



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE EL SUBGRUPO CONMUTADOR DEL GRUPO FUNDAMENTAL DEL  
COMPLEMENTO DE UNA CURVA COMPLEJA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
GERINO OCHOA MORALES

DIRECTOR DE LA TESIS:  
FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ ACUÑA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D.F. 11 DE JUNIO DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

*A Marina Durán, por compartir conmigo la alegría por la vida y la pasión por las  
Matemáticas*





---

## AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco al Doctor Francisco González Acuña por su invaluable apoyo, la paciencia y la confianza en la realización de este trabajo.

También agradezco a todos mis amigos que hicieron de la estancia en Cuernavaca una experiencia amena y agradable.

A la doctora Fuensanta Aroca por su apoyo y consejos para concluir mis estudios de Maestría.

A mis sinodales: Jawad Snoussi, Carlos Alfonso Cabrera, Ángel Cano y José Luis Cisneros por el tiempo y el interés dedicado a la revisión del presente trabajo.

Agradezco a CONACyT por otorgarme una beca para realizar mis estudios de Maestría.

El trabajo de tesis fue realizado además gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación en Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM por medio de los proyectos IN104713 y IN108216.



---

# INTRODUCCIÓN

---

El estudio de curvas algebraicas planas y la topología de su complemento es el resultado de una interacción entre varias ramas de las matemáticas. Por un lado están los resultados puramente geométricos, que se remontan hasta Newton. Por otro lado hay resultados topológicos que son consecuencia del estudio global de una curva y de su complemento a partir de una fibración localmente trivial.

Los primeros estudios sistemáticos sobre el complemento de curvas proyectivas fueron hechos por Zariski [2], [3] y van Kampen [1]. Ambos usaron el así llamado «método de las secciones de pinceles», que consiste en tomar la fibración dada por un *blow up* y estudiar tanto las fibras degeneradas como el número de puntos de intersección con el infinito. Éste método es de hecho muy efectivo para calcular presentaciones del grupo fundamental del complemento de una curva, el teorema 7.1.1 y su correspondiente ejemplo en [25] son una muestra de ello. El presente trabajo usa como herramienta principal una fibración distinta, la dada por la función polinomial que define la curva.

A lo largo del texto nos enfocaremos en el estudio de un resultado presentado por Viktor Kulikov en [18], que afirma que el subgrupo conmutador del grupo fundamental del complemento de una curva afín es finítamente generado. Un resultado parcial muy similar se puede deducir como corolario inmediato a partir del diagrama de sucesiones exactas presentado por Mutsuo Oka en las proposiciones 1 y 7 de [7] y [24], respectivamente; dicho diagrama relaciona las fibraciones de Milnor ([5]) y de Hopf (sección 2.4). La ventaja del enfoque de Kulikov es que, a diferencia de Oka, no requiere que la intersección de la proyectivización de la curva con la recta al infinito sea transversa. Una consecuencia inmediata es que, dado un grupo cualquiera es imposible decidir si dicho grupo corresponde al grupo fundamental del complemento de una curva, esto por las observaciones finales hechas por González-Acuña, Gordon y Simon en [26].

Con el objetivo de asentar las bases topológicas que permitirán comprender el resultado principal, en el primer capítulo se presentan varios resultados importantes sobre homotopía y grupos fundamentales. La primera sección habla sobre el conocido teorema de Seifert-van Kampen, enfatizando en un corolario de aparente simplicidad pero que resulta útil en múltiples demostraciones. La segunda sección

---

presenta las cubrientes cíclicas infinitas, espacios cubrientes determinados por una acción de «traslación» entre copias del espacio base. La razón de su inclusión en este trabajo es que, si el primer grupo de homología del espacio base es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , entonces el grupo fundamental de la cubriente cíclica infinita es isomorfo al subgrupo conmutador del grupo fundamental del espacio base. Las secciones tercera y cuarta presentan varias definiciones y resultados sobre fibraciones; destacando que para una fibración localmente trivial para la que además existe una sección, hay una sucesión exacta con la propiedad de escisión y que involucra a los grupos fundamentales de la fibra, el espacio base y el espacio total.

La sección final del capítulo 1 enuncia el conocido teorema de clasificación de superficies cerradas, compactas y sin frontera; se prueba además que el grupo fundamental de dichas superficies es finitamente generado.

El segundo capítulo trata sobre curvas algebraicas complejas. Las primeras dos secciones presentan las definiciones elementales necesarias para el estudio de curvas y se enuncia un teorema básico en teoría de intersección, el teorema de Bézout. En el caso de curvas proyectivas el teorema de Bézout cuenta el número de puntos de intersección entre dos de ellas, mientras que en el caso afín sólo permite obtener una cota superior para dicho número.

Las últimas dos secciones del capítulo estudian la topología de las curvas, tanto afines como proyectivas. Primero se estudian los puntos singulares, aquellos donde la curva no es suave; se demuestra que dichos puntos son finitos. Posteriormente se estudian las curvas proyectivas como subespacios cerrados, y por lo tanto compactos, de  $\mathbb{P}_2$ . En la última parte se ve que las curvas son además cubrientes ramificadas de  $\mathbb{C}$ , lo que permite asociar a cada curva proyectiva una superficie de Riemann; i.e. una superficie cerrada, compacta orientable y sin frontera. El capítulo concluye haciendo notar que las curvas proyectivas son homeomorfas a superficies compactas cerradas con algunos puntos identificados, lo que implica que una curva afín es homeomorfa a su proyectivización menos algunos puntos, por lo que su grupo fundamental es finitamente generado.

El último capítulo, como es de esperar, contiene los resultados más importantes. Se estudia a detalle la fibración

$$F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$$

dada por la función polinomial  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , donde  $f$  es el polinomio que define una curva  $C$ . Para el estudio del complemento de la curva se restringe el estudio de la fibración a un subespacio  $T \subset \mathbb{C}^*$ , construido a partir de discos con centro en los puntos irregulares de la fibración unidos por arcos. El objetivo final de esta construcción es probar que el grupo fundamental de la fibra  $\pi(Y)$  se mapea por medio de un epimorfismo sobre el grupo fundamental de una cubriente cíclica infinita de  $F^{-1}(T)$ . Así, se obtiene un epimorfismo entre el grupo fundamental de la fibra, que es finitamente generado ya que cada fibra es por sí misma una curva irreducible,



sobre el subgrupo conmutador del grupo fundamental del complemento. Se sigue entonces que el subgrupo conmutador debe ser finitamente generado.



---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Preliminares topológicos</b>	<b>1</b>
1.1. El teorema de Seifert-van Kampen . . . . .	1
1.2. Cubriente cíclica infinita . . . . .	4
1.3. Fibraciones . . . . .	8
1.4. Topología de una fibración . . . . .	10
1.5. Grupo fundamental de una superficie . . . . .	17
<b>2. Curvas algebraicas planas</b>	<b>21</b>
2.1. Resultados básicos sobre curvas . . . . .	21
2.2. El teorema de Bézout . . . . .	24
2.3. Singularidades . . . . .	25
2.4. Topología de una curva algebraica . . . . .	26
<b>3. Topología del complemento de una curva</b>	<b>35</b>
3.1. Fibración dada por una función polinomial . . . . .	35
3.2. El conmutador del grupo fundamental del complemento . . . . .	40
<b>A. Lema de escisión para una sucesión exacta corta</b>	<b>49</b>
Bibliografía	55



---

# 1 PRELIMINARES TOPOLÓGICOS

---

En este capítulo se introducen algunos resultados topológicos elementales. En la primera sección se enuncia el conocido teorema de Seifert-van Kampen y se prueba un corolario cuya utilidad será evidente más adelante. La segunda sección introduce el concepto de cubriente cíclica infinita, enfatizando su utilidad para determinar el subgrupo conmutador del grupo fundamental de ciertas variedades. Posteriormente se habla sobre fibraciones y se enuncia la sucesión exacta para fibraciones que relaciona los grupos fundamentales de los espacios involucrados en la fibración. Finalmente, en la última sección se presenta el teorema de clasificación de superficies y una discusión sobre el grupo fundamental de las mismas.

A lo largo de este capítulo, a menos que se especifique lo contrario, siempre que se hable de un espacio topológico se asumirá que dicho espacio es Hausdorff, arco-conexo, localmente arco-conexo y semi-localmente simplemente conexo. De esta forma se evitan posibles casos patológicos que no aparecen en el estudio de complementos de curvas algebraicas.

## 1.1. El teorema de Seifert-van Kampen

El teorema de *Seifert-van Kampen* es una conocida herramienta que juega un rol muy importante a la hora de calcular el grupo fundamental de un espacio topológico a partir de algunos de sus subespacios.

Sea  $X = U_1 \cup U_2$  un espacio topológico el cuál es la unión de dos subconjuntos abiertos; sea  $U_0 := U_1 \cap U_2$  y asumamos además que  $U_0, U_1, U_2$  son arco-conexos y no vacíos, lo que implica que  $X$  es también arco-conexo. Elegimos un punto base  $b_0 \in U_0$  y hacemos  $G := \pi(X, b_0)$  y  $G_i := \pi(U_i, b_0)$ ,  $i = \{0, 1, 2\}$ . Los homomorfismos inducidos por las inclusiones forman un diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_{1*}} & G_1 \\ \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\ G_2 & \xrightarrow{j_{2*}} & G \end{array}$$

**Teorema 1.1** (Seifert-Van Kampen). *Los grupos dados por las imágenes  $j_{1*}(G_1)$  y  $j_{2*}(G_2)$  generan a  $G$ . Más aún, para cualquier grupo arbitrario  $H$  y cualesquiera morfismos  $\psi_1 : G_1 \rightarrow H$ ,  $\psi_2 : G_2 \rightarrow H$  tales que  $\psi_1 \circ i_{1*} = \psi_2 \circ i_{2*}$ , existe un único homomorfismo  $\lambda : G \rightarrow H$  que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_{1*}} & G_1 \\ \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\ G_2 & \xrightarrow{j_{2*}} & G \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\lambda} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} H$$

Se pueden encontrar demostraciones de este teorema en [8], [11] y [21]. El siguiente corolario será muy útil más adelante.

**Corolario 1.2.** *Si el morfismo  $i_{1*}$  es un epimorfismo, entonces el morfismo  $j_{2*}$  también es un epimorfismo.*

*Demostración.* Sea  $\gamma$  un elemento en  $G$ , como  $i_{1*}$  es un epimorfismo existe un elemento  $\alpha \in G_0$  tal que  $\gamma = i_{1*}(\alpha)$  y dado que el diagrama conmuta tenemos que

$$j_{1*} \circ i_{1*}(\alpha) = j_{1*}(\gamma) = j_{2*} \circ i_{2*}(\alpha) \in j_{2*}(G_2),$$

así que  $j_{1*}(G_1) \subset j_{2*}(G_2)$ . Por tanto  $j_{2*}(G_2)$  genera a  $G$ . Ahora bien, como un subgrupo propio no puede generar todo el grupo, concluimos que  $j_{2*}(G_2) \cong G$ , lo que prueba el corolario.  $\square$

El teorema de Seifert-van Kampen se puede generalizar para la unión arbitraria de una familia de subespacios.

**Lema 1.3.** *Sea  $X := \cup U_\alpha$  la unión de una familia de abiertos arco-conexos, cada uno de los cuales contiene el punto base  $x_0$ . Si además se cumple que la intersección de cualesquiera dos abiertos de la colección,  $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ , es arco-conexa. Entonces el homomorfismo del producto libre de los grupos fundamentales de la familia de abiertos en el grupo fundamental del espacio total,*

$$\phi : *_\alpha \pi(U_\alpha) \rightarrow \pi(X),$$

*es un epimorfismo.*



*Demostración.* Dado un lazo  $\gamma : I \rightarrow X$  con punto base  $x_0$ , afirmamos que existe una partición  $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$  de  $I$  tal que la imagen de cada subintervalo  $[s_{i-1}, s_i]$  está contenida en algún  $U_\alpha$ .

Como  $I$  es un compacto basta una cantidad finita de dichos subintervalos. Denotamos por  $U_i$  el abierto que contiene a  $\gamma([s_{i-1}, s_i])$ , y sea  $\gamma_i$  el camino obtenido por la restricción de  $\gamma$  al subintervalo  $[s_{i-1}, s_i]$ . Así que  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m$ . Como la intersección  $U_i \cap U_{i+1}$  es arco-conexa por hipótesis, podemos elegir un camino  $\beta_i \in U_i \cap U_{i+1}$  que une a cada  $\gamma(s_i)$  con  $x_0$ . El lazo

$$(\gamma_1 \beta_1^{-1})(\beta_1 \gamma_2 \beta_2^{-1})(\beta_2 \gamma_3 \beta_3^{-1}) \cdots (\beta_{m-1} \gamma_m)$$

es homotópico a  $\gamma$  y cada factor entre paréntesis está contenido en un  $U_i$  (ver Figura 1.1). Esto prueba el lema.

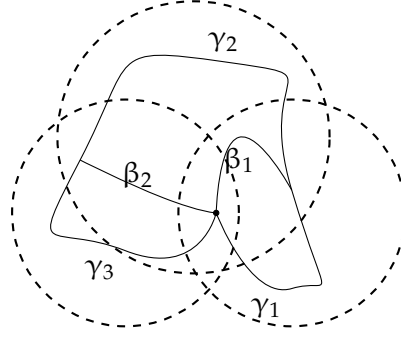


Figura 1.1: Descomposición en factores del lazo  $\gamma$ , cada factor en un abierto.

□

Este lema nos permite probar el siguiente teorema, el cuál es una generalización de un resultado que Fox probó en [4] para complejos simpliciales.

**Teorema 1.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico arco-conexo y sea  $Y \subset X$  un cerrado en  $X$ . Supongamos además que existe una familia  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  de abiertos arco-conexos de  $X$  tales que cada  $U_\alpha \cap (X \setminus Y)$  es arco-conexo no vacío, que el morfismo inducido por la inclusión  $\pi(U_\alpha \cap (X \setminus Y)) \hookrightarrow \pi(U_\alpha)$  es un epimorfismo para todo  $\alpha$ , y que  $Y \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$ . Entonces el morfismo de grupos*

$$i_* : \pi(X \setminus Y) \rightarrow \pi(X)$$

*inducido por la inclusión, es un epimorfismo.*

*Demostración.* A partir de la familia de abiertos  $\{U_\alpha\}$  definimos una nueva familia  $\{V_\alpha\}$  donde cada  $V_\alpha := U_\alpha \cup (X \setminus Y)$ . Entonces  $X = \bigcup V_\alpha$  y en grupos fundamentales se da una situación como la que se ilustra en el siguiente diagrama:



$$\begin{array}{ccccc}
 \pi(X \setminus Y, u_\lambda) & \xrightarrow{j_\lambda} & \pi(V_\lambda, x_0) & & \\
 & & & \searrow k_\lambda & \\
 \pi(X \setminus Y, u_\mu) & \xrightarrow{j_\mu} & \pi(V_\mu, x_0) & \xrightarrow{k_\mu} & \pi(X, x_0) \\
 & & & \nearrow k_{\dots} & \\
 \pi(X \setminus Y, u_{\dots}) & \xrightarrow{j_{\dots}} & \vdots & & 
 \end{array}$$

con  $\lambda, \mu, \dots \in \Omega$ . Para cada  $\alpha \in \Omega$  se toma el punto base  $u_\alpha \in U_\alpha$ , y cada  $j_\alpha := g_\alpha \circ l_\alpha$ , donde  $l_\alpha$  es el morfismo inducido por la inclusión  $X \setminus Y \hookrightarrow V_\alpha$ , y  $g_\alpha : \pi(V_\alpha, u_\alpha) \rightarrow \pi(V_\alpha, x_0)$  es un isomorfismo,  $x_0 \in X \setminus Y$ . Los morfismos  $k_\alpha$  son los inducidos por las inclusiones  $V_\alpha \hookrightarrow X$ . Se cumple que:

I Cada morfismo

$$j_\alpha : \pi(X \setminus Y) \rightarrow \pi(V_\alpha)$$

es un epimorfismo. Esta es una conclusión inmediata, usando el corolario 1.2 en cada  $V_\alpha = U_\alpha \cup (X \setminus Y)$ .

II Si  $\gamma$  es un lazo en  $X$  con punto base  $x_0 \in X \setminus Y$ , entonces existen lazos  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  contenidos cada uno en un abierto  $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_m}$  distinto, todos con punto base  $x_0$ , tales que el producto de sus imágenes bajo los correspondientes mapeos  $k_\alpha$  es homotópico a  $\gamma$ . Esto por la afirmación del lema 1.3. Pero a su vez para cada  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  tiene su respectiva preimagen  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m$  en  $X \setminus Y$ . Por lo tanto cada composición  $k_\alpha \circ j_\alpha$  es un epimorfismo.

Consideremos ahora isomorfismos

$$h_\alpha : \pi(X \setminus Y, u_\alpha) \rightarrow \pi(X \setminus Y, x_0).$$

El morfismo de grupos

$$\pi(X \setminus Y, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0) \quad \tilde{\gamma}_i \mapsto k_{\alpha_i} \circ j_{\alpha_i} \circ h_{\alpha_i}(\tilde{\gamma}_i)$$

es homotópico al morfismo de grupos inducido por la inclusión  $X \setminus Y \hookrightarrow X$ . Lo que prueba el teorema.  $\square$

## 1.2. Cubriente cíclica infinita

Cuando uno trabaja con espacios cubrientes en ocasiones el espacio base  $X$  se puede ver como el espacio de órbitas de una acción de un grupo  $G$  en un espacio topológico  $\tilde{X}$ .

De manera más precisa, una *acción* (derecha) de un grupo  $G$  sobre un espacio topológico  $\tilde{X}$  es un mapeo  $\tilde{X} \times G \rightarrow \tilde{X}$ ,  $(x, g) \mapsto x \cdot g$  tal que



- I  $(x \cdot h) \cdot g = x \cdot (g \cdot h)$  para todo  $g, h \in G, x \in \tilde{X}$ .
- II  $x \cdot e = x$  para todo  $x \in \tilde{X}$ ,  $e$  es la identidad en  $G$ .
- III el mapeo  $x \mapsto x \cdot g$  es un homeomorfismo de  $\tilde{X}$  en sí mismo para todo  $g \in G$ .

Si la acción cumple una condicional adicional, que  $x \cdot g = x$  implica  $g = e$ , se dice que es una **acción libre**. Por otro lado, si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$  existen vecindades  $U_x$  y  $U_y$  tales que sólo se puede encontrar una cantidad finita de elementos  $g \in G$  con la propiedad de que  $g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset$ ; entonces la acción se denomina **acción propiamente discontinua**.

El punto III de la definición de acción implica que  $G$  define un grupo de homeomorfismos en  $\tilde{X}$ . Si la acción es libre y propiamente discontinua y definimos  $X := \tilde{X}/G$  como el espacio de órbitas dotado de la topología cociente, entonces la proyección  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  que manda a cada punto en la órbita que lo contiene define un **mapeo cubriente** (en [19] se puede encontrar un tratamiento más detallado). Lo anterior motiva la siguiente definición:

**Definición 1.5.** Un  **$G$ -cubriente**  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un espacio cubriente que proviene de una acción de un grupo  $G$  sobre un espacio  $\tilde{X}$ , donde  $X := \tilde{X}/G$  es el espacio de órbitas.

*Ejemplo 1.5.1.* El grupo  $\mathbb{Z}$  actuando sobre  $\mathbb{R}$  por medio de la traslación  $(n, r) \mapsto n + r, n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$ . El mapeo cociente es, de hecho, un mapeo cubriente de  $\mathbb{R}$  a  $S^1$ . Intuitivamente se puede pensar que  $\mathbb{R}$  está enrollado en una espiral sobre la circunferencia, como se muestra en la figura 1.2

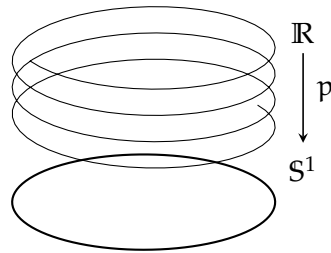


Figura 1.2:  $\mathbb{R}$  como espacio cubriente de  $S^1$

Para cada cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  el conjunto

$$\text{Cub}(\tilde{X}/X) := \{\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \mid \varphi \text{ es un homeomorfismo y } p \circ \varphi = p\}$$



se denomina el *grupo de transformaciones cubrientes*. En otras palabras, el grupo de transformaciones cubrientes consta del conjunto de homeomorfismos de  $\tilde{X}$  en  $\tilde{X}$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

junto con la operación de composición.

Si se tiene una  $G$ -cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , cada  $g \in G$  determina un elemento de  $\text{Cub}(\tilde{X}/X)$  por medio del homeomorfismo  $x \mapsto x \cdot g$  para toda  $x \in \tilde{X}$ . Más aún, si  $\tilde{X}$  es conexo, éstas son las únicas transformaciones cubrientes que hay; i.e.  $G$  y  $\text{Cub}(\tilde{X}/X)$  son isomorfos.

Hay una clase en particular de  $G$ -cubrientes que proporcionará, más adelante, información sobre el subgrupo conmutador del grupo fundamental de una curva plana.

Considérese una  $n$ -variedad conexa y compacta  $M^n$ , y un epimorfismo  $\phi : \pi_1(M^n) \rightarrow \mathbb{F}_1$ , donde  $\mathbb{F}_1$  es el grupo libre en un generador  $t$ . Podemos identificar  $\mathbb{F}_1$  con  $\pi_1(S^1)$ , y por lo tanto existe un mapeo  $f : M^n \rightarrow S^1$  tal que  $\phi$  es el homomorfismo inducido por  $f$  (una prueba de la existencia de dicho mapeo se puede encontrar en [21], proposición 1B.9).

Por otro lado, como  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{F}_1$  son isomorfos, por el ejemplo 1.5.1 podemos ver que  $\mathbb{R}$  es una  $\mathbb{F}_1$ -cubriente de  $S^1$ , con  $\mathbb{F}_1$  actuando por traslación. Con estas ideas en mente tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.6.** Una *cubriente cíclica infinita* de  $\tilde{M}^n$  se define como cualquier espacio  $\tilde{M}^n \subset M^n \times \mathbb{R}$  que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}^n & \xrightarrow{p} & M^n \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{p'} & S^1 \end{array}$$

donde  $i$  y  $p$  son las proyecciones  $(x, s) \mapsto s$  y  $(x, s) \mapsto x$  respectivamente, y  $p'$  es la proyección cubriente de  $\mathbb{R}$  sobre  $S^1$ .

Nótese que en verdad  $\tilde{M}^n$  es un espacio cubriente de  $M^n$  y que además la acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  induce una acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\tilde{M}^n$  dada por  $t \cdot (x, s) = (x, s + t)$ .  $\tilde{M}^n$  es de hecho una  $\mathbb{Z}$ -cubriente de  $M^n$  y podemos pensar en esta variedad como el espacio de órbitas

$$M^n = \tilde{M}^n / \mathbb{Z}.$$



Más aún, si el primer grupo de homología  $H_1(M^n) \cong \mathbb{Z}$  se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.7.** Sea  $K := [\pi(M^n), \pi(M^n)]$ , el subgrupo conmutador de  $\pi(M^n)$ . Si  $H_1(M^n)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ; entonces

$$\pi(\widetilde{M}^n) \cong K$$

*Demostración.* El teorema es una consecuencia de las siguientes afirmaciones:

I Como  $H_1(M^n) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_1(M^n)$  es la abelianización de  $\pi(M^n)$ , entonces

$$\frac{\pi(M^n)}{K} \cong \mathbb{Z}$$

II  $\widetilde{M}^n$  es una *cubriente normal* de  $M^n$ , así que <sup>1</sup>

$$\frac{\pi(M^n)}{\pi(\widetilde{M}^n)} \cong \text{Cub}(\widetilde{M}^n/M^n)$$

III Por construcción,

$$\text{Cub}(\widetilde{M}^n/M^n) \cong \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$\frac{\pi(M^n)}{K} \cong \frac{\pi(M^n)}{\pi(\widetilde{M}^n)} \cong \mathbb{Z}.$$

Así que  $K \subset \pi(\widetilde{M}^n)$ . Usando el Tercer Teorema de de Isomorfismo obtenemos la identidad.

$$\frac{\pi(M^n)}{\pi(\widetilde{M}^n)} \cong \frac{\left(\frac{\pi(M^n)}{K}\right)}{\left(\frac{\pi(\widetilde{M}^n)}{K}\right)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\left(\frac{\pi(\widetilde{M}^n)}{K}\right)},$$

pero como  $\mathbb{Z}$  es un *grupo hopfiano*, i.e. no tiene grupos cociente propios isomorfos ([22, pág. 109]), entonces

$$\pi(\widetilde{M}^n) \cong K$$

□

---

<sup>1</sup>Ésto es un abuso de notación. Formalmente en el cociente se debe tomar la imagen de  $\pi(\widetilde{M}^n)$  bajo  $p_*$ , donde  $p_*$  es el homomorfismo inducido por la proyección, pero como  $p_*$  es inyectiva  $p_*(\pi(\widetilde{M}^n))$  y  $\pi(\widetilde{M}^n)$  son isomorfos.



### 1.3. Fibraciones

Las fibraciones surgen como una generalización de los espacios cubrientes para aislar algunas propiedades importantes de dichos espacios.

Una de las grandes ventajas de las fibraciones en el contexto de este trabajo es que nos permitirán obtener resultados topológicos a partir de las propiedades algebraicas de una función. Más precisamente, las ecuaciones polinomiales que determinan una curva algebraica compleja, definen también una fibración. Las definiciones presentadas en esta sección serán usadas más adelante para estudiar las características de una curva algebraica y de su complemento.

**Definición 1.8.** Sean  $E$  y  $B$  dos espacios topológicos. Un mapeo  $p : E \rightarrow B$  se dice que tiene la propiedad del *levantamiento de homotopía* respecto a otro espacio  $X$  si, para cualesquiera dos mapeos  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  y  $G : X \times I \rightarrow B$  para las cuáles  $p \circ \tilde{f} = G \circ i$  (donde  $i : X \rightarrow X \times I$  es la inclusión  $x \mapsto (x, 0)$ ), existe un mapeo continuo  $\tilde{G} : X \times I \rightarrow E$  tal que ambos triángulos en el siguiente diagrama conmutan.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Aunque esta definición parece estar estrechamente ligada al espacio  $X$  respecto al cuál se define la homotopía, nos interesa el estudio de los espacios que tienen esta propiedad independientemente de  $X$ .

**Definición 1.9.** Un mapeo entre dos espacios topológicos,  $p : E \rightarrow B$ , se denomina una *fibración* si tiene la propiedad del levantamiento de homotopía respecto a cualquier espacio  $X$ . Si se toma un punto  $b_0 \in B$ , al espacio  $F := p^{-1}(b_0)$  se le llama la *fibra*.

Existe una definición análoga menos restrictiva conocida como *fibración de Serre*, la cual se define como un mapeo que tiene la propiedad de levantamiento de homotopía respecto a cualquier CW-complejo; dicha propiedad se denota como la *propiedad de levantamiento de Serre*. Obviamente una fibración siempre cumple las condiciones para ser una fibración de Serre.

Uno se ve tentado a creer que todas las fibras en una fibración son homeomorfas, sin embargo esto no es cierto en general. La razón por la que uno se puede referir a la preimagen de un punto como *la fibra* es porque todas las fibras son homotópicamente equivalentes, como se muestra en el Teorema 1.13. Así que si uno las caracteriza por su grupo fundamental, las fibras son indistinguibles.

A continuación un tipo particular de fibración que aparece frecuentemente.



**Definición 1.10.** Una *fibración localmente trivial* con fibra  $F$  es un mapeo entre dos espacios topológicos,  $p : E \rightarrow B$  para el cual existe una cubierta abierta  $\mathcal{V}$  de  $B$  y un conjunto de homeomorfismos  $\phi_V : V \times F \rightarrow p^{-1}(V)$ , para todo  $V \in \mathcal{V}$ , tales que

$$p \circ \phi_V(v, x) = v \quad \forall (v, x) \in V \times F.$$

A los abiertos  $V$  de la cubierta  $\mathcal{V}$ , se les llama *vecindades coordinadas*.

En otras palabras, en una fibración localmente trivial para cada punto hay una vecindad en la que la preimagen bajo la proyección es homeomorfa al producto cartesiano de dicha vecindad por la fibra.

En una fibración localmente trivial todas las fibras son homeomorfas.

*Ejemplo 1.10.1.* Todo espacio cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es una fibración localmente trivial. La fibra  $F := p^{-1}(x_0)$  es un espacio discreto, en cada abierto admisible  $U$  se tiene que  $p^{-1}(U) \simeq F \times U$ . El homeomorfismo está dado por  $\phi_U : F \times U \rightarrow p^{-1}(U)$  definida por  $(u, v) \mapsto (p|_{S_y})^{-1}(U)$ . Donde  $(u, v) \in p^{-1}(U)$ ,  $y \in F$  y  $S_y$  es la hoja sobre  $U$  que contiene a  $y$ .

*Ejemplo 1.10.2.* Dados dos espacios topológicos  $B$  y  $F$ , si hacemos  $E := B \times F$  y  $p$  es la proyección en el primer miembro  $(b, x) \mapsto b$ ,  $b \in B$ , Entonces  $p : E \rightarrow B$  es una fibración localmente trivial. A esta fibración se le conoce como *fibración trivial*.

En algunos casos existe una función inversa derecha de la proyección, dicha función es una caracterización abstracta de lo que es una gráfica.

**Definición 1.11.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración. Una *sección* de  $p$  es un mapeo  $s : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = 1_B$ . Es decir,  $p(s(b)) = b$ , para todo  $b \in B$ .

La existencia de esta inversa por la derecha implica que  $p$  tiene una inversa homotópica.

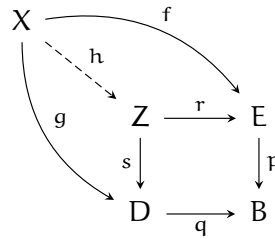
Existe otra construcción que involucra fibraciones y que será muy útil más adelante.

**Definición 1.12.** Sean  $p : E \rightarrow B$  y  $q : D \rightarrow B$  dos fibraciones. Su *producto fibrado* o *pullback* denotado por  $E \times_B D$  es la tripleta  $(Z, r, s)$ , donde  $Z \subset E \times D$ , y  $r : Z \rightarrow E$ ,  $s : Z \rightarrow D$  son dos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{r} & E \\ s \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

y, más aún, que para cualquier otra tripleta  $(X, f, g)$  tal que  $p \circ f = q \circ g$ , existe un único morfismo  $h$  que hace conmutar el diagrama siguiente:





### 1.4. Topología de una fibración

En esta sección se presentan varios resultados sobre fibraciones que en algunos casos nos permiten inferir propiedades topológicas del espacio total a partir del espacio base y la fibra. Si además agregamos algunas condiciones, como el que la fibración sea localmente trivial, o que exista una sección, entonces tendremos una idea bastante precisa de cómo es el grupo fundamental de un espacio a partir del grupo fundamental del otro.

En la sección anterior se mencionó que en una fibración todas las fibras son homotópicamente equivalentes, el siguiente teorema prueba precisamente ese enunciado.

**Teorema 1.13.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración, y  $b_0, b_1 \in B$ , entonces las fibras  $p^{-1}(b_0)$  y  $p^{-1}(b_1)$  tienen el mismo tipo de homotopía.*

*Demostración.* Para probar este teorema se mostrará que todas las fibras tienen el mismo tipo de homotopía que un tercer espacio  $\bar{Y}_b$ . Tomemos un punto cualquiera  $b \in B$ , definimos

$$\bar{Y}_b = \{(x, \gamma) \in E \times B^I \mid \gamma(0) = b \text{ y } \gamma(1) = p(x)\}$$

donde  $B^I$  es el conjunto de funciones continuas de  $I$  en  $B$ . Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{Y}_b & \xrightarrow{j} & B^I \\
 i \downarrow & & \downarrow d \\
 E & \xrightarrow{p} & B
 \end{array}$$

En el diagrama,  $i$  y  $j$  son las proyecciones  $(x, \gamma) \mapsto x$  y  $(x, \gamma) \mapsto \gamma$  respectivamente, y  $d$  está dada por  $\gamma \mapsto \gamma(1)$ .

Para cualquier punto  $x$  en la fibra  $Y_b := p^{-1}(b)$ , si se toma  $\gamma_0$  como el camino constante en  $b$ , se tiene que  $(x, \gamma_0) \in \bar{Y}_b$ . Definimos entonces el mapeo

$$\lambda : Y_b \rightarrow \bar{Y}_b \quad x \mapsto (x, \gamma_0).$$



Para probar la equivalencia homotópica de  $Y_b$  y  $\bar{Y}_b$  se debe encontrar la inversa homotópica de  $\lambda$ .

Considérese el mapeo  $G : \bar{Y}_b \times I \rightarrow B$  definido por

$$(x, \gamma, t) \mapsto \gamma(1 - t).$$

$G$  es continua por ser la composición de funciones continuas. Por definición de fibración, existe un mapeo  $\tilde{G} : \bar{Y}_b \times I \rightarrow E$  que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y}_b & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow k & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ \bar{Y}_b \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

y se tiene que

I  $\tilde{G}(x, \gamma, 0) = i(x, \gamma) = x$ . En particular, para los puntos sobre la fibra,  $\tilde{G}(x, \gamma, 0) \circ \lambda(x) = \text{id}_{Y_b}(x)$ .

II  $p \circ \tilde{G}(x, \gamma, 1) = \gamma_0(x) = b$ . Al final de la homotopía la imagen de  $\tilde{G}$  está contenida en la fibra  $Y_b$ .

Si definimos  $\varphi : \bar{Y}_b \rightarrow Y_b$  por  $(x, \gamma) \mapsto \tilde{G}(x, \gamma, 1)$ ,  $\varphi \circ \lambda$  es homotópica a la identidad en  $Y_b$ .  $\varphi$  es la inversa homotópica que estamos buscando. Hemos mostrado que es una inversa homotópica por la izquierda, veamos que también es una inversa homotópica derecha.

Sea

$$J : B^I \times I \rightarrow B^I \quad (\gamma, t) \mapsto \gamma(1 - t),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} J(\gamma, 0) &= \gamma \\ J(\gamma, 1) &= \gamma_0. \end{aligned}$$

Definimos ahora

$$H : \bar{Y}_b \times I \rightarrow \bar{Y}_b \quad (x, \gamma, t) \mapsto \left( \tilde{G}(x, \gamma, t), J(\gamma, t) \right).$$

$H$  es continua por ser composición de funciones continuas, además

$$\begin{aligned} H(x, \gamma, 0) &= \left( \tilde{G}(x, \gamma, 0), J(\gamma, 0) \right) \\ &= (i(x, \gamma), \gamma) \\ &= (x, \gamma) \\ &= \text{id}_{\bar{Y}_b}(x, \gamma) \end{aligned}$$



y

$$\begin{aligned} H(x, \gamma, 1) &= (\tilde{G}(x, \gamma, 1), J(\gamma, 1)) \\ &= (\tilde{G}(x, \gamma, 1), \gamma_0) \\ &= \lambda \circ \varphi(x, \gamma). \end{aligned}$$

Así que  $H$  es una homotopía de la identidad en  $\bar{Y}_b$  a  $\lambda \circ \varphi$ , lo que demuestra el teorema.  $\square$

Ahora que sabemos que en todas las fibras de una fibración los grupos de homotopía son isomorfos, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 1.14** (Sucesión exacta de homotopía para una fibración). *Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración con fibra  $Y$ , existe una **sucesión exacta***

$$\cdots \rightarrow \pi_2(E) \xrightarrow{P_*} \pi_2(B) \rightarrow \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(E) \xrightarrow{P_*} \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(E) \xrightarrow{P_*} \pi_0(B)$$

*Demostración.* Para una demostración de este teorema consultar [13], teorema 11.48.  $\square$

La existencia de una sección en una fibración localmente trivial hace posible decir cómo es el grupo fundamental del espacio total a partir de los grupos fundamentales de la fibra y del espacio base.

Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración localmente trivial y supongamos que existe una sección  $s : B \rightarrow E$ . Elegimos puntos base  $\tilde{b} \in E$  y  $b \in B$  tales que  $\tilde{b} = s(b)$ . Denotamos entonces la fibra como  $F_b := p^{-1}(b)$ . Si tomamos a  $\tilde{b}$  como el punto base de la fibra  $F_b$ , entonces  $\pi(B, b)$  actúa sobre  $\pi(F_b, \tilde{b})$  por la derecha de la siguiente manera.

Dados un lazo  $u : I \rightarrow B$  basado en  $b$ , y un lazo  $w : I \rightarrow F_b$  basado en  $\tilde{b} = s(u(0))$ . Las fibras puntuadas

$$(p^{-1}(u(t)), s(u(t))) \quad t \in I$$

forman un espacio trivial sobre  $I$ , es decir el espacio formado por las fibras es homeomorfo  $p^{-1}(u(0)) \times I$ . Podemos deformar el lazo  $w$  en un lazo

$$w_t : I \rightarrow p^{-1}(u(t))$$

con punto base  $s(u(t))$  moviéndose continuamente, como se ilustra en la Figura 1.3. Intuitivamente, anclamos el lazo  $w$  al punto base  $\tilde{b}$ , luego levantamos  $u$  en un lazo  $\tilde{u}$  cuyo punto base también es  $\tilde{b}$  y movemos a  $w$  a lo largo de  $\tilde{u}$  hasta regresar de nuevo a  $\tilde{b}$  con un lazo que ahora llamaremos  $w_1$  y que en general es distinto del lazo  $w$  con el que iniciamos el viaje.



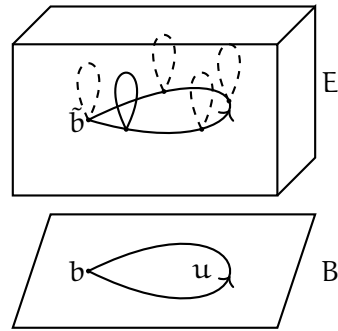


Figura 1.3: Figura ilustrativa de la monodromía

El lazo  $w_1 : I \rightarrow p^{-1}(u(1))$  representa precisamente la imagen de  $w$  bajo la acción

$$\varphi : \pi(F_b) \times \pi(B) \rightarrow \pi(F_b)$$

dada por  $\varphi([w], [u]) = [w_1]$  de la manera antes descrita. Por supuesto que habría que verificar que  $\varphi$  es en verdad una acción, que está bien definida para cualquier par de representantes  $u, w$  y para cualquier deformación  $w_t : I \rightarrow p^{-1}(u(t))$ . Todo esto es, de hecho, una consecuencia directa de la propiedad de levantamiento de homotopía.

A la acción descrita en los párrafos anteriores se le conoce como la *acción de monodromía* sobre el grupo fundamental de la fibra.

**Teorema 1.15.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración localmente trivial con una sección  $s : B \rightarrow E$ , asumamos además que tanto  $E$  como la fibra son arco-conexos. Sea  $b$  un punto en  $B$ , y tomamos*

$$\tilde{b} := s(b), \quad F_b := p^{-1}(b).$$

*Entonces  $\pi(E, b)$  es isomorfo al producto semidirecto  $\pi(F_b, \tilde{b}) \rtimes \pi(B, b)$  construido a partir de la acción de monodromía de  $\pi(B, b)$  sobre  $\pi(F_b, b)$ .*

*Demostración.* Afirmamos que  $B$  es arco-conexo como consecuencia de que  $E$  es arco conexo y existe una sección. Para ver esto tomemos dos puntos cualesquiera  $a_1, a_2 \in B$ , existe un arco  $\gamma \subset E$  que conecta a sus imágenes  $s(a_1), s(a_2) \in E$ ;  $p(\gamma) \subset B$  es entonces la imagen continua de un intervalo  $I$  que conecta a los puntos  $a_1, a_2$ .

Sea  $i : F_b \hookrightarrow E$  la inclusión, tenemos entonces la sucesión exacta dada por el Teorema 1.13

$$\overset{i_*}{\longrightarrow} \pi_2(E, \tilde{b}) \xrightarrow{p_*} \pi_2(B, b) \rightarrow \pi_1(F_b, \tilde{b}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, \tilde{b}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 1.$$



Que termina en 1 porque por hipótesis la fibra es conexa, lo que implica que  $\pi_0(F_b, \tilde{b}) = 1$ . La sección  $s$  induce un homomorfismo

$$s_* : \pi_2(B, b) \rightarrow \pi_2(E, \tilde{b})$$

tal que

$$\pi_2(B, b) \xrightarrow{s_*} \pi_2(E, \tilde{b}) \xrightarrow{p_*} \pi_2(B, b)$$

es la identidad, por lo que  $p_*$  es sobreyectiva. Así que se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow \pi_1(F_b, \tilde{b}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, \tilde{b}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 1.$$

Por el teorema A.1 del apéndice se tiene que  $\pi(E, \tilde{b})$  es isomorfo al producto semidirecto  $\pi(F_b, \tilde{b}) \rtimes \pi(B, b)$  construido a partir de una acción de  $\pi(B, b)$  sobre  $\pi(F_b, \tilde{b})$  dada por

$$\gamma \cdot \alpha = i_*^{-1}(s_*(\alpha)\gamma s_*(\alpha)^{-1}) \quad \alpha \in \pi(B, b), \gamma \in \pi(F_b, \tilde{b}).$$

Como  $i_*$  es inyectiva, e incluso el punto base es el mismo, podemos identificar a  $\pi(F_b, \tilde{b})$  con su imagen en  $\pi(E, \tilde{b})$  para tener una manera más sucinta de escribir la acción como

$$\gamma \cdot \alpha = s_*(\alpha)\gamma s_*(\alpha)^{-1}. \quad (1.1)$$

Así que para probar el teorema es suficiente mostrar que la acción 1.1 coincide con la acción de monodromía.

Denotamos por  $\odot$  la acción de monodromía. Sean  $\alpha : I \rightarrow B$  un lazo que representa la clase  $[\alpha] \in \pi(B, b)$ ,  $\gamma_0 : I \rightarrow F_b$  un lazo que representa la clase  $[\gamma_0] \in \pi(F_b, \tilde{b})$ , y  $\gamma_1$  un lazo que representa la clase  $[\gamma_1] \in \pi(F_b, \tilde{b})$ . Afirmamos que el lazo

$$s_*(\alpha)\gamma_1 s_*(\alpha)^{-1}\gamma_0^{-1} \quad (1.2)$$

es nulhomotópico en el espacio total  $E$ . Para probar la afirmación sea

$$\Gamma : (I \times I) \rightarrow E, \quad (t, r) \mapsto \gamma_t(r)$$

una homotopía entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . La imagen de cada  $\gamma_t$  es un lazo en  $p^{-1}(\alpha(t))$  con punto base  $s(\alpha(t))$  (ver Figura 1.4).

El lazo 1.2 es la imagen bajo  $\Gamma$  del lazo frontera  $\partial(I \times I)$ , por lo tanto es nulhomotópico.



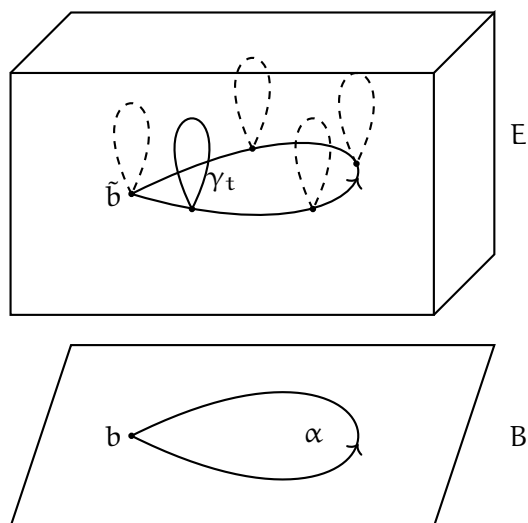
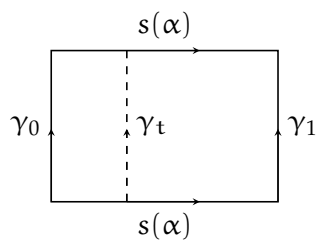


Figura 1.4: Deformación de lazo por medio de la acción de monodromía



En consecuencia

$$1 = s_*(\alpha)^{-1} \gamma_1 s_*(\alpha) \gamma_0^{-1}$$

$$\gamma_1 = s_*(\alpha) \gamma_0 s_*(\alpha)^{-1}.$$

Y como  $[\gamma_1] = [\gamma_0 \odot \alpha]$  se sigue que

$$\gamma_0 \odot \alpha = s_*(\alpha) \gamma_0 s_*(\alpha)^{-1}$$

□

Los grupos fundamentales de los espacios involucrados en una fibración son, además, invariantes bajo deformaciones del espacio base.



**Teorema 1.16.** Sean  $p : E \rightarrow B$  una fibración y  $\tilde{B}$  un retracto fuerte por deformación de  $B$ . Si denotamos por  $R$  la homotopía

$$R : B \times I \rightarrow \tilde{B}$$

que deforma a  $B$  en  $\tilde{B}$ , por  $\tilde{p} := p|_{\tilde{B}}$  la restricción correspondiente y  $\tilde{E} := \tilde{p}^{-1}(\tilde{B})$ . Entonces  $\tilde{E}$  y  $E$  son homotópicamente equivalentes.

*Demostración.* Como  $\tilde{B} \subset B$ , la restricción  $\tilde{p}$  es de nuevo una fibración, la fibra es la misma que en la fibración original. Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_2(B) & \longrightarrow & \pi_2(F) & \longrightarrow & \pi_1(E) & \longrightarrow & \pi_1(B) & \longrightarrow & \pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_0(E) \\ & & \downarrow r_* & & \downarrow h_* & & \downarrow g_* & & \downarrow r_* & & \downarrow h_* & & \downarrow g_* \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_2(\tilde{B}) & \longrightarrow & \pi_2(F) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{E}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{B}) & \longrightarrow & \pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_0(\tilde{E}) \end{array}$$

donde  $r_*$  es el homomorfismo inducido por la retracción  $r : B \rightarrow \tilde{B}$  dada por  $b \mapsto R(b, 1)$ ,  $h$  es el homomorfismo identidad y  $g := \tilde{G}(x, 1)$ ,  $x \in E$  con  $\tilde{G}$  dada por el levantamiento.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow[(x,t) \mapsto (p(x),t)]{} & B \times I \xrightarrow{R} B \end{array}$$

Entonces

- I  $\tilde{E}$  es arco conexo. Si se toman dos puntos  $x_0, x_1 \in \tilde{E}$ , existe  $\gamma : I \rightarrow E$  continua con  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x_1$ . La composición  $\gamma \circ g$  es entonces un camino en  $\tilde{E}$  que une a  $x_0$  y  $x_1$ .
- II  $\pi_0(\tilde{E})$  es trivial, por el inciso anterior. Como  $\pi_0(E)$  también es trivial, entonces el morfismo inducido  $g_*$  entre ambos es un isomorfismo.
- III Como las fibras son homotópicamente equivalentes, y la retracción es a su vez una equivalencia homotópica, los morfismos  $r_*$  y  $h_*$  son isomorfismos entre cada uno de los correspondientes  $\pi_n$ . Esto como consecuencia del Teorema de Whitehead ([21], Sección 4.1).
- IV Usando el Lema Del Cinco ([21], sección 1.2), concluimos que  $\pi_n(E) \cong \pi_n(\tilde{E})$  para  $n \geq 1$ .

Finalmente, por las afirmaciones del segundo y cuarto incisos, así como por el Teorema de Whitehead, concluimos que  $E$  y  $\tilde{E}$  son homotópicamente equivalentes.  $\square$



## 1.5. Grupo fundamental de una superficie

Un resultado central en topología es el teorema de clasificación de superficies compactas sin frontera. Una superficie es una 2-variedad conexa. El teorema dice que todas las superficies constan de una suma conexa de esferas con asas y planos proyectivos.

Una demostración rigurosa de este resultado requiere el uso de dos teoremas elementales que son intuitivamente claros, pero cuya demostración es muy difícil.

Primero, el teorema de la curva de Jordan, que enuncia que una curva cerrada simple en un plano parte dicho plano en dos componentes, el interior y el exterior de la curva. Una demostración se puede encontrar en [10]. Hay una versión un poco más fuerte que también resulta útil para entender el teorema de clasificación de superficies, ésta versión es conocida como el teorema de Jordan-Schönflies, y afirma que cualquier homeomorfismo entre dos curvas cerradas simples se puede extender a todo el plano.

Un segundo teorema importante es el que afirma que toda superficie puede ser triangulada. Como la superficie es compacta puede ser cubierta por una cantidad finita de círculos que luego pueden ser deformados en triángulos, manteniendo los puntos de intersección entre ellos como vértices. La dificultad estriba en saber qué tan complicadas pueden ser las intersecciones. Resulta que siempre se puede encontrar una cubierta por círculos *suficientemente buena*. Una demostración se puede encontrar en [17].

Partiendo de las ideas previas a continuación se exponen las ideas principales en la demostración del teorema de clasificación de superficies.

**Teorema 1.17.** *Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, o la suma conexa de toros y planos proyectivos.*

*Demostración.* Lo que sigue es un bosquejo de la demostración. Un tratamiento más detallado se puede encontrar en [9], [14], [17].

- I El toro, el plano proyectivo y la esfera se pueden obtener a partir de un polígono identificando apropiadamente sus caras, esto se ilustra en la figura 1.5
- II Toda superficie es homeomorfa al espacio cociente de un polígono identificando apropiadamente sus lados. Para esto se toma la colección de triángulos que cubre la superficie y se les asigna una orientación a sus caras. Los triángulos se pueden escribir como un conjunto ordenado  $\{T_1, \dots, T_n\}$  de tal suerte que dos triángulos consecutivos  $T_i, T_{i+1}$  tienen una cara en común. Esto siempre es posible como consecuencia de la conexidad. Además en cada cara solo se pueden pegar dos triángulos, de lo contrario los puntos en esa



cara no tendrían una vecindad homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Una vez que tenemos la colección de triángulos descrita los pegamos usando en cada paso la arista en común, con lo que al final obtenemos un polígono.

- III El polígono del paso anterior se puede *simplificar* identificando algunas caras adyacentes cuyas orientaciones son opuestas. También es posible transformar el polígono de tal suerte que los vértices son identificados en un sólo punto.
- IV Finalmente, es posible juntar las caras por pares de tal manera que se obtendrá un conjunto de caras adyacentes iguales y con la misma orientación; cada par corresponde a un plano proyectivo. El resto de las caras aparecerán en 4-tuplas de 2 elementos alternados y con las orientaciones opuestas. Por ejemplo, recorriendo la cara en sentido levógiro uno se encontrará con 4 caras consecutivas  $aba^{-1}b^{-1}$ , donde el exponente negativo denota que la cara está orientada en el sentido opuesto. Cada uno de estos conjuntos de 4 caras representa un toro.

□

En particular, si la superficie es orientable entonces queda caracterizada completamente por el número de toros que aparecen como sumandos, dicho número se conoce como *género*. La esfera es de género 0.

**Corolario 1.18.** *Una superficie orientable  $S$  de género  $g$  se puede construir a partir de un polígono con  $4g$  lados identificados por pares. A cada superficie se le puede asignar una palabra donde cada letra representa un lado y su exponente correspondiente representa la orientación.*

*Ejemplo 1.18.1.* En la figura 1.6 se muestra un polígono y la superficie que se obtiene a partir de él.

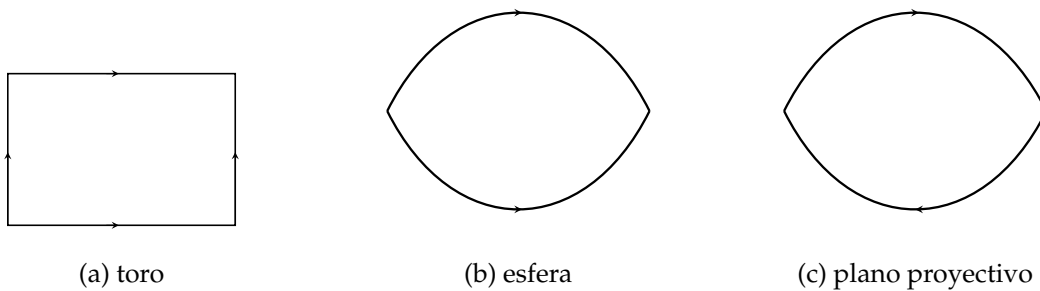
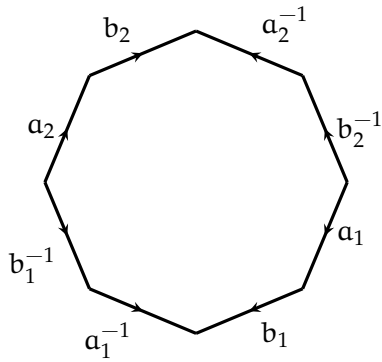
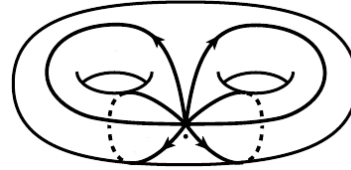


Figura 1.5: Toro, esfera y proyectivo obtenidos a partir de un polígono





(a) octágono con caras orientadas



(b) cuerpo con dos asas

Figura 1.6: Superficie a partir de un  $4g$ -ágono

Concluimos la sección con un teorema que clasifica completamente los grupos fundamentales de una superficie cerrada.

**Teorema 1.19.** *Sea  $S$  una superficie cerrada orientable de género  $g$ . Si denotamos por  $a_i, b_i$  cada pareja de lados adyacentes que forman un toro y hacemos  $[a_i, b_i] := aba^{-1}b^{-1}$  entonces*

$$\pi(S) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle.$$

En particular,  $\pi(S)$  es finitamente generado.

*Demostración.* Consideremos la cuña de  $2g$  círculos

$$\bigvee_{i=1}^{2g} S_i$$

etiquetando cada  $S_i$  como  $a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ . Nótese que este espacio es homeomorfo a la frontera del  $4g$ -ágono correspondiente a la superficie  $S$ , dicha frontera se puede escribir como

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i].$$

Ahora bien, si agregamos la 2-celda que forma el interior del polígono entonces la frontera es nulhomotópica, lo que nos da precisamente la relación que debe cumplir el grupo.

$$\pi(S) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle.$$



□

Por ejemplo, el grupo fundamental de la superficie de género dos presentada en 1.18.1 es

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 \rangle.$$



---

## 2 CURVAS ALGEBRAICAS PLANAS

---

### 2.1. Resultados básicos sobre curvas

El estudio de curvas planas tiene una larga historia. En un principio el interés se centraba en las curvas más sencillas, el círculo y la recta, y era motivado por una utilidad inmediata de dichas curvas. Conforme se avanzó en la comprensión de estos espacios se encontraron curvas con una estructura geométrica mucho más rica: las cúbicas con cúspides, las cúbicas nodales, hipocicloides, cardioides, ovooides y muchas más. El siguiente paso fue el estudio de las curvas en el marco de los números complejos.

La generalización de una curva sobre los números complejos diversifica los objetos de estudio y permite una clasificación más precisa.

Empezamos entonces el estudio de curvas con la definición de las mismas.

**Definición 2.1.** Un subconjunto  $C \subset \mathbb{C}^2$  se dice que es una *curva algebraica afín* si existe un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  cuyo grado  $\deg f \geq 1$  y

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Así, una curva algebraica afín es el conjunto de ceros de un polinomio con coeficientes complejos en dos variables.

*Ejemplo 2.1.1.* En la imagen 2.1 se puede ver una gráfica de los ceros (reales) de la curva  $x^3 + x^2 - y^2$ , que tiene un punto doble en el origen.

*Observación 2.2.* El polinomio de grado mínimo que define una curva es único. Si una curva está definida por  $f$ , cualquier múltiplo escalar  $\lambda f$  y cualquier potencia positiva  $f^k$  definen la misma curva.

Si denotamos por  $V(f)$  al conjunto de ceros de un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.3 (Lema de Study).** Sean  $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ , si  $f$  es irreducible de grado  $\geq 1$  y  $V(f) \subset V(g)$  entonces  $f$  es un divisor de  $g$ .

Este es un precursor del famoso teorema de los ceros de Hilbert (Hilbert Nullstellensatz) para el caso de curvas. Se puede encontrar una demostración del Lema de Study en [20, pág. 17], como parte de la demostración se muestra que una curva algebraica tiene un número infinito de puntos.

Una consecuencia importante del Lema de Study es que cualquier curva se puede descomponer, de forma única salvo unidades, en un producto

$$f = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}. \quad (2.1)$$

Cada uno de los factores se dice que es una *componente* y se cumple que

$$V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_k).$$

Siempre que una curva  $C$  se puede escribir como la unión de dos curvas distintas  $C = C_1 \cup C_2$  se dice que  $C$  es una *curva reducible*. En el caso opuesto, i.e. si  $C = C_1 \cup C_2$  implica que  $C_1 = C_2$ , se dice que  $C$  es una *curva irreducible*.

Cualquier curva algebraica  $C$  admite una representación de la forma

$$C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$$

donde cada  $C_i$  es una curva irreducible. Esta representación es única salvo el orden en que aparece cada  $C_i$ . Dichas  $C_i$  se llaman *componentes irreducibles* de  $C$ .

Por la observación 2.2, si una curva está dada por

$$f = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$$

y existe  $g \in \mathbb{C}[x, y]$  que define la misma curva, i.e.  $V(f) = V(g)$ , entonces

$$g = \lambda_1 f_1^{i_1} \cdots \lambda_r f_r^{i_r}$$

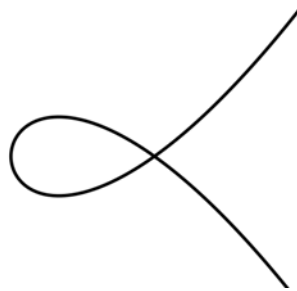


Figura 2.1: Gráfica de  $x^3 + x^2 - y^2$ .



con  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  y  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ . Llamamos a  $f = f_1 \cdots f_r$  el *polinomio minimal* de la curva.

Cuando la curva no está dada por un polinomio minimal, como en la expresión 2.1, se puede pensar cada exponente  $k_i$  como la multiplicidad de la componente  $C_i := V(f_i)$ . En general, una combinación formal

$$k_1 C_1 + \cdots + c_r C_r$$

donde cada  $C_i$  es irreducible y  $r \in \mathbb{Z}$  se le llama *divisor*; si cada  $k_i \geq 0$  se dice que es un *divisor efectivo*.

**Definición 2.4.** Sea  $C := V(f)$  una curva dada por un polinomio minimal  $f$ , se define el *grado* de la curva  $C$  como

$$\deg C := \deg f,$$

el grado del polinomio.

En muchas ocasiones es mucho más conveniente estudiar las curvas en el plano proyectivo, ya que dicho espacio tiene propiedades más agradables, como el ser compacto. Las curvas proyectivas se pueden obtener de las curvas afines *completando* la curva con sus puntos al infinito.

**Definición 2.5.** Un subconjunto del plano proyectivo complejo,  $\bar{C} \subset \mathbb{P}_2$ , se dice que es una *curva algebraica proyectiva* si existe un polinomio homogéneo  $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  de grado  $\geq 1$  tal que

$$\bar{C} = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}_2 : F([X, Y, Z]) = 0\}.$$

Siempre es posible definir una curva proyectiva a partir de una curva afín. Sea  $C$  una curva afín de grado  $n$  dada por  $f(x, y)$ , entonces la curva  $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$  dada por

$$F(x, y, z) := \frac{1}{z^n} f(xz, yz)$$

es la *proyectivización* u *homogeneización* de  $f$ .

*Ejemplo 2.5.1.* La proyectivización de la curva afín  $x^3 + x^2 - y^2$  que aparece en 2.1.1 es la curva dada por el polinomio homogéneo de grado 3.

$$X^3 + X^2Z - Y^2Z.$$

Los resultados y observaciones sobre las ecuaciones, reducibilidad y descomposición en componentes son también válidas para curvas proyectivas. Más aún, dada una curva afín definida por  $f$ , cuya homogeneización es  $F$ , se cumple que  $f$  es irreducible si y sólo si  $F$  también lo es.



## 2.2. El teorema de Bézout

Un teorema cuantitativo particularmente útil es el teorema de Bézout, que cuenta los puntos de intersección entre dos curvas.

El caso más sencillo es la intersección entre una recta proyectiva  $L$  y una curva proyectiva  $C = V(F)$ . Supongamos que los puntos al infinito son de la forma  $(X, Y, 0)$ . Podemos además suponer, con un cambio de coordenadas adecuado, que la ecuación de la recta es  $X = 0$ . Entonces los puntos de intersección entre  $C$  y  $L$  corresponden a los ceros del polinomio  $G(T_0, T_1) := F(0, T_0, T_1)$ . Si expandimos  $F$  en términos de  $X$  tenemos

$$F(X, Y, Z) = F_0X^n + F_1X^{n-1} + \dots + F_n$$

donde los  $F_i \in \mathbb{C}[Y, Z]$  son homogéneos y  $\deg F_i = i$  si  $F_i \neq 0$ . Evaluando  $F$  en  $X = 0$  se sigue que  $G = F_n$ . Si  $F_n = 0$  entonces  $F$  es divisible por  $X$ , i.e.  $L \subset C$ . Si no entonces  $\deg G = n$ . Finalmente, podemos usar el Teorema Fundamental del Álgebra en su versión homogénea ([23, Teorema A.4]) y decir que existe una factorización

$$G = (b_1T_0 - a_1T_1)^{k_1} \dots (b_mT_0 - a_mT_1)^{k_m}$$

con  $(a_i : b_i) \in \mathbb{P}^1$ ,  $1 \leq i \leq m$ , puntos distintos determinados de forma única, y cada  $k_i$  un entero positivo. Más aún, cada  $k_i$  depende únicamente de  $C$  y  $L$  y no de las coordenadas elegidas. Con esta notación, los puntos de intersección entre  $C$  y  $L$  son

$$\{p_i := (0 : a_i : b_i)\}$$

y se define la *multiplicidad* de la intersección como

$$\text{mult}_{p_i}(C \cap L) := k_i.$$

Además, como  $k_1 + \dots + k_m = n$  se tiene el siguiente lema.

**Lema 2.6.** *Sea  $C \subset \mathbb{P}^2$  una curva algebraica plana y  $L$  una recta que no está contenida en  $C$ . El número de puntos de intersección entre  $L$  y  $C$ , contando multiplicidades, es igual a  $n := \deg C$ .*

En la discusión que derivó en este lema la homogeneidad juega un papel importante, en el caso afín sólo podemos dar una cota para el número de puntos de intersección, en vez de un número exacto.

El lema se puede generalizar para contar los puntos de intersección entre dos curvas proyectivas  $C_1$  y  $C_2$ . Para ello se requiere la resultante, un polinomio definido como el determinante de una matriz que involucra a ambas curvas y cuyos ceros coinciden con los puntos de intersección. La multiplicidad de cada punto de intersección se define luego como la multiplicidad del cero correspondiente en la resultante. Una demostración rigurosa del siguiente teorema escapa del objetivo de este trabajo, pero se puede encontrar en [12], [16], [20].



**Teorema 2.7 (teorema de Bézout).** Para dos curvas algebraicas proyectivas  $C_1, C_2$  que no tienen componentes en común, se cumple que

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} \text{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \deg C_1 \cdot \deg C_2$$

Así pues, dos curvas proyectivas de grados  $n$  y  $m$  se intersectan en  $nm$  puntos, contando multiplicidades.

### 2.3. Singularidades

El teorema de Bézout expuesto en la sección anterior es un resultado sobre la estructura global de una curva, ahora estudiaremos la estructura local de la misma.

Sea  $C \subset \mathbb{C}^2$  una curva algebraica afín dada por un polinomio minimal  $f \in \mathbb{C}[x, y]$ . Se dice que  $C$  es *suave* en un punto  $p$  si

$$\text{grad}_p f := \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0).$$

En caso de que el punto no sea suave se dice que es un *punto singular*. Al conjunto

$$\text{Sing } C := \{p \in C : C \text{ es singular en } p\}$$

se le denomina *conjunto singular*

En el ejemplo 2.1.1 al inicio de este capítulo, la curva  $p(x, y) := x^3 + x^2 - y^2$ , tiene un punto singular en el origen, por lo que para ese caso  $\text{Sing } p = \{0\}$ .

Otra forma de pensar en el conjunto singular de una curva es como el conjunto de puntos de intersección de dicha curva y las curvas definidas por sus derivadas parciales. Teniendo en cuenta el Teorema de Bézout, es de esperarse que se cumpla el siguiente resultado.

**Teorema 2.8.** Sea  $C \subset \mathbb{C}^2$  una curva algebraica,  $\text{Sing } C$  es finito.

*Demostración.* Supongamos que  $C$  está dada por el polinomio minimal  $f$ , sean

$$C_1 := V\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ y } C_2 := V\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Entonces

$$\text{Sing } C = C \cap C_1 \cap C_2.$$

Dado que una línea es suave en todos sus puntos, podemos asumir que  $\deg f \geq 2$ , lo que implica que al menos una de sus derivadas parciales es de grado mayor o igual que uno.



Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\deg \frac{\partial f}{\partial x} \geq 1$ . Entonces  $\text{Sing } C \subset C \cap C_1$ . Así que es suficiente mostrar que  $\text{Sing } C \cap C_1$  es finito. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 2.7 si logramos probar que  $C_1$  y  $C$  no tienen componentes en común.

Para ver que la afirmación es cierta por contradicción, supongamos que  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  tienen un factor primo en común  $g$ . Entonces

$$f = g \cdot h$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= g \cdot h_1 \\ &= h \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

De la parte derecha de la segunda igualdad se sigue que  $g$  debe ser un divisor de  $h \frac{\partial g}{\partial x}$ , así que si  $h \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0$  entonces  $g$  es un divisor de  $h$ . Esto implica que  $g^2$  es un divisor de  $f$ , lo que contradice nuestra suposición de que  $f$  es minimal.

Por otro lado, si  $h \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ . Esto implica que  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ , por lo que  $g$  debe ser lineal de la forma  $y - a$ . Sin embargo esto contradice el hecho de que siempre es posible elegir un cambio de coordenadas adecuado de tal forma que  $C$  no contenga líneas paralelas a los ejes.  $\square$

Uno incluso puede dar una cota para el número de singularidades, a saber,  $n(n-1)$ . Esta cota se puede disminuir aún más con un poco de trabajo. En el caso de una curva proyectiva  $C \subset \mathbb{P}^2$  el número máximo de singularidades es

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Sorprendentemente esto arroja información sobre la topología de algunas curvas. Por ejemplo, una consecuencia de la fórmula anterior es que las curvas cuadráticas no tienen puntos singulares, mientras que en el caso de las cúbicas queda restringido el tipo de singularidad que se puede tener.

## 2.4. Topología de una curva algebraica

Desde el punto de vista topológico, una curva es una 2-variedad cerrada sin frontera, con algunos puntos identificados. En la presente sección se explican las ideas generales que permiten entender por qué.

El *espacio proyectivo complejo* de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathbb{P}_n$ , se construye como un espacio cociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , identificando todos los puntos de una misma recta compleja que pasan por el origen. De forma más precisa, definimos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$  por



$$a \sim b \text{ si } \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : a = \lambda b,$$

y hacemos  $\mathbb{P}_n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ . La función cociente está dada por la proyección

$$\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0, \dots, x_n].$$

Otra forma de definir el espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$  es a través de la *fibración de Hopf*. Tomemos el grupo multiplicativo

$$S^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$$

y definimos una acción  $\phi$  de  $S^1$  sobre la esfera  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  por

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n),$$

luego dotamos al espacio de órbitas  $S^{2n+1}/S^1$  con la topología cociente. El espacio obtenido de esta manera es difeomorfo a  $\mathbb{P}_n$ . La proyección

$$h : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/S^1$$

es una fibración localmente trivial con fibra  $S^1$ . El caso  $n = 1$  es especial porque la fibración que resulta, de la 3-esfera sobre la 2-esfera cuya fibra es la 1-esfera, puede ser visualizada en  $\mathbb{R}^3$ , como se ilustra en la Figura 2.2.

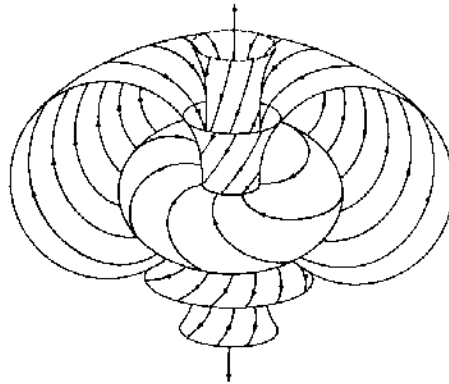


Figura 2.2: Proyección en  $\mathbb{R}^3$  de algunas fibras de la fibración de Hopf.

Una consecuencia inmediata de la construcción del proyectivo a partir de una  $2n + 1$ -esfera es la siguiente:

*Observación 2.9.* El plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}_n$  es un espacio Hausdorff, conexo y compacto.



Pensemos ahora en una curva proyectiva  $\bar{C}$  dada por un polinomio homogéneo  $f$ .

$$\bar{C} := \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_2 : f([x, y, z]) = 0\}.$$

Ésta corresponde a la imagen bajo la proyección  $\Pi$  del espacio

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : f(x, y, z) = 0\},$$

que por ser la preimagen del cerrado  $\{0\}$  bajo la función polinomial continua  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $F(x, y, z) = f(x, y, z)$ , es a su vez cerrado en  $\mathbb{C}^3$ . Más aún,  $\Pi$  es una función cociente por lo que  $\bar{C} = \Pi(C)$  debe ser cerrada.

Tenemos entonces un subespacio cerrado  $\bar{C}$  contenido en el compacto  $\mathbb{P}_2$ , lo que deriva en la siguiente observación.

*Observación 2.10.* Las curvas proyectivas son subespacios compactos de  $\mathbb{P}_2$ .

Para investigar más a fondo las características topológicas de una curva algebraica conviene ahora pensarla como un espacio «casi» cubriente de  $\mathbb{P}_1$ , donde un conjunto finito de puntos no tienen vecindades cubiertas parejamente.

En el Ejemplo 2.1.1, si se toma una vecindad pequeña al rededor del origen y se proyecta la gráfica de  $x^3 + x^2 - y^2$  sobre el eje  $x$  se obtiene un mapeo cubriente de dos hojas, excepto en el puntos singular, donde las dos hojas se intersectan. De hecho localmente la gráfica se de ve como dos funciones, dos *ramas*, que se intersectan en el origen (ver Figura 2.3).

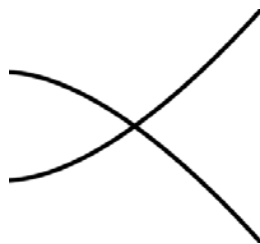


Figura 2.3: Cerca del punto singular, la gráfica se comporta como la intersección de dos ramas.

Si uno decide ser menos restrictivo y permite que la función sea localmente descrita por funciones analíticas en vez de polinomios, se puede obtener una parametrización de cada rama.

En general, sea  $C$  una curva irreducible definida por un polinomio  $p \in \mathbb{C}[x, y]$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que la curva tiene un punto singular en el origen. Tomamos un disco abierto  $U \subset \mathbb{C}$  de radio  $\delta$  suficientemente pequeño, denotamos por  $\bar{C}$  a la parte de la la curva que está «sobre»  $U$ ,

$$\bar{C} := \{(x, y) \in U \times \mathbb{C} : f(x, y) = 0\}.$$

Entonces se cumple el siguiente teorema.



**Teorema 2.11** (Teorema de Puiseux). *Existe una serie  $\varphi \in \mathbb{C}\langle t \rangle$  que converge en una vecindad del origen*

$$V := \left\{ t \in \mathbb{C} : |t| < \frac{1}{\delta^k} \right\}$$

y se cumple que

I  $p(t^k, \varphi(t)) = 0, \quad \forall t \in V.$

II  $\Phi : V \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad t \mapsto (t^k, \varphi(t))$  es biyectiva.

A esta forma de describir la curva localmente se le conoce como **Parametrización de Puiseux**.

Una demostración detallada de este teorema se puede encontrar en [20, Capítulo 7].

Denotamos por  $\bar{C}^*, U^*, V^*$  a los conjuntos correspondientes sin el origen o la preimagen del mismo, análogamente se usará un superíndice  $*$  para denotar las restricción de una función a cualquiera de dichos conjuntos. Una consecuencia del Teorema de Puiseux es que  $U^*$  está cubierto parejamente por  $V^*$ , que se «enrolla» encima  $k$  veces. El caso  $k = 3$  y  $\delta = 1$  se ilustra en la figura 2.4, donde  $f_k : V \rightarrow U$  está dada por  $t \mapsto t^k$  y  $\rho : U \times \mathbb{C} \rightarrow U$  está dada por  $(x, y) \mapsto x$ .

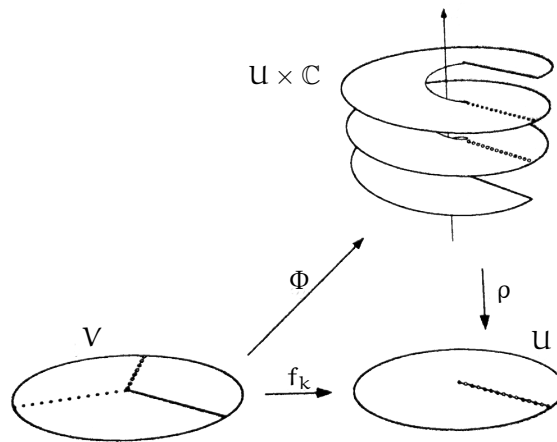


Figura 2.4: Ilustración del teorema de Puiseux

La proyección  $\rho^*$  es un mapeo cubriente que conmuta con los mapeos  $\Phi^*$  y  $f_k^*$  de acuerdo al siguiente diagrama:



$$\begin{array}{ccc}
 V^* & \xrightarrow{\Phi} & \bar{C}^* \\
 & \searrow f_k^* & \swarrow \rho^* \\
 & & U^*
 \end{array}$$

Además,  $\Phi$  es una extensión analítica de  $\Phi^*$  que se obtiene haciendo  $\Phi(0,0) := (0,0)$ , por lo que  $\bar{C}$  es conexa. A un espacio este tipo, cuasi cubriente salvo por algunos puntos, se les conoce como *cuasi cubriente ramificada*.

Estamos ahora en condiciones de enunciar un teorema especialmente relevante que conecta variedades algebraicas con variedades Riemannianas.

**Teorema 2.12.** *Para toda curva algebraica irreducible  $C \subset \mathbb{P}_2$ , existe una superficie de Riemann compacta  $S$  y un mapeo holomorfo*

$$\varphi : S \rightarrow C$$

tal que la siguiente restricción es biholomorfa

$$\varphi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}.$$

Con  $\tilde{C} := C \setminus \text{Sing } C$ , la parte suave de  $C$ , y  $\tilde{S} := \varphi^{-1}(\tilde{C}) \subset S$ .

Dicha superficie está determinada de forma única salvo biholomorfismo, a  $S$  se le llama la **resolución de singularidades** de  $C$ .

*Demostración.* Para cada punto  $p \in \tilde{C}$ , por el Teorema de la Función Implícita, existen abiertos  $V_p \subset C$  y  $W_p \subset \mathbb{P}_2$  con  $p \in W_p$ , y un biholomorfismo

$$\psi_p : V_p \rightarrow C \cap W_p \subset \tilde{C}.$$

Lo que nos da casi todos los «parches» para construir la variedad que buscamos, faltan aquellos que contienen singularidades.

Para los puntos singulares  $q_i \in \text{Sing } C$  tomamos vecindades disjuntas

$$\{W_{q_i} : q_i \in W_{q_i} \text{ y } W_{q_i} \cap W_{q_j} = \emptyset \text{ si } i \neq j\}$$

y, para un punto  $q \in \text{Sing } C$

$$C \cap W_q = C_{q,1} \cup \dots \cup C_{q,k}$$

donde los  $C_{q,r}$  son representantes de las ramas de  $C$  en  $q$ . En particular

$$C_{q,r} \cap C_{q,s} = \{q\} \text{ si } r \neq s.$$

Más aún, se elige  $W_q$  suficientemente pequeño, de tal suerte que para cada  $r$  existe una parametrización de Puiseux

$$\psi_{q,r} : V_{q,r} \rightarrow C_{q,r}$$



donde  $V_{q,r} \subset \mathbb{C}$  es abierto. Ahora tomamos la unión disjunta de todos los subconjuntos abiertos obtenidos tanto para puntos suaves como singulares.

$$M := \bigcup_{p \in \tilde{C}} V_p \cup \bigcup_{q \in \text{Sing } C} (V_{q,1} \cup \cdots \cup V_{q,r})$$

Los mapeos  $\psi_p, \psi_{q,r}$  forman a su vez un mapeo holomorfo

$$\psi : M \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ahora hay que pegar correctamente las cartas de la variedad. Para  $p \in \tilde{C}$  y  $q \in \text{Sing } C$  definimos la relación  $\sim$ .

- $v \in V_p$  y  $v' \in V_{p'}$  son equivalentes si

$$\psi_p(v) = \psi_{p'}(v') \in \tilde{C}.$$

- $v \in V_p$  y  $v' \in C_{q,r}$  son equivalentes si

$$\psi(v) = \psi_{q,r}(v') \in \tilde{C}.$$

No hay parches que se traslapen entre conjuntos distintos  $V_{q,r}$  y  $V_{q,s}$ . Denotamos por  $S$  el espacio cociente  $M/\sim$ . El mapeo  $\psi$  induce naturalmente un mapeo

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ahora hay que mostrar que precisamente  $S$  es la variedad requerida en el teorema.

I  $\varphi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$  es biyectiva por construcción.

II  $S$  es Hausdorff.

III  $S$  es compacto. Podría parecer una consecuencia inmediata de la observación 2.10, pero hay un problema, en general si se tiene un abierto  $U$  cuya imagen  $\varphi(U)$  contiene puntos singulares, la imagen no es necesariamente un abierto porque las cartas al rededor de esos puntos están definidas a partir de ciertas intersecciones.

Sea

$$S = \bigcup_{i \in I} U_i$$

una cubierta abierta de  $S$ . Sea

$$A := \varphi^{-1}(\text{Sing } C).$$



Por el Teorema 2.8  $A$  es finito, y por lo tanto es compacto. Definimos

$$I_0 := \{i \in I : U_i \cap A \neq \emptyset\}$$

$$I_1 := I \setminus I_0$$

Como  $A \subset \bigcup_{i \in T_0} U_i$  existe un subconjunto finito de índices  $J_0 \subset I_0$  tal que

$$U := \bigcup_{j \in J_0} U_j$$

cubre a  $A$ .  $\varphi(U)$  es abierto. Definimos  $\tilde{U} := U_i \setminus A, i \in I : 0 \setminus J_0$ , lo que nos da una cubierta abierta de  $C$ .

$$\varphi(U) \cup \bigcup_{i \in I_0 \setminus J_0} \varphi(\tilde{U}_i) \cup \bigcup_{i \in I_1} \varphi(U_i) \quad (2.2)$$

y como  $C$  es un compacto existe una subcubierta finita de 2.2 cuya preimagen cubre a su vez es una subcubierta finita de  $S$ . Por lo tanto  $S$  es una variedad compacta.

- IV  $S$  es conexa. La demostración rigurosa de este inciso se puede encontrar en [20, Capítulo 9]. Para la prueba se asume que la curva es desconexa, luego se muestra que esto implica la existencia de un factor de grado positivo, lo que contradice la irreducibilidad de la curva.

□

En la demostración del teorema anterior la idea principal para obtener la superficie de Riemann asociada a la curva proyectiva es «separar» los puntos de ramificación, el resto de la superficie se obtiene a partir de un biholomorfismo entre la superficie y la curva. Así pues, una consecuencia del teorema es el siguiente corolario.

**Corolario 2.13.** *Toda curva proyectiva es homeomorfa a una superficie cerrada, compacta y sin frontera, con una cantidad finita de puntos identificados.*

En el Teorema 1.19 se probó que el grupo fundamental de una superficie es finitamente generado, es natural preguntarse si ésto también es cierto para la superficie con puntos un número finito de puntos identificados. La respuesta es afirmativa, por cada par de puntos identificados se obtiene un nuevo generador.

Para ver que esto es cierto supongamos que se tiene una variedad conexa cerrada  $M$ , como en la Figura 2.5a en la cuál vamos a identificar dos puntos  $p_0$  y  $p_1$ . La Figura 2.5b con los puntos identificados en un único punto  $p$ , denotamos este nuevo espacio por  $\bar{M}$ . Ahora bien, como un punto es homotópicamente equivalente a



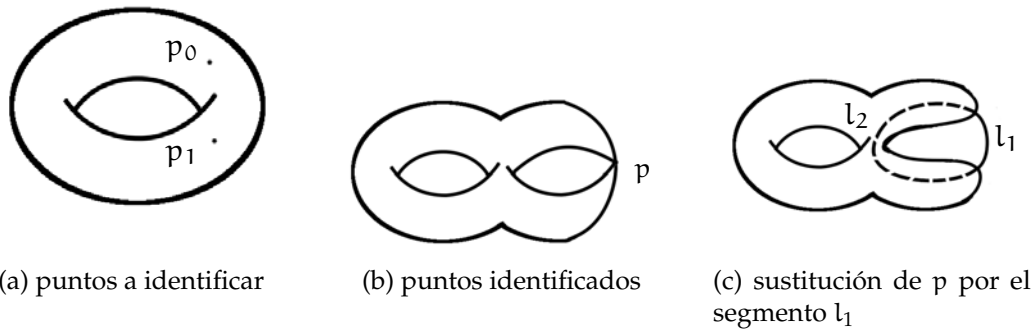


Figura 2.5: Un espacio conexo con dos puntos identificados es topológicamente equivalente al mismo espacio con un segmento «pegado».

un segmento, podemos «reemplazar»  $p$  por  $l_1$  y el nuevo espacio es homotópicamente equivalente a  $\bar{M}$ . Más aún, como  $M$  es conexa podemos encontrar un arco  $l_2 \subset M$  que conecta los puntos finales de  $l_1$ . Sean  $l := l_1 \cup l_2$  y  $D := \pi(l_2)$ , por el Teorema de Seifert-van Kampen tenemos

$$\pi(\bar{M}) = \pi(M) *_D \pi(l).$$

Donde  $*_D$  denota el producto amalgamado (ver [22, Sección 4.2]). Si

$$\pi(M) = \{x_1, \dots, x_n; R\}$$

donde  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es el conjunto de generadores y  $R$  el conjunto de relaciones; como  $\pi(l)$  es libre en un generador  $t$  y  $l_2$  es simplemente conexo se tiene que

$$\pi(\bar{M}) = \{x_1, \dots, x_n, t; R\}.$$

Durante la mayor parte de esta sección se han estudiado las propiedades topológicas de las curvas proyectivas, sin embargo, el objetivo era justificar el siguiente resultado:

**Teorema 2.14.** *El grupo fundamental de una curva afín es finitamente generado.*

*Demostración.* Se justificó en los párrafos previos que el grupo fundamental de una curva proyectiva es finitamente generado. Por otro lado, toda curva afín puede proyectivizarse agregando una cantidad finita de puntos al infinito. Topológicamente la curva afín es homeomorfa a su correspondiente proyectivización removiendo los puntos de intersección con la recta al infinito, que por el Teorema de Bézout (2.7) son finitos. Esto implica que el grupo fundamental tendrá, a lo más, un número finito de generadores adicionales respecto al grupo fundamental de la curva proyectiva.  $\square$





---

## 3 TOPOLOGÍA DEL COMPLEMENTO DE UNA CURVA

---

Este capítulo contiene las ideas principales del presente trabajo, se estudia la topología del complemento de la curva por medio de la fibración dada por una función polinomial. El estudio desde esta perspectiva permite utilizar resultados conocidos sobre fibraciones y sobre la topología de una curva.

### 3.1. Fibración dada por una función polinomial

En esta sección se estudia la fibración dada por un polinomio complejo  $p(x, y) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , mostrando al final que el morfismo inducido entre los grupos fundamentales de la fibra y una vecindad al rededor de un punto del conjunto de bifurcación es un epimorfismo.

Si se tiene una curva afín irreducible de grado  $d$  dada por un polinomio  $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ , el polinomio  $p(x, y)$  define un morfismo  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  por  $(x, y) \mapsto p(x, y)$ .

**Definición 3.1.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  un punto cualquiera. Decimos que  $z$  es un *punto regular* de  $F$  si existe una vecindad  $U \subset \mathbb{C}$  de  $z$  tal que  $F$  restringida a  $F^{-1}(U)$  es una *fibración localmente trivial*, a la preimagen  $F^{-1}(z)$  de cualquier punto regular se le llama *fibra genérica*. Si un punto  $w_0 \in \mathbb{C}$  no es regular diremos que es un *punto irregular* y a la preimagen  $F^{-1}(w_0)$  de un punto irregular la llamamos *fibra degenerada*. Al conjunto de puntos irregulares de una fibración lo llamaremos *conjunto de bifurcación* y lo denotamos por  $\text{Bif } F$ .

Por Thom [6] sabemos que  $F$  tiene una cantidad finita de puntos irregulares  $\text{Bif } F := \{z_1, \dots, z_n\}$ .

Es importante notar que los puntos irregulares no sólo comprenden los puntos singulares de la función. Como la función polinomial no es propia, lo que impide

usar el criterio de Ehresmann para clasificar completamente las fibras degeneradas, puede haber puntos adicionales cuyas fibras no se comportan bien en el infinito.

*Ejemplo 3.1.1.* El polinomio

$$h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad (x, y) \mapsto x^2y - x$$

no tiene puntos singulares, sin embargo la fibra sobre el 0 tiene una componente adicional y es topológicamente distinta a las demás. Esto incluso se puede ver en la gráfica real correspondiente a las fibras (imagen 3.1). Así que en este caso se tiene que  $\text{Bif } h = \{0\}$ .

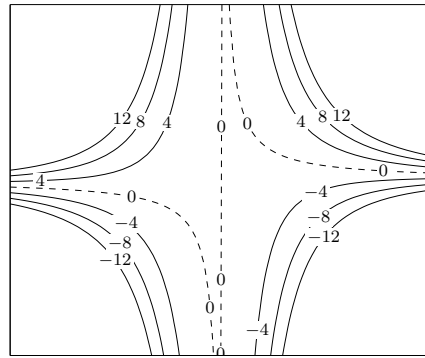


Figura 3.1: Fibras de  $x^2y - x$

*Observación 3.2.* A lo largo de este capítulo se asumirá que para todo morfismo polinomial  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  inducido por el polinomio que define una curva determinada  $C$ , la fibra  $Y := F^{-1}(z)$  sobre cualquier punto regular  $z$  es conexa.

Denotamos por  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  el plano complejo sin el origen, y por  $X := F^{-1}(\mathbb{C}^*)$ , el complemento de la curva en  $\mathbb{C}^2$ . Tomando la restricción

$$F : X \setminus F^{-1}(\text{Bif } F) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \text{Bif } F,$$

la hipótesis enunciada en la observación 3.2 implica que las fibras son irreducibles. Un resultado importante sobre la homología del complemento de una curva irreducible es el siguiente:

**Teorema 3.3.** *Sea  $C$  una curva irreducible y sea  $X$  su complemento en  $\mathbb{C}^2$ . Entonces*

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Una demostración que usa dualidad de Lefschetz se puede encontrar en [15, Capítulo 4, Teorema 1.3]. □



Para cualquier punto  $w \in \mathbb{C}$  su fibra correspondiente  $F^{-1}(w)$  se puede pensar como la curva definida por el polinomio  $\tilde{p}(x, y) := p(x, y) - w$ ; o equivalentemente, como la fibra sobre el 0 de la fibración  $\tilde{F}$  definida por  $\tilde{p}(x, y) = z$ . Más aún, para cualquier punto  $z \in \mathbb{C}$  se cumple que

$$\tilde{F}^{-1}(z) = F^{-1}(z + w).$$

Consideremos ahora un punto irregular  $z_0 \in \text{Bif } F$  y tomemos un disco  $D$  con centro en  $z_0$  y de radio  $r$  suficientemente pequeño de tal suerte que  $D$  no contiene otros puntos de bifurcación además de  $z_0$ . Sean  $D^* := D \setminus \{z_0\}$ ,  $\tilde{D} := F^{-1}(D)$  y  $\tilde{D}^* := F^{-1}(D^*)$ . Estudiaremos las propiedades locales de la fibración  $F$  al rededor del punto de bifurcación  $z_0$ . De forma más precisa, si tomamos

$$F : \tilde{D} \rightarrow D$$

denotando por  $Y$  a la fibra y por  $Y_0$  a la fibra degenerada se cumple el siguiente

**Lema 3.4.** *Sea  $Y_0 = k_1 C_1 + \dots + k_m C_m$  la fibra degenerada expresada como suma de sus componentes irreducible. Entonces  $\text{MCD}\{k_1, \dots, k_m\} = 1$ .*

*Demostración.* Sean  $\tilde{p}(x, y) := p(x, y) - z_0$  y  $\tilde{F}$  la fibración correspondiente. Entonces

$$\tilde{p}(x, y) = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}(x, y)$$

donde  $p_i(x, y)$  es el polinomio irreducible correspondiente a la curva  $C_i$ . Para probar el lema por contradicción supongamos que  $k := \text{MCD}\{k_1, \dots, k_m\} > 1$ , ésto implica que  $\tilde{p}$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\tilde{p}(x, y) = \left[ \prod_{i=1}^m p_i^{k_i/k}(x, y) \right]^k.$$

Así que para cualquier punto  $z \neq 0$ , su fibra correspondiente  $\tilde{F}^{-1}(z)$  es la unión de  $k$  curvas, cada una dada por una raíz  $k$ -ésima de  $z$ . Se sigue que la fibra y las curvas definidas por sus derivadas parciales coinciden en al menos una componente, lo que contradice nuestra elección de  $u$ .  $\square$

Nos enfocaremos ahora en el estudio de los grupos fundamentales de la fibración  $F$  restringida a  $D$ . La fibración localmente trivial  $F : \tilde{D}^* \rightarrow D^*$  implica el siguiente diagrama conmutativo



$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi(Y) & \longrightarrow & \pi(\tilde{D}^*) & \xrightarrow{F_*} & \pi(D^*) \longrightarrow 1 \\
 & & \searrow i_* & & \downarrow i_* & & \\
 & & & & \pi(\tilde{D}) & & 
 \end{array}$$

Donde el renglón superior es una sucesión exacta corta. Además,  $\pi(D^*) \cong \mathbb{Z}$  por lo que podemos tomar un generador  $t$  de  $\mathbb{Z}$  y un elemento  $[\gamma] \in \pi(\tilde{D}^*)$  tal que  $F_*([\gamma]) = t$  para definir un homomorfismo  $s : \pi(D^*) \rightarrow \pi(\tilde{D}^*)$  por  $t^n \mapsto [\gamma]^n$ . Por lo tanto, por el Teorema 1.15, se tiene que

$$\pi(\tilde{D}^*) \cong \pi(Y) \times \pi(D^*).$$

Además se cumple el siguiente resultado.

**Lema 3.5.** *El morfismo de grupos*

$$i_* : \pi(\tilde{D}^*) \rightarrow \pi(\tilde{D}),$$

*inducido por la inclusión, es un epimorfismo.*

*Demostración.* Para la demostración se usará el teorema 1.4, así que hay que verificar que se cumplen las condiciones de dicho enunciado.

Como se mencionó en la sección anterior, la curva  $Y$  es la preimagen de un cerrado bajo una aplicación continua  $F$ , así que a su vez  $Y$  es un subconjunto cerrado de  $\tilde{D}$ .

Se construirá ahora una cubierta abierta de  $Y$ , donde los abiertos que cubren a la fibra degenerada son simplemente conexos. Sean  $w_1, \dots, w_n$  los puntos singulares de la fibra degenerada  $Y$ , tomemos  $n$  bolas abiertas  $B_k \subset \tilde{D}$  cada una con centro en  $w_k, k = 1, \dots, n$  y radio suficientemente pequeño. Consideremos además una colección de bolas abiertas  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ , contenidas en  $\tilde{D}$  que cubren a  $Y \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$ . Tenemos que:

- I  $Y \subset \bigcup B_k \cup \bigcup U_\alpha$ .
- II  $B_k \cap \tilde{D}^*$  es arco-conexo para toda  $k$ . Esto porque, de acuerdo con resultados de [5] y [15, pág. 23], todo  $U_k \cap Y$  es isomorfo a un cono  $C(L)$ , donde  $L$  es un nudo o un enlace. Por lo tanto su complemento en cada bola es homeomorfo a  $(S^3 \setminus L) \times (0, 1)$ , que por ser un producto de espacios conexos es conexo.
- III  $U_\alpha \cap \tilde{D}^*$  es arco-conexo para toda  $\alpha \in \Omega$ . En este caso cada intersección es homeomorfa al espacio producto  $B^3 \times S^1$ , donde  $B^3$  es la bola abierta de dimensión 3. De nuevo por ser un producto de espacios arco-conexos la intersección es de nuevo un espacio arco-conexo.



Se cumplen entonces las condiciones del teorema 1.4. La conclusión es inmediata.  $\square$

Tenemos finalmente el siguiente teorema en relación con el morfismo de grupos inducido por la inclusión de la fibra en la preimagen del disco  $Y \hookrightarrow \tilde{D}$ .

**Teorema 3.6.** *Tomemos  $z_0 \in \text{Bif } F, D, \tilde{D}$  y  $Y$  como antes; entonces el homomorfismo*

$$i_* : \pi(Y) \rightarrow \pi(\tilde{D})$$

*inducido por la inclusión de la fibra en el espacio total, es un epimorfismo.*

*Demostración.* Sabemos que  $\pi(\tilde{D}^*) = \pi(Y) \rtimes \pi(D^*)$  y  $\pi(D^*) \cong \mathbb{Z}$ . Elegimos un generador  $t \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\pi(\tilde{D}^*)$  es generado por los elementos de  $\pi(Y)$  y un elemento  $[\gamma]$  el cuál cumple que  $F_*([\gamma]) = t$ . Afirmamos que  $i_*([\gamma]) = 1_{\pi(\tilde{D})}$ .

Para probar esta afirmación mostraremos que si se toma un elemento  $[\gamma] \in \pi(\tilde{D}^*)$  cuya imagen es un generador de  $\mathbb{Z}$  entonces  $\gamma$  es nulhomotópico en  $\tilde{D}$ .

Sea  $Y_0 = k_1 C_1 + \dots + k_m C_m$  la fibra degenerada expresada como suma de sus divisores efectivos. Sean  $\tilde{p}(x, y) := p(x, y) - z_0$  y  $\tilde{F}$  la fibración correspondiente. Entonces

$$\tilde{p}(x, y) = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}(x, y) \quad (3.1)$$

donde  $p_i(x, y)$  es el polinomio irreducible correspondiente a la curva  $C_i$ . Tomamos lazos  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  cada uno al rededor de una componente distinta  $C_i$  de la siguiente manera:

Sea  $z$  un punto suave de la componente  $C_{i_1}$ ,  $p_{i_1}(x, y)$  define una submersión localmente al rededor de  $z$ , así que podemos tomar una carta y definir un difeomorfismo de un disco en  $\mathbb{C}^2$  en un disco «meridional»  $D_z$  contenido en una vecindad de  $z$ , con centro en  $z$  y que intersecta transversalmente a la curva  $C_{i_1}$  en  $z$ . Luego tomamos un segmento disjunto de  $Y_0$  que une a la frontera del disco  $D_z$  con  $b$ , el punto base de  $\pi(\tilde{D}^*)$ , como se ilustra en la Figura 3.2. Llamamos  $\gamma_{i_1}$  a éste lazo, nótese que  $[\gamma_{i_1}] \in \pi(\tilde{D}^*)$ .

Tenemos ahora dos casos:

- *caso 1* Si se cumple que en la ecuación 3.1 alguno de los exponentes  $k_i = 1$  entonces  $F_*([\gamma_i]) = t$ , y por lo tanto, como por construcción  $\gamma_i$  es nulhomotópico en  $\tilde{D}$ , se sigue la afirmación.
- *caso 2* Si  $k_i \neq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , en la ecuación 3.1; entonces tenemos que

$$\begin{aligned} F_*([\gamma_1]) &= k_1 t \\ &\vdots \\ F_*([\gamma_m]) &= k_m t \end{aligned}$$



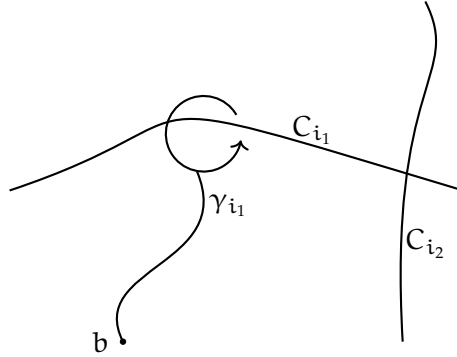


Figura 3.2: «Lazo meridional»

Por el Lema 3.4 sabemos que  $k_1, \dots, k_m$  son coprimos, así que como consecuencia de la identidad de Bezout<sup>1</sup> existen enteros  $a_1, \dots, a_m$  tales que

$$a_1 k_1 t + \dots + a_m k_m t = 1. \tag{3.2}$$

Sea

$$\gamma = \gamma_1^{a_1} \dots \gamma_m^{a_m}$$

El lazo  $\gamma$  es nulhomotópico por ser la multiplicación de lazos nulhomotópicos, además por la identidad 3.2 se tiene que  $F_*([\gamma]) = 1$ , que es un generador de  $\mathbb{Z}$ . Ésto demuestra la afirmación.

□

El teorema anterior es, en cierto sentido, análogo al teorema de Zariski-Van Kampen. Se puede inclusive decir un poco más. A saber, que se cumple la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow N \rightarrow \pi(Y) \rightarrow \pi(\tilde{D}) \rightarrow 1,$$

donde  $N$  es la cerradura normal de las clases de conjugación de «lazos meridionales» al rededor de cada componente.

La demostración escapa del objetivo del presente trabajo, pero se puede encontrar en [15], [25] y [24].

### 3.2. El conmutador del grupo fundamental del complemento

En esta sección se presenta el resultado principal del trabajo, se analiza con detenimiento la fibrición dada por la función polinomial definida en la sección

<sup>1</sup> Identidad de Bezout: Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $d := \text{MCD}\{a, b\} \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tales que  $\alpha a + \beta b = d$



anterior. Se verá cómo dicha fibración proporciona información sobre el subgrupo conmutador del grupo fundamental del complemento de la curva. La notación será la misma que en la sección previa.

Sea  $R$  el anillo comprendido entre dos discos concéntricos  $D_0$  y  $D_\infty$  centrados en el origen de radios  $r_0 < \min |z_i|$  y  $r_\infty > \max |z_i|$  respectivamente, con  $z_i \in \text{Bif } F$ ; tal como se ilustra en la Figura 3.3. En el interior de  $R$  están contenidos todos los puntos irregulares de  $F$ . Éste anillo es además un retracto fuerte por deformación

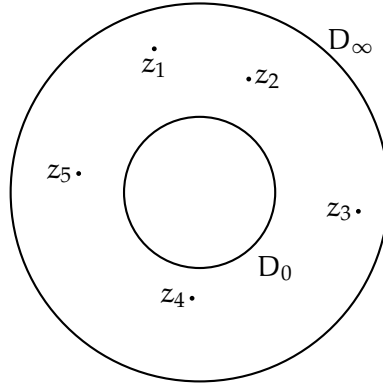


Figura 3.3: Anillo en cuyo interior se encuentran los puntos irregulares

de  $\mathbb{C}^*$ , donde la deformación está dada por

$$r(t) = \begin{cases} z(1-t) - \frac{z}{|z|} r_\infty t & \text{si } |z| > r_\infty \\ z & \text{si } z \in R \\ z(1-t) - \frac{z}{|z|} r_0 t & \text{si } |z| < r_0. \end{cases}$$

por lo que por el Teorema 1.16 se tiene que

$$\pi(X) \cong \pi(F^{-1}(R))$$

Tomemos ahora un conjunto de discos disjuntos  $D_i \subset R$  cada uno con centro en un punto irregular  $z_i$ , tomemos además un conjunto de arcos disjuntos  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ , donde cada  $\gamma_i$  conecta los discos  $D_i, D_{i+1}$  y  $\gamma_n$  que va de  $D_n$  a  $D_0$ . Denotamos por  $T$  al «collar»

$$T := \left( \bigcup_{i=1}^n \gamma_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^n D_i \right).$$

Éste collar es una curva cerrada simple que delimita una componente simplemente conexa acotada que contiene al origen, tal como se ilustra en la imagen 3.4. Es un retracto fuerte por deformación del anillo  $R$ , por lo que  $T$  es homotópicamente equivalente a  $R$ .



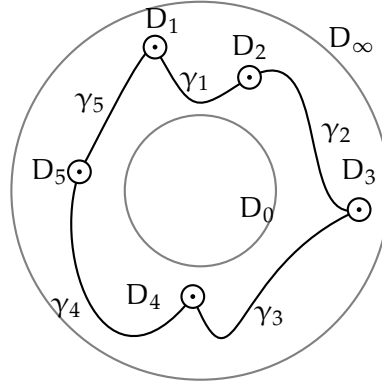


Figura 3.4: Ilustración del «collar» T

Ahora bien, como el collar T es un retracto fuerte por deformación del anillo R, de nuevo por el Teorema 1.16 se sigue que  $\pi(F^{-1}(T))$  y  $\pi(X)$  son isomorfos. Por lo que para entender las propiedades homotópicas del complemento de la curva basta con estudiar la preimagen del collar T.

Sea

$$W := F^{-1}(T).$$

y sean

$$p_W : \tilde{W} \rightarrow W, \quad p_T : \tilde{T} \rightarrow T$$

una cubriente cíclica infinita de W y el cubriente universal de T, respectivamente.  $\tilde{T}$  consta de una cantidad infinita de discos unidos por arcos. Enumeramos estos discos y tomamos puntos en la frontera de cada uno, como se muestra en la Figura 3.5, de tal suerte que

$$p_T(B_r) = D_j \text{ y } p_T(y_r) = x_j \in \partial D_j \text{ con } j = (|r| \text{ mód } n) + 1$$

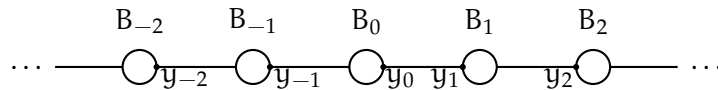


Figura 3.5: Cubriente universal de T

Análogamente, denotamos por  $\tilde{B}_j$  los subconjuntos de  $\tilde{W}$  tales que

$$p_W(\tilde{B}_r) = \tilde{D}_j, \quad j = (|r| \text{ mód } n) + 1.$$

Sea  $\tilde{F} : \tilde{W} \rightarrow \tilde{T}$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama



$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{T} \\ p_W \downarrow & & \downarrow p_T \\ W & \xrightarrow{F} & T \end{array}$$

y que es compatible con las enumeraciones elegidas; i.e. que  $\tilde{F}(\tilde{B}_j) = B_j$ . Ésta función define una fibración localmente trivial fuera de los centros de cada disco  $B_j$  y, más aún, la fibra genérica es homeomorfa a la fibra genérica de la fibración  $F$ .

**Teorema 3.7.** *Sea  $G := [\pi(X), \pi(X)]$ , el subgrupo conmutador del grupo fundamental del complemento de la curva. El morfismo de grupos*

$$i_* : \pi(Y) \rightarrow G,$$

*inducido por la inclusión de la fibra genérica en el complemento de la curva, es un epimorfismo.*

*Demostración.* Por el Teorema 3.3 sabemos que  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ , y como el primer grupo de homología  $H_1(X)$  es la abelianización de  $\pi(X)$ , entonces

$$\frac{\pi(X)}{G} \cong \mathbb{Z}.$$

Por el Teorema 1.7 se sigue que

$$\pi(\tilde{W}) \cong G.$$

Así que si se toma la fibra genérica  $Y$  y el homomorfismo inducido por la inclusión de la fibra en la cubriente  $\tilde{W}$

$$i_* : \pi(Y) \rightarrow \pi(\tilde{W}),$$

basta probar que  $i_*$  es un epimorfismo.



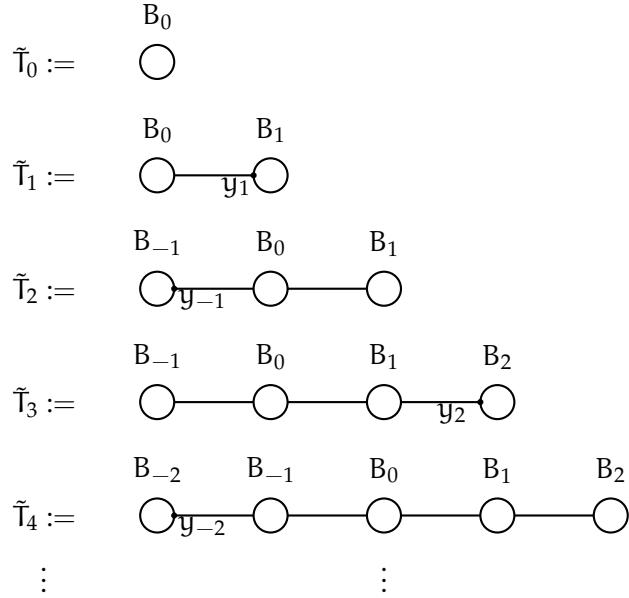


Figura 3.6: Subespacios de  $\tilde{T}$ .

Construimos un conjunto  $\{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots\}$  de subespacios de  $\tilde{T}$  como se muestra en la Figura 3.6. Tomamos además el conjunto de subespacios de  $\tilde{W}$  correspondientes a las preimágenes de los  $\tilde{T}_j$

$$\{\tilde{W}_j := \tilde{F}^{-1}(\tilde{T}_j), \quad j = 1, 2, \dots\}.$$

Observamos que

- I Cada arco que une a dos discos  $B_j, B_{j+1}$  es retraíble a un punto.
- II Para cualesquiera dos puntos  $y_{j_1}, y_{j_2}$  se cumple que

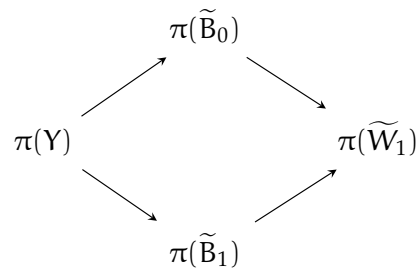
$$\pi(\tilde{F}^{-1}(y_{j_1})) \cong \pi(\tilde{F}^{-1}(y_{j_2}))$$

por el Teorema 1.13 Denotaremos por  $\pi(Y)$  a éste grupo.

- III Cada homomorfismo  $\pi(Y) \rightarrow \pi(\tilde{B}_j), j \in \mathbb{Z}$  es un epimorfismo. Por la forma en que se construyó la cubierta, cada  $\tilde{B}_j$  es homeomorfo un  $\tilde{D}_k \subset W$  y por el Teorema 3.6 tenemos el epimorfismo.
- IV Como  $\tilde{F}$  es una fibriación localmente trivial salvo en los centros de cada  $B_j$ , existe un disco abierto  $U$  suficientemente pequeño tal que  $\pi(\tilde{F}^{-1}(U)) \cong \pi(Y)$ .



Con esto en mente, si queremos calcular  $\pi(\widetilde{W}_1)$  podemos usar el Teorema de Seifert-van Kampen para «pegar» las piezas de  $\widetilde{W}_1$  en una vecindad abierta al rededor de la fibra  $\widetilde{F}^{-1}(y_1)$ . Se obtiene el siguiente diagrama:

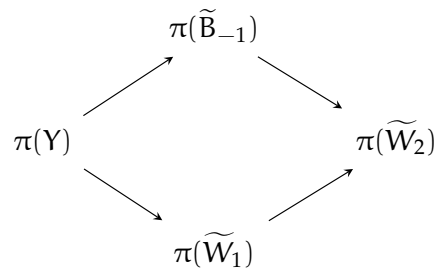


Por el Corolario 1.2, como  $\pi(Y) \rightarrow \pi(\widetilde{B}_0)$  es un epimorfismo, entonces  $\pi(\widetilde{B}_1) \rightarrow \pi(\widetilde{W}_1)$  también lo es. Más aún, como  $\pi(Y) \rightarrow \pi(\widetilde{B}_1)$  también es un epimorfismo, se sigue que la composición

$$\pi(Y) \rightarrow \pi(\widetilde{B}_1) \rightarrow \pi(\widetilde{W}_1)$$

es sobreyectiva.

Si hacemos el proceso análogo ahora para calcular  $\pi(\widetilde{W}_2)$  tenemos el siguiente diagrama,

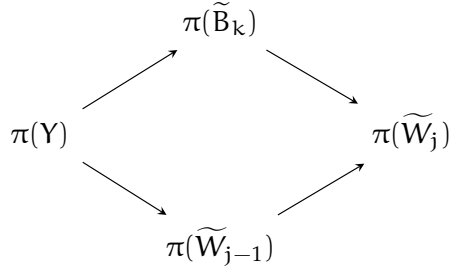


donde el epimorfismo  $\pi(Y) \rightarrow \pi(\widetilde{W}_1)$  es una consecuencia del paso anterior; lo que nos da ahora un epimorfismo

$$\pi(Y) \rightarrow \pi(\widetilde{W}_2).$$

En general se tiene el siguiente diagrama





con  $k = -1^{j+1} \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$  y  $j = 1, 2, \dots$ . Por lo tanto, para cualquier subespacio  $\widetilde{W}_j$ , el homomorfismo  $\pi(Y) \rightarrow \pi(\widetilde{W}_j)$  es sobreyectivo. Está implícito en el uso de Seifert-Van Kampen que en cada paso el punto base se debe tomar sobre la fibra  $\widetilde{F}^{-1}(y_k)$ . Denotaremos el punto base en cada paso por  $\widetilde{y}_k$ .

Resta probar que el epimorfismo del grupo fundamental de la fibra sobre el grupo fundamental de cada  $\widetilde{W}_i$  se extiende a un epimorfismo sobre todo el espacio  $\widetilde{W}$ .

Sea  $\widetilde{y}_0$  un punto fijo en la fibra  $\widetilde{F}^{-1}(y_0)$ , éste será el punto base de  $\pi(\widetilde{W})$ . Tomemos un lazo  $\gamma$  en  $\widetilde{W}$ ; éste lazo está contenido en algún subespacio  $\widetilde{W}_j$ , como  $\widetilde{W}_i$  es arco conexo podemos encontrar un arco  $\alpha$  que conecta a  $\widetilde{y}_k$ , el punto base de  $\pi(\widetilde{W}_i)$ , con  $\widetilde{y}_0$ . Los lazos  $\gamma$  y  $\gamma' := \alpha\gamma\alpha^{-1}$  son homotópicos y además existe  $[\beta] \in \pi(\widetilde{F}^{-1}(y_k))$  tal que  $[\beta] \mapsto [\gamma']$ . Por lo tanto se cumple el enunciado del teorema.  $\square$

El siguiente teorema es una consecuencia casi inmediata y representa el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 3.8.** *El grupo fundamental del complemento de una curva afín C es finitamente generado.*

*Demostración.* El Teorema 2.14 afirma que el grupo fundamental de una curva afín C es finitamente generado, además, por el teorema anterior se tiene que el morfismo entre grupos fundamentales inducido por la inclusión  $i_* : \pi(C) \rightarrow \pi(X)$  de una fibra genérica en el complemento de la curva es un epimorfismo. Las fibras genéricas son curvas irreducibles, por la observación 3.2. Como un morfismo de grupos queda completamente determinado por sus valores en los generadores, el conjunto de generadores de  $\pi(X)$  debe ser finito.  $\square$

En [26] González Acuña, Gordon y Simon probaron que si el subgrupo conmutador de un grupo es finitamente generado (o presentado) entonces dicho grupo no es algorítmicamente reconocible. Así que, en general, es imposible decidir si un grupo dado es el grupo fundamental del complemento de una curva.







---

# A LEMA DE ESCISIÓN PARA UNA SUCESIÓN EXACTA CORTA

---

En este apéndice se presenta un resultado elemental sobre una sucesión exacta corta de grupos. El contenido está basado en [27] con adecuaciones en la notación y más detalle en los cálculos.

Para cualquier acción de un grupo sobre otro existe una forma natural de definir una operación en el producto cartesiano de ambos que lo convierte en un grupo, denominado producto semidirecto.

Supongamos que se tiene un grupo  $H$  actuando sobre un grupo  $N$  por la derecha

$$n \mapsto nh \quad n \in N, h \in H.$$

Podemos definir una operación en el producto  $N \times H$  por

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 n_2 h_1^{-1}, h_2 h_1).$$

Con esta operación el conjunto  $N \times H$  se convierte en un grupo, el cuál se conoce como *producto semidirecto* de  $N$  y  $H$  y se denota por  $N \rtimes H$ . A veces es necesario especificar la acción, en cuyo caso se pone como subíndice del operador  $\rtimes$ .

La inclusión  $i : N \rightarrow N \rtimes H, n \mapsto (n, e_H)$  define un morfismo cuya imagen es normal. A su vez, la proyección  $\rho : N \rtimes H \rightarrow H$  dada por  $(n, h) \mapsto h$  es un epimorfismo cuyo kernel es  $N$ , así que  $H$  es isomorfo a

$$\frac{(N \rtimes H)}{N}.$$

El morfismo definido por la inclusión  $s : H \rightarrow N \rtimes H$  tal que  $h \mapsto (e_N, h)$  es de hecho un monomorfismo y cumple que  $\rho \circ s = \text{id}_H$ . Tenemos una situación como la que se ilustra en el siguiente diagrama

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes H \xrightarrow{\rho} H \rightarrow 1.$$

$\xleftarrow{s}$

Así que es natural preguntarse si el recíproco se cumple. A saber, si dada sucesión exacta corta se puede encontrar una acción de tal suerte que uno de los grupos sea isomorfo al producto semidirecto derivado de esta acción. En seguida se darán algunas definiciones y se probará que efectivamente esto es posible.

A una sucesión de homomorfismos de grupos

$$N \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\sigma} H$$

de le denomina *sucesión exacta* en  $G$  si  $\text{Im}\phi = \text{Ker}\sigma$ . Si se tiene una sucesión

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\sigma} H \rightarrow 1$$

la cuál es exacta en  $H$ ,  $G$  y  $K$ , ésta se denomina *sucesión exacta corta*. Nótese que la definición anterior implica que  $\phi$  es un monomorfismo y que  $\sigma$  es un epimorfismo.

**Teorema A.1** (Lema de separación). *Sea*

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\sigma} H \rightarrow 1$$

*una sucesión exacta corta. Las siguientes son equivalentes:*

- I *Existe un homomorfismo  $s : H \rightarrow G$  tal que  $\sigma(s(h)) = h, \forall h \in H$ .*
- II *Existe una acción  $\phi : N \times H \rightarrow N$  tal que el producto semidirecto  $N \rtimes_{\phi} H$  es isomorfo a  $G$ .*

*Demostración.* Para mostrar que el primer enunciado implica el segundo, sean  $h \in H$  y  $n \in N$ , entonces  $s(h)\phi(n)s(h^{-1}) \in \text{Ker}\sigma$ , ya que

$$\begin{aligned} \sigma[s(h)\phi(n)s(h^{-1})] &= \sigma[s(h)]\sigma[\phi(n)]\sigma[s(h^{-1})] \\ &= he_H h^{-1} = e_H. \end{aligned}$$

Como  $\text{Ker}\sigma = \text{Im}\phi$ , existe  $n' \in N$  tal que  $\phi[n'] = s(h)\phi(n)s(h^{-1})$ ; como  $\phi$  es inyectiva ésta  $n'$  es única. Así que podemos definir una acción (derecha)  $\varphi : (N \times H) \rightarrow N$  por

$$(n, h) \mapsto \phi^{-1}(s(h)\phi(n)s(h^{-1}))$$

donde  $\phi^{-1}$  denota el morfismo que manda a cada elemento de  $\text{Ker}\sigma$  en su preimagen en  $N$ .

Veamos que  $\varphi$  es realmente una acción

(a)

$$\begin{aligned} \varphi(n, e_H) &= \phi^{-1}(s(e_H)\phi(n)s(e_H^{-1})) \\ &= \phi^{-1}(e_G \phi(n) e_G) \\ &= \phi^{-1}(\phi(n)) \\ &= n \end{aligned}$$



(b)

$$\begin{aligned}
 \varphi(\varphi(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}_1), \mathfrak{h}_2) &= \phi^{-1}(s(\mathfrak{h}_2)\phi(\varphi(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}_1))s(\mathfrak{h}_2^{-1})) \\
 &= \phi^{-1}(s(\mathfrak{h}_2)\phi(\phi^{-1}((s(\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n})s(\mathfrak{h}_1^{-1})))s(\mathfrak{h}_2^{-1}))) \\
 &= \phi^{-1}(s(\mathfrak{h}_2)s(\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n})s(\mathfrak{h}_1^{-1})s(\mathfrak{h}_2^{-1})) \\
 &= \phi^{-1}(s(\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n})s((\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1)^{-1})) \\
 &= \varphi(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1)
 \end{aligned}$$

Efectivamente,  $\varphi$  es una acción, así que podemos definir el producto semidirecto  $N \rtimes H$ .

Nos resta probar que  $N \rtimes H$  y  $G$  son isomorfos. Sea  $\alpha : N \rtimes H \rightarrow G$  definida por  $(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) \mapsto \phi(\mathfrak{n})s(\mathfrak{h})$ . Para ver que es un isomorfismo mostraremos primero que en verdad es un morfismo de grupos, luego que es un monomorfismo y finalmente que es un epimorfismo; con lo que concluirá la demostración de este teorema.

(a) Mostrar que  $\alpha$  es un morfismo.

$$\begin{aligned}
 \alpha((\mathfrak{n}_1, \mathfrak{h}_1)(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{h}_2)) &= \alpha(\mathfrak{n}_1\varphi(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{h}_1^{-1}), \mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2) \\
 &= \phi(\mathfrak{n}_1\phi^{-1}(s(\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n}_2)s(\mathfrak{h}_1^{-1})))s(\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2) \\
 &= \phi(\mathfrak{n}_1)\phi(\phi^{-1}(s(\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n}_2)s(\mathfrak{h}_1^{-1})))s(\mathfrak{h}_1)s(\mathfrak{h}_2) \\
 &= \phi(\mathfrak{n}_1)s(\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n}_2)s(\mathfrak{h}_1^{-1})s(\mathfrak{h}_1)s(\mathfrak{h}_2) \\
 &= \phi(\mathfrak{n}_1)s(\mathfrak{h}_1)\phi(\mathfrak{n}_2)s(\mathfrak{h}_2) \\
 &= \alpha(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{h}_1)\alpha(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{h}_2).
 \end{aligned}$$

(b) Ahora vamos a mostrar que  $\alpha$  es inyectiva probando que el kernel consta sólo del elemento identidad. Si  $\alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = e_G$  entonces.

$$\phi(\mathfrak{n})s(\mathfrak{h}) = e_G \tag{A.1}$$

Aplicando  $\sigma$  a ambos lados de la igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
 \sigma(\phi(\mathfrak{n})s(\mathfrak{h})) &= \sigma(e_G) \\
 e_H\mathfrak{h} &= e_H \\
 \mathfrak{h} &= e_H.
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathfrak{n})s(e_H) &= e_G \\
 \phi(\mathfrak{n})e_G &= e_G \\
 \phi(\mathfrak{n}) &= e_G
 \end{aligned}$$

y como  $\phi$  es inyectiva  $\mathfrak{n} = e_H$ . Por lo tanto  $(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = (e_N, e_H)$ .



---

(c) Sean  $g \in G$  y  $h := \sigma(g)$ . Para que  $\alpha$  sea sobre debe existir  $n \in N$  tal que  $\phi(n)s(h) = g$ . Ésta condición es equivalente a la existencia de un  $n$  que cumple que

$$\phi(n) = gs(h^{-1}).$$

Para probar esto basta con verificar que  $gs(h^{-1}) \in \text{Ker}\sigma$ . En efecto

$$\begin{aligned}\sigma(gs(h^{-1})) &= \sigma(gs(\sigma(g)^{-1})) \\ &= \sigma(g)\sigma(s(\sigma(g)^{-1})) \\ &= \sigma(g)\sigma(g)^{-1} \\ &= e_H\end{aligned}$$

□







---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] E. R. V. Kampen, "On the Fundamental Group of an Algebraic Curve", *Amer. J. Math.*, vol. 55, n.º 1-4, págs. 255-260, 1933, ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2371128. dirección: <http://dx.doi.org/10.2307/2371128>.
- [2] O. Zariski, "On the Poincaré Group of Rational Plane Curves", *Amer. J. Math.*, vol. 58, n.º 3, págs. 607-619, 1936, ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2370979. dirección: <http://dx.doi.org/10.2307/2370979>.
- [3] —, "A theorem on the Poincaré group of an algebraic hypersurface", *Ann. of Math. (2)*, vol. 38, n.º 1, págs. 131-141, 1937, ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1968515. dirección: <http://dx.doi.org/10.2307/1968515>.
- [4] R. H. Fox, "Covering spaces with singularities", en *A symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957, págs. 243-257.
- [5] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, ép. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968, págs. iii+122.
- [6] R. Thom, "Ensembles et morphismes stratifiés", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, págs. 240-284, 1969, ISSN: 0002-9904.
- [7] M. Oka, "The monodromy of a curve with ordinary double points", *Invent. Math.*, vol. 27, págs. 157-164, 1974, ISSN: 0020-9910.
- [8] R. H. Crowell y R. H. Fox, *Introduction to knot theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, págs. x+182, Reprint of the 1963 original, Graduate Texts in Mathematics, No. 57.
- [9] W. S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, págs. xxi+261, Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56, ISBN: 0-387-90271-6.
- [10] H. Tverberg, "A proof of the Jordan curve theorem", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 12, n.º 1, págs. 34-38, 1980, ISSN: 0024-6093. DOI: 10.1112/blms/12.1.34. dirección: <http://dx.doi.org/10.1112/blms/12.1.34>.
- [11] E. H. Spanier, *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981, págs. xvi+528, Corrected reprint, ISBN: 0-387-90646-0.

- [12] E. Brieskorn y H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, ép. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986, págs. x+721, Translated from the German original by John Stillwell, [2012] reprint of the 1986 edition, ISBN: 978-3-0348-0492-9. DOI: 10.1007/978-3-0348-5097-1. dirección: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-5097-1>.
- [13] J. J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, ép. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988, vol. 119, págs. xiv+433, ISBN: 0-387-96678-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-4576-6. dirección: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4576-6>.
- [14] T. Fujita, "Ample vector bundles of small  $c_1$ -sectional genera", *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 29, n.º 1, págs. 1-16, 1989, ISSN: 0023-608X.
- [15] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces*, ép. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992, págs. xvi+263, ISBN: 0-387-97709-0. DOI: 10.1007/978-1-4612-4404-2. dirección: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4404-2>.
- [16] F. Kirwan, *Complex algebraic curves*, ép. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, vol. 23, págs. viii+264, ISBN: 0-521-41251-X; 0-521-42353-8. DOI: 10.1017/CB09780511623929. dirección: <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511623929>.
- [17] C. Thomassen, "The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces", *Amer. Math. Monthly*, vol. 99, n.º 2, págs. 116-130, 1992, ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2324180. dirección: <http://dx.doi.org/10.2307/2324180>.
- [18] V. S. Kulikov, "Alexander polynomials of plane algebraic curve", *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 57, n.º 1, págs. 76-101, 1993, ISSN: 0373-2436. DOI: 10.1070/IM1994v042n01ABEH001534. dirección: <http://dx.doi.org/10.1070/IM1994v042n01ABEH001534>.
- [19] W. Fulton, *Algebraic topology*, ép. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, vol. 153, págs. xviii+430, A first course, ISBN: 0-387-94326-9; 0-387-94327-7. DOI: 10.1007/978-1-4612-4180-5. dirección: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4180-5>.
- [20] G. Fischer, *Plane algebraic curves*, ép. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, vol. 15, págs. xvi+229, Translated from the 1994 German original by Leslie Kay, ISBN: 0-8218-2122-9. DOI: 10.1090/stml/015. dirección: <http://dx.doi.org/10.1090/stml/015>.
- [21] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, págs. xii+544, ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.



- [22] W. Magnus, A. Karrass y D. Solitar, *Combinatorial group theory*, second. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, págs. xii+444, Presentations of groups in terms of generators and relations, ISBN: 0-486-43830-9.
- [23] E. Kunz, *Introduction to plane algebraic curves*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005, págs. xiv+293, Translated from the 1991 German edition by Richard G. Belshoff, ISBN: 978-0-8176-4381-2; 0-8176-4381-8.
- [24] M. Oka, "A survey on Alexander polynomials of plane curves", en *Singularités Franco-Japonaises*, ép. Sémin. Congr. Vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 2005, págs. 209-232.
- [25] I. Chimada, "Lectures on zariski van kampen theorem", Lecture notes, 2007, dirección: <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~shimada/LectureNotes/LNZV.pdf>.
- [26] F. González-Acuña, C. M. Gordon y J. Simon, "Unsolvable problems about higher-dimensional knots and related groups", *Enseign. Math. (2)*, vol. 56, n.º 1-2, págs. 143-171, 2010, ISSN: 0013-8584. DOI: 10.4171/LEM/56-1-5. dirección: <http://dx.doi.org/10.4171/LEM/56-1-5>.
- [27] K. Conrad, "Splitting of short exact sequences for groups", Unpublished notes, dirección: <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/splittinggp.pdf>.





