



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Caracterización de Procesos Afines

TESINA
QUE PARA OPTAR AL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
OSCAR GABRIEL ABUNDIS PATIÑO

DIRECTOR:
DR. JOSÉ LUIS ÁNGEL PÉREZ GARMENDIA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS
UNAM

MÉXICO, D.F. (11 DE AGOSTO DE 2015)



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	V
1. Conceptos Preliminares	1
1.1. Notación Básica	1
1.2. Definición y Caracterización de Procesos Afines	2
1.3. Existencia de Momentos	6
1.4. Resultados Preliminares	8
2. Prueba del Teorema de Caracterización	11
2.1. Representaciones de Procesos Regulares	11
2.2. Los mapeos $F(u)$ y $R(u)$	17
2.3. Ecuaciones Generalizadas de Riccati	21

Introducción

En este trabajo nos dedicaremos a caracterizar los procesos afines regulares. El primer capítulo contiene las definiciones básicas y notaciones que se estarán utilizando a lo largo de este texto. Asimismo, se enunciará un teorema que caracterizará los procesos afines regulares y algunas consecuencias inmediatas. En el segundo capítulo se procederá a probar los resultados necesarios para dar la prueba de dicho teorema.

La principal motivación para buscar tener una completa caracterización de los procesos afines viene de la importancia que han ido adquiriendo con el paso del tiempo, importancia que radica principalmente en la de sus aplicaciones en finanzas. No obstante, como cabría esperarse, ésta va más allá.

El teorema que se presentará mostrará la forma general que tienen los procesos afines regulares. Como consecuencia, dichos procesos se pueden ver como una herramienta para simplificar ciertos problemas con martingalas al tratarlos como contrapartes naturales o extensiones de derivados y ecuaciones diferenciales ordinarias. En este sentido, los procesos afines se pueden ver como soluciones a problemas con martingalas particularmente simples, que extienden ecuaciones diferenciales ordinarias afines al caso estocástico.

Por último, damos algunos ejemplos de procesos estocásticos que resultan ser procesos afines particulares con una amplia utilidad en diversos campos de las Matemáticas, con lo cual mostramos la generalidad del concepto de proceso afín y la utilidad que puede tener el teorema de caracterización al ver dichos procesos como procesos afines.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Notación Básica

En este trabajo se tomó [2] como referencia general para las definiciones básicas de procesos estocásticos, adaptándolos a las notaciones aquí utilizadas. De la misma manera, los conceptos referentes a teoría de la medida utilizados aquí se pueden consultar en [6].

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^k &= \{x \in \mathbb{R}^k | x_i \geq 0, \forall i\}, & \mathbb{R}_{++}^k &= \{x \in \mathbb{R}^k | x_i > 0, \forall i\}, \\ \mathbb{C}_+^k &= \{z \in \mathbb{C}^k | \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}_+^k\}, & \mathbb{C}_{++}^k &= \{z \in \mathbb{C}^k | \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}_{++}^k\}.\end{aligned}$$

Análogamente, escribimos \mathbb{R}_-^k , \mathbb{R}_{--}^k , \mathbb{C}_-^k , \mathbb{C}_{--}^k .

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^k$ escribimos $\langle \alpha, \beta \rangle := \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_k \beta_k$ (nótese que este no es el producto escalar en \mathbb{C}^k). Definimos Sem^k como el cono convexo de matrices simétricas semidefinidas positivas de $k \times k$.

Sea U un conjunto abierto o la cerradura de un conjunto abierto en \mathbb{C}^k . Escribimos su cerradura como \overline{U} , su interior como U^0 , su frontera como $\partial U = \overline{U} \setminus U^0$, y $U \Delta = U \cup \{\Delta\}$. Definimos ahora los siguientes conjuntos:

- $C(U)$ es el espacio de las funciones complejas continuas en U .
- bU es el espacio de Banach de las funciones complejas y acotadas Borel-medibles en U .
- $C_b(U)$ es el espacio $C(U) \cap bU$.
- $C_0(U)$ es el espacio que conformado por las funciones $f \in C(U)$ tales que $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0$.
- $C_c(U)$ es el espacio que conformado por las funciones $f \in C(U)$ con soporte compacto.
- $C^k(U)$ es el espacio de funciones f en U^0 , con k veces diferenciables tales que todas las derivadas parciales de f hasta el k -ésimo orden pertenecen a $C(U)$.

- $C_c^k(U) = C^k(U) \cap C_c(U)$.
- $C^\infty(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(U)$ y $C_c^\infty(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_c^n(U)$.

Por convención todas las funciones f definidas en U las extenderemos a U_Δ haciendo $f(\Delta) = 0$.

1.2. Definición y Caracterización de Procesos Afines

Consideremos un proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $D := \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ y semigrupo (P_t) actuando en bD ,

$$P_t f(x) = \int_D f(\xi) p_t(x, d\xi).$$

Dada su estructura producto, un punto en D se escribirá como $x = (y, z)$ o $\xi = (\eta, \zeta)$. Asumimos que $d := m + n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, que m o n pueden ser cero. No exigimos que (P_t) sea conservativo; es decir, tenemos

$$p_t(x, D) \leq 1, \quad p_t(x, D_\Delta) = 1, \quad p_t(\Delta, \{\Delta\}) = 1, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D.$$

Denotamos por $(X, (\mathbb{P}_x)_{x \in D}) = ((Y, Z), (\mathbb{P}_x)_{x \in D})$ la realización canónica de (P_t) definida en $(\Omega, \mathcal{F}^0, (\mathcal{F}_t^0))$, donde Ω es el conjunto de funciones $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow D_\Delta$ y $X_t(\omega) = (Y_t(\omega), Z_t(\omega)) = \omega(t)$. La filtración (\mathcal{F}_t^0) es generada por X y $\mathcal{F}^0 = \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t^0$. Para cada $x \in D$, \mathbb{P}_x es una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}^0) tal que $\mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1$ y se cumple la propiedad de Markov,

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t^0] = P_s f(X_t) = \mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)], \quad \mathbb{P}_x - c.s. \forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall f \in bD, \quad (1.1)$$

donde \mathbb{E}_x denota la esperanza con respecto a \mathbb{P}_x .

Si para cada $u = (v, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ definimos una función $f_u \in C(D)$ como

$$f_u(x) := e^{\langle u, x \rangle} = e^{\langle u, y \rangle} + e^{\langle w, z \rangle}, \quad x = (y, z) \in D,$$

tenemos la siguiente

Afirmación 1.1. $f_u \in C_b(D)$ si y sólo si u está en $\mathcal{U} = \mathbb{C}_-^m \times i\mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que $u = (v, w)$ está en \mathcal{U} , entonces

$$\begin{aligned} \langle v, y \rangle &= v_1 y_1 + \cdots + v_m y_m \in \mathbb{C}_-, \\ \langle w, z \rangle &= w_1 z_1 + \cdots + w_n z_n \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|e^{\langle v, y \rangle + \langle w, z \rangle}\| = \|e^{\langle v, y \rangle}\| \|e^{\langle w, z \rangle}\| = \|e^{Re\langle v, y \rangle}\| \cdot 1 \leq 1$$

para cada $x = (y, z) \in D$ (ver [4], Capítulo 2, Sección 3).

Recíprocamente, si $f_u \in C_b(D)$, entonces $e^{\langle v,y \rangle + \langle w,z \rangle} = e^{\langle v,y \rangle} e^{\langle w,z \rangle}$ está acotada. Luego, dado que y y z no dependen entre sí, se sigue que $e^{\langle v,y \rangle}$ y $e^{\langle w,z \rangle}$ están acotadas. Así, dado que $z \in \mathbb{R}^n$, se sigue que w debe forzosamente estar en $i\mathbb{R}^n$. Además, como $y \in \mathbb{R}_+^m$, $e^{\langle v,y \rangle}$ será acotada para cualquier $v \in \mathbb{C}_-^m$. \square

Ahora, dado que $\|f_u(x)\| \leq 1$ para cada $u \in \mathcal{U}$, se sigue del teorema de convergencia dominada $P_t f_u$ es continua en $u \in \mathcal{U}$ para cada $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$. Nótese también que

$$\mathcal{U}^0 = \mathbb{C}_{--}^m \times i\mathbb{R}^n \text{ y } \partial\mathcal{U} = i\mathbb{R}^m \times i\mathbb{R}^n = i\mathbb{R}^d,$$

y

$$\mathbb{R}^d \ni q \mapsto P_t f_{iq}(x)$$

es la función característica de la medida $p_t(x, \cdot)$, esto es, la función característica de $X_t 1_{\{X_t \neq \Delta\}}$ con respecto a P_x

Definición 1.2. *El proceso de Markov $(X, (P_x)_{x \in D})$, y (P_t) , se dice afín si para cada $t \in \mathbb{R}_+$ la función característica de $p_t(x, \cdot)$ tiene una dependencia exponencialmente afín de x . Esto es, si para cada $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{U}$ existen $\phi(t, u) \in \mathbb{C}$ y $\psi(t, u) = (\psi^{\mathcal{Y}}(t, u), \psi^{\mathcal{Z}}(t, u)) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ tales que*

$$\begin{aligned} P_t f_u(x) &= e^{\phi(t,u) + \langle \psi(t,u), x \rangle} \\ &= e^{\phi(t,u) + \langle \psi^{\mathcal{Z}}(t,u), y \rangle + \langle \psi^{\mathcal{Z}}(t,u), z \rangle}, \quad \forall x = (y, z) \in D. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observación 1.3. *Dado que $P_t f_u \in bD$ para cada $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$, se concluye de la ecuación anterior que $\phi(t, u) \in \mathbb{C}_-$ y $\psi(t, u) = (\psi^{\mathcal{Y}}(t, u), \psi^{\mathcal{Z}}(t, u)) \in \mathcal{U}$ para toda $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{U}$.*

Observación 1.4. *De la ecuación (1.2) se sigue la unicidad de $\psi(t, u)$. Pero $\text{Im } \phi(t, u)$ está determinada salvo múltiplos de 2π . No obstante, tenemos por definición que $P_t f_u(0) \neq 0$ para toda $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{U}$. Dado que $\partial\mathcal{U}$ es simplemente conexa, $P_t f_u(0)$ admite una única representación de la forma (1.2) tal que $\phi(t, \cdot)$ es continua en $\partial\mathcal{U}$ y $\phi(t, 0) = 0$.*

Definición 1.5. *El proceso de Markov $(X, (P_x)_{x \in D})$, y (P_t) , se dice estocásticamente continuo si $p_s(x, \cdot) \rightarrow p_t(x, \cdot)$ débilmente en D , para $s \rightarrow t$, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$.*

Si $(X, (P_x)_{x \in D})$ es afín, entonces, por el teorema de continuidad de Lévy, $(X, (P_x)_{x \in D})$ es estocásticamente continuo si y sólo si $\phi(t, u)$ y $\psi(t, u)$ de (1.2) son continuas en $t \in \mathbb{R}_+$ para cada $u \in \partial\mathcal{U}$

Definición 1.6 *El proceso de Markov $(X, (P_x)_{x \in D})$, y (P_t) , se dice regular si es estocásticamente continuo y la derivada por la derecha*

$$\tilde{\mathcal{A}}f_u(x) := \partial_t^+ P_t f_u(x) |_{t=0}$$

existe para toda $(x, u) \in D \times \mathcal{U}$, y es continua en $u = 0$ para toda $x \in D$.

Cuando no haya ambigüedad, se escribirá por X o (Y, Z) al proceso de Markov $(X, (P_x)_{x \in D})$,

y se dirá simplemente que X es afín, estocásticamente continuo, regular o regular afín si $(X, (P_x)_{x \in D})$ tiene la propiedad respectiva.

En los resultados que se establecerán más adelante se hará uso frecuente de la notación que a continuación introduciremos. Denotamos por $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base canónica para \mathbb{R}^d , y escribimos $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$ y $\mathcal{J} = \{m+1, \dots, d\}$. Definimos la función de truncamiento $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_d) : \mathbb{R}^d \rightarrow [-1, 1]^d$ como

$$\chi_k(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{si } \xi_k = 0, \\ (1 \wedge |\xi_k|) \frac{\xi_k}{|\xi_k|}, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\alpha = (\alpha_{ij})$ una matriz de $d \times d$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ un vector d -dimensional, e $I, J \subset \{1, \dots, d\}$. Entonces escribimos α^T para la transpuesta de α , $\alpha_{IJ} := (\alpha_{ij})_{i \in I, j \in J}$ y $\beta_I = (\beta_i)_{i \in I}$. Así, por ejemplo, escribiremos $\chi_I(\xi) = (\chi_k(\xi))_{k \in I}$ o $\nabla_I = (\partial_{x_k})_{k \in I}$. En consecuencia, tenemos $\psi^{\mathcal{Y}}(t, u) = \psi_{\mathcal{I}}(t, u)$ y $\psi^{\mathcal{Z}}(t, u) = \psi_{\mathcal{J}}(t, u)$. También escribimos $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)$ sin especificar la dimensión siempre y cuando no ocurra alguna ambigüedad. Para $i \in \mathcal{I}$ definimos $\mathcal{I}(i) := \mathcal{I} \setminus \{i\}$ y $\mathcal{J}(i) := \{i\} \cup \mathcal{J}$, y denotamos por $\text{Id}(i)$ la matriz de $m \times m$ dada por $\text{Id}(i)_{kl} = \delta_{ik} \delta_{kl}$, donde δ_{kl} es la Delta de Kronecker.

Definición 1.7. *Los parámetros $(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, m, \mu)$ son admisibles si*

- a) $a \in \text{Sem}^d$ con $a_{\mathcal{I}\mathcal{I}} = 0$, (de donde $a_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = 0$ y $a_{\mathcal{J}\mathcal{I}} = 0$),
- b) $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, con $\alpha_i \in \text{Sem}^d$ y $\alpha_{i,\mathcal{I}\mathcal{I}} = \alpha_{i,ii} \text{Id}(i)$, para toda $i \in \mathcal{I}$,
- c) $b \in D$,
- d) $\beta \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es tal que $\beta_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = 0$ y $\beta_{i,\mathcal{I}(i)} \in \mathbb{R}_+^{m-1}$, para toda $i \in \mathcal{I}$, (por lo que todos los elementos fuera de la diagonal de $\beta_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ son no negativos),
- e) $c \in \mathbb{R}_+$,
- f) $\gamma \in \mathbb{R}_+^m$,
- g) m es una medida de Borel en $D \setminus \{0\}$ que satisface

$$M := \int_{D \setminus \{0\}} (\langle \chi_{\mathcal{I}}(\xi), \mathbf{1} \rangle + \|\chi_{\mathcal{J}}(\xi)\|^2) m(d\xi) < \infty$$

- h) $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ donde cada μ_i es una medida de Borel en $D \setminus \{0\}$ que satisface

$$\mathcal{M}_i := \int_{D \setminus \{0\}} (\langle \chi_{\mathcal{I}(i)}(\xi), \mathbf{1} \rangle + \|\chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi)\|^2) \mu_i(d\xi) < \infty$$

El siguiente teorema contiene los principales resultados que estudiaremos. Su prueba se dará más adelante.

Teorema 1.8 (Caracterización de Procesos Afines Regulares). *Supongamos que*

X es afín regular. Entonces X es un proceso de Feller. Sea \mathcal{A} su generador infinitesimal. Entonces $C_c^\infty(D)$ es un núcleo de \mathcal{A} , $C_c^2(D) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, y existen parámetros admisibles $(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, m, \mu)$ tales que, para cada $f \in C_c^2(D)$,

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{k,l=1}^d (a_{kl} + \langle \alpha_{\mathcal{I},kl}, y \rangle) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_l} + \langle b + \beta x, \nabla f(x) \rangle - (c + \langle \gamma, y \rangle) f(x) \\ &+ \int_{D \setminus \{0\}} (f(x + \xi) - f(x) - \langle \nabla_{\mathcal{J}} f(x), \chi_{\mathcal{J}}(\xi) \rangle) m(d\xi) \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{D \setminus \{0\}} (f(x + \xi) - f(x) - \langle \nabla_{\mathcal{J}(i)} f(x), \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi) \rangle) y_i \mu_i(d\xi). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Más aún, (1.2) se cumple para toda $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$, donde $\phi(t, u)$ y $\psi(t, u)$ son soluciones de las ecuaciones generalizadas de Riccati,

$$\phi(t, u) = \int_0^t F(\psi(s, u)) ds \quad (1.4)$$

$$\partial_t \psi^{\mathcal{Y}}(t, u) = R^{\mathcal{Y}}(\psi^{\mathcal{Y}}(t, u), e^{\beta^{\mathcal{Z}} t} w), \quad \psi^{\mathcal{Y}}(0, u) = v \quad (1.5)$$

$$\psi^{\mathcal{Z}}(t, u) = e^{\beta^{\mathcal{Z}} t} w \quad (1.6)$$

con

$$F(u) = \langle au, u \rangle + \langle b, u \rangle - c + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}}, \chi_{\mathcal{J}}(\xi) \rangle) m(d\xi) \quad (1.7)$$

$$R_i^{\mathcal{Y}}(u) = \langle \alpha_i u, u \rangle + \langle \beta_i^{\mathcal{Y}}, u \rangle - \gamma_i + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}(i)}, \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi) \rangle) \mu_i(d\xi) \quad (1.8)$$

para $i \in \mathcal{I}$, y

$$\beta_i^{\mathcal{Y}} := (\beta^T)_{i\{1, \dots, d\}} \in \mathcal{R}^d, \quad i \in \mathcal{I}, \quad (1.9)$$

$$\beta^{\mathcal{Z}} := (\beta^T)_{\mathcal{J}\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (1.10)$$

Recíprocamente, sean $(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, m, \mu)$ parámetros admisibles. Entonces existe un único semigrupo regular afín (P_t) con generador infinitesimal (1.3), y (1.2) se cumple para toda $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$, donde $\phi(t, u)$ y $\psi(t, u)$ están dadas por (1.4) y (1.6).

Observación 1.9. Para visualizar las conexiones entre los objetos en el teorema anterior, definamos, para cada $f \in C^2(D) \cap C_b(D)$, $\mathcal{A}^\# f(x)$ como el lado derecho de (1.3). Entonces F , $R^{\mathcal{Y}} = (R_1^{\mathcal{Y}}, \dots, R_m^{\mathcal{Y}})$ y $\beta^{\mathcal{Z}}$ satisfacen

$$\partial_t^+ P_t f_u(x)|_{t=0} = (F(u) + \langle R^{\mathcal{Y}}(u), y \rangle + \langle \beta^{\mathcal{Z}} w, z \rangle) f_u(x) = \mathcal{A}^\# f_u(x),$$

para $u = (v, w) \in \mathcal{U}$ y $x = (y, z) \in D$.

La ecuación (1.6) establece que $\psi^{\mathcal{Z}}(t, u)$ depende sólo de (t, w) . Luego, para $w = 0$, se sigue de (1.2) que la función característica de $Y_t 1_{\{X_t \neq \Delta\}}$ con respecto a \mathbb{P}_x está dada por

$$P_t f_{(iq,0)}(x) = \int_D e^{i\langle q, \eta \rangle} p_t(x, d\xi) = e^{\phi(t, iq, 0) + \langle \psi^{\mathcal{Y}}(t, iq, 0), y \rangle}, \quad q \in \mathbb{R}^m,$$

depende sólo de y . Así, obtenemos el siguiente

Corolario 1.10. *Sea $X = (Y, Z)$ afín regular. Entonces $(Y, (\mathbb{P}_{(y,z)})_{y \in \mathbb{R}_+^m})$ es un proceso de Markov afín regular con espacio de estados \mathbb{R}_+^m , independientemente de $z \in \mathbb{R}^n$.*

El Teorema 1.8 generaliza y unifica dos tipos clásicos de procesos estocásticos, como se muestra en el siguiente

Corolario 1.11. *Sea $X = (Y, Z)$ afín regular. Entonces $(Y, (\mathbb{P}_{(y,z)})_{y \in \mathbb{R}_+^m})$ es un proceso CBI para cada $z \in \mathbb{R}^n$. Si $m = 0$, entonces X es un proceso de tipo OU. Recíprocamente, cada proceso de tipo OU y CBI es un proceso de Markov afín regular*

Observación 1.12. *Existen procesos de Markov afines que no son estocásticamente continuos para los cuales no se cumple el Teorema 1.8. Para $x_0 \in D$ definimos*

$$p_t(x, d\xi) = \begin{cases} \delta_x, & \text{si } t = 0, \\ \delta_{x_0}, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

con δ_x la medida de Dirac en x , es decir, $\delta_x(A) = 1_A(x)$. Dado que $\int_D f(\xi) \delta_x(d\xi) = f(x)$, entonces

$$P_t f_u(x) = \begin{cases} f_u(x) = e^{\langle u, x \rangle}, & \text{si } t = 0, \\ f_u(x_0) = e^{\langle u, x_0 \rangle}, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

para cada $x \in D$. Luego, $p_t(x, d\xi)$ así definida es la función de transición de un proceso de Markov afín con

$$\phi(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0, \\ \langle u, x_0 \rangle, & \text{si } t > 0, \end{cases} \quad y \quad \psi(t, u) = \begin{cases} u, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

que obviamente no es de la forma establecida en el Teorema 1.8.

1.3. Existencia de Momentos

Para aplicaciones en general, es indispensable tener criterios sobre la existencia de los momentos parciales de X_t . El objetivo de esta sección es enunciar un teorema con dichos criterios. Para llegar a esto es necesario contar con algunos lemas, los cuales de momento se darán sin demostración. Para ver la prueba consultar [3].

Sea $N \in \mathbb{N}$ y ν una medida acotada en \mathbb{R}^N . Denotemos por

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle y, x \rangle} \nu(dx), \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

su función característica. Ahora introducimos, con el propósito de no complicar la notación que se estará usando, la función

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle z, x \rangle} \nu(dx),$$

donde $\operatorname{Re} z \in V$, con

$$V := \left\{ y \in \mathbb{R}^N \mid \int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle y, x \rangle} \nu(dx) < \infty \right\}. \quad (1.11)$$

Claramente, $0 \in V$ y $g(y) = h(iy)$ en \mathbb{R}^N .

Lema 1.13. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq N$. Si existe $(\partial_{y_i})^{2k} g(0)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (x_i)^{2k} \nu(dx) < \infty.$$

Por otro lado, si $\int_{\mathbb{R}^N} \|x\|^k \nu(dx) < \infty$, entonces $g \in C^k(\mathbb{R}^M)$ y

$$\partial_{y_{i_1}} \cdots \partial_{y_{i_l}} g(y) = i^l \int_{\mathbb{R}^N} x_{i_1} \cdots x_{i_l} e^{i\langle y, x \rangle} \nu(dx),$$

para toda $y \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq i_1, \dots, i_l \leq N$ y $1 \leq l \leq k$.

Lema 1.14. *El conjunto V , definido en (1.11), es convexo. Más aún, sea V_0 un abierto en \mathbb{R}^N tal que $V_0 \subset V$. Entonces h es analítica en la banda abierta*

$$S := \{z \in \mathbb{C}^N \mid \operatorname{Re} z \in V_0\}. \quad (1.12)$$

En general V puede no contener un abierto V_0 en \mathbb{R}^N . Los dos lemas siguientes nos proporcionan condiciones suficientes para la existencia de tal V_0 . Para $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \in \mathbb{R}_{++}^N$ definimos el disco abierto en \mathbb{C}^N con centro en 0

$$P_\rho := \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z_i| < \rho_i, \quad i = 1, \dots, N\}.$$

Lema 1.15. *Supongamos que $g(y) = G(iy)$ para toda $y \in P_\rho \cap \mathbb{R}^N$, donde G es una función analítica en P_ρ . Entonces $y \in P_\rho \cap \mathbb{R}^N \subset V$, y $h = G$ en P_ρ .*

Lema 1.16. *Sea U una vecindad abierta convexa de 0 en \mathbb{C}^N y G una función analítica en U . Supongamos que $g(y) = G(iy)$ para toda $iy \in U \cap i\mathbb{R}^N$. Entonces $U \cap \mathbb{R}^N \subset V$.*

Teorema 1.17. *Supongamos que X es afín regular conservativo, y sea $t \in \mathbb{R}_+$,*

i) *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq l \leq d$. Si $\partial_{\lambda_i}^{2k} \phi(t, i\lambda)|_{\lambda=0}$ y $\partial_{\lambda_i}^{2k} \psi(t, i\lambda)|_{\lambda=0}$ existen, entonces*

$$\mathbb{E}_x [(X_t^l)^{2k}] < \infty, \quad \forall x \in D.$$

ii) *Sea U una vecindad abierta convexa de 0 en \mathbb{C}^d . Supongamos que $\phi(t, \cdot)$ y $\psi(t, \cdot)$ tienen una extensión analítica en U . Entonces*

$$\mathbb{E}_x [e^{\langle q, X_t \rangle}] < \infty, \quad \forall q \in U \cap \mathbb{R}^d, \quad \forall x \in D.$$

y (1.2) se cumple para toda $u \in U$ con $\operatorname{Re} U \in U \cap \mathbb{R}^d$.

Para probar este teorema basta combinar los lemas 1.13, 1.14 y 1.16.

Nótese que la finitud de los momentos de X_t con respecto a \mathbb{P}_x requiere que X_t sea finito \mathbb{P}_x -c.s.

1.4. Resultados Preliminares

Ahora daremos algunas consecuencias inmediatas de las definiciones 1.2 y 1.6. Primero extenderemos el rango de validez con respecto a (t, u) de (1.2), que de momento consideramos como $\mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{U}$. En el Lema 1.18 fijamos $u \in \mathcal{U}$ y estudiamos que tanto es posible variar t sin que deje de cumplirse (1.2). En el Lema 1.19, recíprocamente, fijamos $t \in \mathbb{R}_+$ y exploramos el rango de posibles u en \mathbb{C}^d .

Lema 1.18. *Supongamos que X es afín regular. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{O} := \{(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \mid P_s f_u(0) \neq 0, \forall s \in [0, t]\} \quad (1.13)$$

es abierto en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$, y existe una extensión única de $\phi(t, u)$ y $\psi(t, u)$ sobre \mathcal{O} tal que (1.2) se cumple para toda $(t, u) \in \mathcal{O}$.

Demostración. Sea $x \in D$. Afirmamos que, para $s \rightarrow t$,

$$P_s f_u(x) \rightarrow P_t f_u(x), \quad \text{uniformemente en } u \text{ sobre compactos en } \mathcal{U}. \quad (1.14)$$

Para ver esto tomemos $t \in \mathbb{R}_+$, (t_k) una sucesión tal que $t_k \rightarrow t$, y $\epsilon > 0$. Dado que X es débilmente continuo, la sucesión $(p_{t_k}(x, \cdot))$ es tensa. Entonces existe $\rho \in C_c(D)$ con $0 \leq \rho \leq 1$ y $\int_D (1 - \rho(\xi)) p_{t_k}(x, d\xi) < \epsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Más aún, existe $\delta' > 0$ tal que para toda $u, u' \in \mathcal{U}$, con $\|u - u'\| < \delta'$, tenemos que

$$\sup_{\xi \in \text{supp } \rho} |f_u(\xi) - f_{u'}(\xi)| \leq \epsilon,$$

donde $\text{supp } \rho := \{\xi \in D \mid \rho(\xi) \neq 0\}$. Entonces, para cada $u, u' \in \mathcal{U}$ con $\|u - u'\| < \delta'$,

$$\begin{aligned} |P_{t_k} f_u(x) - P_{t_k} f_{u'}(x)| &\leq \int_D |f_u(\xi) - f_{u'}(\xi)| \rho(\xi) p_{t_k}(x, d\xi) \\ &\quad + \int_D |f_u(\xi) - f_{u'}(\xi)| (1 - \rho(\xi)) p_{t_k}(x, d\xi) \\ &\leq 3\epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego $(P_{t_k} f_u(x))$ es equicontinua en $u \in \mathcal{U}$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &|(P_{t_k} f_u(x) - P_t f_u(x)) - (P_{t_k} f_{u'}(x) - P_t f_{u'}(x))| \\ &\leq |P_{t_k} f_u(x) - P_t f_u(x)| + |P_t f_u(x) - P_t f_{u'}(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

para toda $u, u' \in \mathcal{U}$ con $\|u - u'\| \leq \delta$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Ahora sea U un subconjunto compacto de \mathcal{U} . Tomemos una cubierta finita para U conformada por q bolas de radio δ y centros $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(q)}$. Dado que X es estocásticamente continuo, $P_{t_k} f_{u^{(i)}} \rightarrow P_t f_{u^{(i)}}$ cuando $t_k \rightarrow t$ para cualquier $u^{(i)}$. Esto es, existe $N^{(i)}$ tal que

$$|P_{t_k} f_{u^{(i)}}(x) - P_t f_{u^{(i)}}(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall k \geq N^{(i)}. \quad (1.16)$$

Tomemos ahora $u \in U$ y una bola, digamos $u^{(i)}$, que contiene a u . De (1.15) y (1.16) se sigue que

$$\begin{aligned} |P_{t_k} f_u(x) - P_t f_u(x)| &\leq |(P_{t_k} f_u(x) - P_t f_u(x)) - (P_{t_k} f_{u^{(i)}}(x) - P_t f_{u^{(i)}}(x))| \\ &\quad + |P_{t_k} f_{u^{(i)}}(x) - P_t f_{u^{(i)}}(x)| \\ &\leq \epsilon, \quad \forall k \geq \max_i N^{(i)}, \end{aligned}$$

probando así (1.14).

Como consecuencia de (1.14), $P_t f_u(x)$ es conjuntamente continua en $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$. Luego \mathcal{O} es abierto en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$. Nótese que $\mathcal{O} \supset \{0\} \times \mathcal{U}$, que es simplemente conexo, y cada franja en \mathcal{O} es equivalente a su proyección sobre $\{0\} \times \mathcal{U}$. Luego \mathcal{O} es simplemente conexo.

Dado que X es afín, se tiene

$$P_t f_{(v,w)}(x) P_t f_{(v,w)}(\xi) = P_t f_{(v,w)}(x + \xi) P_t f_{(v,w)}(0), \quad \forall x, \xi \in D, \quad (1.17)$$

para toda $(t, v, w) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{U}$. Por el Lema 1.14, las funciones en ambos lados de (1.17) son analíticas en $v \in \mathbb{C}_{--}^m$. Por el principio de reflexión de Schwarz, la igualdad en (1.17) se cumple para toda $v \in \mathbb{C}_{--}^m$. Dado que \mathcal{O} es simplemente conexo, $\phi(t, u)$ tiene una única extensión continua sobre \mathcal{O} tal que $P_t f_u(0) = \exp(\phi(t, u))$ para toda $(t, u) \in \mathcal{O}$. Entonces, para $(t, u) \in \mathcal{O}$ fijo, la función $g(x) = \exp(-\phi(t, u)) P_t f_u(x)$ es medible y satisface la ecuación $g(x)g(\xi) = g(x + \xi)$. En consecuencia existe una única extensión continua de $\psi(t, u)$ tal que

$$e^{-\phi(t,u)} P_t f_u(x) = e^{\langle \psi(t,u), x \rangle}, \quad \forall x \in D, \quad \forall (t, u) \in \mathcal{O}$$

de donde se sigue el resultado. □

El resultado que a continuación se enuncia es una variación del Lema anterior. Sean $\pi, \rho \in \mathbb{R}_+^d$, y definamos $V := \{q \in \mathbb{R}^d \mid -\pi_l \leq q_l \leq \rho_l, \quad l = 1, \dots, d\}$ y la banda $S := \{u \in \mathbb{C}^d \mid \operatorname{Re} u \in V\} \supset \partial\mathcal{U}$. Entonces

Lema 1.19. *Sea $t \in \mathbb{R}_+$. Supongamos que X es afín y*

$$\int_D e^{\langle q, \xi \rangle} p_t(x, d\xi) < \infty, \quad \forall q \in V, \quad \forall x \in D. \quad (1.18)$$

Entonces $O(t) := \{u \in S \mid P_t f_u(0) \neq 0\}$ es abierto en S y, para cada conjunto simplemente conexo $\partial\mathcal{U} \subset U \subset O(t)$, existe una única extensión continua de $\phi(t, \cdot)$ y $\psi(t, \cdot)$ sobre U tal que (1.2) se cumple para toda $u \in U$.

Demostración. El teorema de convergencia dominada implica la continuidad de la función $S \ni u \mapsto P_t f_u(0)$. Entonces $O(t)$ es abierto en S y, claramente, $\partial\mathcal{U} \subset O(t)$. Así, el resultado se sigue del Lema 1.14 utilizando los mismos argumentos que en el Lema anterior. Nótese que, dado que f_u no es acotada para $u \in S$, no es posible afirmar la continuidad de $P_t f_u(x)$ en t . □

Por el resto de esta sección asumiremos que X es afín regular. Como consecuencia inmediata de (1.2) y la Observación 1.4 se tiene

$$\phi(0, u) = 0, \quad \psi(0, u) = u, \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (1.19)$$

Sea $(t, u) \in \mathcal{O}$ y $s > 0$ tal que $(t + s, u) \in \mathcal{O}$ y $(s, \psi(t, u)) \in \mathcal{O}$. Por el Lema 1.18 y la ecuación Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned} e^{\phi(t+s, u) + \langle \psi(t+s, u), x \rangle} &= \int_D p_s(x, d\xi) \int_D p_t(\xi, d\tilde{\xi}) f_u(\tilde{\xi}) \\ &= e^{\phi(t, u)} \int_D p_s(x, d\xi) e^{\langle \psi(t, u), x \rangle} \\ &= e^{\phi(t, u) + \phi(s, \psi(t, u)) + \langle \psi(s, \psi(t, u)), x \rangle}, \quad \forall x \in D, \end{aligned}$$

entonces

$$\phi(t + s, u) = \phi(t, u) + \phi(s, \psi(t, u)) \quad (1.20)$$

$$\psi(t + s, u) = \psi(s, \psi(t, u)). \quad (1.21)$$

De la Definición 1.5 y el Lema 1.18, las siguientes derivadas por la derecha existen,

$$F(u) := \partial_t^+ \phi(0, u), \quad (1.22)$$

$$R(u) = (R^y(u), R^z(u)) := \partial_t^+ \psi(0, u), \quad (1.23)$$

y tenemos

$$\tilde{\mathcal{A}}f_u(x) = (F(u) + \langle R(u), x \rangle) f_u(x), \quad (1.24)$$

con $\tilde{\mathcal{A}}f_u(x) := \partial_t^+ P_t f_u(x) |_{t=0}$, para toda $u \in \mathcal{U}$, $x \in D$. Combinando (1.20)-(1.21) con (1.22)-(1.23) se concluye que, para toda $(t, u) \in \mathcal{O}$,

$$\partial_t^+ \phi(t, u) = F(\psi(t, u)), \quad (1.25)$$

$$\partial_t^+ \psi(t, u) = R(\psi(t, u)). \quad (1.26)$$

De la ecuación (1.24) se sigue que

$$F(u) = \tilde{\mathcal{A}}f_u(0) \quad (1.27)$$

$$R_i(u) = \frac{\tilde{\mathcal{A}}f_u(e_i)}{f_u(e_i)} - F(u), \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.28)$$

Capítulo 2

Prueba del Teorema de Caracterización

La estrategia para probar el Teorema 1.8 será la siguiente. Primero especificaremos F , R^y y R^z , y se probará que son de la forma deseada. En vista de (1.27) y (1.28) es suficiente conocer $\mathcal{A}f_u$ en los ejes coordenados en D . Entonces se probará que X tiene la propiedad de Feller y su generador está dado por (1.3). Recíprocamente, dados parámetros admisibles $(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, m, \mu)$, las ecuaciones generalizadas de Riccati (1.4)-(1.6) están únicamente determinadas por algunas funciones $\phi(t, u)$ y $\psi(t, u)$ que tienen la siguiente propiedad: para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y $x \in D$ fijos, el mapeo $\mathbb{R}^d \ni q \mapsto e^{\phi(t, iq) + \langle \psi(t, iq), x \rangle}$ es la función característica de alguna distribución de probabilidad infinitamente divisible, digamos $p_t(x, d\xi)$, en D . De la propiedad de flujo de ϕ y ψ se sigue que $p_t(x, d\xi)$ es la función de transición de un proceso de Markov en D , que por construcción es afín regular.

2.1. Representaciones de Procesos Regulares

En la presente sección se supondrá X regular.

Lema 2.1. *Sean $i \in \mathcal{I}$ y $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces existen*

$$\alpha(i, r) = (\alpha_{kl}(i, r))_{m, l \in \mathcal{J}(i)} \in \text{Sem}^{n+1}, \quad (2.1)$$

$$\beta(i, r) \in \mathbb{R}^d \quad \text{con} \quad \beta_{\mathcal{I}(i)}(i, r) \in \mathbb{R}_+^{m-1}, \quad (2.2)$$

$$\gamma(i, r) \in \mathbb{R}_+, \quad (2.3)$$

y una medida de Borel no negativa $\nu(i, r; d\xi)$ sobre $D \setminus \{re_i\}$ que satisfice

$$\int_{D \setminus \{re_i\}} (\langle \chi_{\mathcal{I}(i)}(\xi - re_i), \mathbf{1} \rangle + \|\chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi - re_i)\|^2) \nu(i, r; d\xi) < \infty, \quad (2.4)$$

tal que para toda $u \in \mathcal{U}$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}f_u(re_i)}{f_u(re_i)} &= \langle \alpha(i, r)u_{\mathcal{J}(i)}, u_{\mathcal{J}(i)} \rangle + \langle \beta(i, r), u \rangle - \gamma(i, r) \\ &\quad + \int_{D \setminus \{re_i\}} (e^{\langle u, \xi - re_i \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}(i)}, \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi - re_i) \rangle) \nu(i, r; d\xi). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demostración. Fijemos $i \in \mathcal{I}$ y $r \in \mathbb{R}_+$, y sea $u \in \mathcal{U}$. En lo que sigue escribiremos $x = re_i$, $I = \mathcal{I}(i)$ y $J = \mathcal{J}(i)$. La demostración será hecha en cuatro pasos.

Paso 1: Descomposición. Sea $t > 0$, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{P_t f_u(x) - f_u(x)}{t} &= \frac{1}{t} \int_D (f_u(\xi) - f_u(x) - \langle \nabla_J f_u(x), \chi_J(\xi - x) \rangle) p_t(x, d\xi) \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_D \langle \nabla_J f_u(x), \chi_J(\xi - x) \rangle p_t(x, d\xi) + \frac{1}{t} (p_t(x, D) - 1) f_u(x) \\ &= \frac{1}{t} \int_{D \setminus \{x\}} h_u(x, \xi) d(x, \xi) p_t(x, d\xi) \\ &\quad + \langle \beta_t(x), \nabla_J f_u(x) \rangle - \gamma_t(x) f_u(x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$d(x, \xi) := \langle \chi_I(\xi - x), \mathbf{1} \rangle + \|\chi_J(\xi - x)\|^2, \quad (2.7)$$

$$h_u(x, \xi) := \frac{f_u(\xi) - f_u(x) - \langle \nabla_J f_u(x), \chi_J(\xi - x) \rangle}{d(x, \xi)}, \quad (2.8)$$

y

$$\beta_t(x) := \frac{1}{t} \int_D \chi_J(\xi - x) p_t(x, d\xi) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\gamma_t(x) := \frac{1}{t} (1 - p_t(x, D)) \geq 0.$$

Nótese que

$$0 \leq d(x, \xi) \leq d, \quad \forall \xi \in D \quad (d(x, \xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = x). \quad (2.9)$$

Entonces podemos introducir una nueva medida de probabilidad de la siguiente manera. Sea

$$\ell_t(x) := \frac{1}{t} \int_D d(x, \xi) p_t(x, d\xi) \geq 0.$$

Si $\ell_t(x) > 0$, definimos

$$\mu_t(x, d\xi) := \frac{d(x, \xi)}{t\ell_t(x)} p_t(x, d\xi).$$

Si $\ell_t(x) = 0$ definimos $\mu_t(x, \cdot)$ como la medida de Dirac en algún punto en $D \setminus \{x\}$. En cualquier caso tenemos que $\mu_t(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad sobre $D \setminus \{x\}$, de modo que podemos reescribir (2.6) como

$$\frac{P_t f_u(x) - f_u(x)}{t} = \ell_t(x) \int_{D \setminus \{x\}} h_u(x, \xi) \mu_t(x, d\xi) + \langle \beta_t(x), \nabla_J f_u(x) \rangle - \gamma_t(x) f_u(x). \quad (2.10)$$

Paso 2: Extensión de $h_u(x, \cdot)$. Nótese que $h_u(x, \cdot) \in C_b(D \setminus \{x\})$, pero el valor de $\lim_{\xi \rightarrow x} h_u(x, \xi)$ depende de la dirección por la que ξ converja a x . Definimos ahora

$$Q(x) := \{\xi \in D \mid |\xi_k - x_k| \leq 1, 1 \leq k \leq d\} \text{ y } Q_0(x) := Q(x) \setminus \{x\}. \quad (2.11)$$

Construiremos una compactificación de $Q_0(x)$ para la cual $h_u(x, \cdot)$ se pueda extender continuamente (ver [10], Capítulo 5).

Descomponiendo la diferencia $\xi - x = (\xi - \xi^\perp) + (\xi^\perp - x)$, con

$$\xi_k^\perp = \begin{cases} x_k, & \text{si } k \in I, \\ \xi_k, & \text{si } k \in J, \end{cases}$$

y aplicando dos veces el teorema de Taylor (ver [9], Capítulo 4, Sección 11), tenemos

$$\begin{aligned} h_u(x, \xi) &= \frac{(f_u(\xi) - f_u(\xi^\perp)) + (f_u(\xi^\perp) - f_u(x) - \langle \nabla f_u(\xi), \xi^\perp - x \rangle)}{d(x, \xi)} \\ &= \left\langle \int_0^1 \nabla f_u(\xi^\perp + s(\xi - \xi^\perp)) ds, \frac{\xi - \xi^\perp}{d(x, \xi)} \right\rangle \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^d \left(\int_0^1 \partial_{x_k} \partial_{x_l} f_u(x + s(\xi^\perp - x))(1-s) ds \right) \frac{(\xi_k^\perp - x_k)(\xi_l^\perp - x_l)}{d(x, \xi)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

para toda $\xi \in Q_0(x)$.

Definimos $\mathbf{w}(x, \xi) := (\mathbf{w}_k(x, \xi))_{k \in I}$ y $\mathbf{a}(x, \xi) := (\mathbf{a}_{kl}(x, \xi))_{k,l \in J}$ como

$$\mathbf{w}_k(x, \xi) := \frac{\xi_k - x_k}{d(x, \xi)}, \quad k \in I \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a}_{kl}(x, \xi) := \frac{(\xi_k - x_k)(\xi_l - x_l)}{d(x, \xi)}, \quad k, l \in J. \quad (2.14)$$

Consideremos el subconjunto compacto H de $[0, 1]^{m-1} \times \text{Sem}^{n+1}$ definido por

$$H := \left\{ (w, a) \in [0, 1]^{m-1} \times \text{Sem}^{n+1} \mid \langle w, \mathbf{1} \rangle + \sum_{k \in J} a_{kk} = 1 \right\}. \quad (2.15)$$

Entonces

$$\Gamma(x, \xi) := (\xi, \mathbf{w}(x, \xi), \mathbf{a}(x, \xi)) \in Q_0(x) \times H, \quad \forall \xi \in Q_0(x), \quad (2.16)$$

y $\Gamma(x, \cdot) : Q_0(x) \rightarrow \Lambda(x) := \Gamma(x, Q_0(x)) \subset Q_0(x) \times H$ es un homeomorfismo.

Ahora la función $\tilde{h}_u(x, \cdot) := \overline{h_u(x, \Gamma^{-1}(x, \cdot))} : \Lambda(x) \rightarrow \mathbb{C}$ se puede extender continuamente a la cerradura compacta $\Lambda(x)$. De hecho, de (2.12) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{h}_u(x, \Gamma(x, \xi)) &= \sum_{k \in I} \mathbf{w}_k(x, \xi) \int_0^1 \partial_{x_k} f_u(\xi^\perp + s(\xi - \xi^\perp)) ds \\ &\quad + \sum_{k,l \in J} \mathbf{a}_{kl}(x, \xi) \int_0^1 \partial_{x_k} \partial_{x_l} f_u(x + s(\xi^\perp - x))(1-s) ds \\ &\rightarrow \sum_{k \in I} w_k \partial_{x_k} f_u(x) + \frac{1}{2} \sum_{k,l \in J} a_{kl} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f_u(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

si $\Gamma(x, \xi) = (\xi, \mathbf{w}(x, \xi), \mathbf{a}(x, \xi)) \rightarrow (x, w, a) \in \overline{\Lambda(x)}$.

Denotemos por $\tilde{\mu}_t(x, \cdot)$ la imagen de $\mu_t(x, \cdot)$ por $\Gamma(x, \cdot)$. Entonces $\tilde{\mu}_t(x, \cdot)$ es una medida acotada en $\overline{\Lambda(x)}$ (con $\tilde{\mu}_t(x, \Lambda(x) \setminus \Lambda(x)) = 0$) y

$$\int_{Q_0(x)} h_u(x, \cdot) d\mu_t(x, \cdot) = \int_{\overline{\Lambda(x)}} \tilde{h}_u(x, \cdot) d\tilde{\mu}_t(x, \cdot). \quad (2.18)$$

En particular

$$\tilde{\mu}_t(x, \overline{\Lambda(x)}) + \mu_t(x, D \setminus Q(x)) = 1. \quad (2.19)$$

Nótese que $h_u(x, \xi) = f_u(\xi) - f_u(x) - \langle \nabla_J f_u(x), \mathbf{1} \rangle$ para $\xi \in D \setminus Q(x)$. Entonces reescribimos (2.10) como

$$\begin{aligned} \frac{P_t f_u(x) - f_u(x)}{t} &= \ell_t(x) \left(\int_{\overline{\Lambda(x)}} \tilde{h}_u(x, \cdot) d\tilde{\mu}_t(x, \cdot) + \int_{D \setminus Q(x)} f_u d\mu_t(x, \cdot) \right) \\ &\quad - \ell_t(x) (f_u(x) + \langle \nabla_J f_u(x), \mathbf{1} \rangle) \mu_t(x, D \setminus Q(x)) \\ &\quad + \langle \beta_t(x), \nabla_J f_u(x) \rangle - \gamma_t(x) f_u(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Paso 3: Límite. Pasaremos ahora al límite en la ecuación (2.20). Primero introducimos los números no negativos

$$\theta_j(x) := \ell_{1/j}(x) + \sum_{k \in J} |\beta_{1/j}^k(x)| + \gamma_{1/j}(x) \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Procederemos con la demostración del Lema dependiendo del comportamiento de θ_j . Para esto distinguimos entre los siguientes dos casos

Caso i): $\liminf_{j \rightarrow \infty} \theta_j(x) = 0$. En este caso existe una subsucesión de $(\theta_j(x))$ que converge a cero. Dada la igualdad en (2.19), se concluye de (2.20) que $\tilde{\mathcal{A}}f_u(x) = 0$ para toda $u \in \mathcal{U}$ y el Lema queda demostrado.

Caso ii): $\liminf_{j \rightarrow \infty} \theta_j(x) > 0$. Existe una subsucesión, denotada de igual manera por $(\theta_j(x))$, que converge a $\theta(x) \in (0, \infty]$. De (2.21) se sigue que los límites

$$\frac{1}{\theta_{1/j}(x)} \rightarrow \delta(x) \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{\ell_{1/j}(x)}{\theta_{1/j}(x)} \rightarrow \ell(x) \in [0, 1],$$

$$\frac{\beta_{1/j}(x)}{\theta_{1/j}(x)} \rightarrow \beta(x) \in [-1, 1]^{n+1}, \quad \frac{\gamma_{1/j}(x)}{\theta_{1/j}(x)} \rightarrow \gamma(x) \in [0, 1],$$

existen y satisfacen

$$\ell(x) + \sum_{k \in J} |\beta^k(x)| + \gamma(x) = 1 \quad (2.22)$$

Si $\ell(x) = 0$, entonces

$$\delta(x) \tilde{\mathcal{A}}f_u(x) = \langle \beta(x), \nabla_J f_u(x) \rangle - \gamma(x) f_u(x), \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (2.23)$$

Supongamos ahora que $\ell(x) > 0$. La sucesión $(\tilde{\mu}_{1/j}(x, \cdot))$ converge débilmente a una medida acotada $\tilde{\mu}(x, \cdot)$ en $\overline{\Lambda(x)}$, y $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{1/j}(x, D \setminus Q(x)) =: c(x) \in [0, 1]$ existe. Dividiendo ambos lados de la ecuación (2.20) por $\theta_j(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{D \setminus Q(x)} f_u d\mu_{1/j}(x, \cdot) &= \frac{1}{\ell(x)} \left(\delta(x) \tilde{\mathcal{A}} f_u(x) - \langle \beta(x), \nabla_J f_u(x) \rangle + \gamma(x) f_u(x) \right) \\ &\quad - \int_{\overline{\Lambda(x)}} \tilde{h}_u(x, \cdot) d\tilde{\mu}(x, \cdot) \\ &\quad + c(x) (f_u(x) + \langle \nabla_J f_u(x), \mathbf{1} \rangle). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dado que X es regular, el lado derecho de la ecuación (2.24) es continuo en $u = 0$ (ver (1.24)). Por el teorema de continuidad de Lévy, la sucesión $(\mu_{1/j}(x, \cdot \cap D \setminus Q(x)))$ converge débilmente a una medida acotada $\mu'(x, \cdot)$ en D con soporte contenido en $\overline{D \setminus Q(x)}$. En particular, $c(x) = \mu'(x, \overline{D \setminus Q(x)})$ y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{D \setminus Q(x)} f_u d\mu_{1/j}(x, \cdot) = \int_{\overline{D \setminus Q(x)}} f_u d\mu'(x, \cdot) \quad (2.25)$$

Nótese que, por (2.19), se cumple

$$\tilde{\mu}(x, \overline{\Lambda(x)}) + \mu'(x, \overline{D \setminus Q(x)}) = 1. \quad (2.26)$$

Definimos ahora las proyecciones

$$W : D \times H \rightarrow W(D \times H) \subset [0, 1]^{m-1}, \quad W(\xi, w, a) := w,$$

$$A : D \times H \rightarrow A(D \times H) \subset \text{Sem}^{n+1}, \quad A(\xi, w, a) := a.$$

Así, reescribiendo (2.17), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Lambda(x)}} \tilde{h}_u d\tilde{\mu}(x, \cdot) &= \int_{\overline{\Lambda(x)} \setminus \Lambda(x)} \tilde{h}_u d\tilde{\mu}(x, \cdot) + \int_{\Lambda(x)} \tilde{h}_u d\tilde{\mu}(x, \cdot) \\ &= \sum_{k \in I} \left(\int_{\overline{\Lambda(x)} \setminus \Lambda(x)} W_k d\tilde{\mu}(x, \cdot) \right) \partial_{x_k} f_u(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k, l \in J} \left(\int_{\overline{\Lambda(x)} \setminus \Lambda(x)} A_{kl} d\tilde{\mu}(x, \cdot) \right) \partial_{x_k} \partial_{x_l} f_u(x) \\ &\quad + \int_{Q_0(x)} h_u d\tilde{\mu}(x, \Gamma(x, \cdot)). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definimos la medida acotada $\mu(x, \cdot)$ en $D \setminus \{x\}$ como

$$\mu(x, \cdot) := \tilde{\mu}(x, \Gamma(x, Q_0(x) \cap \cdot)) + \mu'(x, \cdot). \quad (2.28)$$

Combinando (2.24), (2.25) y (2.27), se llega a que

$$\begin{aligned} \delta(x)\tilde{\mathcal{A}}f_u(x) &= \frac{\ell(x)}{2} \sum_{k,l \in J} \left(\int_{\Lambda(x) \setminus \Lambda(x)} A_{kl} d\tilde{\mu}(x, \cdot) \right) \partial_{x_k} \partial_{x_l} f_u(x) \\ &\quad + \ell(x) \sum_{k \in I} \left(\int_{\Lambda(x) \setminus \Lambda(x)} W_k d\tilde{\mu}(x, \cdot) \right) \partial_{x_k} f_u(x) + \langle \beta(x), \nabla_J f_u(x) \rangle \\ &\quad - \gamma(x) f_u(x) + \ell(x) \int_{D \setminus \{x\}} h_u d\mu(x, \cdot), \quad \forall u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \delta(x) \frac{\tilde{\mathcal{A}}f_u(x)}{f_u(x)} &= \langle \alpha(x) u_J, u_J \rangle + \langle \tilde{\beta}(x), u_I \rangle + \langle \beta(x), u_J \rangle - \gamma(x) \\ &\quad + \int_{D \setminus \{x\}} (e^{\langle u, \xi - x \rangle} - 1 - \langle u_J, \chi_J(\xi - x) \rangle) \nu(x, d\xi), \quad \forall u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(x) &:= \frac{\ell(x)}{2} \int_{\Lambda(x) \setminus \Lambda(x)} A d\tilde{\mu}(x, \cdot) \in \text{Sem}^{n+1}, \\ \tilde{\beta}(x) &:= \ell(x) \int_{\Lambda(x) \setminus \Lambda(x)} W d\tilde{\mu}(x, \cdot) \in \mathbb{R}_+^{m-1}, \\ \nu(x, d\xi) &:= \frac{\ell(x)}{d(x, \xi)} \mu(x, d\xi). \end{aligned}$$

Paso 4: Consistencia. Sólo hace falta probar que $\delta(x) > 0$, de manera que se pueden dividir las expresiones (2.23) y (2.29) entre $\delta(x)$.

Se probará que el lado derecho de la igualdad (2.29) no es la función cero en u . Supongamos que $\beta(x) = 0$, $\gamma(x) = 0$ y $\nu(x, D \setminus \{x\}) = 0$. Entonces, (2.22) implica que $\ell(x) = 1$, de donde $\mu(x, D \setminus \{x\}) = 0$ y, por (2.26) y (2.28), $\tilde{\mu}(x, \Lambda(x) \setminus \Lambda(x)) = 1$. Luego, de (2.5),

$$\langle \tilde{\beta}(x), \mathbf{1} \rangle + 2 \sum_{k \in J} a_{kk}(x) = \int_{\Lambda(x) \setminus \Lambda(x)} \left(\langle W, \mathbf{1} \rangle + \sum_{k \in J} A_{kk} \right) d\tilde{\mu}(x, \cdot) = 1.$$

Entonces $\alpha(x)$ y $\tilde{\beta}(x)$ no pueden ser cero a la vez. Pero la representación de la función (en u) del lado derecho de (2.29) en términos de $\alpha(x)$, $\tilde{\beta}(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ y $\nu(x, d\xi)$ es única (ver [1], Teorema 8.1). Luego, no es idénticamente cero en u y, por lo tanto, $\delta(x) = 0$ es imposible. Se aplica el mismo argumento para (2.23). \square

Haciendo ligeros ajustes a la prueba del Lema anterior, se llega al siguiente

Lema 2.2. Sean $j \in \mathcal{J}$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces existen

$$\alpha(j, s) = (\alpha_{kl}(j, s))_{k,l \in \mathcal{J}} \in \text{Sem}^n, \quad (2.30)$$

$$\beta(j, s) \in D, \quad (2.31)$$

$$\gamma(j, s) \in \mathbb{R}_{++},$$

y una medida de Borel no negativa $\nu(j, s; d\xi)$ en $D \setminus \{se_j\}$, con

$$\int_{D \setminus \{se_j\}} (\langle \chi_{\mathcal{I}}(\xi - se_j), \mathbf{1} \rangle + \|\chi_{\mathcal{I}}(\xi - se_j)\|^2) \nu(j, s; d\xi) < \infty, \quad (2.32)$$

tal que para toda $u \in \mathcal{U}$ se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}f_u(se_j)}{f_u(se_j)} &= \langle \alpha(j, s)u_{\mathcal{J}}, u_{\mathcal{J}} \rangle + \langle \beta(j, s), u \rangle - \gamma(j, s) \\ &+ \int_{D \setminus \{se_j\}} (e^{\langle u, \xi - se_j \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}}, \chi_{\mathcal{J}}(\xi - se_j) \rangle) \nu(j, s; d\xi). \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2. Los mapeos $F(u)$ y $R(u)$

Sean $\beta_i^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^d$, $i \in \mathcal{I}$, y $\beta^{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces (1.9) y (1.10), junto con $\beta_{\mathcal{I}\mathcal{J}} := 0$, definen una única matriz $\beta \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Definición 2.3. Los parámetros $(a, \alpha, b, \beta^{\mathcal{Y}}, \beta^{\mathcal{Z}}, c, \gamma, m, \mu)$ se dicen admisibles si $(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, m, \mu)$ son admisibles. Entonces

$$\beta^{\mathcal{Y}} = (\beta_1^{\mathcal{Y}}, \dots, \beta_m^{\mathcal{Y}}), \text{ con } \beta_i^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^d \text{ y } \beta_{i, \mathcal{I}(i)}^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}_+^{m-1}, \text{ para toda } i \in \mathcal{I}, \quad (2.34)$$

$$\beta^{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.35)$$

Combinando (1.27), (1.28) y los Lemas 2.1 y 2.2 se pueden calcular ahora $F(u)$, $R^{\mathcal{Y}}(u)$ y $R^{\mathcal{Z}}(u)$, ver (1.22)–(1.23).

Proposición 2.4. Supongamos que X es regular afín. Entonces $F(u)$ y $R^{\mathcal{Y}}(u)$ son de la forma (1.7) y (1.8), respectivamente, y

$$R^{\mathcal{Z}}(u) = \beta^{\mathcal{Z}}w, \quad (2.36)$$

donde $(a, \alpha, b, \beta^{\mathcal{Y}}, \beta^{\mathcal{Z}}, c, \gamma, m, \mu)$ son parámetros admisibles.

Demostración. Probaremos (1.7), (1.8) y (2.36) de manera individual.

Prueba de (1.7). Si $m = 0$ el resultado se sigue directamente de (1.27) y el Lema 2.2. Supongamos que $(m, n) = (1, 0)$. De (1.27) y el Lema 2.1 sabemos que existen $\tilde{a}, c \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ y una medida de Borel no negativa $m(d\eta)$ en \mathbb{R}_{++} tal que

$$F(v) = \tilde{a}v^2 + \tilde{b}v - c + \int_{\mathbb{R}_{++}} (e^{v\eta} - 1 - v\chi(\eta))m(d\eta), \quad \forall v \in \mathbb{C}_-. \quad (2.37)$$

Sólo queda por probar que $\tilde{a} = 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}_{++}} \chi(\eta)m(d\eta) \leq \tilde{b}.$$

Del Lema 1.14 se sigue que F es analítica en \mathbb{C}_- . Luego, por la unicidad de la representación (2.37), basta considerar $v \in \mathbb{R}_-$. Pero entonces se tiene

$$F(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\phi(t,v)} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}_+} (e^{v\eta} - 1) \frac{p_t(0, d\eta)}{t} + \frac{p_t(0, \mathbb{R}_+) - 1}{t} \right).$$

Es bien conocido que, para una t fija, la función en v del lado derecho en la ecuación pasada es el exponente de una transformada de Laplace de una medida subestocástica infinitamente divisible en \mathbb{R}_+ . Entonces $e^{F(v)}$, por ser el límite puntual de tales transformadas de Laplace, es la transformada de Laplace de una medida subestocástica infinitamente divisible en \mathbb{R}_+ . Luego $F(v)$ es de la forma (1.7).

Supongamos ahora que $m \geq 1$ y $(m, n) \neq (1, 0)$. Por (1.27), (2.5) y (2.33) tenemos

$$\begin{aligned} F(u) &= \langle \alpha(i, 0)u_{\mathcal{J}(i)}, u_{\mathcal{J}(i)} \rangle + \langle \tilde{\beta}(i, 0), u \rangle - \gamma(i, 0) \\ &\quad + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u, \chi(\xi) \rangle) \nu(i, 0; d\xi) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \alpha(j, 0)u_{\mathcal{J}}, u_{\mathcal{J}} \rangle + \langle \tilde{\beta}(j, 0), u \rangle - \gamma(j, 0) \\ &\quad + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u, \chi(\xi) \rangle) \nu(j, 0; d\xi), \quad \forall u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

para toda $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, donde $\tilde{\beta}(i, 0), \tilde{\beta}(j, 0) \in \mathbb{R}^d$ estan dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_k(i, 0) &:= \begin{cases} \beta_k(i, 0) + \int_{D \setminus \{0\}} \chi_k(\xi) \nu(i, 0; d\xi) \in \mathbb{R}_+, & \text{si } k \in \mathcal{I}(i), \\ \beta_k(i, 0), & \text{si } k \in \mathcal{J}(i), \end{cases} \\ \tilde{\beta}_k(j, 0) &:= \begin{cases} \beta_k(j, 0) + \int_{D \setminus \{0\}} \chi_k(\xi) \nu(j, 0; d\xi) \in \mathbb{R}_+, & \text{si } k \in \mathcal{I}, \\ \beta_k(j, 0), & \text{si } k \in \mathcal{J}. \end{cases} \end{aligned}$$

De la unicidad de la representación en (2.38) y (2.39) se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_{ik}(i, 0) &= \alpha_{ki}(i, 0) = 0, & \forall k \in \mathcal{J}(i), \\ \alpha_{kl}(i, 0) &= \alpha_{kl}(j, 0) =: \alpha_{kl}, & \forall k, l \in \mathcal{J}, \\ \tilde{\beta}(i, 0) &= \tilde{\beta}(j, 0) =: b, \\ \gamma(i, 0) &= \gamma(j, 0) =: c, \\ \nu(i, 0; d\xi) &= \nu(j, 0; d\xi) =: m(d\xi), \end{aligned}$$

para toda $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, con lo cual queda probada la afirmación.

Prueba de (1.8). Sea $i \in \mathcal{I}$. Para $r \in \mathbb{R}_+$ definimos $\tilde{\alpha}(i, r) \in \text{Sem}^d$ como

$$\tilde{\alpha}_{kl}(i, r) := \begin{cases} \alpha_{kl}(i, r), & \text{si } k, l \in \mathcal{J}(i), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

ver (2.1). Combinando (1.28), (2.5) y (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
 R_i^{\mathcal{Y}}(u) &= \frac{\tilde{A}f_u(e_i)}{f_u(e_i)} - F(u) \\
 &= \langle (\tilde{\alpha}(i, 1) - a)u, u \rangle + \langle \beta(i, 1) - b, u \rangle - (\gamma(i, 1) - c) \\
 &\quad + \int_{\tilde{D} \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}(i)}, \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi) \rangle) d\nu(i, 1; e_i + \xi) \\
 &\quad - \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}}, \chi_{\mathcal{J}}(\xi) \rangle) m(d\xi) \\
 &= \langle \alpha_i u, u \rangle + \langle \beta_i^{\mathcal{Y}}, u \rangle - \gamma_i + \int_{\tilde{D} \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}(i)}, \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi) \rangle) \mu_i(d\xi), \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &:= \tilde{\alpha}(i, 1) - 1, \\
 \beta_{i,k}^{\mathcal{Y}} &:= \begin{cases} \beta(i, 1)_i - b_i - \int_{D \setminus \{0\}} \chi_i(\xi) m(d\xi), & \text{si } k = i, \\ \beta(i, 1)_k - b_k, & \text{si } k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}, \end{cases} \\
 \gamma_i &:= \gamma(i, 1) - c, \\
 \tilde{D} &:= D - e_i, \\
 \mu_i(\cdot) &:= \nu(i, 1; e_i + \cdot), \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, de (1.24)

$$\frac{\tilde{A}f_u(re_i)}{f_u(re_i)} = F(u) + R_i^{\mathcal{Y}}(u)r, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+. \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.42) y comparando con (2.5) se concluye que, para toda $r \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}(i, r) &= a + r\alpha_i, \\
 \beta(i, r) &= b + r\beta_i^{\mathcal{Y}}, \\
 \gamma(i, r) &= c + r\gamma_i, \\
 \nu(i, r; re_i + \cdot) &= m(D \cap \cdot) + r\mu_i(\cdot), \quad \text{en } \tilde{D} \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

Haciendo $r \rightarrow \infty$ se obtienen las condiciones (1.7b), (2.34) y (1.7f) de (2.1)–(2.3), y que μ_i es no negativa. Haciendo $r \rightarrow 0$ se llega a que $\mu_i(\tilde{D} \setminus D) = 0$, y (1.7h) es una consecuencia de (2.4), (1.7g) y (2.41).

Prueba de (2.36). Sea $j \in \mathcal{J}$. Para $s \in \mathbb{R}$ definimos $\tilde{\alpha}(j, s) \in \text{Sem}^d$ como

$$\tilde{\alpha}_{kl}(j, s) := \begin{cases} \alpha_{kl}(j, s), & \text{si } k, l \in \mathcal{J}, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

ver (2.30). Combinando (1.28), (2.33) y (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned} R_{j-m}^{\mathbb{Z}}(u) &= \frac{\tilde{A}f_u(e_j)}{f_u(e_j)} - F(u) \\ &= \langle (\tilde{\alpha}(j, 1) - a)u, u \rangle + \langle \beta(j, 1) - b, u \rangle - (\gamma(j, 1) - c) \\ &\quad + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}}, \chi_{\mathcal{J}}(\xi) \rangle) \mu_j(d\xi), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $\mu_j(\cdot) := \nu(j, 1; e_j + \cdot) - m(\cdot)$ es una medida con signo en $D \setminus \{0\}$ (nótese que $D - e_j = D$). Pero $R_{j-m}^{\mathbb{Z}}(u) \in i\mathbb{R}$, por lo que el lado derecho de (2.43) es puramente imaginario. Esto conduce inmediatamente que $\tilde{\alpha}(j, 1) - a = 0$, $(\beta(j, 1) - b)_{\mathcal{I}} = 0$ y $\gamma(j, 1) - c = 0$. Por otro lado, de (1.24) se tiene

$$\frac{\tilde{A}f_u(se_j)}{f_u(se_j)} = F(u) + R_{j-m}^{\mathbb{Z}}(u)s, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.44)$$

Así, de (2.43), (2.44) y (2.33) se concluye que, para toda $s \in \mathbb{R}$,

$$\nu(j, s; se_j + \cdot) = m(\cdot) + s\mu_j(\cdot), \quad \text{en } D \setminus \{0\}.$$

Pero esto sólo es posible cuando $\mu_j = 0$. Luego, $R_{j-m}^{\mathbb{Z}}(v, w) = \langle (\beta(j, 1) - b)_{\mathcal{J}}, w \rangle$, y la proposición queda demostrada. \square

Concluimos esta sección con un resultado de regularidad. Sea $Q_0(0) = Q(0) \setminus \{0\}$, donde $Q(0)$ está dado por (2.11). Descomponemos el término con la integral (digamos $I(u)$) en $F(u)$ de la siguiente manera

$$I(u) = \int_{Q_0(0)} (e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}}, \xi_{\mathcal{J}} \rangle) m(d\xi) + H(u) - (1 + \langle u_{\mathcal{J}}, \mathbf{1} \rangle) m(D \setminus Q(0))$$

donde $H(u) := \int_{D \setminus Q(0)} e^{\langle u, \xi \rangle} m(d\xi)$, ver (1.7). Por el Lema 1.14, la primera integral del lado derecho de la ecuación anterior es analítica en $u \in \mathbb{C}^d$, al igual que el último término. Entonces el grado de regularidad de $I(u)$, y por lo tanto de $F(u)$, está determinado por el de $H(u)$. El mismo razonamiento aplica para $R_i^{\mathcal{Y}}$, ver (1.8). De los Lemas 1.13 y 1.14 se sigue entonces el siguiente resultado.

Lema 5.3. Sean $i \in \mathcal{I}$ y $k \in \mathbb{N}$.

i) $F(\cdot, w)$ y $R_i^{\mathcal{Y}}(\cdot, w)$ son analíticas en \mathbb{C}_{--}^m , para cada $w \in i\mathbb{R}^n$.

ii) Si

$$\int_{D \setminus Q(0)} \|\xi\|^k m(d\xi) < \infty \quad \text{y} \quad \int_{D \setminus Q(0)} \|\xi\|^k \mu_i(d\xi) < \infty$$

entonces $F \in C^k(\mathcal{U})$ y $R_i^{\mathcal{Y}} \in C^k(\mathcal{U})$, respectivamente.

iii) Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Si

$$\int_{D \setminus Q(0)} e^{(q, \xi)} m(d\xi) < \infty \quad y \quad \int_{D \setminus Q(0)} e^{(q, \xi)} \mu_i(d\xi) < \infty, \quad \forall q \in V, \quad (2.45)$$

entonces F y R_i^y son analíticas en la franja $S = \{u \in \mathbb{C}^d \mid \operatorname{Re} u \in V\}$, respectivamente.

2.3. Ecuaciones Generalizadas de Riccati

Sean $(a, \alpha, b, \beta^y, \beta^z, c, \gamma, m, \mu)$ parámetros admisibles, y $F(u)$, $R(u) = (R^y(u), R^z(u))$ dados por (1.7), (1.8) y (2.36). En esta sección se discutirán las ecuaciones generalizadas de Riccati

$$\partial_t \Phi(t, u) = F(\Psi(t, u)), \quad \Phi(0, u) = 0, \quad (2.46)$$

$$\partial_t \Psi(t, u) = R(\Psi(t, u)), \quad \Psi(0, u) = u. \quad (2.47)$$

Obsérvese que (2.46) es una ecuación diferencial trivial. Una solución para (2.46)–(2.47) es una par de funciones continuamente diferenciables $\Phi(\cdot, u)$ y $\Psi(\cdot, u) = (\Psi^y(\cdot, u), \Psi^z(\cdot, u))$ de \mathbb{R}_+ en \mathbb{C} y \mathbb{C}^d , respectivamente, que satisfacen (2.46)–(2.47) o, equivalentemente,

$$\Phi(t, u) = \int_0^t F(\Psi(s, u)) ds, \quad (2.48)$$

$$\partial_t \Psi^y(t, u) = R^y(\Psi^y(t, u), e^{\beta^z t} w), \quad \Psi^y(0, u) = v, \quad (2.49)$$

$$\Psi^z(t, u) = e^{\beta^z t} w, \quad (2.50)$$

para $u = (v, w) \in \mathbb{C}^d$.

Proposición 2.6. *Para cada $u \in \mathcal{U}^0$ existe una única solución $\Phi(\cdot, u)$ y $\Psi(\cdot, u)$ de (2.46)–(2.47) con valores en \mathbb{C}_- y \mathcal{U}^0 , respectivamente. Más aún, Φ y Ψ son continuas en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}^0$.*

Demostración. Si $m = 0$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $m \geq 1$.

Dado que (2.50) está desacoplada de (2.49), nos enfocaremos sólo en dicha ecuación. Para cada $w \in i\mathbb{R}^n$ fijo, (2.49) será considerada como una ecuación diferencial ordinaria no homogénea para $\Psi^y(\cdot, v, w)$, con $\Psi^y(0, v, w) = v$. Nótese que el mapeo

$$(t, v, w) \mapsto R^y(v, e^{\beta^z t} w) : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^m \quad (2.51)$$

es continuo en $v \in \mathbb{C}_{--}^m$ con derivadas conjuntamente continuas en $\mathbb{R} \times \mathcal{U}^0$, ver Lema 2.5. En particular (2.51) es localmente Lipschitz continua en $v \in \mathbb{C}_{--}^m$, uniformemente en (t, w) en conjuntos compactos. Entonces, para cualquier $u = (v, w) \in \mathcal{U}^0$, existe una única solución local $\Psi^y(t, u)$ de (2.49) con valores en \mathbb{C}_{--}^m . Su tiempo de vida en \mathbb{C}_{--}^m es

$$T_u := \liminf_{n \rightarrow \infty} \{t \mid \|\Psi^y(t, u)\| \geq n \text{ o } \Psi^y(t, u) \in i\mathbb{R}^m\} \leq \infty.$$

Hay que probar que $T_u = \infty$.

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} R_i^{\mathcal{Y}}(u) &= \alpha_{i,ii}(\operatorname{Re} v_i)^2 - \langle \alpha_i \operatorname{Im} u, \operatorname{Im} u \rangle + \langle \beta_{i,\mathcal{I}}^{\mathcal{Y}}, \operatorname{Re} v \rangle - \gamma_i \\ &\quad + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle \operatorname{Re} v, \eta \rangle} \cos \langle \operatorname{Im} u, \xi \rangle - 1 - \operatorname{Re} v_i \chi_i(\xi)) \mu_i(d\xi) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Como en (2.11), escribimos $Q_0(0) := Q(0) \setminus \{0\}$. De (1.7b), (2.34) y (2.52) se sigue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} R_i^{\mathcal{Y}}(u) &\leq \alpha_{i,ii}(\operatorname{Re} v_i)^2 + \beta_{i,i}^{\mathcal{Y}} \operatorname{Re} v_i - \gamma_i \\ &\quad + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\langle \operatorname{Re} v, \eta \rangle} \cos \langle \operatorname{Im} u, \xi \rangle - e^{\operatorname{Re} v_i \eta_i}) \mu_i d(\xi) \\ &\quad + \int_{D \setminus \{0\}} (e^{\operatorname{Re} v_i \eta_i} - 1 - \operatorname{Re} v_i \chi_i(\xi)) \mu_i d(\xi) \\ &\leq \alpha_{i,ii}(\operatorname{Re} v_i)^2 + \beta_{i,i}^{\mathcal{Y}} \operatorname{Re} v_i - \gamma_i \\ &\quad + (\operatorname{Re} v_i)^2 \int_{Q_0(0)} \left(\int_0^1 (1-t) e^{t \operatorname{Re} v_i \eta_i} dt \right) \eta_i^2 \mu_i(d\xi) - \mu_i(D \setminus Q(0)) \operatorname{Re} v_i \\ &\leq ((\operatorname{Re} v_i - \operatorname{Re} v_i) - \gamma_i) \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $C_i \geq 0$ no depende de u . La segunda desigualdad en (2.53) se sigue de que

$$I(u, \xi) := e^{\langle \operatorname{Re} v, \eta \rangle} \cos \langle \operatorname{Im} u, \xi \rangle - e^{\operatorname{Re} v_i \eta_i} \leq 0, \quad \forall \xi \in D \setminus \{0\},$$

y

$$\begin{aligned} |I(u, \xi)| &\leq |e^{\langle \operatorname{Re} v_{\mathcal{I}(i)}, \eta_{\mathcal{I}(i)} \rangle} - 1| + |\cos \langle \operatorname{Im} u, \xi \rangle - 1| \\ &\leq C (|\operatorname{Re} v_{\mathcal{I}(i)}| |\eta_{\mathcal{I}(i)}| + |\langle \operatorname{Im} u, \xi \rangle|^2), \end{aligned}$$

para $\|\xi\|$ suficientemente pequeño, para alguna C , ver (1.7h). Entonces, para $t \in (0, T_u)$, $\operatorname{Re} \Psi_i^{\mathcal{Y}}(t, u)$ satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} \partial_t \operatorname{Re} \Psi_i^{\mathcal{Y}}(t, u) &\leq C_i ((\operatorname{Re} \Psi_i^{\mathcal{Y}}(t, u))^2 - \operatorname{Re} \Psi_i^{\mathcal{Y}}(t, u)) - \gamma_i \\ \operatorname{Re} \Psi_i^{\mathcal{Y}}(0, u) &= \operatorname{Re} v_i. \end{aligned} \quad (2.54)$$

De un teorema de comparación (ver [8]) y la condición (1.7f) se sigue que

$$\operatorname{Re} \Psi_i^{\mathcal{Y}}(t, u) \leq g_i(t, u), \quad \forall t \in [0, T_u], \quad (2.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \partial_t g_i(t, u) &= C_i ((g_i(t, u))^2 - g_i(t, u)) \\ g_i(0, u) &= \operatorname{Re} v_i \quad (< 0). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Pero $-\infty < g_i(t, u) < 0$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$. Luego, $\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)$ nunca alcanza $i\mathbb{R}^m$ y

$$T_u = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{t \mid \|\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)\| \geq n\}.$$

Sólo hace falta ahora encontrar una cota superior para $\|\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)\|$. Para cada $t \in (0, T_u)$ se tiene que

$$\partial_t \|\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)\|^2 = 2\operatorname{Re} \left\langle \overline{\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)}, R^{\mathcal{Y}} \left(\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u), e^{\beta^{\mathcal{Z}} t} w \right) \right\rangle. \quad (2.57)$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\bar{v}_i R_i^{\mathcal{Y}}(u) \right) &= \alpha_{i,ii} |v_i|^2 \operatorname{Re} v_i + K(u) \\ &+ \operatorname{Re} \left(\bar{v}_i \int_{D \setminus \{0\}} \left(e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}(i)}, \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi) \rangle \right) \mu_i(d\xi) \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde

$$K(u) := \operatorname{Re} v_i \langle \alpha_{i, \mathcal{J} \mathcal{J}} w, w \rangle + \operatorname{Re} \left(\bar{v}_i (\langle \beta^{\mathcal{Y}}, u \rangle - \gamma_i) \right).$$

Entonces

$$|K(u)| \leq C(\|v\| \|w\|^2 + \|v\|^2 + \|v\| \|w\| + \|v\|), \quad \forall u = (v, w) \in \mathcal{U}. \quad (2.59)$$

Combinando (2.58) y (2.59) con el Lema 2.7 se llega a que

$$\operatorname{Re} \left(\bar{v}_i R_i^{\mathcal{Y}}(u) \right) \leq C(1 + \|w\|^2)(1 + \|v\|^2), \quad \forall u = (v, w) \in \mathcal{U}. \quad (2.60)$$

Sustituyendo (2.60) en (2.57) se tiene

$$\partial_t \|\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)\|^2 \leq C \left(1 + \|e^{\beta^{\mathcal{Z}} t} w\|^2 \right) (1 + \|\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)\|^2), \quad \forall t \in (0, T_u).$$

Usando la desigualdad de Gronwall (ver [5]) se llega a

$$\begin{aligned} \|\Psi^{\mathcal{Y}}(t, u)\|^2 &\leq \left(\|v\|^2 + C \int_0^t \left(1 + \|e^{\beta^{\mathcal{Z}} s} w\|^2 \right) ds \right) \\ &\times \exp \left(C \int_0^t \left(1 + \|e^{\beta^{\mathcal{Z}} s} w\|^2 \right) ds \right), \quad \forall t \in [0, T_u]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Entonces no es posible que explote la solución y $T_u = \infty$.

La continuidad de Φ y Ψ en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}^0$ es un resultado conocido. \square

Lema 2.7. Para cada $i \in \mathcal{I}$ y $u = (v, w) \in \mathcal{U}$ se tiene

$$\operatorname{Re} \left(\bar{v}_i \int_{D \setminus \{0\}} \left(e^{\langle u, \xi \rangle} - 1 - \langle u_{\mathcal{J}(i)}, \chi_{\mathcal{J}(i)}(\xi) \rangle \right) \mu_i(d\xi) \right) \leq C(1 + \|v\|^2)(1 + \|w\|^2), \quad (2.62)$$

donde C depende sólo de μ_i .

Demostración. Sea $i \in \mathcal{I}$. Retomando la notación utilizada en la prueba del Lema 2.1, escribimos $I = \mathcal{I}(i)$, $J = \mathcal{J}(i)$, y hacemos

$$\begin{aligned} d(\xi) &:= d(0, \xi) = \langle \chi_I(\xi), \mathbf{1} \rangle + \|\chi_J(\xi)\|^2, \\ h_u(\xi) &:= h_u(0, \xi) = \frac{f_u(\xi) - 1 - \langle u_J, \chi_J(\xi) \rangle}{d(\xi)}. \end{aligned}$$

De la condición (1.7h), $\bar{\mu}_i(d\xi) := d(\xi)\mu_i(d\xi)$ es una medida acotada en $D \setminus \{0\}$. Así, podemos escribir la integral en (2.62) como

$$\int_{D \setminus \{0\}} h_u(\xi) \bar{\mu}_i(d\xi). \quad (2.63)$$

Ahora, desarrollando su serie de Taylor (ver [9], Capítulo 4, Sección 11), tenemos

$$\begin{aligned} h_u(\xi) &= \frac{1}{d(\xi)} (e^{\langle u, \xi \rangle} - e^{\langle u_J, \xi_J \rangle} + e^{v_i \eta_i} (e^{\langle w, \zeta \rangle} - 1 - \langle w, \zeta \rangle) \\ &\quad + \langle w, \zeta \rangle (e^{v_i \eta_i} - 1) + e^{v_i \eta_i} - 1 - v_i \eta_i) \\ &= e^{\langle u_J, \xi_J \rangle} \left(\int_0^1 e^{t \langle u_J, \xi_J \rangle} dt \right) \langle u_I, \mathbf{w}(\xi) \rangle \\ &\quad + e^{v_i \eta_i} \left(\int_0^1 (1-t) e^{t \langle w, \zeta \rangle} dt \right) \langle \mathbf{a}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}(\xi) w, w \rangle \\ &\quad + \left(\int_0^1 e^{t v_i \eta_i} dt \right) v_i \langle \mathbf{a}_{i\mathcal{J}}(\xi), w \rangle \\ &\quad + \left(\int_0^1 (1-t) e^{t v_i \eta_i} dt \right) \mathbf{a}_{ii}(\xi) (v_i)^2, \quad \forall \xi = (\eta, \zeta) \in Q_0(0), \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $\mathbf{w}(\xi) := \mathbf{w}(0, \xi)$ y $\mathbf{a}_{kl}(\xi) := \mathbf{a}_{kl}(0, \xi)$, ver (2.13) y (2.14). Ahora calculamos

$$\operatorname{Re}(\bar{v}_i h_u(\xi)) = K(u, \xi) + L(v_i, \eta_i) \mathbf{a}_{ii}(\xi) |v_i|^2, \quad \xi = (\eta, \zeta) \in Q_0(0), \quad (2.65)$$

en donde

$$\begin{aligned} L(v_i, \eta_i) &:= \int_0^1 (1-t) \operatorname{Re}(v_i e^{t v_i \eta_i}) dt \\ &= \int_0^1 (1-t) e^{t \operatorname{Re} v_i \eta_i} (\operatorname{Re} v_i \cos(t \operatorname{Im} v_i \eta_i) - \operatorname{Im} v_i \sin(t \operatorname{Im} v_i \eta_i)) dt \end{aligned} \quad (2.66)$$

y, en vista de (2.16), $K(u, \xi)$ satisface

$$|K(u, \xi)| \leq C (\|v\| + \|w\|^2 + \|v\|^2 \|w\|), \quad \forall u = (v, w) \in \mathcal{U}, \quad \forall \xi \in Q_0(0), \quad (2.67)$$

Afirmamos que

$$L(v_i, \eta_i) \leq 0, \quad \forall v_i \in \mathbb{C}_-, \quad \forall \eta_i \in [0, 1]. \quad (2.68)$$

En efecto, dado que $L(v_i, \eta_i)$ es simétrica en $\operatorname{Im} v_i$, podemos asumir que $\operatorname{Im} v_i$ en (2.66) es no negativa. Luego, (2.68) se sigue del Lema 2.8.

Por otro lado tenemos que

$$|v_i h_u(\xi)| \leq C (1 + \|v\|^2 + \|v\| \|w\|), \quad \forall u = (v, w) \in \mathcal{U}, \quad \forall \xi \in D \setminus Q_0(0), \quad (2.69)$$

Finalmente, combinando (2.65), (2.67), (2.68) y (2.69) se llega a que

$$\int_{D \setminus \{0\}} \operatorname{Re}(\bar{v}_i h_u(\xi)) \bar{\mu}_i(d\xi) \leq C (1 + \|v\|^2) (1 + \|w\|^2), \quad \forall u = (v, w) \in \mathcal{U},$$

que es justamente (2.62). □

Lema 2.8. Para toda $p, q \in \mathbb{R}_+$, se cumple

$$\int_0^1 (1-t)e^{-pt} \cos(qt) dt \geq 0 \quad (2.70)$$

$$\int_0^1 (1-t)e^{-pt} \operatorname{sen}(qt) dt \geq 0. \quad (2.71)$$

Demostración. Para toda función f no negativa no creciente, y $t \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^s f(t) \operatorname{sen}(t) dt \geq 0$. Luego (2.71) es trivial. De manera similar, es fácil ver que (2.70) se cumple para toda $q \in [0, \pi]$. Calculando la integral en (2.70) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^s (1-t)e^{-pt} \cos(qt) dt &= \frac{e^{-ps}}{(p^2 + q^2)^2} (e^{ps}(p^2(p-1) + q^2 + pq^2) \\ &\quad + ((s-1)(p^3 + pq^2) + p^2 - q^2) \cos(qs) \\ &\quad + ((1-s)(p^2 + q^2) - 2p)q \operatorname{sen}(qs)). \end{aligned}$$

Por otro lado, la desigualdad

$$\begin{aligned} e^p(p^2(p-1) + q^2) &\geq |p^2 - q^2| \\ e^p pq^2 &\geq 2pq \end{aligned}$$

se cumple para toda $p \in \mathbb{R}_+$ y $q > \pi$, de donde se sigue que (2.70) ocurre para $q > \pi$. □

Proposición 2.9. Existe una única extensión continua de $\phi(t, u)$ y de $\psi(t, u)$ en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ tales que (1.2) se cumple para toda $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$. Más aún, $\phi(\cdot, u)$ y $\psi(\cdot, u)$ son soluciones de (2.46)–(2.47), para toda $u \in \mathcal{U}$.

Demostración. Sean $u \in \mathcal{U}^0$ y $t^* := \sup\{t \mid (t, u) \in \mathcal{O}\}$. De la definición de \mathcal{O} (ver (1.13)) se sigue que $\lim_{t \uparrow t^*} |\phi(t, u)| = \infty$. Cada función continua con derivada continua por la derecha en $[0, t^*)$ es continuamente diferenciable en $[0, t^*)$. Entonces, por (1.19), (1.25)–(1.26), y la Proposición 6.1, la igualdad

$$\phi(t, u) = \Phi(t, u), \quad \psi(t, u) = \Psi(t, u) \quad (2.72)$$

se cumple para toda $t \in [0, t^*)$. Pero $|\Phi(t, u)|$ es finito para toda t finita. Entonces $t^* = \infty$. Así, dado que $\mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, se sigue que $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ y (2.72) se cumple para toda $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}^0$. Esto es, $\phi(t, u)$ y $\psi(t, u)$ son conjuntamente continuas en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$. Tomando el límite con el mismo argumento se sigue que $\phi(\cdot, u)$ y $\psi(\cdot, u)$ son soluciones de (2.46)–(2.47) también para $u \in \partial\mathcal{U}$. □

Por último, para completar la prueba del Teorema 1.8, sólo hace falta probar que los procesos afines regulares son de Feller. La demostración de este resultado, que omitimos aquí, se puede encontrar en [7].

El Teorema 1.8 nos dice exactamente cuales procesos de Markov son afines regulares y qué forma deben de tener. Sorprendentemente todo proceso afín regular se puede pensar como una solución de las ecuaciones de Riccati.

Así, nos podemos beneficiar de procesos afines como intensidades de transición y factores económicos. Si el modelo es particularmente simple se pueden usar las ecuaciones de Riccati para reducir el problema de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a ordinarias.

Algunos ejemplos de procesos afines de utilidad en finanzas son los siguientes:

Ejemplo 2.11. Un proceso estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ con valores con valores en \mathbb{R}^n es un proceso de Lévy si $X_0 = 0$, tiene trayectorias cádlág, y sus incrementos son independientes y estacionarios.

Si X es un proceso de Lévy, entonces se cumple que

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = e^{iux - t\psi(iu)}$$

y X es, por lo tanto, un proceso afín.

Ejemplo 2.12. Sea X un proceso de Lévy y $c \in \mathbb{R}$. El proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU) asociado a (X, c) es la única solución adaptada a la ecuación diferencial estocástica

$$Z_t = x + X_t + c \int_0^t Z_s ds.$$

Si Z es un proceso OU asociado a (X, c) , entonces

$$\mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = e^{iuxe^{ct} + \int_0^t \psi(ue^{cs}) ds}$$

y Z es, por lo tanto, un proceso afín.

Ejemplo 2.13. Si Z es CB, entonces existe un proceso de Lévy X sin saltos negativos y con exponente de Laplace Ψ tal que

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda Z_t}) = e^{-xu_t(\lambda)},$$

en donde $\partial_t u_t(\lambda) = -\Psi(u_t(\lambda))$, con

$$\Psi(u) = au + \sigma^2 u^2 / 2 + \int_0^\infty (1 - e^{iux} - u1_{|x| \leq 1}) \nu(dx),$$

para alguna $a \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \geq 0$, y una medida ν en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\int_0^\infty 1 \wedge x^2 \nu(dx) < \infty$.

Bibliografía

- [1] K. SATO, *Lévy Processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] DANIEL REVUZ y MARC YOR, *Continous Martingales and Brownian Motion*, tercera edición, Springer, New York.
- [3] D. DUFFIE, D. FILIPOVIC y W. SCHACHERMAYER, *Affine Processes and Applications in Finance*.
- [4] LARS V. AHLFORS, *Complex Analysis, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, tercera edición, McGraw-Hill.
- [5] H. AMANN, *Ordinary Differential Equations, An introduction to nonlinear analysis*, Walter de Gruyter and Co, Berlin.
- [6] ROBERT G. BARTLE, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York.
- [7] MARTIN KELLER-RESSEL, *Affine Processes – Theory and Applications in Finance*.
- [8] G. BIRKHOFF y G.C. ROTA, *Ordinary Differential Equations*, cuarta edición, John Wiley and Sons, New York.
- [9] NORMAN B. HAASER, JOSEPH P. LA SALLE y JOSEPH A. SULLIVAN, *Análisis Matemático, Volumen 2*, segunda edición, trillas, México, DF.
- [10] JOHN L. KELLEY, *General Topology (Graduate Texts in Mathematics; 27)*, Springer, New York.