e)$  es una unión disjunta de circuitos

de  $\mathcal{M}([I_r|X])$ . Podemos deducir que todo circuito de  $\mathcal{M}$  es dependiente en  $\mathcal{M}([I_r|X])$  por lo que todo independiente en  $\mathcal{M}([I_r|X])$  es independiente en  $\mathcal{M}$ . Para completar la prueba de  $\mathcal{M}([I_r|X]) = \mathcal{M}$ , lo que implica que  $\mathcal{M}$  es binario, mostraremos que todo circuito de  $\mathcal{M}([I_r|X])$  es un circuito de  $\mathcal{M}$ . Sea  $D$  un circuito de  $\mathcal{M}([I_r|X])$  y escogemos  $e \in D - B$ . Entonces  $D - \{e\}$  está contenido en una base  $B_1$  de  $\mathcal{M}([I_r|X])$  tal que  $B_1 \subseteq (B \cup D) - \{e\}$ . Más aún  $D$  es el único circuito de  $\mathcal{M}([I_r|X])$  que está contenido en  $B_1 \cup \{e\}$ . Como  $B_1$  es independiente en  $\mathcal{M}([I_r|X])$  es independiente en  $\mathcal{M}$ . Se sigue que,  $|B_1| = r = \mathfrak{r}(\mathcal{M})$ . Por lo que  $B_1$  es una base para  $\mathcal{M}$ . Ahora, por lo anterior  $C_{\mathcal{M}}(e, B_1)$  es una unión disjunta de circuitos de  $\mathcal{M}([I_r|X])$ . Pero  $C_{\mathcal{M}}(e, B_1) \subseteq B_1 \cup \{e\}$ , pero  $D$  es el único circuito de  $\mathcal{M}([I_r|X])$  contenido en  $B_1 \cup \{e\}$ , por lo que  $C_{\mathcal{M}}(e, B_1) = D$  con lo que concluimos que  $D$  es un circuito de  $\mathcal{M}$ . ■

**Ejemplo 1.3.** Consideremos de nuevo el matroide grafico de  $K_4$ .



Una representación para este matroide está dada por las columnas de la matriz  $A$  sobre  $\mathbb{Z}_2$ :

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

la base canónica para esta representación es  $\{1, 2, 4\}$  cuyas etiquetas corresponden a un árbol generador en  $K_4$ . Denotaremos a la base canónica por  $B$ ; con esta base tenemos

tres circuitos fundamentales:

$$C(B, 3) = \{1, 2, 3\}$$

$$C(B, 5) = \{1, 4, 5\}$$

$$C(B, 6) = \{2, 4, 6\}$$

calculemos la diferencia simétrica dos a dos de los circuitos fundamentales:

$$C(B, 3) \Delta C(B, 5) = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$C(B, 3) \Delta C(B, 6) = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$C(B, 5) \Delta C(B, 6) = \{1, 2, 5, 6\}$$

estos conjuntos corresponden a los ciclos de tamaño 4 en  $K_4$ . Lo único que nos faltaría es calcular la diferencia simétrica de los tres circuitos fundamentales:

$$C(B, 3) \Delta C(B, 5) \Delta C(B, 6) = \{3, 5, 6\}$$

Por la última caracterización del teorema, cualquier circuito del matroide  $\mathcal{M}(K_4)$  se escribe como diferencia simétrica de los circuitos fundamentales. Por lo tanto los únicos circuitos del matroide son:

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 6, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}\}.$$

Del ejemplo anterior podemos observar que trabajar con los circuitos fundamentales y sus diferencias simétricas en matroides binarios genera todos los circuitos del matroide.

Dado un matroide binario  $\mathcal{M}$  en un conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , el espacio de circuitos y espacio de cocircuitos de  $\mathcal{M}$  son subespacios vectoriales de  $V(n, \mathbb{Z}_2)$ , los cuales están generados por los vectores de incidencia de los circuitos y cocircuitos de  $\mathcal{M}$ .

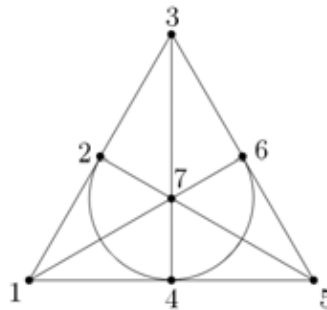
Si  $A$  es una representación binaria de un matroide binario  $\mathcal{M}$  de rango  $r$ , entonces el espacio de cocircuitos de  $\mathcal{M}$  es igual al espacio de renglones de  $A$ . Más aún, este espacio es de dimensión  $r$  y es el subespacio ortogonal al espacio de circuitos de  $\mathcal{M}$ .

### 1.2.1. Matroides Eulerianos y Bipartitos

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, el estudio de los matroides binarios surge al buscar propiedades de matroides gráficos que no se cumplen en general. Es bien sabido que una gráfica plana es euleriana si y sólo si su dual geométrico es bipartito. En el artículo [Wel69] Welsh prueba el teorema equivalente para matroides binarios, donde un matroide  $\mathcal{M}(E)$  es llamado **matroide euleriano** si existen circuitos disjuntos cuya unión es  $E$  y es un **matroide bipartito** si todo circuito tiene cardinalidad par.

Lo que haremos a continuación será dar algunos ejemplos de matroides eulerianos y bipartitos. El matroide euleriano que presentamos, es un ejemplo importante en teoría de matroides y es llamado el **matroide de Fano** el cual se denota por  $F_7$ . El matroide de Fano es el plano proyectivo más pequeño  $PG(2, 2)$ , donde  $PG(2, 2)$  denota la geometría proyectiva de rango 3 sobre un campo de característica 2, y es un menor excluido para la clase de matroides gráficos, cográficos y regulares, esto es, si mediante operaciones de borrado y contracción sobre los elementos de un matroide aparece  $F_7$  entonces el matroide no es gráfico, ni regular, ni cográfico.

**Ejemplo 1.4.** El matroide de Fano,  $F_7$ , es representable sobre  $\mathbb{Z}_2$  y por lo tanto es un matroide binario. Una representación geométrica para este matroide aparece a continuación.



Los elementos de este matroide son las etiquetas de los puntos  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Como ya mencionamos antes el matroide de Fano es una geometría proyectiva, en la cual cada 3 puntos no colineales son independientes. El matroide de Fano tiene dos

tipos de circuitos: los formados por tres puntos colineales y los de cuatro puntos que no contienen una línea. Una representación de el matroide de Fano está dada por la siguiente matriz sobre  $\mathbb{Z}_2$ :

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Si consideramos el circuito  $C_1 = \{3, 5, 6\}$  y el circuito  $C_2 = \{1, 2, 4, 7\}$ , su unión es  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , por lo tanto, el matroide de Fano es un matroide Euleriano y como consecuencia del teorema de Welsh para matroides binarios y eulerianos, el dual de Fano,  $F_7^*$ , es un matroide bipartito.

Los matroides uniformes  $U_{m,n}$  nos dan otro ejemplo de matroides eulerianos, pero estos a su vez pueden ser también un ejemplo de matroides bipartitos.

**Ejemplo 1.5.** Sea  $U_{m,n}$  un matroide uniforme, los circuitos del matroide uniforme son todos los subconjuntos de cardinalidad  $m + 1$ , por lo tanto, para que el matroide uniforme sea euleriano es necesario que  $m + 1$  divida a  $n$ . Ahora bien, para que un matroide uniforme sea bipartito es necesario que  $m$  sea un número impar. Por lo anterior el matroide uniforme  $U_{3,8}$  es un matroide euleriano y bipartito.

# Capítulo 2

## Matrices Intercaladas

En este capítulo hacemos un estudio de las definiciones principales y resultados importantes de matrices intercaladas. Como se menciona en la introducción, las matrices intercaladas son objetos combinatorios que están relacionados con el problema de sumas de cuadrados.

### 2.1. Definición y Resultados Principales

**Definición 2.1.1.** Sea  $M$  es una matriz de  $r \times s$  y  $M(i, j)$  la entrada que se encuentra en el renglón  $i$  columna  $j$  de  $M$ . Decimos que  $M$  es una matriz **intercalada** si:

- (a) Sus entradas (a partir de este momento llamadas **colores**) en cada renglón y cada columna son distintos.
- (b) Si  $M(i, j) = M(i', j')$  entonces  $M(i, j') = M(i', j)$ .

Una matriz intercalada es del tipo  $(r, s, n)$  si es una matriz de  $r \times s$  y tiene a lo más  $n$  colores distintos.

Las submatrices de  $M$  de tamaño  $2 \times 2$  con 2 colores distintos son llamadas **intercalaciones**, mientras que las de 4 colores distintos son llamadas **co-intercalaciones**.

**Ejemplo 2.1.** Consideremos la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar los colores por renglón y por columna son distintos. Tomemos la entrada  $M(1, 1)$  la cual tiene color 1 al igual que la entrada  $M(4, 4)$ , por lo que las entradas  $M(1, 4)$  y  $M(4, 1)$  deben tener el mismo color y como podemos observar de la matriz, esto pasa, ambas entradas tienen el color 4. De hecho en  $M$  cada vez que la entrada  $M(i, j)$  tiene el mismo color que la entrada  $M(i', j')$  el color de la entrada  $M(i, j')$  es el mismo que el color de la entrada  $M(i', j)$ . Podemos concluir entonces que la matriz  $M$  es intercalada.  $\square$

Las matrices intercaladas y su signado se conocían desde la época de Cayley y fueron recuperadas como herramienta en el estudio del problema de suma de cuadrados por Yuzvinsky [Yuz81] a las cuales nombró como “monomial pairings”.

## 2.2. Matrices Intercaladas Diádicas $D_n$

A continuación caracterizaremos las matrices intercaladas que pueden encajarse en una tabla de Cayley de un grupo de exponente 2, tales matrices son llamadas matrices diádicas. La notación y los resultados que utilizaremos en esta sección fueron presentados en el artículo [CGMB97a].

Consideramos el grupo de exponente dos  $(\mathbb{N}, \oplus)$ , donde  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  y  $\oplus$  es la **suma diádica** (también nombrada: Bitxor o Nim) definida como sigue: dados  $a, b$  en  $\mathbb{N}$  tomamos su representación binaria y sumamos componente a componente modulo 2 para obtener  $a \oplus b$ . En lo que sigue consideraremos a  $\mathbb{N}$  como un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Z}_2$ .

**Ejemplo 2.2.** Tomemos a los números 7 y 9 su representación binaria es:

$$7 = 0111_2$$

$$9 = 1001_2$$

entonces  $7 \oplus 9 = 1110_2 = 14$ .

La tabla de Cayley de  $(\mathbb{N}, \oplus)$  es una matriz infinita a la cual denotaremos por  $D[\mathbb{N} : \mathbb{N}]$ . Para subconjuntos ordenados ascendentemente  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  y  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$  de  $\mathbb{N}$ , denotamos por  $D[R : C]$  a la submatriz de  $D[\mathbb{N} : \mathbb{N}]$  de tamaño  $p \times q$  la cual tendrá como  $(i, j)$ -ésima entrada el color  $r_i \oplus c_j$ ;  $R$  y  $C$  son llamados los **generadores renglón** y **columna de la matriz**  $D[R : C]$ , respectivamente. Cuando  $R = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  y  $C = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  denotaremos a la submatriz por  $D[m : n]$ .

**Ejemplo 2.3.** Sea  $R = \{0, 3, 5, 6\}$  y  $C = \{1, 2, 4, 7\}$  entonces  $D[R, C]$  está dada por la siguiente tabla de Cayley

$\oplus$	1	2	4	7
0	1	2	4	7
3	2	1	7	4
5	4	7	1	2
6	7	4	2	1

Las matrices de tipo  $D[2^n, 2^n]$  (ver figura 2.1) son tablas de Cayley de todos los posibles grupos de exponente dos (salvo isomorfismo) a las cuales denotaremos por  $D_n$ .

Las matrices intercaldas que consideramos se asumen finitas y que sus colores pertenecen a  $\mathbb{N}$ .

Dos matrices intercaldas son llamadas **isotópicas** si podemos llevar una a la otra permutando sus renglones o columnas y si es necesario reetiquetando sus colores. La isotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de matrices intercaldas. En estos términos una matriz intercaldada es **diádica** si es isotópica a la matriz  $D[R : C]$ , para algunos generadores  $R$  y  $C$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 15 & 14 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 12 & 13 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 13 & 12 & 15 & 14 & 9 & 8 & 11 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 14 & 15 & 12 & 13 & 10 & 11 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 15 & 14 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 & 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 13 & 12 & 15 & 14 & 9 & 8 & 11 & 10 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 14 & 15 & 12 & 13 & 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.1:  $D[16 : 16]$ 

### 2.2.1. La Estructura Recursiva de $D_n$

Una de las maneras de generar matrices intercaladas a partir de otras es por medio del producto tensorial de matrices (producto de Kronecker). Supongamos que  $A = (a_{i,j})$  y  $B = (b_{k,l})$  son matrices intercaladas de tipos  $(r_1, s_1, n_1)$  y  $(r_2, s_2, n_2)$  respectivamente. Entonces  $A \otimes B = (c_{ik,jl})$  es una matriz intercalada del tipo  $(r_1 r_2, s_1 s_2, n_1 n_2)$ , donde el color  $c_{ik,jl}$  es el par ordenado  $(a_{i,j}, b_{k,l})$  y los índices de los renglones  $(i, k)$  y de las columnas  $(j, l)$  deben estar listados en un orden definido. Visto como matriz por bloques el producto tensorial esta definido de la siguiente manera:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1j}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}B & \cdots & a_{ij}B \end{pmatrix}$$

La matriz  $A \otimes B$  es intercalada si y sólo si  $A$  y  $B$  son matrices intercaladas. A la hora de escribir el producto tensorial reetiquetamos los colores como enteros de 0 a  $n - 1$ .

Comenzando con  $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tenemos que

$$D_2 = D_1 \oplus D_1 = \left( \begin{array}{c|c} 0D_1 & 1D_1 \\ \hline 1D_1 & 0D_1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 01 & 00 & 11 & 10 \\ \hline 10 & 11 & 00 & 01 \\ 11 & 10 & 01 & 00 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

repetiendo el proceso una vez más:

$$D_3 = D_1 \otimes D_1 \otimes D_1 = D_2 \otimes D_1 = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La conversión de pares ordenados se hace haciendo la conversión de base binaria a decimal. Este proceso recursivo puede repetirse para obtener todas las matrices intercaladas diádicas  $D[2^n, 2^n]$  que son las matrices intercaladas del tipo  $(2^n, 2^n, 2^n)$ . Con este producto tensorial obtenemos la forma inductiva de definir  $D_n$  :

$$D_0 = (0) \quad \text{y} \quad D_{n+1} = \begin{pmatrix} D_n & 2^n J_{2^n} + D_n \\ 2^n J_{2^n} + D_n & D_n \end{pmatrix}$$

donde  $J_{2^n}$  denota a la matriz con todas sus entradas uno de tamaño  $2^n \times 2^n$ .

## 2.3. Criterios para reconocer Matrices Diádicas

Ya que sabemos cuales son las matrices diádicas mencionaremos algunos de los criterios para reconocer cuando una matriz intercalada es diádica.

### 2.3.1. Criterio de Cointercalaciones

**Lema 2.3.1** ([CGMB97a, pag. 60]). *Una matriz intercalada es diádica si y sólo si existe un reetiquetamiento de sus colores para los cuales cada cointercalación tiene suma diádica cero.*

Este lema nos proporciona un método para verificar si dada una matriz intercalada  $M$  es diádica. El método consiste en encontrar nuevas etiquetas  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$  para los

colores  $m_1, \dots, m_n$  de  $M$ , por medio de un sistema de ecuaciones y desigualdades.

$$x_i \oplus x_j \oplus x_k \oplus x_l = 0 \quad \text{para cada cointercalacion con colores } m_1, m_j, m_k, m_l \text{ y, (1)}$$

$$x_i \oplus x_j \neq 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j. \text{ (2)}$$

**Ejemplo 2.4.** Retomemos el ejemplo 2.1 la matriz  $M$  es intercalada, lo que haremos será utilizar el criterio anterior para probar que es diádica. La submatriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de  $M$  es una co-intercalación, con suma diádica igual a cuatro, observemos que  $1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 7 = 0$  y que:

$$1 \oplus 2 \neq 0$$

$$1 \oplus 4 \neq 0$$

$$1 \oplus 7 \neq 0$$

$$2 \oplus 4 \neq 0$$

$$2 \oplus 7 \neq 0$$

$$4 \oplus 7 \neq 0$$

Por el lema anterior la matriz  $M$  es diádica ya que es isotópica a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.3.2. Criterio de Intercalaciones

**Lema 2.3.2.** *Una matriz intercalada  $M$  es diádica si y sólo si existen conjuntos de etiquetas  $R$  para los renglones y  $C$  para las columnas con la propiedad de que las etiquetas de dos renglones tienen la misma suma diádica que las etiquetas de dos columnas, cuando y sólo cuando, tales renglones y columnas determinan una intercalación de  $M$ .*

Para este criterio uno debe buscar etiquetas  $r_1, \dots, r_q \in \mathbb{N}$  para las columnas y etiquetas  $c_1, \dots, c_q \in \mathbb{N}$  para las columnas de tal manera que:

$$r_i \oplus r_j \oplus c_k \oplus c_l = 0 \quad \text{cuando } r_i, r_j, c_k, c_l \text{ determinan una intercalación, (3)}$$

$$r_i \oplus r_j \oplus c_k \oplus c_l \neq 0 \quad \text{cuando } r_i, r_j, c_k, c_l \text{ determinan una cointercalación, (4)}$$

$$r_i \oplus r_j \neq 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, p; i \neq j, \text{ (5)}$$

$$c_k \oplus c_l \neq 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, q; i \neq j. \text{ (6)}$$

**Ejemplo 2.5.** Tomemos de nuevo la tabla de Cayley del ejemplo 2,3.

$\oplus$	1	2	4	7
0	1	2	4	7
3	2	1	7	4
5	4	7	1	2
6	7	4	2	1

Observemos que el etiquetamiento de las columnas y los renglones cumple con el criterio de intercalaciones, ya que la suma diádica de los renglones y de las columnas es cero y siempre que tenemos una intercalación la suma diádica de sus generadores renglón y columna es la misma. Observemos la intercalación formada por los generadores renglón  $\{3, 5\}$  y generadores columna  $\{2, 4\}$  con colores  $\{1, 7\}$ , si calculamos la suma diádica de los renglones y las columnas tenemos:

$$3 \oplus 5 = 2 \oplus 4 = 6$$

por lo que la suma diádica de los generadores renglón más los generadores columna es cero. Consideremos ahora la cointercalacion formada por los renglones  $\{5, 6\}$  y columnas  $\{2, 4\}$  y calculemos la suma diádica:

$$5 \oplus 6 = 3$$

$$2 \oplus 4 = 6$$

Por lo que la suma diádica de los generadores renglón y columna para la cointercalación es distinta de cero.

## 2.4. Matrices Intercaladas No Diádicas

Es importante hacer notar que no todas las matrices intercaladas son matrices diádicas, es decir, no todas las matrices intercaladas son isotópicas a una submatriz de  $D_n$ , veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.6.** Tomemos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 7 & 6 \\ 11 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la matriz  $A$  es diádica, entonces existe un reetiquetamiento  $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  de las columnas y  $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  de los renglones con la propiedad de que las etiquetas de dos renglones tienen la misma suma diádica que las etiquetas de dos columnas, si y sólo si, tales renglones y columnas determinan una intercalación de  $A$ , entonces se debe de cumplir:

$$r_1 \oplus r_2 = c_1 \oplus c_2,$$

$$r_1 \oplus r_2 = c_3 \oplus c_4,$$

$$r_3 \oplus r_4 = c_1 \oplus c_2,$$

pero lo anterior implica que  $r_3 \oplus r_4 = c_3 \oplus c_4$  lo cual es una contradicción ya que estas etiquetas deberían determinar una cointercalación, por lo tanto  $A$  es una matriz intercalada no diádica.

## 2.5. El Problema de Signado de una Matriz

El problema de signado de una matriz intercalada está fuertemente relacionado con el problema de formas cuadráticas. Una forma de composición del tipo  $[r, s, n]$  es una fórmula de suma de cuadrados del tipo

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

donde  $X = (x_1, \dots, x_r)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_s)$  son sistemas de indeterminados y cada  $z_k = z_k(X, Y)$  es una forma bilineal en  $X$  e  $Y$ .

Yuzvinsky [Yuz81] fue el primero que estudio sistemáticamente las matrices intercaladas y su signado (a las cuales llamó “monomial parings”), reformulando el problema  $[r, s, n]_{\mathbb{Z}}$  en términos de matrices intercaladas, por lo que la obtención de un signado consistente en una matriz intercalada del tipo  $(r, s, n)$  nos da una forma cuadrática del tipo  $[r, s, n]_{\mathbb{Z}}$  y viceversa. Determinar cuando una matriz intercalada es signable se conoce como el problema de signado [Sha00].

**Definición 2.5.1.** Una matriz intercalada  $M$  es **signable** si existen  $\varepsilon_{ij} = \pm 1$  tal que:

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{i'j'}\varepsilon_{i'j}\varepsilon_{ij'} = -1$$

siempre que  $M(i, j) = M(i', j')$  y  $i \neq i'$  y  $j \neq j'$ .

La definición anterior nos dice que una matriz intercalada es signable siempre y cuando todas las intercalaciones de la matriz tengan un número impar de signos negativos.

**Lema 2.5.2.** *Existe una formula del tipo  $[r, s, n]_{\mathbb{Z}}$*

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

donde cada  $z_k = z_k(X, Y)$  es una forma bilineal en  $X$  e  $Y$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ , si y sólo si existe una matriz intercalada signable del tipo  $(r, s, n)$ .

**Demostración:** Si  $x = \sum_i x_i a_i \in \mathbb{Z}^r$  e  $y = \sum_j y_j b_j \in \mathbb{Z}^s$  entonces  $f(x, y) = \sum_k z_k c_k$  donde  $z_k = \sum \varepsilon_{ij} x_i y_j$  sumado sobre toda  $i, j$  tal que  $M(i, j) = k$ . Entonces los términos de  $z_k$  corresponden a las ocurrencias del color  $k$  en la matriz de incidencia. ■

**Ejemplo 2.7.** Tomemos la matriz  $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  un signado para esta matriz es asignar un signo negativo al color de la entrada del segundo renglón primera columna de  $D_1$  (recordemos que las entradas de la matriz representan colores)

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que hacemos para pasar de una matriz intercalada a una forma cuadrática es asignar índices de indeterminados a los renglones  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  y a las columnas  $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$ , es decir, la entrada  $(i, j)$  de la matriz intercalada está representada por  $\pm x_i y_j$  en la forma cuadrática, el signo que tendrá en la forma cuadrática depende del signado de la matriz. Los colores de las matrices intercaladas nos dan los distintos  $z_i$ . Regresando a nuestro ejemplo,  $D_1$  tiene las siguientes formas bilineales en términos de  $X$  e  $Y$ :

$$z_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

hay solo dos  $z_i$  ya que la matriz intercalada tiene solo dos colores distintos  $z_1$  tiene los indeterminados con color cero en la matriz intercalada y  $z_2$  los del color 1. Entonces tenemos la siguiente forma cuadrática:

$$(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = z_1^2 + z_2^2$$

Esta fórmula se interpreta como la ley de módulos de los número complejos  $|\alpha||\gamma| = |\alpha\gamma|$  donde  $\alpha = x_1 - ix_2$  y  $\gamma = y_1 + iy_2$ .

De la misma manera si tenemos una forma cuadrática del tipo  $[r, s, n]_{\mathbb{Z}}$  entonces tenemos una matriz intercalada del tipo  $(r, s, n)$  signada.

En el caso de matrices diádicas,  $D_n$  no es signable para  $n > 3$ , y esto es consecuencia del **Teorema 1,2,4,8** el cual fue probado por Hurwitz en 1898 [Hur98], en el cual muestra que existe una forma de composición  $[n, n, n]$  si y sólo si  $n = 1, 2, 4$  o  $8$ . Ya que las formas de composición están relacionadas con las álgebras división normadas el teorema que probó Hurwitz nos dice, que las únicas álgebras de división que existen son las de dimensión 1 los reales  $\mathbb{R}$ , dimensión 2 los complejos  $\mathbb{C}$ , dimensión 4 los cuaternios  $\mathcal{H}$  y de dimensión 8 los octonios  $\mathcal{O}$ .



# Capítulo 3

## Matroides Intercalados

Lo que haremos en este capítulo será mostrar que el problema de signado de matrices intercaladas es equivalente a un problema de reconocimiento de matroides bipartitos.

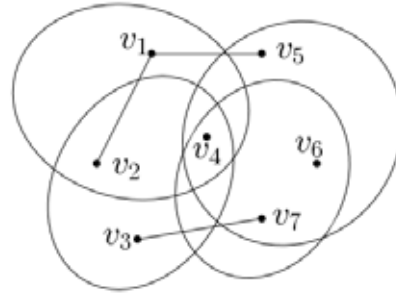
### 3.1. Los Matroides Intercalados y su Relación con el Signado de Matrices Intercaladas

La observación hecha por Calvillo et al. [GP00] que motivó esta tesis es que el problema de signado de una matriz intercalada es un problema de matroides. Para cambiar el problema de signado de matrices intercaladas a un problema de matroides es necesario introducir el concepto de hipergráficas. Una hipergráfica es una generalización de las gráficas en la cual sus aristas pueden tener más de dos vértices.

**Definición 3.1.1.** Una hipergráfica  $H$  es un par ordenado  $(V(H), E(H))$  donde  $V(H)$  es un conjunto finito llamado **conjunto vértices** y  $E(H)$  es una colección de subconjuntos no vacíos de  $V(H)$  llamados **hiperaristas o líneas**.

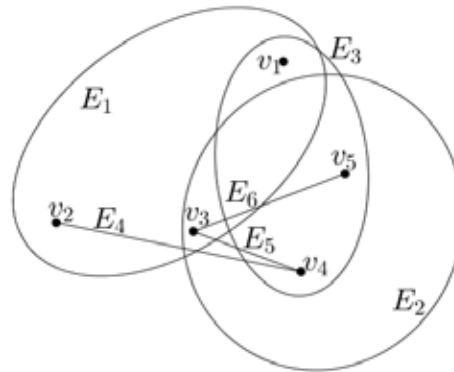
Las hiperaristas con dos puntos terminales, las representamos con un segmento de recta, mientras que las hiperaristas con más de dos elementos son representadas por una curva cerrada simple la cual encierra a los vértices que la conforman.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $H = (V(H), E(H))$  donde  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$  y  $E(H) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_3, v_7\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_4, v_6, v_7\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7\}\}$ . Una representación de ésta hipergráfica aparece a continuación:



Una hipergráfica  $H$  es **signable** si existe un subconjunto  $X$  de vértices tal que la intersección de este conjunto con cualquier hiperarista de  $H$  tiene cardinalidad impar.

**Ejemplo 3.2.** Sea  $H$  la hipergráfica con conjunto de vértices  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$  y conjunto de hiperaristas  $E(H) = \{E_1, \dots, E_6\}$  con  $E_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $E_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E_3 = \{v_1, v_4, v_5\}$ ,  $E_4 = \{v_2, v_4\}$ ,  $E_5 = \{v_3, v_4\}$ ,  $E_6 = \{v_3, v_5\}$ .



Para esta hipergráfica el conjunto  $X = \{v_1, v_2, v_3\}$  intersecciona a todas las hiperaristas en un número impar de elementos, por lo tanto la hipergráfica  $H$  es signable.  $\square$

Denotamos por  $A$  a la matriz de incidencia de  $H$ . La matriz  $A$  tiene una fila por cada vértice de la hipergráfica y una columna por cada hiperarista, sus entradas  $a_{ij}$  son cero o uno dependiendo si el vértice correspondiente a la fila  $i$  pertenece o no a la hiperarista  $j$ .

**Ejemplo 3.3.** Sea  $H$  la hipergráfica signable del ejemplo anterior, entonces su matriz

de incidencia  $A$  es la siguiente:

$$A = \begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Denotaremos como  $\vec{1}$  al vector cuyas entradas son todas 1.

**Lema 3.1.2.** *Sea  $H = (V(H), E(H))$  una hipergráfica y  $A$  su matriz de incidencia.  $H$  es signable si y sólo si  $xA = \vec{1}$  tiene solución sobre  $\mathbb{Z}_2$ .*

**Demostración:** Consideremos  $H = (V(H), E(H))$  una hipergráfica signable con conjunto de vértices  $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y conjunto de aristas  $E(H) = \{E_1, \dots, E_m\}$ . Como  $H$  es signable existe  $X \subseteq E(H)$  tal que  $|E_j \cap X|$  es impar para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Sea  $s \in \mathbb{Z}_2^n$  el vector de incidencia de los vertices que pertenecen a  $X$ , entonces visto como matriz por bloques tenemos:

$$sA = \begin{pmatrix} s \cdot E_1 & \dots & s \cdot E_m \end{pmatrix}.$$

Ahora, como  $|E_j \cap X|$  es impar, tenemos que  $s \cdot E_j = 1$  para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Por lo tanto el sistema  $xA = \vec{1}$  tiene solución.

Ahora bien, supongamos que el sistema  $xA = \vec{1}$  tiene solución sobre  $\mathbb{Z}_2$ , sea  $s \in \mathbb{Z}_2^n$  una solución para este sistema. Entonces

$$sA = \begin{pmatrix} s \cdot E_1 & \dots & s \cdot E_m \end{pmatrix} = \vec{1}$$

esto es  $s \cdot E_j = 1$  para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$ , por lo que  $s$  tiene un número impar de elementos en común con la columna  $E_j$  para todo  $j$ , entonces tomamos a  $X$  como el subconjunto de los vértices de  $H$  para los cuales  $s_{1i} = 1$ . Por lo que  $|E_j \cap X|$  es impar para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Por lo tanto  $H$  es signable. ■

Del álgebra lineal tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.1.3.** *Sea  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{Z}_2)$ . Entonces, uno y sólo uno de los siguientes sistemas lineales tienen solución sobre  $\mathbb{Z}_2$*

$$(1) \quad xA = \vec{1}$$

$$(2) \quad Aw = \vec{0}, \vec{1}w = 1.$$

■

Consideremos el matroide  $\mathcal{M}_H(E(H), \mathcal{C}(H))$  asociado a una hipergráfica, donde su subconjunto base son las hiperaristas de  $H$  y sus circuitos  $\mathcal{C}$  son aquellos  $C \subseteq E(M)$  que son minimales con respecto a la inclusión y tal que la diferencia simétrica de sus hiperaristas es vacía. Nótese que la condición anterior es equivalente a  $Aw = 0$ , donde  $A$  es la matriz de incidencia de  $H$  y  $w$  el vector de incidencia de  $C$ .

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $E$  el conjunto de hiperaristas de una hipergráfica  $H$  y  $\mathcal{C}$  la familia que contiene a los subconjuntos  $C \subseteq E(M)$  tales que sean minimales con respecto a la inclusión y que la diferencia simétrica de sus hiperaristas sea vacía. Entonces  $\mathcal{C}$  es el conjunto de circuitos de un matroide en  $E$ .*

**Demostración:** Es claro que  $\mathcal{C}$  satisface (C1) y (C2). Para probar (C3) sean  $C_1$  y  $C_2$  elementos distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_1 \cap C_2$ . Sea  $A$  la matriz de incidencia  $H$  y  $c_1$  y  $c_2$  los vectores de incidencia de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Entonces tenemos que  $Ac_1 = \vec{0}$  y  $Ac_2 = \vec{0}$ . Como  $C_1$  y  $C_2$  son circuitos distintos, se tiene que  $C_1 \Delta C_2 \neq \emptyset$ , entonces  $c_1 + c_2 \neq \vec{0}$  además  $A(c_1 + c_2) = Ac_1 + Ac_2 = \vec{0}$ . Por lo tanto existe  $C_3 \subseteq C_1 \Delta C_2 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}$  determina los circuitos de un matroide en  $E$ . ■

Podemos con lo anterior reescribir los lemas 3.1.2 y 3.1.3 de una manera combinatoria.

**Teorema 3.1.5.** *Una hipergráfica  $H$  es signable si y sólo si todos los circuitos de  $\mathcal{M}_H$  tienen cardinalidad par, esto es, el matroide  $\mathcal{M}_H$  es bipartito.*

**Demostración:** Sea  $H$  signable, por lema 3.1.2  $H$  es signable si y sólo si  $xA = \vec{1}$  tiene solución sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Pero por el lema 3.1.3 esto implica que el sistema  $Aw = \vec{0}$

con  $\vec{1}w = 1$  no tiene solución, esto es, si  $w$  existe necesariamente tiene un número par de unos lo que implica que los circuitos de  $\mathcal{M}_H$  son pares. ■

**Teorema 3.1.6.** *Una hipergráfica  $H$  es no-signable si y sólo si  $\mathcal{M}_H$  contiene un circuito de cardinalidad impar.* ■

La signabilidad de una hipergráfica coincide con la signabilidad de matrices intercaladas cuando se considera la hipergráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de entradas de la matriz intercalada  $M$  y cuyas hiperaristas son las intercalaciones de  $M$ . Esto es, buscamos un conjunto de entradas de la matriz intercalada cuya intersección con cada una de las intercalación sea impar, es decir, estas entradas serán a las que se les asigne un signo negativo y debido a que la intersección con cada intercalación es impar, cada intercalación tendrá un número impar de signos menos, teniendo así una solución para el signado de la matriz intercalada. Por los teoremas anteriores, si tomamos el matroide relacionado a la hipergráfica y este es bipartito, entonces la matriz intercalada es signable.

Al matroide vectorial que surge de la matriz de incidencia de la hipergráfica asociada a la matriz intercalada lo llamamos **Matroide Intercalado**, si surge de una matriz intercalada diádica lo llamamos **Matroide Diádico**. Con lo anterior tenemos que para probar que una matriz intercalada es signable debemos mostrar que el matroide intercalado es bipartito.

Por el teorema 1, 2, 4, 8 de Hurwitz, para matrices diádicas  $D_n$  sabemos que si  $n > 3$  la matriz no es signable, por lo que el matroide intercalado no es bipartito.

El problema de signado para  $D_n$  con  $n = 0, 1, 2, 3$  está resuelto, sabemos que estas matrices intercaladas diádicas son signables, sin embargo, lo que nos interesa al desarrollar este trabajo, es analizar la estructura e interpretación geométrica de los circuitos que surgen de estos matroides intercalados.

Al estudiar los circuitos de un matroide desde el punto de vista de la teoría de matroides sabemos que todos los circuitos de un determinado tamaño son iguales, sin embargo, la estructura geométrica o topológica que aparece en los matroides intercalados resulta muy interesante, en particular cuando la gráfica asociada al circuito está encajada en alguna superficie cerrada compacta y sin frontera.

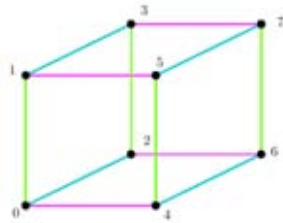
Algo de lo que nos llevó al estudio de la estructura de estos circuitos está motivado

por el siguiente ejemplo, recordemos, que un **matroide es afín** si tomamos a  $E$  como las etiquetas de los vectores sobre el espacio vectorial  $V(m, F)$  y en vez de considerar los independientes como los vectores linealmente independientes, tomamos los vectores afínmente independientes.

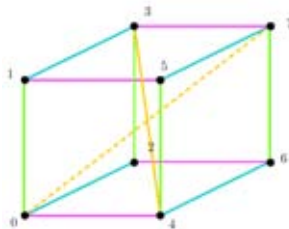
**Ejemplo 3.4.** Consideremos el matroide vectorial con conjunto base  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  sobre  $\mathbb{Z}_2$ , dado por la siguiente matriz

$$A = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

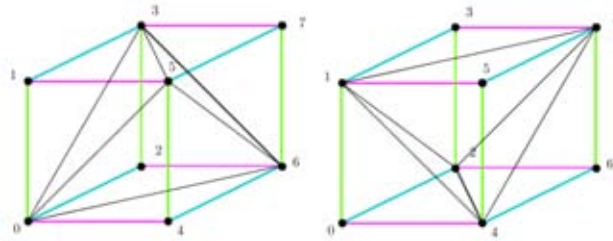
A este matroide se le conoce como  $AG(3, 2)$ , geometría afín de tres dimensiones sobre  $\mathbb{Z}_2$  y tiene representación en  $\mathbb{R}^3$  por el siguiente cubo:



Este matroide cuenta con 14 circuitos; cada una de las caras del cubo, 6 planos torcidos que unen las diagonales, uno de los cuales aparece en la siguiente figura:



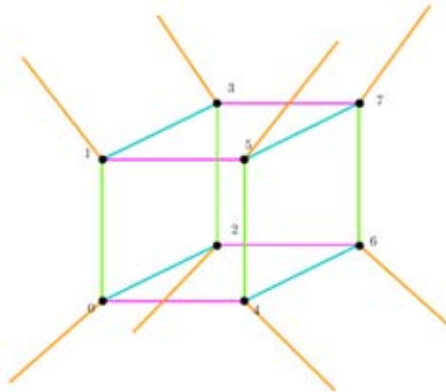
los otros circuitos son los vértices de los tetraedros inscritos en el cubo.



Si observamos los últimos dos tetraedros estos están formados por los elementos  $\{0, 3, 5, 6\}$  y  $\{1, 2, 4, 7\}$  que resultan ser los generadores de la matriz diádica  $D_2$ .

$\oplus$	1	2	4	7
0	1	2	4	7
3	2	1	7	4
5	4	7	1	2
6	7	4	2	1

Mientras que cada uno de los circuitos de tamaño 6, forman cada una de las intercalaciones de  $D_2$ , por ejemplo el circuito en el matroide afín  $\{0, 1, 5, 4\}$  (cara frontal del cubo) tiene los generadores renglón  $\{0, 5\}$  y generadores columna  $\{1, 4\}$  vistos dentro de la matriz diádica, estos generadores definen una intercalación. Cada una de las intercalaciones de  $D_2$  aparece en la siguiente representación, la cual está vista dentro del espacio proyectivo.



Seguimos esta idea de pensar las intercalaciones como una gráfica bipartita en dos conjuntos de 2 elementos: los generadores renglón y generadores columna; la cual fue inventada y estudiada por Gilberto Calvillo e Isidoro Guitler [Git00], para analizar a detalle cada uno de los circuitos que aparecen en los matroides intercalados  $D_2$  y  $D_3$ .

Si pensamos a las intercalaciones como estas gráficas bipartitas de cuatro aristas y una cara, podemos darle cierta orientación a las aristas y utilizar lo que ya sabemos de geometría de superficies, para pegarlas, es decir, si tenemos 2 aristas iguales, donde llamamos iguales si tiene los mismos puntos terminales y misma orientación, entonces podemos pegarlas y eliminar esa arista. Realizamos una serie de pegados e identificaciones hasta formar con esas intercalaciones la cara de un poliedro y reducirla utilizando las operaciones permitidas de cortados y pegados hasta llegar a la representación de una superficie [FF03]. Claro que esto es solo posible cuando la superficie, es una superficie cerrada compacta y sin frontera (Teorema de clasificación de superficies).

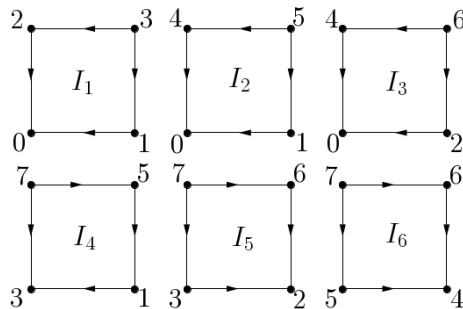
**Ejemplo 3.5.** Supongamos que al eliminar todas las entradas de algún color en  $D_2$  las intercalaciones que permanecen después del borrado nos dan un circuito del matroide intercalado asociado (Veremos en el capítulo 5 con mas detalle que esto es cierto). Borremos todas las entradas con el color 7 y consideremos todas las intercalaciones que quedan.

$\oplus$	1	2	4	7
0	1	2	4	
3	2	1		4
5	4		1	2
6		4	2	1

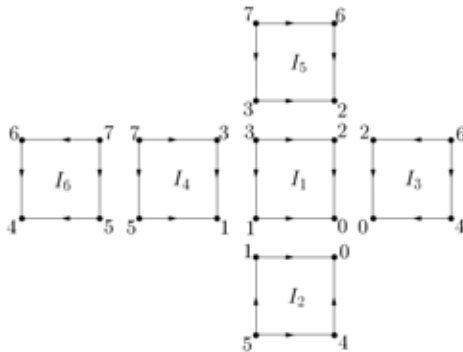
En la siguiente tabla aparecen las intercalaciones que quedan en  $D_2$  después de borrar el color 7.

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$I_1$	0, 3	1, 2	1, 2
$I_2$	0, 5	1, 4	1, 4
$I_3$	0, 6	2, 4	2, 4
$I_4$	3, 5	1, 7	2, 4
$I_5$	3, 6	2, 7	1, 4
$I_6$	5, 6	4, 7	1, 2

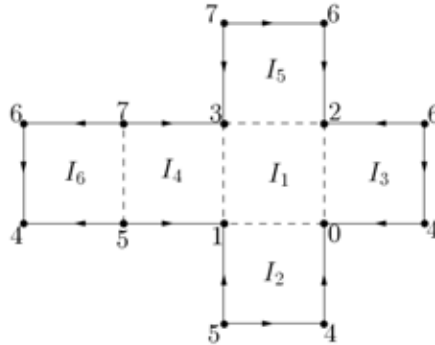
Ya que los puntos terminales están dados por los generadores renglón y columna de la matriz diádica  $D_2$ , orientaremos a las aristas de la siguiente manera: si la arista tiene puntos terminales  $(a, b)$  y  $a > b$ , entonces la arista estará orientada de  $a$  a  $b$ . Las intercalaciones vistas como gráficas bipartitas con la orientación que acabamos de definir aparecen enseguida.



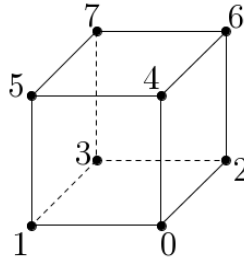
Comenzamos por hacer la identificación de las aristas que tienen los mismos puntos terminales y misma orientación, para obtener una sola cara.



Identificando y borrando las aristas iguales tenemos:



Continuando con las identificaciones obtenemos el siguiente cubo, el cual es homeomorfo a la esfera.



□

Existe una manera menos topológica y más combinatoria de examinar los circuitos que se obtienen del matroide intercalado para ello usamos los mapeos combinatorios cuya definición aparece en el libro [Tut84] de W.T. Tutte. El estudio de los circuitos del matroide intercalado asociado a  $D_2$  que aparece en el capítulo 5 lo hicimos utilizando está herramienta. El siguiente capítulo hace un estudio de las principales definiciones de mapeos combinatorios que necesitamos para el desarrollo del capítulo 5.

# Capítulo 4

## Mapeos Combinatorios y Circuitos de Matroides Intercalados

Como vimos al final del capítulo anterior una clase importante de circuitos de matroides intercalados se puede ver como superficies. En este capítulo presentamos el concepto de mapeo combinatorio de Tutte y su representación en diagramas. Los resultados y definiciones que aparecen en este capítulo son tomadas de [Tut84].

### 4.1. Definiciones.

Sea  $S$  un conjunto de elementos llamados *cruces*. El número de elementos de  $S$  debe ser divisible por 4, es decir  $|S| = 4n$ . El conjunto  $S$  se particiona en  $n$  subconjuntos disjuntos llamados *celdas*. Si  $X$  es una cruz, entonces los otros miembros de su celda son denotados por  $\theta X$ ,  $\phi X$ , y  $\theta\phi X$ .

Los símbolos  $\theta$  y  $\phi$  pueden pensarse como dos permutaciones de  $S$ . Estas permutaciones deben cumplir los siguientes axiomas.

(P1)  $\theta^2 = \phi^2 = I$  y  $\theta\phi = \phi\theta$ .

(P2) Si  $X$  es cualquier cruz, entonces las cuatro cruces  $X$ ,  $\theta X$ ,  $\phi X$ , y  $\theta\phi X$  son distintas.

En donde  $I$  denota la permutación identidad de  $S$ . Podemos observar que cada una de las permutaciones  $\theta$  y  $\phi$  deja la celda invariante, salvo por la permutación de sus miembros. Cada una de las permutaciones  $\phi$  y  $\theta$  es una **involución**; particiona a  $S$  en pares disjuntos de elementos, e intercambia a los miembros de tales pares. Nos referimos a  $\theta$  como la **primera involución** y a  $\phi$  como la **segunda involución**.

Ahora, sea  $P$  una permutación de  $S$ . Esta permutación acomoda a las cruces en secuencias cíclicas disjuntas llamadas **órbitas** de  $P$ . Escribiremos a la órbita de una cruz  $X$  por  $P$  como:

$$J(P, X) = (X, PX, P^2X, \dots, P^{m-1}X),$$

donde  $m$  es el mínimo entero positivo tal que  $P^mX = X$ . Ya que las órbitas son cíclicas no importa cual de sus cruces tomemos primero. Las involuciones  $\theta$  y  $\phi$  también tienen sus órbitas, solo que en este caso  $m = 2$  para cada cruz  $X$  en  $S$ .

**Definición 4.1.1.** Un premapeo  $L$  es una triada  $L(\theta, \phi, P)$  de permutaciones que actúan en un conjunto  $S$  de  $4n$  elementos, tales que:

(P1)  $\theta^2 = \phi^2 = I$  y  $\theta\phi = \phi\theta$ .

(P2) Si  $X$  es cualquier cruz, entonces las cuatro cruces  $X, \theta X, \phi X$ , y  $\theta\phi X$  son distintas.

(P3)  $P\theta = \theta P^{-1}$ .

(P4) Para cada cruz  $X$  de  $S$ , las órbitas de  $X$  y  $\theta X$  por  $P$  son distintas.

Si  $L$  cumple con los axiomas anteriores diremos que  $L$  tiene a  $\theta$  y a  $\phi$  como su primera y segunda involución respectivamente, y a  $P$  como su permutación básica.

Nos referiremos a la cardinalidad de la órbita como su **longitud**.

Comparemos las órbitas de  $X$  y  $\theta X$  cuando  $L(\theta, \phi, P)$  es un premapeo y  $X$  una cruz arbitraria de  $S$ . Por el axioma (P3) las dos orbitas deben de ser distintas. También podemos observar que las dos órbitas tienen la misma longitud, ya que si  $P^mX = X$  entonces  $\theta P^mX = \theta X$  y por (P3) tenemos que  $P^{-m}\theta X = \theta X$ , de aquí que  $\theta X = P^m\theta X$ . De lo anterior tenemos que la longitud de  $J(P, \theta X)$  no es mayor que la longitud de  $J(P, X)$ . De manera similar, tenemos que la longitud de  $J(P, \theta^2 X)$ , que es  $J(P, X)$ , no es mayor que la de  $J(P, \theta X)$ .

Partiendo de que el tamaño de la orbita de  $J(P, X)$  es  $m$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} J(P, \theta X) &= (\theta X, P\theta X, P^2\theta X, \dots, P^{m-1}\theta X), \\ &= (\theta X, \theta P^{-1}X, \theta P^{-2}X, \dots, \theta P^{-m+1}X), \\ &= (\theta X, \theta P^{m-1}X, \theta P^{m-2}X, \dots, \theta PX), \end{aligned}$$

por axioma **(P3)**.

Esto quiere decir que  $J(P, \theta X)$  se obtiene de  $J(P, X)$  invirtiendo el orden de los elementos y posteriormente permutando a cada uno de ellos por  $\theta$ . Expresaremos esta relación diciendo que la orbita  $J(P, \theta X)$  es *conjugada* a la orbita  $J(P, X)$  en  $L$ . Con lo anterior hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $L = L(\phi, \theta, P)$  un premapeo y  $X$  una cruz en  $S$ . Entonces, las orbitas de  $P$  por  $X$  y  $\theta X$  son conjugadas. Más aún, una cruz  $Y$  pertenece a una de las orbitas si y sólo si  $\theta Y$  pertenece a la otra.*

Definiremos un **vértice** de un premapeo  $L = L(\phi, \theta, P)$  como el par  $v$  de orbitas conjugadas de  $P$ . Cada una de las dos orbitas es un **vértice orientado** de  $L$  y una **forma orientada** de  $v$ .

Una celda  $A = \{X, \theta X \phi X, \theta \phi X\}$  es llamada una **arista** de  $L$ . Los dos pares  $\{X, \theta X\}$  y  $\{\phi X, \theta \phi X\}$  son dos **medias aristas** en  $L$ . Para cada media arista  $\{Y, \theta Y\}$ , existe un único vértice  $v$  de  $L$  tal que  $Y$  pertenece a una de las formas orientadas de  $v$  y  $\theta Y$  a la otra. Expresamos esta relación diciendo que  $v$  **absorbe** a la media arista, y que  $A$  es **incidente** en  $v$  en el premapeo  $L$ . Las dos medias aristas de  $A$  pueden ser absorbidas por el mismo vértice o por vértices diferentes. En el primer caso,  $A$  es un **lazo** de  $L$ , en el segundo un **enlace**.

Las definiciones anteriores no excluyen la posibilidad de que  $S$  sea un conjunto nulo. En esté caso, hay una única permutación  $I$  en  $S$ . Entonces, existe un único premapeo  $L(I, I, I)$  en  $S$ . Llamamos a éste el premapeo nulo, no posee vértices ni aristas.

Con las definiciones anteriores de incidencia, vértices y aristas de  $L$ , hay vértices y aristas respectivamente de una gráfica  $G(L)$ , llamada la **gráfica de  $L$** . Es claro que  $G(L)$  no posee vértices aislados. Los lazos y enlaces de  $L$  son lazos y enlaces, respectivamente de  $G(L)$ .

Diremos que una cruz  $X$  **pertenece** a cualquier arista o vértice de  $L$  del cual es un elemento, que pertenece a un vértice de  $L$  si pertenece a una de las formas orientadas del vértice, y que pertenece a una subgráfica  $H$  de  $G(L)$  si pertenece a alguna arista o vértice de  $H$ .

Dada una gráfica  $G$  sin vértices aislados, podríamos preguntarnos por un premapeo  $L$  en algún conjunto  $S$ , tal que  $G$  y  $G(L)$  sean isomorfas. Tal premapeo puede

encontrarse por la construcción de Edmonds [Edm60]. A cada arista  $A$  de  $G$  definimos un conjunto  $A' = (X, \theta X, \phi X, \theta\phi X)$  de cuatro elementos llamados cruces, haciendo las ocho cruces de cualquier dos aristas distintas. Teniendo entonces un conjunto  $S$  de  $4|E(G)|$  cruces y la notación determina la primera y segunda involución  $\theta$  y  $\phi$  las cuales satisfacen los axiomas **(P1)** y **(P2)**. Separamos cada conjunto  $A'$  en pares disjuntos  $\{X, \theta X\}$  y  $\{\phi X, \theta\phi X\}$ , asignando a cada uno de estos pares a cada extremo de la arista  $A$ . Ambos pares serán asignados al mismo vértice si y sólo si la arista  $A$  es un lazo en  $G$ . Para cada vértice  $v$  de  $E(G)$ , podemos de manera sencilla asignar los miembros de sus pares de orbitas conjugadas, para que satisfagan los axiomas (X3) y (X4). Teniendo con lo anterior el premapeo  $L = L(\theta, \phi, P)$  que buscábamos.

Regresando a nuestro conjunto fundamental  $S$  de cruces. Un conjunto no nulo  $K$  de permutaciones de  $S$  genera un grupo  $\Psi_K$  de tales permutaciones. Particiona a  $S$ , si es no nulo, en clases de equivalencia no nulas, tal que dos cruces pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si algún miembro de  $\Psi_K$  manda uno en el otro. En el caso del premapeo  $L(\theta, \phi, P)$ , estaremos interesados en los casos en los que  $K = \{\theta, \phi, P\}$  y  $K = \{\theta\phi, P\}$ .

Consideremos el caso en el que  $K = \{\theta, \phi, P\}$ . Podemos llamar a las clases de equivalencia de  $\psi_K$  conjuntos conexos de  $L$ . Si  $L$  tiene un solo conjunto conexo, el cual necesariamente es  $S$ , decimos que  $L$  es conexo o equivalentemente que  $L$  es un **mapeo** en  $S$ .

Sea  $T$  un conjunto conexo de  $L$ . El efecto que tiene sobre  $L$  un miembro  $Q$  de  $\psi_K$  es permutar los elementos entre ellos mismos. Entonces cada  $Q$  tiene una única restricción  $Q_T$  en  $T$ . Las restricciones a  $T$  de  $\theta, \phi$  y  $P$  evidentemente satisfacen los axiomas para un premapeo  $L_T = L(\theta_T, \phi_T, P_T)$  en  $T$ . Más aún,  $T$  es un conjunto conexo de  $L_T$ , por lo que  $L_T$  es un mapeo en  $T$ . Los mapeos  $L_T$  correspondientes a conjuntos conexos de  $L$  son las **componentes** de  $L$ .

Usaremos el símbolo  $M$  para denotar un mapeo. Si un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$  es un mapeo lo denotaremos por  $M(\theta, \phi, P)$ .

Hasta ahora hemos definido lo que son los vértices, vértices orientados, aristas y medias aristas de un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$ . Nos falta definir lo que son las caras y caras orientadas de un premapeo, para ello necesitamos definir lo que es el premapeo dual.

A partir de un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$  sobre un conjunto  $S$  de cruces podemos definir

otros premapeos. Por ejemplo de los axiomas **(P3)** y **(P4)** podemos deducir que  $P^2\theta = \theta P^{-2}$  y que las órbitas de  $P^2$  en  $X$  y  $\theta X$  son distintas para cada  $X \in S$ , podemos con lo anterior asegurar la existencia de un premapeo  $L(\theta, \phi, P^2)$  en  $S$ . Otro premapeo en  $S$  es  $L(\theta, \phi, P^{-1})$  derivado de  $L$ , al invertir el orden cíclico de cada órbita de  $P$ .

Analicemos la permutación:

$$P^* = P\theta\phi \quad (1)$$

**Teorema 4.1.3.** *Dado un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$ , la permutación  $P^*$  cumple:*

$$P^*\phi = \phi(P^*)^{-1}$$

**Demostración:** Observemos que  $P^*\theta = (P\theta\phi)\theta = P\theta = \theta P^{-1}$  por los axiomas **(P1)** y **(P3)**, luego  $\theta P^{-1} = \phi(\phi\theta P^{-1}) = \phi(P(\phi\theta)^{-1})^{-1} = \phi(P(\theta\phi))^{-1} = \phi(P^*)^{-1}$ , por lo que en efecto  $P^*\phi = \phi(P^*)^{-1}$ . ■

**Teorema 4.1.4.** *Dado un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$ , para cada cruz  $X$  de  $S$  las órbitas de  $P^*$  sobre las cruces  $X$  y  $\phi X$  son distintas*

**Demostración:** Si el teorema fuese falso existirían  $X \in S$  y  $m$ , con  $m$  un entero no negativo, tales que  $m$  es el valor más pequeño que hace que:

$$(P^*)^m\phi X = X \quad (2)$$

Si  $m = 0$  entonces  $\phi X = X$  lo que contradice el axioma **(P2)**, por lo que  $m > 0$ . Si  $m = 1$  se tendría que  $P^*\phi X = X$ , pero  $P^*\phi X = (P\theta\phi)\phi X = P\theta X$ , entonces tenemos que  $P\theta X = X$  lo que contradice el axioma **(P4)**, entonces  $m \geq 2$ . Pero para  $m > 2$ , dado que la igualdad (2) se cumple tenemos que  $(P^*)^m\phi X = (P^*)^{m-1}P^*\phi X = (P^*)^{m-1}(P\theta\phi)\phi X = (P^*)^{m-1}P\theta X = X$ . Con la igualdad anterior, aplicando la permutación  $(P^*)^{-1}$  a ambos lados tenemos:

$$\begin{aligned} (P^*)^{m-1}P\theta X &= X \\ (P^*)^{-1}(P^*)^{m-1}P\theta X &= (P^*)^{-1}X \\ (P^*)^{m-2}P\theta X &= (P^*)^{-1}X \end{aligned}$$

De la igualdad anterior y los axiomas **(P1)** y **(P3)** tenemos:

$$\begin{aligned}
(P^*)^{m-2}P\theta X &= (P^*)^{-1}X \\
&= (P\theta\phi)^{-1}X \\
&= ((\theta\phi)^{-1}P^{-1})X \\
&= (\phi\theta P^{-1})X \\
&= (\phi P\theta)X \\
&= \phi P\theta X
\end{aligned}$$

Equivalentemente  $(P^*)^{m-2}\phi(\phi P\theta X) = \phi P\theta X$ , lo que contradice la elección de  $X$  y  $m$ , ya que logramos reducir a  $m$  en 2 si cambiamos  $X$  por  $\phi P\theta X$ . ■

Con los teoremas anteriores hemos mostrado que la permutación  $P^*$  y las involuciones  $\phi$  y  $\theta$ , satisfacen los cuatro axiomas para un premapeo,

$$L^* = L(\phi, \theta, P^*)$$

en  $S$ . Hay que enfatizar que en el paso de  $L$  a  $L^*$  las primeras y segundas involuciones se intercambian.

Llamamos a  $L^*$  el **premapeo dual de  $L$** . La definición de dual implica:

$$(L^*)^* = L$$

para cualquier premapeo.

Los vértices orientados y vértices del premapeo  $L^*$  son las **caras orientadas** y **caras** respectivamente del premapeo  $L$  y viceversa. Las aristas de  $L$  siguen siendo las aristas de  $L^*$ , pero se particionan de manera distinta en medias aristas en los dos premapeos. Una arista  $A = (X, \theta X, \phi X, \theta\phi X)$  tiene medias aristas  $\{X, \theta X\}$  y  $\{\phi X, \theta\phi X\}$  en  $L$  y medias aristas  $\{X, \phi X\}$  y  $\{\theta X, \theta\phi X\}$  en  $L^*$ .

Escribimos  $\alpha_0(L), \alpha_1(L), \alpha_2(L)$  para denotar al número de vértices, aristas y caras de  $L$  respectivamente.

La combinación  $\chi(L) = \alpha_0(L) - \alpha_1(L) + \alpha_2(L)$  es llamada **la característica de Euler** del premapeo  $L$ . Cuando la gráfica asociada al premapeo es conexa, resulta estar naturalmente encajada en una superficie con la misma característica de Euler que el premapeo.

### 4.1.1. Dibujo de Mapeos

Veamos como se representa un mapeo  $M$  en un diagrama. Podemos comenzar con el dibujo de una gráfica conexa  $G(M)$ . Podría ser que esta gráfica pueda dibujarse en el plano sin que sus aristas se intersequen. Es entonces cuando el dibujo particiona al plano en regiones conexas distintas. Las cuales son llamadas las **caras** de el diagrama.

Consideremos una arista  $A$  en la gráfica de  $G(M)$ , con vértices incidentes  $x$  e  $y$ . Una cruz  $X$  asociada al mapeo  $M$  se representa por una flecha dibujada a lo largo de la arista, pero no sobre ella, sino a lado de está. Tomamos la regla de que  $\theta X$  es representada por una flecha en el mismo sentido de  $X$ , pero en el lado contrario a  $X$  y que  $\phi X$  se una fecha en sentido contrario a  $X$  pero del mismo lado que la flecha de  $X$ . Por lo que  $\theta\phi X$  se dibuja del lado contrario de  $\phi X$ . Las cuatro cruces asociadas a  $A$  se muestran en la figura 4.1 la cual muestra solo una porción del mapeo.

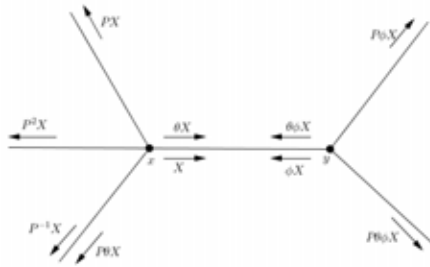


Figura 4.1

Podemos pensar que  $A$  está separando en algún punto interno a las dos medias aristas, una con un extremo en  $x$  y la otra con extremo en  $y$ . Las cruces  $X$  y  $\theta X$  constituyen una media arista de  $A$  en  $M$ , se dibujarán en el lado correspondiente de la media arista en el diagrama en dirección contraria a su vértice terminal. La figura 4.1 muestra el caso en el que  $A$  es un enlace. No es necesario, dibujar el punto de separación de la arista, siempre que las flechas sean dibujadas lo suficientemente cerca de sus puntos terminales y que no se haya formado un lazo. Este arreglo de las cruces en las aristas del diagrama especifica las dos involuciones  $\theta$  y  $\phi$  y muestra de manera clara que satisfacen los axiomas **(P1)** y **(P2)**.

Consideremos todas las medias aristas con punto terminal en  $x$ , el diagrama impone un orden cíclico en ellas. El diagrama representa a  $M$  si la permutación  $P$  rota a cada cruz  $X$  un espacio en el orden cíclico del extremo de su media arista, al lado de la media

arista opuesta a  $X$ . La figura 4.1 muestra esta regla en los dos extremos de  $A$ . Podemos notar que es necesario que  $\theta P^{-1}X$  sea igual a  $P\theta X$  para cada  $X$ , es decir, se requiere que el axioma **(P3)** se satisfaga. Los dos vértices orientados de  $M$  asociados al vértice  $x$  del diagrama, son rotaciones al rededor del mismo en dos direcciones opuestas, cada una correspondiente al orden cíclico de las medias aristas en  $x$ . Los miembros de un vértice orientado de  $M$  deben ocupar el lado derecho de las medias aristas de  $x$  y los otros miembros del otro vértice el lado izquierdo. Esta observación implica el axioma **(P4)**. Hemos impuesto condiciones suficientes en nuestro diagrama para hacer que represente a algún mapeo  $M$ . Interpretemos ahora las caras del diagrama. Las caras del diagrama están limitadas por dos secuencias de medias aristas, una en sentido contrario a las manecillas del reloj y la otra en el sentido de las manecillas del reloj, recordemos que las caras del mapeo son los vértices orientados del mapeo dual, por lo tanto las caras están conformadas por estas dos órbitas conjugadas, por lo tanto en esta secuencia una cruz  $X$  siempre está precedida por una cruz  $P\theta\phi X$  en el mismo sentido.

## 4.2. Mapeos Combinatorios de Circuitos de Matroides Intercalados

Queremos utilizar los mapeos combinatorios para analizar los circuitos que surgen de los matroides intercaldos diádicos, para ello necesitamos definir las involuciones  $\theta$ ,  $\phi$  y la permutación  $P$  que satisfagan los cuatro axiomas de un premapeo, tomando como conjunto base un circuito  $C$  del matroide diádico.

Recordemos que los matroides diádicos surgen como la matriz de incidencia de una hipergráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de entradas de la matriz diádica y cuyo conjunto de hiperaristas son las intercalaciones. En el matroide diádico  $\mathcal{M}(D_2)$ , los circuitos cumplen que cada vértice pertenece exactamente a dos hiperaristas distintas, es decir, si la intercalación que tiene generadores renglón  $\{r_1, r_2\}$  y columna  $\{c_1, c_2\}$  pertenece al circuito para cada una de las cuatro entradas de la intercalación, existen en el circuito cuatro intercalaciones distintas que contienen a una de las entradas de la intercalación con generadores renglón  $\{r_1, r_2\}$  y columna  $\{c_1, c_2\}$ . Los circuitos que cumplen esta condición son llamados **superficiales** ya que en este caso el circuito es

realizable como una superficie cerrada, acotada y sin frontera. Es importante mencionar que no todos los circuitos de los matroides diádicos son superficiales, existen circuitos en los cuales al menos una de las entradas de la intercalación pertenece a 4 intercalaciones distintas dentro del circuito, en este caso el circuito no es realizable como una superficie.

Para estudiar los circuitos del matroide intercalado utilizaremos los mapeos de Tutte de la siguiente manera: Una vez que tenemos la matriz de incidencia reducida  $A$  de la hipergráfica asociada a la matriz intercalada denotaremos las etiquetas de las columnas por  $A_k$  (habrá tantas columnas como intercalaciones en la matriz intercalada). Las celdas serán las intercalaciones que forman el circuito, las cruces pertenecientes a estas celdas serán las cuatro entradas correspondientes a la intercalación.

Denotaremos a las cruces de la celda  $A_k$  de la siguiente manera:

$$A_k(r_i, c_j, r_i \oplus c_j)$$

donde  $r_i$  es el generador del renglón  $i$ ,  $c_j$  el generador de la columna  $j$  y  $r_i \oplus c_j$  el color de la entrada  $(i, j)$  de la matriz diádica. Las involuciones  $\phi$  y  $\theta$  son permutaciones de las entradas de la intercalación,  $\theta$  cambia de renglón en la intercalación y  $\phi$  de columna. Esto es, dada una celda  $A_k$  con generadores renglón  $r_1, r_2$  y generadores columna  $c_1, c_2$  consideramos la cruz  $A_k(r_1, c_1, r_1 \oplus c_1)$  y aplicamos las permutaciones  $\phi$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\theta(A_k(r_1, c_1, r_1 \oplus c_1)) &= A_k(r_2, c_1, r_2 \oplus c_1) \\ \phi(A_k(r_1, c_1, r_1 \oplus c_1)) &= A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_2)\end{aligned}$$

Es fácil ver que  $\theta$  y  $\phi$  cumplen con los axiomas **(P1)** y **(P2)**.

Para definir el premapeo  $L$  necesitamos definir una permutación  $P$  que satisfaga los axiomas **(P3)** y **(P4)**. Para ello utilizaremos la involución que toma una cruz y la cambia a una celda que contenga una cruz con los mismos generadores renglón y columna, denotamos a esta involución como  $\pi$ . La involución  $\pi$  está bien definida ya que cada triada  $(r_i, c_j, r_i \oplus c_j)$  dentro del circuito, pertenece a solo dos celdas. Definimos pues la permutación  $P$  como:

$$P := \theta\pi.$$

Con esta definición de  $P$  el axioma **(P3)** se satisface ya que:

$$P\theta = (\theta\pi)\theta = \theta(\pi\theta) = \theta P^{-1}.$$

Bastaría mostrar que el axioma **(P4)** se cumple, para poder definir un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$  sobre los circuitos del matroide. Supongamos que el axioma no se cumple, esto implica que existe una cruz  $X$  y un entero positivo  $m$ , con  $m$  mínimo tal que

$$P^m \theta X = X$$

Supongamos que  $X = A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_1)$  donde la cruz pertenece a la celda  $A_k$  con generadores renglón ordenados  $\{r_1, r_2\}$  y generadores columna  $\{c_1, c_2\}$ . Si  $m = 0$  entonces  $\theta(A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_1)) = A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_1)$  lo que contradice la definición de  $\theta$  ya que esta involución cambia de renglón en la intercalación. Si  $m = 1$  entonces  $P\theta(A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_1)) = A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_1)$ , pero la permutación  $P$  cambia a otra celda que tenga los mismos generadores renglón y columna que  $\theta A_k(r_1, c_2, r_1 \oplus c_1)$ , por lo que este caso no se puede dar. Tenemos entonces que  $m \geq 2$ , pero si esto pasa entonces  $P^m(\theta X) = P^{m-1}(P\theta X) = X$  si aplicamos  $P^{-1}$  a ambos lados de la última igualdad tenemos que  $P^{m-2}(P\theta X) = P^{-1}X$  aplicando la propiedad **(P3)** la cual ya mostramos que se cumple, tenemos  $P^{m-2}(\theta P^{-1}X) = P^{-1}X$ , lo que contradice la elección de  $X$  y  $m$  ya que si tomamos  $P^{-1}X$  en vez de  $X$  reducimos a  $m$  en dos. Por lo tanto hemos definido un premapeo  $L(\theta, \phi, P)$  para cada uno de los circuitos del matroide.

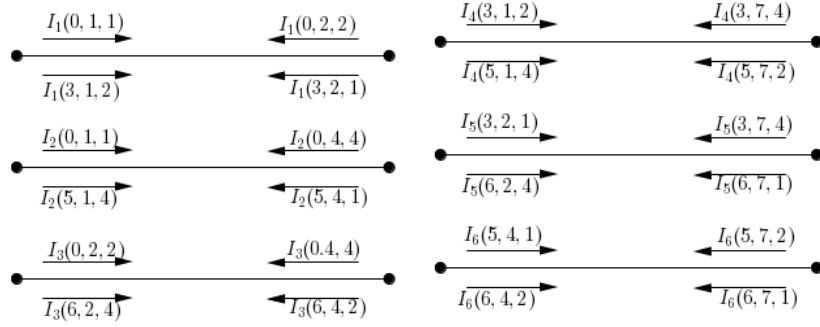
Consideremos el ejemplo 3.5 de la sección anterior, para ejemplificar como utilizamos los mapeos combinatorios para el análisis de los circuitos del matroide.

**Ejemplo 4.1.** Las intercalaciones que quedaban de borrar el color 7 aparecen de nuevo en la siguiente tabla

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$I_1$	0, 3	1, 2	1, 2
$I_2$	0, 5	1, 4	1, 4
$I_3$	0, 6	2, 4	2, 4
$I_4$	3, 5	1, 7	2, 4
$I_5$	3, 6	2, 7	1, 4
$I_6$	5, 6	4, 7	1, 2

Nuestro conjunto  $S$  cuenta con 24 cruces y 6 celdas, las 6 celdas son las 6 intercalaciones que conforman el circuito y las 24 cruces son cada una de las 4 entradas de las seis intercalaciones. Las celdas se representan por una arista, y cada una de las cruces pertenecientes a la arista por una flecha sobre la arista (llamadas medias aristas) las

cruces  $\{X, \theta X\}$  pertenecen a un extremo de la arista y  $\{\phi X, \theta\phi X\}$  al otro extremo. Entonces cada una de las intercalaciones, se convierte en las siguientes aristas:



Podemos partir de cualquier cruz en cualesquier celda para comenzar con los cálculos necesarios para obtener la gráfica asociada al premapeo. Tomemos la celda  $I_1$  y en esta celda la cruz  $I_1(3, 1, 2)$ . Veamos primero que en efecto las aristas que mostramos en la imagen anterior están bien dibujadas, mostrando el efecto de las involuciones sobre la cruz  $I_1(3, 1, 2)$ .

$$\begin{aligned} \theta(I_1(3, 1, 2)) &= I_1(0, 1, 0 \oplus 1) = I_1(0, 1, 1) \\ \phi(I_1(3, 1, 2)) &= I_1(3, 2, 3 \oplus 2) = I_1(3, 2, 1) \\ \phi\theta(I_1(3, 1, 2)) &= \phi(I_1(0, 1, 1)) = I_1(0, 2, 2) \end{aligned}$$

Ahora queremos ver cual es la órbita de la cruz  $I_1(3, 1, 2)$  al aplicar la permutación  $P$ , recordemos que  $P$  cambia a otra celda que contenga una cruz con los mismos generadores renglón y columna y en esta celda cambia de renglón. Esto es, buscamos otra intercalación que contenga  $(3, 1, 2)$ , como podemos ver en la tabla de intercalaciones la otra intercalación que tiene esta entrada es la intercalación  $I_4$ , entonces:

$$P(I_1(3, 1, 2)) = \theta\pi(I_1(3, 1, 2)) = \theta(I_4(3, 1, 2)) = I_4(5, 1, 4)$$

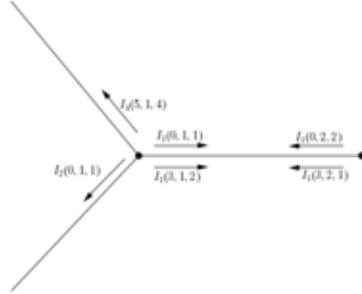
Siguiendo con este proceso tenemos:

$$\begin{aligned} P(I_4(5, 1, 4)) &= \theta\pi(I_4(5, 1, 4)) = \theta(I_2(5, 1, 4)) = I_2(0, 1, 1) \\ P(I_2(0, 1, 1)) &= \theta\pi(I_2(0, 1, 1)) = \theta(I_1(0, 1, 1)) = I_1(3, 1, 2) \end{aligned}$$

Por lo que la órbita de la cruz  $I_1(3, 1, 2)$  sobre  $P$ , denotada por  $J(P, X)$  es:

$$J(P, I_1(3, 1, 2)) = \{I_1(3, 1, 2), I_4(5, 1, 4), I_2(0, 1, 1)\}$$

En la figura que aparece a continuación, podemos observar la órbita de  $I_1(3, 1, 2)$  sobre  $P$  en la gráfica asociada al premapeo.



Calculemos ahora, la órbita de  $\theta(I_1(3, 1, 2)) = I_1(0, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned} P(I_1(0, 1, 1)) &= \theta\pi(I_1(0, 1, 1)) = \theta(I_2(0, 1, 1)) = I_2(5, 1, 4) \\ P(I_2(5, 1, 4)) &= \theta\pi(I_2(5, 1, 4)) = \theta(I_4(5, 1, 4)) = I_4(3, 2, 1) \\ P(I_4(3, 2, 1)) &= \theta\pi(I_4(3, 2, 1)) = \theta(I_1(3, 2, 1)) = I_1(0, 1, 1) \end{aligned}$$

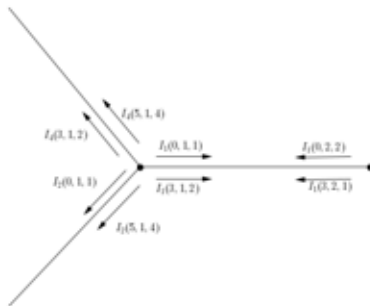
Entonces:

$$J(P, \theta(I_1(3, 1, 2))) = J(P, I_1(0, 1, 1)) = \{I_1(0, 1, 1), I_2(5, 1, 4), I_4(3, 1, 2)\}$$

Comparando las dos órbitas, podemos ver que en efecto la órbita de  $\theta(I_1(3, 1, 2))$  se obtiene de la órbita de  $I_1(3, 1, 2)$  invirtiendo el orden de los elementos y posteriormente permutando los por  $\theta$ .

$$\begin{aligned} J(P, I_1(3, 1, 2)) &= \{I_1(3, 1, 2), I_4(5, 1, 4), I_2(0, 1, 1)\} \\ J(P, \theta(I_1(3, 1, 2))) &= \{\theta(I_1(3, 1, 2)), \theta(I_2(0, 1, 1)), \theta(I_4(5, 1, 4))\} \\ J(P, \theta(I_1(3, 1, 2))) &= \{I_1(0, 1, 1), I_2(5, 1, 4), I_4(3, 1, 2)\} \end{aligned}$$

Estas dos órbitas conjugadas son vértices orientados que definen al primer vértice del premapeo y se colocan en la gráfica en sentidos opuestos, por lo que la gráfica al rededor del vértice orientado se ve como sigue:



Ahora queremos ver cual es la órbita de la cruz  $\phi I_1(3, 1, 2) = I_1(3, 2, 1)$ .

$$P(I_1(3, 2, 1)) = \theta\pi(I_1(3, 2, 1)) = \theta(I_5(3, 2, 1)) = I_5(6, 2, 4)$$

Siguiendo con este proceso tenemos:

$$P(I_5(6, 2, 4)) = \theta\pi(I_5(6, 2, 4)) = \theta(I_3(6, 2, 4)) = I_3(0, 2, 2)$$

$$P(I_3(0, 2, 2)) = \theta\pi(I_3(0, 2, 2)) = \theta(I_1(0, 2, 2)) = I_1(3, 2, 1)$$

Por lo que la órbita de la cruz  $I_1(3, 2, 1)$  sobre  $P$  es:

$$J(P, I_1(3, 2, 1)) = \{I_1(3, 2, 1), I_5(6, 2, 4), I_3(0, 2, 2)\}$$

Calculemos ahora, la órbita de  $\theta(I_1(3, 2, 1)) = \theta\phi(3, 1, 2) = I_1(0, 2, 2)$ .

$$P(I_1(0, 2, 2)) = \theta\pi(I_1(0, 2, 2)) = \theta(I_3(0, 2, 2)) = I_3(6, 2, 4)$$

$$P(I_3(6, 2, 4)) = \theta\pi(I_3(6, 2, 4)) = \theta(I_5(6, 2, 4)) = I_5(3, 2, 1)$$

$$P(I_5(3, 2, 1)) = \theta\pi(I_5(3, 2, 1)) = \theta(I_1(3, 2, 1)) = I_1(0, 2, 2)$$

Entonces:

$$J(P, I_1(0, 2, 2)) = \{I_1(0, 2, 2), I_3(6, 2, 4), I_5(3, 2, 1)\}$$

Estas dos órbitas conjugadas definen al vértice que se encuentra en el extremo izquierdo de la arista  $I_1$  y se colocan en la gráfica en sentidos opuestos.

Tomamos alguna otra cruz, que no pertenezca a alguna de las órbitas que hasta ahora hemos calculado, podemos escoger a la cruz  $I_2(5, 4, 1)$  y  $\theta I_2(5, 4, 1) = I_2(0, 4, 4)$ , las órbitas de estas dos cruces son conjugadas y definen otro de los vértice del premapeo. Enseguida presentamos sus órbitas:

$$J(P, I_5(5, 4, 1)) = \{I_2(5, 4, 1), I_6(6, 4, 2), I_3(0, 4, 4)\}$$

$$J(P, I_2(0, 4, 4)) = \{I_2(0, 4, 4), I_3(6, 4, 2), I_6(5, 4, 1)\}$$

Consideramos ahora a  $I_4(3, 7, 4)$  y  $\theta I_4(3, 7, 4) = I_4(5, 7, 2)$  sus órbitas conjugadas son:

$$J(P, I_4(3, 7, 4)) = \{I_4(3, 7, 4), I_5(6, 7, 1), I_6(5, 7, 2)\}$$

$$J(P, I_4(5, 7, 2)) = \{I_4(5, 7, 2), I_6(6, 7, 1), I_5(3, 7, 4)\}$$

Hemos acomodado las 24 cruces en cada uno de los vértices del premapeo. A los vértices asociados al premapeo los denotamos por  $v_{c_j}$ . Los vértices definidos por el premapeo aparecen en la siguiente tabla:

$v$	$J(P, X)$	$J(P, \theta X)$
$v_1$	$J(P, I_1(3, 1, 2))$	$J(P, I_1(0, 1, 1))$
$v_2$	$J(P, I_1(3, 2, 1))$	$J(P, I_1(0, 2, 2))$
$v_4$	$J(P, I_2(5, 4, 1))$	$J(P, I_2(0, 4, 4))$
$v_7$	$J(P, I_4(3, 7, 4))$	$J(P, I_4(5, 7, 2))$

Con lo anterior tenemos que  $\alpha_0(L) = 4$ . El número de aristas del premapeo es el número de celdas, es decir, el número de intercalaciones que pertenecen al circuito, por lo tanto  $\alpha_1(L) = 6$ . Para realizar el esquema del premapeo necesitamos decir cuales son las caras del premapeo, para ello tenemos que obtener los vértices del premapeo dual  $L^* = L(\phi, \theta, P^*)$ . Recordemos que  $P^* = P\theta\phi$ , entonces  $P^*$  toma una cruz, cambia de columna dentro de la intercalación, después cambia de renglón, cambia a otra intercalación que tenga la misma entrada para después volver a cambiar de renglón dentro de esta nueva intercalación.  $L^*$  es un premapeo sobre las mismas cruces que  $L$ , lo que cambia son las medias aristas mientras que en  $L$  son  $\{X, \theta X\}$  y  $\{\phi X, \phi\theta X\}$  en  $L^*$  son  $\{X, \phi X\}$  y  $\{\theta X, \phi\theta X\}$ , lo que implica que las órbitas conjugadas en el premapeo dual son las de  $X$  y  $\phi X$ . Veamos la acción de  $P^*$  sobre alguna de las cruces.

Consideremos la cruz  $I_1(0, 2, 2)$  y analicemos la acción de  $P^*$  sobre la cruz. Comenzaremos por mostrar los elementos de la arista  $I_1$ .

$$\begin{aligned}\theta(I_1(0, 2, 2)) &= I_1(3, 2, 3 \oplus 1) = I_1(3, 2, 1) \\ \phi(I_1(0, 2, 2)) &= I_1(0, 1, 0 \oplus 1) = I_1(0, 1, 1) \\ \phi\theta(I_1(0, 2, 2)) &= \phi(I_1(3, 2, 1)) = I_1(3, 1, 2)\end{aligned}$$

La acción de  $P^*$  sobre  $I_1(0, 2, 2)$  se muestra a continuación:

$$P^*(I_1(0, 2, 2)) = (\theta\pi)\theta\phi(I_1(0, 2, 2)) = (\theta\pi)\theta I_1(0, 1, 1) = \theta\pi I_1(3, 1, 2)$$

para aplicar la involución  $\pi$  necesitamos una cruz en otra celda que tenga entradas  $(3, 1, 2)$ , la intercalación  $I_4$  tiene generadores renglón  $\{3, 5\}$  y columna  $\{1, 7\}$ , entonces  $\pi$  cambia a la cruz  $I_4(3, 1, 2)$ , para finalizar aplicamos  $\theta$  a la cruz  $I_4(3, 1, 2)$ . Por lo tanto  $P^*(I_1(0, 2, 2)) = I_4(5, 1, 4)$ .

Siguiendo con este proceso tenemos:

$$P^*(I_4(5, 1, 4)) = P\theta\phi I_4(5, 1, 4) = P\theta I_4(5, 7, 2) = P(I_4(3, 7, 4)) = I_5(6, 7, 1)$$

$$P^*(I_5(6, 7, 1)) = P\theta\phi I_5(6, 7, 1) = P\theta I_5(6, 2, 4) = P(I_5(3, 2, 1)) = I_2(0, 2, 2)$$

Por lo que la órbita de la cruz  $I_1(0, 2, 2)$  sobre  $P^*$  es:

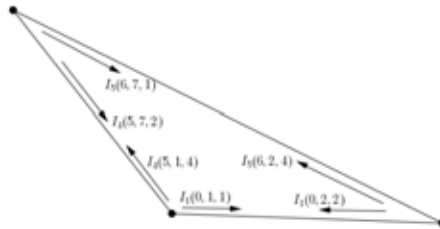
$$J(P^*, I_1(0, 2, 2)) = \{I_1(0, 2, 2), I_4(5, 1, 4), I_5(6, 7, 1)\}$$

Como las órbitas de  $X$  y  $\phi X$  en el premapeo dual son conjugadas, para obtener la órbita de  $\phi I_1(0, 2, 2) = I_1(0, 1, 1)$ , revertimos el orden de la órbita de  $I_1(0, 2, 2)$  y aplicamos  $\phi$  a cada uno de los elementos.

$$J(P^*, \phi(I_1(0, 2, 2))) = \{\phi(I_1(0, 2, 2)), \phi(I_5(6, 7, 1)), \phi(I_4(5, 1, 4))\}$$

$$J(P^*, I_1(0, 1, 1)) = \{I_1(0, 1, 1), I_5(6, 2, 4), I_4(5, 7, 2)\}$$

Estas dos órbitas definen un vértice en el premapeo dual  $L^*$  y una cara en el premapeo  $L$ , las cruces que conforman las caras se representan con medias aristas y se recorren en el diagrama en sentidos opuestos, las caras orientadas asociadas a las órbitas de anteriores aparecen enseguida:



Para obtener nuestro siguiente vértice elegimos la cruz  $I_1(3, 2, 1)$  y  $\phi I_1(3, 2, 1)$ , cuyas órbitas conjugadas son:

$$J(P^*, I_1(3, 2, 1)) = \{I_1(3, 2, 1), I_2(5, 1, 4), I_3(6, 4, 2)\}$$

$$J(P^*, \phi I_1(3, 2, 1)) = \{I_1(3, 1, 2), I_3(6, 2, 4), I_2(5, 4, 1)\}$$

En los primeros dos vértices del premapeo dual, ya aparecieron todas las cruces de la celda  $I_1$  y dos de las cuatro cruces de  $I_2$ , consideremos la cruz  $I_2(0, 4, 4)$  y  $\phi I_2(0, 4, 4)$ ,

para calcular el siguiente vértice del premapeo dual. Las dos órbitas conjugadas para estas cruces aparecen enseguida:

$$\begin{aligned} J(P^*, I_2(0, 4, 4)) &= \{I_2(0, 4, 4), I_4(3, 2, 1), I_6(6, 7, 1)\} \\ J(P^*, \phi I_2(0, 4, 4)) &= \{I_2(0, 1, 1), I_6(6, 4, 2), I_4(3, 7, 4)\} \end{aligned}$$

Dos de las cruces de la celda  $I_3$  aparecen en las orbitas conjugadas del segundo vértice que encontramos, consideramos entonces las dos cruces restantes de la celda  $I_3$  que son:  $I_3(0, 2, 2)$  y  $\phi(I_3(0, 2, 2))$  cuyas órbitas conjugadas son:

$$\begin{aligned} J(P^*, I_3(0, 2, 2)) &= \{I_3(0, 2, 2), I_6(5, 4, 1), I_5(3, 7, 4)\} \\ J(P^*, \phi I_3(0, 2, 2)) &= \{I_3(0, 4, 4), I_5(3, 2, 1), I_6(5, 7, 2)\} \end{aligned}$$

Todas las cruces pertenecen a alguna de las orbitas conjugadas que definen a los cuatro vértices del premapeo dual  $L^*$ , por lo tanto el número de caras del premapeo  $L$  es  $\alpha_2 = 4$ . Con esta información tenemos que la característica de Euler para el premapeo es  $\chi = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 4 - 6 + 4 = 2$ , entonces la gráfica asociada al premapeo debe ser una gráfica plana. La gráfica asociada se puede encajar en una superficie que tenga la misma característica de Euler que el premapeo, en este caso la gráfica asociada puede encajarse en la esfera. La gráfica asociada al premapeo se muestra en la figura 4.3 y su encaje en la figura 4.4.

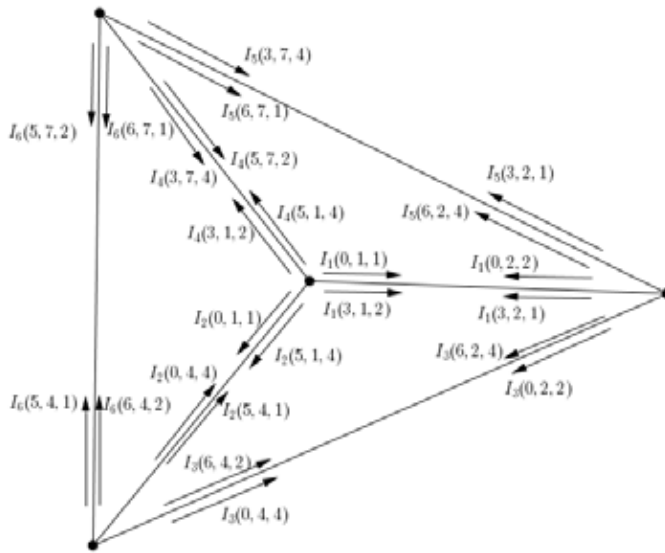


Figura 4.3:  $G(L)$  La gráfica asociada al premapeo  $L$ .

En la gráfica asociada podemos observar los cuatro vértices del premapeo y cada una de las órbitas conjugadas que lo definen, una en sentido a las manecillas del reloj y la otra en sentido contrario. También podemos observar claramente las dos órbitas conjugadas que definen las caras del premapeo, las cuales se recorren en los mismos sentidos que los vértices.

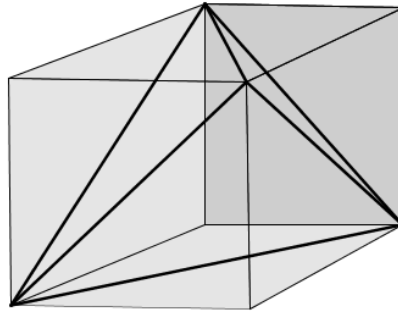


Figura 4.4: Encaje de  $G(L)$  en la esfera

En la figura anterior, el encaje de la gráfica está hecho en el cubo (el cual sabemos que es homeomorfo a la esfera) para ver de manera más clara que lo que hicimos en el **ejemplo 3.5** y lo que hicimos en este ejemplo nos da la misma superficie.  $\square$

Las definiciones que hicimos en esta sección y las definiciones de las involuciones las utilizaremos en la siguiente sección, para analizar los circuitos fundamentales que se obtienen del matroide diádico  $\mathcal{M}(D_2)$ .



# Capítulo 5

## Estructura de los Circuitos de Matroides Intercalados

En este capítulo presentamos los resultados principales de la tesis, se hizo el análisis exhaustivo de los circuitos fundamentales que aparecen en los matroides intercalados  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$ . Para el matroide intercalado  $\mathcal{M}(D_2)$  se realizó la diferencia simétrica dos a dos de los circuitos fundamentales, hasta que obtuvimos todos los posibles circuitos del matroide. Podría decirse que el trabajo que se presenta a continuación es un trabajo artesanal ya que todas las diferencias, mapeos y pegados se realizaron sin ayuda de la computadora.

La matriz de incidencia de la hipergráfica asociada al matroide intercalado y la forma reducida se hicieron por medio de un algoritmo implementado en Python programado por Gerino Ochoa Morales y el código aparece como apéndice.

Cuando comenzamos con el análisis de los circuitos del matroide intercalado  $\mathcal{M}(D_2)$  la primera matriz de incidencia y reducción sobre  $\mathbb{Z}_2$  se realizó a mano y se retomó la idea de Gilberto Calvillo, et al. [CGMB97b] que se presentó en el ejemplo 3.5. fue usando esta técnica como obtuvimos todos los circuitos de este matroide. Tiempo después decidimos usar los mapeos combinatorios de Tutte ya que resultaba mas fácil explicar los pegados e identificaciones que habíamos hecho para obtener las superficies que se generaban de los circuitos usando esta técnica. Sin embargo, al llegar al análisis de los circuitos del matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  había circuitos en los que el mapeo de Tutte no estaba bien definido debido a que en  $\mathcal{M}(D_3)$  aparecen circuitos para los cuales existen entradas que pertenecen a mas de dos intercalaciones, lo que provoca que la permutación  $P$  que definimos en el capítulo anterior no este bien definida. Por lo anterior el análisis de los circuitos del matroide intercalado  $\mathcal{M}(D_3)$  se hizo usando la técnica que mencionamos en el ejemplo 3.5.

## 5.1. El Matroide $\mathcal{M}(D_2)$ y sus Circuitos

Tomando como generadores renglón  $R = \{0, 3, 5, 6\}$  y  $C = \{1, 2, 4, 7\}$  como generadores columna obtenemos la siguiente matriz diádica.

	1	2	4	7
0	1	2	4	7
3	2	1	7	4
5	4	7	1	2
6	7	4	2	1

A está matriz la denotaremos por  $D_2$ . La matriz  $D_2$  cuenta con 12 intercalaciones, las cuales aparecen en la siguiente tabla.

Tabla de Intercalaciones			
Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_1$	0, 3	1, 2	1, 2
$A_2$	0, 3	4, 7	4, 7
$A_3$	5, 6	1, 2	4, 7
$A_4$	5, 6	4, 7	1, 2
$A_5$	0, 6	1, 7	1, 7
$A_6$	0, 6	2, 4	2, 4
$A_7$	3, 5	1, 7	2, 4
$A_8$	3, 5	2, 4	1, 7
$A_9$	0, 5	1, 4	1, 4
$A_{10}$	0, 5	2, 7	2, 7
$A_{11}$	3, 6	1, 4	2, 7
$A_{12}$	3, 6	2, 7	1, 4

Con la información anterior formamos la matriz de incidencia  $A$ , de la siguiente manera; cada columna corresponde a cada una de las intercalaciones y cada renglón corresponde a cada una de las entradas de la matriz diádica  $D_2$ , por lo que la matriz  $A$  tendrá 12 columnas y 16 renglones. El renglón  $l$  de la matriz  $A$  corresponde a la entrada  $(i, j)$  de la matriz diádica donde  $l := 4(i - 1) + j$ . Definimos  $a_{l,k} = 1$  si la entrada  $(i, j)$

de la matriz diádica pertenece a la intercalación  $A_k$  y  $a_{l,k} = 0$  en el caso contrario. Cada intercalación cuenta con cuatro entradas, por lo que cada columna en la matriz  $A$  tendrá exactamente cuatro unos por columna. La matriz de incidencia de la matriz diádica  $D_2$  se muestra a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz podemos observar que cada una de las entradas de  $D_2$  pertenece a tres intercalaciones distintas. A esta matriz le asociamos el matroide vectorial formado por sus columnas sobre  $\mathbb{Z}_2$  y lo denotamos por  $\mathcal{M}(D_2)$ .

Como ya sabemos, podemos realizar operaciones elementales en la matriz  $A$  sin que el matroide vectorial asociado cambie. Por lo que aplicando Gauss-Jordan sobre  $\mathbb{Z}_2$  obtenemos una matriz que induce el mismo matroide que  $A$ . Aplicando Gauss-Jordan

sobre  $\mathbb{Z}_2$  a  $A$ , obtenemos la siguiente matriz.

$$A' = \begin{pmatrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_{10} & A_9 & A_8 & A_{11} & A_{12} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

En esta matriz se han omitido los renglones cero generados por el proceso de eliminación de Gauss-Jordan. Mientras que las columnas mantienen una correspondencia biunívoca con las de  $A$ . Denotamos por  $A_k$  a la columna  $k$  de  $A$  o bien de  $A'$ . De hecho estas columnas son los elementos del matroide  $\mathcal{M}(D_2)$ . En la matriz  $A'$  podemos observar que las columnas  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$  y  $A_{10}$  forman una base para el matroide, denotaremos a esta base por  $B$ . Con está base obtenemos los circuitos fundamentales del matroide.

$$\begin{aligned} C(A_{12}, B) &= \{A_1, A_3, A_5, A_7, A_{10}, A_{12}\} \\ C(A_{11}, B) &= \{A_2, A_3, A_6, A_7, A_{10}, A_{11}\} \\ C(A_9, B) &= \{A_3, A_4, A_5, A_6, A_9, A_{10}\} \\ C(A_8, B) &= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\} \end{aligned}$$

Dado que  $\mathcal{M}(D_2)$  es un matroide binario, por el teorema 1.2.2 tenemos que cualquier otro circuito de  $\mathcal{M}(D_2)$  es diferencia simétrica de los circuitos fundamentales. Lo que haremos a continuación es analizar cada uno de los circuitos fundamentales con ayuda de los mapeos combinatorios de Tutte [Tut84], la permutación  $P$  y las involuciones  $\theta$  y  $\phi$  necesarias para definir el premapeo las definimos en el capítulo anterior, recordemos que  $\theta$  cambia de renglón en la intercalación y que  $P$  cambia de una cruz a otra que tenga los mismos generadores renglón y columna, para posteriormente cambiar de renglón dentro de esta nueva intercalación.

### 5.1.1. Circuito Fundamental $C(A_9, B)$ .

Comenzaremos con el análisis del circuito fundamental  $C(A_9, B)$  el cual está formado por las intercalaciones  $A_3, A_4, A_5, A_6, A_9$  y  $A_{10}$ . En la tabla que aparece enseguida podemos observar la acción de cada una de las involuciones sobre cada una de las cruces de  $C(A_9, B)$ .

$X$	$\theta X$	$\phi X$	$\theta\phi X$	$PX$	$P^{-1}X$	$\pi X$
$A_3(5, 1, 4)$	$A_3(6, 1, 7)$	$A_3(5, 2, 7)$	$A_3(6, 2, 4)$	$A_9(0, 1, 1)$	$A_5(6, 1, 7)$	$A_9(5, 1, 4)$
$A_3(6, 1, 7)$	$A_3(5, 1, 4)$	$A_3(6, 2, 4)$	$A_3(5, 2, 7)$	$A_5(0, 1, 1)$	$A_9(5, 1, 4)$	$A_5(6, 1, 7)$
$A_3(5, 2, 7)$	$A_3(6, 2, 4)$	$A_3(5, 1, 4)$	$A_3(6, 1, 7)$	$A_{10}(0, 2, 2)$	$A_6(6, 2, 4)$	$A_{10}(5, 2, 7)$
$A_3(6, 2, 4)$	$A_3(5, 2, 7)$	$A_3(6, 1, 7)$	$A_3(5, 1, 4)$	$A_6(0, 2, 2)$	$A_{10}(5, 2, 7)$	$A_6(6, 2, 4)$
$A_9(0, 1, 1)$	$A_9(5, 1, 4)$	$A_9(0, 4, 4)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_5(6, 1, 7)$	$A_3(5, 1, 4)$	$A_5(0, 1, 1)$
$A_9(5, 1, 4)$	$A_9(0, 1, 1)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_9(0, 4, 4)$	$A_3(6, 1, 7)$	$A_5(0, 1, 1)$	$A_3(5, 1, 4)$
$A_9(0, 4, 4)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_9(0, 1, 1)$	$A_9(5, 1, 4)$	$A_6(6, 4, 2)$	$A_4(5, 4, 1)$	$A_6(0, 4, 4)$
$A_9(5, 4, 1)$	$A_9(0, 1, 1)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_9(0, 4, 4)$	$A_4(6, 4, 2)$	$A_5(0, 1, 1)$	$A_4(5, 4, 1)$
$A_6(6, 4, 2)$	$A_6(0, 4, 4)$	$A_6(6, 2, 4)$	$A_6(0, 2, 2)$	$A_4(5, 4, 1)$	$A_9(0, 4, 4)$	$A_4(6, 4, 2)$
$A_6(0, 4, 4)$	$A_6(6, 4, 2)$	$A_6(0, 2, 2)$	$A_6(6, 2, 4)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_4(6, 4, 2)$	$A_9(0, 4, 4)$
$A_6(6, 2, 4)$	$A_6(0, 2, 2)$	$A_6(6, 4, 2)$	$A_6(0, 4, 4)$	$A_3(5, 2, 7)$	$A_{10}(0, 2, 2)$	$A_3(6, 2, 4)$
$A_6(0, 2, 2)$	$A_6(6, 2, 4)$	$A_6(0, 0, 4)$	$A_6(6, 4, 2)$	$A_{10}(5, 2, 7)$	$A_6(6, 2, 4)$	$A_{10}(0, 2, 2)$
$A_{10}(0, 2, 2)$	$A_{10}(5, 2, 7)$	$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_{10}(5, 7, 2)$	$A_6(6, 2, 4)$	$A_3(5, 2, 7)$	$A_6(0, 2, 2)$
$A_{10}(5, 2, 7)$	$A_{10}(0, 2, 2)$	$A_{10}(5, 7, 2)$	$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_3(6, 2, 4)$	$A_6(0, 2, 2)$	$A_3(5, 2, 7)$
$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_{10}(5, 7, 2)$	$A_{10}(0, 0, 2)$	$A_{10}(5, 2, 7)$	$A_5(6, 7, 1)$	$A_4(5, 7, 2)$	$A_5(0, 7, 7)$
$A_{10}(5, 7, 2)$	$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_{10}(5, 2, 7)$	$A_{10}(0, 2, 2)$	$A_4(6, 7, 1)$	$A_5(0, 7, 7)$	$A_4(5, 7, 2)$
$A_5(0, 1, 1)$	$A_5(6, 1, 7)$	$A_5(0, 7, 7)$	$A_5(6, 7, 1)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_3(6, 1, 7)$	$A_9(0, 1, 1)$
$A_5(6, 1, 7)$	$A_5(0, 1, 1)$	$A_5(6, 7, 1)$	$A_5(0, 7, 7)$	$A_3(5, 1, 4)$	$A_9(0, 1, 1)$	$A_3(6, 1, 7)$
$A_5(0, 7, 7)$	$A_5(6, 7, 1)$	$A_5(0, 1, 1)$	$A_5(6, 1, 7)$	$A_{10}(5, 7, 2)$	$A_4(6, 7, 1)$	$A_{10}(0, 7, 7)$
$A_5(6, 7, 1)$	$A_5(0, 7, 7)$	$A_5(6, 1, 7)$	$A_5(0, 1, 1)$	$A_4(5, 7, 2)$	$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_4(6, 7, 1)$
$A_4(5, 4, 1)$	$A_4(6, 4, 2)$	$A_4(5, 7, 2)$	$A_4(6, 7, 1)$	$A_9(0, 4, 4)$	$A_6(6, 4, 2)$	$A_9(5, 4, 1)$
$A_4(6, 4, 2)$	$A_4(5, 4, 1)$	$A_4(6, 7, 1)$	$A_4(5, 7, 2)$	$A_6(0, 4, 4)$	$A_9(5, 4, 1)$	$A_6(6, 4, 2)$
$A_4(5, 7, 2)$	$A_4(6, 7, 1)$	$A_4(5, 4, 1)$	$A_4(6, 4, 2)$	$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_5(6, 7, 1)$	$A_{10}(5, 4, 1)$
$A_4(6, 7, 1)$	$A_4(5, 7, 2)$	$A_4(6, 4, 2)$	$A_4(5, 4, 1)$	$A_5(0, 7, 7)$	$A_{10}(0, 7, 7)$	$A_5(6, 7, 1)$

Con la información de la tabla anterior, podemos encontrar la órbita  $J(P, X)$  de cada cruz  $X$  bajo la acción de  $P$ .

$$J(P, A_3(5, 1, 4)) = \{A_9(0, 1, 1), A_5(6, 1, 7), A_3(5, 1, 4)\}$$

$$J(P, A_3(5, 2, 7)) = \{A_{10}(0, 2, 2), A_6(6, 2, 4), A_3(5, 2, 7)\}$$

$$\begin{aligned}
J(P, A_3(6, 2, 4)) &= \{A_6(0, 2, 2), A_{10}(5, 2, 7), A_3(6, 2, 4)\} \\
J(P, A_9(5, 1, 4)) &= \{A_3(6, 1, 7), A_5(0, 1, 1), A_9(5, 1, 4)\} \\
J(P, A_9(0, 4, 4)) &= \{A_6(6, 4, 2), A_4(5, 4, 1), A_9(0, 4, 4)\} \\
J(P, A_6(0, 4, 4)) &= \{A_9(5, 4, 1), A_4(6, 4, 2), A_6(0, 4, 4)\} \\
J(P, A_{10}(0, 7, 7)) &= \{A_5(6, 7, 1), A_4(5, 7, 2), A_{10}(0, 7, 7)\} \\
J(P, A_{10}(5, 7, 2)) &= \{A_4(6, 7, 1), A_5(0, 7, 7), A_{10}(5, 7, 2)\}
\end{aligned}$$

En la tabla siguiente aparecen los pares de órbitas conjugadas del premapeo  $L(\theta, \phi, P)$ . Cada par define un vértice  $v$  del premapeo. Cada una de las dos órbitas es un vértice orientado de  $L$  y una forma ordenada de  $v$ . La notación que utilizaremos para los vértices es  $v_{c_j}$ .

$v$	$J(P, X)$	$J(P, \theta X)$
$v_1$	$J(P, A_3(5, 1, 4))$	$J(P, A_3(6, 1, 7))$
$v_2$	$J(P, A_3(5, 2, 7))$	$J(P, A_3(6, 2, 4))$
$v_4$	$J(P, A_9(0, 4, 4))$	$J(P, A_6(0, 4, 4))$
$v_7$	$J(P, A_{10}(0, 7, 7))$	$J(P, A_{10}(5, 7, 2))$

Enseguida mostramos las aristas y sus medias aristas en  $L$ .

Arista	$\{X, \theta X\}$	$\{\phi X, \theta \phi X\}$
$A_3$	$\{A_3(5, 1, 4), A_3(6, 1, 7)\}$	$\{A_3(5, 2, 7), A_3(6, 2, 4)\}$
$A_4$	$\{A_4(5, 4, 1), A_3(6, 4, 2)\}$	$\{A_4(5, 7, 2), A_4(6, 7, 1)\}$
$A_5$	$\{A_5(6, 1, 7), A_4(0, 1, 1)\}$	$\{A_5(6, 7, 1), A_5(0, 7, 7)\}$
$A_6$	$\{A_6(6, 4, 2), A_6(0, 4, 4)\}$	$\{A_6(6, 2, 4), A_6(0, 2, 2)\}$
$A_9$	$\{A_9(0, 1, 1), A_9(5, 1, 4)\}$	$\{A_9(0, 4, 4), A_9(5, 4, 1)\}$
$A_{10}$	$\{A_{10}(0, 2, 2), A_{10}(5, 2, 7)\}$	$\{A_{10}(5, 2, 7), A_{10}(5, 7, 2)\}$

En la figura 5.1 mostramos de manera gráfica las aristas del premapeo  $L$  de  $C(A_9, B)$  y en la figura 5.2 la gráfica del premapeo.

Aplicando la característica de Euler a  $G(L)$  tenemos  $\chi = 3 - 6 + 4 = 1$  lo que nos indica que el mapeo combinatorio se puede interpretar como el encaje de una gráfica en el plano proyectivo.

Analizando las intercalaciones que forman el circuito  $C(A_9, B)$  observamos que ninguna utiliza el generador renglón 3 por lo que lo denotaremos por  $P_3$ .

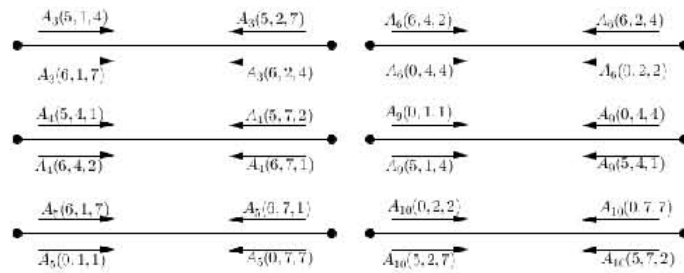
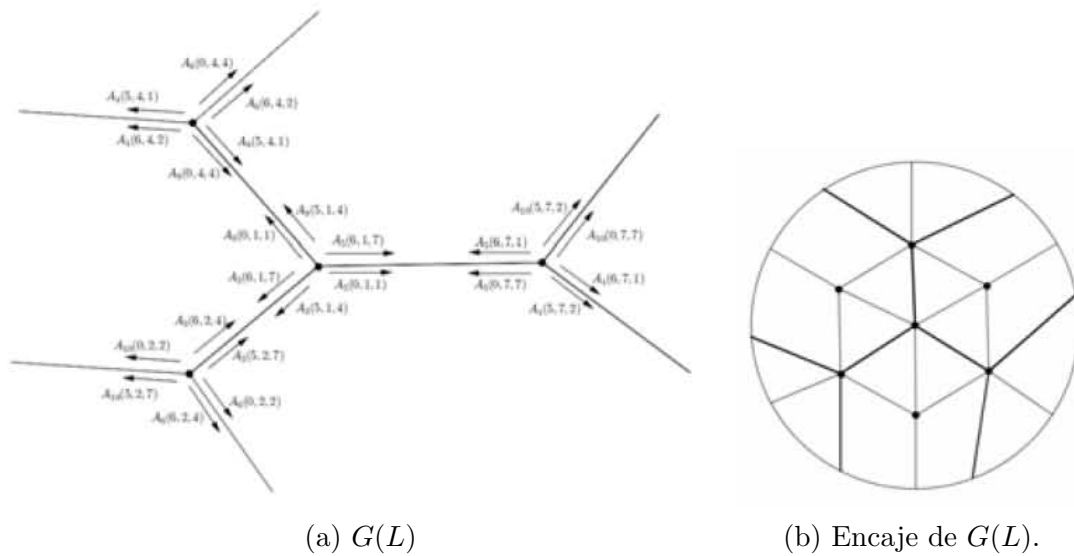


Figura 5.1: Aristas del premapeo  $L$  de  $C(A_9, B)$



(a)  $G(L)$

(b) Encaje de  $G(L)$ .

Figura 5.2: Gráfica del premapeo asociado a  $C(A_9, B)$  y su encaje en el plano proyectivo

De hecho siempre que dentro de la matriz díadica  $D_2$  quitamos un renglón y consideramos todas las intercalaciones de  $D_2$  que no utilizan este generador, obtenemos un circuito del matroide intercalado  $\mathcal{M}(D_2)$  el cual se encaja de la misma manera que el circuito fundamental  $C(A_9, B)$  en el plano proyectivo.

**Ejemplo 5.1.** Para ejemplificar lo anterior, supongamos que decidimos quitar el generador renglón 5, borraremos entonces de  $D_2$  todas las entradas que usan el generador renglón 5 y consideremos únicamente las intercalaciones de  $D_2$  que no utilizan el generador 5.

	1	2	4	7
0	1	2	4	7
3	2	1	7	4
5				
6	7	4	2	1

De las 12 intercalaciones que conforman el matroide las que no usan el generador renglón 5 son:  $A_1, A_2, A_5, A_6, A_{11}$  y  $A_{12}$ .

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_1$	0, 3	1, 2	1, 2
$A_2$	0, 3	4, 7	4, 7
$A_5$	0, 6	1, 7	1, 7
$A_6$	0, 6	2, 4	2, 4
$A_{11}$	3, 6	1, 4	2, 7
$A_{12}$	3, 6	2, 7	1, 4

Mostraremos primero que estas intercalaciones forman un circuito del matroide, es decir, que es un subconjunto dependiente minimal. Para ello es necesario mostrar que al quitar cualquier elemento de este conjunto, lo que nos queda es un subconjunto independiente.

Enseguida mostramos la matriz formada por estas intercalaciones:

$$\begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \quad A_5 \quad A_6 \quad A_{11} \quad A_{12} \\ \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Reduciendo sobre  $\mathbb{Z}_2$  y eliminando los renglones cero obtenemos:

$$\begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \quad A_5 \quad A_6 \quad A_{11} \quad A_{12} \\ \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

de esta matriz podemos observar que el rango del conjunto de intercalaciones es 5 y que para cualquier intercalación que quitemos el conjunto que queda es independiente, por lo tanto el conjunto  $\{A_1, A_2, A_5, A_6, A_{11}, A_{12}\}$  es un circuito de  $\mathcal{M}(D_2)$ . Veamos ahora cual es la gráfica del premapeo asociado al circuito. En la figura 5.3 se muestran las aristas asociadas al premapeo y en la figura 5.4 la gráfica asociada.

Esta gráfica y la gráfica asociada al premapeo del circuito  $C(A_9, B)$  son isomorfas, por lo tanto la gráfica asociada al circuito  $\{A_1, A_2, A_5, A_6, A_{11}, A_{12}\}$  también es un encaje en el plano proyectivo.  $\square$

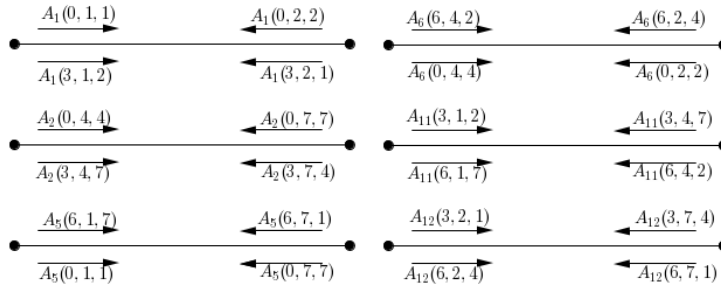


Figura 5.3: Aristas del premapeo.

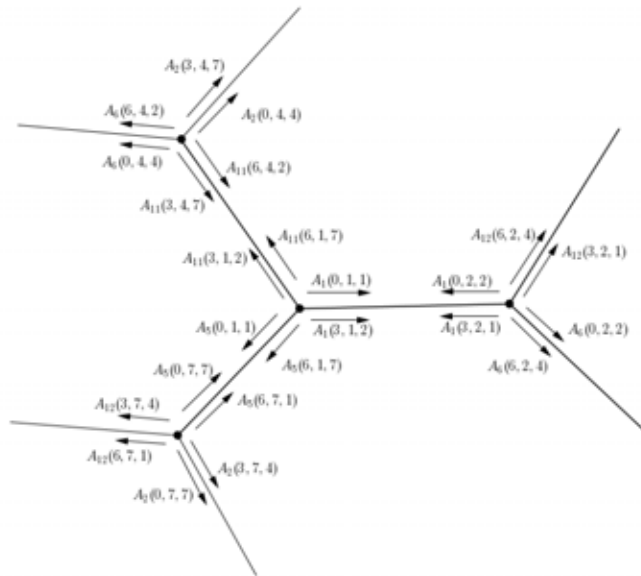


Figura 5.4: Gráfica  $G(L)$  asociada al premapeo.

Si analizamos la matriz de incidencia asociada a la hipergráfica dada por la matriz diádica, podemos separarla por bloques de 4

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 0 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 3 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 5 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 6 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{cccccccccccc}
 A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \right)$$

por como definimos la matriz de incidencia los primeros cuatro renglones están asociados a las primeras cuatro entradas de la matriz de incidencia, es decir, todas estas entradas tienen como generador renglón al cero. Por ejemplo la columna  $A_1$  usa generadores renglón al  $\{0, 3\}$ , por lo tanto sus entradas 1 están en los primeros 8 renglones de la matriz de incidencia. En cada uno de los bloques de la matriz de incidencia aparecen 6 de las 12 intercalaciones, por lo que a la hora de quitar un generador renglón y considerar todas las intercalaciones que no utilizan ese generador renglón, lo que estamos haciendo en la matriz de incidencia es quitar 6 de las 12 intercalaciones y estas 6 columnas siempre forman un circuito de matroide. Por lo que tenemos cuatro planos proyectivos de tamaño 6 isomorfos a  $C(A_9, B)$  uno por cada borrado de alguno de los generadores renglón. A

estos planos proyectivos los denotamos  $P_i$  donde  $i \in \{0, 3, 5, 6\}$ .

### 5.1.2. Circuito Fundamental $C(A_{12}, B)$

Siguiendo con el análisis de los circuitos fundamentales, para el circuito  $C(A_{12}, B)$  obtenemos las siguientes aristas:

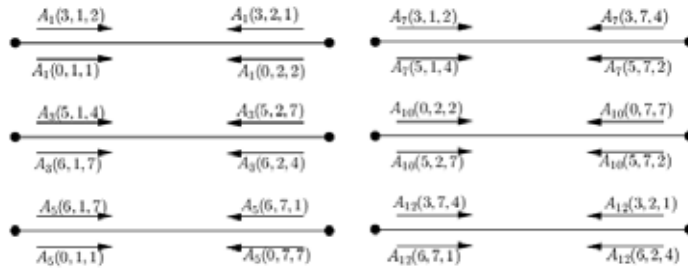


Figura 5.5: Aristas del premapo  $L$  de  $C(A_{12}, B)$

La representación gráfica asociada al premapo sobre  $C(A_{12}, B)$  puede observarse en la figura 5.6. La gráfica asociada tiene característica de Euler  $\chi = 1$ , lo que nos indica que ésta se encaja en el plano proyectivo. Denotaremos a este circuito  $P_4, P$  porque la gráfica asociada está encajada en el plano proyectivo y 4 por que ninguna de las intercalaciones que conforma este circuito utiliza a este generador columna.

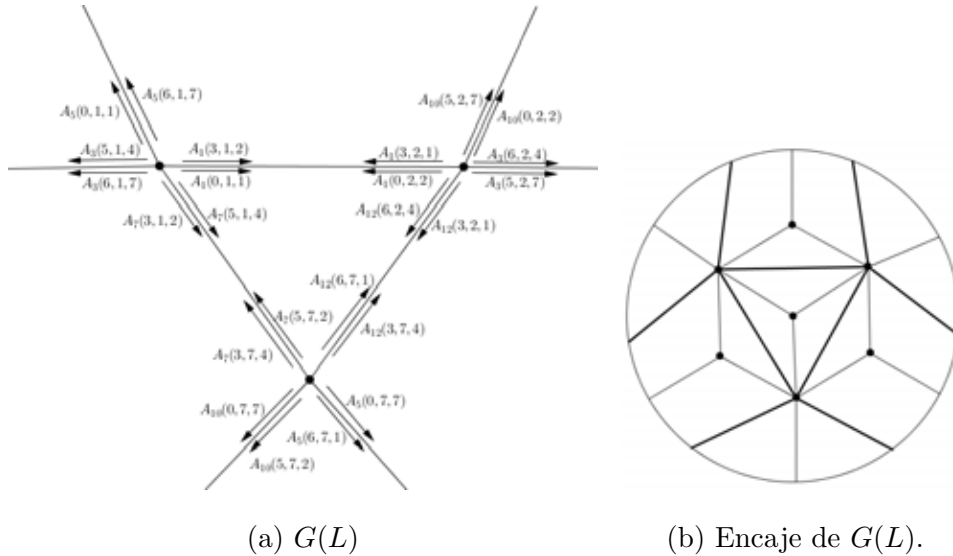


Figura 5.6: Gráfica del premapo asociado a  $C(A_{12}, B)$  y su encaje en el plano proyectivo

Al igual que en el caso de los planos proyectivos que se obtienen quitando un generador renglón, lo que observamos es que los planos proyectivos isomorfos al circuito  $C(A_{12}, B)$  se obtienen quitando un generador columna y tomando todas las intercalaciones que no usan este generador columna. Con esto tenemos otros cuatro planos proyectivos, denotados por  $P_j$  donde  $j \in \{1, 2, 4, 7\}$ .

### 5.1.3. Circuito Fundamental $C(A_8, B)$

Ahora bien, el circuito  $C(A_8, B)$  posee 8 aristas, las cuales aparecen en la figura 5.7.

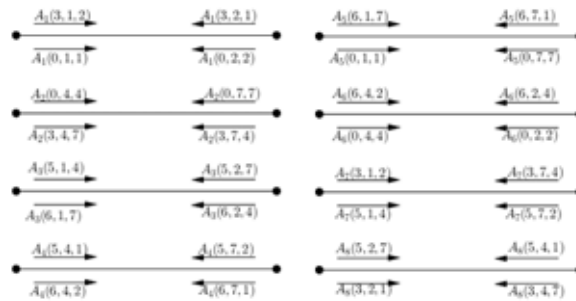


Figura 5.7: Aristas del premapo  $L$  de  $C(A_8, B)$

Siguiendo con la construcción del premapo combinatorio para  $C(A_8, B)$  obtenemos la gráfica que aparece en la figura 5.8.

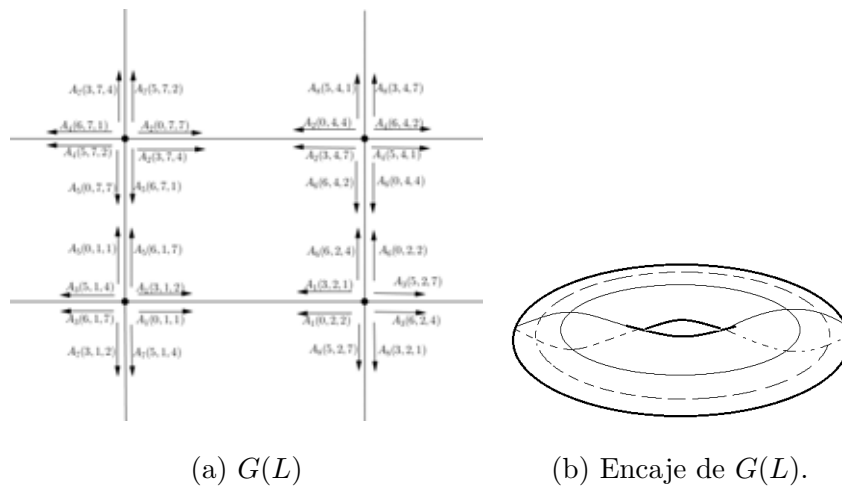


Figura 5.8: Premapeo de Tutte para  $C(A_{11}, B)$

La característica de Euler para esta gráfica es 0, por lo que la gráfica está encajada en el toro. Denotaremos a este circuito como  $T_{1,4}$ . Utilizamos esta notación para el toro, debido a que este circuito se puede ver como la diferencia simétrica de los planos proyectivos columna  $P_1$  y  $P_4$ . El plano proyectivo  $P_1$  está formado por las intercalaciones  $\{A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}\}$  y el plano  $P_4$  por las intercalaciones  $\{A_1, A_3, A_5, A_7, A_{10}, A_{12}\}$ , ambos planos tienen como subconjunto a  $\{A_{10}, A_{12}\}$ . Entonces  $P_1 \Delta P_4 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$  que es precisamente el circuito fundamental  $C(A_8, B)$

### 5.1.4. Circuito Fundamental $C(A_{11}, B)$

El circuito fundamental  $C(A_{11}, B)$  contiene 6 aristas las cuales aparecen en la figura 5.7.

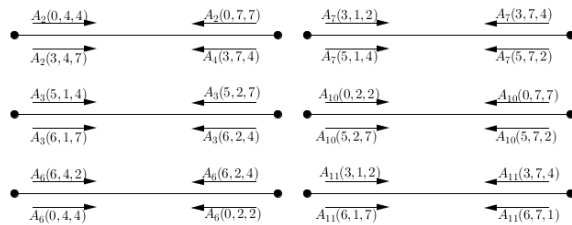


Figura 5.9: Aristas del premapeo  $L$  de  $C(A_{11}, B)$

La gráfica asociada al premapeo, aparece en la figura 5.8.

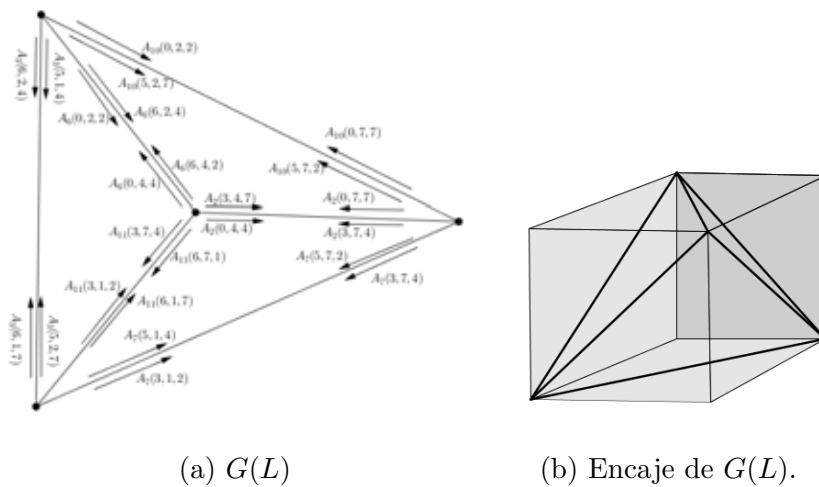


Figura 5.10: Premapeo de Tutte para  $C(A_{11}, B)$  y su encaje

Como podemos observar, la gráfica que obtenemos es  $K_3$ , por lo que la característica de Euler es 2, esto quiere decir que nuestra gráfica se encuentra encajada en la esfera. Dado que ninguna de las intercalaciones del circuito  $C(A_{11}, B)$  tienen color 1, denotaremos a este circuito por  $C_1$ . En el capítulo 3 y 4 ya habíamos trabajado con este circuito, quitando todas las intercalaciones que contenían al color 1 y calculando el mapeo combinatorio de Tutte. En general, cada vez que quitamos un color de la matriz diádica y consideramos sólo las intercalaciones que no usan ese color obtenemos un circuito isomorfo a  $C(A_{11}, B)$ , por lo que en el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  tenemos cuatro cubos isomorfos a  $C(A_{11}, B)$ , uno por cada color que aparece en la matriz intercalada diádica. Denotamos a estos cubos por  $C_j$  con  $j \in \{1, 2, 4, 7\}$ .

## 5.2. Espacio de Circuitos del Matroide $\mathcal{M}(D_2)$

Hasta ahora sabemos que el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  tiene al menos trece circuitos: cuatro planos proyectivos renglón, cuatro planos proyectivos columna, cuatro cubos y un toro.

Dado que  $\mathcal{M}(D_2)$  es un matroide binario sabemos que todo circuito se puede obtener como diferencia simétrica de circuitos fundamentales, sabiendo esto comenzamos por analizar lo que sucedía al tomar la diferencia simétrica de un par de estos circuitos, lo que obtuvimos es que al hacer estas diferencias obteníamos otro circuito del matroide. Partiendo de los circuitos fundamentales y tomando la diferencia simétrica dos a dos, fueron apareciendo los otros planos proyectivos renglón y columna y los cubos, así como otros toros.

Lo que obtuvimos después del análisis exhaustivo de las diferencias simétricas es que  $\mathcal{M}(D_2)$  cuenta con 15 circuitos, cuatro circuitos isomorfos a  $C_1$  denotados por  $C_2, C_4$  y  $C_7$ . Cuatro planos proyectivos isomorfos a  $P_4$ , denotados por  $P_1, P_2$  y  $P_7$ . Cuatro circuitos isomorfos a  $P_3$ , denotados por  $P_0, P_5$  y  $P_6$  y tres circuitos isomorfos a  $T_{1,7}$  denotados por  $T_{1,2}$  y  $T_{1,4}$ .

Sabemos que en todo matroide binario los circuitos forman un espacio vectorial, con la diferencia simétrica como suma. Para el caso del matroide diádico  $\mathcal{M}(D_2)$  logramos obtener la tabla del grupo de Cayley bajo la operación de diferencia simétrica del espacio vectorial, que es la tabla que mostramos enseguida.

$\Delta$	$C_1$	$C_2$	$C_4$	$C_7$	$P_0$	$P_3$	$P_5$	$P_6$	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_7$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$
$C_1$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_7$	$P_0$	$P_3$	$P_5$	$P_6$	$C_1$	$C_2$	$C_4$	$C_7$
$C_2$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$P_2$	$P_1$	$P_7$	$P_4$	$P_3$	$P_0$	$P_6$	$P_5$	$C_2$	$C_1$	$C_7$	$C_4$
$C_4$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$P_4$	$P_7$	$P_1$	$P_2$	$P_5$	$P_6$	$P_0$	$P_3$	$C_4$	$C_7$	$C_1$	$C_2$
$C_7$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$P_7$	$P_4$	$P_2$	$P_1$	$P_6$	$P_5$	$P_3$	$P_0$	$C_7$	$C_4$	$C_2$	$C_1$
$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_7$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$C_1$	$C_2$	$C_4$	$C_7$	$P_0$	$P_3$	$P_5$	$P_6$
$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_7$	$P_4$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$C_2$	$C_1$	$C_7$	$C_4$	$P_3$	$P_0$	$P_6$	$P_5$
$P_5$	$P_4$	$P_7$	$P_1$	$P_2$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$C_4$	$C_7$	$C_1$	$C_2$	$P_5$	$P_6$	$P_0$	$P_3$
$P_6$	$P_7$	$P_4$	$P_2$	$P_1$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$C_7$	$C_4$	$C_2$	$C_1$	$P_6$	$P_5$	$P_3$	$P_0$
$P_1$	$P_0$	$P_3$	$P_5$	$P_6$	$C_1$	$C_2$	$C_4$	$C_7$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_7$
$P_2$	$P_3$	$P_0$	$P_6$	$P_5$	$C_2$	$C_1$	$C_7$	$C_4$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$P_2$	$P_1$	$P_7$	$P_4$
$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_0$	$P_3$	$C_4$	$C_7$	$C_1$	$C_2$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$P_4$	$P_7$	$P_1$	$P_2$
$P_7$	$P_6$	$P_5$	$P_3$	$P_0$	$C_7$	$C_4$	$C_2$	$C_1$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$P_7$	$P_4$	$P_2$	$P_1$
$\emptyset$	$C_1$	$C_2$	$C_4$	$C_7$	$P_0$	$P_3$	$P_5$	$P_6$	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_7$	$\emptyset$	$T_{1,2}$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$
$T_{1,2}$	$C_2$	$C_1$	$C_7$	$C_4$	$P_3$	$P_0$	$P_6$	$P_5$	$P_2$	$P_1$	$P_7$	$P_4$	$T_{1,2}$	$\emptyset$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$
$T_{1,4}$	$C_4$	$C_7$	$C_1$	$C_2$	$P_5$	$P_6$	$P_0$	$P_3$	$P_4$	$P_7$	$P_1$	$P_2$	$T_{1,4}$	$T_{1,7}$	$\emptyset$	$T_{1,2}$
$T_{1,7}$	$C_7$	$C_4$	$C_2$	$C_1$	$P_6$	$P_5$	$P_3$	$P_0$	$P_7$	$P_4$	$P_2$	$P_1$	$T_{1,7}$	$T_{1,4}$	$T_{1,2}$	$\emptyset$

Como podemos ver en la tabla  $\mathcal{C}(\mathcal{M}(D_2))$  forma un grupo abeliano bajo  $\Delta$  isomorfo a  $(\mathbb{Z}_2)^3$ , que es a su vez una matriz diádica de tamaño  $16 \times 16$ .

Los circuitos más grandes que obtenemos en este matroide son los de tamaño 8, pero como podemos observar de la tabla éstos son diferencia simétrica de circuitos de tamaño 6, por lo que en el matroide diádico  $\mathcal{M}(D_2)$  todo circuito se puede ver como diferencia simétrica de circuitos de tamaño 6.

### 5.3. El Matroide $\mathcal{M}(D_3)$ y sus Circuitos

Llamamos  $D_3$  a la matriz diádica generada al tomar como generador renglón  $R = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$  y generador columna  $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ ; la matriz diádica que se genera aparece a continuación.

$\oplus$	1	2	4	7	8	11	13	14
0	1	2	4	7	8	11	13	14
3	2	1	7	4	11	8	14	13
5	4	7	1	2	13	14	8	11
6	7	4	2	1	14	13	11	8
9	8	11	13	14	1	2	4	7
10	11	8	14	13	2	1	7	4
12	13	14	8	11	4	7	1	2
15	14	13	11	8	7	4	2	1

Recordemos que la estructura se preserva en las clases de isotopía, por lo que tenemos dentro de este matroide varias copias del matroide  $\mathcal{M}(D_2)$ , como consecuencia de esto los circuitos que encontramos y analizamos en  $\mathcal{M}(D_2)$  se encuentran también en este matroide.

La matriz intercalada diádica  $D_3$  cuenta con 112 intercalaciones; tomando los generadores renglón tenemos 28 maneras distintas de elegir dos generadores y por cada suma diádica de estos dos generadores hay 4 parejas de generadores columna con esta misma suma diádica. Cada una de las intercalaciones de la matriz  $D_3$  aparecen en las siguientes tablas, la primera columna indica el nombre de cada intercalación y el subíndice la posición que ocupa en la matriz de incidencia, la siguientes dos columnas indican los generadores renglón y columna, mientras que la cuarta columna nos indica los colores que tiene la intercalación :

Tabla de Intercalaciones			
Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_1$	0, 3	1, 2	1, 2
$A_2$	0, 3	4, 7	4, 7
$A_3$	0, 3	8, 11	8, 11
$A_4$	0, 3	13, 14	13, 14

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_5$	0, 5	1, 4	1, 4
$A_6$	0, 5	2, 7	2, 7
$A_7$	0, 5	8, 13	8, 13
$A_8$	0, 5	11, 14	11, 14
$A_9$	0, 6	1, 7	1, 7
$A_{10}$	0, 6	2, 4	2, 4
$A_{11}$	0, 6	8, 14	8, 14
$A_{12}$	0, 6	11, 13	11, 13
$A_{13}$	0, 9	1, 8	1, 8
$A_{14}$	0, 9	2, 11	2, 11
$A_{15}$	0, 9	4, 13	4, 13
$A_{16}$	0, 9	7, 14	7, 14
$A_{17}$	0, 10	1, 11	1, 11
$A_{18}$	0, 10	2, 8	2, 8
$A_{19}$	0, 10	4, 14	4, 14
$A_{20}$	0, 10	7, 13	7, 13
$A_{21}$	0, 12	1, 13	1, 13
$A_{22}$	0, 12	2, 14	2, 14
$A_{23}$	0, 12	4, 8	4, 8
$A_{24}$	0, 12	7, 11	7, 11
$A_{25}$	0, 15	1, 14	1, 14
$A_{26}$	0, 15	2, 13	2, 13
$A_{27}$	0, 15	4, 11	4, 11
$A_{28}$	0, 15	7, 8	7, 8
$A_{29}$	3, 5	1, 7	2, 4
$A_{30}$	3, 5	2, 4	1, 7
$A_{31}$	3, 5	8, 14	11, 13
$A_{32}$	3, 5	11, 13	8, 14
$A_{33}$	3, 6	1, 4	2, 7
$A_{34}$	3, 6	2, 7	1, 4
$A_{35}$	3, 6	8, 13	11, 14

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_{36}$	3, 6	11, 14	8, 13
$A_{37}$	3, 9	1, 11	2, 8
$A_{38}$	3, 9	2, 8	1, 11
$A_{39}$	3, 9	4, 14	7, 13
$A_{40}$	3, 9	7, 13	4, 14
$A_{41}$	3, 10	1, 8	2, 11
$A_{42}$	3, 10	2, 11	1, 8
$A_{43}$	3, 10	4, 13	7, 14
$A_{44}$	3, 10	7, 14	4, 13
$A_{45}$	3, 12	1, 14	2, 13
$A_{46}$	3, 12	2, 13	1, 14
$A_{47}$	3, 12	4, 11	7, 8
$A_{48}$	3, 12	7, 8	4, 11
$A_{49}$	3, 15	1, 13	2, 14
$A_{50}$	3, 15	2, 14	1, 13
$A_{51}$	3, 15	4, 8	7, 11
$A_{52}$	3, 15	7, 11	4, 8
$A_{53}$	5, 6	1, 2	4, 7
$A_{54}$	5, 6	4, 7	1, 2
$A_{55}$	5, 6	8, 11	13, 14
$A_{56}$	5, 6	13, 14	8, 11
$A_{57}$	5, 9	1, 13	4, 8
$A_{58}$	5, 9	2, 14	7, 11
$A_{59}$	5, 9	4, 8	1, 13
$A_{60}$	5, 9	7, 11	2, 14
$A_{61}$	5, 10	1, 14	4, 11
$A_{62}$	5, 10	2, 13	7, 8
$A_{63}$	5, 10	4, 11	1, 14
$A_{64}$	5, 10	7, 8	2, 13
$A_{65}$	5, 12	1, 8	4, 13
$A_{66}$	5, 12	2, 11	7, 14

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_{67}$	5, 12	4, 13	1, 8
$A_{68}$	5, 12	7, 14	2, 11
$A_{69}$	5, 15	1, 11	4, 14
$A_{70}$	5, 15	2, 8	7, 13
$A_{71}$	5, 15	4, 14	1, 11
$A_{72}$	5, 15	7, 13	2, 8
$A_{73}$	6, 9	1, 14	7, 8
$A_{74}$	6, 9	2, 13	4, 11
$A_{75}$	6, 9	4, 11	2, 13
$A_{76}$	6, 9	7, 8	1, 14
$A_{77}$	6, 10	1, 13	7, 11
$A_{78}$	6, 10	2, 14	4, 8
$A_{79}$	6, 10	4, 8	2, 14
$A_{80}$	6, 10	7, 11	1, 13
$A_{81}$	6, 12	1, 11	7, 13
$A_{82}$	6, 12	2, 8	4, 14
$A_{83}$	6, 12	4, 14	2, 8
$A_{84}$	6, 12	7, 13	1, 11
$A_{85}$	6, 15	1, 8	7, 14
$A_{86}$	6, 15	2, 11	4, 13
$A_{87}$	6, 15	4, 13	2, 11
$A_{88}$	6, 15	7, 14	1, 8
$A_{89}$	9, 10	1, 2	8, 11
$A_{90}$	9, 10	4, 7	13, 14
$A_{91}$	9, 10	8, 11	1, 2
$A_{92}$	9, 10	13, 14	4, 7
$A_{93}$	9, 12	1, 4	8, 13
$A_{94}$	9, 12	2, 7	11, 14
$A_{95}$	9, 12	8, 13	1, 4
$A_{96}$	9, 12	11, 14	2, 7
$A_{97}$	9, 15	1, 7	8, 14

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$A_{98}$	9, 15	2, 4	11, 13
$A_{99}$	9, 15	8, 14	1, 7
$A_{100}$	9, 15	11, 13	2, 4
$A_{101}$	10, 12	1, 7	11, 13
$A_{102}$	10, 12	2, 4	8, 14
$A_{103}$	10, 12	8, 14	2, 4
$A_{104}$	10, 12	11, 13	1, 7
$A_{105}$	10, 15	1, 4	11, 14
$A_{106}$	10, 15	2, 7	8, 13
$A_{107}$	10, 15	8, 13	2, 7
$A_{108}$	10, 15	11, 14	1, 4
$A_{109}$	12, 15	1, 2	13, 14
$A_{110}$	12, 15	4, 7	8, 11
$A_{111}$	12, 15	8, 11	4, 7
$A_{112}$	12, 15	13, 14	1, 2

La matriz de incidencia asociada a  $D_3$  aparece en la figura 5.16 y la forma reducida en la figura 5.17. La base canónica  $B$  de la forma reducida esta formada por el siguiente conjunto de intercalaciones:

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{28}, A_{29}, A_{31}, A_{33}, A_{35}, A_{37}, A_{39}, A_{41}, A_{43}, A_{45}, A_{47}, A_{49}, A_{51}, A_{57}, \\ A_{61}, A_{65}, A_{69}, A_{73}\}$$

Después de llevar la matriz de incidencia a su forma reducida se observa que el matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  tiene rango 45 y 67 circuitos fundamentales; de los cuales 34 son de tamaño 6, 8 de tamaño 10, 16 de tamaño 12, 6 de tamaño 14 y 3 de tamaño 16.

Al igual que con el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  analizamos la estructura topológica de los circuitos y mostramos que todo circuito del matroide es diferencia simétrica de sus circuitos más pequeños, es decir, de los circuitos de tamaño 6. El análisis de los circuitos de tamaño 6 en  $\mathcal{M}(D_3)$  se sigue de lo que vimos en el capítulo anterior, todos son cubos o planos proyectivos. Para analizar los circuitos de tamaño seis, observamos en qué submatriz de tamaño cuatro por cuatro de  $D_3$  se encontraba y vimos que en todos los casos era una submatriz isotópica a  $D_2$ , esto es, solo cambiaba las etiquetas de

los generadores renglón y columna, por lo que usamos la misma notación que para los circuitos de  $D_2$ .

- $P_i$  denota el plano proyectivo que se obtiene como circuito al borrar el renglón o columna  $i$  y tomar las intercalaciones que quedan en la submatriz después de ese borrado.
- $C_i$  es el cubo que se obtiene al quitar el color  $i$  de la submatriz y tomar las intercalaciones que quedan en la submatriz después de ese borrado.

En las siguientes tablas aparecen los circuitos fundamentales de tamaño seis, la primera columna denota los generadores renglón y columna de la submatriz isotópica a  $D_2$  en donde se encuentran las intercalaciones que forman cada circuito fundamental; la segunda columna indica la notación que usamos para circuito fundamental; la tercera columna indica las intercalaciones que lo conforman y la cuarta columna es la superficie donde se encaja la gráfica del mapeo de Tutte para ese circuito.

Circuitos fundamentales de tamaño 6			
Submatriz	Circuito	Intercalaciones	El circuito es:
$\{0, 3, 5, 6\}\{1, 2, 4, 7\}$	$C(B, A_{30})$	$\{A_1, A_2, A_5, A_6, A_{29}, A_{30}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\{0, 3, 5, 6\}\{8, 11, 13, 14\}$	$C(B, A_{32})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_8, A_{31}, A_{32}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\{0, 3, 5, 6\}\{1, 2, 4, 7\}$	$C(B, A_{34})$	$\{A_1, A_2, A_9, A_{10}, A_{33}, A_{34}\}$	Plano proyectivo $P_5$
$\{0, 3, 5, 6\}\{8, 11, 13, 14\}$	$C(B, A_{36})$	$\{A_3, A_4, A_{11}, A_{12}, A_{35}, A_{36}\}$	Plano proyectivo $P_5$
$\{0, 3, 9, 10\}\{1, 2, 8, 11\}$	$C(B, A_{38})$	$\{A_1, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{37}, A_{38}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\{0, 3, 9, 10\}\{4, 7, 13, 14\}$	$C(B, A_{40})$	$\{A_2, A_4, A_{15}, A_{16}, A_{39}, A_{40}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\{0, 3, 9, 10\}\{1, 2, 8, 11\}$	$C(B, A_{42})$	$\{A_1, A_3, A_{17}, A_{18}, A_{41}, A_{42}\}$	Plano proyectivo $P_9$
$\{0, 3, 9, 10\}\{4, 7, 13, 14\}$	$C(B, A_{44})$	$\{A_2, A_4, A_{19}, A_{20}, A_{43}, A_{44}\}$	Plano proyectivo $P_9$
$\{0, 3, 12, 15\}\{1, 2, 13, 14\}$	$C(B, A_{46})$	$\{A_1, A_4, A_{21}, A_{22}, A_{45}, A_{46}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\{0, 3, 12, 15\}\{4, 7, 8, 11\}$	$C(B, A_{48})$	$\{A_2, A_3, A_{23}, A_{24}, A_{47}, A_{48}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\{0, 3, 12, 15\}\{1, 2, 13, 14\}$	$C(B, A_{50})$	$\{A_1, A_4, A_{25}, A_{26}, A_{49}, A_{50}\}$	Plano proyectivo $P_{12}$
$\{0, 3, 12, 15\}\{4, 7, 8, 11\}$	$C(B, A_{52})$	$\{A_2, A_3, A_{27}, A_{28}, A_{51}, A_{52}\}$	Plano proyectivo $P_{12}$
$\{0, 3, 5, 6\}\{1, 2, 4, 7\}$	$C(B, A_{53})$	$\{A_2, A_6, A_{10}, A_{29}, A_{33}, A_{53}\}$	Cubo $C_1$

Circuitos fundamentales de tamaño 6			
Submatriz	Circuito	Intercalaciones	El circuito es:
$\{0, 3, 5, 6\}\{1, 2, 4, 7\}$	$C(B, A_{54})$	$\{A_2, A_5, A_9, A_{29}, A_{33}, A_{54}\}$	Plano proyectivo $P_2$
$\{0, 3, 5, 6\}\{8, 11, 13, 14\}$	$C(B, A_{55})$	$\{A_4, A_8, A_{12}, A_{31}, A_{35}, A_{55}\}$	Cubo $C_8$
$\{0, 3, 5, 6\}\{8, 11, 13, 14\}$	$C(B, A_{56})$	$\{A_4, A_7, A_{11}, A_{31}, A_{35}, A_{56}\}$	Plano proyectivo $P_{11}$
$\{0, 5, 9, 12\}\{1, 4, 8, 13\}$	$C(B, A_{59})$	$\{A_5, A_7, A_{13}, A_{15}, A_{57}, A_{59}\}$	Plano proyectivo $P_{12}$
$\{0, 5, 10, 15\}\{1, 4, 11, 14\}$	$C(B, A_{63})$	$\{A_5, A_8, A_{17}, A_{19}, A_{61}, A_{63}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\{0, 5, 9, 12\}\{1, 4, 8, 13\}$	$C(B, A_{67})$	$\{A_5, A_7, A_{21}, A_{23}, A_{65}, A_{67}\}$	Plano proyectivo $P_9$
$\{0, 5, 10, 15\}\{1, 4, 11, 14\}$	$C(B, A_{71})$	$\{A_5, A_8, A_{25}, A_{27}, A_{69}, A_{71}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\{0, 6, 9, 15\}\{1, 7, 8, 14\}$	$C(B, A_{76})$	$\{A_9, A_{11}, A_{13}, A_{16}, A_{73}, A_{76}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\{0, 3, 9, 10\}\{1, 2, 8, 11\}$	$C(B, A_{89})$	$\{A_3, A_{14}, A_{18}, A_{37}, A_{41}, A_{89}\}$	Cubo $C_1$
$\{0, 3, 9, 10\}\{4, 7, 13, 14\}$	$C(B, A_{90})$	$\{A_4, A_{16}, A_{20}, A_{39}, A_{43}, A_{90}\}$	Cubo $C_4$
$\{0, 3, 9, 10\}\{1, 2, 8, 11\}$	$C(B, A_{91})$	$\{A_3, A_{13}, A_{17}, A_{37}, A_{41}, A_{91}\}$	Plano proyectivo $P_2$
$\{0, 3, 9, 10\}\{4, 7, 13, 14\}$	$C(B, A_{92})$	$\{A_4, A_{15}, A_{19}, A_{39}, A_{43}, A_{92}\}$	Plano proyectivo $P_7$
$\{0, 5, 9, 12\}\{1, 4, 8, 13\}$	$C(B, A_{93})$	$\{A_7, A_{15}, A_{23}, A_{57}, A_{65}, A_{93}\}$	Cubo $C_1$
$\{0, 5, 9, 12\}\{1, 4, 8, 13\}$	$C(B, A_{95})$	$\{A_7, A_{13}, A_{21}, A_{57}, A_{65}, A_{95}\}$	Plano proyectivo $P_4$
$\{3, 5, 10, 12\}\{1, 7, 8, 14\}$	$C(B, A_{103})$	$\{A_{31}, A_{41}, A_{45}, A_{61}, A_{65}, A_{103}\}$	Plano proyectivo $P_7$
$\{0, 5, 10, 15\}\{1, 4, 11, 14\}$	$C(B, A_{105})$	$\{A_8, A_{19}, A_{27}, A_{61}, A_{69}, A_{105}\}$	Cubo $C_1$
$\{0, 5, 10, 15\}\{1, 4, 11, 14\}$	$C(B, A_{108})$	$\{A_8, A_{17}, A_{25}, A_{61}, A_{69}, A_{108}\}$	Plano proyectivo $P_4$
$\{0, 3, 12, 15\}\{1, 2, 13, 14\}$	$C(B, A_{109})$	$\{A_4, A_{22}, A_{26}, A_{45}, A_{49}, A_{109}\}$	Cubo $C_1$
$\{0, 3, 12, 15\}\{4, 7, 8, 11\}$	$C(B, A_{110})$	$\{A_3, A_{24}, A_{28}, A_{47}, A_{51}, A_{110}\}$	Cubo $C_4$
$\{0, 3, 12, 15\}\{4, 7, 8, 11\}$	$C(B, A_{111})$	$\{A_3, A_{23}, A_{27}, A_{47}, A_{51}, A_{111}\}$	Plano proyectivo $P_7$
$\{0, 3, 12, 15\}\{1, 2, 13, 14\}$	$C(B, A_{112})$	$\{A_4, A_{21}, A_{25}, A_{45}, A_{49}, A_{112}\}$	Plano proyectivo $P_2$

Los circuitos de cardinalidad mayor a seis pueden o no ser superficiales. Para cada uno de los circuitos fundamentales es fácil identificar si el circuito es realizable como una superficie; consideramos las intercalaciones que conforman el circuito, si alguna de las entradas de la matriz  $D_3$  que pertenece al circuito aparece en más de dos intercalaciones el circuito no es realizable como una superficie. Así por ejemplo en el circuito fundamental  $C(B, A_{81})$  el cual está formado por el conjunto de intercalaciones  $\{A_3, A_4, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{23}, A_{35}, A_{39}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{81}\}$ , no es realizable como una superficie debido a que las intercalaciones  $A_3, A_7, A_{11}$  y  $A_{23}$  se intersectan en la

entrada con generador renglón 0 y generador columna 8 de la misma manera  $A_4, A_7, A_{12}$  y  $A_{15}$  se intersectan en la entrada con generador renglón 0 y generador columna 13. De esta forma podemos saber que de los 67 circuitos fundamentales: 62 son realizables como una superficie mientras que 5 de ellos no lo son. De los cinco circuitos que no son realizables como una superficie, dos son de tamaño 14 y tres son de tamaño 16.

Para el análisis de los circuitos que son realizables como una superficie utilizaremos herramientas de topología de dimensiones bajas; pensando cada una de las intercalaciones que conforman el circuito como un cuadrado (homeomorfo al disco) con cierta orientación en sus aristas. Identificamos las aristas de cada una de las intercalaciones siempre y cuando tengan los mismos vértices terminales y la misma orientación, hacemos esto hasta formar un polígono y por medio de operaciones elementales de pegados e identificaciones lo llevamos a una forma canónica y por el teorema de clasificación de superficies y la característica de Euler, podemos identificar la superficie que forma el circuito.

Hay dos maneras equivalentes de analizar los circuitos de tamaño 10 y 12, recordemos que los circuitos no superficiales aparecen hasta los circuitos fundamentales de tamaño 14. Como en los circuitos fundamentales de tamaños 10 y 12 cada celda aparece en a lo más dos intercalaciones usando la misma definición para las involuciones que hicimos para la matriz  $D_2$  el mapeo de Tutte está bien definido, por lo que podemos crear la gráfica asociada a este mapeo y ver en qué superficie se encaja la gráfica. La otra es por medio de los pegados e identificaciones, en el siguiente ejemplo presentamos las dos maneras, de realizar el análisis para estos circuitos.

**Ejemplo 5.2.** El primer circuito fundamental de tamaño 10 que aparece en la matriz reducida asociada a la matriz de incidencia es el formado por la base canónica y la columna 64 asociada a la intercalación  $A_{64}$ , este circuito está formado por las siguientes intercalaciones:

$$C(B, A_{64}) = \{A_2, A_4, A_{19}, A_{20}, A_{29}, A_{31}, A_{41}, A_{43}, A_{61}, A_{64}\}$$

haciendo el análisis de las órbitas de las cruces obtenemos el número de vértices del mapeo y con el análisis de las órbitas de las cruces del premapeo dual las caras del

premapeo. La gráfica asociada al mapeo aparece en la figura 5.11.

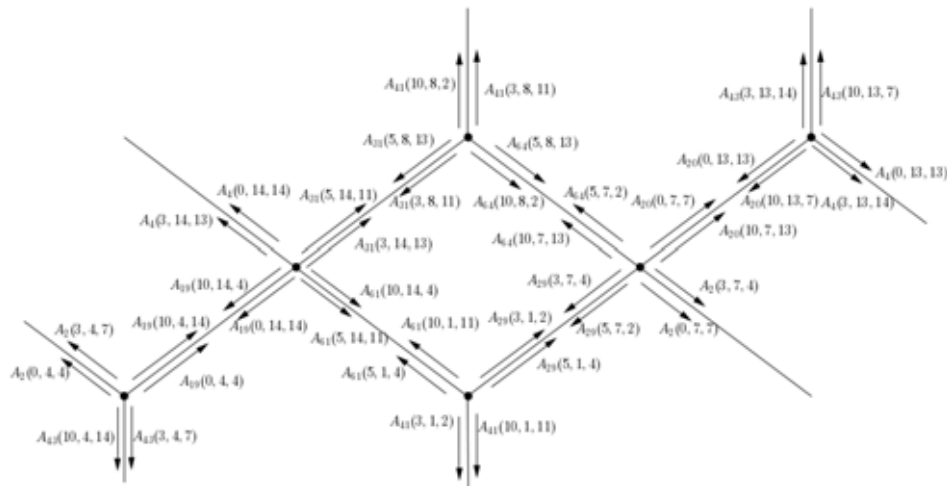


Figura 5.11: Encaje de la gráfica asociada al circuito  $C(B, A_{64})$ .

Como podemos observar, el mapeo cuenta con 6 vértices, 10 aristas y 4 caras distintas, entonces la característica de Euler es  $\chi = 6 - 10 + 4 = 0$ , debido a que la característica de Euler es cero, si la superficie es orientable el encaje es en el toro, mientras que si la superficie es no orientable se trata de un encaje de la gráfica en la botella de Klein, pero si hacemos un corte sobre las aristas de  $A_{41}$  y  $A_{43}$  podemos ver que la superficie contiene a la banda de Möbius, por lo tanto es no orientable, así nuestro mapeo combinatorio se puede interpretar como el encaje de la gráfica en la botella de Klein.

Para el método topológico, consideramos cada una de las intercalaciones que forman el circuito y orientamos las aristas en relación a sus vértices, si la arista tiene puntos terminales  $(a, b)$  y  $a > b$  entonces la arista tendrá la orientación de  $a$  a  $b$ . Dos aristas son consideradas las mismas si tienen los mismos generadores renglón y columna y por consiguiente la misma orientación. En la figura 5.12 podemos observar cada una de las intercalaciones que conforman el circuito ya con las orientaciones marcadas y vistas como cuadriláteros (homeomorfos al disco). Buscamos unir todas las intercalaciones que

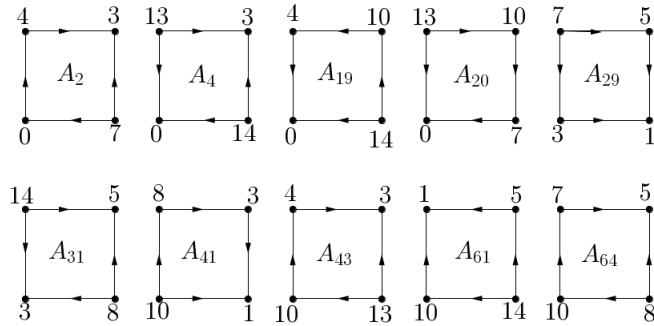


Figura 5.12: Intercalaciones pertenecientes al circuito  $C(B, A_{64})$

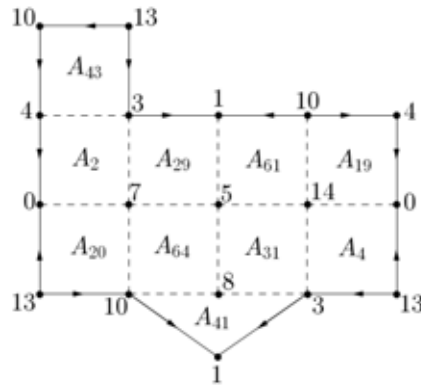


Figura 5.13

conforman el circuito para formar un solo polígono, para a partir de este reducirlo por medio de cortes y pegados a una forma canónica.

Para formar el polígono, comenzamos con alguna de las intercalaciones y la pegamos por alguna de sus aristas con otra intercalación que contenga esta misma arista, continuamos con este procedimiento hasta obtener el polígono que aparece en la figura 5.13. Este polígono tiene seis vértices, siete aristas y una cara, por lo que la característica de Euler para el polígono es cero, lo cual coincide con la característica que obtuvimos con el método de mapeos combinatorios. En la figura 5.14 aparece el mismo polígono que en la figura 5.13 pero visto como polígono regular.

En la figura 5.15 aparecen cada uno de los cortes y pegados que llevan el polígono a su forma canónica, los pasos de los pegados aparecen en la figura de izquierda a derecha.

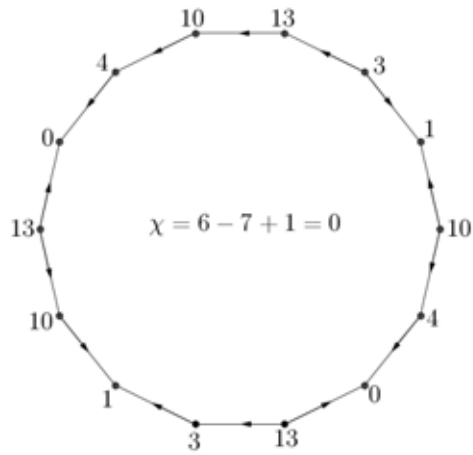


Figura 5.14

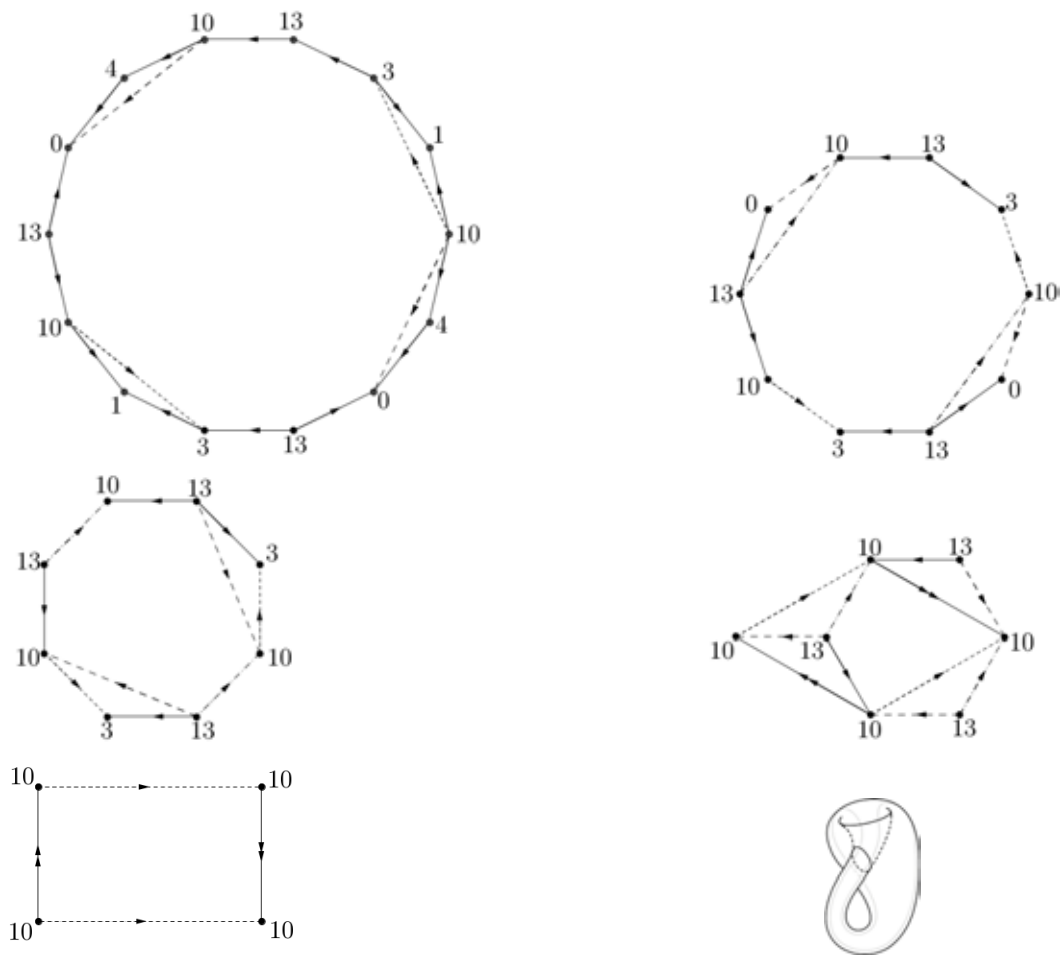


Figura 5.15: Cortes y pegados que llevan el polígono a la botella de Klein

Como podemos observar con ambos métodos podemos identificar la superficie que forma el circuito, con el primer método se identifica la superficie por medio del encaje de la gráfica asociada al mapeo de Tutte, mientras que en el otro método las intercalaciones forman la superficie, en ambos casos la superficie coincide.  $\square$

El análisis para los circuitos de tamaño 10, 12 y los de tamaño 14 que eran superficiales, lo hicimos usando el método topológico. Mediante este proceso analizamos cada uno de los circuitos y con ello pudimos identificar la superficie que formaban. En las tablas que aparecen enseguida aparecen los circuitos fundamentales, las intercalaciones que los conforman y la superficie que forman. Cada una de las tablas está separada en bloques que dependen del tamaño del circuito.

Circuitos fundamentales de tamaño 10		
Circuito	Intercalaciones	El circuito es:
$C(B, A_{64})$	$\{A_2, A_4, A_{19}, A_{20}, A_{29}, A_{31}, A_{41}, A_{43}, A_{61}, A_{64}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{68})$	$\{A_2, A_3, A_{23}, A_{24}, A_{29}, A_{31}, A_{45}, A_{47}, A_{65}, A_{68}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{75})$	$\{A_3, A_4, A_{11}, A_{12}, A_{33}, A_{35}, A_{37}, A_{39}, A_{73}, A_{75}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{83})$	$\{A_7, A_{15}, A_{23}, A_{33}, A_{39}, A_{45}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{83}\}$	Plano proyectivo
$C(B, A_{96})$	$\{A_7, A_{15}, A_{23}, A_{27}, A_{39}, A_{47}, A_{45}, A_{57}, A_{65}, A_{96}\}$	Plano proyectivo
$C(B, A_{100})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_8, A_{31}, A_{37}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{100}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{102})$	$\{A_{18}, A_{19}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{41}, A_{45}, A_{61}, A_{65}, A_{102}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{107})$	$\{A_8, A_{19}, A_{27}, A_{41}, A_{43}, A_{49}, A_{51}, A_{61}, A_{73}, A_{107}\}$	Plano proyectivo

Como podemos ver de la tabla, para los circuitos de tamaño 10 todas las superficies que obtenemos son no orientables, para estos circuitos fue fácil verlos como diferencia simétrica de circuitos de tamaño seis, debido a que en todos los casos coincide con la suma conexa de superficies. Recordemos que la suma conexa se hace mediante la unión de las superficies por medio de discos. Las botellas de Klein de tamaño 10 están formadas por la diferencia simétrica de planos proyectivos de tamaño seis, los cuales coinciden en solo una intercalación, esto es, topológicamente los dos planos proyectivos están pegados por un disco, por lo que podemos hacer la suma conexa de los planos proyectivos para formar la botella de Klein. En el caso de los planos proyectivos son diferencia simétrica de un plano proyectivo de tamaño seis y de un cubo de tamaño 6, topológicamente estamos haciendo suma conexa de un plano proyectivo y una esfera, la cual no afecta la característica de Euler, por lo que la diferencia simétrica nos vuelve a dar un plano proyectivo.

Circuitos fundamentales de tamaño 12		
Circuito	Intercalaciones	El circuito es:
$C(B, A_{58})$	$\{A_2, A_3, A_6, A_7, A_{14}, A_{15}, A_{29}, A_{31}, A_{37}, A_{39}, A_{57}, A_{58}\}$	Toro
$C(B, A_{60})$	$\{A_2, A_3, A_7, A_8, A_{15}, A_{16}, A_{29}, A_{31}, A_{37}, A_{39}, A_{57}, A_{60}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{62})$	$\{A_2, A_4, A_6, A_7, A_{18}, A_{19}, A_{29}, A_{31}, A_{41}, A_{43}, A_{61}, A_{62}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{66})$	$\{A_2, A_3, A_6, A_8, A_{22}, A_{23}, A_{29}, A_{31}, A_{45}, A_{47}, A_{65}, A_{66}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{70})$	$\{A_2, A_4, A_6, A_8, A_{26}, A_{27}, A_{29}, A_{31}, A_{49}, A_{51}, A_{69}, A_{70}\}$	Toro
$C(B, A_{72})$	$\{A_2, A_4, A_7, A_8, A_{27}, A_{28}, A_{29}, A_{31}, A_{49}, A_{51}, A_{69}, A_{72}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{74})$	$\{A_3, A_4, A_{10}, A_{11}, A_{14}, A_{15}, A_{33}, A_{35}, A_{37}, A_{39}, A_{73}, A_{74}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{77})$	$\{A_7, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_{31}, A_{35}, A_{39}, A_{43}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{77}\}$	Toro
$C(B, A_{78})$	$\{A_7, A_{10}, A_{15}, A_{18}, A_{31}, A_{33}, A_{39}, A_{41}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{78}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{79})$	$\{A_7, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_{31}, A_{33}, A_{39}, A_{41}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{79}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{82})$	$\{A_7, A_{10}, A_{11}, A_{15}, A_{22}, A_{33}, A_{39}, A_{45}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{82}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{85})$	$\{A_7, A_8, A_{11}, A_{15}, A_{27}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{85}\}$	Toro
$C(B, A_{97})$	$\{A_7, A_8, A_{15}, A_{16}, A_{27}, A_{28}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{97}\}$	Toro
$C(B, A_{99})$	$\{A_7, A_8, A_{13}, A_{15}, A_{25}, A_{27}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{99}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{101})$	$\{A_3, A_4, A_{19}, A_{20}, A_{23}, A_{24}, A_{31}, A_{43}, A_{47}, A_{61}, A_{65}, A_{101}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{104})$	$\{A_3, A_4, A_{17}, A_{19}, A_{21}, A_{23}, A_{31}, A_{43}, A_{47}, A_{61}, A_{65}, A_{104}\}$	Toro con cross cap

En los circuitos de tamaño 12 comienzan a aparecer toros de tamaño 12 y toros con cross caps, los cuales son topológicamente suma conexa de tres planos proyectivos.

Circuitos fundamentales de tamaño 14		
Circuito	Intercalaciones	El circuito es:
$C(B, A_{81})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{23}, A_{35}, A_{39}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{81}\}$	No superficiable
$C(B, A_{87})$	$\{A_7, A_8, A_{11}, A_{15}, A_{27}, A_{31}, A_{33}, A_{35}, A_{39}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{87}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{88})$	$\{A_7, A_8, A_9, A_{15}, A_{25}, A_{27}, A_{28}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{83}\}$	Toro con cross cap
$C(B, A_{94})$	$\{A_7, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{37}, A_{39}, A_{45}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{94}\}$	Botella de Klein
$C(B, A_{98})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_8, A_{14}, A_{15}, A_{26}, A_{27}, A_{31}, A_{37}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{98}\}$	No superficiable
$C(B, A_{106})$	$\{A_8, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{26}, A_{27}, A_{28}, A_{41}, A_{43}, A_{49}, A_{51}, A_{61}, A_{69}, A_{106}\}$	Botella de Klein

En los circuitos de tamaño 14 aparecen los primeros circuitos que no son realizables como una superficie, de los seis circuitos fundamentales dos de ellos no lo son. Seguimos teniendo toros y toros con cross cap, pero de cardinalidad mayor.

Circuitos fundamentales de tamaño 16		
Circuito	Intercalaciones	El circuito es:
$C(B, A_{80})$	$\{A_7, A_9, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{17}, A_{19}, A_{20}, A_{31}, A_{35}, A_{39}, A_{43}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{80}\}$	No superficiable
$C(B, A_{84})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_9, A_{11}, A_{15}, A_{21}, A_{23}, A_{24}, A_{35}, A_{39}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{84}\}$	No superficiable
$C(B, A_{86})$	$\{A_7, A_8, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{26}, A_{31}, A_{33}, A_{35}, A_{39}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{86}\}$	No superficiable

Como podemos apreciar de la tabla ninguno de los circuitos de tamaño seis es realizable como una superficie.

La diferencia simétrica de dos circuitos de nuestro matroide, como se demostró en el capítulo 1 sección 1.2, es la unión disjunta de circuitos (los matroides diádicos son matroides binarios), más aún, dada la base del matroide binario, cualquier circuito del matroide es diferencia simétrica de circuitos fundamentales. En la sección 5.1 vimos que para el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  todo circuito es diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis, es decir, a partir de los circuitos de tamaño seis es posible encontrar todos los circuitos del matroide mediante la diferencia simétrica. Nuestra conjetura era que para el matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  cualquier circuito era también diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis. Mediante el análisis de los circuitos fundamentales se logró confirmar la conjetura por lo cual podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.1.** *Todo circuito del matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  es diferencia simétrica de circuitos de tamaño seis.*

**Demostración:** Sabemos que el matroide tiene treinta y cuatro circuitos fundamentales de tamaño seis, además por lo que vimos en la sección 5.1 tenemos completamente caracterizadas las submatrices de  $4 \times 4$  isotópicas a  $D_2$ , sabemos que cada vez que quitamos un color y tomamos las intercalaciones que quedan después del borrado obtenemos un cubo; cada vez que quitamos un generador renglón o columna y consideramos las intercalaciones que no ocupan ese generador lo que obtenemos es un plano proyectivo. Usando esto, consideramos cada uno de los circuitos fundamentales de tamaño mayor a seis, todos los elementos que aparecen en cada uno de los circuitos fundamentales pertenecen a la base canónica, salvo el elemento con el cual al unirlo a la base canónica forma el circuito. Así que a partir de este elemento que no pertenece a la base canónica y por lo tanto a ninguno de los circuitos fundamentales de tamaño seis, vimos en qué submatriz isotópica a  $D_2$  podíamos considerarlo de tal manera que ocupara otros de los elementos de la base canónica o algunos de los elementos pertenecientes a los circuitos fundamentales de tamaño seis y que junto con estos elementos tuviese la estructura de los circuitos de tamaño seis. Una vez que encontramos un circuito de tamaño seis que contuviese a ese elemento, buscamos circuitos de tamaño seis canónicos o de los que fuimos creando, para que formara por medio de la diferencia simétrica al circuito

fundamental al cual estamos analizando, por medio de esto obtuvimos los siguientes circuitos de tamaño seis pertenecientes al matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  :

Notación	Submatriz	Intercalaciones	El circuito es:
$\gamma_1$	$\{3, 5, 10, 12\}\{1, 7, 8, 14\}$	$\{A_{29}, A_{31}, A_{41}, A_{44}, A_{61}, A_{64}\}$	Plano proyectivo $P_{12}$
$\gamma_2$	$\{3, 5, 10, 12\}\{1, 7, 8, 14\}$	$\{A_{29}, A_{31}, A_{45}, A_{48}, A_{65}, A_{68}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\gamma_3$	$\{3, 6, 9, 12\}\{1, 4, 11, 14\}$	$\{A_{33}, A_{36}, A_{37}, A_{39}, A_{73}, A_{75}\}$	Plano proyectivo $P_{12}$
$\gamma_4$	$\{3, 6, 9, 12\}\{1, 4, 11, 14\}$	$\{A_{33}, A_{39}, A_{45}, A_{73}, A_{83}, A_{93}\}$	Plano proyectivo $P_{11}$
$\gamma_5$	$\{3, 6, 9, 12\}\{1, 4, 11, 14\}$	$\{A_{37}, A_{39}, A_{45}, A_{47}, A_{93}, A_{96}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\gamma_6$	$\{3, 5, 9, 15\}\{1, 7, 11, 13\}$	$\{A_{32}, A_{37}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{100}\}$	Plano proyectivo $P_7$
$\gamma_7$	$\{0, 6, 10, 12\}\{2, 4, 8, 14\}$	$\{A_{18}, A_{19}, A_{22}, A_{23}, A_{102}, A_{103}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\gamma_8$	$\{3, 6, 10, 15\}\{1, 4, 8, 13\}$	$\{A_{41}, A_{43}, A_{49}, A_{51}, A_{105}, A_{107}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\gamma_9$	$\{3, 5, 9, 15\}\{2, 4, 8, 14\}$	$\{A_{30}, A_{31}, A_{38}, A_{39}, A_{58}, A_{59}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\gamma_{10}$	$\{3, 5, 9, 15\}\{1, 7, 11, 13\}$	$\{A_{29}, A_{32}, A_{37}, A_{40}, A_{57}, A_{60}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\gamma_{11}$	$\{0, 5, 10, 15\}\{2, 7, 8, 13\}$	$\{A_6, A_7, A_{18}, A_{20}, A_{62}, A_{64}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\gamma_{12}$	$\{0, 5, 9, 12\}\{2, 7, 11, 14\}$	$\{A_6, A_8, A_{22}, A_{24}, A_{66}, A_{68}\}$	Plano proyectivo $P_9$
$\gamma_{13}$	$\{0, 5, 10, 15\}\{2, 7, 8, 13\}$	$\{A_6, A_{20}, A_{26}, A_{64}, A_{70}, A_{107}\}$	Cubo $C_8$
$\gamma_{14}$	$\{3, 5, 9, 15\}\{1, 7, 11, 13\}$	$\{A_{29}, A_{32}, A_{49}, A_{52}, A_{69}, A_{72}\}$	Plano proyectivo $P_9$
$\gamma_{15}$	$\{0, 6, 9, 15\}\{2, 4, 11, 13\}$	$\{A_{10}, A_{12}, A_{14}, A_{15}, A_{74}, A_{75}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\gamma_{16}$	$\{5, 6, 9, 10\}\{1, 2, 13, 14\}$	$\{A_{56}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{77}, A_{92}\}$	Plano proyectivo $P_2$
$\gamma_{17}$	$\{5, 6, 9, 10\}\{1, 2, 13, 14\}$	$\{A_{53}, A_{58}, A_{61}, A_{73}, A_{78}, A_{89}\}$	Plano proyectivo $P_{13}$
$\gamma_{18}$	$\{3, 6, 10, 15\}\{1, 4, 8, 13\}$	$\{A_{33}, A_{35}, A_{41}, A_{43}, A_{77}, A_{79}\}$	Plano proyectivo $P_{15}$
$\gamma_{19}$	$\{0, 6, 10, 12\}\{2, 4, 8, 14\}$	$\{A_{10}, A_{11}, A_{22}, A_{23}, A_{82}, A_{83}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\gamma_{20}$	$\{3, 6, 10, 15\}\{1, 4, 8, 13\}$	$\{A_{33}, A_{41}, A_{51}, A_{79}, A_{85}, A_{105}\}$	Plano proyectivo $P_{13}$
$\gamma_{21}$	$\{0, 6, 9, 15\}\{1, 7, 8, 14\}$	$\{A_{11}, A_{16}, A_{28}, A_{73}, A_{85}, A_{97}\}$	Cubo $C_1$
$\gamma_{22}$	$\{3, 5, 9, 15\}\{2, 4, 8, 14\}$	$\{A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{59}, A_{71}, A_{99}\}$	Plano proyectivo $P_2$
$\gamma_{23}$	$\{3, 5, 10, 12\}\{1, 7, 8, 14\}$	$\{A_{31}, A_{44}, A_{48}, A_{61}, A_{65}, A_{101}\}$	Cubo $C_2$
$\gamma_{24}$	$\{0, 6, 10, 12\}\{1, 7, 11, 13\}$	$\{A_{17}, A_{20}, A_{21}, A_{24}, A_{101}, A_{104}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\gamma_{25}$	$\{3, 6, 9, 12\}\{1, 4, 11, 14\}$	$\{A_{36}, A_{39}, A_{47}, A_{73}, A_{81}, A_{93}\}$	Cubo $C_2$
$\gamma_{26}$	$\{0, 6, 9, 15\}\{2, 4, 11, 13\}$	$\{A_{12}, A_{15}, A_{27}, A_{75}, A_{87}, A_{100}\}$	Plano proyectivo $P_2$
$\gamma_{27}$	$\{0, 6, 9, 15\}\{1, 7, 8, 14\}$	$\{A_9, A_{13}, A_{28}, A_{73}, A_{88}, A_{99}\}$	Cubo $C_{14}$

Notación	Submatriz	Intercalaciones	El circuito es:
$\gamma_{28}$	$\{0, 5, 9, 12\}\{2, 7, 11, 14\}$	$\{A_{14}, A_{16}, A_{22}, A_{24}, A_{94}, A_{96}\}$	Plano proyectivo $P_5$
$\gamma_{29}$	$\{0, 6, 9, 15\}\{2, 4, 11, 13\}$	$\{A_{14}, A_{15}, A_{26}, A_{27}, A_{98}, A_{100}\}$	Plano proyectivo $P_6$
$\gamma_{30}$	$\{0, 5, 10, 15\}\{2, 7, 8, 13\}$	$\{A_{18}, A_{20}, A_{26}, A_{28}, A_{106}, A_{107}\}$	Plano proyectivo $P_5$
$\gamma_{31}$	$\{0, 6, 10, 12\}\{1, 7, 11, 13\}$	$\{A_9, A_{12}, A_{17}, A_{20}, A_{77}, A_{80}\}$	Plano proyectivo $P_{12}$
$\gamma_{32}$	$\{0, 6, 10, 12\}\{1, 7, 11, 13\}$	$\{A_9, A_{12}, A_{21}, A_{24}, A_{84}, A_{81}\}$	Plano proyectivo $P_{10}$
$\gamma_{33}$	$\{0, 6, 9, 15\}\{2, 4, 11, 13\}$	$\{A_{10}, A_{15}, A_{26}, A_{75}, A_{86}, A_{100}\}$	Cubo $C_{11}$

Considerando estos circuitos y los circuitos fundamentales de tamaño seis logramos ver a cada uno de los circuitos fundamentales de tamaño 10, 12 y 14 como diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis, cada uno de los circuitos que aparecen en la columna de diferencia simétrica son circuitos fundamentales de tamaño seis o circuitos de tamaño seis los cuales aparecen en la tabla anterior.

Circuitos fundamentales de tamaño 10		
Circuito	Intercalaciones	Diferencia simétrica
$C(B, A_{64})$	$\{A_2, A_4, A_{19}, A_{20}, A_{29}, A_{31}, A_{41}, A_{43}, A_{61}, A_{64}\}$	$C(B, A_{44})\Delta\gamma_1$
$C(B, A_{68})$	$\{A_2, A_3, A_{23}, A_{24}, A_{29}, A_{31}, A_{45}, A_{47}, A_{65}, A_{68}\}$	$C(B, A_{48})\Delta\gamma_2$
$C(B, A_{75})$	$\{A_3, A_4, A_{11}, A_{12}, A_{33}, A_{35}, A_{37}, A_{39}, A_{73}, A_{75}\}$	$C(B, A_{36})\Delta\gamma_3$
$C(B, A_{83})$	$\{A_7, A_{15}, A_{23}, A_{33}, A_{39}, A_{45}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{83}\}$	$C(B, A_{93})\Delta\gamma_4$
$C(B, A_{96})$	$\{A_7, A_{15}, A_{23}, A_{27}, A_{39}, A_{47}, A_{45}, A_{57}, A_{65}, A_{96}\}$	$C(B, A_{93})\Delta\gamma_5$
$C(B, A_{100})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_8, A_{31}, A_{37}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{100}\}$	$C(B, A_{32})\Delta\gamma_6$
$C(B, A_{102})$	$\{A_{18}, A_{19}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{41}, A_{45}, A_{61}, A_{65}, A_{102}\}$	$C(B, A_{103})\Delta\gamma_7$
$C(B, A_{107})$	$\{A_8, A_{19}, A_{27}, A_{41}, A_{43}, A_{49}, A_{51}, A_{61}, A_{73}, A_{107}\}$	$C(B, A_{105})\Delta\gamma_8$

Como podemos observar los circuitos de tamaño 10 son diferencia simétrica de dos circuitos fundamentales de tamaño seis, es decir, los dos circuitos de tamaño seis sólo tienen una intercalación en común, por lo que para estos circuitos, no sólo son diferencia simétrica de circuitos de tamaño seis, sino que también topológicamente coincide con la suma conexas de las dos superficies que conforman el circuito.

Circuitos fundamentales de tamaño 12		
Circuito	Intercalaciones	Diferencia simétrica
$C(B, A_{58})$	$\{A_2, A_3, A_6, A_7, A_{14}, A_{15}, A_{29}, A_{31}, A_{37}, A_{39}, A_{57}, A_{58}\}$	$C(B, A_{30})\Delta C(B, A_{38})\Delta C(A_{59})\Delta\gamma_9$
$C(B, A_{60})$	$\{A_2, A_3, A_7, A_8, A_{15}, A_{16}, A_{29}, A_{31}, A_{37}, A_{39}, A_{57}, A_{60}\}$	$C(B, A_{32})\Delta C(B, A_{40})\Delta\gamma_{10}$
$C(B, A_{62})$	$\{A_2, A_4, A_6, A_7, A_{18}, A_{19}, A_{29}, A_{31}, A_{41}, A_{43}, A_{61}, A_{62}\}$	$C(B, A_{44})\Delta\gamma_1\Delta\gamma_{11}$
$C(B, A_{66})$	$\{A_2, A_3, A_6, A_8, A_{22}, A_{23}, A_{29}, A_{31}, A_{45}, A_{47}, A_{65}, A_{66}\}$	$C(B, A_{48})\gamma_2\Delta\gamma_{12}$
$C(B, A_{70})$	$\{A_2, A_4, A_6, A_8, A_{26}, A_{27}, A_{29}, A_{31}, A_{49}, A_{51}, A_{69}, A_{70}\}$	$C(B, A_{105})\Delta C(B, A_{44})\Delta\gamma_1\Delta\gamma_8\Delta\gamma_{13}$
$C(B, A_{72})$	$\{A_2, A_4, A_7, A_8, A_{27}, A_{28}, A_{29}, A_{31}, A_{49}, A_{51}, A_{69}, A_{72}\}$	$C(B, A_{32})\Delta C(B, A_{52})\Delta\gamma_{14}$
$C(B, A_{74})$	$\{A_3, A_4, A_{10}, A_{11}, A_{14}, A_{15}, A_{33}, A_{35}, A_{37}, A_{39}, A_{73}, A_{74}\}$	$C(B, A_{36})\Delta\gamma_3\Delta\gamma_{15}$
$C(B, A_{77})$	$\{A_7, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_{31}, A_{35}, A_{39}, A_{43}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{77}\}$	$C(B, A_{56})\Delta C(B, A_{92})\Delta\gamma_{16}$
$C(B, A_{78})$	$\{A_7, A_{10}, A_{15}, A_{18}, A_{31}, A_{33}, A_{39}, A_{41}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{78}\}$	$C(B, A_{30})\Delta C(B, A_{38})\Delta C(B, A_{53})\Delta C(B, A_{59})\Delta C(B, A_{89})\gamma_9\Delta\gamma_{17}$
$C(B, A_{79})$	$\{A_7, A_{11}, A_{15}, A_{19}, A_{31}, A_{33}, A_{39}, A_{41}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{79}\}$	$C(B, A_{56})\Delta C(B, A_{92})\Delta\gamma_{16}\Delta\gamma_{18}$
$C(B, A_{82})$	$\{A_7, A_{10}, A_{11}, A_{15}, A_{22}, A_{33}, A_{39}, A_{45}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{82}\}$	$C(B, A_{93})\Delta\gamma_4\Delta\gamma_{19}$
$C(B, A_{85})$	$\{A_7, A_8, A_{11}, A_{15}, A_{27}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{85}\}$	$C(B, A_{56})\Delta C(B, A_{77})\Delta C(B, A_{92})\Delta C(B, A_{105})\Delta\gamma_{18}\Delta\gamma_{20}$
$C(B, A_{97})$	$\{A_7, A_8, A_{15}, A_{16}, A_{27}, A_{28}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{97}\}$	$C(B, A_{56})\Delta C(B, A_{92})\Delta C(B, A_{105})\Delta\gamma_{16}\Delta\gamma_{18}\Delta\gamma_{20}\Delta\gamma_{21}$
$C(B, A_{99})$	$\{A_7, A_8, A_{13}, A_{15}, A_{25}, A_{27}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{99}\}$	$C(B, A_{59})\Delta C(B, A_{71})\Delta\gamma_{22}$
$C(B, A_{101})$	$\{A_3, A_4, A_{19}, A_{20}, A_{23}, A_{24}, A_{31}, A_{43}, A_{47}, A_{61}, A_{65}, A_{101}\}$	$C(B, A_{44})\Delta C(B, A_{48})\Delta\gamma_{23}$
$C(B, A_{104})$	$\{A_3, A_4, A_{17}, A_{19}, A_{21}, A_{23}, A_{31}, A_{43}, A_{47}, A_{61}, A_{65}, A_{104}\}$	$C(B, A_{44})\Delta C(B, A_{48})\Delta\gamma_{23}\Delta\gamma_{24}$

Circuitos fundamentales de tamaño 12		
Circuito	Intercalaciones	Diferencia simétrica
$C(B, A_{81})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{23}, A_{35}, A_{39}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{81}\}$	$C(B, A_{93})\Delta C(B, A_{36})\Delta\gamma_{25}$
$C(B, A_{87})$	$\{A_7, A_8, A_{11}, A_{15}, A_{27}, A_{31}, A_{33}, A_{35}, A_{39}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{87}\}$	$C(B, A_{32})\Delta C(B, A_{36})\Delta\gamma_3\Delta\gamma_6\Delta\gamma_{26}$
$C(B, A_{88})$	$\{A_7, A_8, A_9, A_{15}, A_{25}, A_{27}, A_{28}, A_{31}, A_{39}, A_{51}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{83}\}$	$C(B, A_{59})\Delta C(B, A_{71})\Delta\gamma_{22}\Delta\gamma_{27}$
$C(B, A_{94})$	$\{A_7, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{37}, A_{39}, A_{45}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{94}\}$	$C(B, A_{93})\Delta\gamma_5\Delta\gamma_{28}$
$C(B, A_{98})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_8, A_{14}, A_{15}, A_{26}, A_{27}, A_{31}, A_{37}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{98}\}$	$C(B, A_{32})\Delta\gamma_6\Delta\gamma_{29}$
$C(B, A_{106})$	$\{A_8, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{26}, A_{27}, A_{28}, A_{41}, A_{43}, A_{49}, A_{51}, A_{61}, A_{69}, A_{106}\}$	$C(B, A_{105})\Delta\gamma_{18}\Delta\gamma_{30}$

Circuitos fundamentales de tamaño 12		
Circuito	Intercalaciones	Diferencia simétrica
$C(B, A_{80})$	$\{A_7, A_9, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{17}, A_{19}, A_{20}, A_{31}, A_{35}, A_{39}, A_{43}, A_{57}, A_{61}, A_{73}, A_{80}\}$	$C(B, A_{56})\Delta C(B, A_{92})\Delta \gamma_{16}\Delta \gamma_{31}$
$C(B, A_{84})$	$\{A_3, A_4, A_7, A_9, A_{11}, A_{15}, A_{21}, A_{23}, A_{24}, A_{35}, A_{39}, A_{47}, A_{57}, A_{65}, A_{73}, A_{84}\}$	$C(B, A_{36})\Delta C(B, A_{93})\Delta \gamma_{25}\Delta \gamma_{32}$
$C(B, A_{86})$	$\{A_7, A_8, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{26}, A_{31}, A_{33}, A_{35}, A_{39}, A_{49}, A_{57}, A_{69}, A_{73}, A_{86}\}$	$C(B, A_{32})\Delta C(B, A_{36})\Delta \gamma_3\Delta \gamma_6\Delta \gamma_{33}$

Con lo anterior, hemos mostrado que cada uno de los circuitos fundamentales es diferencia de circuitos de tamaño seis, pero recordemos que en los matroides binarios, todo circuito del matroide es diferencia simétrica de sus circuitos fundamentales, es decir, que como cualquier circuito es generado por los circuitos fundamentales y como estos a su vez son diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis, entonces cualquier circuito del matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  es diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis. ■

Recordemos que los circuitos de un matroide binario generan un espacio vectorial mediante la diferencia simétrica, cuya base son los circuitos fundamentales, para ver cada uno de los circuitos fundamentales como diferencia simétrica de circuitos de tamaño seis, los circuitos de tamaño seis que utilizamos son 67 es decir la misma cardinalidad que la base del espacio de circuitos, por lo tanto los circuitos de tamaño seis que utilizamos para ver a cada uno de los circuitos fundamentales como diferencia simétrica no sólo es generador del espacio de circuitos, sino que es un minimal, es decir, es una base para el espacio de circuitos.

En el artículo [Wil93], Marcel Wild mostró que en un matroide binario simple todo circuito es diferencia de sus circuitos cerrados. Lo que hemos probado para los matroides diádicos  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  es más fuerte. Comenzamos con mostrar en el siguiente teorema que los circuitos de tamaño seis son cerrados.

**Teorema 5.3.2.** *Los circuitos de tamaño 6 son cerrados en  $\mathcal{M}(D_i)$ , con  $i \in \{2, 3\}$ .*

**Demostración:** Supongamos que existe un circuito  $C$  no cerrado de cardinalidad seis. Sea  $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ . Dado que  $C$  no es cerrado debe existir un elemento  $e$  en  $E - C$  tal que  $\mathbf{r}(C \cup \{e\}) = \mathbf{r}(C) = 5$ .

Como  $C \cup \{e\}$  es dependiente, existen  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_2$  con  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  no todos cero tales que:

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \alpha_4 c_4 + \alpha_5 c_5 + \alpha_6 c_6 + \alpha_7 e = \vec{0}$$

Si todos los escalares fuesen no cero, esto implicaría que  $e = \vec{0}$ , ya que  $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \alpha_4 c_4 + \alpha_5 c_5 + \alpha_6 c_6 = 0$  con todos los escalares no cero, lo cual no puede ocurrir debido a que nuestro matroide es simple.

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\alpha_1 = 0$  y que los demás escalares son distintos de cero, lo cual nos lleva a que  $e = c_1$ , pero  $e \in E - C$ .

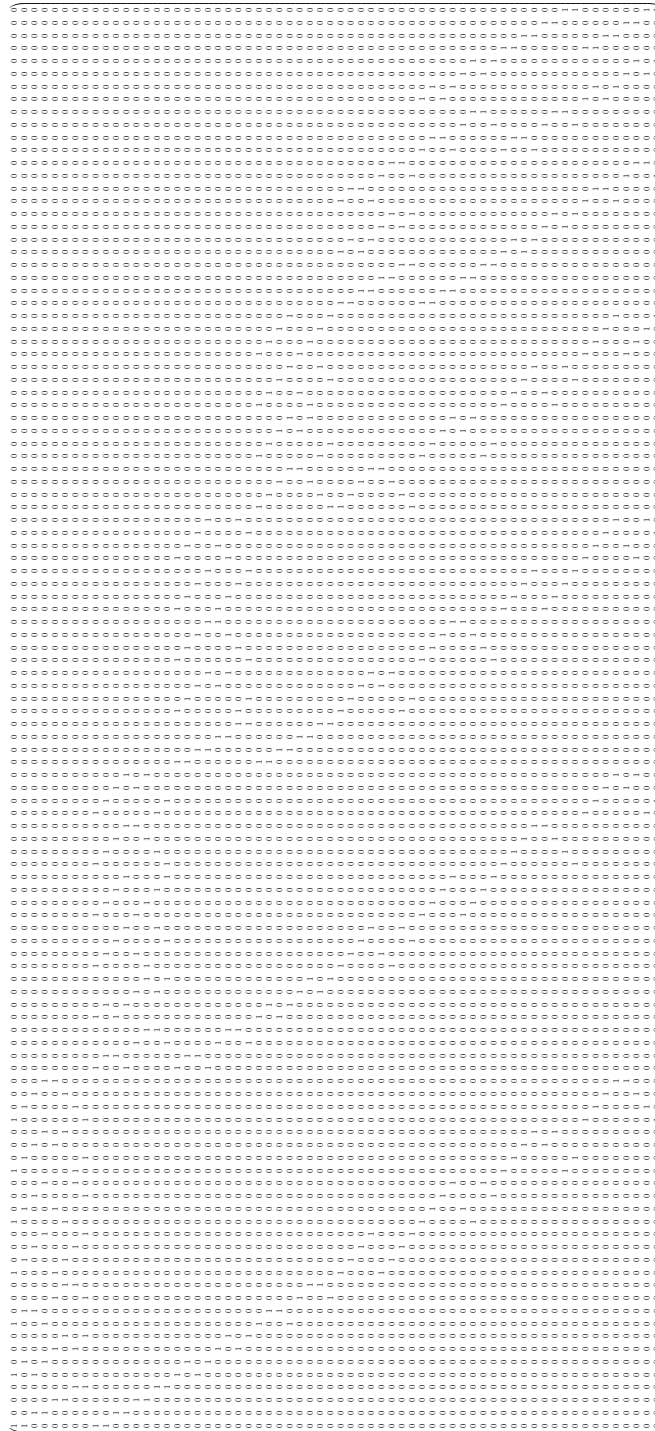
Si hubiesen 2 o mas escalares distintos de cero, tendríamos un conjunto dependiente de tamaño menor a 6, pero nuestros circuitos más pequeños son de tamaño 6. Por lo tanto, los circuitos de tamaño 6 son cerrados. ■

Nuestro resultado para el caso de matroides diádicos es más fuerte, debido a que no solo los circuitos de tamaño seis son cerrados, si no que también forman una base para el espacio de circuitos y dentro del matroide diádico, los circuitos de tamaño seis no son los únicos cerrados.

**Ejemplo 5.3.** Consideremos el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  cuya matriz de incidencia en su forma reducida esta dada por:

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_{10} & A_9 & A_8 & A_{11} & A_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el circuito fundamental  $C(B, A_8)$  es claro que cualquiera de los demás elementos del matroide que no pertenezcan a él que le agreguemos aumentará su rango, por lo tanto, es cerrado y sin embargo, no es de cardinalidad seis.

Figura 5.16: Matriz de Incidencia de  $D_3$

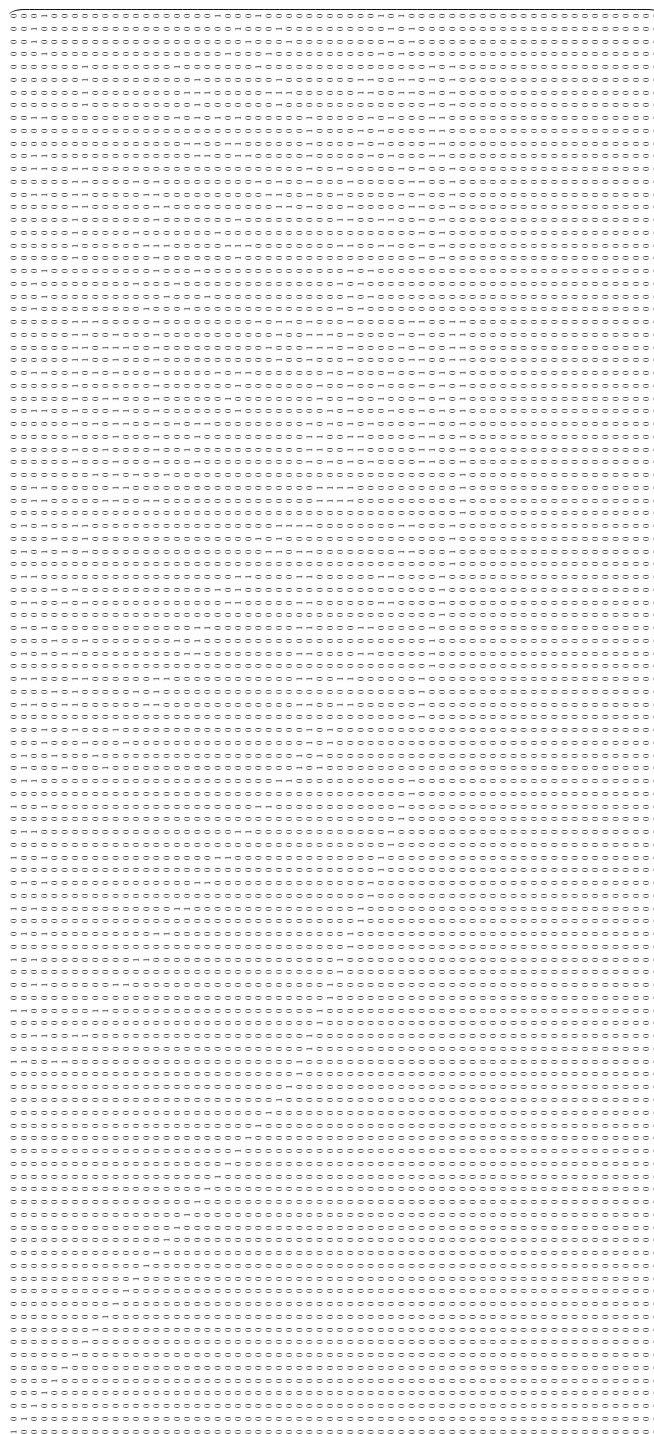


Figura 5.17: Forma reducida de la matriz de incidencia

## 5.4. Caso General

En los matroides  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  todos los circuitos que aparecen son pares, recordemos que en el capítulo 3 vimos que por el **teorema 1,2,4,8** de Hurwitz las hipergráficas asociadas a las matrices  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  son signables, por lo que los matroides correspondientes son bipartitos, es decir, todos sus circuitos son de cardinalidad par. Como consecuencia del teorema de Hurwitz la hipergráfica asociada a la matriz diádica  $D_4$  no es signable (de ser signable tendríamos un álgebra asociativa de tamaño 16) por lo tanto el matroide  $\mathcal{M}(D_4)$  no es bipartito, por lo que contiene circuitos de cardinalidad impar.

Debido a que conforme crecemos el tamaño de la matriz diádica, cada uno de los matroides contiene a los matroides anteriores y por lo tanto a sus circuitos, a partir de  $\mathcal{M}(D_4)$  los matroides poseen circuitos de cardinalidad impar. Con el siguiente ejemplo mostraremos un circuito impar del matroide  $\mathcal{M}(D_4)$ .

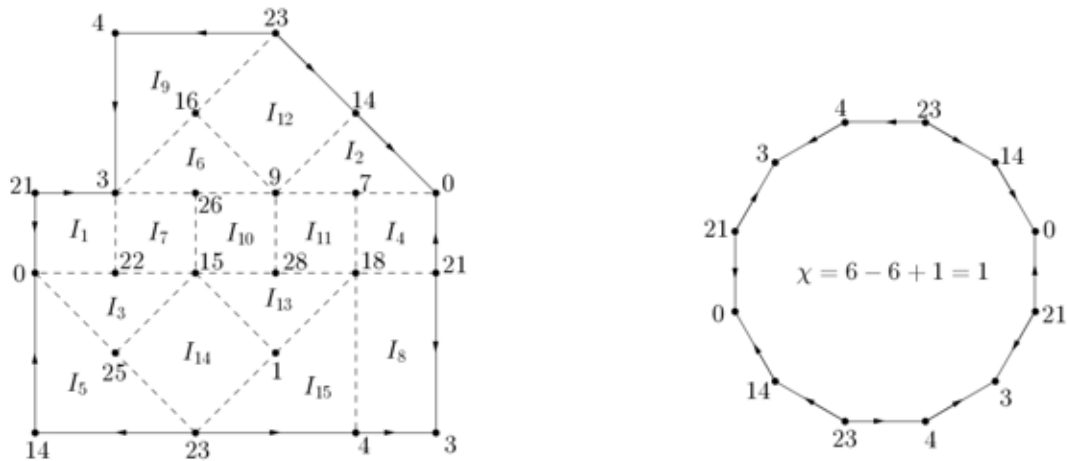
**Ejemplo 5.4.**  $D_4$  es la matriz con generadores renglón  $\{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 23, 24, 27, 29, 30\}$  y generadores columna  $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 31\}$ . Tomemos la submatriz de  $D_4$  de tamaño  $6 \times 10$  cuyos generadores renglón son  $\{0, 3, 9, 15, 18, 23\}$  y columna  $\{1, 4, 7, 14, 16, 21, 22, 25, 26, 28\}$ . Enseguida mostramos la matriz diádica generada de tomar esos generadores renglón y columna.

	1	4	7	14	16	21	22	25	26	28
0	1	4	7	14	16	21	22	25	26	28
3	2	7	4	13	19	22	21	26	25	31
9	8	13	14	7	25	28	31	16	19	21
15	14	11	8	1	31	26	25	22	21	19
18	19	22	21	28	2	7	4	11	8	14
23	22	19	16	25	7	2	1	14	13	11

Dentro de esta submatriz consideremos las siguientes intercalaciones:

Intercalación	Renglones	Columnas	Colores
$I_1$	0, 3	21, 22	21, 22
$I_2$	0, 9	7, 14	7, 14
$I_3$	0, 15	22, 25	22, 25
$I_4$	0, 18	7, 21	7, 21
$I_5$	0, 23	14, 25	14, 25
$I_6$	3, 9	16, 26	19, 25
$I_7$	3, 15	22, 26	21, 25
$I_8$	3, 18	4, 21	7, 22
$I_9$	3, 23	4, 16	7, 19
$I_{10}$	9, 15	26, 28	19, 21
$I_{11}$	9, 18	7, 28	14, 21
$I_{12}$	9, 23	14, 16	7, 25
$I_{13}$	15, 18	1, 28	14, 19
$I_{14}$	15, 23	1, 25	14, 22
$I_{15}$	18, 23	1, 4	19, 22

Estás intercalaciones forman un circuito en  $\mathcal{M}(D_4)$ , ya que cada una de las celdas que utilizan de  $D_4$  pertenece a solo dos intercalaciones y sin importar cual de las intercalaciones borremos, lo que nos queda es un conjunto independiente. Debido a que cada celda aparece en a lo más dos intercalaciones, el circuito es realizable como una superficie. Tomando las intercalaciones e identificando las aristas hasta formar un polígono obtenemos:



La característica de Euler para este circuito es 1, por lo que el circuito es un plano proyectivo.

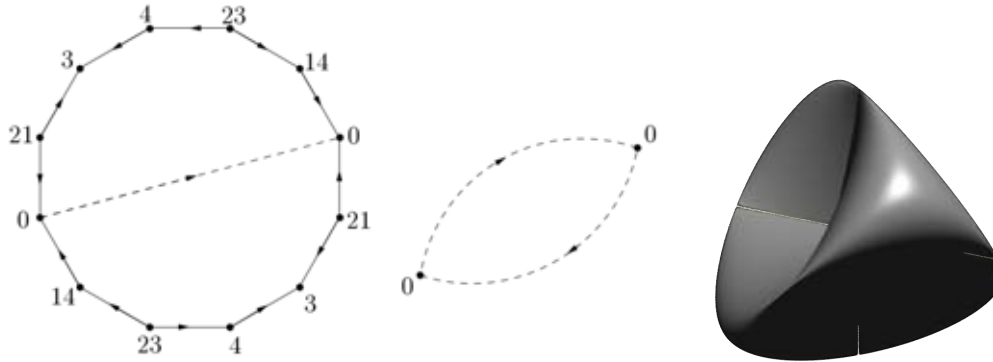


Figura 5.19: Cortes y pegados que llevan el polígono al plano proyectivo

En la compilación [GP00] Isidoro Gitler, muestra mediante la transformación triangulo-estrella, que los circuitos más pequeños de cardinalidad impar que aparecen en los matroides diádicos son precisamente los circuitos de tamaño quince.  $\square$

Relizar el análisis de los circuitos del matroide  $\mathcal{M}(D_4)$  utilizando los mismos métodos que para los matroides  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  resulta una tarea demasiado demandante, la matriz diádica de tamaño  $2^4 \times 2^4$ , tiene 940 intercalaciones, así que un análisis manual como el que hicimos para la matriz diádica  $D_3$ , resulta poco productivo. Un tema interesante sería encontrar una implementación de un algoritmo que nos permita analizar cada uno de los circuitos, verlos como diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis o tamaño 15 (los circuitos de tamaño 15 son los circuitos más pequeños de tamaño impar que aparecen en  $\mathcal{M}(D_4)$ ) y que en caso de que el circuito sea superficiable calculara la característica de Euler para saber en que superficie se encaja el circuito.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Conjeturas

En este trabajo logramos mostrar la estructura de los circuitos superficiales de los matroides  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$ , mediante dos métodos: los mapeos combinatorios de Tutte y mediante un proceso topológico que surge de la topología cociente. Para ambos métodos el análisis de cada uno de los circuitos se realizó sin ayuda de la computadora lo que hizo el proceso más largo. De esta misma forma mostramos mediante el análisis de cada circuito que cada circuito fundamental podía verse como la diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis y debido a que los circuitos fundamentales generan a todos los circuitos del matroide mediante la diferencia simétrica, esto nos permitió concluir que todo circuito del matroide era diferencia simétrica de los circuitos de tamaño seis. Más aún, debido a que la cantidad de los circuitos de tamaño seis que utilizamos para descomponer a los circuitos fundamentales, coincide con la cardinalidad de los circuitos fundamentales del matroide, los 67 circuitos de tamaño seis, no solo generan a todos los circuitos del matroide sino que es minimal, es decir, una base para el espacio de circuitos.

Para el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$  logramos además decir cuales son todos los circuitos del matroide y caracterizarlos mediante la tabla del grupo del espacio de circuitos. Debido a que la cardinalidad del espacio de circuitos para el matroide  $\mathcal{M}(D_3)$  es  $2^{67}$  no nos fue posible caracterizarlos explícitamente como lo hicimos para el matroide  $\mathcal{M}(D_2)$ , sin embargo, hay que enfatizar que la diferencia simétrica de dos circuitos se puede visualizar geoméricamente como el pegado de dos superficies, aunque por las características de nuestros objetos tal pegado pueda resultar en objetos no superficiales. Por ejemplo los circuitos fundamentales de tamaño 10 en  $\mathcal{M}(D_3)$  son diferencia simétrica de dos circuitos de tamaño seis y debido a que estos coinciden en una sola intercalación la diferencia simétrica de estos coincide topológicamente con la suma conexa de las dos superficies que forman, pero por otro lado los circuitos no superficiales los cuales son

diferencia de circuitos realizables como superficies, no son superficiales debido a que los pegados de las superficies llevan a un polígono en el cual algunas de las aristas aparecen más de dos veces. Sin embargo, el tener una visualización geométrica de los circuitos fundamentales de  $\mathcal{M}(D_3)$  nos ayuda a conocer más acerca de la estructura de los circuitos del matroide, a pesar de que el circuito pueda o no ser superficiales. Por ejemplo, debido a que el matroide posee varias copias de  $D_2$  sabemos que podemos pegar dos cubos por medio de una cara y esto nos da otro circuito, sabemos también que hay suficiente espacio para formar un toro uniendo cuatro cubos, e inclusive que tenemos circuitos cuya representación es un icosaedro rómbico, como tenemos circuitos de tamaño ocho que son toros, podría ocurrir que estos se intersectaran en una sola intercalación y que tuviésemos en  $\mathcal{M}(D_3)$  un 2-toro.

Aún quedan muchas cosas por analizar y probar, algunas de las conjeturas que tenemos acerca de estos matroides, aparecen enseguida:

- (i) Todo circuito de cardinalidad par en un matroide diádico es suma de circuitos de tamaño seis.

Para los matroides diádicos  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  la conjetura es cierta, puesto que el matroide es bipartito y todo circuito es diferencia simétrica de circuitos de tamaño seis, con lo que hemos visto creemos razonable que se valga para circuitos de tamaño par para matroides diádicos más grandes. Sin embargo, debido a que tenemos circuitos impares de tamaño quince, los cuales son los más pequeños de cardinalidad impar, podría pasar que dos circuitos de tamaño quince se intersectaran en una sola intercalación teniendo con ello un circuito de cardinalidad par. Pero la siguiente conjetura, nos permite creer que esta conjetura es plausible.

- (ii) Todo circuito esférico es suma conexa de cubos.

Cuando decimos que un circuito es esférico, significa que realizable como una superficie de característica de Euler 2, en los circuitos fundamentales que analizamos en esta tesis, los únicos esféricos que tenemos son los cubos  $C_i$ . Ésta es una versión más débil de la conjetura (i) y para esta conjetura Gilberto Calvillo tiene un avance considerable. Dicha conjetura se trabaja por medio de cuadrangulaciones [BGG<sup>+</sup>05], así que para el caso más débil estamos seguros que es cierto.

(iii) Todo circuito que es realizable como una superficie orientable en un matroide diádico es diferencia simétrica de circuitos de tamaño seis.

Debido a que no conocemos muy bien la estructura de  $\mathcal{M}(D_4)$ , salvo los circuitos de  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  que también pertenecen a  $\mathcal{M}(D_4)$ , podría pasar que alguno de los circuitos impares sea realizable como una superficie y pudiese ser que no se pueda descomponer como circuitos de tamaño seis, quizá para esta conjetura es más probable encontrar un contraejemplo.

(vi) Los circuitos de los matroides diádicos son diferencia simétrica circuitos de tamaño seis o quince.

Para los matroides  $\mathcal{M}(D_2)$  y  $\mathcal{M}(D_3)$  hemos probado que todo circuito es diferencia simétrica sus circuitos más pequeños que son los de cardinalidad seis, creemos entonces que siendo los circuitos de tamaño quince los más pequeños de cardinalidad impar, que para los matroides  $\mathcal{M}(D_n)$  con  $n \geq 4$  deben de poderse descomponer como diferencia simétrica de sus circuitos más pequeños de cardinalidades pares e impares que aparecen.

(v) Toda superficie es realizable como un circuito de  $D_\infty$ .

Estamos seguros de esta conjetura, ya que tenemos suficiente espacio para tener varios toros y planos proyectivos como circuitos y los cuales coincidan en una sola intercalación. Teniendo esto la diferencia simétrica de estos circuitos coincidirá con la suma conexa de las superficies que forman y ya que toda superficie es suma conexa de toros y planos proyectivos, por el teorema de clasificación de superficies podríamos tener dentro de  $\mathcal{M}(D_\infty)$  cualquier superficie como la realización geométrica de algún circuito del matroide.



# Apéndice A

## Implementación del algoritmo

Enseguida se muestra la implementación del algoritmo que obtiene la matriz diádica, a partir de ella calcula su matriz de incidencia y obtiene su forma escalonada reducida sobre  $\mathbb{Z}_2$ .

```
# -*- coding: utf-8 -*-  
"""
```

```
Created on Sun May 6 03:04:18 2012
```

```
@author: Gerino Ochoa
```

```
Module with functions designed to perform matroid-graph  
related operations.  
"""
```

```
import numpy as np
```

```
#import sympy.galgebra.latex_ex as tex
```

```
def bitxormatrix(vect1, vect2 = None):  
    """
```

```
    Return a matrix with the bitwise xor operation  
    (sum without charge) of all the posible combinations  
    of the entries in each one-dimensional vector.
```

```
    Parameters
```

---

vect1 : array of int , length (m)  
Column header .

vect2 : array of int , length (n), optional  
Row header .  
If not provided the computations are taken  
over vect1 with itself .

Returns

---

M : Integer numpy matrix , shape (m,m) or (m,n) .

Notes

---

Only integer types are handled

"""

```
if vect2 is None:  
    vect2 = vect1
```

```
m = np.size(vect1)  
n = np.size(vect2)
```

```
M = np.empty((m,n), int) #Matrix with integer entries
```

```
for i in range(m):  
    for j in range(n):  
        M[i,j] = np.bitwise_xor(vect1[i], vect2[j])
```

```
return M
```

---

```

def incmatrix(genl1, genl2):
    """
    return the incidence matrix of a matroid generated by
    vect1 and vect2

    Parameters
    _____

    genl1 : array of integers, length (m)

    genl2 : array of integers, length (n)

    Returns
    _____

    M : Integer numpy matrix, shape (m*n, x)
        x depends on the matroid generated.

    Notes
    _____

    Only integer types are handled.

    """

    m = len(genl1)
    n = len(genl2)

    M = None #eventually will be the incidence matrix
    VT = np.zeros((n*m, 1), int) #dummy variable

```

```

#function defined above. We compute the combinatorial bitwise
#xor matrix
M1 = bitxormatrix(genl1)
M2 = np.triu(bitxormatrix(genl2),1) #take only elements above
#the diagonal

```

```

for i in range(m-1):
    for j in range(i+1, m):
        [r, c] = np.where(M2 == M1[i, j])
        for k in range(len(r)):
            VT[(i)*n + r[k]] = 1;
            VT[(i)*n + c[k]] = 1;
            VT[(j)*n + r[k]] = 1;
            VT[(j)*n + c[k]] = 1;

            if M is None:
                M = np.copy(VT)
            else:
                M = np.concatenate((M, VT), 1)

        VT = np.zeros((n*m,1), int)

return M

```

```

def gaussjord XOR(A):

```

```

    """

```

```

    Returns the row reduced echelon form of an incidence matrix
    (or any matrix) with 0's and 1's as entries, uses
    Gauss-Jordan algorithm. Is equivalent to
    Gauss-Jordan on Z_2 (integer modulo 2). The matrix
    could be squared or non-singular (can handle

```

everything ;) ).

### Parameters

---

A : matrix (2D array) of integer.

### Returns

---

M : integer numpy matrix.

### Notes

---

Only 0's, and 1's are properly handled.

Using non-integer entries will produce an error and using integer matrix with entries others than 0's and 1's will work but not as expected.

"""

```
M = np.matrix(A, int)
```

*#nr = number of rows, nc = number of columns*

```
[nr, nc] = np.shape(M)
```

```
if False in (np.ravel(np.any(M,1))).tolist():
```

*#worst case scenario, there are zero rows somewhere*

```
M = np.copy(sortmatrix(M))
```

```
if nr < nc:
```

```
    forlimit = nr
else:
    forlimit = nc

for row in range(forlimit):
    if np.any(np.any(M[range(row, nr)], 0)):
        #if there is a column to the right of the current
        #position with non-zero elements below the main
        #diagonal

        column = \
np.ravel(np.nonzero(np.any(M[range(row, nr)]
, 0))[1])[0]
        #find the first column to the right of the
        #current position with nonzero elemnts
        #below the main diagonal

        unos = np.ravel(np.nonzero(M[:, column])[0])
        #indexes of non-zero elements in this column
        lunos = unos[np.ravel(np.nonzero(unos >= row))]
        #indexes of non-zero elements in
        #this column below the main diag

        if len(lunos) > 0:
            #make sure the column has at
            #least one non-zero entry below
            #the main diagonal

            pivot = lunos[0]
```

---

```

unos = unos.tolist()
unos.remove(pivot)
#remove pivot's index from index
#list and save it's index

M[[pivot, row],:] = M[[row, pivot],:]
#swap pivot row and current row (using
#MATLAB-like notation)

#make 0 other 1's in this column
#by sum modulo 2 (xor)
M[unos,:] = np.bitwise_xor(M[unos,:],
M[row,:])

if False in (np.ravel(np.any(M[range(row),
:],1))).
tolist():
#worst case scenario, there are
#dependent rows
    M = np.copy(sortmatrix(M))

return M

```

```
def sortmatrix(A):
```

```
    """
```

```

    This functions swaps rows so the 0-rows are
    #located at the bottom

```

```

    Parameters

```

---

A : Matrix , shape (n,m).

Returns

---

M : numpy matrix , shape (n,m).

"""

M = np.matrix(A, **int**)

[nr , nc] = np.shape(M) *#number of rows and columns*

Mnonzero = np.ravel(np.where(np.any(M, 1))[0])

*#indexes of the no-zero rows*

indsup = len(Mnonzero)

**if** indsup > 0:

    M[**range**(indsup) ,:] = M[Mnonzero ,:]

    M[**range**(indsup , nr) , :] = np.zeros((nr-indsup , nc) , **int**)

**return** M

*#def latex(N):*

"""

*method to display an numpy array or matrix in latex format*

Parameters

---

N : Numpy array or matrix

---

```
    """
    # A = np.array(N)
    # print tex.LaTeX(A)

def removefromlist(the_list , val):
    """
    function to remove an element from an array

    Parameters
    _____
    the_list : list

    val : Element in the list

    Returns
    _____
    list
    """

    return [value for value in the_list if value != val]
```



# Bibliografía

- [BGG<sup>+</sup>05] Gunnar Brinkmann, Sam Greenberg, Catherine Greenhill, Brendan D. McKay, Robin Thomas, and Paul Wollan. Generation of simple quadrangulations of the sphere. *Discrete Math.*, 305(1-3):33–54, 2005.
- [BM08] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [Cay45] A. Cayley. On Jacobi’s elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on Quaternions. *Philosophical Magazine*, 26:208–211, 1845.
- [CGMB97a] Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler, and José Martínez-Bernal. Intercalate matrices. I. Recognition of dyadic type. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 3(1):57–67, 1997.
- [CGMB97b] Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler, and José Martínez-Bernal. Intercalate matrices: II. A characterization of Hurwitz-Radon formulas and an infinite family of forbidden matrices. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 3(2):207–219, 1997.
- [Edm60] J. R. Edmonds. A combinatorial representation of polyhedral surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.*, 7:646, 1960.
- [FF03] Maurice Fréchet and Ky Fan. *Invitation to combinatorial topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. Translated from the French, with notes, by Howard W. Eves, Reprint of the 1967 English translation.
- [Git00] Isidoro Gitler. The triangle-star transformation, intercalate matrices and applications. In *Interdisciplinary tendencies in mathematics (Spanish)*

- (México, 1998), volume 26 of *Aportaciones Mat. Comun.*, pages 315–428. Soc. Mat. Mexicana, México, 2000.
- [GP00] S. Gitler and C. Prieto, editors. *Tendencias Interdisciplinarias en las Matemáticas*. Sociedad Matemática Mexicana, 2000.
- [Ham67] William Rowan Hamilton. *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton. Vol. III: Algebra*. Edited by H. Halberstam and R. E. Ingram. Cunningham Memoir No. XV. Cambridge University Press, London-New York, 1967.
- [Hur98] A. Hurwitz. Ueber die Entwicklungskoeffizienten der lemniscatischen Functionen. *Math. Ann.*, 51(2):196–226, 1898.
- [Leg09] Adrien-Marie Legendre. *Essai sur la théorie des nombres*. Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reprint of the second (1808) edition.
- [Oxl92] James G. Oxley. *Matroid theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.
- [Sha00] Daniel B. Shapiro. *Compositions of quadratic forms*, volume 33 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [Tut84] W. T. Tutte. *Graph theory*, volume 21 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1984. With a foreword by C. St. J. A. Nash-Williams.
- [Wel69] D. J. A. Welsh. Euler and bipartite matroids. *J. Combinatorial Theory*, 6:375–377, 1969.
- [Whi35] Hassler Whitney. On the Abstract Properties of Linear Dependence. *Amer. J. Math.*, 57(3):509–533, 1935.
- [Wil93] Marcel Wild. Axiomatizing simple binary matroids by their closed circuits. *Appl. Math. Lett.*, 6(6):39–40, 1993.

- 
- [Yiu87] Paul Y. H. Yiu. Sums of squares formulae with integer coefficients. *Canad. Math. Bull.*, 30(3):318–324, 1987.
- [Yuz81] Sergey Yuzvinsky. Orthogonal pairings of Euclidean spaces. *Michigan Math. J.*, 28(2):131–145, 1981.