Universidad Nacional Autónoma de México,
Maestría en Ciencias Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Subórdenes lineales κ-densos de los números reales

T E S I N A

que para optar por el grado de
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

José Antonio Corona García

Tutor:

Dr. Ulises Ariet Ramos García
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM

Morelia Michoacán 13 de julio de 2015.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi familia, mis padres María Dolores y Mateo que siempre me han apoyando incondicionalmente durante toda mi vida. A mis hermanos Juan y Carlos que han ayudado a bien terminar este proceso.

A mi profesor y asesor de este trabajo Dr. Ulises Ariet Ramos García, con quien al último año he trabajado y que ha ayudado a ampliar mis conocimientos.

Agradezco mi maestro de siempre Fernando a quien considero que ha sido el responsable de que yo haya decidido estudiar Matemáticas. Al "profe"David con quien uno siempre considera para pedir consejo y orientación.

A mis amigos Berenice, Oscar y Yesenia con quien nos titulamos al parejo y que anduvimos todos juntos para todos lados haciendo los trámites (menos Berenice). También a Héctor, Sonia, Roberto, Pelayo, Tero, Ulises, Ana y Alejandro con quienes trabajé y compartí muchas experiencias durante mi maestría. A mis compañeros y profesores del posgrado con quienes he compartido el día a día durante mi maestría.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo de donde provengo como estudiante. A La Universidad Nacional Autónoma de México la cual junto con la UMSNH se forma el posgrado conjunto.

También muy importante a Catalina y Morelia gracias a las cuales todas las dudas y problemas administrativos han sido solucionados, con quien uno siempre pasa a preguntar si falta algo y que gracias a ellas todos nuestros documentos siempre están en tiempo y forma.

Por último pero necesario agradecer a Conacyt quien financió estos dos últimos años y quien agradezco que exista y que vuelva a becar mis estudios una vez más.

Índice general

Introducción

En uno de los primeros resultados concernientes a la estructura abstracta de órdenes lineales, G. Cantor demuestra que cualesquiera dos órdenes lineales densos numerables son isomorfos (a $\mathbb{Q}$). Aquí, un orden lineal es *denso* si no tiene un primer y un último elemento (i.e., *sin extremos*), y entre cualesquiera dos elementos hay un tercero. Una pregunta natural, motivada por este resultado clásico, es si la misma conclusión permanece válida para órdenes lineales densos no numerables. La situación en este caso, sin embargo, es mucho más complicada. En primer lugar, podemos tener dos órdenes lineales densos no numerables con la misma cardinalidad tal que uno de ellos contenga un intervalo numerable y el otro no. Por tal razón, por lo general se centra la atención sobre órdenes lineales κ-*densos*, para algún cardinal $\kappa-$órdenes lineales sin extremos con la propiedad de cada intervalo no vacío contiene exactamente κ elementos. Sin embargo, incluso en la clase de los órdenes lineales $\aleph_1$-densos, hay muchas diferencias cualitativas, siendo la separabilidad la más notable de estas. Aquí, un orden lineal es *separable* si contiene un suborden numerable denso respecto a la topología inducida por el orden. Para los propósitos del presente trabajo, centraremos nuestra atención en los órdenes lineales separables que son κ-densos.

B. D. Dushnik y E. W. Miller en [3] y [4] muestran que la clase de los órdenes lineales $2^{\aleph_0}$-densos es realmente complicada, prueban que hay $2^{\mathfrak{c}}$ órdenes lineales $\mathfrak{c}$-densos no isomorfos, donde $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Por tanto, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (*i.e.,* CH), la conclusión del Teorema de Cantor falla totalmente para órdenes lineales $\aleph_1$-densos. Sin embargo, J. E. Baumgartner en [1] demuestra (vía una extensión de forcing) que es relativamente consistente con **ZFC** que cualesquiera dos subórdenes $\aleph_1$-densos de $\mathbb{R}$ son isomorfos. En el mismo artículo, Baumgartner pregunta si es consistente con ZFC que $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ y que cualesquiera dos subórdenes $\aleph_2$-densos de $\mathbb{R}$ son isomorfos. Para facilitar la escritura, en la literatura del tema es común denotar por BA_κ al enunciado: $2^{\aleph_0} \geq \kappa$ y cualesquiera dos subórdenes κ-densos de $\mathbb{R}$ son isomorfos. Note que, por el resultado de Dushnik y Miller, cualquier modelo de $BA_{\aleph_2}$ necesariamente debe satisfacer que $2^{\aleph_0} > \aleph_2$.

El objetivo principal de este trabajo es presentar una prueba razonablemente completa del resultado de Baumgartner, así como también mencionar la estrategia propuesta en [10] para lograr un modelo donde $\mathrm{BA}_{\aleph_1}$ y $\mathrm{BA}_{\aleph_2}$ son ambos ciertos. Aunque el problema de Baumgartner ha sido popularizado por S. Shelah y otros ([12, Pg. 20]), poco progreso se ha hecho hasta la aparición de [10], debido a que los métodos para construir modelos de $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ son relativamente limitados.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos. En el Capítulo 1 además de algunas definiciones básicas se dará una demostración del Teorema de Cantor y del resultado de Dushnik y Miller que hemos mencionado más arriba. El Teorema de Cantor originalmente se demuestra usando el método conocido como *Back and forth*, sin embargo, con el fin de mostrar cómo generalizar una prueba para el caso de los $\aleph_1$-densos, se dará un prueba basada en el Lema de Rasiowa-Sikorski el cual usa argumentos de forcing. En el Capítulo 2 se expondrá un poco acerca de elementos necesarios para la técnica de forcing, acerca de *clubs* rápidos y el objetivo principal que es la construcción de un modelo donde $BA_{\aleph_1}$ es cierto, dicha construcción está basada en la construcción original de Baumgartner. Esta variación es posible encontrarla en [11]. Finalmente en el Capítulo 3 se expondrá brevemente los avances que hay al problema de Baumgartner los cuales podemos encontrar en [10].

En el caso de no definir algún objeto en este trabajo, o si se desea consultar alguna prueba adicional, en todos los casos se incluye una referencia para ello. Sin embargo, se recuerda que en [5], [6], [7] y [8], puede ser encontrado prácticamente cualquier objeto mencionado en este trabajo.

José Antonio Corona García
Junio de 2015

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definiciones

En este capítulo se expondrán algunas convenciones y definiciones básicas necesarias para el desarrollo del tema. Las letras $\alpha, \beta, \gamma...$ denotan ordinales, las letras κ, λ cardinales y κ^+ el mínimo cardinal más grande que κ. $[A]^\kappa$ es la colección de subconjuntos de A de tamaño κ, $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathfrak{c}$ denota la cardinalidad de los reales. Se definen los siguientes enunciados:

- CH que es la Hipótesis del Continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$,
- CH_1 que es $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, y
- GCH la Hipótesis generalizada del Continuo: $\forall\kappa(2^\kappa = \kappa^+)$.

Definición 1.1.1. Un *orden* $\leq$ sobre X es una relación antisimétrica, transitiva y reflexiva; adicionalmente es lineal si para cada $x, y \in X$ $x \leq y$ o $x \leq y$.

Definición 1.1.2. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$ y $\leq$ el orden usual sobre $\mathbb{R}$. Y es un conjunto denso si para cualquier intervalo abierto I, $Y \cap I \neq \emptyset$.

Definición 1.1.3. Un orden $(X, \leq)$ es *separable*, si existe $D \subseteq X$ que es denso y a lo más numerable.

Las definiciones anteriores son las necesarias para entender el lenguaje de los órdenes lineales. Las siguientes definiciones serán útiles para poder mostrar el Teorema de Cantor y en general su uso en el resto de este trabajo.

Definición 1.1.4. Un *orden parcial* es una tripleta $\mathbb{P} = \langle P, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle$ tal que:

(*i*) $P \neq \emptyset$,

(*ii*) $\leq_{\mathbb{P}}$ es un orden parcial sobre P,

(*iii*) $1_{\mathbb{P}}$ es el elemento máximo de P bajo $\leq_{\mathbb{P}}$.

(*iv*) $\leq_{\mathbb{P}}$ es un orden *separativo*, es decir para $p \in P$ existen q_1, q_2 tales que q_1 es incompatible con q_2 (no existe $p \in P$ tal que esté por debajo de ambos), $q_1 \leq_{\mathbb{P}} p$ y $q_2 \leq_{\mathbb{P}} p$.

Generalmente sólo se hace mención de $\mathbb{P}$ y se omite esta tripleta, también cuando es claro se omiten los subíndices en $\leq_{\mathbb{P}}$ y $1_{\mathbb{P}}$ y se entiende $p \in \mathbb{P}$ por $p \in P$.

Definición 1.1.5. Un *filtro* sobre un orden parcial $\mathbb{P}$ es un conjunto $G \subseteq \mathcal{P}(P)$ tal que:

1. $1_{\mathbb{P}} \in G$,
2. si $p \in G$ y $p \leq q$ entonces $q \in G$ y
3. si $p_0, p_1 \in G$ hay un $q \in G$ tal que $q \leq p_0$ y $q \leq p_1$.

Definición 1.1.6. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial y $D \subseteq P$, decimos que D es denso si para todo $p \in P$ hay $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Definición 1.1.7. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial, $\mathscr{D} = \{D_i \subseteq P : D \text{ es denso } \wedge i \in I\}$ una familia de densos en $\mathbb{P}$ y G un filtro. Decimos que G es $\mathscr{D}$-genérico si para todo $D \in \mathscr{D}$ $G \cap D \neq \emptyset$.

Para terminar esta sección se enuncia un teorema que se usará para probar el Teorema de Cantor y puede consultarse en [7, Pg. 87].

Teorema 1.1.8 (Rasiowa-Sikorski)**.** *Sea $\mathbb{P}$ un parcial y $\mathscr{D}$ una familia numerable de densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{D} = \{D_i : i < \omega\}$. Vamos a construir recursivamente una sucesión $\{p_i\}_{i<\omega}$ de elementos de $\mathbb{P}$ con las siguientes propiedades:

- $p_j \leq p_i$ para toda $i < j < \omega$,
- para cada $i < \omega$ hay $q_i \in D_i$ con $p_i \leq q_i$.

Tomamos p_0 como un elemento arbitrario en D_0. Supongamos que para $n > i \leq 0$ los p_i han sido construidos. Como D_n es denso en $\mathbb{P}$, existe $p \in D_n$ tal que $p \leq p_{n-1}$, tomamos tal p como p_n. Por lo tanto $\{p \in P : (\exists n)(p_n \leq p)\}$ es el filtro genérico requerido.

□

1.2 Teorema de Cantor

Esta sección tiene como objetivo mostrar una prueba para el Teorema de Cantor. Además se explicarán las definiciones necesarias y la generalización de este teorema.

Teorema 1.2.1 (Cantor). *Para cualquier $\langle X, \leq \rangle$ conjunto linealmente ordenado, numerable, denso en sí mismo y sin extremos existe un isomorfismo de orden ψ entre X y $\mathbb{Q}$ (el espacio de los números racionales).*

Demostración. Definimos $Fn(\mathbb{Q}, X) = \{f : f \text{ es función } \wedge dom(f) \subseteq \mathbb{Q} \wedge |dom(f)| < \omega \wedge ran(f) \subseteq X\}$ y $\mathbb{P} = \{f \in Fn(\mathbb{Q}, X) : f \text{ es estrictamente creciente}\}$. Considere $\langle \mathbb{P}, \supseteq \rangle$, $\mathscr{D} = \{D_q : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{D_x : x \in X\}$ tal que D_q, D_x son como sigue:

$$D_q = \{f \in \mathbb{P} : q \in dom(f)\}$$

y

$$D_x = \{f \in \mathbb{P} : x \in ran(f)\}$$

Afirmación 1. *Para $q \in \mathbb{Q}$ y $x \in X$ D_q y D_x son densos.*

Demostración. En efecto, sean $q \in \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{P}$. Queremos encontrar un $p' \in D_q$ tal que $p' \leq p$. Si $q \in dom(p)$ el mismo p funciona; suponga $q \notin dom(p)$. Sea $dom(p) = \{q_0, q_1 \ldots, q_n\}$ tal que $q_0 < q_1 < \ldots < q_n$ y $x_i = p(q_i)$, entonces $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ ya que p es estrictamente creciente. De esta forma hay un $i \leq n$ tal que $q_i < q < q_{i+1}$ o q es mayor o menor que cualquier elemento q_i. Tome $x \in X$ tal que si hay un $i \leq n$ con $q_i < q < q_{i+1}$, por lo tanto $x_i < q < x_{i+1}$, o bien si q es mayor o menor que cualquier elemento q_i tome x de la misma forma. Si $p' = p \cup (q, x)$, entonces $p' \leq p$ y $p' \in D_q$. Para mostrar que D_x es denso para cualquier x la prueba es análoga. □

Por las observaciones anteriores y por Lema de Rasiowa-Sikorski existe un filtro G $\mathscr{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$. Así, $\bigcup G = \psi : \mathbb{Q} \longrightarrow X$ es un isomorfismo de orden entre $\mathbb{Q}$ y X. □

En el interés de tratar de encontrar alguna manera de generalizar el anterior teorema, los órdenes lineales se restringieron a subconjuntos de números reales, es decir ya son órdenes separables, después, se trató de homogeneizar la propiedad de densidad pidiendo que estos sean “igual”de densos en todos los reales. Esta propiedad está dada por la siguiente definición.

Definición 1.2.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A es *κ-denso* si no tiene extremos y cada intervalo abierto no vacío en los reales tiene κ elementos de A.

De la anterior definición se concluye que los racionales son $\aleph_0$-densos en los reales y que en este sentido al aumentar la cardinalidad de el orden lineal, éste conserva una propiedad de densidad como en el caso de los racionales. Para considerar que tenga sentido la anterior definición, se considera $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Más aún, los conjuntos κ-densos en los reales cumplen la siguiente propiedad:

Teorema 1.2.3. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es κ-denso entonces $|A| = \kappa$.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de intervalos abiertos con extremos racionales. $\mathscr{B}$ es numerable, pues $\mathbb{Q}$ lo es. Considere $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$; entonces como $\mathbb{R} = \bigcup \mathscr{B}$, $A = \bigcup_{n\in\omega} B_n \cap A$ y por lo tanto

$$|A| = |\bigcup_{n\in\omega} B_n \cap A| \leq \Sigma_{n\in\omega}|A \cap B_n| = \Sigma_{n\in\omega}\kappa = \omega \times \kappa = \kappa.$$

□

Para finalizar esta sección se enuncia BA_κ la cual es una generalización a la pregunta de Baumgartner que aparece en [1].

Definición 1.2.4. BA_κ es la siguiente Afirmación:

"$2^{\aleph_0} \geq \kappa$ y cualesquiera dos subconjuntos de números reales κ-densos son isomorfos".

De la definición anterior, es claro que el Teorema de Cantor implica BA_ω. De aquí al final de este capítulo se darán los elementos necesarios para mostrar que $BA_\mathfrak{c}$ es falso, de esto se sigue que para que BA_κ sea cierto en algún modelo de ZFC necesariamente $\kappa < \mathfrak{c}$.

1.3 Familias de Conjuntos

Esta sección la agregamos para poder hablar un poco sobre subórdenes de los reales de tamaño $\mathfrak{c}$, sin embargo teoremas como el Δ-sistema también serán útiles para construcciones posteriores.

Una familia A es llamada Δ-sistema si hay un conjunto r tal que para cualquiera elementos distintos $a, b \in A$ se tiene que $a \cap b = r$. Si $|A| \geq 2$, r está determinado por A y es llamado raíz. Una demostración del Lema del Δ-sistema puede encontrarse en varios textos de teoría de conjuntos, sin embargo, particularmente en [7, Pg. 67] aparece una prueba muy detallada.

Teorema 1.3.1 (Δ-sistema)**.** *Cualquier familia no numerable de conjuntos finitos contiene una subfamilia no numerable que es un Δ-sistema.*

Definición 1.3.2. Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de un X fijo. Decimos que $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena, si $|A| = |X|$ y $|A \cap B| < |X|$ para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$.

Los siguientes dos teoremas serán útiles para contar órdenes no isomorfos, su prueba aparece en [7, Pg. 83].

Teorema 1.3.3. *Sea κ regular. Entonces existe una familia casi ajena $\mathscr{A}$ de subconjuntos de κ tal que $|\mathscr{A}| = \kappa^+$.*

Teorema 1.3.4 (CH)**.** *Existe $\mathscr{A} \subseteq \omega_1$ familia casi ajena de tamaño $2^{\aleph_1}$.*

1.4 Subórdenes $\mathfrak{c}$-densos

En esta última sección se analizará subórdenes lineales del tamaño del continuo. Primero, se construye un ejemplo de un suborden $\mathfrak{c}-$denso E tal que cualquier suborden de E no es isomorfo a E. De esta forma, $BA_{\mathfrak{c}}$ es falso. El segundo teorema deja de lado un poco la cuestión de ser $\mathfrak{c}$-denso y calcula la cantidad de subórdenes de tamaño $\mathfrak{c}$ que existen.

Teorema 1.4.1 (Dushnik-Miller [3])**.** *Existe E un subconjunto denso en $\mathbb{R}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que no es isomorfo como orden (lineal) a ningún suborden propio de E.*

Demostración. Como todo automorfismo de orden de $\mathbb{R}$ es en particular una función continua, se tiene que:

$$\mathbb{T} = \{T : T \text{ es un automorfismo de } \mathbb{R} \text{ distinto de la identidad}\}$$

es de tamaño $\mathfrak{c}$.

Sea $\mathbb{T} = \{T_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración de T. Note que para todo $\alpha < \mathfrak{c}$, $F_\alpha = \{r \in \mathbb{R} : T_\alpha(r) = r\}$ es un conjunto cerrado no denso, luego $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus F_\alpha$ es un abierto no vacío y por tanto de tamaño $\mathfrak{c}$. Así, podemos construir por recursión dos $\mathfrak{c}$-sucesiones $\langle p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ y $\langle q_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ tales que para cada α:

1. $T_\alpha(p_\alpha) = q_\alpha \neq p_\alpha$,
2. $p_\alpha, q_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha}\{p_\beta, q_\beta\}$.

Hagamos $E = \{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y verifiquemos que E es el conjunto deseado. Para mostrar que E es denso, sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $a < b$. Note que existe un $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que T_α es la identidad fuera de (a, b) y $T_\alpha(x) \neq x$ para cada $x \in (a, b)$. Por lo tanto necesariamente $p_\alpha \in (a, b)$.

Ahora sólo resta ver que E no es isomorfo a un suborden propio E'. En efecto, suponga que hay $f : E \longrightarrow E'$ un isomorfismo de orden. Como $f \neq id$ y E es denso, se sigue que existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $T_\alpha \upharpoonright E = f$. Así, $f(p_\alpha) = T_\alpha(p_\alpha) = q_\alpha \notin E$, lo cual es una contradicción.

□

Antes de enunciar el siguiente teorema, es necesario recalcar que la hipótesis $\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ que aparecerá en el teorema es un debilitamiento de CH. Para explicar está hipótesis primero es necesario hablar un poco acerca de conjuntos nunca densos. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es nunca denso si para cualquier abierto U de los reales hay un abierto $U' \subseteq U$ tal que $U' \cap X = \emptyset$.

Un conjunto es magro si es unión numerable de conjuntos nunca densos y

$$\mathsf{add}(\mathcal{M}) = min\{|\mathcal{I}| : \bigcup \mathcal{I} \text{ no es magro} \wedge (\forall I \in \mathcal{I}) I \text{ es magro}\}.$$

De la definición no es complicado convencerse que $\mathsf{add}(\mathcal{M})$ es mayor o igual a ω_1 y que este es un cardinal regular. Entonces $\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ dice que la unión de menos que $\mathfrak{c}$ magros es un conjunto magro.

Teorema 1.4.2 (Dushnik-Miller [4]). *($\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$) Existe un subconjunto $N \subseteq \mathbb{R}$ de tamaño $\mathfrak{c}$ tal que si N_1, N_2 son dos subconjuntos ajenos de N de tamaño $\mathfrak{c}$ y ϕ es cualquier función creciente o decreciente definida en N_1, entonces $\phi[N_1] \neq N_2$.*

Demostración. Sea $\langle f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ una enumeración de todas las funciones monótonas en $\mathbb{R}$ y tales que $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f_\alpha(x) = x\}$ es nunca denso en $\mathbb{R}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ denotamos por D_α al conjunto de valores donde f_α es constante en un intervalo con interior no vacío. Note que D_α es a lo más numerable, ya que $f^{-1}[D_\alpha]$ es una unión disjunta de intervalos en $\mathbb{R}$ con interior no vacío.

Por recursión se construye $N = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tal que:

(*i*) $x_\alpha \neq x_\beta$ para todo $\beta < \alpha$,

(*ii*) $x_\alpha \neq f_\mu(x_\beta)$ para todo $\mu < \alpha$ y $\beta < \alpha$,

(*iii*) $f_\mu(x_\alpha) \neq x_\alpha$ para todo $\mu < \alpha$ y

(*iv*) $f_\mu(x_\alpha) \neq x_\beta$ o $f_\mu(x_\alpha) \in D_\mu$ para todo $\mu < \alpha$ y $\beta < \alpha$.

Sea x_0 un número real cualquiera y suponga que para todo $\beta < \alpha$, x_β ha sido definido. Mostremos que es posible elegir un x_α que satisface las condiciones anteriores. Las primeras dos condiciones se pueden cumplir esquivando un conjunto de tamaño menor que $\mathfrak{c}$. Para asegurar la tercera condición, dado que $\alpha < \mathfrak{c} = \mathsf{add}(\mathcal{M})$ se tiene que

$\bigcup_{\mu<\alpha} E_\mu$ es magro, entonces cualquier $x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{\mu<\alpha} E_\mu$ cumple (iii). Finalmente para la cuarta condición, mostremos que cualquier $x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{\mu<\alpha}\{f_\mu^{-1}(x_\beta) : \beta < \alpha \wedge |f^{-1}(x_\beta)| \leq 1\}$ satisface (iv). En efecto, fije $\mu < \alpha$ y suponga que $f_\mu(x) = x_\beta$ para algún $\beta < \alpha$, entonces necesariamente $|f^{-1}(x_\beta)| \geq 2$. Sea $x' \in f^{-1}(x_\beta)$ con $x' \neq x$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $x < x'$. Como f_μ es monótona, $f[(x, x')] = x_\beta$ y por lo tanto $f_\mu(x) = x_\beta \in D_\mu$. Con todo lo anterior hay un conjunto comagro que cumple (i), (ii), (iii) y (iv). Por lo tanto basta elegir un x_α de tal forma que sea un elemento de este conjunto comagro.

Resta ver que N es el conjunto deseado. Sea $\psi : N_1 \longrightarrow N_2$ una función monótona tal que $|N_1| = |N_2| = \mathfrak{c}$ y $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Sea $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow N_1$ monótona tal que $\Psi \restriction N_1 = \psi$. Entonces $\Psi = f_\mu$ para algún $\mu < \mathfrak{c}$, luego $\psi[N_1] = f_\mu[N_1] \subseteq f_\mu[N]$. Por (ii), para $\alpha > \mu$ si $f_\mu(x_\alpha) \in N$, entonces $f_\mu(x_\beta) \neq x_\alpha$, es decir $f[\{x_\beta : \beta < \alpha\}] \cap N \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$. Por (iii), $f_\mu(x_\alpha) \neq x_\alpha$ y por (iv) si $f(x_\alpha) = x_\beta$, entonces $f(x_\alpha) \in D_\mu$. Por lo tanto $f_\mu[N] \cap N \subseteq \{f(x_\beta) : \beta < \mu\} \cup D_\mu$. Así $\psi[N_1] \neq N_2$, ya que de lo contrario si $\psi[N_1] = N_2$, se tendría que $|N_2| < \mathfrak{c}$, lo cual sería una contradicción.

□

Corolario 1.4.3. *Sean N_1, N_2 subconjuntos de tamaño $\mathfrak{c}$ de N tal que $|N_1 \cap N_2| = \mathfrak{c}$, entonces no existe una función monótona tal que $f(N_1) = N_2$.*

Demostración. Sea $\psi : N_1 \longrightarrow N_2$ y suponga que $\psi(N_1) = N_2$, como $|N_1 \cap N_2| < \mathfrak{c}$ es de tamaño $\mathfrak{c}$ se tiene que $|N_1 \setminus N_2| = \mathfrak{c}$, $\psi \restriction A : A \longrightarrow N_2 \setminus N_1$ con $A = \psi^{-1}[N_2 \setminus N_1]$ es una función monótona, entonces $A \cap N_2 \setminus N_1 = \emptyset$ y $\psi \restriction A(A) = N_2 \setminus N_1$, Lo cual es una contradicción al teorema anterior. De esta forma, tal ψ no existe. □

Como cualquier isomorfismo es una función monotona, calcular cuántos subórdenes lineales no isomorfos de tamaño $\mathfrak{c}$ es equivalente a crear familias casi ajenas sobre el conjunto N del Teorema 1.4.2.

Corolario 1.4.4. *Sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha \subseteq N : |A_\alpha| = \mathfrak{c} \wedge \alpha < \kappa\}$ una familia casi ajena, entonces A_α no es isomorfo como orden lineal a A_β, para cualquier α, β menor que κ.*

Del corolario anterior, si es el caso que $\mathfrak{c} = add(\mathcal{M})$ o se cumpla CH se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 1.4.5. *Si $\mathfrak{c}$ es regular y $add(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, entonces hay por lo menos $\mathfrak{c}^+$ conjuntos no isomorfos de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.3 como $add(\mathcal{M})$ es regular, hay una familia casi ajena de subconjuntos de N de tamaño $\mathfrak{c}^+$ y por el Corolario 1.4.4 hay $\mathfrak{c}^+$ conjuntos no isomorfos de tamaño $\mathfrak{c}$.

Corolario 1.4.6. *Suponga CH entonces hay $2^{\aleph_1}$ conjuntos no isomorfos de números reales de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Por el Teorema 1.3.4 para N, hay una familia casi ajena de subconjuntos de N de tamaño $\mathfrak{c}$ casi ajenos cuya cardinalidad es $2^{\aleph_1}$ y por el Corolario 1.4.4 hay $2^{\aleph_1}$ conjuntos no isomorfos de números reales.

$\square$

Este último corolario maximiza la cantidad de subórdenes no isomorfos, ya que por CH hay $2^{\aleph_1} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ subórdenes no ismomorfos, es decir la cantidad máxima posible.

Capítulo 2

Isomorfismo de Baumgartner

Probablemente el resultado más relevante sobre ordenes lineales $\aleph_1$-densos lo hizo Baumgartner en [1], donde se demostró que existía un modelo donde cualquier par de $\aleph_1$-densos es isomorfo. En este capítulo se trabajará hacia un modelo donde todos los $\aleph_1$-densos son isomorfos. Para ello se hablará de algunos elementos básicos para la técnica de forcing y después se hablará acerca de clubs rápidos. En las últimas dos secciones se mostrará que para $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\aleph_1$-densos es posible construir un forcing *c.c.c.* el cual agrega una función de isomorfismo entre A y B. Una vez creado este paso, se va a iterar hasta concluir con un modelo donde cualquier par de $\aleph_1$-densos de los reales son isomorfos.

2.1 Elementos de forcing

En el capítulo anterior se definió lo que es un orden parcial, sin embargo es muy común también llamarlos a estos un *forcing*. Varios de los elementos para conjuntos parcialmente ordenados antes vistos tienen una versión en forcing. Un filtro G sobre $\mathbb{P}$ es $\mathbb{P}$-genérico si para cualquier D conjunto denso en $\mathbb{P}$ $G \cap D \neq \emptyset$, la diferencia entre un filtro $\mathbb{P}$-genérico y un filtro $\mathscr{D}$-genérico es que en el primer caso sí tienen que intersectar todos los densos. p y q son compatibles si hay un $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$ y p, q son llamados incompatibles, si no son compatibles.

Estrictamente hablando $\mathbb{V}[G]$ consiste de todos los conjuntos que pueden ser construidos a partir de G por procesos definibles en $\mathbb{V}$. De hecho cada conjunto tendrá un nombre en $\mathbb{V}$. Informalmente un $\mathbb{P}$-nombre τ se define de manera recursiva a partir de sus elementos, es decir, $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$, donde σ es un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in \mathbb{P}$. $\mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ es la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres. También por recursión, se define la valuación de los nombres según G de la siguiente forma:

$$val(\tau, G) = \tau_G = \{val(\sigma, G) : \exists p \in G(\langle \sigma, p\rangle \in \tau)\}$$

y $\mathbb{V}[G] = \{\tau_G : \tau \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}\}$.

Entonces, si se toma un conjunto x en $\mathbb{V}[G]$ éste tiene un nombre en $\mathbb{V}$ y se denota por $\dot{x}$ y si es el caso de que $x \in \mathbb{V}$ existe un nombre canónico $\{\langle y, 1\rangle : y \in x\}$ que se denota por $\check{x}$, es muy común en el caso de $\check{x}$ omitir el símbolo cuando es claro que $x \in \mathbb{V}$.

El símbolo $\Vdash$ denota la relación de forzar. Así, para $p \in \mathbb{P}$ $p \Vdash \psi$ quiere decir que ψ es cierta en $\mathbb{V}[G]$ para cualquier filtro genérico tal que $p \in G$ y se denota $1 \Vdash \psi$ como $\Vdash_{\mathbb{P}} \psi$. Esta relación inicialmente está definida en la extensión pero es posible definir una equivalente en el modelo base. Un método para esto es expuesto en [8, Cap. IV]. $\mathbb{V}[G]$ es un modelo para ZFC.

Detrás de esta técnica hay varios detalles que se omiten en cada argumento. La intención de esta sección es mencionar lo necesario para poder recordar los ingredientes necesarios para la obtención de modelos que cumplan ciertos enunciados de la Teoría de Conjuntos. Se omitirán muchos detalles y definiciones que pueden encontrarse en varios textos introductorios. Para finalizar esta sección se enunciarán algunas propiedades que tienen que ver con el forcing, los nombres y la preservación de ciertos objetos en la extensión.

Definición 2.1.1. Si $\mathbb{P}$ es un forcing, entonces $A \subseteq \mathbb{P}$ es llamada *anticadena* en $\mathbb{P}$ si y sólo si $\forall p, q \in A$ p y q son incompatibles.

Definición 2.1.2. Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Decimos que $\mathbb{P}$ cumple la *condición de la cadena contable* (*c.c.c.*) si para cualquier anticadena A en $\mathbb{P}$ se tiene que $|A| \leq \aleph_0$.

La importancia de destacar esta propiedad, es primordialmente contar el numero de $\mathbb{P}$-nombres para algún conjunto. Por otra parte las anticadenas maximales intersectan siempre al genérico G. Esto permite crear nombres más manejables para conjuntos en $\mathbb{V}[G]$. Además esta condición *c.c.c.* también es útil para preservar cardinales, ya que un forcing *c.c.c.* preserva cardinales.

Definición 2.1.3. Para $\tau \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ un *buen nombre* para un subconjunto de τ es de la forma $\bigcup\{\{\sigma\} \times A_\sigma : \sigma \in dom(\tau)\}$, con A_σ una anticadena de $\mathbb{P}$.

Lema 2.1.4. *Fije $\tau \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$, $\lambda = |dom(\tau)|$. Supongamos que $\kappa = |\mathbb{P}|$ y $\mathbb{P}$ un forcing c.c.c. entonces no hay más de κ^λ buenos nombres para subconjuntos de τ.*

Demostración. Como $\mathbb{P}$ es *c.c.c.* hay a lo más $\kappa^{\aleph_0}$ anticadenas y por lo tanto no hay más de $(\kappa^{\aleph_0})^\lambda = \kappa^{\aleph_0 \cdot \lambda} = \kappa^\lambda$ buenos nombres. $\square$

Los siguientes lemas enuncian la importancia de los buenos nombres ya que al contar cuántos buenos nombres hay para algún subconjunto de un conjunto τ se cuenta en realidad cuántos subconjuntos de τ habrá en la extensión. Las demostraciones pueden consultarse en [8, Pg. 275,276].

Teorema 2.1.5. *Si $\mathbb{P}$ es un forcing y $\tau, \mu \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ hay un buen nombre $\vartheta \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ tal que $\Vdash_{\mathbb{P}} \mu \subseteq \tau \rightarrow \mu = \vartheta$.*

Lema 2.1.6. *Fije $\mathbb{P}$ un forcing, suponga que en $\mathbb{V}$ κ, λ, δ son cardinales tales que $\kappa = |\mathbb{P}|$ y $\delta = \kappa^{\lambda}$. Entonces en $\mathbb{V}[G]$ $2^{\lambda} \leq \delta$.*

Corolario 2.1.7. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing c.c.c. de tamaño ω_1 y tal que en $\mathbb{V}$ es cierto CH y CH_1, entonces, hay a lo más $\aleph_2$ buenos nombres para subconjuntos de $\aleph_1$.*

Demostración. se define $\mathcal{A}$ como la colección de todas las anticadenas en $\mathbb{P}$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico. Por hipótesis $\mathbb{P}$ cumple *c.c.c.* entonces cada anticadena es a lo más numerable y por lo tanto $|\mathcal{A}| \leq [\aleph_1]^{\leq \aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$. Como $\mathbb{V}$ es un modelo de CH $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$ por Teorema 2.1.5 si $\sigma \subseteq \omega_1$ σ está determinado por una función $f : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{A}$. $\mathbb{V}$ también es modelo de CH_1, se tiene que la cantidad de funciones de este tipo son a lo más $|\mathcal{A}^{\aleph_1}| = \aleph_1^{\aleph_1} = \aleph_2$ y por lo tanto hay a lo más ω_2 nombres para subconjuntos de ω_1. □

Los anteriores resultados muestran que hay a lo más ω_2 $\mathbb{P}$-nombres para subconjuntos de ω_1, como $\mathbb{V}$ es un modelo de CH se puede pensar que un subórden de los reales $\aleph_1$-denso es un subconjunto de ω_1, de esta forma para contar los posibles subórdenes de los reales $\aleph_1$-densos es suficiente con contar los buenos nombres para subconjuntos de ω_1.

2.2 Iteración

Una vez diseñado un forcing que agregue un isomorfismo entre dos subórdenes $\aleph_1$-densos, se va a trabajar en un método para poder hacer lo mismo con cualquier par de subórdenes $\aleph_1$-densos de los reales. Para ello se amplía la noción de forcing conocida como iteración, la iteración es un método que en nuestro caso ayudará a agregar un isomorfismo por cada par de $\aleph_1$-densos. En esta sección se va a hacer mención de los elementos básicos para poder entender la iteración.

Definición 2.2.1. Sea α un ordinal. Una α-iteración de soporte finito es un par de sucesiones $\langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$ y $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ tal que:

- Cada $\mathbb{P}_\xi$ es un forcing.
- Todas las condiciones en $\mathbb{P}_\xi$ son sucesiones de longitud ξ.

- Cada $\mathbb{Q}_\xi$ es un $\mathbb{P}_\xi$-nombre tal que es forzado a ser un forcing.
- $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ (el forcing trivial).
- Las condiciones en $\mathbb{P}_{\xi+1}$ son sucesiones $p = \langle p(\mu) : \mu < \xi + 1 \rangle$ tal que

  (i) $p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$,

  (ii) $p(\xi) \in dom(\dot{\mathbb{Q}})_\xi$ y $p \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} p(\xi) \in \dot{\mathbb{Q}}_\xi$

  Las condiciones del orden son $p^* \leq p$ si y sólo si $p^* \restriction \xi \leq p \restriction \xi$ y $p^* \restriction \xi \Vdash p^*(xi) \leq p(\xi)$.

- Si η es límite, $\mathbb{P}_\eta$ consiste de las sucesiones $p = \langle p(\mu) : \mu < \eta \rangle$ de tal forma que:

  (i) $(\forall \xi < \eta) p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$,

  (ii) Para todo $\mu < \eta$ excepto una cantidad finita $p(\mu) = \dot{1}_\mu$. El orden se extiende de forma natural, $p^* \leq p$ si y sólo si $(\forall \xi < \eta) p^* \restriction \xi \leq p \restriction \xi$.

Note que la iteración está completamente determinada por $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\xi : \xi < \alpha \rangle$. El siguiente teorema es la versión *c.c.c.* en el caso de iteraciones y una demostración de este aparece en [8, Pg. 334].

Teorema 2.2.2. *Sea $\langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$ y $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ una α-iteración de soporte finito en $\mathbb{V}$, suponga que para cada $\xi < \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ es c.c.c.". Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ es c.c.c.*

Para finalizar esta sección, se enunciaran tres resultados que serán particularmente útiles para la iteración que se desarrollará más adelante, estos tienen que ver con preservación de hipótesis en la iteración y para contar buenos nombres.

Lema 2.2.3. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing c.c.c. tal que $|\mathbb{P}| = \omega_1$, si $\Vdash_{\mathbb{P}} |\mathbb{Q}| = \omega_1$, entonces $|\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}| = \omega_1$*

Demostración. Como $\Vdash_{\mathbb{P}} |\mathbb{Q}| = \omega_1$, sin pérdida de generalidad $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{Q}} \subseteq \omega_1$. Así, $\dot{\mathbb{Q}} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{\{\alpha\} \times A_\alpha : A_\alpha \text{ es una anticadena}\}$, entonces $|\dot{\mathbb{Q}}| \leq |\bigcup_{\alpha<\omega_1} \{\{\alpha\} \times A_\alpha : A_\alpha \text{ es una anticadena}\}|$ y como $|\mathbb{P}| = \omega_1$ y es *c.c.c.* se tiene que $|\dot{\mathbb{Q}}| \leq \Sigma_{\alpha<\omega_1} \omega = \omega_1$ y por lo tanto $|\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}| = \omega_1$. □

Corolario 2.2.4 (CH, CH_1)**.** *Sea una iteración $\langle \mathbb{P}_\alpha : \alpha \leq \omega_2 \rangle$, $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ tal que $(\forall \alpha < \omega_2)\ |\mathbb{P}_\alpha| = \omega_1 \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es c.c.c. y $\mathbb{P}_\alpha$ es c.c.c. entonces $\forall \alpha < \omega_2 \mathbb{V}[G \restriction \alpha]$ es un modelo de CH y CH_1.*

Corolario 2.2.5 (CH, CH_1)**.** *Sea una iteración $\langle \mathbb{P}_\alpha : \alpha \leq \omega_2 \rangle$, $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ tal que $(\forall \alpha < \omega_2)\ |\mathbb{P}_\alpha| = \omega_1$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es c.c.c. y $\mathbb{P}_\alpha$ es c.c.c. entonces si $A \subseteq \omega_1$ hay a lo más ω_2 $\mathbb{P}_\alpha$-nombres para subconjuntos de ω_1.*

2.3 Clubs rápidos

Definición 2.3.1. Sean $A, B \in [\omega_1]^{\omega_1}$, se dice que $A \subseteq^* B$ si existe un $Y \subseteq A$ tal que $|Y| < \omega_1$ y $A \setminus Y \subseteq B$.

Observe que de la definición anterior si $A, B \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y $A \subseteq^* B$ existe un ordinal α tal que $A \setminus \alpha \subseteq B$.

Definición 2.3.2. Suponga que $\mathcal{F}$ es una colección de cerrados y no acotados (clubs) de ω_1. Un club C se llama *rápido* con respecto a $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$, $C \subseteq^* F$. Si existe un club rápido para $\mathcal{F}$ se dice que $\mathcal{F}$ puede ser diagonalizado.

Proposición 2.3.3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de clubs en ω_1 tal que $|\mathcal{F}| = \aleph_1$, entonces existe $C \subseteq \omega_1$ club tal que C es rápido con respecto a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Tome $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Se define la intersección diagonal para $\mathcal{F}$ como:

$$\triangle_{\alpha<\omega_1} F_\alpha = \{\xi < \omega_1 : \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} F_\alpha\}$$

de la definición, usando $C = \triangle_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$ se tiene que $C \setminus \alpha \subseteq F_\alpha$. Una prueba para ver que C es club se encuentra en [5, Pg. 92]. $\square$

Para la construcción de un forcing que que necesitará, va a ser necesario un club que diagonalice a una familia de clubs $\mathcal{F}$, esta familia estará construida a partir conjuntos de A, B y ω_1 y se probará que con una cantidad ω_1 de clubs se puede construir este forcing, es decir la intersección diagonal de la familia será el club rápido.

2.4 Isomorfismo de Baumgartner

Para comenzar el trabajo hacia un modelo donde todo par de ordenes $\aleph_1$-denso de los reales sean isomorfos, en esta sección se explicará el paso básico. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos $\aleph_1$-densos se va a forzar la existencia de un isomorfismo de orden entre A y B, sin colapsar ω_1.

Como A y B tienen tamaño ω_1 existen $\varphi_A : \omega_1 \longrightarrow A$ y $\varphi_B : \omega_1 \longrightarrow B$ enumeraciones de A y B respectivamente, sea θ un cardinal regular más grande que el continuo. Note que

$$Z = \{\alpha < \omega_1 : (\exists M \prec \mathbb{V}_\theta)(|M| = \aleph_0), \mathbb{R}, \varphi_A, \varphi_B \in M \ \wedge \ M \cap \omega_1 = \alpha\}$$

es un club en ω_1 .

Para mostrar la existencia de este forcing, es necesario la construcción de una familia $\mathcal{F}$ de clubs y para construir esta familia se considera los siguientes conjuntos

$$Fn(A,B) = \{f : f \text{ es función } \wedge dom(f) \subseteq A \wedge |dom(f)| < \omega \wedge ran(f) \subseteq B\}$$

y $F(A,B) = \{f \in Fn(A,B) : f \text{ es estrictamente creciente}\}$. Entonces se de definen $\mathcal{S} = \{S \subseteq F(A,B) : |S| = \omega\}$ y $\mathcal{R} = \{R \subseteq [\omega_1]^{\leq \omega} : |R| = \omega\}$. La familia $\mathcal{S}$ colecciona una cantidad numerable de funciones finitas de A a B, y la familia $\mathscr{R}$ colecciona una cantidad numerable de sucesiones a lo más numerable de ordinales, entonces se definen los siguientes clubs:

$$C(S,R) = \{\alpha < \omega_1 : (\exists M \prec \mathbb{V}_\theta)(|M| = \aleph_0), S, R, \mathbb{R}, \varphi_A, \varphi_B \in M \ \wedge \ M \cap \omega_1 = \alpha\},$$

entonces $\mathcal{F} = \{C(S,R) : s \in \mathcal{S} \wedge R \in \mathcal{R}\} \cup \{Z\}$. De la definición y si suponemos CH y CH_1 se tiene que $|\mathcal{F}| = \aleph_1$ y por lo tanto C su intersección diagonal es un club rápido para $\mathcal{F}$.

Si tomamos C un club rápido para la familia $\mathcal{F}$, C estará casi contenido en Z. Cortando un segmento inicial, se puede decir que $C \subseteq Z$. De aquí al final de este capítulo se va considerar a C el club rápido para la familia $\mathcal{F}$ definida anteriormente, también sin pérdida de generalidad como $C \subseteq^* Z$, se considera que $C \subseteq Z$.

Definición 2.4.1. Sea $\alpha \in C$ y α^* el siguiente punto de C arriba de α. Se define el $[\alpha, \alpha^*)$-segmento de A (denotado por $seg_A[\alpha, \alpha^*)$) como el conjunto $\{\varphi_A(\xi) : \alpha \leq \xi < \alpha^*\}$. También nos referimos al $seg_A[\alpha, \alpha^*)$ como el α-segmento (pues α^* está determinado por α). Similarmente se define $seg_B[\alpha, \alpha^*)$ usando φ_B.

Note que de cada segmento es numerable y que la unión de todos ellos es igual a A (respectivamente a B). Estos segmentos serán importantes en la definición de un forcing que haga isomorfos a A y B.

Proposición 2.4.2. *El α-segmento de A es denso en $\mathbb{R}$, similarmente el α-segmento de B es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Probaremos que el $[\alpha, \alpha^*)$-segmento de A es denso, el caso para un segmento de B es similar. Fijemos $(x, y) \subseteq \mathbb{R}$ intervalo con extremos racionales. Sea $M \prec \mathbb{V}_\theta$ testigo de que $\alpha^* \in Z$, es decir que $|M| = \aleph_0$, $\mathbb{R}$, φ_A, $\varphi_B \in M$ y $M \cap \omega_1 = \alpha^*$, como x y y son racionales pertenecen a M, además $\alpha < \alpha^*$ implica que $\alpha \in M$. Como A es $\aleph_1$-denso y α es numerable, hay $\xi \geq \alpha$ tal que $\varphi_A(\xi) \in (x, y)$; esta afirmación es cierta en $\mathbb{V}_\theta$, entonces $\alpha \in M$ y $M \prec \mathbb{V}_\theta$, $M \models (\exists \xi \geq \alpha)\varphi_A(\xi) \in (x, y)$. Sea ξ testigo de esto, entonces $\xi \geq \alpha$ y como $\alpha^* = M \cap \omega_1$ se tiene que $\xi \leq \alpha^*$. Por lo tanto $\xi \in seg_A[\alpha, \alpha^*)$ y como $\varphi_A(\xi) \in (x, y)$ $seg_A[\alpha, \alpha^*)$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Definición 2.4.3. Sean α y β elementos de C, con C el club rápido. Decimos que α y β son vecinos, si entre estos dos ordinales sólo hay una cantidad finita de elementos de C y $\alpha \neq \beta$.

Definición 2.4.4. Sea $\mathbb{Q}$ el siguiente forcing. Las condiciones de $\mathbb{Q}$ son conjuntos finitos de pares $\langle a_i, b_i \rangle \in A \times B$ tal que:

(i) La función que asocia $a_i \longrightarrow b_i$ preserva el orden de A a B,

(ii) Sea $[\alpha, \alpha^*)$ tal que $a_i \in seg_A[\alpha, \alpha^*)$ y $[\beta, \beta^*)$ tal que $b_i \in seg_B[\beta, \beta^*)$. Entonces α y β son vecinos,

(iii) Para cualquier segmento $[\gamma, \gamma^*)$, hay a lo más un i de tal manera que:

- $a_i \in seg_A[\gamma, \gamma^*)$ y b_i pertenece a un segmento anterior de B, o
- $b_i \in seg_B[\gamma, \gamma^*)$ y a_i pertenece a un segmento anterior de A.

El orden en $\mathbb{Q}$ es la contención inversa, es decir dado $p, q \in \mathbb{Q}$ se tiene que si $p \subseteq q$, entonces $q \leq p$.

Este forcing posee un parecido al visto en el Teorema 1.2.1, sin embargo la generalización natural no funciona, pues no sería *c.c.c.*, entonces la condición (ii) cortará el número de opciones que tienen a y b, es decir dado $a \in A$, $\{b \in B : \langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}\}$ es numerable ya que para que $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}$, los segmentos a los que pertenecen tienen que ser vecinos, igualmente en el caso para b, $\{a \in A : \langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}\}$ también es numerable. La condición (i) asegura que el filtro $\mathbb{Q}$-genérico producirá un isomorfismo de orden entre A y B. La condición (iii) establece que en cada segmento hay a lo más un punto que es emparejado con un elemento de un segmento anterior, por consiguiente el resto de puntos del segmento (si los tiene) están emparejados con un elemento de un segmento arriba.

Dado $p \in \mathbb{Q}$, $p = \{\langle a_0, b_0 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle \ldots, \langle a_{n-1}, b_{n-1} \rangle\}$ y tal que la enumeración cumpla que $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$; como p es una función que respeta el orden también se tiene que $b_0 < b_1 < \ldots < b_{n-1}$. Dada una condición p y un par $\langle a, b \rangle$, se entiende por $p \cup \langle a, b \rangle$ que $p \cup \{\langle a, b \rangle\}$, similarmente para $p \setminus \langle a, b \rangle$. Por el máximo segmento de $dom(p)$ se entiende el mayor α tal que hay un $a \in dom(p)$ tal que $a \in seg_A[\alpha, \alpha^*)$. Similarmente se define el máximo segmento de $ran(p)$. Finalmente se define el máximo segmento de p por el mayor α tal que hay $x \in dom(p) \cup ran(p)$ y $x \in seg_A[\alpha, \alpha^*) \cup seg_B[\alpha, \alpha^*)$. Al igual que las definición de máximo segmento, también análogamente se puede definir el mínimo segmento.

Antes de mostrar que es *c.c.c.*, veamos que si G es $\mathbb{Q}$-genérico, $f = \bigcup\{p : p \in G\}$ es un isomorfismo de orden entre A y B, de esta forma en $\mathbb{V}[G]$ A y B serían isomorfos.

Note que por construcción es inyectiva en su dominio y preserva el orden gracias a la definición de $\mathbb{Q}$. Así, sólo basta mostrar que es una biyección entre A y B.

Proposición 2.4.5. *Para cada $a \in A$ y para cada $b \in B$ los conjuntos $D_a = \{p \in \mathbb{Q} : a \in dom(p)\}$ y $D_b = \{p \in \mathbb{Q} : b \in ran(p)\}$ son densos en $\mathbb{Q}$ (De esta forma $f = \bigcup\{p : p \in H\}$ es suprayectiva y con dominio en todo A).*

Demostración. Se probará que D_a es denso, para D_b es similar. Fijemos $a \in A$ y $p \in \mathbb{Q}$. Se desea encontrar $q \leq p$ tal que $q \in D$.

Sea $[\alpha, \alpha^*)$ tal que $a \in seg_A[\alpha, \alpha^*)$ y $\alpha_0 = \alpha$, α_{n+1} el siguiente elemento de C más grande que α_n. Así, para $n \in \omega$ con $n > 1$ α_n es vecino de α. Como p es finito, sólo hay una cantidad finita de elementos que aparecen en los segmentos $[\alpha_n, \alpha_{n+1})$, fija n suficientemente grande tal que los puntos en p no aparezcan en $[\alpha_n, \alpha_{n+1})$.

Por la Proposición 2.4.2 el $[\alpha, \alpha^*)$-segmento de B es denso; entonces hay un $b \in seg_B[\alpha, \alpha^*)$ tal que $p \cup \langle a, b\rangle$ preserva orden, de esta forma $p \cup \langle a, b\rangle$ cumple (i) de 2.4.4. Por la elección de n, a y b pertenecen a segmentos vecinos, es decir (ii) es cierto. La condición (iii) se satisface porque a está emparejado con un elemento de un segmento más grande y este es el único elemento en este segmento que está emparejado con un elemento de un segmento anterior. Por lo tanto $q = p \cup \langle a, b\rangle$ es una condición, $q \leq p$ y $q \in D$.

□

Ahora falta mostrar que $(\omega_1)^{\mathbb{V}[G]} = (\omega_1)^{\mathbb{V}}$. Como $\mathbb{Q}$ es *c.c.c.*, entonces ω_1 se habrá preservado. De aquí hasta terminar esta sección se trabajará para mostrar que $\mathbb{Q}$ es *c.c.c.*

Suponga que $T = \{p_\xi : \xi < \omega_1\}$ es una anticadena de $\mathbb{Q}$. De esta suposición se derivará una contradicción.

Proposición 2.4.6. *Suponga que $\mathbb{Q}$ no es c.c.c., entonces es posible obtener una anticadena $T = \{p_\xi : \xi \in \omega_1\}$ de tamaño ω_1 con las siguientes propiedades:*

(i) Hay $n \in \omega$ tal que todas las condiciones de T tienen el mismo tamaño n.

(ii) n es mínimo, es decir no hay anticadenas no numerables tal que todos sus elementos tengan tamaño menor que n.

(iii) $\{dom(p) : p \in T\}$ forma un Δ-sistema con raíz $r = \emptyset$.

(iv) Los elementos de T están tomados en orden, es decir dado $\xi_1, \xi_2 \in \omega_1$ y $\xi_1 < \xi_2$, se tiene que el máximo elemento de p_{ξ_1} es menor que el mínimo segmento de p_ξ.

Demostración. Al suponer que $\mathbb{Q}$ no es *c.c.c.* existe una anticadena no numerable T'. Sabemos que para T' existe un natural m tal que $T'' = \{p \in T' : |p| = m\}$ es una anticadena no numerable. Por otra parte, existe un natural n tal que si S es una colección no numerable de elementos con tamaño menor que n, entonces S no es una anticadena. Es importante mostrar que $n \geq 1$ ya que la condición vacía es única. Como n es mínimo hay un testigo de que existe una anticadena no numerable T con elementos de tamaño n. Con todo lo anterior existe una anticadena no numerable que cumple (i) y (ii).

Para (iii) si T' es una anticadena que cumpla (i) y (ii) esta se puede reducir a una anticadena T no numerable tal que $\{dom(p) : p \in T\}$ formen un Δ-sistema con raíz r (Teorema 1.3.1) , se mostrará que $r = \emptyset$.

Suponga $a \in r$ y sea $[\alpha, \alpha^*)$ el segmento de a. Para cada $p_\xi \in T$, $p_\xi(a)$ pertenece a un segmento $[\beta, \beta^*)$ tal que α y β son vecinos, entonces, sólo hay una cantidad numerable de ellos y cada segmento tiene una cantidad numerable de elementos en B. De esta forma sólo hay una cantidad numerable de opciones para $p_\xi(a)$. Reduciendo a T si es necesario es posible suponer que $p_\xi(a)$ es un punto fijo, es decir $(\exists b \in B)(\forall \xi < \omega_1) p_\xi(a) = b$. Por minimalidad de n, las condiciones $p_\xi \setminus \langle a, b\rangle$, $\xi < \omega_1$ no son una anticadena. Tome $\xi_1 \neq \xi_2$ tales que $p_{\xi_1} - \langle a, b\rangle$ y $p_{\xi_2} - \langle a, b\rangle$ son compatibles, entonces $p_{\xi_1} \cup p_{\xi_2} \setminus \langle a, b\rangle$ es una condición y entonces $p_{\xi_1} \cup p_{\xi_2}$ es una condición, lo cual es una contradicción ya que T es una anticadena. Así existe una anticadena T que cumple (i), (ii) y (iii).

Finalmente para el último punto, tome $T' = \{q_\eta : \eta < \omega_1\}$ anticadena que cumpla los primeros tres incisos. Como T' forma un Δ-sistema con raíz vacía en los dominios de los elementos de T', para $\alpha < \omega_1$ hay a lo más una cantidad numerable de condiciones cuyos dominios estén en algún segmento anterior a α. Por recursión, definimos $T = \{p_\xi : \xi < \omega_1\}$ tal que $p_0 = q_0$, y $p_\xi = p_\eta$, donde q_η es tal que el mínimo segmento de q_η es más grande que el supremo de los máximos segmentos de p_λ para $\lambda < \xi$, más aún, se pide un q_η tal que ningún elemento de p_λ sea vecino de algún elemento de q_η. Entonces existe una anticadena T numerable que cumple todas las cláusulas del teorema. $\square$

Definición 2.4.7. Para $p, q \in \mathbb{Q}$ decimos que son *orden compatible* si $p \cup q$ preserva orden y *orden incompatible* en caso contrario.

Proposición 2.4.8. *Para toda $p, q \in T$ p y q son orden incompatible.*

Demostración. Fije $p_\xi, p_{\xi'} \in T$ con $\xi < \xi'$, como el dominio de p_ξ y $p_{\xi'}$ son ajenos $p_\xi \cup p_{\xi'}$ es una función. Note que $p_\xi \cup p_{\xi'}$ cumplen (ii) y (iii) de la definición 2.4.4. Sin embargo como p_ξ y $p_{\xi'}$ están en T, estos son incompatibles por lo tanto p_ξ y $p_{\xi'}$ son orden incompatible. $\square$

Definición 2.4.9. Una *buena vecindad* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ de longitud n es un conjunto finito de cuadrados de la forma $(x_i^l, x_i^r) \times (y_i^l, y_i^r)$, con $i < n$ tal que:

1. Los extremos $x_i^l, x_i^r, y_i^l, y_i^r$ son todos racionales,
2. los intervalos (x_i^l, x_i^r) y (x_j^l, x_j^r) son disjuntos para $i \neq j$, respectivamente los (y_i^l, y_i^r) y (y_j^l, y_j^r),
3. la función que manda $(x_i^l, x_i^r) \longrightarrow (y_i^l, y_i^r)$ preserva orden.

Definición 2.4.10. Una condición $p = \{\langle a_i, b_i \rangle : i < n\}$ pertenece a U si para todo $i < n$ $\langle x_i, y_i \rangle \in (x_i^l, x_i^r) \times (y_i^l, y_i^r)$.

Una buena vecindad es una aproximación a la condición p usando intervalos abiertos en lugar de usar elementos de A y B.

Proposición 2.4.11. *Sea $p = \{\langle a_i, b_i \rangle : i < n\}$ y $p^* = \{\langle a_i^*, b_i^* \rangle : i < n\}$ tales que pertenecen a la misma buena vecindad U. Suponga que p y p^* son orden incompatible, entonces hay $i < n$ tal que $\langle a_i, b_i \rangle$ y $\langle a_i^*, b_i^* \rangle$ son orden incompatible.*

Demostración. Como $(x_i^l, x_i^r) \longrightarrow (y_i^l, y_i^r)$ preserva orden, $a_i, a_i^* \in (x_i^l, x_i^r)$ y $b_i, b_i^* \in (y_i^l, y_i^r)$, se sigue que para $i \neq j$, los pares $\langle a_i, b_i \rangle$ y $\langle a_j^*, b_j^* \rangle$ son orden compatible. Entonces cualquier incompatibilidad entre p y p^* aparece en los pares $\langle a_i, b_i \rangle$ y $\langle a_j^*, b_j^* \rangle$ para $i = j$. □

Para una condición $p_\xi = \{\langle a_i^\xi, b_i^\xi \rangle : i < n\} \in T$, $p_\xi - i$ denota la condición $p_\xi \setminus \langle a_i^\xi, b_i^\xi \rangle$, esta es nuevamente una condición de $\mathbb{Q}$ tal que tiene tamaño $n-1$. Para cada buena vecindad U, sea $T_U = \{p_\xi \in T : p_\xi \text{ pertenece a } U\}$, $T_{U,i} = \{p_\xi - i : p_\xi \in T_U\}$ y $B_{U,i} \subseteq \omega_1$ tal que $\{p_\xi : \xi \in B_{U,i}\} \subseteq T_U$ y $\{p_\xi - i : \xi \in B_{U,i}\}$ es una anticadena maximal en $T_{U,i}$. Dado que $T_{U,i}$ es un conjunto de condiciones de tamaño $n-1$ por la Proposición 2.4.6 cualquier anticadena en $T_{U,i}$ es a lo más numerable. Por lo anterior $\delta_{U,i} = sup B_{U,i} < \omega_1$ y tome $\delta = sup\{\delta_{U,i} : i < n \wedge U \text{ es buena vecindad}\}$; como sólo hay una cantidad numerable de buenas vecindades (pues estas están determinadas por extremos racionales), $\delta < \omega_1$. Sea $T \restriction \delta = \{p_\xi : \xi < \delta\}$. Entonces el siguiente conjunto pertenece a $\mathcal{F}$

$$Z' = \{\alpha < \omega_1 : (\exists M \prec \mathbb{V}_\theta)\{A, B, \varphi_A, \varphi_B, T \restriction \delta, \{B_{U,i}\}_{U,i}\} \subseteq M \wedge |M| = \omega \wedge M \cap \omega_1 = \alpha\},$$

En efecto, $T \restriction \delta \in \mathcal{S}$ y $\{B_{U,i}\}_{U,i} \in \mathcal{R}$ y entonces C está casi contenido en todo club que vive en $\mathcal{F}$, si $Z' \in \mathcal{F}$ entonces hay $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $C \setminus \alpha_0 \subseteq Z'$.

Una vez construido hasta aquí los elementos necesarios, se va a trabajar en una contradicción a partir de la existencia de la anticadena T. Sea $\xi < \omega_1$ suficientemente grande tal que el mínimo segmento usado en $p_\xi = \{\langle a_i, b_i \rangle : i < n\} \in T$ es mayor que α_0. Sea $[\alpha, \alpha^*)$ el máximo segmento usado en p_ξ. Por la condición (iii) de la definición 2.4.4 y como los puntos usados en p_ξ en el segmento $[\alpha, \alpha^*)$ pueden ser emparejados con puntos de segmentos anteriores sólo hay un punto de p_ξ en el segmento $[\alpha, \alpha^*)$ (note que ser vecinos implica que $\langle a_i, b_i \rangle$ son tales que a_i y b_i están en diferente segmento). Suponga, sin pérdida de generalidad que ese punto es b_0 (en el caso b_i o a_i para cualquier i es similar). Por definición de $\mathbb{Q}$, α pertenece al club rápido C. Por elección de ξ, $\alpha > \alpha_0$, entonces $\alpha \in Z'$. Tome $M \prec V_\theta$ testigo de esto. Entonces $M \cap \omega_1 = \alpha$ y $A, B, \varphi_A, \varphi_B, T \restriction \delta$ y $\{B_{U,i}\}_{u,i}$ pertenecen a M.

Sea $p = p_\xi$ y $\overline{p} = p_\xi \setminus \langle a_0, b_0 \rangle$. Entonces a_0 y todos los puntos de $\overline{p}$ son elementos de M, pues están en segmentos anteriores a $[\alpha, \alpha_0)$. Por otra parte, b_0 no pertenece a M.

Sea X el conjunto de $b \in B$ tales que:

(I) $\overline{p} \cup \langle a_0, b \rangle$ es incompatible con todas las condiciones de $T \restriction \delta$.

(II) Para cada buena vecindad U tal que $\overline{p} \cup \langle a_0, b \rangle$ pertenezca a U, hay un $\zeta \in B_{U,0}$ tal que $\overline{p}$ es orden compatible con $p_\zeta \setminus 0$.

Todos los parámetros en la definición de X pertenecen a M, y como la definición puede hacerse en $\mathbb{V}_\theta$, $X \in M$ ya que $M \prec \mathbb{V}_\theta$. Esta parte final va a mostrar que X tiene a lo más dos elementos y por lo tanto $X \subseteq M$, sin embargo también se mostrará que $b_0 \in X$ lo cual será una contradicción, pues $b_0 \notin M$.

Proposición 2.4.12. *b_0 pertenece a X.*

Demostración. $\overline{p} \cup \langle a_0, b \rangle = p_\xi$. Como T es una anticadena, p_ξ es incompatible con cualquier elemento de T, en particular con cualquier condición de $T \restriction \delta$, entonces (I) es cierto para b_0. Fije una buena vecindad tal que $p_\xi \in U$, entonces p_ξ pertenece a T_U además $\overline{p} = p_\xi \setminus 0$ y $\overline{p} \in T_{U,0}$ entonces hay un $\zeta \in B_{U,0}$ tal que $\overline{p}$ es compatible con $p_\zeta \setminus 0$ y por lo tanto b_0 cumple (II) y $b_0 \in X$. □

Proposición 2.4.13. *X tiene a lo más dos elementos.*

Demostración. Suponga por contradicción que X tiene al menos tres elementos $b_k < b_l < b_m$. Sea $p_k = \overline{p} \cup \langle a_0, b_k \rangle$ y se define p_l y p_m similarmente. Sea U_l una buena vecindad de U_l de p_1 tal que p_k y p_m no pertenezcan a esta. Sea U^* una vecindad suficientemente grande tal que estos tres elementos pertenezcan a U^* y $U \subseteq U^*$.

Por condición (II) para p_l, hay un $\zeta \in B_{U_l,0}$ tal que $p_\zeta \setminus 0$ es orden compatible con $p_l \setminus 0 = \overline{p}$, $p_\zeta = \{\langle c_i, d_i \rangle : i < n\}$. Entonces p_ζ pertenece a U_l y $p_\xi \setminus 0$ es orden compatible con $\overline{p}$. Como δ es más grande que $supB_{U_m,0}$ también se sabe que $p_\zeta \in T \restriction \delta$.

Por condición (I) para p_m, p_ζ es orden incompatible con p_m. Como $U_l \subseteq U^*$, p_ζ pertenece a U^*, como p_m pertenece a U^* por la Proposición 2.4.11 hay un $i < n$ tal que en la i-ésima coordenada p_m y p_ζ con incompatibles. Como $p_\xi \setminus 0$ es compatible con $p_m \setminus 0$ $i = 0$. De la misma forma para p_k también se puede mostrar que $\langle a_0, b_k \rangle$ es incompatible con $\langle c_0, d_0 \rangle$.

Por otra parte, note que como $p_\zeta \in U_l$ y p_k, p_m no pertenecen a esta d_0 está entre b_k y b_m, es decir $b_k < b_0 < b_m$. c_0 puede ser mayor o menor que a_0 (no pueden ser el mismo ya que el máximo segmento usado en p_ζ es anterior al mínimo segmento usado en p_ξ). Si $c_0 < a_0$, entonces como $d_0 < b_m$ se sigue que $\langle c_0, d_0 \rangle$ es orden compatible con $\langle a_0, b_m \rangle$. Si $c_0 > a_0$ entonces como $d_0 > b_k$ $\langle c_0, d_0 \rangle$ es orden compatible con $\langle a_0, b_k \rangle$. Sin embargo usando cláusula (I) en la definición de X para p_m y para p_k se ve que $\langle a_0, b_0 \rangle$ es orden compatible con alguno de estos dos, lo cual es una contradicción. □

De lo anterior se concluye que $X \subseteq M$, pues es un conjunto finito que es un elemento de M. Sin embargo esto es una contradicción, pues b_0 es un elemento del $[\alpha, \alpha^*)$-segmento de B, lo cual quiere decir que está entre α y α^* y entonces $b_0 \notin M$. Esta contradicción viene originalmente de suponer la existencia de una anticadena no numerable, por lo tanto $\mathbb{Q}$ es *c.c.c.*

2.5 Iteración de $\mathbb{Q}$

En la sección anterior se explicó el forcing que agrega un isomorfismo para A y B subórdenes $\aleph_1$-densos. En esta sección se explicará una iteración tal que en la extensión BA_{ω_1} un enunciado cierto. La mayoría de los resultados de esta sección están inspirados en la prueba de consistencia de MA que aparece en [8] y [9].

El paso base para la iteración es mostrar que si $\mathbb{Q}_{A,B}$ es el forcing que agrega un isomorfismo entre A y B, entonces es posible iterar con otro forcing para otro par de conjuntos $\aleph_1$-densos tal que la iteración tiene lo necesario para poder anticipar todos los $\aleph_1$-densos que aparezcan en cada instancia, para ello, si $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}_{A,B}$-nombre para un forcing que agrega un isomorfismo entre $\dot{A}'$ y $\dot{B}'$ entonces $\Vdash_{\mathbb{Q}_{A,B}}$"$\dot{\mathbb{Q}}$ es *c.c.c.*" y $\Vdash_{\mathbb{Q}_{A,B}}$"$|\dot{\mathbb{Q}}| = \omega_1$".

Una vez visto lo anterior, es necesario contar cuántos órdenes $\aleph_1$-densos hay en los reales. Para poder realizar los cálculos necesarios también se van a usar las hipótesis CH y CH_1. Como se mencionó anteriormente, un orden $\aleph_1$-denso puede ser visto como $\langle \omega_1, \leq' \rangle$ tal que este orden $\leq'$ hace isomorfo al suborden $\aleph_1$-denso de los reales. De esta forma dado $\dot{A}, \dot{B} \subseteq \omega_1$ $\mathbb{P}$-nombres, existe un $\mathbb{P}$-nombre $\dot{\mathbb{Q}}$ tal que $\Vdash_{\mathbb{P}}$"$\dot{\mathbb{Q}}$ es el forcing que agrega un isomorfismo entre $\dot{A}$ y $\dot{B}$".

Primero, para cada $\xi < \omega_2$, una vez que tengamos decidido $\mathbb{P}_\xi$ consideremos el conjunto $\{(\dot{A}, \dot{B}) : \dot{A} \neq \dot{B} \wedge \dot{A}, \dot{B} \subseteq \omega_1\}$ que enumera todos los posibles $\mathbb{P}_\xi$-buenos nombres para parejas de subconjuntos de ω_1. Por el Teorema 2.2.5, $|\{(\dot{A}, \dot{B}) : \dot{A} \neq \dot{B} \wedge \dot{A}, \dot{B} \subseteq \omega_1\}| = \omega_2$, donde $(\dot{A}, \dot{B})$ son $\mathbb{P}_\xi$-nombres para una pareja de subconjuntos de ω_1, entonces $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\eta : \eta \in \omega_2 \rangle$ es tal que $\dot{\mathbb{Q}}_\eta$ es el $\mathbb{P}_\xi$-buen nombre para un forcing que agrega un isomorfismo para la pareja η o es el forcing trivial. Note que cofinalmente siempre existirán parejas de $\aleph_1$-densos que es necesario agregar su isomorfismo, es decir cofinalmente $\dot{\mathbb{Q}}$ será el respectivo nombre para un forcing no trivial.

Teorema 2.5.1 (CH, CH_1)**.** *Existe una iteración de forcing $\langle \mathbb{P}_\alpha : \alpha \leq \omega_2 \rangle$, $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ tal que si G es $\mathbb{P}_{\omega_2}$-genérico, $V[G] \models$ "Cualesquiera A y B subconjuntos $\aleph_1$-densos de los reales son isomorfos."*

Demostración. Para obtener $\mathbb{P}_{\omega_2}$ se procederá por recursión en α para determinar $\mathbb{P}_\alpha$ y $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ de tal manera que $\Vdash_\alpha$" $|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha| = \omega_1$, $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es *c.c.c.* y hay $\dot{A}, \dot{B}$ nombres para conjuntos de ω_1". Entonces por Teorema 2.2.2 $\forall \alpha < \omega_2$ $\mathbb{P}_\alpha$ es *c.c.c.* y por el Lema 2.2.3 $|\mathbb{P}_\alpha| = \omega_1$.

Sea $h : \omega_2 \longrightarrow \omega_2 \times \omega_2$ tal que h es biyectiva y que $h(\alpha) = (\eta_0, \eta_1)$, para todo $\alpha \in \omega_2$. Entonces $\alpha \geq max\{\eta_0, \eta_1\}$. Una función que cumple esto es conocida como la función de paridad de Gödel y su exacta definición puede consultarse en [2, Pg. 90].

Entonces por definición de iteración y como $h(0, 0) = 0$, $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ y $\dot{\mathbb{Q}}_0$ es el primer $\mathbb{P}_0$-nombre de $\langle \dot{\mathbb{Q}}_\eta : \eta \in \omega_2 \rangle$ de tal forma que $\dot{\mathbb{Q}}_\eta$ es el $\mathbb{P}_\xi$-buen nombre para un forcing que agrega un isomorfismo para la pareja 0 o es el forcing trivial.

Suponga construido $\mathbb{P}_\beta$ y $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Como h es biyectiva entonces $h(\alpha) = (\eta_0, \eta_1)$ y definimos a $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ como el $\mathbb{P}_{\eta_0}$-nombre para un forcing de tal forma que $(\dot{A}, \dot{B})$ es el η_1 $\mathbb{P}_{\eta_0}$-nombre para una pareja, $\dot{A}, \dot{B} \subseteq \omega_1$ y $(\dot{A}, \dot{B})$ son $\aleph_1$-densos; o en caso contrario, $\mathbb{Q}_\alpha$ es el forcing trivial.

Afirmación 1. *Sea G es $\mathbb{P}_{\omega_2}$-genérico, entonces $V[G]$ es un modelo para BA_{ω_1}.*

Demostración. En $\mathbb{V}[G]$ sean $A, B \subseteq \omega_1$, entonces hay $\eta_0 < \omega_2$ de tal forma que $(\dot{A}, \dot{B})$ es el η_1-ésimo $\mathbb{P}_{\eta_0}$-nombre, sea $\alpha = h^{-1}(\eta_0, \eta_1)$ y por lo tanto $\Vdash_{P_\alpha}$" $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es un forcing que agrega un isomorfismo de $\dot{A}$ y $\dot{B}$". Por lo tanto en $\mathbb{V}[G \restriction \alpha + 1]$ se conoce una función que hace isomorfo a A y B y entonces en $\mathbb{V}[G]$ A y B son isomorfos.

□

□

En la iteración anterior, en cada paso el modelo resultante era un modelo de CH, sin embargo en el modelo de la iteración completa $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, lo cual debiese de pasar, ya que CH implica que hay al menos $\aleph_1$-densos no isomorfos y en $\mathbb{V}[G]$ cualquier par de $\aleph_1$-densos es isomorfo. Por lo anterior, BA_{ω_1} es un enunciado independiente de ZFC.

Capítulo 3

Estrategias para la consistencia de BA_κ

Finalmente en este capítulo se van a mencionar algunos elementos que pueden ser útiles en algunas estrategias para la consistencias de BA_κ, si $\aleph_2 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$. Como se mostró en el capítulo anterior es posible un modelo donde $BA_{\aleph_1}$ es cierto. Por otra parte, tratar de demostrar la independencia de $BA_{\aleph_2}$ es más complicado, más aún, no ha sido demostrado. En la primera sección se explicará un poco acera de cómo podría ser posible un resultado de consistencia. En la segunda sección se hablará un poco acerca de la pregunta en general. Prácticamente todo lo explicado a continuación aparece en [10] y se enunciarán solamente los teoremas, citando las demostraciones para consultarse en este mismo artículo.

3.1 Sobre $\aleph_2$-densos

En esta sección se enunciará un principio combinatorio el cual implica que $BA_{\aleph_1}$ y $BA_{\aleph_2}$ es cierto. Este principio también implica algunas instancias del Axioma de Martin, para ello se recuerda algunos elementos de este axioma.

Definición 3.1.1. MA_κ es el siguiente enunciado:

Sea $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ un orden parcial que satisface c.c.c. y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{D}| < \kappa$. Entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$.

Definición 3.1.2. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial y $B \subseteq \mathbb{P}$. B es ligado, si cualesquiera dos elementos de B son compatibles en $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}$ es σ-ligado si $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, con B_n ligado para cada n.

De esta forma, MA_κ (σ-ligado) refiere a que $\mathbb{P}$ debe ser un orden parcial σ-ligado, en lugar de cualquiera *c.c.c.* Los principios combinatorios que se aíslan en [10] para encontrar un modelo de BA_{ω_2} son los siguientes:

Definición 3.1.3. $(*)$ es la siguiente afirmación: Si $\mathcal{F}$ es una colección de funciones inyectivas de ω_2 en ω_2 y $|\mathcal{F}| \leq \aleph_2$, entonces existe una función $g : \omega_2 \longrightarrow \omega_2$ inyectiva tal que para cada $f \in \mathcal{F}$

$$|\{\alpha \in \omega_2 : f(\alpha) = g(\alpha)\}| \leq \aleph_0.$$

$(**)$ es la siguiente afirmación: Si $\mathcal{F}$ es una colección de funciones inyectivas de ω_2 en ω_2 y $|\mathcal{F}| \leq \aleph_2$, entonces existe una función $g : \omega_2 \longrightarrow \omega_2$ inyectiva tal que:

1. para cada $f \in \mathcal{F}$ $|\{\alpha \in \omega_2 : f(\alpha) = g(\alpha)\}| \leq \aleph_0$ y
2. para cada $f \in \mathcal{F}$, hay un conjunto numerable $D \subseteq \omega_2$ tal que si $\alpha \neq \beta \in \omega_2 \setminus D$, entonces $f(g(\alpha)) \neq \beta$.

De $(*)$ y $(**)$ se enuncian los siguientes dos resultados.

Teorema 3.1.4. *Si MA_{ω_2} (σ-ligado) es cierto y $(*)$ falso. Hay dos $\aleph_2$-densos subórdenes de $\mathbb{R}$ no isomorfos.*

Teorema 3.1.5. *Suponga $(**)$, $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ y $2^{\aleph_2} = \aleph_3$. Existe un forcing c.c.c. tal que fuerza BA_{ω_1}, BA_{ω_2} y MA_{ω_2}(σ-ligado).*

La hipótesis $2^{\aleph_2} = \aleph_3$ es necesaria solamente para obtener un forcing *c.c.c.* y siempre es posible colapsar $2^{\aleph_2} = \aleph_3$ mientras no agregamos subconjuntos de ω_2 (preservando $(**)$ y $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$).

Entonces la consistencia de BA_{ω_2} y MA_{ω_2}(σ-ligado) se encuentra en algún lugar entre obtener la consistencia de $(*)$ y la consistencia de $(**)$ y $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$. $(**)$ es más fuerte que $(*)$, sin embargo los autores afirman que no es claro que la relación hay entre ellos.

Los dos anteriores teoremas son los resultados principales en [10]. El aislar el principio $(**)$, suponer que hay un modelo donde es cierto y que en este modelo también sea cierto $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ implica que hay un forcing *c.c.c.* en cuya extensión cualesquiera para de $\aleph_2$-densos son isomorfos. No es claro que tan próximo está la versión final de estos resultados, sin embargo son muy importantes en el interés de tratar de probar $BA_{\aleph_2}$.

3.2 BA_κ

En el caso de BA_κ, si $\aleph_3 \leq \kappa < \mathfrak{c}$ hasta ahora no hay avances claros para poder encontrar un modelo de BA_κ. En el sentido de encontrar un modelo de $\neg BA_\kappa$, se sabe que si $\kappa = \mathfrak{c}$, entonces BA_κ siempre es falso. Sin embargo, es posible encontrar modelos de la negación de BA_κ con el siguiente resultado también mencionado en [10].

Teorema 3.2.1. *Si hay una cadena no acotada en $(\omega^\omega, <^*)$ de cofinalidad κ, BA_κ es falso.*

Donde $<^*$ es el orden de la eventual dominancia para funciones. Entonces para obtener un modelo de $\neg BA_\kappa$, es suficiente que existan estas cadenas no acotadas de cardinalidad κ.

Por otra parte, todo lo anterior son esfuerzos para casos de BA_κ con un κ fijo y no para varios otros cardinales al mismo tiempo, es decir, por ejemplo suponga que $BA_{\aleph_3}$ es cierto, esto no implica que $BA_{\aleph_2}$ sea cierto o que $BA_{\aleph_1}$ sea cierto. Entonces, luce aún lejana la posibilidad de encontrar modelos donde BA_κ sea cierto y más complicado aún encontrar modelos donde para varios κ, BA_κ sean ciertos.

Bibliografía

[1] James E. Baumgartner. All $\aleph_1$-dense sets of reals can be isomorphic. *Fund. Math.*, 79(2):101–106, 1973.

[2] Keith J. Devlin. *Constructibility*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] Ben Dushnik and E. W. Miller. Concerning similarity transformations of linearly ordered sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46:322–326, 1940.

[4] Ben Dushnik and E. W. Miller. Partially ordered sets. *Amer. J. Math.*, 63:600–610, 1941.

[5] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[6] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering modern set theory. I*, volume 8 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. The basics.

[7] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering modern set theory. II*, volume 18 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Set-theoretic tools for every mathematician.

[8] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 34 of *Studies in Logic (London)*. College Publications, London, 2011.

[9] A. R. D. Mathias, editor. *Surveys in set theory*, volume 87 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[10] Justin Tatch Moore and Stevo Todorcevic. Baumgartner's isomorphism problem for $\aleph_2$-dense suborders of $\mathbb{R}$. *pre-print*, 2015.

[11] Itay Neeman. Forcing (lecture notes for math 223s, spring 2011). 2011.

[12] Saharon Shelah. On what I do not understand (and have something to say). I. *Fund. Math.*, 166(1-2):1–82, 2000. Saharon Shelah's anniversary issue.