



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

Estudio del álgebra de Lie de los campos vectoriales que preservan la estructura  
conforme del espacio-tiempo de Minkowski

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
JAVIER GONZÁLEZ ANAYA

DR. ADOLFO SÁNCHEZ VALENZUELA  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F., JUNIO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. El isomorfismo <math>\mathfrak{o}(p+1, q+1) \cong \mathfrak{co}(p, q)</math></b>	<b>4</b>
<b>3. El isomorfismo <math>\mathfrak{o}(4, 2) \cong \mathfrak{su}(2, 2)</math> y la exponencial de los campos que preservan la estructura conforme del espacio-tiempo de Minkowski</b>	<b>18</b>
3.1. Estructuras complejas y el elemento $\Gamma \in \text{Cl}(p, q)$ . . . . .	20
3.2. Realizaciones de $\text{Cl}(3, 1)$ y $\text{Cl}(4, 2)$ . . . . .	21
3.3. El isomorfismo entre $\mathfrak{o}(4, 2)$ y $\mathfrak{su}(2, 2)$ . . . . .	25
3.4. Sobre la exponenciación de los campos conformes del espacio-tiempo de Minkowski . . . . .	28
<b>4. Completación conforme de un espacio vectorial con geometría de signatura <math>(p, q)</math></b>	<b>33</b>
4.1. Construcción y propiedades de la completación conforme . . . . .	33
4.2. Completación conforme del espacio-tiempo de Minkowski . . . . .	40
<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>44</b>

# 1. Introducción

En el presente trabajo demostramos el isomorfismo de álgebras de Lie entre  $\mathfrak{co}(p, q)$ , el álgebra de Lie de los campos vectoriales cuyos flujos integrales preservan, hasta un factor escalar positivo, una forma bilineal, simétrica y no degenerada (a la cual frecuentemente nos referiremos como *geometría*) de signatura  $(p, q)$  definida en un espacio vectorial de dimensión  $p + q$ , y  $\mathfrak{o}(p + 1, q + 1)$ , el álgebra de Lie ortogonal de un espacio vectorial con una geometría de signatura  $(p + 1, q + 1)$ . Dicho resultado tiene implicaciones en física, pues para el caso particular del espacio de Minkowski se tiene que  $\mathfrak{co}(3, 1) \cong \mathfrak{o}(4, 2)$ , además se sabe desde 1910 (ver el artículo [1] de Bateman) que el *grupo de simetría* de las ecuaciones de Maxwell en el vacío (esto es, el grupo de transformaciones que preserve la forma de dichas ecuaciones transformando soluciones en soluciones) es precisamente *el grupo de transformaciones conforme* asociado al álgebra de Lie  $\mathfrak{co}(3, 1)$ . Este hecho concentra una particular atención en los grupos de Lie cuya álgebra de Lie sea isomorfa a  $\mathfrak{o}(4, 2)$ . En este trabajo, al explicar el isomorfismo  $\mathfrak{co}(3, 1) \cong \mathfrak{o}(4, 2)$ , obtendremos, como una consecuencia colateral, la posibilidad de describir un espacio-tiempo tetradimensional  $M$  en forma de espacio homogéneo  $G/H$  de tal manera que  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{o}(4, 2)$ ,  $\dim(G/H) = 4$  y que  $T_{[e]}G/H$  esté equipado con una geometría en la clase conforme de la métrica de Minkowski plana usual de  $\mathbb{R}^4$ .

El objetivo del primer capítulo es demostrar que, localmente, el grupo de transformaciones conformes de un espacio vectorial es localmente isomorfo al grupo ortogonal  $O(p + 1, q + 1)$ ; en otras palabras, demostrar que  $\mathfrak{co}(p, q) \cong \mathfrak{o}(p + 1, q + 1)$ . Para llegar a este resultado recurrimos al método desarrollado en [10] y [4]. Brevemente, dicho método sirve para estudiar la familia de subálgebras de Lie de un álgebra de Lie prescrita de campos vectoriales que preservan alguna estructura geométrica subyacente, y consiste en considerar la expansión en serie de Taylor de las componentes de los campos vectoriales que preservan la estructura geométrica localmente. Una vez hecho esto, aplicamos las técnicas desarrolladas para el álgebra de transformaciones conformes lineales y, añadiendo un espacio de dimensión dos con una geometría de signatura  $(1, 1)$  al espacio vectorial original, exhibimos el isomorfismo deseado.

La exposición continúa en el segundo capítulo, donde brevemente introducimos las realizaciones de las álgebras de Clifford de  $\text{Cl}(3, 1)$  y  $\text{Cl}(4, 2)$  dadas en [2]. Dichas realizaciones consisten en identificar estas álgebras con las álgebras de matrices isomorfas a  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \kappa$  y  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4 \circ K$ , respectivamente, donde  $\kappa : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  y  $K : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  son transformaciones  $\mathbb{C}$ -antilineales e invertibles fijas. Utilizamos estas realizaciones para demostrar los isomorfismos de álgebras de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(3, 1)$  y  $\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{o}(4, 2)$ .

Un apartado importante en este trabajo consiste en representar a los generadores del álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(4, 2)$  como campos vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  y demostramos que no todos los flujos integrales de dichos campos vectoriales están definidos para todo valor del parámetro de integración  $t$ . Este hecho es la motivación principal para proponer que el espacio-tiempo de Minkowski usual, visto como el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  con la métrica plana de signatura  $(3, 1)$ , sea solamente *el espacio euclideo donde toman valores las cartas coordenadas de una variedad  $M$* , con  $M \simeq G/H$  como mencionamos anteriormente. De esta forma, el álgebra de Lie de  $G$ , que por construcción es isomorfa al álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(4, 2)$ , se representa por campos vectoriales cuyos flujos integrales sí están globalmente definidos en  $M$ .

Proseguimos con esta «brújula» al tercer y último capítulo con el fin de describir

con detalle la variedad suave y compacta  $M \cong SO(4, 2)_e/\hat{H}$ . Ésta suele llamarse en la literatura, *la completación conforme del espacio-tiempo de Minkowski*. Parte importante de la presentación consiste en entender su geometría —esto es, cómo está definida de manera natural, en cada espacio tangente, una forma bilineal simétrica, no degenerada de signatura  $(3, 1)$ —, y cómo es que ésta está definida en este modelo homogéneo, solamente hasta un factor escalar positivo. El capítulo y la tesis concluyen mostrando que la completación conforme del espacio-tiempo de Minkowski es una variedad isomorfa al grupo de Lie  $U(2)$ . Cabe destacar que este modelo fue estudiado exhaustivamente por Segal en [9], referencia en la cual este trabajo está muy fuertemente inspirado.

## 2. El isomorfismo $\mathfrak{o}(p+1, q+1) \cong \mathfrak{co}(p, q)$

En [10] y [4], Sternberg et. al. desarrollan un método que permite estudiar, desde un punto de vista enteramente algebraico, la familia de subálgebras de un álgebra de Lie prescrita que preservan alguna *estructura geométrica* subyacente asociada al álgebra de Lie dada. En principio, la motivación de dicho método viene de pensar que el conjunto de campos vectoriales suaves asociados a una variedad es el álgebra de Lie prescrita, de forma que sus posibles subálgebras de Lie corresponden a la acción de diferentes grupos de Lie en la variedad.

Al abordar el problema localmente es posible hacer este estudio en términos puramente algebraicos, sobre un espacio vectorial de dimensión finita, que de ahora en adelante denotaremos como  $T$ . Nuestra aproximación al método depende fuertemente de dos resultados: primero, el teorema de Taylor, que nos permitirá filtrar el espacio de funciones suaves en  $T$ , y el segundo, el isomorfismo entre el álgebra de campos vectoriales de  $T$ ,  $\mathfrak{X}(T)$ , y el álgebra de derivaciones  $\text{Der}(C^\infty(T))$ . La importancia de ambas condiciones se hará evidente más adelante. Además de las fuentes antes mencionadas, referimos al lector a [12], exposición en la cual este capítulo está fuertemente inspirado.

Comencemos por fijar la notación. Fijamos una base  $\{e_k\}_{k=1}^n$ , de  $T$ , y su base dual  $\{x^k : T \rightarrow \mathbb{R}\}_{k=1}^n$ , de tal forma que  $x^j(e_k) = \delta_{ij}$ .

Consideremos ahora el álgebra simétrica del espacio dual,  $S(T^*)$ . Como sabemos, ésta es un álgebra real  $\mathbb{Z}$ -graduada, de manera que

$$S(T^*) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S^k(T^*),$$

donde

$$S^k(T^*) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } k < 0, \\ \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, \\ \text{Span}\{x^{i_1} \cdots x^{i_k} : x^{i_j} \text{ es un elemento de la base dual}\}, & \text{si } 0 < k. \end{cases}$$

Habiendo dado la forma explícita de la graduación, queda en evidencia el isomorfismo de espacios vectoriales entre  $S^k(T^*)$ , con  $0 \leq k$ , y el subespacio de polinomios homogéneos de grado  $k$  en  $T$ . De hecho, éstos se pueden identificar con la subálgebra de  $C^\infty(T)$  generada por las funciones polinomiales del sistema de coordenadas  $\{x^k\}$  definido por la base dual al identificar el producto en  $S(T^*)$  con el producto de funciones suaves  $T \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.** Sea  $A$  un álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada. Entonces, una derivación de grado  $k \in \mathbb{Z}$  es una función lineal,  $D : A \rightarrow A$ , tal que

- (i) satisface la regla de Leibniz, es decir,  $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ , para todos  $f, g \in A$ , y
- (ii) para cada subespacio  $A_j \subseteq A$ , se tiene que  $D(A_j) \subseteq A_{j+k}$ .

Al espacio de derivaciones de grado  $k$  de  $A$  lo denotamos como  $\text{Der}(A)_k$ .

Cualquier derivación,  $D \in \text{Der } S(T^*)$ , está únicamente definida por su acción en elementos de  $S^1(T^*)$ , ya que para cualquier elemento de la base,  $x^{i_1} \cdots x^{i_k} \in S^k(T^*)$ ,

se tiene que

$$\begin{aligned} D(x^{i_1} \cdots x^{i_k}) &= D(x^{i_1})(x^{i_2} \cdots x^{i_k}) + x^{i_1} D(x^{i_2} \cdots x^{i_k}) \\ &= \sum_{j=1}^k D(x^{i_j}) x^{i_1} \cdots \widehat{x^{i_j}} \cdots x^{i_k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Observemos que por lo anterior no hay derivaciones de grado  $k \leq -2$ , y las primeras derivaciones no triviales son las de grado  $-1$ . Por cada elemento  $v \in T (\cong (T^*)^*)$  se puede definir una derivación de grado  $-1$  de  $S(T^*)$  mediante  $\partial_v(f) = f(v)$ , para todo  $f \in T^*$ , y extender esta derivación al espacio completo usando (1). Es claro que si  $\{e_k\}$  y  $\{x^k\}$  son bases duales entre sí de  $T$  y  $T^*$ , respectivamente, entonces se obtiene la identificación natural

$$\partial_{e_i} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i},$$

que usaremos en lo sucesivo.

Si elegimos un elemento arbitrario  $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in T$ , la derivación de grado  $-1$  a la que da lugar es  $\partial_v$ , y claramente,

$$\partial_v = v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x^n},$$

con  $\partial_v(S^k(T^*)) \subseteq S^{k-1}(T^*)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

En otras palabras, hemos demostrado que

$$T \cong \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\} \cong \text{Der } S(T^*)_{-1}.$$

**Nota 2.** De ahora en adelante no haremos distinción entre los elementos de  $T$  y  $\text{Der } S(T^*)_{-1}$ .

Así, dada  $D \in \text{Der } S(T^*)_k$ , con  $-1 \leq k$ , se tiene que  $D$  queda definida de manera única por cómo actúa en los elementos de grado 1, asimismo, sabemos que  $D(x_i) \in S^{k+1}(T^*)$ , para todo  $x_i$  en la base dual. De esta forma, resulta evidente que cada  $D$  de grado  $k$  define un único elemento en  $\text{Hom}(T^*, S^{k+1}(T^*))$  y viceversa, es decir,

$$\text{Der } S(T^*)_k \cong \text{Hom}(T^*, S^{k+1}(T^*)) \cong S^{k+1}(T^*) \otimes T \cong S^{k+1}(T^*) \otimes \text{Der } S(T^*)_{-1}. \quad (2)$$

Con esta identificación, definimos

$$\text{Der } S(T^*) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Der } S(T^*)_k$$

como subespacio de  $\text{End } S(T^*)$  y es directo dotar a  $\text{Der } S(T^*)$  con estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete en los elementos descomponibles de cada componente homogénea mediante la composición de funciones. Sean  $f \otimes \partial_v \in S^{k+1}(T^*) \otimes T$  y  $g \otimes \partial_w \in S^{l+1}(T^*) \otimes T$ , para algunos  $v, w \in T$ . Entonces, para todo  $h \in S(T^*)$ ,

$$\begin{aligned} [f \otimes \partial_v, g \otimes \partial_w](h) &= f \otimes \partial_v (g \otimes \partial_w(h)) - g \otimes \partial_w (f \otimes \partial_v(h)) \\ &= f((\partial_v g)(\partial_w h)) - g((\partial_w f)(\partial_v h)) + gf \partial_v(\partial_w h) - gf \partial_w(\partial_v h) \\ &= ((\partial_v g)f \otimes \partial_w - (\partial_w f)g \otimes \partial_v)(h). \end{aligned}$$

De forma que

$$[f \otimes \partial_v, g \otimes \partial_w] = (\partial_v g)f \otimes \partial_w - (\partial_w f)g \otimes \partial_v, \quad (3)$$

y por lo tanto

$$[\text{Der } S(T^*)_k, \text{Der } S(T^*)_l] \subseteq \text{Der } S(T^*)_{k+j}.$$

De particular importancia es el caso con  $k = 0$ , puesto que  $\text{Der } S(T^*)_0 \cong T^* \otimes T \cong \text{End } T$  es obviamente una subálgebra de Lie de  $\text{Der } S(T^*)$  y es inmediato convencerse de que el corchete recién descrito se corresponde con el corchete usual de transformaciones lineales en  $T^*$ ,  $R \circ S - S \circ R$ , lo cual se sigue de escribir una transformación lineal arbitraria  $R$  como una suma de elementos descomponibles de la forma  $f_i \otimes \partial_{e_i}$ . Luego, usando (2) y (3) se tiene la siguiente,

**Proposición 3.** Existe un isomorfismo de álgebras de Lie  $\mathbb{Z}$ -graduadas,

$$\text{Der } S(T^*) \cong S(T^*) \otimes T.$$

Se sigue de esta proposición que al considerar al espacio vectorial como una variedad suave y la base dual  $\{x^k\}$  como un sistema de coordenadas (globales en este caso), le damos una interpretación geométrica al álgebra  $S(T^*) \otimes T$  como el álgebra de *campos vectoriales polinomiales* de  $T$ . Es decir,  $S(T^*) \otimes T \subseteq \mathfrak{X}(T)$ .

Consideremos ahora un campo vectorial suave de  $T$ ,  $X \in \mathfrak{X}(T)$ . Dado que existe una carta global en  $T$ , cualquier campo vectorial es de la forma

$$X = \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \varphi_n \frac{\partial}{\partial x^n},$$

donde  $\varphi_i \in C^\infty(T)$ , con  $i = 1, \dots, n$ . En general, esto lo interpretamos diciendo que  $\mathfrak{X}(T) \cong C^\infty(T) \otimes T$ . Además, por el teorema de Taylor, es posible aproximar a cada una de estas funciones en una vecindad del origen (o de cualquier otro punto) mediante polinomios de grado fijo arbitrario. Si fijamos  $p \in \mathbb{N}$  y expandimos cada una de las funciones  $\varphi_i$  a orden  $p$ , obtenemos

$$X = \underbrace{X^{(0)}}_{\mathbb{R} \otimes T} + \underbrace{X^{(1)}}_{T^* \otimes T} + \cdots + \underbrace{X^{(p)}}_{S^p(T^*) \otimes T} + \Theta,$$

y  $\Theta \in C^\infty(T)$  es tal que  $\lim_{v \rightarrow 0} \Theta(v) / \|v\|^p = 0$ . De forma que  $X^{(0)}$  es un campo vectorial constante,  $X^{(1)}$  es un campo vectorial que depende linealmente de las coordenadas, etc.

Asimismo, (2) nos dice que  $X^{(0)}$  es una derivación de grado  $-1$ ,  $X^{(1)}$  es una derivación de grado  $0$ , y en general,  $X^{(i)}$  es una derivación de grado  $i - 1$ .

De forma natural esta descomposición de los campos vectoriales suaves da lugar a una filtración del espacio  $\mathfrak{X}(T) \cong \text{Der}(C^\infty(T))$  al definir,

$$D^{(i)}(T) := \{X \in \mathfrak{X}(T) : X^{(j)} = 0, 0 \leq j \leq i\},$$

para todo  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y poniendo  $D^{(-1)} := \mathfrak{X}(T)$  obtenemos una filtración completa de dicho espacio como

$$D^{(-1)}(T) \supseteq D^{(0)}(T) \supseteq D^{(1)}(T) \supseteq \cdots$$

y se sigue inmediatamente que

$$D^{(k)}(T)/D^{(k+1)}(T) \cong S^{k+1}(T^*) \otimes T.$$

Es importante notar que el corchete de Lie de  $D^{(-1)}(T)$  respeta la graduación de los subespacios, es decir,

$$[D^{(k)}(T), D^{(l)}(T)] \subseteq D^{(k+l)}(T), \quad (4)$$

como se puede verificar fácilmente. Esto implica que  $D^{(0)}$  es una subálgebra y cada  $D^{(k)}$  es un ideal en ella.

**Nota 4.** Formalmente deberíamos exhibir en nuestra notación que todo este desarrollo ocurre en una vecindad del origen de  $T$  o de un punto fijo  $p \in T$ , en cuyo caso  $x^j(p) = p^j$ , con  $1 \leq j \leq n$  y las expansiones de Taylor quedan dadas en términos de polinomios en  $x^j - p^j$ . Omitimos estos detalles pues no los necesitaremos más adelante.

**Interpretación geométrica.** Los diferentes campos vectoriales se pueden interpretar geoméricamente considerando los difeomorfismos locales producidos por sus flujos integrales. Solamente elaboramos sobre los ejemplos más sencillos, donde utilizamos el teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , y  $p \in M$ . Entonces, existe una vecindad  $U \subseteq M$  de  $p$ , un intervalo  $(-\delta, \delta)$ , para algún  $0 < \delta$ , y una función suave  $\Gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$ , tal que la curva  $t \mapsto \Gamma(t, q)$ , donde  $t \in (-\delta, \delta)$  y  $q \in U$ , es la única solución de la ecuación diferencial

$$X(\Gamma)(t, q) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, q),$$

con la condición inicial  $\Gamma(0, q) = q$ .

Una forma algebraica de escribir esta ecuación diferencial es mediante el *pullback* de  $\Gamma$ ,

$$\Gamma^* \circ X = \frac{\partial}{\partial t} \circ \Gamma^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty((-\delta, \delta) \times U);$$

es decir, para toda  $h \in C^\infty(M)$ , se cumple que

$$(\Gamma^* \circ X)(h) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \circ \Gamma^* \right)(h).$$

En particular, si  $h = x^j$  es alguna de las funciones coordenadas y  $X = \sum_{k=1}^n \varphi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ , el lado izquierdo de esta ecuación se convierte en

$$\Gamma^*(X(x^j)) = \Gamma^*(\varphi^j) = \varphi^j \circ \Gamma,$$

por otra parte, si definimos  $\Gamma^j := x^j \circ \Gamma$ , el lado derecho se convierte en

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \circ \Gamma^* \right)(x^j) = \frac{\partial}{\partial t}(x^j \circ \Gamma) = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial t}.$$

Entonces, la ecuación diferencial se convierte en

$$\varphi^j \circ \Gamma = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial t}.$$

Con esta formulación se puede demostrar que el flujo integral  $\Gamma$  puede determinarse a partir de su *pullback* como sigue:

$$\begin{aligned}\Gamma^* &= \text{Exp}(tX) : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty((-\delta, \delta) \times U) \\ &= id + tX + \frac{t^2}{2!}X \circ X + \frac{t^3}{3!}X \circ X \circ X + \dots\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.** Veamos qué representan geoméricamente los campos vectoriales de orden 0. Sea  $X = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} \in S^0(T^*) \otimes T$  un tal campo vectorial de orden 0. Entonces,

$$\begin{aligned}id_T(x^i) &= x^i, \\ X(x^i) &= v^i \in \mathbb{R}, \\ X(X(x^i)) &= X(v_i) = 0.\end{aligned}$$

De forma que el pullback del flujo integral está dado por

$$\text{Exp}(tX)(x^j) = x^j + tv^j,$$

que podemos abreviar escribiendo

$$\text{Exp}(tX)(x) = x + tv,$$

y que es una traslación en la dirección de  $v$ , por  $t$  unidades a partir de cualquier punto en  $T$ . Por esta razón diremos que los campos vectoriales de orden 0 son traslaciones. □

**Ejemplo 6.** Veamos ahora qué representan geoméricamente los campos de orden 1. Sea  $X = a^1(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a^n(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^n} \in S^1(T^*) \otimes T$ , donde cada  $a_i(x^1, \dots, x^n)$  es un polinomio de grado 1 de la forma

$$a^i(x^1, \dots, x^n) = a_1^i x^1 + \dots + a_n^i x^n,$$

con  $i = 1, \dots, n$ . Entonces,

$$\begin{aligned}id_T(x^i) &= x^i, \\ X(x^i) &= a^i(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j, \\ X(X(x^i)) &= \sum_{j=1}^n a_j^i X(x^j) = \sum_{j=1}^n a_j^i a^j(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j,k=1}^n a_j^i a_k^j x^k \\ X(X(X(x^i))) &= X\left(\sum_{j,k=1}^n a_j^i a_k^j x^k\right) = \sum_{j,k=1}^n a_j^i a_k^j X(x^k) = \sum_{j,k,l=1}^n a_j^i a_k^j a_l^k x^l \\ &\vdots\end{aligned}$$

Observando los términos anteriores resulta fácil ver que, si definimos una matriz,  $A$ , con entradas  $A_{ij} = a_j^i$ , entonces,

$$\underbrace{X(X(X(X(\dots(x^i)))) \dots)}_{k \text{ veces}} = A^k(x^1 \dots x^n)^T.$$

Esto quiere decir que la exponencial de  $X$  es precisamente la exponencial de la matriz  $A$ , es decir,  $\text{Exp}(tX) = \text{Exp}(tA)$ . En particular, el flujo integral del campo  $X$  es la transformación lineal  $x \mapsto \text{Exp}(tA)x$ , que multiplica las coordenadas del punto  $x$  por la matriz  $\text{Exp}(tA)$ . Por esta razón decimos que los campos vectoriales de grado 1 generan transformaciones lineales.  $\square$

La filtración de  $\mathfrak{X}(T)$  se extiende a cualquiera de sus subálgebras de manera trivial. Dada una subálgebra de Lie,  $L \subseteq \mathfrak{X}(T)$ , definimos

$$\begin{aligned} L^{(i)} &= L \cap D^{(i)}, \\ g_L^i &= L^{(i)} / L^{(i+1)}. \end{aligned}$$

De tal suerte que podemos identificar a cada  $g_L^i$  como un subespacio de  $S^{i+1}(T^*) \otimes T$ . En particular, observemos que  $g_L^0$  es una subálgebra de Lie de  $T^* \otimes T$ .

El hecho de que  $L$  sea una subálgebra de Lie aunado a los cálculos previos del corchete de  $S(T^*) \otimes T$  nos permiten definir un corchete en los cocientes, preservando la graduación; esto es,

$$[g_L^k, g_L^l] \subseteq g_L^{k+l}. \quad (5)$$

**Definición 7.** Nótese que  $g_L^{-1}$  es un subespacio de  $T$ . Entonces, decimos, como en [10], que la subálgebra  $L \subseteq \mathfrak{X}(T)$  es *transitiva* si  $g_L^{-1} = T$ , es decir, si  $T = L/L^0$ .

Geoméricamente esta condición quiere decir que la subálgebra de Lie  $L$  contiene a todas las traslaciones; en el lenguaje clásico, que «es posible moverse en cualquier dirección mediante un elemento de  $L$ », como se mostró en el ejemplo (5).

**Nota 8.** Cuando el álgebra de Lie  $L$  es transitiva, ésta contiene como subálgebra a lo que se conoce como el producto semi-directo de  $g_L^0$  con  $T$ . Como espacio vectorial se trata de la suma directa,  $g_L^0 \oplus T$  y su corchete de Lie está dado por,

$$[\varphi + u, \psi + v] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi + \varphi(v) - \psi(u),$$

donde  $\varphi, \psi \in g_L^0 \subseteq \text{End } T$  y  $u, v \in T$ .

Cuando  $T = \mathbb{R}^{3,1}$  y  $g_L^0 = \mathfrak{o}(3,1)$ , a dicho producto semi-directo se le conoce como álgebra de Poincaré.

Una noción algebraica muy útil que ayuda a comprender las componentes  $g_L^i$  del álgebra de Lie graduada asociada a  $L$  es la de *prolongación*:

**Definición 9.** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales, y sea  $h$  un subespacio arbitrario de  $\text{Hom}(V, W)$ . La primera prolongación de  $h$  se define como el subespacio

$$j^{(1)}h = \{\tau \in \text{Hom}(V, h) : \tau(u)v = \tau(v)u, \text{ para todos } u, v \in V\}.$$

La  $k$ -ésima prolongación de  $h$  se define inductivamente como

$$j^{(k)} = j^{(1)}(j^{(k-1)}h),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y donde  $j^{(0)}h = h$ . Como en [10], decimos que el subespacio  $h$  es de tipo finito si existe algún entero positivo,  $k$ , para el cual  $j^{(k)}h = 0$ , en cuyo caso todas las prolongaciones de orden mayor también se anulan. En caso contrario decimos que  $h$  es de tipo infinito.

**Proposición 10.** Si la subálgebra  $L$  es transitiva, es decir,  $g_L^{-1} = T$ , entonces, es posible reescribir (5), para  $k = -1$  y  $l = i + 1$ , como

$$g_L^{i+1} \subseteq j^{(1)}(g_L^i).$$

*Demostración.* El resultado es consecuencia de (5), la transitividad, y el hecho de que  $L$  es una subálgebra de Lie graduada.  $\square$

Esta proposición pone en evidencia que si  $j^{(1)}g_L^{(i)} = 0$ , entonces  $g_L^{(j)} = 0$  para todo  $j > i$ .

Hasta ahora únicamente hemos visto como estudiar una subálgebra arbitraria descomponiéndola en sus componentes polinomiales, sin embargo, dada una familia finita de subespacios,  $\{g^i\}_{i=-1}^r$ , con  $g^{-1} = T$  y  $g^i \subseteq S^{i+1}(T^*) \otimes T$  que satisfagan (5) siempre y cuando  $k, l$ , y  $k + l$  sean menores que  $r$ , existe un álgebra de Lie,  $L$ , tal que  $g^i = g_L^i$  cuando  $i \leq r$ . El primer paso para construir dicha álgebra consiste en extender la familia de subespacios a una familia infinita, definiendo  $g^{r+s} = j^{(s)}g^r$ , y ver que el corchete del espacio obtenido mediante su suma respeta la graduación. De esta forma, se define

$$L = \bigoplus_{i=-1}^{\infty} g^i.$$

Es claro que lo único que hay que probar es que el corchete respeta la graduación en todos los órdenes. Hagámoslo inductivamente: Sea  $r < s$  y supongamos que  $[g^k, g^l] \subseteq g^{r+k} = j^{(k)}g^r$  se cumple para cualquier  $r \leq k \leq s - 1$ . Entonces, queremos probar el resultado cuando  $k = s$ . Sean  $k + l = s$ , probar el resultado es equivalente a demostrar que  $[T, [g^k, g^l]] \subseteq g^{s-1}$ , sin embargo, por la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} [T, [g^k, g^l]] &= [[T, g^k], g^l] + [g^k, [T, g^l]] \\ &\subseteq [g^{k-1}, g^l] + [g^k, g^{l-1}] \\ &\subseteq g^{s-1}, \end{aligned}$$

utilizando (5) y la hipótesis de inducción. De acuerdo a [10], al álgebra  $L$  obtenida de esta manera se le llama *álgebra plana de tipo*  $g^0, \dots, g^r$  y se denota como  $L_{g^0, \dots, g^r}$ .

El método de prolongaciones forma parte de una teoría general cuya finalidad es el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Referimos al lector interesado a [6]; en particular al capítulo 4, donde se explican los fundamentos de la teoría de prolongaciones.

A continuación ejemplificamos el procedimiento para los casos con  $g^0 = \mathfrak{o}(T, B)$  y  $g^0 = \mathfrak{co}_L(T, B)$  como subespacios prescritos, donde

$$\mathfrak{co}_L(T, B) = \{\xi \in \text{Hom}(T, T) : B(\xi u, v) + B(u, \xi v) = \mu(\xi)B(u, v) \text{ para todos } u, v \in T\},$$

siendo  $\mu$  una función positiva cuya dependencia en  $\eta$  es lineal.

**Ejemplo 11.** Consideremos el caso en que  $g^{(0)} = \mathfrak{o}(T, B)$  y veamos que  $g_L^{(i)} = 0$  para todo  $0 < i$ , con  $g_L^{(i)} = j^{(i)}\mathfrak{o}(T, B) = 0$ . Por la observación anterior, basta demostrar que

$$j^{(1)}\mathfrak{o}(T, B) = 0.$$

*Demostración.* Recordemos que

$$\mathfrak{o}(T, B) = \{\xi \in \text{Hom}(T, T) : B(\xi u, v) + B(u, \xi v) = 0 \text{ para todos } u, v \in T\}.$$

Entonces, si  $\tau \in j^{(1)}\mathfrak{o}(T, B)$ , para todos  $u, v, w \in T$  se tiene que

$$\begin{aligned}
B(\tau(u)v, w) &= -B(v, \tau(u)w), & \text{ya que } \tau(u) \in \mathfrak{o}(T, B); \\
&= -B(v, \tau(w)u), & \text{ya que } \tau(u)w = \tau(w)u; \\
&= B(\tau(w)v, u), & \text{ya que } \tau(w) \in \mathfrak{o}(T, B); \\
&= B(\tau(v)w, u), & \text{ya que } \tau(w)v = \tau(v)w; \\
&= -B(w, \tau(v)u), & \text{ya que } \tau(v) \in \mathfrak{o}(T, B); \\
&= -B(w, \tau(u)v), & \text{ya que } \tau(v)u = \tau(u)v; \\
&= -B(\tau(u)v, w), & \text{ya que } B \text{ es simétrica.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $B(\tau(u)v, w) = 0$  para todos  $u, v, w \in T$  y, dado que  $B$  es no degenerada, se concluye que  $\tau = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 12.** Consideremos ahora el caso en el que  $g^0$  es el álgebra de Lie de todas las transformaciones lineales conformes, es decir,  $g^0 = \mathfrak{co}_L(T, B)$ . En este caso se tiene que, si  $3 \leq \dim T$ ,

$$j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B) \cong T^* \quad \text{y} \quad j^{(2)}\mathfrak{co}_L(T, B) = 0.$$

*Demostración.* Si  $\tau \in j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B)$ , claramente se tiene que

$$B(\tau(u)v, w) + B(v, \tau(u)w) = \mu(\tau(u))B(v, w),$$

para todos  $u, v, w \in T$ .

Toda  $\tau \in j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B)$  da lugar a un elemento de  $T^*$ , a saber,  $u \mapsto 2(\mu \circ \tau)(u)$  (observemos que  $\mu : \text{Hom}(T, T) \rightarrow \mathbb{R}$ ), y la función de  $j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B)$  en  $T^*$  definida como  $\tau \mapsto 2\mu \circ \tau$  es claramente lineal. Es más, es fácil ver que  $\mu \circ \tau = 0$  si, y solo si,  $\tau \in j^{(1)}\mathfrak{o}(T, B)$ , y podemos concluir que dicha asignación es un monomorfismo. Demostremos ahora que esta función también es suprayectiva.

Recordemos que una forma bilineal,  $B$ , como la que estamos considerando, da lugar a un isomorfismo entre  $T$  y  $T^*$  definido como

$$T \ni u \mapsto u^\flat \in T^*,$$

definiendo a  $u^\flat$  como,

$$u^\flat(v) = B(u, v),$$

para todo  $v \in T$ . La correspondiente transformación inversa queda definida como

$$T^* \ni \eta \mapsto \eta^\sharp \in T,$$

donde, para cada  $u \in T$ ,

$$\eta(u) = B(\eta^\sharp, u).$$

Si reemplazamos a  $B$  por  $\mu B$ , para algún  $\mu \in \mathbb{R}^+$ , obtenemos un nuevo isomorfismo entre  $T$  y  $T^*$ , cuya relación con el isomorfismo anterior es

$$T \ni u \mapsto \mu u^\flat \in T^*.$$

Asimismo, se verifica fácilmente que bajo este nuevo isomorfismo,

$$T^* \ni \eta \mapsto \mu^{-1}\eta^\sharp \in T.$$

Este análisis revela que el isomorfismo,

$$\begin{aligned} \varphi : T \otimes T^* &\rightarrow T^* \otimes T \\ u \otimes \eta &\mapsto u^\flat \otimes \eta^\sharp, \end{aligned}$$

es independiente de la clase conforme de  $B$ . Entonces, para cada  $\eta \in T^*$ , usamos esta transformación para definir  $\gamma \in \text{Hom}(T, T \otimes T^*) \cong \text{Hom}(T, \text{Hom}(T, T))$  como

$$\begin{aligned} \gamma(\eta) : T &\rightarrow T \otimes T^* \cong \text{Hom}(T, T) \\ u &\mapsto \frac{1}{2}(u \otimes \eta - \varphi(\eta \otimes u) + \eta(u)\text{id}_T), \end{aligned}$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \gamma(\eta)(u)v &= \frac{1}{2}(u \otimes \eta - \varphi(\eta \otimes u) + \eta(u)\text{id}_T)v \\ &= \frac{1}{2}(\eta(v)u - u^\flat(v)\eta^\sharp + \eta(u)v) \\ &= \frac{1}{2}(B(v, \eta^\sharp)u - B(v, u)\eta^\sharp + B(u, \eta^\sharp)v). \end{aligned} \quad (6)$$

Claramente  $\gamma(\eta)(u)v = \gamma(\eta)(v)u$ . Además, utilizando estos resultados, un cálculo directo muestra que

$$B(\gamma(\eta)(u)v, w) + B(v, \gamma(\eta)(u)w) = \eta(u)B(v, w),$$

de donde concluimos que  $\gamma(\eta) \in j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B)$ . De hecho, es posible demostrar que  $\gamma$  es la transformación inversa a  $\tau \mapsto 2\mu \circ \tau$ , y tenemos que

$$j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B) \cong T^*.$$

Para demostrar que estas transformaciones son una inversa de la otra consideremos  $u \in T$  y  $\eta \in T^*$ . Entonces,

$$\begin{aligned} 2\mu(\gamma(\eta)(u)) &= \mu(\eta(\cdot)u) + \mu(\eta(u)(\cdot)) - \mu(B(u, \cdot)\eta^\sharp) \\ &= \mu(\eta(\cdot)u - B(u, \cdot)\eta^\sharp) + \eta(u). \end{aligned}$$

Ahora, por la definición de  $\mathfrak{co}_L(T, B)$ , sabemos que, para todos  $x, y \in T$ ,

$$\begin{aligned} \mu(\eta(\cdot)u - B(u, \cdot)\eta^\sharp)B(x, y) &= \eta(x)B(u, y) - B(u, x)B(\eta^\sharp, y) \\ &\quad + \eta(y)B(x, u) - B(u, y)B(x, \eta^\sharp) \\ &= \eta(x)B(u, y) - \eta(y)B(u, x) \\ &\quad + \eta(y)B(x, u) - \eta(x)B(u, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que la elección de  $x$  y  $y$  es arbitraria, se sigue que  $\mu(\eta(\cdot)u - B(u, \cdot)\eta^\sharp) = 0$ , es decir,

$$2\mu(\gamma(\eta)(u)) = \eta(u),$$

para todo  $u \in T$ .

Finalmente, consideremos  $\tau \in j^{(2)}\mathfrak{co}_L(T, B)$ , de forma que  $\tau(u) \in j^{(1)}\mathfrak{co}_L(T, B)$  para todo  $u \in T$ . Entonces, para todos  $u, v, x, y \in T$ , se tiene que

$$B(\tau(u)(v)x, y) + B(x, \tau(u)(v)y) = \mu(\tau(u)(v))B(x, y).$$

Notemos que  $\mu(\tau(u)(v))$  es una forma bilineal simétrica en  $u$  y  $v$ , a la que denotaremos como  $\lambda(u, v)$ . Para demostrar que la segunda prolongación es cero basta ver que la forma bilineal,  $\lambda$ , es idénticamente cero, ya que en este caso tendríamos que  $\tau(u)(v) \in j^{(1)}\mathfrak{o}(T, B) = 0$ . Por ser una forma bilineal simétrica, basta ver que  $\lambda(u, u) = 0$  para todo vector. Consideremos dos vectores no isotrópicos,  $u, w \in T$ , tales que  $B(u, w) = 0$ . Entonces,

$$2B(\tau(u)(u)w, w) = B(\tau(u)(u)w, w) + B(w, \tau(u)(u)w) = \lambda(u, u)B(w, w).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 2B(\tau(u)(u)w, w) &= 2B(\tau(u)(w)u, w) \\ &= -2B(u, \tau(u)(w)w) \\ &= -2B(u, \tau(w)(u)w) \\ &= -2B(u, \tau(w)(w)u) \\ &= -\lambda(w, w)B(u, u). \end{aligned}$$

Por ende, para cualquier par de vectores no isotrópicos y ortogonales, se tiene que

$$\lambda(u, u)B(w, w) = -\lambda(w, w)B(u, u).$$

Si  $3 \leq \dim T$ , siempre es posible encontrar un tercer vector no isotrópico y perpendicular a  $u$  y  $w$ , en cuyo caso  $\lambda = 0$ , es decir,  $j^{(2)}\mathfrak{co}_L(T, B) = 0$ .

Si  $\dim T \leq 2$ , no existe dicho vector, es más, en estos casos es posible demostrar que el grupo conforme,  $\mathfrak{co}_L(T, B)$ , tiene una infinidad de prolongaciones no triviales.  $\square$

**Proposición 13.** Dado un espacio vectorial,  $T$ , y una forma bilineal, simétrica y no degenerada,  $B$ , la función  $\mathfrak{o}(T, B) \oplus \mathbb{R}^+ id_T \rightarrow \mathfrak{co}_L(T, B)$  definida como  $(\xi, r) \mapsto \xi + r/2$  (en cuyo caso  $\mu(\xi + r/2) = r$ ), es un isomorfismo. Su función inversa está definida como  $\eta \mapsto (\eta - \mu(\eta)/2, \mu(\eta))$ .

Junto con la proposición anterior, los ejemplos que acabamos de desarrollar muestran que las transformaciones de escala son las responsables de que  $j^{(1)}\mathfrak{o}(T, B) \cong T^*$ . Observese también que de acuerdo al método desarrollado por Sternberg, únicamente existen dos (ver la nota (16)) posibles álgebras planas con  $g^0 = \mathfrak{co}_L(T, B)$ ; a saber,

$$L_{T, \mathfrak{co}_L(T, B), 0} = T \oplus \underbrace{\mathfrak{co}_L(T, B)}_{T^* \otimes T} \quad \text{y} \quad L_{T, \mathfrak{co}_L(T, B)} = T \oplus \underbrace{\mathfrak{co}_L(T, B)}_{T^* \otimes T} \oplus \underbrace{T^*}_{S^2(T^*) \otimes T}.$$

La unicidad de estas dos álgebras se debe a que ningún subespacio propio no trivial de  $g^1 \cong T^*$  es cerrado bajo la acción de  $g^0 = \mathfrak{co}_L(T, B)$  (mediante el corchete), es decir,  $g_1$  tiene estructura de  $g_0$ -módulo izquierdo únicamente en los dos casos que hemos mencionado. Es más, como se detalla a continuación, el álgebra de Lie  $L_{T, \mathfrak{co}_L(T, B), 0}$  resulta ser precisamente el álgebra de Lie de las transformaciones de similitud de  $T$ .

**Nota 14.** A partir de ahora denotaremos al álgebra  $L_{T, \mathfrak{co}_L(T, B)}$  como  $\mathfrak{co}(T, B)$ .

Proseguimos a encontrar las relaciones de conmutación en  $T \oplus \mathfrak{o}(T, B) \oplus T^*$ , centrales para demostrar nuestro objetivo. Comencemos por recordar el siguiente resultado,

**Proposición 15.** Existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre  $\bigwedge^2 T$  y  $\mathfrak{o}(T, B)$ , definido como

$$\bigwedge^2 T \ni u \wedge v \mapsto B(u, \cdot)v - B(v, \cdot)u \in \mathfrak{o}(T, B).$$

Además, bajo este isomorfismo, el corchete de Lie toma la siguiente forma:

$$[u \wedge v, x \wedge y] = B(u, y)x \wedge v + B(y, v)u \wedge x + B(u, x)v \wedge y + B(v, x)y \wedge u, \quad (7)$$

para todos  $u, v, x, y \in T$ .

Omitimos la demostración de esta proposición, ya que consiste únicamente en un cálculo sencillo pero laborioso. En términos de las componentes de cada factor, podemos reescribir el producto cuña entre dos vectores como,

$$u \wedge v = \sum B_{jk}(u^j v^i - v^j u^i) x^k \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde  $B_{jk} = B\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$  y las funciones  $x^k : T \rightarrow \mathbb{R}$  son las proyecciones a la  $k$ -ésima componente.

Nótese que, en términos de sus componentes, la transformación identidad corresponde al campo vectorial

$$id_T = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

asimismo, cada elemento  $u \in T$  da lugar a un campo vectorial constante, a saber,

$$u = \sum u^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Bajo este mismo esquema, usando el isomorfismo entre  $T^*$  y  $j^{(1)}\mathfrak{co}(T, B)$  y usando la igualdad (6), es posible escribir a cualquier elemento del espacio dual como

$$\eta \leftrightarrow \gamma(\eta) = \sum B_{jk} \left( \eta^{\#j} x^k x^i - \frac{1}{2} x^j x^k \eta^{\#i} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Usando estas observaciones y utilizando la ecuación (3), es inmediato comprobar las

siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned}
T \times T : & \quad [u, v] = 0, \\
T \times \mathfrak{o}(T, B) : & \quad [u, v \wedge w] = B(v, u)w - B(w, u)v = v \wedge w(u), \\
T \times \mathbb{R}^+ id_T : & \quad [u, id_T] = u, \\
\mathfrak{o}(T, B) \times \mathfrak{o}(T, B) : & \quad [u \wedge v, x \wedge y] = B(u, y)x \wedge v + B(y, v)u \wedge x \\
& \quad \quad \quad + B(u, x)v \wedge y + B(v, x)y \wedge u, \\
\mathfrak{o}(T, B) \times \mathbb{R}^+ id_T : & \quad [u \wedge v, id_T] = 0, \\
\mathbb{R}^+ id_T \times \mathbb{R}^+ id_T : & \quad [id_T, id_T] = 0, \\
\\
T \times T^* : & \quad [u, \eta] = \eta(u)id_T + u \wedge \eta^\sharp, \\
\mathfrak{o}(T, B) \times T^* : & \quad [u \wedge v, \eta] = \eta(v)(u^\flat)^\sharp - \eta(u)(v^\flat)^\sharp = -u \wedge v(\eta^\sharp), \\
\mathbb{R}^+ id_T \times T^* : & \quad [id_T, \eta] = \eta, \\
T^* \times T^* : & \quad [\eta, \xi] = 0.
\end{aligned}$$

**Nota 16.** Al considerar cualquier elemento de la base de  $T$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , y que  $(\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat = x^i$ , se tiene que

$$x^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^\flat - x^j \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\flat = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^\flat = x^{i\sharp}.$$

Así, puesto que  $\gamma$  es un isomorfismo tenemos que la acción de  $\mathfrak{o}(T, B)$  en cualquier subespacio no trivial de  $T^*$  genera a todo el espacio. Esto prueba la unicidad de las dos álgebras conformes que mencionamos anteriormente.

Proseguimos a demostrar el resultado central de esta sección.

**Proposición 17.** Sea  $\tilde{T}$  un espacio vectorial con dos dimensiones más que  $T$ , dotado de una forma bilineal, simétrica y no degenerada de signatura  $(p+1, q+1)$ ,  $\tilde{B}$ . Además, consideremos un *par hiperbólico*  $\alpha, \beta \in \tilde{T}$ ; es decir, un par de vectores tales que

$$\tilde{B}(\alpha, \alpha) = \tilde{B}(\beta, \beta) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{B}(\alpha, \beta) = 1.$$

De modo que sea posible descomponer a  $\tilde{T}$  en la forma

$$\tilde{T} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha\} \oplus T \oplus \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\beta\},$$

donde la restricción de  $\tilde{B}$  a  $T$  coincide con  $B$ . Entonces, existe un isomorfismo de álgebras de Lie,

$$\mathfrak{o}(\tilde{T}, \tilde{B}) \cong \mathfrak{co}(T, B).$$

Cuando  $3 \leq p + q$  la proposición anterior nos dice que,

$$\mathfrak{co}(p, q) \cong \mathfrak{o}(p + 1, q + 1).$$

*Demostración.* Usando el isomorfismo de la proposición (15) y la distributividad del álgebra exterior respecto a la suma directa, sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}(\tilde{T}, \tilde{B}) &\cong \bigwedge^2 \tilde{T} \cong \bigwedge^2 \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha\} \oplus T \oplus \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\beta\} \\
&\cong \bigoplus_{i+j+k=2} \wedge^i \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha\} \otimes \wedge^j T \otimes \wedge^k \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\beta\} \\
&\cong \alpha \otimes T \oplus \wedge^2 T \oplus \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha \wedge \beta\} \oplus \beta \otimes T^* \\
&\cong \alpha \otimes T \oplus \mathfrak{o}(T, B) \oplus \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha \wedge \beta\} \oplus \beta \otimes T^* \\
&\cong \alpha \wedge T \oplus \mathfrak{o}(T, B) \oplus \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha \wedge \beta\} \oplus \beta \wedge T^*.
\end{aligned}$$

Dada esta descomposición, es inmediato dar un isomorfismo de espacios vectoriales,  $F$ , entre  $\mathfrak{o}(\tilde{T}, \tilde{B})$  y el álgebra plana  $L_{T, \text{co}_L(T, B)}$ , definido entre sus sumandos directos como,

$$\begin{aligned}
F(1_T) &= \alpha \wedge \beta; \\
F(v) &= \alpha \wedge v, \quad \text{si } v \in T; \\
F(\eta) &= \beta \wedge \eta^\sharp, \quad \text{si } \eta \in T^*; \\
F(u \wedge v) &= -u \wedge v, \quad \text{si } u, v \in T, \text{ es decir, si } u \wedge v \in \mathfrak{o}(T, B).
\end{aligned}$$

Con ayuda de la ecuación (7), fácilmente se puede ver que bajo las condiciones de la proposición este es un isomorfismo de álgebras de Lie. Únicamente hay que verificar las relaciones de conmutación en los elementos que involucran a los espacios asociados a  $T$  y  $T^*$ :

- Sean  $u, v \in T$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(u), F(v)] &= [\alpha \wedge u, \alpha \wedge v] = \tilde{B}(\alpha, v)\alpha \wedge u + \tilde{B}(v, u)\alpha \wedge \alpha \\
&\quad + \tilde{B}(\alpha, \alpha)u \wedge v + \tilde{B}(u, \alpha)v \wedge \alpha \\
&= 0 \\
&= F[u, v].
\end{aligned}$$

- Sean  $u, v, w \in T$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(u), F(v \wedge w)] &= [\alpha \wedge u, w \wedge v] = \tilde{B}(\alpha, v)w \wedge u + \tilde{B}(v, u)\alpha \wedge w \\
&\quad + \tilde{B}(\alpha, w)u \wedge v + \tilde{B}(u, w)v \wedge \alpha \\
&= \tilde{B}(v, u)\alpha \wedge w - \tilde{B}(u, w)\alpha \wedge v \\
&= \tilde{B}(v, u)F(w) - \tilde{B}(u, w)F(v) \\
&= F[u, v \wedge w].
\end{aligned}$$

- Sea  $u \in T$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(u), F(id_T)] &= [\alpha \wedge u, \alpha \wedge \beta] = \tilde{B}(\alpha, \beta)\alpha \wedge u + \tilde{B}(\beta, u)\alpha \wedge \alpha \\
&\quad + \tilde{B}(\alpha, \alpha)u \wedge \beta + \tilde{B}(u, \alpha)\beta \wedge \alpha \\
&= \tilde{B}(\alpha, \beta)\alpha \wedge u \\
&= \alpha \wedge u \\
&= F[u, id_T].
\end{aligned}$$

- Sean  $u \in T$  y  $\eta \in T^*$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(u), F(\eta)] &= [\alpha \wedge u, \beta \wedge \eta^\sharp] = \widetilde{B}(\alpha, \eta^\sharp)\beta \wedge u + \widetilde{B}(\eta^\sharp, u)\alpha \wedge \beta \\
&\quad + \widetilde{B}(\alpha, \beta)u \wedge \eta^\sharp + \widetilde{B}(u, \beta)\eta^\sharp \wedge \alpha \\
&= \widetilde{B}(\eta^\sharp, u)\alpha \wedge \beta + \widetilde{B}(\alpha, \beta)u \wedge \eta^\sharp \\
&= \eta(u)\alpha \wedge \beta + u \wedge \eta^\sharp \\
&= F[u, \eta].
\end{aligned}$$

- Sean  $\eta \in T^*$  y  $u, v \in T$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(u \wedge v), F(\eta)] &= [v \wedge u, \beta \wedge \eta^\sharp] = \widetilde{B}(v, \eta^\sharp)\beta \wedge u + \widetilde{B}(\eta^\sharp, u)v \wedge \beta \\
&\quad + \widetilde{B}(v, \beta)u \wedge \eta^\sharp + \widetilde{B}(u, \beta)\eta^\sharp \wedge v \\
&= \widetilde{B}(v, \eta^\sharp)\beta \wedge u - \widetilde{B}(\eta^\sharp, u)\beta \wedge v \\
&= \eta^\sharp(v)\beta \wedge (u^\flat)^* - \eta^\sharp(u)\beta \wedge (v^*)^* \\
&= \eta^\sharp(v)\beta \wedge u - \eta^\sharp(u)\beta \wedge v \\
&= F[u \wedge v, \eta].
\end{aligned}$$

- Sea  $\eta \in T^*$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(id_T), F(\eta)] &= [\alpha \wedge \beta, \beta \wedge \eta^\sharp] = \widetilde{B}(\alpha, \eta^\sharp)\beta \wedge \beta + \widetilde{B}(\eta^\sharp, \beta)\alpha \wedge \beta \\
&\quad + \widetilde{B}(\alpha, \beta)\beta \wedge \eta^\sharp + \widetilde{B}(\beta, \beta)\eta^\sharp \wedge \alpha \\
&= \widetilde{B}(\alpha, \beta)\beta \wedge \eta^\sharp \\
&= \beta \wedge \eta^\sharp \\
&= F[id_T, \eta].
\end{aligned}$$

- Sean  $\eta, \xi \in T^*$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
[F(\eta), F(\xi)] &= [\beta \wedge \eta^\sharp, \beta \wedge \xi^\sharp] = \widetilde{B}(\beta, \xi^\sharp)\beta \wedge \eta^\sharp + \widetilde{B}(\xi^\sharp, \eta^\sharp)\beta \wedge \beta \\
&\quad + \widetilde{B}(\beta, \beta)\eta^\sharp \wedge \xi^\sharp + \widetilde{B}(\eta^\sharp, \beta)\xi^\sharp \wedge \beta \\
&= 0 \\
&= F[\eta, \xi].
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $F$  es un isomorfismo de álgebras de Lie. □

Así, hemos demostrado que el álgebra de Lie de los campos vectoriales cuyos flujos integrales preservan, hasta un factor escalar positivo, una forma bilineal simétrica y no degenerada,  $B$ , de signatura  $(p, q)$ , al que también podemos denotar como  $\mathfrak{co}(p, q)$ , es isomorfa al álgebra de Lie de transformaciones ortogonales en una extensión de  $\widetilde{T}$  de  $T$  con signatura  $(p+1, q+1)$ . Es decir,

$$\mathfrak{o}(p+1, q+1) \cong \mathfrak{co}(p, q).$$

### 3. El isomorfismo $\mathfrak{o}(4, 2) \cong \mathfrak{su}(2, 2)$ y la exponencial de los campos que preservan la estructura conforme del espacio-tiempo de Minkowski

A lo largo de esta primera parte del capítulo seguiremos trabajando con un espacio vectorial,  $T$ , donde está definida una forma bilineal, simétrica, y no degenerada,  $B$ , de signatura  $(p, q)$ , donde  $p + q = n$ . Además, por brevedad, cambiaremos nuestra notación de la base de  $T$ , y denotaremos a la base que lleva a  $B$  a su forma canónica como  $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$ , donde  $B(e_i, e_i) = 1$  si  $1 \leq i \leq p$  y  $B(e_i, e_i) = -1$  en los demás casos. Asimismo, denotaremos al álgebra de Clifford de este espacio ya sea como  $\text{Cl}(T, B)$  o  $\text{Cl}(p, q)$ , indistintamente.

A continuación presentamos algunos aspectos elementales de las álgebras de Clifford. Esta exposición está fuertemente basada en [7] y [3], que dan estudios detallados sobre álgebras de Clifford y temas relacionados, y donde el lector interesado puede encontrar los detalles y pruebas que aquí omitimos.

En general, un álgebra de Clifford es un anillo no conmutativo bajo su multiplicación, en el cual no todo elemento tiene un inverso multiplicativo. Denotemos como  $\text{Cl}^\times(T, B)$  al grupo de unidades de  $\text{Cl}(T, B)$ , definido de la siguiente manera,

$$\text{Cl}^\times(T, B) = \{c \in \text{Cl}(T, B) : \exists c^{-1} \in \text{Cl}(T, B) \text{ tal que } cc^{-1} = c^{-1}c = 1_{\text{Cl}}\}.$$

Este grupo contiene varios subgrupos interesantes con mucha información geométrica del espacio vectorial  $T$ . En particular, contiene a todos los elementos  $v \in T$  tales que  $B(v, v) \neq 0$ , pues fácilmente se ve que en ese caso,  $v^{-1} = B(v, v)^{-1}v$ . El grupo de unidades actúa de forma natural como automorfismos del álgebra en su grupo de transformaciones invertibles mediante su *representación torcida*, que se define como

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}} : \text{Cl}^\times(T, B) &\rightarrow \text{GL}(\text{Cl}(T, B)) \\ c &\mapsto \widetilde{\text{Ad}}_c \end{aligned}$$

donde  $\widetilde{\text{Ad}}_c(x) = \Theta(c)xc^{-1}$ , siendo  $\Theta : \text{Cl}(T, B) \rightarrow \text{Cl}(T, B)$  el morfismo que extiende a la transformación lineal  $\theta : T \rightarrow T$  definida como  $\theta(v) = -v$ , para todo  $v \in T$ .

**Nota 18.** De hecho, la transformación lineal  $\Theta$  define una  $\mathbb{Z}_2$ -graduación en el álgebra de Clifford al considerar los subespacios asociados a sus dos valores propios, dada como  $\text{Cl}(T, B) = \text{Cl}_0(T, B) \oplus \text{Cl}_1(T, B)$ .

Es inmediato comprobar que  $\widetilde{\text{Ad}}_{c_1} \circ \widetilde{\text{Ad}}_{c_2} = \widetilde{\text{Ad}}_{c_1c_2}$  para todos  $c_1, c_2 \in \text{Cl}^\times(T, B)$ . Observemos que el grupo  $\text{Cl}^\times(T, B)$  hereda la  $\mathbb{Z}_2$ -graduación de  $\text{Cl}(T, B)$  vía  $\text{Cl}_i^\times(T, B) = \text{Cl}^\times(T, B) \cap \text{Cl}_i(T, B)$ , con  $i = 0, 1$ . En particular, si  $c \in \text{Cl}^\times(T, B)$ , podemos escribir  $c = c_0 + c_1$  con  $c_i \in \text{Cl}_i^\times(T, B)$  ( $i = 0, 1$ ) y claramente  $\Theta(c) = c_0 - c_1$ .

Como ya hemos visto,  $T \subseteq \text{Cl}_1(T, B)$  y todo  $v \in T$  con  $B(v, v) \neq 0$  pertenece a  $\text{Cl}_1^\times(T, B)$ . En particular, para todo  $u \in T$  se tiene que,

$$\widetilde{\text{Ad}}_v(u) = u - 2 \frac{B(u, v)}{B(v, v)}v$$

Esto es, las transformaciones  $\widetilde{\text{Ad}}_v$  con  $B(v, v) \neq 0$ , dejan al subespacio  $T \subset \text{Cl}(T, B)$  invariante y, de hecho,  $\widetilde{\text{Ad}}_v|_T$  es la reflexión generada por el vector  $v$ , que denotaremos como  $\rho_v$ . Este preámbulo motiva la siguiente,

**Proposición 19.** Sea  $\Gamma(T, B) \subseteq \text{Cl}^\times(T, B)$  el subgrupo que estabiliza al subespacio  $T \subseteq \text{Cl}(T, B)$ ; es decir,

$$\Gamma(T, B) = \{a \in \text{Cl}^\times(T, B) : \widetilde{\text{Ad}}_a|_T \in GL(T)\}.$$

Entonces, existe un epimorfismo de grupos,

$$\begin{aligned} R : \Gamma(T, B) &\rightarrow O(T, B) \\ a &\mapsto \widetilde{\text{Ad}}_a 1_T \end{aligned}$$

cuyo kernel es  $\mathbb{R}^\times 1_{\text{Cl}} = \{\lambda 1_{\text{Cl}} | 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

A éste subgrupo se le conoce como el grupo de Clifford del álgebra. La suprayectividad de  $R$  es inmediata utilizando el Teorema de Cartan-Dieudonné, cuya prueba se puede encontrar en [3], y que dice que todo elemento del grupo ortogonal,  $g \in O(T, B)$ , puede escribirse como la composición de  $r \leq \dim T$  reflexiones, esto es,  $g = \rho_{v_1} \circ \dots \circ \rho_{v_r}$ .

Para ver que en efecto  $\ker R = \mathbb{R}^\times 1_{\text{Cl}}$ , consideremos  $a \in \ker R$ , entonces  $\widetilde{\text{Ad}}_a(x) = \Theta(a)xa^{-1} = x$ , es decir,  $\Theta(a)x = xa$  para toda  $x \in T$ . Si  $a = a_0 + a_1$ , entonces,

$$a_0x = xa_0 \tag{8}$$

$$a_1x = -xa_1. \tag{9}$$

Sea  $\{e_i\}$  una base ortonormal de  $V$ , entonces podemos escribir  $a_0 = b_0 + e_1c_1$ , donde  $b_0 \in \text{Cl}_0(T, B)$  y  $c_1 \in \text{Cl}_1(T, B)$  no tienen como factor a  $e_1$ . Si hacemos  $x = e_1$  en (8), se llega a que  $b_0 + e_1c_1 = e_1b_0e_1^{-1} + e_1^2c_1e_1^{-1} = b_0 - e_1c_1$ . Por lo tanto,  $c_1 = 0$ . Utilizando el mismo argumento para el resto de la base, se llega a que  $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ . Se puede aplicar el mismo argumento a  $a_1$ , sin embargo, dado que  $a_1 \in \text{Cl}_1(T, B)$ , se llega a que  $a_1 = 0$ . Se sigue que, por ser  $a = a_0$  invertible,  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , es decir,  $\ker R = \mathbb{R}^\times 1_{\text{Cl}}$ .

La proposición anterior es equivalente a decir que la siguiente sucesión de morfismos de grupos es exacta,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^\times 1_{\text{Cl}} \longrightarrow \Gamma(T, B) \xrightarrow{R} O(T, B) \longrightarrow 0.$$

Dentro del grupo de unidades existen dos grupos de particular importancia,

**Definición 20.** El subgrupo  $\text{Pin}(T, B) \subseteq \Gamma(T, B)$  es el conjunto,

$$\text{Pin}(T, B) = \{v_1 \cdots v_r \in \text{Cl}^\times(T, B) | v_i \in T \text{ y } B(v_i, v_i) = \pm 1 \forall 1 \leq i \leq r\}$$

Dado que cada  $v_i \in T$  con  $B(v_i, v_i) \neq 0$  está en el grupo de Clifford y  $\widetilde{\text{Ad}}_{v_i} = \rho_{v_i}$ , se cumple que  $\text{Pin}(T, B) \subseteq \Gamma(T, B)$ .

Definimos el grupo espinorial como,  $\text{Spin}(T, B) = \text{Pin}(T, B) \cap \text{Cl}_0(T, B)$ .

Es inmediato que las representaciones adjunta y adjunta torcida coinciden al restringirse al grupo espinorial. Asimismo, al restringir el dominio del epimorfismo  $R$  de la sección anterior a los subgrupos  $\text{Pin}(T, B)$  y  $\text{Spin}(T, B)$ , se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 21.** Sea  $V$  un espacio vectorial real dotado de una geometría  $B$  con signatura  $(p, q)$ . Entonces,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}(T, B) \xrightarrow{R} O(T, B) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos y también lo es,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}(T, B) \xrightarrow{R} SO(T, B) \longrightarrow 0.$$

Esta proposición nos dice que en el caso real, los grupos  $\text{Pin}(T, B)$  y  $\text{Spin}(T, B)$  son cubiertas dobles de los grupos  $O(T, B)$  y  $SO(T, B)$ , respectivamente, donde la función cubriente es  $R$  restringida a los dominios correspondientes. Que en la segunda sucesión la imagen de  $R$  esté contenida en el subgrupo  $SO(T, B)$  de  $O(T, B)$  resulta del hecho que la imagen es una composición de un número par de reflexiones. En ambas sucesiones,  $\ker R = \mathbb{Z}_2$  porque en general  $R(a) = R(-a)$  para todo  $a \in \Gamma(T, B)$ .

**Nota 22.** Cuando la geometría  $B$  tenga signatura  $(p, q)$ , escribiremos al grupo  $\text{Pin}(T, B)$  simplemente como  $\text{Pin}(p, q)$  y al grupo espinorial como  $\text{Spin}(p, q)$ .

**Nota 23.** De hecho, el grupo de unidades de un álgebra de Clifford, así como sus grupos  $\text{Pin}$  y  $\text{Spin}$  son grupos de Lie. En el caso del grupo de unidades, su álgebra de Lie es el álgebra de Clifford con el bracket definido mediante la multiplicación del álgebra.

### 3.1. Estructuras complejas y el elemento $\Gamma \in \text{Cl}(p, q)$

Sea  $\{e_i\}_{i=1}^n$  la base de  $T$  que lleva a la matriz asociada a la geometría  $B$ , de signatura  $(p, q)$ , en su forma canónica. Definimos el elemento

$$\Gamma = e_1 e_2 \cdots e_n \in \text{Cl}(T, B),$$

que, como consecuencia inmediata de las propiedades del álgebra de Clifford, satisface,

$$v\Gamma = (-1)^{n-1}\Gamma v, \quad \text{para todo } v \in T \subseteq \text{Cl}(T, B), \quad \text{y} \quad \Gamma^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^q 1_{\text{Cl}},$$

Recordemos ahora la siguiente,

**Definición 24.** Una *estructura compleja* en un espacio vectorial real,  $T$ , es un endomorfismo,  $J \in \text{End } T$ , tal que  $J \circ J = -id_T$ .

Se puede demostrar que en espacios vectoriales reales de dimensión impar, no existe estructura compleja alguna. Y por otra parte, que en espacios vectoriales reales de dimensión par, siempre existe una estructura compleja.

Una estructura compleja en un espacio vectorial permite redefinir a éste como un espacio vectorial complejo. Para esto se define la multiplicación por escalares complejos de la siguiente manera, sean  $v \in T$ ,  $a + ib \in \mathbb{C}$  y  $J$  una estructura compleja en  $T$ . Entonces,  $(a + ib)v := av + bJ(v)$ . Al espacio vectorial complejo que se obtiene de  $T$  y su estructura compleja  $J$  lo denotaremos como  $T_J$ . Claramente si la dimensión real de  $T$  es  $2n$ , entonces la dimensión compleja de  $T_J$  será  $n$  y como espacios vectoriales reales,  $V$  y  $V_J$  son isomorfos.

Por otro lado, si  $W$  es un espacio vectorial complejo de dimensión compleja  $n$  y consideramos el endomorfismo  $J$  de  $W$  definido como  $J(w) = iw$ , para todo  $w \in W$ , entonces, viendo a  $W$  como un espacio vectorial real de dimensión  $2n$ ,  $J$  será precisamente una estructura compleja en  $W$ .

Si consideramos a los endomorfismos de  $T$  y a los de  $T_J$  sobre los reales, claramente la estructura de ambos espacios de funciones es la misma y se tiene que  $\text{End}_{\mathbb{R}} T \cong \text{End}_{\mathbb{R}} T_J$ . Es más, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 25.** Sea  $T$  un espacio vectorial real de dimensión par,  $2n$ , y sea  $J$  una estructura compleja en él. Entonces,

$$\text{End}_{\mathbb{R}} T = \{f \in \text{End}_{\mathbb{R}} T : f \circ J - J \circ f = 0\} \oplus \{g \in \text{End}_{\mathbb{R}} T : g \circ J + J \circ g = 0\}.$$

Además, existe un espacio vectorial complejo  $W$  de dimensión compleja  $n$ , isomorfo a  $T$  como espacio vectorial real, y en el cual multiplicar por  $i = \sqrt{-1}$  corresponde exactamente a aplicar la transformación lineal  $J$  en  $T$ . De hecho,

$$\begin{aligned} \{f \in \text{End}_{\mathbb{R}} T : f \circ J - J \circ f = 0\} &\leftrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} W \\ \{g \in \text{End}_{\mathbb{R}} T : g \circ J + J \circ g = 0\} &\leftrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} W \circ K \end{aligned}$$

siendo  $K : W \rightarrow W$  una transformación  $\mathbb{C}$ -antilineal invertible fija.

Es inmediato convencerse de que bajo las identificaciones que hemos discutido,  $\mathbb{C}^n$ , pensado como espacio vectorial real, es precisamente  $\mathbb{R}^{2n}$  con la estructura compleja inducida por multiplicar por  $i = \sqrt{-1}$ . En este trabajo seguiremos la convención de identificar a  $(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$  con  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$  y de esta forma, la acción de la estructura compleja  $J$  en  $\mathbb{R}^{2n}$  es precisamente

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n).$$

Es decir, siempre podemos elegir una base de  $\mathbb{R}^{2n}$  respecto a la cual  $J$  se escribe como,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{n \times n} \\ 1_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 26.** Sea  $T$  un espacio vectorial real de dimensión par,  $\dim T = 2m$  y sea  $\gamma : \text{Cl}(p, q) \rightarrow \text{End } W$  una representación de  $\text{Cl}(p, q)$ . Entonces,

1. Si  $\Gamma^2 = 1$  y  $\gamma(\Gamma) \neq id_W$ , entonces,  $\gamma(\Gamma)$  induce una descomposición en  $W$  de la forma  $W_+ \oplus W_-$  correspondiente a los valores propios  $\pm 1$  del polinomio mínimo de  $\gamma(\Gamma)$ . Además, dado que para todo  $v \in T$ ,  $v\Gamma = -\Gamma v$ , entonces  $\gamma(v)$  actúa en  $W$  intercambiando  $W_{\pm}$  por  $W_{\mp}$ .
2. Si  $(p - q)/2$  es un entero impar, entonces  $\Gamma^2 = -1_{\text{Cl}}$  y  $\gamma(\Gamma)^2 = -id_W$ . Por lo tanto,  $\gamma(\Gamma)$  define una estructura compleja en  $W$ . Además, dado que para todo  $v \in T$ ,  $v\Gamma = -\Gamma v$ , se sigue que, para cada  $v \in T \subset \text{Cl}(p, q)$ ,  $\gamma(v) : W \rightarrow W$  es una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal que anticonmuta con  $\gamma(\Gamma)$ .

### 3.2. Realizaciones de $\text{Cl}(3, 1)$ y $\text{Cl}(4, 2)$

En [2] estudiamos detenidamente la forma de obtener las respectivas realizaciones de  $\text{Cl}(p + 2, p)$ , con  $p = 1$  y  $p = 2$ , en  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{2p} \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{2p} \circ K_p$ , con funciones  $K_p : \mathbb{C}^{2p} \rightarrow \mathbb{C}^{2p}$  antilineales e invertibles que elegimos convenientemente en cada caso. El procedimiento que seguimos en dichos casos es casi completamente genérico, por este motivo omitiremos algunos de los pasos que desarrollamos con suficiente detalle en dicho trabajo. Ahí, utilizamos el isomorfismo

$$\text{Cl}(p + 2, p) \cong \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2p+1} \cong \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{p+1} \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{p+1} \circ K_p,$$

siendo  $K_p : \mathbb{C}^{p+1} \rightarrow \mathbb{C}^{p+1}$  una transformación antilineal e invertible fija. Para determinar unívocamente dichas realizaciones impusimos dos condiciones: primero, usando el isomorfismo entre  $\mathbb{R}^{2^{p+1}}$  y  $\mathbb{C}^{p+1}$ , que la función asociada a la multiplicación por  $i = \sqrt{-1}$  correspondiera a la transformación lineal  $\mathbb{R}^{2^{p+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{2^{p+1}}$ , asociada al elemento  $\Gamma = e_1 e_2 \cdots e_n$  de  $\text{Cl}(p+2, p)$ . Finalmente, para fijar la realización, se observó que la aplicación de Clifford  $\mathbb{R}^{2^{p+1}} \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{p+1} \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{p+1} \circ K_p$  tiene que contener a su imagen en el sumando directo  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{p+1} \circ K_p$ , ya que todo vector  $v$  de  $\mathbb{R}^{2^{p+1}}$  satisface la ecuación  $\Gamma v = -v \Gamma$  en  $\text{Cl}(p+2, p)$ .

En esta sección resumimos los resultados relacionados con las realizaciones de las álgebras de Clifford  $\text{Cl}(3, 1)$  y  $\text{Cl}(4, 2)$  que se obtienen con el método que acabamos de describir en los espacios  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \kappa$  y  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4 \circ K$ , respectivamente, donde  $\kappa$  y  $K$  son funciones antilineales e invertibles fijas. Referimos al lector interesado en ahondar en el uso de estas realizaciones en física a [11].

Comenzamos por fijar la función antilineal e invertible,  $\kappa : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Para la realización del espacio tiempo de Minkowski consideramos una base  $\{u_1, u_2\}$  de  $\mathbb{C}^2$ , que mantendremos fija a lo largo de esta sección. Así, definimos  $\kappa$  de forma que

$$\kappa(u_1) = u_2, \quad \text{y} \quad \kappa(u_2) = -u_1.$$

Al ser  $\kappa$  antilineal,  $\kappa(zu_j) = \bar{z} \kappa(u_j)$  para cualquier  $z \in \mathbb{C}$  y  $j = 1$  o  $2$ . En particular, la versión matricial de  $\kappa$  es,

$$\kappa \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Esta elección de  $\kappa$  guarda una interesante relación con los elementos de  $\mathbb{C}(2) \cong \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ :

**Proposición 27.** Sean  $\kappa : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  la transformación antilineal e invertible que acabamos de definir y  $X \in \mathbb{C}(2) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ , una transformación lineal arbitraria. Entonces,

$$\kappa X \kappa = (-X^*)^a,$$

donde, para cualquier matriz  $Y \in \mathbb{C}(2)$ , la matriz  $Y^a$  es su matriz adjunta, definida por vía de la regla de Cramer, de forma que  $Y Y^a = Y^a Y = \det Y 1_{2 \times 2}$ .

Recordamos entonces que,

$$\mathfrak{u}(2) = \{X \in \mathbb{C}(2) \mid X^* = -X\} = \left\{ X \in \mathbb{C}(2) \mid X = i \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \right\},$$

de manera que si  $X, Y \in \mathfrak{u}(2)$ , se tiene que

$$\kappa X \kappa = X^a \quad \text{y} \quad \kappa(iY) \kappa = -iY^a.$$

Observamos también que  $\mathfrak{u}(2)$  es isomorfo como espacio vectorial real al espacio-tiempo de Minkowski, ya que sus dimensiones coinciden y el determinante,  $\det(X)$  para  $X \in \mathfrak{u}(2)$ , coincide con la forma cuadrática asociada  $B$  cuando  $X$  lo vemos como el vector  $t e_0 + x e_1 + y e_2 + z e_3$ ; ambas expresiones dan por resultado  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ . Luego, sus álgebras de Clifford son isomorfas. Al considerar las matrices de Pauli como base de  $\mathfrak{u}(2)$ ,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

el isomorfismo entre  $\mathfrak{u}(2)$  y el espacio-tiempo de Minkowski es simplemente,

$$\mathfrak{u}(2) \ni t\sigma_0 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \leftrightarrow te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^{3,1}.$$

Con estas observaciones se demostró la siguiente,

**Proposición 28.** La función lineal  $\gamma : \mathfrak{u}(2) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \kappa$ , definida por  $\gamma(X) = X\kappa$ , es de Clifford y se extiende a un isomorfismo de álgebras

$$\text{Cl}(3, 1) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \kappa.$$

Para ver que es de Clifford, observamos que  $(X\kappa)^2 = X(\kappa X\kappa) = XX^a = (\det X)1_{2 \times 2}$  y para demostrar el resto, se utilizan las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \sigma_0^a &= \sigma_0 & \sigma_j^a &= -\sigma_j \\ (i\sigma_0)^a &= i\sigma_0 & (i\sigma_j)^a &= -i\sigma_j, \end{aligned}$$

que nos serán útiles más adelante en el capítulo. Entonces, por ejemplo, si consideramos la base de  $\mathfrak{u}(2)$  descrita previamente, tendremos que,

$$\begin{aligned} \Gamma = e_0e_1e_2e_3 &\mapsto (i\sigma_0\alpha)(i\sigma_1\alpha)(i\sigma_2\alpha)(i\sigma_3\alpha) \\ &= i\sigma_0(\alpha i\sigma_1\alpha)i\sigma_2(\alpha i\sigma_3\alpha) \\ &= \sigma_0\sigma_1^a\sigma_2\sigma_3^a \\ &= \sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ &= i\sigma_0, \end{aligned}$$

que es justamente la condición que buscábamos: que el elemento  $\Gamma = e_0e_1e_2e_3$  bajo la realización del álgebra de Clifford se transformara en multiplicar por  $i = \sqrt{-1}$ . Es fácil comprobar que los elementos de la base de  $\text{Cl}(3, 1)$  se transforman de la siguiente manera, si  $(i, j, k)$  es una permutación par de  $(1, 2, 3)$ :

$$\begin{aligned} 1_{\text{Cl}} &\mapsto \sigma_0 \\ e_\mu &\mapsto i\sigma_\mu\alpha \\ e_{0i} &\mapsto \sigma_i \\ e_{ij} &\mapsto i\sigma_k \\ e_{123} &\mapsto -\sigma_0\alpha \\ e_{0ij} &\mapsto -\sigma_k\alpha \\ \Gamma &\mapsto i\sigma_0. \end{aligned}$$

Observemos que los elementos cuadráticos del álgebra de Clifford  $\text{Cl}(3, 1)$ ,  $\{e_{0i}, e_{ij}\}$  se transforman en los generadores de las matrices complejas de  $2 \times 2$  sin traza; éstas son, las generadas por  $\{\sigma_k, i\sigma_k\}_{k=1,2,3}$ ; en otras palabras, en el espacio  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . El subespacio complementario a  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}(2)$ , es el subespacio real de dimensión 2 generado por  $\{\sigma_0, i\sigma_0\}$ . Queda claro que esto genera completamente las transformaciones  $\mathbb{C}$ -lineales  $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}(2)$ .

Por otro lado, el subespacio de las transformaciones  $\mathbb{C}$ -antilineales  $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) \circ \kappa \cong \mathbb{C}(2)\kappa$  está generado por  $\{i\sigma_\mu\alpha\}$  que es la imagen de  $\mathbb{R}^{3,1} \cong \mathfrak{u}(2)$  y por  $\{\sigma_\mu\kappa\}$ , que es la imagen de los elementos cúbicos  $\{e_{123}, e_{0ij}\}$  en  $\text{Cl}(3, 1)$ .

Para encontrar la realización de  $\text{Cl}(4, 2)$  primero definimos la función antilineal e invertible que le corresponde,  $K : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ , en términos de la función  $\kappa : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  que acabamos de definir; fijamos una base  $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{C}^4$  para la cual

$$\begin{aligned} \kappa(u_1) &= u_2 & \kappa(v_1) &= v_2 \\ \kappa(u_2) &= -u_1 & \kappa(v_2) &= -v_1. \end{aligned} \quad \text{y}$$

Entonces, definimos  $K$  como el operador antilineal diagonal:

$$K = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

en particular,

$$K \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \\ -\bar{z}_4 \\ \bar{z}_3 \end{pmatrix}.$$

Para definir el resto de la realización observemos que al completar la base canónica de  $\mathbb{R}^{3,1}$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^{4,2}$ , a saber  $\{e_-, e_+, e_\mu\}$ , donde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , y  $B(e_\pm, e_\pm) = \pm 1$ , se tiene que

$$\mathbb{R}^{4,2} \cong \text{Span}\{e_-\} \oplus \mathbb{R}^{3,1} \oplus \text{Span}\{e_+\},$$

que a su vez podemos identificar con  $\text{Span}\{e_-\} \oplus \mathfrak{u}(2) \oplus \text{Span}\{e_+\}$ . Así, tenemos la siguiente,

**Proposición 29.** La función lineal  $\gamma : \text{Cl}(4, 2) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4 \oplus \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4 \circ K$  definida en  $\mathbb{R}^{4,2} \cong \text{Span}\{e_-\} \oplus \mathfrak{u}(2) \oplus \text{Span}\{e_+\}$  como

$$\gamma(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^a \end{pmatrix} K, \quad \text{cuando } X \in \mathfrak{u}(2) \subseteq \mathbb{R}^{4,2}, \quad \text{y} \quad \gamma(e_\pm) = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ \mp 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} K.$$

Se extiende a un isomorfismo de álgebras de Clifford.

Motivados por la descomposición dada en el capítulo anterior, es posible descomponer a  $\mathbb{R}^{4,2}$  en términos de  $\mathfrak{u}(2)$  y un par hiperbólico, a saber,

$$\alpha = \frac{e_+ + e_-}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{e_+ - e_-}{\sqrt{2}},$$

de forma que  $B(\alpha, \beta) = 1$  y  $B(\alpha, \alpha) = B(\beta, \beta) = 0$  y en cuyo caso,

$$\mathbb{R}^{4,2} \cong \text{Span}\{\alpha\} \oplus \mathfrak{u}(2) \oplus \text{Span}\{\beta\}.$$

En nuestra realización anterior, las matrices asociadas a estos elementos son:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K \quad \text{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} K.$$

### 3.3. El isomorfismo entre $\mathfrak{o}(4, 2)$ y $\mathfrak{su}(2, 2)$ .

Sabemos que, como espacios vectoriales, es posible identificar a  $\wedge^2 T \cong \mathfrak{o}(T, B)$  con el subespacio definido por el producto de orden dos del álgebra de Clifford. En términos de nuestra base, esto quiere decir que,

$$\text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_i e_j\}_{i < j} \cong \wedge^2 T.$$

Explícitamente elegimos el isomorfismo mediante

$$e_i e_j \mapsto 2e_i \wedge e_j,$$

cuya función inversa es

$$e_i \wedge e_j \mapsto \frac{1}{4}[e_i, e_j],$$

donde el corchete está definido mediante la multiplicación del álgebra de Clifford. En el caso de la base, y más generalmente para vectores mutuamente ortogonales, esta última expresión se reduce a  $\frac{1}{4}[e_i, e_j] = \frac{1}{4}(e_i e_j - e_j e_i) = \frac{1}{4}(2e_i e_j - 2B(e_i, e_j)) = \frac{1}{2}e_i e_j$ , como era de esperarse.

**Nota 30.** Los factores escalares en ambas expresiones son de origen geométrico, de acuerdo a Lawson y Michelsohn, y no daremos explicación de ellos.

De hecho, es posible demostrar que, al ser el grupo  $\text{Spin}(T, B)$  un subgrupo de Lie del grupo de unidades del álgebra de Clifford, la función inducida por la representación adjunta torcida entre el grupo espinorial y el grupo ortogonal da lugar precisamente al isomorfismo de álgebras de Lie,  $\mathfrak{spin}(T, B) \cong \wedge^2 T$ , acabamos de definir.

Este isomorfismo yace, junto con las realizaciones de  $\text{Cl}(3, 1)$  y  $\text{Cl}(4, 2)$ , en la base de este capítulo, ya que nos da una representación matricial del álgebra  $\mathfrak{o}(4, 2) \cong \mathfrak{co}(3, 1)$  en la cual podremos identificar precisamente los campos vectoriales de diferentes órdenes. Calculemos dicha representación:

- Observemos que

$$T \ni v \leftrightarrow \alpha \wedge v \leftrightarrow \frac{1}{4}[\alpha, v] = \frac{1}{2}\alpha v,$$

donde,

$$\frac{1}{2}\alpha v = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^a \end{pmatrix} K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\boxed{v \leftrightarrow \alpha \wedge v \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

es decir que podemos identificar al conjunto de todas las matrices de esta forma con las traslaciones.

- Observemos que

$$1_T \leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \frac{1}{4}[\alpha, \beta],$$

donde,

$$\frac{1}{4}[\alpha, \beta] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\boxed{1_T \leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

es decir que podemos identificar a las traslaciones con el espacio generado por dicha matriz.

- Para encontrar el isomorfismo en  $\mathfrak{o}(3, 1)$  nos restringiremos a los elementos de la base. Consideremos  $e_\mu, e_\nu \in T$ , con  $\mu \neq \nu$ , ambos con valores entre 0 y 3, entonces,

$$\mathfrak{o}(3, 1) \ni e_\mu \wedge e_\nu \leftrightarrow e_\nu \wedge e_\mu \leftrightarrow \frac{1}{4}[\sigma_\nu, \sigma_\mu],$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[\sigma_\mu, \sigma_\nu] &= \frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \sigma_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\nu^a \end{pmatrix} K - \begin{pmatrix} \sigma_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\nu^a \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \end{pmatrix} K \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\nu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\nu^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\mu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} \sigma_\mu \sigma_\nu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \sigma_\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_\nu \sigma_\mu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\nu^a \sigma_\mu \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma_\mu \sigma_\nu^a - \sigma_\nu \sigma_\mu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \sigma_\nu - \sigma_\nu^a \sigma_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En donde existen esencialmente dos posibilidades:

1. Si  $\mu \neq 0$  y  $\nu \neq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma_\mu \sigma_\nu^a - \sigma_\nu \sigma_\mu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \sigma_\nu - \sigma_\nu^a \sigma_\mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \sigma_\mu & 0 \\ 0 & -\sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \sigma_\mu \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} [\sigma_\mu, \sigma_\nu] & 0 \\ 0 & [\sigma_\mu, \sigma_\nu] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mu$  y  $\nu$  son los primeros dos índices de una permutación par de  $(1, 2, 3)$ , en otras palabras, que existe  $\lambda \neq 0$ , para el cual  $[\sigma_\mu, \sigma_\nu] = 2i\sigma_\lambda$ , en cuyo caso llegamos a que,

$$\frac{1}{4}[e_\nu, e_\mu] = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sigma_\lambda & 0 \\ 0 & i\sigma_\lambda \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sigma_\lambda & 0 \\ 0 & -(i\sigma_\lambda)^* \end{pmatrix},$$

ya que  $\sigma_\lambda^* = \sigma_\lambda$  para todo  $\lambda = 1, 2$ , o  $3$ .

2. Por otro lado, si  $\mu = 0$ , pero  $\nu \neq 0$ , entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma_\mu \sigma_\nu^a - \sigma_\nu \sigma_\mu^a & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^a \sigma_\nu - \sigma_\nu^a \sigma_\mu \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_\nu & 0 \\ 0 & -\sigma_\nu \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_\nu & 0 \\ 0 & -\sigma_\nu^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos la siguiente correspondencia:

$$2e_\mu \wedge e_\nu \leftrightarrow \begin{cases} - \begin{pmatrix} i\sigma_\lambda & 0 \\ 0 & -(i\sigma_\lambda)^* \end{pmatrix}, \text{ si } (\mu, \nu, \lambda) \text{ es una permutaci3n par de } (1,2,3). \\ - \begin{pmatrix} \sigma_\nu & 0 \\ 0 & -\sigma_\nu^* \end{pmatrix}, \text{ cuando } \mu = 0 \text{ y } \nu \neq 0. \end{cases}$$

Recordemos que  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\sigma_k, i\sigma_k\}_{k=1}^3$ , de forma que, por la linealidad del corchete de Lie y las igualdades anteriores, reconocemos que existe una biyecci3n

$$\mathfrak{o}(3, 1) \cong \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & -\xi^* \end{pmatrix} : \xi \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \right\}$$

- Finalmente, veamos que ocurre con las transformaciones no lineales, correspondientes al espacio  $\beta \wedge T^*$ . Consideremos  $\eta^* \in T$ , el elemento asociado a  $\eta \in T^*$ . Entonces,

$$T^* \ni \eta \leftrightarrow \beta \wedge \eta^* \leftrightarrow \frac{1}{4}[\beta, \eta^*] = \frac{1}{2}\beta\eta^*,$$

donde,

$$\frac{1}{2}\beta\eta^* = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H^a \end{pmatrix} K = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H^a & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\eta \leftrightarrow \beta \wedge \eta^* \leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H^a & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $H$  es la matriz asociada al vector  $\eta^*$ . Es decir que podemos identificar al conjunto de todas las matrices de esta forma con las transformaciones conformes cuadráticas.

Observemos que la diagonal corresponde precisamente al conjunto de matrices con traza real, ya que  $-\xi^* + r1 = -(\xi + r1)^*$ , para cualesquiera  $r \in \mathbb{R}$  y  $\xi \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Además, puesto que  $X \in \mathfrak{u}(2)$  si, y sólo si,  $X^a \in \mathfrak{u}(2)$ , hemos demostrado el siguiente isomorfismo de álgebras de Lie:

$$\mathfrak{o}(4, 2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \xi & X \\ Y & -\xi^* \end{pmatrix} : \xi \in \mathbb{C}(2), \text{ tr } \xi \in \mathbb{R}, \text{ y } X, Y \in \mathfrak{u}(2) \right\}.$$

El conjunto de todas las matrices complejas de  $2 \times 2$  con traza real forma un álgebra de Lie que se denota por  $\mathfrak{rl}(2, \mathbb{C})$ , notaci3n que adoptamos en el presente trabajo.

Debido a que  $\dim \mathfrak{u}(2) = 4$  y la dimensi3n del espacio de matrices complejas de  $2 \times 2$  con traza real es 7, se tiene que  $\dim \mathfrak{o}(4, 2) = 4 + 4 + 7 = 15$ . De hecho, ésta es precisamente la dimensi3n de  $SU(2, 2)$ , cuya álgebra de Lie esta definida como,

$$\mathfrak{su}(2, 2) = \left\{ X \in \mathbb{C}(4) : X^*H + HX = 0, \text{ donde } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } \text{tr } X = 0 \right\}.$$

Entonces,  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2, 2)$  si, y solo si,  $\text{tr}(A + D) = 0$ ,  $A = -D^*$ ,  $B = -B^*$  y  $C = -C^*$ . De donde concluimos que  $\text{tr } A \in \mathbb{R}$  y  $B, C \in \mathfrak{u}(2)$ . Es decir, existe un isomorfismo de álgebras de Lie,

$$\mathfrak{co}(3, 1) \cong \mathfrak{o}(4, 2) \cong \mathfrak{su}(2, 2).$$

**Nota 31.** En 1910, Bateman [1] demostró que el grupo de transformaciones que dejan invariantes a las ecuaciones de Maxwell es precisamente el grupo de transformaciones conformes del espacio-tiempo de Minkowski.

### 3.4. Sobre la exponenciación de los campos conformes del espacio-tiempo de Minkowski

Al revés que en la sección anterior, ahora comenzamos por considerar un elemento arbitrario de  $\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{o}(4, 2)$  y le asociaremos un campo vectorial que preserva la clase conforme de la forma bilineal,  $B$ , en  $T$ .

Recordemos que dado cualquier espacio vectorial,  $T$ , y una forma bilineal definida en él,  $B : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , da lugar a una forma cuadrática  $q : T \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $q(u) = B(u, u)$ , para cualquier  $u \in T$ . De igual forma, una forma cuadrática da lugar a una forma bilineal mediante la llamada *identidad de polarización*, dada por

$$B(u, v) = \frac{1}{2} (q(u + v) - q(u) - q(v)),$$

para todos  $u, v \in T$ . Al identificar a  $\mathbb{R}^{3,1}$  y su forma cuadrática con  $\mathfrak{u}(2)$  y la función determinante, esto da lugar a una forma bilineal en el álgebra de Lie, que la denotaremos nuevamente como  $B$  y está definida como:

$$B(u, v) = \frac{1}{2} (\det(u + v) - \det(u) - \det(v))$$

que usando la matriz adjunta de Cramer, para todos  $u, v \in \mathfrak{u}(2)$ , se convierte en,

$$\begin{aligned} B(u, v)1_{2 \times 2} &= \frac{1}{2} (\det(u + v) - \det(u) - \det(v)) \\ &= \frac{1}{2} ((u + v)^a(u + v) - u^a u - v^a v) \\ &= \frac{1}{2} (u^a v + v^a u). \end{aligned}$$

Asimismo, utilizando el hecho de que  $(uv)^a = v^a u^a$  y que  $u + u^a = (\text{tr } u)1_{2 \times 2}$  para cualquier par de matrices, se llega a que,

$$\begin{aligned} B(u, v)1_{2 \times 2} &= \frac{1}{2} (u^a v + v^a u) \\ &= \frac{1}{2} (u^a v + (u^a v)^a) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(u^a v)1_{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Concluimos inmediatamente que, para cualesquiera par de matrices  $u, v \in \mathfrak{u}(2)$ , se cumple que

$$2B(u, v) = \text{tr}(u^a v) = \text{tr}(uv^a). \quad (10)$$

Con este preámbulo estamos listos para entrar en materia. En lo subsecuente consideraremos a la matriz  $x \in \mathfrak{u}(2)$  como la función que a cada punto del espacio-tiempo le asocia sus coordenadas, en el mismo espíritu que al final del capítulo anterior. Sea

$$X = \begin{pmatrix} \xi & U \\ V & -\xi^* \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2, 2),$$

y encontremos su correspondiente campo en  $\mathfrak{u}(2)$ :

- Recordemos que la matriz  $U \in \mathfrak{u}(2)$  proviene del elemento  $\sqrt{2}u \in \mathbb{R}^{3,1}$ , que corresponde a su respectivo campo vectorial constante.

- La diagonal corresponde a los elementos de la transformación identidad y el álgebra de Lie ortogonal. Veamos la correspondencia en los elementos de la base:

- Si  $\xi = -\sigma_0 = 1_{2 \times 2}$ , entonces,

$$\xi x + x\xi^* = -2x,$$

que es el valor del campo  $-2id_{\mathbb{R}^{3,1}}$ .

- Si  $\xi = -\sigma_\nu$ , observemos que,

$$\begin{aligned} \xi x + x\xi^* &= -(\sigma_\nu x + x\sigma_\nu) \\ &= -(\sigma_0^a x \sigma_\nu + x^a \sigma_0 \sigma_\nu - \sigma_\nu^a x \sigma_0 - x^a \sigma_\nu \sigma_0) \\ &= -2(B(\sigma_0, x)\sigma_\nu - B(\sigma_\nu, x)\sigma_0), \end{aligned}$$

que es el valor del campo vectorial  $-2e_0 \wedge e_\nu \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3,1})$ .

- Si  $\xi = -i\sigma_\lambda$  y  $(\mu, \nu, \lambda)$  es una permutación par de  $(1, 2, 3)$ , observemos que,

$$\begin{aligned} 2e_\mu \wedge e_\nu(x) &= 2(B(e_\mu, x)e_\nu - B(e_\nu, x)e_\mu) = 2(B(e_\mu, x)e_\nu - B(e_\nu, x)e_\mu) \\ &\quad + e_\mu e_\nu x - e_\mu e_\nu x \\ &= e_\mu e_\nu x + (e_\mu x + 2B(e_\mu, x))e_\nu \\ &= e_\mu e_\nu x - x e_\mu e_\nu \\ &\leftrightarrow \sigma_\mu \sigma_\nu x - x \sigma_\mu \sigma_\nu \\ &= i(\sigma_\lambda x - x \sigma_\lambda) \\ &= -(\xi x + x\xi^*) \end{aligned}$$

que es el valor del campo vectorial  $-2e_\mu \wedge e_\nu \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3,1})$ .

- Si  $V = \sigma_\mu$ , para algún  $\mu$  entre 0 y 3, entonces,

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}e_\mu^* &\leftrightarrow -\left(\sqrt{2}B(x, \sigma_\mu)x - \frac{1}{\sqrt{2}}B(x, x)\sigma_\mu\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x\sigma_\mu^a x + \sigma_\mu x^a x - \det(x)\sigma_\mu) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x\sigma_\mu^a x \end{aligned}$$

que es el campo vectorial correspondiente a  $-\sqrt{2}e_\mu^* \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3,1})$ .

De estos cálculos podemos concluir que existe la siguiente correspondencia entre elementos de  $\mathfrak{su}(2, 2)$  y campos vectoriales que preservan la estructura conforme de  $\mathbb{R}^{3,1}$ :

$$\boxed{\mathfrak{su}(2, 2) \ni \begin{pmatrix} \xi & U \\ V & -\xi^* \end{pmatrix} \leftrightarrow \left(x \mapsto \sqrt{2}U - \frac{1}{2} \left( (\xi x + x\xi^*) + \sqrt{2}xV^a x \right) \right) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3,1})}$$

Ya se vio que, mediante la función exponencial, todo campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3,1})$  define un flujo en  $\mathbb{R}^{3,1}$  que explícitamente es  $\Gamma(t, x) = \text{Exp}(tX)(x)$ . Veamos los flujos

que definen cada uno de los sumandos de  $\mathfrak{co}(3, 1)$  que acabamos de encontrar. Demostramos en el capítulo anterior que el flujo del campo vectorial constante  $x \mapsto \sqrt{2}U$ , está dado por

$$\Gamma(t, x) = x + \sqrt{2}tu.$$

Notese que las curvas integrales  $t \mapsto x + \sqrt{2}tu$  están definidas para toda  $t$ .

Ahora consideremos los campos vectoriales de la forma  $X = -\frac{1}{2}(\xi x + x\xi^*) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3,1})$ , en cuyo caso se tiene que:

$$\begin{aligned} id(x) &= x \\ X(x) &= -\frac{1}{2}(\xi x + x\xi^*) \\ X(X(x)) &= \frac{1}{2} \left( \xi \frac{1}{2}(\xi x + x\xi^*) + \frac{1}{2}(\xi x + x\xi^*)\xi^* \right) \\ &= \frac{1}{4} (\xi^2 x + 2\xi x\xi^* + x(\xi^*)^2) \\ X(X(X(x))) &= -\frac{1}{8} (\xi^2(\xi x + x\xi^*) + 2\xi(\xi x + x\xi^*)\xi^* + (\xi x + x\xi^*)(\xi^*)^2) \\ &= -\frac{1}{8} (\xi^3 x + \xi^2 x\xi^* + 2\xi^2 x\xi^* + 2\xi x(\xi^*)^2 + \xi x(\xi^*)^2 + x(\xi^*)^3) \\ &= -\frac{1}{8} (\xi^3 x + 3\xi^2 x\xi^* + 3\xi x(\xi^*)^2 + x(\xi^*)^3) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

De donde fácilmente concluimos que

$$X^n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \xi^{n-k} x (\xi^*)^k = n! \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!} \xi^{n-k} x (\xi^*)^k.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Exp}(tX)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n X^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!k!} x \frac{(\xi^*)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{(-t\xi)^{n-k}}{2^{n-k}(n-k)!} \right) x \left( \frac{(-t\xi^*)^k}{2^k k!} \right) \\ &= \left( \text{Exp} \left( -\frac{t}{2}\xi \right) \right) x \left( \text{Exp} \left( -\frac{t}{2}\xi^* \right) \right), \end{aligned}$$

por definición del producto de series, es decir,

$$\text{Exp}(tX)(x) = \left( \text{Exp} \left( -\frac{t}{2}\xi \right) \right) x \left( \text{Exp} \left( -\frac{t}{2}\xi^* \right) \right)^*.$$

En este caso, como esperabamos, el resultado es una transformación lineal de  $x$  y, al igual que en el caso de las traslaciones, es una transformación que está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Integrar los campos cuadráticos es más complicado, así que comenzamos por dar los primeros términos de la serie de Taylor asociada a la función  $(1/4B(v, v)B(x, x)t^2 -$

$B(x, v)t + 1)^{-1}$ , para vectores  $x, v$ , y que nos será de gran utilidad más adelante:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - tB(x, v) + \frac{t^2}{4}B(v, v)B(x, x)\right)^{-1} = 1 + B(x, v)t \\
& \quad + \left(B(x, v)^2 - \frac{1}{4}B(v, v)B(x, x)\right)t^2 \\
& \quad + \left(B(x, v)^3 - \frac{1}{2}B(v, v)B(x, x)B(x, v)\right)t^3 \\
& \quad + \left(B(x, v)^4 - \frac{3}{4}B(v, v)B(x, x)B(x, v)^2 + \frac{1}{16}B(v, v)^2B(x, x)^2\right)t^4 \\
& \quad + \left(B(x, v)^5 - B(v, v)B(x, x)B(x, v)^3 + \frac{3}{16}B(v, v)^2B(x, x)^2B(x, v)\right)t^5 \\
& \quad + \left(B(x, v)^6 - \frac{5}{4}B(v, v)B(x, x)B(x, v)^4 + \frac{3}{8}B(v, v)^2B(x, x)^2B(x, v)^2 \right. \\
& \quad \quad \quad \left. - \frac{1}{64}B(v, v)^3B(x, x)^3\right)t^6 \\
& \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$

Exponenciar las componentes cuadráticas es un proceso sencillo pero laborioso, por lo que únicamente presentamos los resultados. Consideremos el campo  $X(x) = B(x, v)x - \frac{1}{2}B(x, x)v$ , entonces:

$$\begin{aligned}
id(x) &= x \\
X(x) &= B(x, v)x - \frac{1}{2}B(x, x)v \\
X(X(x)) &= 2B(x, v)^2x - B(x, v)B(x, x)v - \frac{1}{2}B(v, v)B(x, x)x \\
X(X(X(x))) &= 6B(x, v)^3x - 3B(v, v)B(x, x)B(x, v)x \\
& \quad - 3B(x, x)B(x, v)v + \frac{3}{4}B(x, x)B(v, v)v \\
& \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$

de donde, al comparar los respectivos términos de las series, se concluye que,

$$\text{Exp}(tX)(x) = \left(1 - tB(x, v) + \frac{t^2}{4}B(v, v)B(x, x)\right)^{-1} \left(x - \frac{t}{2}B(x, x)v\right).$$

Resulta sencillo traducir este flujo a su versión matricial. En efecto, observemos que, por la definición de la matriz adjunta de Cramer,

$$\begin{aligned}
\det \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right) 1_{2 \times 2} &= \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right) \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right)^a \\
&= \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right) \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}x^a v\right) \\
&= 1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x - \frac{t}{2}x^a v + \frac{t^2}{4}v^a x x^a v \\
&= \left(1 - tB(x, v) + \frac{t^2}{4}B(v, v)B(x, x)\right) 1_{2 \times 2}.
\end{aligned}$$

Por lo que, utilizando (10), llegamos a,

$$\begin{aligned} \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right)^{-1} &= \left(1 - tB(x, v) + \frac{t^2}{4}B(v, v)B(x, x)\right)^{-1} \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right)^a \\ &= \left(1 - tB(x, v) + \frac{t^2}{4}B(v, v)B(x, x)\right)^{-1} \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}x^a v\right), \end{aligned}$$

de donde claramente se ve que es posible rescribir el flujo integral como

$$\text{Exp}(tX)(x) = x \left(1_{2 \times 2} - \frac{t}{2}v^a x\right)^{-1}.$$

Nótese que a diferencia de los campos de órdenes menores, al exponenciar campos cuadráticos obtenemos curvas integrales que no están definidas globalmente; es decir, hay valores de  $t$  donde el denominador  $(1 - tB(x, v) + \frac{t^2}{4}B(v, v)B(x, x))$  se anula.

La observación anterior implica que considerar al espacio-tiempo de Minkowski como un modelo adecuado del universo, y esperar que el grupo conforme sea el grupo de simetrías de éste, son visiones incompatibles matemáticamente, pues acabamos de ver que existen transformaciones conformes que no están globalmente definidas en todo punto del espacio-tiempo de Minkowski. En este trabajo nos guiaremos por el principio según el cual el objeto fundamental de estudio es el grupo de simetrías, desechando así al espacio-tiempo de Minkowski como un modelo viable del universo. Dedicamos la siguiente sección a construir un espacio donde no existan estas limitaciones; un espacio  $M$  con estructura de variedad diferenciable, en la que sus cartas coordenadas puedan tomar valores en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{3,1}$ , pero en la que todo elemento del álgebra de Lie conforme, realizada como una subálgebra de Lie de los campos vectoriales de  $M$ , tenga un flujo integral bien definido globalmente; esto es, sin singularidades en  $t$ . Una manera de conseguir esto es buscando un *modelo homogéneo*  $G/H$  de  $M$  y con  $\mathbb{R}^{3,1}$  identificado con algún subconjunto abierto de  $M$ .

## 4. Completación conforme de un espacio vectorial con geometría de signatura $(p, q)$

El principio de equivalencia de Einstein dice que las leyes de la física son iguales en todo marco de referencia inercial. Matemáticamente esto se traduce a que las ecuaciones de la física deben quedar invariantes bajo ciertas transformaciones del espacio-tiempo de Minkowski que preserven una forma bilineal, simétrica y no degenerada de signatura  $(3, 1)$ ; hoy en día conocemos a estas transformaciones como transformaciones de Lorentz.

En 1910, Bateman demostró que el grupo que deja invariantes las ecuaciones de Maxwell es más grande que el grupo de Poincaré [1], es más, en su trabajo demuestra que el grupo de invariancia de las ecuaciones de Maxwell depende de quince parámetros independientes y de hecho es localmente isomorfo al grupo  $SU(2, 2)$ . Sin embargo, las transformaciones de  $SU(2, 2)$  no estaban bien definidas en todos los puntos del espacio-tiempo de Minkowski. Este hecho es la motivación principal para proponer que el espacio-tiempo de Minkowski usual sea solamente el espacio euclideo donde toman valores las cartas coordenadas de una variedad homogénea y compacta,  $M$ , localmente isomorfa a  $\mathbb{R}^{3,1}$ . En este capítulo construiremos dicha variedad demostrando en el proceso algunas de sus propiedades más importantes. Referimos al lector interesado a [5] y [13].

A lo largo de este capítulo trabajaremos nuevamente con un espacio vectorial  $T$ , de dimensión  $n = p + q$ , dotado de una forma bilineal, simétrica, y no degenerada,  $B$ , con signatura  $(p, q)$ , con  $\min\{p, q\} \geq 1$ . Asimismo, consideramos al espacio  $\tilde{T}$ , de dimensión  $n + 2$ , dotado de su respectiva forma bilineal, simétrica, y no degenerada de signatura  $(p + 1, q + 1)$ , en el cual  $T \subseteq \tilde{T}$  y  $\tilde{B}|_T = B$ . Hacemos esto en general, pues considerar únicamente el caso particular del espacio-tiempo no facilita en ningún sentido el desarrollo, y concluimos el capítulo con el ejemplo del espacio-tiempo de Minkowski.

### 4.1. Construcción y propiedades de la completación conforme

Consideremos el subespacio de vectores isotrópicos de  $\tilde{T}$ ,

$$C := \{v \in \tilde{T} \setminus \{0\} : \tilde{B}(v, v) = 0\}.$$

Dado que la forma bilineal  $\tilde{B}$  es suave, del teorema de la preimagen se sigue que  $C \subseteq \tilde{T}$  es una subvariedad suave de dimensión  $p + q + 1$ .

Recordemos que el espacio proyectivo asociado a  $\tilde{T}$  está definido como  $\mathbb{P}(\tilde{T}) := \tilde{T} \setminus \{0\} / \sim$ , donde  $v \sim w$  si existe un escalar,  $\lambda \in \mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tal que  $v = \lambda w$ . Al elemento de  $\mathbb{P}(\tilde{T})$  asociado al vector  $v \in \tilde{T}$  lo denotaremos como  $\mathbb{R}v$ , y es evidente que geoméricamente representa al subespacio de dimensión uno generado por  $v$ . Además, claramente  $C$  es invariante bajo la acción de  $\mathbb{R}^\times$ , de forma que es posible restringir la acción de  $\mathbb{R}^\times$  en  $\tilde{T}$  a  $C$ , concluyendo que

$$\pi(C) = C / \sim = \mathbb{P}(C),$$

que por argumentos similares a los anteriores es una variedad diferenciable de dimensión  $p + q$ . El espacio  $\pi(C)$  es un ejemplo de una *hipersuperficie cuádrica proyectiva* de  $\tilde{T}$ .

Veamos cómo son las variedades  $C$  y  $\pi(C)$  geoméricamente. Sean  $E$  y  $F$  los subespacios de  $\tilde{T}$  en los cuales la geometría  $\tilde{B}$  es positiva definida y negativa definida, respectivamente; es decir,  $E$  es un subespacio de dimensión  $p + 1$ , mientras  $F$  es de dimensión  $q + 1$  y claramente  $\tilde{T} = E \oplus F$ . Entonces, dado un vector isotrópico,  $v \in C$ , es posible descomponerlo en la forma  $v = (v_+, v_-)$ , donde  $v_+ \in E$  y  $v_- \in F$ . Así, se tiene que

$$C = \{v \in \tilde{T} \setminus \{0\} : |\tilde{B}(v_+, v_+)| = |\tilde{B}(v_-, v_-)|\}.$$

Como consecuencia de esta observación se tiene la siguiente,

**Proposición 32.** Sea  $\tilde{B}$  una forma bilineal, simétrica, y no degenerada de signatura  $(p + 1, q + 1)$  definida en  $\tilde{T}$  y sea  $C$  el subespacio de vectores isotrópicos no nulos. Entonces, dependiendo de los valores de  $p$  y  $q$ ,  $C$  es difeomorfo a distintas variedades:

- Si  $1 \leq \min\{p, q\}$ . Entonces,  $C \cong \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times \mathbb{R}$  y  $C$  es conexo.
- Si  $\min\{p, q\} = 0$ , pero  $0 < \max\{p, q\}$ . Entonces,  $C \cong (\mathbb{S}^p \times \mathbb{R}) \sqcup (\mathbb{S}^q \times \mathbb{R})$  y  $C$  tiene dos componentes conexas.
- Si  $p = q = 0$ . Entonces,  $C = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$  y  $C$  tiene cuatro componentes conexas.

Dado  $v \in C$  siempre es posible encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$  de modo que  $\tilde{v} = \lambda v \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ , a saber,  $\lambda = B(v_+, v_+)^{-\frac{1}{2}}$ , de forma que,  $B(\tilde{v}_+, \tilde{v}_+) = B(\tilde{v}_-, \tilde{v}_-) = 1$  y podemos reescribir

$$\pi(C) = \{\mathbb{R}v : |\tilde{B}(v_+, v_+)| = |\tilde{B}(v_-, v_-)| = 1\},$$

lo que implica que la función

$$\begin{aligned} \tilde{T} = \mathbb{R}^{p+1, q+1} &\supseteq \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \rightarrow \pi(C) \subseteq \mathbb{P}(\tilde{T}) \\ (x, y) &\mapsto \mathbb{R}(x, y), \end{aligned}$$

es suprayectiva. Es más, es fácil demostrar que dicha función es 2 a 1, por lo que

$$C / \sim = \pi(C) \cong \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q / \mathbb{Z}_2. \quad (11)$$

**Nota 33.** Obsérvese que  $\pi(C)$  es un variedad compacta (y sin frontera), de modo que los flujos asociados a sus campos vectoriales están globalmente definidos.

Veamos ahora qué papel juega  $T \subseteq \tilde{T}$  en esta construcción. Primero descompongamos a  $\tilde{T}$  como  $T \oplus \mathbb{R}^{1,0} \oplus \mathbb{R}^{0,1}$ , de forma que podemos escribir cualquier elemento de  $\tilde{T}$  en la forma  $(v, s, t)$  y,

$$\pi(C) = \{\mathbb{R}(v, s, t) : B(v, v) + s^2 - t^2 = 0\}.$$

Por otro lado existe una función suave,  $\eta : T \rightarrow \pi(C)$ , definida como

$$v \mapsto \mathbb{R} \left( v, \frac{1}{2}(1 - B(v, v)), \frac{1}{2}(1 + B(v, v)) \right),$$

cuya importancia se revela en la siguiente,

**Proposición 34.** La función  $\eta$  satisface que:

1.  $\eta(T) = \{\mathbb{R}(v, s, t) \in \pi(C) : s + t \neq 0\} = \{\mathbb{R}x \in \pi(C) : \tilde{B}(x, (0, 1, -1)) \neq 0\}$ , y de ahora en adelante denotaremos al punto  $(0, 1, -1)$  como  $v_\infty$ .
2.  $\eta$  es inyectiva.
3.  $\eta(T)$  es un subconjunto abierto y denso de  $\pi(C)$ .

*Demostración.* 1. Si  $v \in T$ , claramente  $\eta(v) = [(2v, 1 - B(v, v), 1 + B(v, v))]$  satisface que  $1 - B(v, v) + 1 + B(v, v) \neq 0$ . Por otro lado, si consideramos un vector isotrópico de la forma  $(v, s, t)$  con  $s + t = 1$ , entonces,

$$B(v, v) = t^2 - s^2 = t - s,$$

de donde concluimos que

$$t = \frac{1}{2}(1 + B(v, v)) \quad \text{y} \quad s = \frac{1}{2}(1 - B(v, v)),$$

de forma que  $\pi(v, s, t) = \eta(v)$ .

2. Supongamos que  $\eta(v) = \eta(w)$ . Entonces,  $w = \lambda v$  para algún  $\lambda \neq 0$ , y se tiene que,

$$\lambda(1 \pm B(v, v)) = 1 \pm \lambda^2 B(v, v) \iff \lambda - 1 = \pm \lambda(\lambda - 1)B(v, v),$$

cuya única solución es  $\lambda = 1$ .

3. Por el primer inciso de la proposición es claro que  $\eta(T)$  es un subconjunto abierto de  $\pi(C)$ . Consideremos ahora un elemento en el complemento,  $[(v, s, t)] \in \pi(C) \setminus \eta(V)$ . Entonces,  $s = -t$  y  $B(v, v) = 0$ , y consideramos dos posibles casos: Si  $s = 0$ , se tiene que  $v \neq 0$  y la sucesión  $\{nv\}_{n=1}^\infty$  satisface que

$$\eta(nv) = \left[ \left( nv, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] = \left[ \left( v, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [(v, 0, 0)].$$

Por otro lado, si  $s \neq 0$ , consideremos un vector  $w \in T$  que junto con  $v$  forme un par hiperbólico. Entonces, para  $a \neq 0$ , podemos garantizar que

$$B(v + aw, v + aw) = 2a \neq 0.$$

Asimismo, para que un vector de la forma  $\tilde{v} = (v + aw, s + b, -s)$  sea isotrópico es necesario que

$$B(\tilde{v}, \tilde{v}) = 2a + 2sb + b^2 = 0,$$

ecuación que es posible resolver para  $b$  como función de  $a$  y además se cumple que  $b(a) \rightarrow 0$  si  $a \rightarrow 0$  y  $\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{v} = (v, s, -s)$ . □

Dado un vector isotrópico,  $\tilde{v} = (v, s, t) \in \tilde{T}$ , para el cual  $s + t = 0$ , se tiene que  $\mathbb{R}(v, s, t) \in \pi(C) \setminus \eta(T)$ , si, y solo si, se da alguno de los siguientes casos:

- Si  $s \neq 0$ , entonces, se debe cumplir que  $t = -s$  y  $B(v, v) = 0$ . De forma que  $\mathbb{R}\tilde{v} = \mathbb{R}(v, 1, -1)$ .

- Si  $s = 0$ , entonces, se debe cumplir que  $t = 0$  y  $B(v, v) = 0$ . De forma que  $\tilde{v} = (v, 0, 0)$ .

De donde concluimos que  $\pi(C)$  contiene dos copias disjuntas del conjunto de vectores isotrópicos de  $T$ ,  $\{v \in T : B(v, v) = 0\}$ , que junto con  $\eta(T)$  llenan a  $\pi(C)$ , en otras palabras,

$$\pi(C) = \eta(T) \sqcup C_* \sqcup C_\infty,$$

donde  $C_* \cong C_\infty \cong C$ .

Al espacio  $\pi(C)$  se le conoce como *completación conforme* de  $T$ , y de ahora en adelante lo denotaremos como  $X^{p,q}$ . La proposición anterior es la razón por la cual se le llama completación, para entender por qué dicha completación es conforme, es necesario estudiar los espacios tangentes de  $X^{p,q}$ . Específicamente veremos que cada espacio tangente a la variedad está equipado con una métrica de signatura  $(p, q)$ , definida hasta un factor escalar, y sabiendo esto demostraremos que  $\eta$  es una transformación conforme.

Comenzamos con un par de lemas que nos serán de utilidad más adelante. Identificando a  $\tilde{T}$  con su espacio tangente en cualquier punto, se tiene el siguiente,

**Lema 35.** Sean  $u, v \in \tilde{T} \setminus \{0\}$ . Entonces,  $\dot{\pi}_v(u) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(v + tu) = 0$  si, y solo si, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $u = \lambda v$ .

*Demostración.* Si  $\dim \tilde{T} = p + q + 2$ , comencemos por recordar que los subconjuntos abiertos  $U_i = \{\pi(v) : v_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}(\tilde{T})$ , con  $i = 1, \dots, p + q + 2$ , definen un atlas de la variedad  $\mathbb{P}(\tilde{T})$ , con cartas coordenadas definidas en cada  $U_i$  como

$$x_1 = \frac{v_1}{v_i}, \dots, x_{i-1} = \frac{v_{i-1}}{v_i}, x_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{v_i}, \dots, x_{p+q+1} = \frac{v_{p+q+2}}{v_i}.$$

Elijamos una base de  $\tilde{T}$  en la cual todas las componentes de  $v$  sean cero salvo la primera, es decir,  $v = (v_1, 0, \dots, 0)$  y  $v \in U_1$ . Así, para cualquier  $u \in \tilde{T}$ , se tiene que para  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeño,  $\pi(v + tu) \in U_1$ , y sus coordenadas locales son

$$\pi(v + tu) = \frac{1}{v_1 + tu_1} (tu_2, \dots, tu_{p+q+2}),$$

y al derivar esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_v(u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(v + tu) \\ &= \left. \frac{1}{(v_1 + tu_1)^2} (u_2(v_1 + tu_1) - tu_1 u_2, \dots, u_{p+q+2}(v_1 + tu_1) - tu_1 u_{p+q+2}) \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{v_1} (u_2, \dots, u_{p+q+2}), \end{aligned}$$

de donde el resultado sigue inmediatamente.  $\square$

Como consecuencia inmediata de este lema, la clase de equivalencia de cada  $v \in \tilde{T}$  da lugar a la sucesión exacta,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}v & \hookrightarrow & \tilde{T} & \longrightarrow & T_{\mathbb{R}v}\mathbb{P}(\tilde{T}) \longrightarrow 0 \\ & & & & u & \longmapsto & \dot{\pi}_v(u), \end{array}$$

que es equivalente a la existencia de un isomorfismo

$$i_v : \tilde{T}/\mathbb{R}v \rightarrow T_{\mathbb{R}v}\mathbb{P}(\tilde{T}),$$

donde  $i_v([u]) = \dot{\pi}_v(u)$ .

Otra consecuencia importante del lema anterior es que para cualquier  $\lambda \neq 0$ , se tiene que

$$\dot{\pi}_{\lambda v}(u) = \dot{\pi}_v\left(\frac{1}{\lambda}u\right) = \frac{1}{\lambda}\dot{\pi}_v(u).$$

Con las dos observaciones anteriores estamos en posición de ver que existe una identificación entre  $\text{Hom}(\mathbb{R}v, \tilde{T}/\mathbb{R}v)$  y  $T_{\mathbb{R}v}\mathbb{P}(\tilde{T})$ , definida de forma que a cualquier  $\tau \in \text{Hom}(\mathbb{R}v, \tilde{T}/\mathbb{R}v)$ , le corresponde  $i_v(\tau(v))$ . Para ver que esta correspondencia está bien definida, primero observemos que para cualquier  $\tau(v) \in \tilde{T}/\mathbb{R}v$ , existe  $u \in \tilde{T}$  tal que  $[u] = \tau(v)$ . Así, dado cualquier  $\lambda \neq 0$ ,

$$i_{\lambda v}(\tau(\lambda v)) = i_{\lambda v}([\lambda u]) = \dot{\pi}_{\lambda v}(\lambda u) = \dot{\pi}_v(u) = i_v(\tau(v)).$$

Recordemos que el espacio  $X^{p,q} \subseteq \mathbb{P}(\tilde{T})$ . Entonces, si nos restringimos a  $v \in C$ , se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}v & \hookrightarrow & T_v C & \longrightarrow & T_{\mathbb{R}v} X^{p,q} \longrightarrow 0 \\ & & & & u \longmapsto & & \dot{\pi}_v(u), \end{array}$$

Proseguimos a mostrar que  $T_v C \cong (\mathbb{R}v)^\perp$ . Sea  $u \in T_v C$  y  $\gamma$  cualquier curva en su clase de equivalencia en  $T_v C$ , es decir, una curva que satisface que  $\gamma(0) = v$  y  $\gamma'(0) = u$ . Así, en una vecindad abierta de  $t = 0$  se tiene que  $\tilde{B}(\gamma(t), \gamma(t)) = 0$ , que al derivar respecto a  $t$  y evaluar en  $t = 0$  implica que

$$\left. \frac{d}{dt} \tilde{B}(\gamma(t), \gamma(t)) \right|_{t=0} = 2\tilde{B}(\gamma'(0), \gamma(0)) = 2\tilde{B}(u, v) = 0;$$

es decir,  $T_v C \subseteq (\mathbb{R}v)^\perp$ . Por los resultados previos y consideraciones dimensionales, esto implica que

$$\text{Hom}(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^\perp/\mathbb{R}v) \cong T_{\mathbb{R}v} X^{p,q}.$$

La importancia de esta identificación radica en que nos permite definir una forma bilineal, simétrica, no degenerada y de signatura  $(p, q)$  en  $T_{\mathbb{R}v} X^{p,q}$ . El primer paso en esta construcción es, dado  $v \in C$ , considerar un par hiperbólico,  $w$ , de forma que es posible descomponer al espacio vectorial de la siguiente manera,

$$\tilde{T} = (\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w) \oplus (\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w)^\perp,$$

donde la restricción de  $\tilde{B}$  sobre  $(\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w)$  tiene signatura  $(1, 1)$ , mientras que su restricción a  $(\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w)^\perp$  claramente tiene signatura  $(p, q)$ . Además, se tiene que

$$(\mathbb{R}v)^\perp = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w)^\perp,$$

de donde se sigue que,

$$(\mathbb{R}v)^\perp/\mathbb{R}v \cong (\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w)^\perp,$$

y este isomorfismo nos permite definir la métrica deseada: Definimos una geometría en  $T_{\mathbb{R}v}X^{p,q}$ , que denotaremos como  $B_{\mathbb{R}v}$ , como,

$$B_{\mathbb{R}v}(\tau_1, \tau_2) = \tilde{B}(\tau_1(v), \tau_2(v)),$$

para todos  $\tau_1, \tau_2 \in \text{Hom}(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^\perp/\mathbb{R}v)$ .

Es importante notar que dicha métrica está definida hasta un factor escalar que depende de la elección del representante de  $\mathbb{R}v$ . De hecho, se tiene que para cualquier  $\lambda \neq 0$ ,

$$B_{\lambda v} = \lambda^2 B_{\mathbb{R}v}.$$

Con estos resultados estamos listos para demostrar la siguiente,

**Proposición 36.** La función  $\eta : T \rightarrow X^{p,q}$  es una isometría, es decir,

$$B_{\mathbb{R}v}(d_v\eta(u), d_v\eta(w)) = B(u, w),$$

para cualesquiera  $v \in T$  y  $u, w \in T_vT$ .

*Demostración.* Es posible descomponer a  $\eta$  como la composición  $\pi|_C \circ f$ , donde  $f : T \rightarrow C \subseteq \tilde{T}$  y dado cualquier  $v \in T$  definimos  $f(v) = (v, \frac{1}{2}(1 - B(v, v)), \frac{1}{2}(1 + B(v, v)))$ . Esta demostración consiste en ver que tanto  $\pi|_C$  como  $f$  son funciones conformes, donde la métrica de  $C$  es la resitricción de  $\tilde{B}$ .

Primero observemos que si  $v \in T \subseteq \tilde{T}$ , y  $u \in T_vT \cong T$ , se tiene que

$$df_v(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v + hu) - f(v)}{h} = (u, -B(v, u), B(v, u)),$$

de forma que si  $u, w \in T_vT$ , entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{B}(df_v(u), df_v(w)) &= \tilde{B}((u, -B(v, u), B(v, u)), (w, -B(v, w), B(v, w))) \\ &= B(u, w) + B(v, u)B(v, w) - B(v, u)B(v, w) \\ &= B(u, w), \end{aligned}$$

es decir,  $f$  es una función conforme. Por otro lado, puesto que  $d\pi_v(u) = \dot{\pi}_v(u)$ , si  $u, w \in T_vC$  la construcción de la métrica  $B_{\mathbb{R}v}$  implica que,

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{R}v}(\dot{\pi}_v(u), \dot{\pi}_v(w)) &= B_{\mathbb{R}v}(i_v([u]), i_v([w])) \\ &= \tilde{B}(\tau_u(v), \tau_w(v)) \\ &= \tilde{B}(u, w), \end{aligned}$$

donde  $\tau_u$  y  $\tau_w$  son los elementos correspondientes a  $\dot{\pi}_v(u)$  y  $\dot{\pi}_v(w)$  en  $\text{Hom}(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^\perp/\mathbb{R}v)$ , es decir,  $\pi|_C$  también es una función conforme. Luego, por la regla de la cadena podemos concluir que  $\eta = \pi|_C \circ f$  es una transformación conforme.  $\square$

**Nota 37.** Con esta última proposición hemos demostrado que  $X^{p,q}$  tiene las características deseadas, pues el flujo de todos sus campos vectoriales está globalmente definido y sabemos que el espacio vectorial original queda encajado como un subconjunto abierto suyo. Es más, cada campo vectorial conforme  $\gamma$  en  $T$  define un campo vectorial conforme en  $X^{p,q}$  como  $d\eta \circ \gamma \circ d\eta^{-1}$ , cuya exponencial sabemos que está globalmente definida!

Referimos al lector interesado en un estudio más completo de las propiedades de  $X^{p,q}$  a [13].

Como último, antes de estudiar la completación conforme del espacio-tiempo de Minkowski, demostraremos que  $X^{p,q}$  es un espacio homogéneo para el grupo  $O(\tilde{T}, \tilde{B})$ .

**Proposición 38.** La acción de  $O(\tilde{T}, \tilde{B})$  en  $C$  es transitiva, es decir, dados  $v, w \in C$ , existe un  $g \in O(\tilde{T}, \tilde{B})$  tal que  $v = gw$ .

Para demostrar esta proposición utilizaremos dos lemas:

**Lema 39.** Sea  $0 \neq v \in \tilde{T}$  tal que  $\tilde{B}(v, v) = 0$ . Entonces, existe un vector,  $0 \neq w \in \tilde{T}$ , tal que  $\tilde{B}(w, w) = 0$  y  $\tilde{B}(v, w) = 1$ . Además, la restricción de  $\tilde{B}$  al espacio generado por  $v$  y  $w$  tiene signatura  $(1, 1)$ .

*Demostración del lema.* Dado que la geometría es no degenerada, existe un vector  $0 \neq w'$  para el cual  $B(v, w') \neq 0$ . Si  $w'$  es isotrópico, el resultado se sigue inmediatamente. En caso contrario consideramos al vector  $w = v + tw'$ , para algún  $t \neq 0$ , entonces,

$$B(w, w) = B(v + tw', v + tw') = B(v, v) + 2tB(v, w') + t^2B(w', w') = (2 + tB(w', w'))t,$$

y es inmediato ver que  $t = -2/B(w', w')$  hace que  $w$  sea un vector isotrópico. Finalmente normalizamos a  $w'$  para que se satisfaga que  $B(v, w) = 1$ .

Un sencillo cambio de base muestra la afirmación sobre la signatura de la geometría del espacio.  $\square$

**Lema 40.** El grupo  $O(1, 1)$  actúa transitivamente en el conjunto de vectores isotrópicos de  $\mathbb{R}^{1,1}$ .

*Demostración del lema.* Por definición, sabemos que el grupo  $O(1, 1)$  es el conjunto de todas las matrices tales que,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y fácilmente se puede demostrar que cualquier elemento suyo es de alguna de las formas siguientes,

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh t & \sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}, \text{ o } \begin{pmatrix} -\cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix},$$

para algún  $t \in \mathbb{R}$ . Además, cualquier vector isotrópico en  $\mathbb{R}^{1,1}$  es de la forma  $v = (a, \pm a)$  con  $a \neq 0$ . Si  $w = (b, \pm b)$  y  $b \neq 0$ , entonces, el resultado se sigue de que  $\cosh t + \sinh t = e^t$  y  $\cosh t - \sinh t = e^{-t}$ , al considerar todos las posibles combinaciones de signos.  $\square$

*Demostración de la proposición.* Consideremos ahora dos vectores isotrópicos arbitrarios  $v$  y  $w$ . Entonces, existen tres posibles situaciones:

- Si los vectores son linealmente dependientes, construimos un par hiperbólico a partir de  $v$ , que denotaremos como  $u$ . Entonces,  $\text{Span}\{u, v\}$  es un subespacio vectorial de dimensión dos donde la signatura es  $(1, 1)$  que contiene a  $w$ . La transitividad en el caso de dimensión dos demuestra el resultado.

- Si son linealmente independientes y  $B(v, w) \neq 0$ . Entonces, la demostración es idéntica a la del Lema 39.
- Si son linealmente independientes y  $B(v, w) = 0$ . Entonces, existe un vector  $u'$  tal que  $B(v, u') \neq 0$  y  $B(w, u') \neq 0$  simultáneamente. Reemplazando este vector por algún  $u = u' + tv$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , es posible considerar que  $u$  sea isotrópico. Por el Lema 40, existe una transformación ortogonal que lleva a  $v$  a  $u$ , otra que lleva a  $u$  a  $w$ , y su composición es la transformación que buscamos.

□

A su vez, al pasar al cociente tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 41.** La acción de  $SO(p+1, q+1)_e$  en  $C$  define una acción transitiva en  $X^{p,q}$  siempre que  $1 \leq \min\{p, q\}$ .

La demostración de esta proposición depende esencialmente el siguiente resultado, cuya demostración omitimos por tratarse de una implicación inmediata del método de Gram-Schmidt:

**Lema 42.** Para  $2 \leq n$ , la acción de  $SO(n)$  en  $\mathbb{S}^{n-1}$  es transitiva.

*Demostración de la proposición.* Si  $g \in SO(p+1, q+1)$ , definimos su acción en el cociente como  $g \cdot \mathbb{R}v := \mathbb{R}(gv)$ . Claramente dicha acción está bien definida, pues las transformaciones ortogonales conmutan con la multiplicación por escalares. Veamos ahora que es transitiva.

Sean  $v, w \in C$  los representantes de las clases laterales  $\mathbb{R}v$  y  $\mathbb{R}w$  en  $X^{p,q}$ , respectivamente, tales que  $v, w \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ ; es decir,

$$v_1^2 + \cdots + v_{p+1}^2 = v_{p+2}^2 + \cdots + v_{p+q+2}^2 = 1 \quad \text{y} \quad w_1^2 + \cdots + w_{p+1}^2 = w_{p+2}^2 + \cdots + w_{p+q+2}^2 = 1.$$

Entonces, por el Lema 42 sabemos que existen  $P \in SO(p+1)$  y  $Q \in SO(q+1)$  tales que  $P(v_+) = w_+$  y  $Q(v_-) = w_-$ . Por lo tanto la transformación  $P \oplus Q \in SO(p+1, q+1)$ , satisface que  $P \oplus Q(v) = w$ . Además, dado que  $SO(n)$  es arcoconexo para cualquier  $1 \leq n$  se sigue que  $P \oplus Q \in SO(p+1, q+1)_e$ . □

En otras palabras,  $X^{p,q}$  es una variedad homogénea de la forma  $SO(\tilde{T}, \tilde{B})_e / \hat{H}$ , donde  $\hat{H}$  es un subgrupo cerrado de  $SO(\tilde{T}, \tilde{B})_e$  que corresponde al estabilizador de algún elemento arbitrario de  $X^{p,q}$ .

## 4.2. Completación conforme del espacio-tiempo de Minkowski

Estudiemos un poco más el caso del espacio-tiempo de Minkowski.

En el capítulo anterior demostramos que existe un isomorfismo de álgebras de Lie  $\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{o}(4, 2) \subseteq \text{Cl}(4, 2)$ . Adicionalmente, es posible demostrar que  $SU(2, 2)$ , además de ser conexo, es isomorfo al grupo  $\text{Spin}(4, 2)$ ; es decir, que existen funciones que hacen a la siguiente sucesión exacta,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow SU(2, 2) \longrightarrow SO(4, 2)_e \longrightarrow 0.$$

Por otro lado, considerando la estructura por bloques de  $\mathfrak{su}(2, 2)$  que encontramos, es inmediato ver que

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ Y & -\xi^* \end{pmatrix} : \xi \in \mathbb{C}(2), \operatorname{tr} \xi \in \mathbb{R}, \text{ y } Y \in \mathfrak{u}(2) \right\}$$

es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{su}(2, 2)$  de dimensión 11 que, mediante la función exponencial, se traduce en un subgrupo de Lie  $H \subseteq SU(2, 2)$ . Esto produce una variedad homogénea de dimensión  $15 - 11 = 4$  definida como

$$M = SU(2, 2)/H,$$

cuyo espacio tangente en la identidad es

$$T_{[e]}SU(2, 2)/H = \mathfrak{su}(2, 2)/\mathfrak{h} \cong \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X \in \mathfrak{u}(2) \right\} \cong \mathfrak{u}(2).$$

Dado que  $SU(2, 2)$  es un doble cubriente de  $SO(4, 2)_e$ , este modelo homogéneo puede reescribirse como:

$$M = SU(2, 2)/H \cong SO(4, 2)_e/\hat{H},$$

para un subgrupo  $\hat{H} \subseteq SO(4, 2)_e$ . De acuerdo a los resultados que demostramos al final de la sección anterior de este capítulo, podemos identificar a este espacio homogéneo con  $X^{3,1}$ . Por lo tanto la completación conforme coincide con el modelo homogéneo que hemos construido, de forma que

$$M \cong X^{3,1} \cong SO(4, 2)_e/\hat{H}.$$

Para ver geoméricamente como se ve el modelo conforme recordemos que  $U(1) \cong \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ , mientras que,

$$SU(2) = \{X \in \mathbb{C}(2) : XX^* = X^*X = 1_{2 \times 2} \text{ y } \det X = 1\},$$

de forma que para que una matriz dada, digamos,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

sea elemento de  $SU(2)$  debe cumplir que

$$\det X = 1, \quad |a|^2 + |d|^2 = |b|^2 + |c|^2 = 1, \quad \text{y} \quad \bar{a}b + \bar{c}d = 0,$$

de donde resulta sencillo comprobar que la matriz en realidad es de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

con  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Esta identificación es claramente un homeomorfismo entre  $SU(2)$  y la esfera unitaria en  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ ; es decir,

$$SU(2) \cong \mathbb{S}^3.$$

Entonces, junto con los isomorfismos anteriores, (11) implica que  $X^{3,1} \cong U(1) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2$ . Es más, si consideramos el homomorfismo  $U(1) \times SU(2) \rightarrow U(2)$ , definido mediante el producto, observamos que su núcleo es precisamente  $\mathbb{Z}_2$ , de forma que

$$X^{3,1} \cong U(1) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong U(2).$$

Para concluir con este ejemplo, notemos que  $U(2) \subseteq \mathbb{C}(2)$  es un subconjunto cerrado y acotado; es decir, compacto. Por esta razón, en física, al espacio  $X^{3,1}$  también se le conoce como una *compactificación del espacio-tiempo de Minkowski*, nombre que introdujo Penrose en [8]. Referimos al lector interesado en profundizar en este tema a [9].

## 5. Conclusiones

El método de prolongaciones desarrollado en el primer capítulo yace en los fundamentos de este trabajo pues, además de permitirnos demostrar el isomorfismo  $\mathfrak{co}(p, q) \cong \mathfrak{o}(p+1, q+1)$  para  $3 \leq p+q$ , su formulación pone de manifiesto la naturaleza de cada tipo de campo vectorial cuyo flujo preserva la clase de la geometría de signatura  $(p, q)$  en un espacio vectorial. Sin esto no hubiera sido posible definir varios de los isomorfismos fundamentales que utilizamos, e identificar de manera tan clara la componente geométrica detrás de este isomorfismo.

La exposición continuó con una rápida presentación de las realizaciones de las álgebras de Clifford  $\text{Cl}(3, 1)$  y  $\text{Cl}(4, 2)$  en sus respectivas álgebras de matrices, cuya aplicación inmediata proviene de identificar cómo es que la segunda potencia del álgebra exterior «vive» dentro de la correspondiente álgebra de Clifford como una subálgebra de Lie, con el corchete de Lie definido mediante el producto del álgebra. Es así que identificamos al álgebra de Lie ortogonal en tres lugares diferentes: como el álgebra de campos vectoriales ortogonales del espacio vectorial, como la segunda potencia del álgebra exterior y, vía la realización de álgebras de Clifford, como un álgebra de matrices complejas. Es en esta última formulación que encontramos los isomorfismos  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(3, 1)$  y

$$\mathfrak{co}(3, 1) \cong \mathfrak{o}(4, 2) \cong \mathfrak{su}(2, 2).$$

En este punto nos encontramos con el problema de que los campos vectoriales que preservan la clase conforme de la geometría de orden 2 no están globalmente definidos en el espacio-tiempo de Minkowski. Este hecho es la motivación principal para proponer que el espacio-tiempo de Minkowski, visto como el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{3,1}$ , sea solamente el espacio euclideo donde toman valores las cartas coordenadas de una variedad  $M$  de dimensión 4, con  $M \simeq G/H$ , siendo  $G$  un grupo de Lie dado cuyo espacio tangente es isomorfo a  $\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{o}(4, 2)$ . De esta forma, el álgebra de Lie de  $G$ , que por construcción es isomorfa al álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(4, 2)$ , se representa por campos vectoriales cuyos flujos integrales sí están globalmente definidos en  $M$ .

Finalmente, en el tercer capítulo estudiamos más a detalle la geometría de  $M$  utilizando la función  $\eta$ , que «encaja» al espacio-tiempo de Minkowski en  $M$  como una subvariedad abierta y densa, y que nos permitió estudiar qué ocurre geoméricamente al construir el modelo homogéneo: éste se puede ver como el espacio vectorial más dos conos de luz disjuntos. Además, motivados por el isomorfismo  $SU(2, 2) \cong O(4, 2)/\mathbb{Z}_2$ , demostramos que la variedad suave y compacta  $M$  es una variedad homogénea isomorfa a  $SO(4, 2)_e/\hat{H}$ , cuya álgebra de Lie es precisamente  $\mathfrak{u}(2)$  y en la cual podemos definir, hasta un factor escalar positivo, una métrica de signatura  $(p, q)$ . El trabajo finaliza con la prueba del isomorfismo  $M \cong U(2)$ .

Aunque demostramos que la completación del espacio-tiempo de Minkowski que construimos en el último capítulo posee todas las propiedades que deseábamos, existen otros factores que aquí no hemos tomado en cuenta al buscar un modelo del universo, principalmente la idea de causalidad, en torno a la cual existe una teoría matemática muy fructífera. Estudiar la estructura causal de la variedad Lorentziana que hemos construido excede las intenciones de este trabajo y queda como una posible continuación natural del mismo. Referimos al lector interesado a [9], donde, entre otras cosas, Segal hace un estudio exhaustivo del alcance de este modelo.

## 6. Referencias

- [1] Bateman, H.: *The transformation of the electrodynamical equations*. Proc. London Math. Soc., 8:223–264, 1910.
- [2] González-Anaya, J.: *Las ecuaciones de Maxwell, el álgebra de Clifford del espaciotiempo de Minkowski y el operador de Dirac: con una generalización asociada al álgebra de Lie de las transformaciones de una métrica de Lorentz*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, 2011. Dirigida por el Dr. Adolfo Sánchez Valenzuela.
- [3] Greub, W.H.: *Multilinear Algebra*. Springer-Verlag, Nueva York, N.Y., E.U.A., 2ª ed., 1978.
- [4] Guillemin, V. y Sternberg, S.: *An algebraic model of transitive differential geometry*. Bull. Amer. Math. Soc., 70:16–47, 1964.
- [5] Hilgert, J. y Neeb, K.H.: *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer, Nueva York, N.Y., E.U.A., 1ª ed., 2012.
- [6] Ivey, T. y Landsberg, J.: *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. American Mathematical Society, Providence, R.I., E.U.A., 2003.
- [7] Lawson Jr., H. y Michelson, M.L.: *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton, N.J., E.U.A., 1989.
- [8] Penrose, R.: *Asymptotic properties of fields and space-times*. Phys. Rev. Lett., 10:66–68, 1963.
- [9] Segal, I.: *Mathematical cosmology and extragalactic astronomy*. Academic Press, Nueva York, N.Y., E.U.A., 1976.
- [10] Singer, I. y Sternberg, S.: *The infinite groups of Lie and Cartan*. J. Anal. Math., 15:1–114, 1965.
- [11] Sternberg, S.: *On charge conjugation*. Commun. Math. Phys., 109:649–679, 1987.
- [12] Sánchez-Valenzuela, A.: *Introducción a la topología de 4-variedades*. Aportaciones Mat. Comun., 10:237–309, 1995.
- [13] Sánchez-Valenzuela, A.: *Notas sobre geometría twistorial y espinorial en cuatro dimensiones*. Curso ofrecido en el Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Matemáticas, Universidad de Valencia, España, enero-junio 1996.