UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
Maestría en Ciencias Matemáticas

PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA DE RIEMANN

Tesina
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
LILIANA KATHERINE ESQUIVEL MORA

TUTOR
Dr. PAVEL NAUMKIN

Morelia, Michoacán. 8 de Agosto de 2015.

Índice general

Introducción

El análisis complejo, ha fascinado por muchos tiempo ha grandes matemáticos, desde su aparente aparición en el siglo XIX, el análisis complejo tiene importantes aplicaciones en la ingeniería, la física especialmente teoría de cuerdas, teoría analítica de número, y recientemente en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En el precente trabajo se expone el problema de valores en la frontera de Riemann, el cuál es importante en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, ver por ejemplo [**1**], [**9**], [**10**], [**11**]. Introducimos resultados importantes encaminados a resolver este problema, entre ellos los teoremas de Plemelj-Sokhotski y Plemelj-Privalov, el espacio de las funciones Holderiana o continuas según Hölder, junto con resultados básicos del análisis complejo los cuales pueden consultarse en [**7**], [**5**].

El problema de valores en la frontera de Riemann consiste en encontrar funciones ψ^+, ψ^-, analíticas en ciertos dominios $D^+,\ D^-$ respectivamente tales que

$$\psi^+(z) = G(z)\psi(z) + g(z) \text{ para todo } z \in \partial D^+ = \partial D^-,$$

donde las funciones $G,\ g$ son continuas segun Hölder.

Capítulo 1

Integral de Cauchy

Una curva suave Γ en $\mathbb{C}$ es una curva simple de clase C^1 que no posee puntos recurrentes, esta curva puede ser representada por una función $z(t)$ definida del intervalo $[0,\ 1]$ a $\mathbb{C}$ y satisface que para todo $t \in [0,\ 1]$, $z'(t) \neq 0$. Para Γ una curva suave, denotamos por D^+ el dominio dentro de la curva Γ y por D^- el conjunto $\hat{\mathbb{C}} \backslash (D^+ \cup \Gamma)$ siendo $\hat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann. En nuestro contexto diremos Γ curva suave para referirnos a una curva en $\mathbb{C}$.

Este tipo de curvas poseen ciertas propiedades interesantes que nos serán de gran utilidad para mostrar resultados posteriores.

Lema 1. *Sea Γ una curva suave cerrada o abierta, luego para cada $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ existe $R_0 = R_0(\alpha_0)$ dependiendo únicamente de α_0 tal que para cada $t \in \Gamma$ se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\Gamma \cap \{\zeta : |\zeta - t| < R, R \leq R_0\}$ *consiste de un único arco abierto ab.*
2. *Para cada dos puntos en el arco ab, el ángulo no obtuso α entre sus tangentes a la curva Γ es menor o igual a α_0.*

Demostración:
En esta demostración utilizaremos las siguientes notaciones: sean $\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma$ denotamos su longitud de arco por $\sigma = \sigma(\zeta_1, \zeta_2)$, $r = r(\zeta_1, \zeta_2) = |\zeta_1 - \zeta_2|$ la distancia entre estos puntos, L será la longitud total de Γ. Como Γ es una curva regular podemos parametrizarla por su longitud de arco bajo el parámetro s, consideraremos $\zeta_k = \zeta(s_k)$ con $k = 1, 2$.

Notemos que las funciones $\sigma, r : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ son continuas, ahora para $\sigma_0 \in (0, \frac{L}{2})$, definamos el conjunto

$$M := \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \Gamma \times \Gamma : \sigma(\zeta_1, \zeta_2) \geq \sigma_0\} = \sigma^{-1}([\sigma_0, L])$$

como la función σ es continua el conjunto M es cerrado, además es acotado puesto que $\Gamma \times \Gamma$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}^2$, por tanto M es compacto en $\mathbb{C}^2$, luego la función continua r alcanza su mínimo en M, esto es, existe una pareja ordenada $(\zeta_{1_0}, \zeta_{2_0}) \in M$ tal que

$$\varrho_0 := r(\zeta_{1_0}, \zeta_{2_0}) = \min_{(\zeta_1, \zeta_2) \in M} |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Supongamos que $\varrho_0 = 0$ entonces $\zeta_{1_0} = \zeta_{2_0}$, pero como $\sigma(\zeta_{1_0}, \zeta_{2_0}) \geq \sigma_0 > 0$ entonces

$$\zeta_{1_0} = \zeta(s_{1_0}) = \zeta(s_{2_0}) = \zeta_{2_0},$$

para puntos distintos $s_{1_0}, s_{2_0} \in [0, L]$, lo cual contradice el hecho de que la curva Γ es simple, por tanto $\varrho_0 > 0$, así concluimos que para cada $\varrho \in (0, \varrho)$ y $\zeta \in \Gamma$

$$\{\zeta : |\zeta - \zeta_0| \leq \varrho\} \cap \{\zeta \in \Gamma : \sigma_0 \leq \sigma(\zeta_0, \zeta)\} = \emptyset.$$

1. *Demostración de 2*: Recordemos que $\Gamma = \{z(t) : t \in [0, 1]\}$, donde $z \in C^1([0, 1], \mathbb{C})$ y $z'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, por tanto el ángulo α no obtuso, entre la tangentes a Γ en los puntos $\zeta_1 = z(t_1), \zeta_2 = z(t_2)$, satisface:

$$\cos\alpha = \frac{z'(t_1) \cdot z'(t_2)}{|z'(t_1)||z'(t_2)|},$$

identificando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$. De la ecuación anterior por un argumento de continuidad existe $\sigma_0 := \sigma_0(\alpha_0) \geq 0$ tal que si $\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma$ son tales que su longitud de arco $\sigma(\zeta_1, \zeta_2) \leq \sigma_0$, entonces $|\alpha| \leq \alpha_0$. Sin perdida de generalidad supondremos que $2\sigma \leq L$.
2. *Demostración de 1*: Fijemos $\zeta_0 \in \Gamma$ y definamos el subarco

$$\Gamma_0 := \{\zeta \in \Gamma : \sigma(\zeta, \zeta_0) \leq \sigma_0\},$$

Si Γ es una curva abierta supondremos que los puntos finales de Γ no pertenecen a Γ_0, luego $\zeta_0 = \zeta(s_0)$ divide en dos partes a Γ_0 una correspondiente a $s \leq s_0$ y otra $s \geq s_0$, además cada punto ζ en Γ_0 podemos expresarlo mediante coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_0 + re^{i\theta} \quad &\Rightarrow \quad d\zeta = (dr + ird\theta)e^{i\theta} \\ &\Rightarrow \quad ds = |d\zeta| = |dr + ird\theta| \\ &\Rightarrow \quad dr = \pm ds\cos\alpha, \text{ con } |\alpha| \leq \alpha_0. \end{aligned}$$

Como $\zeta_0, \zeta \in \Gamma$ son tales que $\sigma(\zeta, \zeta_0) \leq \sigma_0$ entonces si $t_1, t_2 \in \Gamma$ estan en el arco $\zeta\zeta_0$ (se entiende por el arco ab como el arco de Γ más corto con puntos finales a y b), el valor absoluto del ángulo no obtuso entre la recta tangente a Γ en el punto ζ_0 con la recta que une t_1 y t_2 es menor o igual a α_0, de esto concluimos que el signo de dr es positivo para $s \geq s_0$ y negativo en caso contrario.
Sabemos que la función $\cos x$ es decreciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, luego

$$k_0 := cos\alpha_0 \leq cos\alpha \leq 1,$$

así para $\zeta = \zeta(s)$

$$k_0|s - s_0| \leq |s - s_0|cos\alpha \leq |s - s_0| \Rightarrow k_0|s - s_0| \leq |\zeta - \zeta_0| \leq |s - s_0|,$$

de lo anterior podemos concluir que la función r es monótona creciente tanto a la derecha como a la izquierda de ζ_0 en Γ_0, cuando nos movemos de ζ_0 sobre Γ.

Tomemos $R_0 := \text{mín}\{\varrho_0, k_0\sigma_0\}$, notemos que s varía monótonamente de s_0 a $s_0 \pm \sigma_0$, por lo que $r(\zeta, \zeta_0)$ crece monótonamente desde 0 hasta algún r_0 el cual es mayor que σ_0 y por tanto R_0, de esta forma si tomamos $R \leq R_0$ el círculo $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| = R\}$ intersecta a Γ en exactamente dos puntos uno a la derecha y otro a la izquierda de ζ_0.Por otra parte si ζ_0 es un punto final de Γ, la intersección de $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| = R\}$ con Γ_0 podría ser sólo en un punto.

De lo anterior concluimos que para cada ζ_0 en la curva, la intersección de Γ con $B_R(\zeta_0)$ consiste en un arco abierto ab en donde el ángulo no obtuso entre las tangente a la curva en dos puntos de este arco es menor o igual a α_0. $\square$

Sea ϕ una función de valor complejo definida sobre Γ curva suave, la cual es integrable sobre esta curva, para $z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \Gamma$ la función

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - z} dt, \tag{1}$$

es conocida como una integral de Cauchy, utilizando la derivada bajo el signo de la integral se muestra fácilmente que ψ es una función holomorfa en D^+ y D^-, en general las funciones holomorfas $\psi^+ := \psi|_{D^+}$, $\psi^- := \psi|_{D^-}$ son diferentes, supongamos Γ curva suave cerrada y $\phi = 1$, la integral de Cauchy

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in D^+ \\ 1 & \text{si } z \in D^- \end{cases}$$

luego $\psi^+ \neq \psi^-$.

Si $z \in \Gamma$ en general la integral impropia (1) no existe, para darle valor a esta integral utiliamos el valor principal de Cauchy.

Definición 1. *Sea Γ una curva suave en $\mathbb{C}$, $c \in \Gamma$, ψ una función integrable sobre $\Gamma \backslash \{c\}$ y $\epsilon > 0$.*

- *Denotamos $\Gamma_\epsilon := \Gamma \backslash B_\epsilon(c)$, si*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \psi(\zeta) d\zeta,$$

*existe, su valor se denomina **Valor principal de Cauchy** de la integral*

$$\int_{\Gamma} \psi(\zeta) d\zeta,$$

comunmente escribimos

$$\int_{\Gamma} \psi(\zeta)d\zeta = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \psi(\zeta)d\zeta.$$

- *Similarmente, si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio, y ψ una función en $D\backslash\{c\}$ para algún punto $c \in D$ tal que*

$$\int_{D_\epsilon} \psi(\zeta)d\zeta, \text{ con } D_\epsilon := D\backslash B_\epsilon(c),$$

existe para cada ϵ suficientemente pequeño, entonces

$$\int_{D} \psi(\zeta)d\zeta = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{D_\epsilon} \psi(\zeta)d\zeta,$$

es llamado el valor principal de Cauchy de la integral singular si el límite existe.

Por ejemplo si consideramos el intervalo $[a, b]$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, y para $a < c < b$ la integral impropia

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c},$$

el valor principal de Cauchy esta dado por

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{[a,\ b]\backslash(c-\epsilon,c+\epsilon)} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\log\frac{b-c}{c-a} + \log\frac{\epsilon}{\epsilon}\right] = \log\frac{b-c}{c-a}.$$

Para Γ curva suave cerrada calculemos el valor principal de Cauchy de la integral

$$\psi(z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dt}{t-z_0},$$

donde $z_0 \in \Gamma$.

Tomemos el R_0 del lema anterior, asi para $\epsilon < R_0$, $B_\epsilon(z_0) \cap \Gamma$ es un único arco abierto el cual denotaremos por $a(\epsilon)b(\epsilon)$, sea Δ_ϵ el arco centrado en z_0 que une los puntos $a(\epsilon)$ y $b(\epsilon)$, de esta forma

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{t-z_0}dt = \int_{\Gamma_\epsilon+\Delta_\epsilon} \frac{1}{t-z_0}dt - \int_{\Delta_\epsilon} \frac{1}{t-z_0}dt,$$

como z_0 es un punto exterior a la curva cerrada $\Gamma_\epsilon + \Delta_\epsilon$, la primera integral es cero, para calcular la segunda integral consideramos coordenadas polares $t - z_0 = \rho e^{i\theta}$ donde θ varía de $\alpha := \arg(a(\epsilon) - z_0)$ a $\beta := \arg(b(\epsilon) - z_0)$ con $\alpha - 2\pi \leq \beta \leq \alpha$, luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\epsilon} \frac{1}{t-z_0}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} d\theta = \frac{1}{2\pi}(\beta-\alpha),$$

pero

$$\lim_{\epsilon\to 0} e^{\beta-\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{b(\epsilon)-z_0}{a(\epsilon-z_0)} = -1,$$

por tanto $\beta-\alpha=\pi$, entonces el valor principal que queriamos calcular es $\frac{1}{2}$, entonces

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z\in D^+ \\ \frac{1}{2} & \text{si } z\in\Gamma \\ 1 & \text{si } z\in D^- \end{cases}$$

Daremos a continuación condiciones suficientes a la función ϕ, para que la integral (1) exista como valor principal de Cauchy sobre Γ

DEFINICIÓN 2. *Una función f de varíable real o compleja se dice que satisface la **condición de Hölder** o que es continua según Hölder en un subconjunto D de un espacio métrico (X,d) si existen constantes $H>0$ y $\alpha\in(0,1)$ tales que*

$$d(f(z_1)-f(z_2)) \le H|z_1-z_2|^\alpha, \tag{2}$$

para todo $z_1,z_2\in D$, la constante $H=H(f;D,\alpha)$ es llamada consante de Hölder, α el exponente de Hölder. El conjunto de funciones continuas según Hölder o funciones Holderianas se denota por $C^\alpha(D)$. $C^\alpha(D,\mathbb{C})$ es el conjunto de aquellas funciones de valor complejo de tipo Hölder en D, y el conjunto $C^\alpha(D,\mathbb{R})$ las funciones Holderianas real valuadas.

Supongamos que el conjunto D es acotado, entonces si $f\in C^\alpha(D)$ para $\beta\le\alpha$

$$d(f(z_1)-f(z_2)) \le H|z_1-z_2|^\alpha = H|z_1-z_2|^{\alpha-\beta}|z_1-z_2|^\beta \le C|z_1-z_2|^\beta,$$

esto es $f\in C^\beta(D)$

TEOREMA 1. *Sea Γ curva suave cerrada en $\mathbb{C}$ y $\phi\in C^\alpha(\Gamma)$, entonces*

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(w)}{w-z}dw,$$

existe como integral principal de Cauchy sobre Γ y para $\tau\in\Gamma$

$$\psi(\tau) = \int_\Gamma \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-\tau} + \frac{1}{2}\phi(\tau).$$

Demostración:

Sea $\tau \in \Gamma$, $\epsilon > 0$, asi

$$\int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi(w)}{t-\tau} = \int\limits_{\Gamma-\epsilon} \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-\tau} + \phi(\tau)\int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{dw}{w-\tau},$$

recordando $\phi \in C^\alpha(\Gamma)$ y tomando $w = w(s)$, $\tau = w(s_0)$

$$\begin{aligned}
\left\| \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-\tau} \right\| &= \left\| \int_0^L \frac{\phi(w(s))-\phi(w(s_0))}{w(s)-w(s_0)} w'(s)ds \right\| \\
&\leq H\int_0^L |w(s)-w(s_0)|^{\alpha-1} ds \\
&\leq H\int_0^L \left\| \frac{w(s)-w(s_0)}{s-s_0} \right\|^{\alpha-1} \frac{1}{|s-s_0|^{1-\alpha}} ds \\
&\leq 2H\left(\min_{s\in[0,\ L]} |w'(s)| \right)^{\alpha-1} \int_0^L \frac{1}{s^{1-\alpha}} ds \\
&\leq \frac{2H}{\alpha}\left(\min_{s\in[0,\ L]} |w'(s)| \right)^{\alpha-1} L^\alpha,
\end{aligned}$$

por tanto existe

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-\tau} := \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-\tau},$$

y por el ejemplo anterior a este teorema concluimos que

$$\psi(\tau) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-\tau} + \frac{1}{2}\phi(\tau).$$

Para resultados posteriores definiremos una nueva función en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, consideremos la función*

$$\varphi(z) := \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-z} dw, \tau \in \Gamma,$$

la cual satisface $\lim_{z\to\tau} \varphi(z) = \varphi(\tau)$*, donde el límite se considera de forma no tangencial a* Γ.

El siguiente estimativo, no depende de $\tau \in \Gamma$, i.e, tomemos $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma$, cercanos y escojamos $z \notin \Gamma$ cerca a estos puntos, donde z no esta en la tangente a Γ en ninguno de estos puntos, luego

$$|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)| \leq |\varphi(\tau_1) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(\tau_2)|,$$

es claro que la función φ es cotinua en $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$, además tomemos z en la tangente de τ, y z' cercano a z y a τ de forma no tangencial, asi

$$|\varphi(\tau) - \varphi(z)| \leq |\varphi(\tau) - \varphi(z')| + |\varphi(z') - \varphi(z)|,$$

esto es, el límite también se satisface si nos acercamos a la curva de forma tangencial.

Demostración:
Consideremos $\epsilon > 0$, y definamos Γ_ϵ como antes, de esta forma

$$\begin{aligned}
\varphi(z) - \varphi(\tau) &= \int\limits_{\Gamma} \frac{(\phi(w) - \phi(\tau))(z-\tau)}{(w-z)(w-\tau)} dw \\
&= \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_\epsilon} \frac{(\phi(w) - \phi(\tau))(z-\tau)}{(w-z)(w-\tau)} dw + \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{(\phi(w) - \phi(\tau))(z-\tau)}{(w-z)(w-\tau)} dw \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

siendo

$$I_1 := \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_\epsilon} \frac{(\phi(w) - \phi(\tau))(z-\tau)}{(w-z)(w-\tau)} dw \qquad I_2 := \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{(\phi(w) - \phi(\tau))(z-\tau)}{(w-z)(w-\tau)} dw$$

Para el cálculo de la primera integral recordamos de la demostración del lema 1 que $dr = \pm ds k_0$ concluimos $\left|\frac{ds}{dr}\right| \leq \frac{1}{k_0}$, siendo s la parametrización por longitud de arco y $r = r(\zeta_1, \zeta_2) = |\zeta_1 - \zeta_2|$; llamemos β el ángulo de corte entre las rectas $\overrightarrow{zw}$, $\overrightarrow{\tau w}$, y ω el ángulo entre $\overrightarrow{z\tau}$ y $\overrightarrow{w\tau}$, como z no esta en la recta tangente a Γ en el punto τ, tomamos $\omega_0 \in (0, \omega)$, de esta forma

$$\left|\frac{z-\tau}{w-z}\right| = \frac{\sin\beta}{\sin\omega} \leq \frac{1}{\sin\omega_0} := K$$

por tanto

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq HK \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_\epsilon} \frac{|dw|}{|w-\tau|^{1-\alpha}}; \text{ y ya que } |dw| = ds \leq \frac{dr}{k_0} \\
&\leq \frac{2HK}{k_0} \int\limits_0^\epsilon \frac{dr}{r^{1-\alpha}} = \frac{2HK}{\alpha k_0}\epsilon^\alpha, \qquad (3)
\end{aligned}$$

Por otra parte en Γ_ϵ se satisface $|w - \tau| \geq \epsilon$ y escogiendo z tal que $|z - \tau| \leq \frac{\epsilon}{2}$, observamos

$$I_2 \leq \frac{2HL}{\epsilon}|z - \tau|, \qquad (4)$$

de (3) y (4), concluimos que $\lim\limits_{z\to\tau} \varphi(z) = \varphi(\tau)$ siendo este límite no tangencial.$\square$

Sea Γ curva suave cerrada en $\mathbb{C}$ y $\phi \in C^{\alpha}(\Gamma)$,definimos los valores en la frontera de la integral de Cauchy (1) como

$$\psi^{+}(\tau) := \lim_{z\to\tau,\ \ z\in D^{+}} \psi(z), \quad \psi^{-}(\tau) := \lim_{z\to\tau,\ \ z\in D^{-}} \psi(z),$$

donde D^{+} y D^{-}, definidas como antes; el siguiente teorema, debido a los matemáticos Julian Sochocki quien lo demostró en 1868, y Josip Plemelj quien lo redescubrió al trabajar en una solución para el problema de Riemann-Hilbert, nos permite relacionar el valor principal de Cauchy con los valores en la frontera de la integral (1).

Teorema 3 (Plemelj-Sokhotski). *Sea Γ curva suave cerrada en $\mathbb{C}$ y $\phi \in C^{\alpha}(\Gamma)$, entonces para $\tau \in \Gamma$,*

$$\psi^{+}(\tau) = \frac{1}{2}\phi(\tau) + \psi(\tau), \quad \psi^{-}(\tau) = -\frac{1}{2}\phi(\tau) + \psi(\tau), \tag{5}$$

siendo $\psi(\tau)$ el valor principal de Cauchy.

Demostración:

Consideremos $z \notin \Gamma$, luego por los teoremas 1 y 2

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\varphi(z) + \frac{\phi(\tau)}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z},$$

en un ejemplo anterior se mostró que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in D^{+} \\ \frac{1}{2} & \text{si } z \in \Gamma \\ 1 & \text{si } z \in D^{-}, \end{cases}$$

y aplicando la definición de ψ^{+}, ψ^{-}, tenemos

$$\begin{aligned} \psi^{+}(\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\varphi(z) + \phi(\tau) = \psi(\tau) + \frac{1}{2}\phi(\tau), \\ \psi^{-}(\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\varphi(z) + 0 = \psi(\tau) - \frac{1}{2}\phi(\tau), \end{aligned}$$

lo cual deseabamos mostrar.□

Las fórmulas (5) son conocidas como las fórmulas de Plemelj-Sokhotski, las cuales son equivalentes a

$$\psi^{+}(\tau) - \psi^{-}(\tau) = \phi(\tau), \quad \psi^{+}(\tau) + \psi^{-}(\tau) = 2\varphi(\tau), \text{ con } \tau \in \Gamma. \tag{6}$$

En el siguiente teorema, se muestra la regularidad de la función ψ sobre la curva de integración Γ, este resultado se conoce como Teorema de Plemelj-Privalov, y es de gran importancia en la teoría de ecuaciones integrales singulares y teoría de funciones de varíable compleja.

Teorema 4 (Plemelj-Privalov). *Bajo las hipótesis del teorema anterior las funciones* $\psi^+, \psi^-, \in C^\alpha(\Gamma)$.

Demostración:

Por las relaciones mostradas en el teorema 3, sólo es necesario demostrar que la función

$$\varphi(z) := \int\limits_\Gamma \frac{\phi(w)-\phi(\tau)}{w-z}dw, \tau \in \Gamma,$$

pertenece a $C^\alpha(\Gamma)$ y asi conclu que $\psi^+, \psi^-, \in C^\alpha(\Gamma)$.

Sean $t_1, t_2 \in \Gamma$,por tanto

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int\limits_\Gamma \left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2} - \frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw, \tag{7}$$

por la suavidad de la curva de integración, podemos tomar $\delta > |t_2 - t_1|$ tal que $\Gamma \cap \mathrm{B}_\delta(t_1)$ es un único arco abierto en la curva, sea $k := \frac{\delta}{|t_2-t_1|} > 1$; recordando la demostración del lema 1 y utilizando la misma notación $k_0\sigma(t_1,\ t_2) \leq |t_1 -\ t_2|$, donde $k_0 = \cos\alpha_0$, siendo α_0 un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ tal que $\sigma_0 = \delta$.

Por otra parte tomemos los puntos $a,\ b \in \Gamma$ tales que

$$\sigma(a,\ t_1) = \sigma(t_1,\ b) = 4\sigma(t_1,\ t_2),$$

denotemos por γ el arco ab; por comodidad notaremos $l := \sigma(t_1,\ t_2)$ y $r = |t_1 -\ t_2|$.

Consideremos las integrales

$$I_1 := \int\limits_\gamma \frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}dw, \qquad I_2 := -\int\limits_\gamma \frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}dw,$$

$$I_3 := \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma} \frac{\phi(t_1)-\phi(t_2)}{w-t_1}dw, \qquad I_4 := \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma} \frac{(\phi(w)-\phi(t_2))(t_2-t_1)}{(w-t_2)(w-t_1)}dw,$$

y observemos

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2)-\varphi(t_1) &= \int_\Gamma \left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}-\frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw\\
&= \int_\gamma \left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}-\frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw+\int_{\Gamma\setminus\gamma}\left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}-\frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw\\
&= \int_\gamma \left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}-\frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw+\int_{\Gamma\setminus\gamma}\left[\frac{(\phi(w)-\phi(t_2))(w-t_1)-(\phi(w)-\phi(t_1))(w-t_2)}{(w-t_2)(w-t_1)}\right]dw\\
&= \int_\gamma \left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}-\frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw+\int_{\Gamma\setminus\gamma}\left[\frac{(\phi(w)-\phi(t_2))(t_2-t_1)-(\phi(t_1)-\phi(t_2))(w-t_2)}{(w-t_2)(w-t_1)}\right]dw\\
&= \int_\gamma \left[\frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}-\frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}\right]dw+\int_{\Gamma\setminus\gamma}\left[\frac{(\phi(w)-\phi(t_2))(t_2-t_1)}{(w-t_2)(w-t_1)}\right]dw+\int_{\Gamma\setminus\gamma}\left[\frac{(\phi(t_1)-\phi(t_2))}{(w-t_1)}\right]dw\\
&= I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos que hacer el estimativo sobre cada una de las integrales. Para hacer estos estimativos, recordemos que la función ϕ satisface $|\phi(w_1)-\phi_{w_2}|\leq H|w_1-w_2|^\alpha$ para todo w_1,w_2 en la curva Γ, también consideraremos $w=w(s),\ t_i=w(s_i),\ \text{ para } i=1,2$ la parametrización por longitud de curva, donde s varía de 0 a L.

: Cálculo sobre I_1

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_\gamma \frac{\phi(w)-\phi(t_2)}{w-t_2}dw\right|\leq H\int_\gamma \frac{|dw|}{|w-t_2|^{1-\alpha}}\\
&\leq \frac{H}{k_0^{1-\alpha}}\int_0^{3l}\frac{ds}{|s-s_2|^{1-\alpha}}\leq \frac{2H}{k_0^{1-\alpha}}\int_0^{\frac{3}{k_0}r}\frac{ds}{s^{1-\alpha}}=\frac{2\cdot 3^\alpha H}{\alpha k_0}r^\alpha.
\end{aligned}$$

: Cálculo sobre I_2

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_\gamma \frac{\phi(w)-\phi(t_1)}{w-t_1}dw\right|\leq H\int_\gamma \frac{|dw|}{|w-t_1|^{1-\alpha}}\\
&\leq \frac{H}{k_0^{1-\alpha}}\int_0^{2l}\frac{ds}{|s-s_1|^{1-\alpha}}\leq \frac{2H}{k_0^{1-\alpha}}\int_0^{\frac{2}{k_0}r}\frac{ds}{s^{1-\alpha}}=\frac{2^{\alpha+1} H}{\alpha k_0}r^\alpha.
\end{aligned}$$

: Cálculo sobre I_3 Para realizar esta estimación supongamos sin pérdida de generalidad que $|a-t_1|\geq|b-t_1|$, recordemos que $\log(z)=\log(|z|)+\arg(z)$, donde $\arg(z)\in(\epsilon,\ \epsilon+2\pi)$ con

$\epsilon \in \mathbb{R}$, así

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{b-t_1}{a-t_1}\right| &\leq \log\left|\frac{a-t_1}{b-t_1}\right| + |\arg(a-t_1) - \arg(b-t_2)| \\ &\leq \left|\frac{a-t_1}{b-t_1}\right| + 2\pi \leq \frac{\sigma(a,\ b)}{k_0\sigma(t_1, b)} + 2\pi \\ &\leq \frac{4l}{2k_0 l} + 2\pi \leq \frac{2}{k_0} + 2\pi,\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}|I_3| &= \left|\int_{\Gamma\setminus\gamma} \frac{\phi(t_1)-\phi(t_2)}{w-t_1}dw\right| \leq Hr^{\alpha}\left|\int_{\Gamma\setminus\gamma}\frac{dw}{w-t_1}dw\right| \\ &= Hr^{\alpha}\left|\log\frac{b-t_1}{a-t_1}\right| \text{ y del estimativo anterior,} \\ &\leq 2H\left(\frac{1}{k_0+\pi}\right)r^{\alpha}\end{aligned}$$

: Cálculo sobre I_4 Notemos que para $w \in \Gamma\setminus\gamma$, $kr = \delta \leq |w-t_1|$, luego por desigualdad triangular $|w-t_1| - |t_1-t_2| \leq |w-t_2|$, de donde $\frac{w-t_1}{w-t_2} \leq \frac{k}{k-1}$, de esto llegamos a

$$\begin{aligned}|I_4| &= \left|\int_{\Gamma\setminus\gamma}\frac{(\phi(w)-\phi(t_2))(t_1-t_2)}{(w-t_2)(w-t_1)}dw\right| \leq Hr\int_{\Gamma\setminus\gamma}\frac{|dw|}{|w-t_1|\,|w-t_2|^{1-\alpha}} \\ &= Hr\int_{\Gamma\setminus\gamma}|w-t_1|^{\alpha-2}\left|\frac{w-t_1}{w-t_2}\right|^{1-\alpha}|dw| \leq Hr\left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\alpha}\int_{\Gamma\setminus\gamma}|w-t_1|^{\alpha-2}|dw| \\ &\leq Hr\left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\alpha}k_0^{\alpha-2}\int_{2l}^{L}s^{\alpha-2}ds \leq Hk_0^{\alpha-2}r\left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{2^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right)l^{\alpha-1} \\ &\leq Hk_0^{\alpha-3}r\left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{2^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right)r^{\alpha}.\end{aligned}$$

De todo lo anterior, concluimos

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq CH|t_1 - t_2|^{\alpha},$$

donde C es una constante que depende de α, k_0, k; por tanto $\varphi \in C^{\alpha}(\Gamma)$. □

En el siguiente teorema ψ es extendido por ψ^+ y ψ^- a la clausura de D^+, D^- respectivamente, para mostrar este resultado, necesitamos algunos resultados preliminares.

Lema 2. *Consideremos el radio estandar de* Γ, $R_0 = R_0(\alpha_0)$ *(definido en el lema 1),* $\rho \in (0,\ R_0)$, $t \in \Gamma,\ z \notin \Gamma,\ |z-t| \leq \rho$. *Supongamos que el ángulo no obtuso entre la recta* $\overrightarrow{zt}$ *y la tangente a* Γ *en* *el punto t, es mayor o igual a* $\beta_0 > \alpha_0 > 0$*. Entonces existe una constante positiva* $M = M(\alpha, \rho, \Gamma)$ *tal que para cada* $\phi \in C^\alpha(\Gamma)$ *la función*

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(w)}{w-z}dw,$$

satisface

$$|\psi'(z)| \leq M|z-t|^{\alpha-1}\left[\max_{\zeta\in\Gamma}|\phi(\zeta)| + H(\phi, \Gamma, \alpha)\right]. \tag{8}$$

Lema 3. *Para cada* $x, y \in \mathbb{R}^+ \cap \{0\}$ *y* $0 < \alpha < 1$

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha, \quad x^\alpha + y^\alpha \leq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha. \tag{9}$$

La demostración de los anteriores resultados se encuentra en [**2**].

Teorema 5. *Sea* Γ *curva suave cerrada en* $\mathbb{C}$ *y* $\phi \in C^\alpha(\Gamma)$*, entonces* $\psi^+ \in C^\alpha(\overline{D^+})$ *y* $\psi^- \in C^\alpha(\overline{D^-})$

Demostración:

Realizaremos esta demostración por pasos y únicamente sobre el dominio D^+ pues sobre D^- se realiza de forma análoga, además teniendo claro que por el teorema anterior $\psi^+, \psi^- \in C^\alpha(\overline{\Gamma})$, sólo tendremos que mostrar que la condición de Hölder se satisface cuando uno de los puntos esta en la curva y el otro en $D^\pm$, el otro caso será cuando los dos puntos estan dentro de su correspondiente dominio, esto es $z, z' \in D^\pm$.

: Si $t \in \Gamma$, $z' \in D^+$. Para $\beta \in (0, \alpha)$ consideramos una rama de la función multivaluada

$$\Psi(z) := \frac{\psi(z) - \psi^+(t)}{(z-t)^\beta}$$

de tal forma que la función Ψ restringida a esta rama, es analítica sobre D^+. Los valores de esta función sobre Γ son

$$\Psi^+(\zeta) := \frac{\psi^+(\zeta) - \psi^+(t)}{(z-t)^\beta};\ \zeta \in \Gamma$$

y como la función $\psi^+ \in C^\alpha(\Gamma)$ tenemos que $\Psi^+(\zeta)$ es continua en Γ, además

$$|\Psi^+(\zeta)| = \frac{|\psi^+(\zeta) - \psi^+(t)|}{|z-t|^\beta}| \leq\ H|\zeta - t|^{\alpha-\beta}$$

de la fórmula integral de Cauchy (ver [**7**] pag. 202) tenemos para $z \in D^+$, con $0 < \epsilon < |z-t|$

$$\Psi(z) = \int_{\partial(D^+\setminus\overline{B_\epsilon(t)})} \frac{\Psi^+(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \tag{10}$$

donde

$$\Psi^+(z) := \begin{cases} \Psi(z), & z \in D^+ \\ \Psi^+(z), & z \in \Gamma \end{cases}$$

queremos mostrar que el límite cuando ϵ tiende a cero en (10) existe; por tanto observemos de la definición de Ψ que si $z \in D^+, |z - t| \leq \epsilon$

$$|\Psi(z)| \leq \frac{C}{|z - t|^\beta},$$

donde C es una constante positiva, lo anterior lo concluimos del hecho de que $\psi(z)$ tiende $\psi^+(t)$ cuando $z \in D^+$ tiende a t, por definición de ψ^+.

Por otra parte si $|z - t| \geq \epsilon$

$$\left| \int\limits_{\partial(B_\epsilon(t) \cap D^+)} \frac{\Psi^+(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq C \int\limits_0^{2\pi} \frac{\epsilon^{1-\beta}}{|\epsilon e^{i\phi} + t - z|} \leq \frac{2\pi C \epsilon^{1-\beta}}{|t - z| - \epsilon},$$

en consecuencia el límite en (10) existe, luego podemos entender

$$\Psi(z) = \int\limits_{\partial(D^+} \frac{\Psi^+(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

en el sentido de valor principal de Cauchy, luego de los teoremas 2 y 3 inferimos la continuidad de Ψ^+ sobre $\overline{D^+}$, y aplicando el principio del máximo (ver [**7**] pag. 244)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi(z) - \psi^+(t)}{(z - t)^\beta} \right| &\leq \max_{\zeta \in \Gamma} |\Psi^+(\zeta)| \\ &\leq H(\psi^+; \Gamma, \alpha) \max_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - t|^{\alpha - \beta} \\ &\leq H(\psi^+; \Gamma, \alpha) M(\Gamma), \end{aligned}$$

siendo $M(\Gamma) := \text{máx}\{1, \text{diam}\, \Gamma\}$ y $H(\psi^+; \Gamma, \alpha)$ constante de Hölder para ψ^+, por tanto si tomamos $H' := H(\psi^+; \Gamma, \alpha) M(\Gamma)$ tenemos

$$\begin{aligned} |\psi(z) - \psi^+(t)| \leq H'|z - t|^\beta &\Rightarrow \lim_{\beta \to \alpha} |\psi(z) - \psi^+(t)| \leq \lim_{\beta \to \alpha} H'|z - t|^\beta \\ &\Rightarrow |\psi(z) - \psi^+(t)| \leq H'|z - t|^\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

: Si $z, z' \in D^+$, $\text{dist}(z', \Gamma) \leq \rho \leq R_0$, con $R_0 = R_0(\alpha)$ radio estanar de Γ. Sea $t \in \Gamma$ tal que $\text{dist}(z', \Gamma) = |z' - t|$ y consideremos

$$\Psi(z) := \frac{\psi(z) - \psi(z')}{(z - z')^\alpha},$$

es claro que Ψ es una función multivaluada, por tanto tomaremos una rama de Ψ en $D^+ \backslash \overrightarrow{tz'}$, sobre la cual la función Ψ es analítica; nuestro proposito es mostrar que la función Ψ es acotada en D^+.

Si $z \in \overrightarrow{tz'}$, entonces

$$\psi(z) - \psi(z') = \int_{z'}^{z} \psi'(\zeta)d\zeta,$$

como $\operatorname{dist}(z',\ \Gamma) = |z' - t|$, la recta $\overrightarrow{tz'}$ es ortogonal a la tangente a Γ en el punto t , luego podemos aplicar el Lema 2 y recordando el estimativo dado en el Lema 3 obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi(z) - \psi(z')| &= \left|\int_{z'}^{z} \psi'(\zeta)d\zeta\right| \leq \int_{z'}^{z} |\psi'(\zeta)|d\zeta \\ &\leq C\int_{z'}^{z} |\zeta - t|^{\alpha-1}|d\zeta| = C\left|\int_{|z'-t|}^{z-t} \tau^{\alpha-1}d\tau\right| \\ &= \frac{C}{\alpha}\,|\,|z-t|^{\alpha} - |z'-t|^{\alpha}| \leq \frac{C}{\alpha}|z - z'|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Por otra parte, como la función Ψ es analítica sobre $D^{+}\backslash\overrightarrow{tz'}$, aplicamos el principio del máximo y así obtenemos para $z \in D^{+}\backslash\overrightarrow{tz'}$,

$$|\psi(z) - \psi(z')| \leq H_1|z - z'|^{\alpha},$$

tomando $M := \text{máx}\left\{H_1,\ \frac{C}{\alpha}\right\}$, observamos que para $z,\ z' \in D^{+},\ \operatorname{dist}(z',\ \Gamma) \leq \rho \leq R_0$:

$$|\psi(z) - \psi(z')| \leq M|z - z'|^{\alpha}. \tag{12}$$

: Si $z, z' \in D^{+},\ \rho \leq \operatorname{dist}(z',\ \Gamma),\ \rho \in (0,\ R_0)$.

- $|z - z'| < \frac{1}{2}\rho$.
  De nuestra consideración, tenemos que $B_{\frac{1}{2}\rho}(z') \subset D^{+}$, e integrando a lo largo de la línea $\overrightarrow{tz'}$, donde $\operatorname{dist}(z',\ \Gamma) = |z' - t|$, tenemos

  $$\psi(z) - \psi(z') = \int_{z'}^{z} \psi'(\zeta)d\zeta,$$

  y por la fórmula integral de Cauchy

  $$\psi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\psi^{+}(w)}{(w - \zeta)^2}dw$$

de donde

$$\begin{aligned} |\psi'(\zeta)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi^+(w)}{(w-\zeta)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\psi^+(w)}{(w-\zeta)^2} \right| dw \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{4L}{\rho^2} \max_{w\in\Gamma} |\psi^+(w)|. \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} |\psi(z)-\psi(z')| &\leq \frac{2L}{\pi\rho^2} \max_{w\in\Gamma} |\psi^+(w)||z-z'| \\ &\leq M' \frac{2L}{\pi\rho^2} \max_{w\in\Gamma} |\psi^+(w)||z-z'|^\alpha, \end{aligned} \tag{13}$$

con $M' = \max_{(a,b)\in\overline{D^+}\times\overline{D^+}} |a-b|^{1-\alpha}$, el cual es finito puesto que el dominio D^+ es acotado.

- $|z-z'| \geq \frac{1}{2}\rho$.
  En este caso

$$\begin{aligned} |\psi(z)-\psi(z')| &\leq 2 \max_{\zeta\in\overline{D^+}} |\psi^+(\zeta)| \\ &\leq 4 \max_{\zeta\in\overline{D^+}} |\psi^+(\zeta)| \frac{|z-z'|}{\rho} \\ &\leq \frac{4M'}{\rho} \max_{\zeta\in\overline{D^+}} |\psi^+(\zeta)||z-z'|^\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

De (12), (13) y (14) concluimos que para $z,\ z' \in D^+$

$$|\psi(z)-\psi(z')| \leq H''|z-z'|^\alpha, \tag{15}$$

siendo $H'' := \max\{\frac{4M'}{\rho},\ \frac{2L}{\pi\rho^2}\}M' \max_{\zeta\in\overline{D^+}} |\psi^+(\zeta)$.

Finalmente de las ecuaciones (11), (15) y el teorema anterior, tenemos que $\psi^+ \in C^\alpha(\overline{D^+})$. □

Los resultados mostrados hasta el momento, serán de gran importancia para resolver el problema de Riemann, el cual se expondra en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Problema de valores en la frontera de Riemann

En este capítulo consideraremos Γ una curva cerrada, D^+ el domínio delimitado por esta curva y $D^- = \hat{\mathbb{C}} \backslash (\Gamma \cup D^+)$, consideremos $G \in C(\Gamma; \mathbb{C})$ y $G(z) \neq 0$ en Γ. Entonces el índice κ en G con respecto a Γ es la variación media de arg $G(z)$ mientras que z varía sobre Γ en dirección positiva, él índice se puede expresar como:

$$\kappa := \mathrm{ind} G = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d \arg G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \log G(z).$$

De la anterior definición sacamos las siguientes conclusiones:

: Al ser $G(z)$ continua, deducimos que el incremento de su argumento es un múltiplo de 2π, por tanto el índice κ es un número entero.

: El índice de un producto de funciones es la suma de los índices, además el índice de un cociente es la resta de los cocientes, esto es

$$\mathrm{ind}(G_1 G_2) = \mathrm{ind}(G_1) + \mathrm{ind}(G_2), \quad \mathrm{ind}\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = \mathrm{ind}(G_1) - \mathrm{ind}(G_2).$$

: Si D es un dominio, con frontera suave y G es una función analítica en D, entonces

$$\mathrm{ind} G = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \log G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{G'(t)}{G(t)} dt,$$

y por el principio del argumento

$$\mathrm{ind} G = n(0) - n(\infty),$$

donde $n(0)$ es el número de zeros y $n(\infty)$ el número de polos de G, contandose con multiplicidad.

Definición 3 (**Problema de Riemann**). *Sea Γ una curva cerrada simple y suave, G, $g \in C^\alpha(\Gamma; \mathbb{C})$, $0 < \alpha < 1$, con $G(w) \neq 0$ sobre Γ. Encuentre funciones analíticas ψ^+ en D^+ y ψ^- en D^- tal que*

$$\psi^+(w) = G(w)\psi^-(w) + g(w), \quad w \in \Gamma. \tag{16}$$

La función G es llamada el coeficiente del problema de Riemann y la función g el término libre.

Nota 1. *Consideremos primero el problema homogeneo*

$$\psi^+(w) = G(w)\psi^-(w), \quad w \in \Gamma. \tag{17}$$

si ψ^+, ψ^- soluciones a este problema tenemos:

$$ind(\psi^+) = ind(G) + ind(\psi^-),$$

si n^+, n^- son los ceros de las funciones ψ^+, ψ^- en D^+, D^- respectivamente, de las propiedades enunciadas anteriormente sobre el índice

$$n^+ = ind(G) - n^-. \tag{18}$$

La solución al problema homogeneo se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 6. *Para $0 < \kappa$ el indicie de G, el problema de valores en la frontera de Riemann homogeneo (8), tiene $\kappa + 1$ soluciones linealmente independientes dadas por*

$$\begin{aligned}
\psi_k^+(z) &= z^k e^{\gamma(z)}, \ \ z \in D^+, , \\
\psi_k^-(z) &= z^{k-\kappa} e^{\gamma(z)}, \ \ z \in D^+, 0 \leq k \leq \kappa, \\
\gamma &:= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{log[w^- \kappa G(w)]}{w - z} dw.
\end{aligned}$$

La solución general esta dada por combinaciones lineales de $\phi_k^\pm$. Para $\kappa < 0$ el problea homogeneo no tiene solución.

Demostración:

1. Por la nota 1, tenemos que $n^+ + n^- = \kappa$, donde n^+, n^- son los ceros de las funciones $\phi^\pm$ respectivamente, por tanto $\kappa \geq 0$, esto es, el problema homogeneo no tiene solución para κ negativo.
2. Si $\kappa = 0$, entonces
$$\int_\Gamma d\log(G(w))dw = 0,$$
por tanto las funciones $\log\phi^\pm, \log G(w)$ son univaluadas, además:
$$|\log(G(w)) - \log(G(z))| \leq M\,|G(w) - G(z)| \leq MH\,|w - z|^\alpha,$$
con
$$M = \max_{\tau\in\Gamma} \left| \frac{d}{dx} (\log(G)\ (\tau) \right|,$$

de esta forma, la función $\log(G)$ es Holderiana con exponente α, y notando que podemos reescribir el problema (8) como sigue

$$\log \phi^+(w) = \log G(w) + \log \phi^-(w), \quad w \in \Gamma,$$

el cual tiene solución por las fórmulas de Plemelj-Sokhotski (6), y esta está dada por la integral de Cauchy

$$\log\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\log G(w)}{w - z} dw := \gamma(z), \ z \notin \Gamma.$$

Sea $a = \phi^-(\infty)$, entonces $\phi(z) = a\mathrm{e}^{\gamma(z)}$, sin perdida de generalidad supondremos $a = 1$, en consecuencia

$$\phi(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}, \quad \phi^{\pm}(z) = \mathrm{e}^{\gamma^{\pm}(z)}, \ z \in D^{\pm}.$$

satisface $\phi^+ = G\phi^-$ sobre Γ y son holomorfas sobre D^+, D^- respectivamente.

3. Si $\kappa > 0$, asumamos que el sistema de coordenadas esta en D^+, luego la función $w^-\kappa$ tiene índice $-\kappa$ y $w^{-\kappa}G(w)$ es continua en Γ, utilizamos esta función para reescribir las condiciones de frontera

$$\phi^+(w) = w^{\kappa}[w^{-\kappa}G(w)]\phi^-(w). \tag{19}$$

Por otra parte

$$\operatorname{ind}(w^{-\kappa}G(w)) = \operatorname{ind}(w^{-\kappa}) + \operatorname{ind}(G(w)) = 0,$$

luego por el inciso 2 si consideramos

$$\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\log\omega^{-\kappa}G(w)}{w - z} dw,$$

tenemos

$$\mathrm{e}^{\gamma^+(z)} = z^{-\kappa}G(z)\mathrm{e}^{\gamma^-(z)}.$$

consideraremos las funciones $X^+(z) := \mathrm{e}^{\gamma^+(z)}, X^-(z) := z^{-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma^-(z)}$, las cuales no se anulas sobre D^+, $\mathbb{C}\backslash(D^+ \cup \Gamma)$ y observemos de (10) que

$$\begin{aligned} \frac{\phi^+(z)}{X^+(z)} &= \frac{z^{\kappa}[z^{-\kappa}G(z)]\phi^-(z)}{X^+(z)} = \frac{z^{\kappa}[z^{-\kappa}G(z)]\phi^-(z)}{z^{-\kappa}G(z)\mathrm{e}^{\gamma^-(z)}} \\ &= \frac{z^{\kappa}\phi^-(z)}{\mathrm{e}^{\gamma^-(z)}} = \frac{\phi^-(z)}{X^-(z)} \quad \text{sobre } \Gamma, \end{aligned}$$

además las funciones $\frac{\phi^+(z)}{X^+(z)}$, $\frac{\phi^-(z)}{X^-(z)}$ son analíticas en D^+, $\mathbb{C}\backslash(D^+ \cup \Gamma)$ y $\frac{\phi^-(z)}{X^-(z)}$ tiene un polo en el infinito. Como ambas funciones coinciden en la curva Γ, una es continuación analítica de la otra, por tanto podemos considerar una función entera h definida como sigue

$$h(z) := \begin{cases} \frac{\phi^+(z)}{X^+(z)} & \text{si } z \in D^+ \cup \Gamma, \\ \frac{\phi^-(z)}{X^-(z)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

esta función h además de ser analítica sobre $\mathbb{C}$, posee un polo en el infinito de orden al menos κ, luego por el Teorema de Liouville generalizado concluimos que la función h es un polinomio de grado al menos κ, denotemos por comodidad este polinomio como $\sum_{k=0}^{\kappa} a_k z^k$ con $a_k \in \mathbb{C}$ para todo k, de esta forma

$$\begin{aligned} \phi^+(z) &= h(z)X^+(z) = \sum_{k=0}^{\kappa} a_k z^k e^{\gamma^+(z)} \\ \phi^-(z) &= h(z)X^-(z) = \sum_{k=0}^{\kappa} a_k z^{k-\kappa} e^{\gamma^+(z)}. \end{aligned}$$

Sabemos que la función X^-, tiene un cero en el infinito miestras que h un polo en este punto, y tanto el órden del polo como del cero es κ, en consecuencia la función ϕ^- no se indetermina en el infinito, por lo tanto ϕ^- es analítica en $\hat{\mathbb{C}} \backslash (D^+ \cup \Gamma)$, y como ϕ^+ es holomorfa en D^+, entonces las funciones ϕ^-, ϕ^+ son soluciones del problema de Riemann.

De 1, 2 y 3 concluimos el resultado. □

Nota 2. *La función*

(20)
$$X(z) := \begin{cases} X^+(z), & si\ z \in D^+, \\ X^-(z), & si\ z \in D^-, \end{cases}$$

es denominada como ***función canónica*** *del problema de Riemann*

Esta función canónica será muy importante para resolver el problema no homogeneo (7) el cual esta dado por:

$$\psi^+(w) = G(w)\psi^-(w) + g(w), \quad w \in \Gamma$$

dividiendo ψ por X^+

$$\begin{aligned} \frac{\psi^+}{X^+} &= \frac{G\psi^-}{X^+} + \frac{g}{X^+} \\ \frac{\psi^+}{X^+} &= \frac{\psi^-}{X^-} + \frac{g}{X^+}, \end{aligned} \tag{21}$$

como $X^+ \in C^\alpha(\Gamma)$, además como g cumple la condición de continuidad de Hölder sobre Γ con exponente α tenemos por el teorema 4 $\frac{g}{X^+} \in C^\alpha(\Gamma)$, por tanto consideramos el problema

$$\mu^+(z) = \mu^-(z) + \frac{g}{X^+}(z), \text{ sobre } \Gamma \tag{22}$$

el cual, por el teorema 3 tiene una solución dada por

$$\mu(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)(w-z)}dw, \quad z \notin \Gamma,$$

restando (21) y (22)

$$\frac{\psi^{+}}{X^{+}} - \mu^{+} = \frac{\psi^{-}}{X^{-}} - \mu^{-} \text{ en } \Gamma;$$

observemos que la función $\frac{\psi}{X} - \mu$ es analítica en $\mathbb{C}$, por tanto $\psi := X\mu \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, analicemos ahora su comportamiento en el punto ∞

: Si $\kappa \geq 0$, la función X tiene un cero en ∞ y por definición de solución μ es analítica en $\hat{\mathbb{C}}$, por tanto $\psi^{+} \in \mathcal{O}(D^{+})$, $\psi^{-} \in \mathcal{O}(D^{-})$, lo cual necesitamos para que sean soluciones de (16).

: Por otra parte si $\kappa < 0$, la función X tiene un polo de este orden en infinito, así que para la regularidad de la función ψ, es necesario y suficiente que en este punto la función μ^{-} tienga un cero de orden κ.

Por expansión en serie de Laurent cerca de ∞, podemos expresar la función μ así

$$\begin{aligned}
\mu(z) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)(w-z)}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)}\frac{dw}{z(1-\frac{w}{z})} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)}\sum_{m=0}^{\infty} w^{m}z^{-m-1}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)}\sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1}z^{-k}dw \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)}w^{k-1}z^{-k}dw = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}
\end{aligned}$$

con $c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)}w^{k-1}dw,\ 1 \leq k$, como deseamos que el cero de μ en ∞ sea de orden exactamente κ precisamos que

$$\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^{+}(w)}w^{k-1}dw = 0, \quad 1 \leq k \leq -\kappa - 1,$$

estas se conocen como las condiciones de solubilidad sobre la función g.

Las anteriores observaciones las compactamos en el siguiente teorema.

Teorema 7. *Consideremos el problema de valores en la frontera de Riemann no homogeneo:*

$$\psi^{+}(w) = G(w)\psi^{-}(w) + g(w), \quad w \in \Gamma$$

denotemos por $\kappa := Ind(G)$.

- *Si $\kappa \geq 0$ la solución al problema (17) esta dado por*

$$\psi(z) := X(z)[\mu(z) + P_\kappa(z)],$$

  donde P_κ es un polinomio de orden menor o igual que κ.
- *Para $\kappa \leq 0$ el problema de valores en la frontera de Riemann tiene solución si y sólo si se satisfacen las condiciones de solubilidad, en este caso la solución es*

$$\psi(z) := X(z)\mu(z).$$

Demostración:
En el comentario anterior se demostró que para $\kappa := \mathrm{ind}G > 0$, la función

$$\psi := X[\mu + P_\kappa(z)]$$

soluciona el problema, siendo X la función canónica del problema de Riemann definida en (22), y

$$\mu(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^+(w)(w-z)}dw, \quad z \notin \Gamma,$$

y $P_\kappa(z)$ un polinomio de grado menor o igual a κ, es claro que esta función satisface la igualdad (16) y la regularidad sobre D^+, y D^-, esto último ya que X tiene un cero de orden κ en el infinito y por tanto la función entera $XP_\kappa(z)$ no se indetermina en ∞, además $X\mu$ es analítica en $\hat{C}\backslash\Gamma$, así ψ cumple las condiciones de regularidad sobre los dominios D^+ y D^-.

Por otra parte si $\kappa \leq 0$, la función $\psi := X\mu$ satisface la igualdad (16), y para su regularidad se necesita que se satisfagan las condiciones de solubilidad enunciadas anteriormente. $\square$

Con esto se resuelve el problema de valores en la fontera de Riemann, tanto el homogéneo como el no homogeneo.

Bibliografía

[1] M.P. Arciga, Asymptotics for Nonlinear Evolution Equation with Module-Fractional De-rivative on a Half-Line, Boundary Value Problems, vol. 2011, Article ID 946143, 29 pages, 2011. .

[2] G.W. Begehr. Complex Analytic methods for Partial Differential Equations: as introductory text. World Scientific. 1993.

[3] F.D. Gakhov, Boundary value problems. Fizmatgiz, Moscow, 1963; English translation, Pergamon Press, Oxford. 1966.

[4] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis. Vol III. John Wiley and Sons, Inc. 1986.

[5] S. Lang, Complex Analysis. Graduate text in Mathematics, Springer. 4th edition 1999..

[6] N.I. Mushelishvili, Singular integral equations. Fizmatgiz, Moscow, 1946; English translation, Noordhoff, Groningen, 1953.

[7] R. Remmert, Theory of Complex Functions. Graduate text in Mathematics, Springer. 2nd edition 1998.

[8] A.G. Sveshnikov and A.N. Tikhonov, The theory of functions of a complex variable, Moscow, 1982.

[9] Y. Liu. Solvability of multi-point boundary value problems for multiple term Riemann Liouville fractional differential equations Computers & Mathematics with Applications. 1 March 2012

[10] Yu.L. Rodin. The Riemann boundary problem on Riemann surfaces and the inverse scattering problem for the Landau-Lifschitz equation Physica D: Nonlinear Phenomena. Volume 11, Issues 1-2, May 1984, Pages 90?108

[11] L. Jiequana, S. Wanchengb, Z. Tongc, Z. Yuxid. Two-dimensional Riemannproblems: from scalar conservation laws to compressible Euler equations. Acta Mathematica Scientia Volume 29, Issue 4, July 2009, Pages 777-802.

[12] R. J. Whitley, T.V. Hromadka. Complex logarithms, Cauchy principal values, and the complex variable boundary element method Applied Mathematical Modelling. Volume 18, Issue 8, August 1994, Pages 423?-28