



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MEXICO**
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN
EN ESTADÍSTICA APLICADA

DINÁMICA EVOLUTIVA Y ONDAS VIAJERAS

TESINA QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALEJANDRO SIERRA CONDE

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. PABLO PADILLA LONGORIA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS

MÉXICO, CDMX. 20 DE ABRIL DEL 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DINÁMICA EVOLUTIVA Y ONDAS VIAJERAS

Alejandro Sierra Conde

Índice

1. Introducción	2
1.1. Reproducción	2
1.2. Selección	5
2. Poblaciones finitas	6
2.1. Deriva Neutral	6
2.2. Procesos de nacimiento/muerte	7
2.3. Deriva aleatoria y selección constante	9
2.4. Juegos en poblaciones finitas	10
3. La ecuación F-KPP	12
3.1. Desplazamiento de individuos	12
4. Integración de Itô	15
4.1. Integral de Itô como variable aleatoria	16
4.2. Integral de Itô como proceso estocástico	19
5. Localización y la Integral de Itô	21
5.1. Integral de Itô en L^2_{LOC}	21
5.2. Extensión en L^2_{LOC}	23
5.2.1. Consistencia, convergencia y continuidad	23
5.2.2. Independencia de la localización	25
5.3. Martingalas locales	25
6. Fórmula de representación de Feynman-Kac	27
6.1. Fórmula de Itô	27
6.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	28
6.3. Movimiento Browniano aniquilado	37
6.4. Representación de Feynman-Kac	38
7. Ondas viajeras para la ecuación F-KPP	39
7.1. Asintótica de ondas viajeras con velocidad $c \geq \sqrt{2r}$	40
7.2. Martingalas Aditivas	46
7.3. Unicidad de ondas viajeras	47
Referencias	59

1. Introducción

Existe una conexión profunda entre la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y los procesos estocásticos, una relación recíproca que proporciona el entendimiento de ciertos problemas en la biología matemática. En particular presentamos un ejemplo de esta relación; la ecuación F-KPP y la construcción de soluciones del tipo onda viajera por medio de martingalas.

Las primeras tres secciones tratan sobre la dinámica de poblaciones y el papel que juega la adecuación biológica de un grupo de individuos junto con el proceso de selección y deriva aleatoria, de acuerdo al punto de vista de [6].

El contenido de la quinta sección es el planteamiento de la ecuación F-KPP de acuerdo a [4],[7] y [2], donde se toma en cuenta el desplazamiento de individuos y en consecuencia se obtiene la ecuación de reacción-difusión planteada por Fisher [2] y estudiada por Kolmogorov, Petrowski y Piscounov [4].

En las secciones sexta y séptima se analiza la integral de Itô para entender como se construyen martingalas a partir de la integral estocástica y el concepto de localización, en esta parte se hace un esfuerzo técnico que proporciona directamente martingalas con las propiedades de convergencia deseadas para nuestro objetivo central, aquí seguimos la construcción de la integral de Itô de acuerdo a [3].

En la octava sección se da una construcción de la representación de Feynman-Kac usando el cálculo estocástico de Itô, ésta parte es clave para indagar sobre la existencia y las propiedades asintóticas de las ondas viajeras a tratarse en la última sección.

Por último, con las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores se da de acuerdo a [8] y [7] la existencia de ondas viajeras para velocidades mayores que la velocidad crítica y un análisis asintótico de este mismo caso junto con el crítico.

Se incluye un apéndice de dos secciones en donde se enuncian propiedades usadas del movimiento browniano y convergencia de martingalas, basándonos en [1]. Además, realizamos algunas simulaciones en Scilab 5.5.2 cuyo código está incluido al final del apéndice B, las gráficas que se encuentran en el cuerpo del texto fueron hechas en GeoGebra.

1.1. Reproducción

Imaginemos una bacteria en un ambiente que contiene todos los nutrientes requeridos para su crecimiento. En este lugar la bacteria y sus descendientes se dividen cada 20 minutos, después de este lapso de tiempo la bacteria ha producido 2 células hijas, después de 40 minutos hay 4 nietas y después de una hora existen 8 bisnietas. Después de t generaciones se tienen 2^t células y la expansión puede ser descrita por la relación de recurrencia

$$p_{t+1} = 2p_t. \tag{1}$$

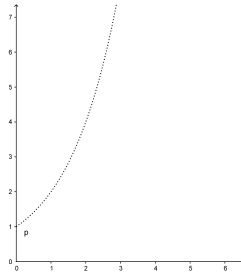


Figura 1: $p(t) = 2^t$

Aquí p_t es el número de células al tiempo t . Si se comienza con una cantidad de células p_0 , la solución a la ecuación (1) puede ser escrita como $p_t = p_0 2^t$. (Figura 1)

También podemos representar esta dinámica de crecimiento exponencial con una ecuación diferencial que mide el tiempo como una cantidad continua. Sea $p(t)$ la abundancia de las células al tiempo t , suponga que una sola célula se divide de acuerdo a una tasa a , más aún, supongamos que el tiempo para la división celular sigue una distribución exponencial con media $1/a$. Escribimos la ecuación diferencial

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = ap. \quad (2)$$

Si la abundancia de células al tiempo 0 está dada por p_0 , la solución a la ecuación (2) es $p(t) = p(0) e^{at}$. Midiendo el tiempo en unidades de días, una tasa $a = 72$ significa que el tiempo que una célula requiere en promedio para dividirse es de 20 minutos; esto es, existen 72 divisiones celulares en un día. Después de tres días se tienen e^{216} células, un número gigantesco.

Hasta ahora hemos ignorado la posible muerte de las células, supongamos que éstas mueren a una tasa d ; es decir, las células tienen una vida esperada distribuida de forma exponencial con media $1/d$. La dinámica que rige su crecimiento puede ser escrita como

$$\dot{p} = (a - d)p. \quad (3)$$

La tasa efectiva de crecimiento es $a - d$, si $a < d$ entonces la población convergerá a cero, caso contrario crecerá indefinidamente.

Hemos supuesto que la cantidad de recursos es ilimitada y la natalidad junto con la mortalidad no se ven afectadas por la ausencia de nutrientes, sin embargo, es razonable suponer que existe una cantidad de recursos r que también cambia con el tiempo y que existe una dependencia entre la población y los recursos.

Si denotamos por r_0 la cantidad de recursos consumidos por un solo individuo por unidad de tiempo, entonces la cantidad consumida por toda la población es

r_0p . Considerando la tasa de producción por unidad de tiempo y la denotamos por K , la evolución de la cantidad de recursos r está descrita por la ecuación

$$\dot{r} = K - r_0p. \quad (4)$$

La relación con el cambio del tamaño de la población la podemos escribir como

$$\dot{p} = arp - dp. \quad (5)$$

Si no tomamos en cuenta la mortalidad, entonces el exceso de la producción sobre el consumo de recursos r_0p permite a la población alimentar un número adicional de individuos N ; esto es ,

$$r_0N = K - r_0p.$$

Ahora, el cambio de la población debe de ser proporcional al número de individuos que la misma puede mantener con los recursos disponibles:

$$\dot{p} = apN = ap \left(\frac{K}{r_0} - p \right). \quad (6)$$

Esto significa que la población evalúa su máximo posible tamaño desde el punto de vista de producción y consumo de recursos, limitando su crecimiento de acuerdo a esta información.

Escribiendo la ecuación como

$$\dot{p} = \frac{aK}{r_0}p \left(1 - \frac{r_0}{K}p \right)$$

e interpretamos la cantidad aK/r_0 como la tasa de reproducción efectiva bajo la ausencia de regulación y K/r_0 la máxima capacidad de crecimiento, vemos que cuando p crece, la tasa de crecimiento \dot{p} decrece. Cuando p alcanza la máxima capacidad K/r_0 entonces la expansión poblacional termina.

Para una condición inicial p_0 la solución a la ecuación (6) está dada por

$$p(t) = \frac{\frac{K}{r_0}p_0 e^{\frac{aK}{r_0}t}}{\frac{K}{r_0} + p_0 \left(e^{\frac{aK}{r_0}t} - 1 \right)}. \quad (7)$$

La población converge al punto de equilibrio $p^* = K/r_0$ conforme $t \rightarrow \infty$. (Figura 2)

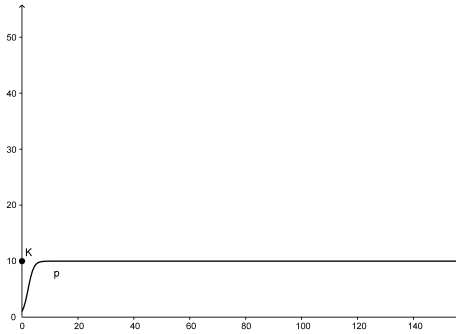


Figura 2: $p(t) = \frac{10e^t}{9+e^t}$

1.2. Selección

La selección ocurre siempre que diferentes tipos de individuos se reproducen a diferentes tasas. Al menos necesitamos dos tipos digamos A y B . El tipo A se reproduce a una tasa a y el tipo B a una tasa b .

Denotamos por $x(t)$ al número de individuos del tipo A , $y(t)$ los del tipo B y $\rho(t) = x(t)/y(t)$ es la razón de A sobre B al tiempo t , tenemos que si $\dot{x} = ax$ y $\dot{y} = by$, entonces

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{y^2} = (a - b)\rho.$$

La solución de esta ecuación es $\rho(t) = \rho_0 e^{(a-b)t}$. Si $a > b$, la selección favorece a A y la razón entre poblaciones crece a favor de A .

Consideremos el caso en el que la población permanece constante. Podemos hacer un cambio de escala y considerar a x y a y como frecuencias, como sólo hay individuos de estos dos tipos, tenemos $x + y = 1$.

La dinámica de las poblaciones está descrita por

$$\dot{x} = x(a - \phi), \quad \dot{y} = y(b - \phi). \quad (8)$$

El término ϕ es para asegurar que $x + y = 1$, pero esto sólo pasa cuando

$$\phi = ax + by,$$

esto es, ϕ es el promedio ponderado con respecto a las subpoblaciones y como $y = 1 - x$, tenemos que

$$\dot{x} = x(1 - x)(a - b). \quad (9)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene dos puntos de equilibrio, uno en 0 y otro en 1. Si $a > b$, entonces $\dot{x} > 0$ para todo $0 < x < 1$ y la fracción de A se incrementará hasta eliminar a la subpoblación B . La tasa a es llamada en este contexto como adecuación biológica.

2. Poblaciones finitas

Ahora analizamos la dinámica de una población finita. La abundancia de los individuos está dada por números enteros y no por variables continuas, la resultante dinámica evolutiva no estará descrita por una ecuación diferencial ordinaria determinista sino por una formulación estocástica.

2.1. Deriva Neutral

Consideremos una población de tamaño fijo N . Existen dos tipos de individuos A y B , ambos se reproducen a la misma tasa. En cada paso del tiempo un individuo se escoge al azar para reproducción y un individuo es escogido también al azar para eliminación. Suponemos que el muestreo es con reemplazo; el mismo elemento puede ser escogido para reproducirse y para morir.

Este proceso estocástico fue inventado por el genetista austriaco P.A Moran en 1958. En cada paso del tiempo siempre hay un nacimiento y una muerte, de modo que se asegura un tamaño de población fijo.

La única variable estocástica es el número de individuos de tipo A denotada por i , el número de individuos del tipo B es $N - i$. El proceso de Moran está definido en el espacio de estados $i = 0, 1, \dots, N$.

La probabilidad de elegir un individuo del tipo A es (para muerte o reproducción) i/N y la probabilidad de elegir un elemento de B es $(N - i)/N$.

Existen cuatro posibilidades de lo que puede suceder en cualquier paso del tiempo:

- i) Un individuo A puede ser elegido para reproducirse y morir. Este evento tiene probabilidad $(i/N)^2$. Después de este evento el número de elementos de A no cambia; la variable i no aumento ni disminuyó.
- ii) Un individuo B es escogido para reproducirse y morir. Esto pasa con probabilidad $((N - i)/N)^2$. La variable i tampoco cambia en este caso.
- iii) Un individuo A es escogido para reproducirse y uno de B para morir. El evento tiene probabilidad $(i(N - i))/N^2$, la variable i cambia a $i + 1$.
- iv) La misma situación que el caso anterior pero con los papeles de A y B invertidos, la variable i cambia a $i - 1$.

La matriz $P = [p_{i,j}]$ determina las probabilidades de moverse de un estado i a otro estado j donde

$$p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = \frac{i(N-i)}{N^2}, \quad p_{ii} = 1 - p_{i,i-1} - p_{i,i+1} \quad (10)$$

y $p_{i,j} = 0$ en todos los demás casos.

La matriz de transición es tridiagonal con $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$, $p_{N,i} = p_{i,i} = 0$ para $0 < i < N$. Los estados $i = 0$ y $i = N$ son llamados estados absorbentes y los demás estados $i = 1, 2, \dots, N - 1$ son llamados estados transitorios.

Dado que el proceso tiene dos estados absorbentes, podemos preguntar sobre la probabilidad de alcanzar el estado N ; en otras palabras, si comenzamos con i individuos del tipo A , nos preguntamos por la probabilidad de que toda la población eventualmente consista de sólo individuos del tipo A .

Denotamos por x_i la probabilidad de terminar en el estado N cuando se comienza en el estado i . La probabilidad de terminar en el estado 0 cuando se comienza en i es $1 - x_i$ (ya que sólo hay dos estados absorbentes).

Encontramos que $x_0 = 0$ y

$$x_i = p_{i,i-1}x_{i-1} + p_{i,i}x_i + p_{i,i+1}x_{i+1} \quad (11)$$

para $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Tenemos entonces una relación de recurrencia para x_i y como $p_{i,i} = 1 - 2p_{i,i+1}$, sustituyendo en (11)

$$x_i = p_{i,i+1}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + x_i,$$

por lo tanto $x_i = (x_{i-1} + x_{i+1})/2$ y utilizando las condiciones de frontera $x_0 = 0$ y $x_N = 1$ obtenemos $x_i = i/N$.

2.2. Procesos de nacimiento/muerte

Hagamos los mismos cálculos para un proceso general de nacimiento y muerte. Un proceso de nacimiento/muerte es un proceso estocástico en un espacio de estados discreto $i = 0, 1, \dots, N$ en donde la variable i puede moverse a $i - 1$ ó $i + 1$ ó quedarse en el mismo valor.

Denotemos por α_i la probabilidad de transición de i a $i + 1$ y por β_i la probabilidad de transición de i a $i - 1$. Tenemos que $\alpha_i + \beta_i \leq 1$ y la probabilidad de quedarse en el estado i es $1 - \alpha_i - \beta_i$.

Consideremos una vez más estados absorbentes $i = 0$ y $i = N$; es decir,

$$\alpha_0 = \beta_N = 0.$$

La matriz de transición es de la forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 - \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{N-1} & 1 - \alpha_{N-1} - \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por x_i la probabilidad de alcanzar el estado N cuando se comienza en el estado i , el número $1 - x_i$ denota la probabilidad de alcanzar el estado 0 cuando se inicia en el estado i .

Se verifica como en la sección anterior que $x_0 = 0$, $x_N = 1$ y

$$x_i = \beta_i x_{i-1} + (1 - \alpha_i - \beta_i) x_i + \alpha_i x_{i+1} \quad (12)$$

para $i = 1, 2, \dots, N - 1$. En notación vectorial $x = Px$.

Las probabilidades de absorción están dadas por el vector propio por la derecha asociado al valor propio más grande, que en este caso es uno.

Introduzcamos a las variables $y_i = x_i - x_{i-1}$ y notemos que

$$\sum_{i=1}^N y_i = x_N - x_0 = 1$$

y sea $\gamma_i = \beta_i/\alpha_i$, entonces $y_{i+1} = \gamma_i y_i$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= \gamma_1 x_1 \\ y_3 &= \gamma_1 \gamma_2 x_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general

$$y_j = x_1 \prod_{k=1}^j \gamma_k.$$

Si sumamos todas estas expresiones, obtenemos

$$1 = \sum_{i=1}^N y_i = x_1 \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k \right).$$

También para cualquier i , $x_i - x_0 = \sum_{j=1}^i y_j$, entonces

$$x_i = x_1 \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k \right),$$

luego

$$x_i = \frac{1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k}. \quad (13)$$

Consideremos una población de un individuo A y $N - 1$ individuos del tipo B , la probabilidad de que A se apodere de toda la población es llamada probabilidad de fijación de A y denotada por ρ_A . La idea es que si una población homogénea del tipo B produce un mutante A , nos preguntamos sobre la probabilidad de que este nuevo individuo invada toda la población.

Las probabilidades de fijación de A y de B son respectivamente $\rho_A = x_1$ y $\rho_B = 1 - x_{N-1}$, entonces

$$\rho_A = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k}$$

$$\rho_B = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} \gamma_k}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k}.$$

La razón entre estas dos probabilidades es

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \prod_{k=1}^{N-1} \gamma_k.$$

Si $\rho_B/\rho_A > 1$, entonces es más probable que B pueda frenar la invasión.

2.3. Deriva aleatoria y selección constante

Estudiemos el mismo tipo de proceso pero supongamos que A tiene adecuación biológica r mientras que B tiene adecuación biológica 1. Si $r > 1$, entonces la selección favorece a A .

La diferencia de aptitud puede ser reflejada en el proceso modificando la probabilidad de escoger A o B para la reproducción / eliminación.

La probabilidad de que A sea elegido para reproducirse es $ri/(ri + N - i)$, la probabilidad de ser B el elegido para reproducirse es $(N - i)/(ri + N - i)$ y las probabilidades de ser elegidos para eliminarse para A y B respectivamente son i/N y $(N - i)/N$.

Para la matriz de transición tenemos

$$p_{i,i-1} = \left(\frac{N - i}{ri + N - i} \right) \left(\frac{i}{N} \right)$$

$$p_{i,i+1} = \left(\frac{ri}{ri + N - i} \right) \left(\frac{N - i}{N} \right)$$

$$p_{i,i} = 1 - p_{i,i-1} - p_{i,i+1}.$$

Una vez más todos los demás elementos de la matriz son cero. Queremos encontrar las probabilidades de fijación x_i de alcanzar el estado N comenzando en el estado i .

Notemos que $\gamma_i = p_{i,i-1}/p_{i,i+1} = 1/r$, entonces

$$x_i = \frac{1 - \frac{1}{r^i}}{1 - \frac{1}{r^N}}.$$

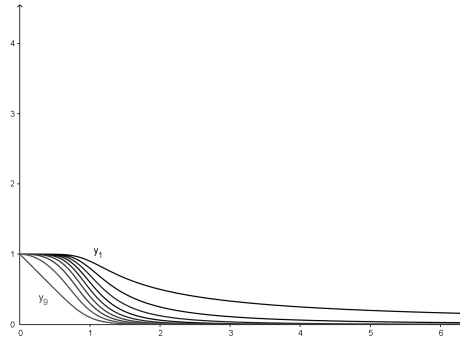


Figura 3: $y_i = 1 - x_i$

Por lo tanto

$$\rho_A = \frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r^N}}$$

y

$$\rho_B = \frac{1 - r}{1 - r^N}.$$

La razón entre estas probabilidades es $\rho_B/\rho_A = r^{1-N}$.

En la Figura:3 se muestran las probabilidades de fijación de B como funciones de r , estos representan los frentes de onda que buscamos.

Para la probabilidad de fijación de un individuo de A (en este caso ventajoso) con $r > 1$ en una población muy grande $N \gg 1$ tenemos la aproximación

$$\rho_A \approx 1 - \frac{1}{r}.$$

En este contexto probabilístico aunque la población sea muy grande no hay garantía de que el individuo ventajoso se apodere de toda la población. Esta es una diferencia importante con el modelo determinista discutido en la sección sobre selección (en el contexto de esa sección $r = a/b$ i.e la adecuación biológica de A es la tasa relativa de reproducción entre los elementos de A y B) ya que para una ecuación diferencial ordinaria que refleja la dinámica de los individuos A el hecho de que $r > 1$ implica el dominio de A .

2.4. Juegos en poblaciones finitas

Considere un juego entre dos poblaciones de individuos de tipo A y B con matriz de pago

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El tamaño de la población es N , el número de individuos A es i y el de B es $N - i$. Para cada A individuo hay $i - 1$ otros individuos del mismo tipo con los que compite y para cada B hay $N - i - 1$ individuos del mismo tipo con los que también compite.

La probabilidad de que un individuo A interactue con otro individuo A es $(i-1)/(N-1)$ y la probabilidad de que un elemento de A interactue con un individuo de B es $(N-i)/(N-1)$. La probabilidad de que un individuo B interactue con otro individuo B es $(N-i-1)/(N-1)$. Por último la probabilidad de que un individuo B interactue con un elemento de A es $i/(N-1)$.

Entonces el pago esperado para A y B es respectivamente

$$F_i = a \left(\frac{i-1}{N-1} \right) + b \left(\frac{N-i}{N-1} \right),$$

$$G_i = c \left(\frac{i}{N-1} \right) + d \left(\frac{N-i-1}{N-1} \right).$$

Anteriormente cada individuo se reproducía de acuerdo a su adecuación biológica (fija), ahora, las funciones de pago afectan tal adecuación. Para ver esto introduzcamos un parámetro ω que mide la intensidad de selección.

La nueva adecuación biológica de los individuos la vamos a entender como una combinación lineal convexa entre el pago esperado y la ausencia de factores externos; esto es,

$$f_i = 1 - \omega + \omega F_i,$$

$$g_i = 1 - \omega + \omega G_i.$$

La intensidad de la selección, ω , es un número entre cero y uno. Si $\omega = 0$, el juego no contribuye a la aptitud biológica, se dice que las estrategias A y B son invariantes neutrales. Si $\omega = 1$ la selección es fuerte; la aptitud esta determinada por completo por el pago esperado. El límite $\omega \rightarrow 0$ caracteriza el caso de selección débil.

Consideremos un proceso de Moran entre A y B , los valores de la aptitud biológica están dados por f_i, g_i y la probabilidad de moverse del estado i al estado $i+1$ está dada por

$$p_{i,i+1} = \left(\frac{if_i}{if_i + (N-i)g_i} \right) \left(\frac{N-i}{N} \right).$$

La probabilidad de moverse del estado i al estado $i-1$ es

$$p_{i,i-1} = \left(\frac{(N-i)g_i}{if_i + (N-i)g_i} \right) \left(\frac{i}{N} \right).$$

La probabilidad de que el proceso se quede en el estado i es

$$p_{i,i} = 1 - p_{i,i+1} - p_{i,i-1},$$

todas las demás probabilidades de transición son cero salvo $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$.

Queremos calcular las probabilidades de fijación de A y de B . La razón de probabilidades hacia adelante es $p_{i,i-1}/p_{i,i+1} = g_i/f_i$, entonces la probabilidad de fijación de A es

$$\rho_A = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k \frac{g_i}{f_i}}. \quad (14)$$

La razón de probabilidades de fijación se calcula como

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \prod_{i=1}^N \frac{g_i}{f_i}.$$

Consideremos el límite de selección débil usando expansión de Taylor para la ecuación (14) cuando $\omega \rightarrow 0$ y considerando sólo términos de orden lineal: (véase [2])

$$\rho_A \approx \frac{1}{N} \frac{1}{1 - (\alpha N - \beta) \frac{\omega}{6}},$$

donde $\alpha = a + 2b - c - 2d$ y $\beta = 2a + b + c - 4d$. Si $\rho_A > 1/N$, entonces $\alpha N > \beta$.

Esta última condición puede escribirse como

$$a(N-2) + b(2N-1) > c(N+1) + d(2N-4). \quad (15)$$

Para una población grande la desigualdad (15) implica que $a + 2b > c + 2d$.

Considere un juego en el que $a > c$ y $b < d$ entonces existe un punto en el que las aptitudes son iguales, este punto lo calculamos haciendo $f_i = g_i$ o equivalentemente $F_i = G_i$.

Para N muy grande este equilibrio es alcanzado cuando A tiene una frecuencia

$$p^* = \frac{d-b}{a-b-c+d}.$$

El equilibrio es inestable y la desigualdad lleva a $p^* < 1/3$. Para una explicación más a detalle sobre teoría de juegos y dinámica en poblaciones véase [6].

3. La ecuación F-KPP

3.1. Desplazamiento de individuos

La ecuación F-KPP es la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales de reacción y difusión

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 p} \right) + p(1-p),$$

esta ecuación toma en cuenta una variable espacial (en R^2) y representa el cambio de la población con un término de difusión (el laplaciano de p) y un

término de reacción $p(1-p)$ que representa la interacción entre los individuos. La parte de difusión sugiere la propagación de la población y el término de reacción algún tipo de regulación natural del fenómeno.

Fisher [2] sugiere que la función p debe de ser una onda viajera que se propaga a una velocidad constante. Más tarde Kolmogorov, Petrowski y Piscounov en [4] estudian por métodos de análisis y ecuaciones diferenciales ordinarias la suposición de Fisher generando hipótesis sobre el rango al que pertenece la velocidad y tratando de obtener una forma explícita para la onda viajera $w(x+ct)$ en el caso de que la variable espacial es unidimensional. Las técnicas probabilistas han resultado efectivas para analizar este problema [7], inclusive se puede dar una caracterización del perfil de la onda viajera w , el contenido principal de la última sección.

Vamos a dar una deducción heurística de la ecuación F-KPP:

Supongamos que durante el intervalo de tiempo entre nacimiento y reproducción cada individuo se mueve una dirección aleatoria cierta distancia. Sea $f(r) dr$ la probabilidad de desplazarse una distancia entre r y $r+dr$ a partir del punto (x, y) y denotamos por $\rho^2 = \int_0^\infty r^2 f(r) dr$ la distancia cuadrática media de desplazamiento.

Si consideramos una bola centrada en el punto (x, y) de radio r y (ξ, η) un punto en la frontera (Figura 4), la población en el tiempo t ocupa una región que interseca la bola. En el tiempo $t+h$ para h pequeño la población se mueve de acuerdo a la probabilidad $f(r) dr$ y la proporción de la población que se desplazó fuera de ésta bola es $p(\xi, \eta, t+h) f(r) dr$, integrando esta última expresión con respecto a r (esto es; considerar todas las salidas de la población y sumarlas) obtenemos el promedio ponderado de la población que sale del punto (x, y) .

Expresando tal integral en coordenadas polares y tomando en cuenta que el cambio de la población también depende de los individuos que llegan al punto (x, y) y el crecimiento regulado $p(x, y, t)(1-p(x, y, t))$ obtenemos (δ denota el cambio en el tiempo):

$$\delta p(x, y, t) = \int_R \int_R p(\xi, \eta, t) \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta - p(x, y, t) + p(x, y, t)(1-p(x, y, t)) \quad (16)$$

donde $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$.

Ahora suponemos que p es diferenciable en las variables x, y, t y consideremos la expansión de Taylor en (16) hasta el orden cuadrático. Fijándonos en cada término de integración, obtenemos:

$$\int_R \int_R p(x, y, t) \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta = p(x, y, t) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{f(r)}{2\pi} dr d\theta = p(x, y, t),$$

donde θ es el ángulo que forma $(x-\xi, y-\eta)$ con el eje x .

El cálculo de la integral del siguiente término en la serie de Taylor es:

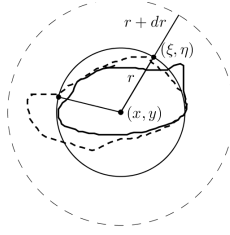


Figura 4: La población en el tiempo $t + h$ en punteado

$$\int_{R^2} \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) (\xi - x) \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \cos\theta \frac{f(r)}{r} dr d\theta = 0,$$

análogamente

$$\int_R \int_R \frac{\partial p}{\partial y}(x, y, t) (\eta - y) \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta = 0.$$

Luego, para las integrales con integrandos de orden cuadrático:

$$\int_R \int_R \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\xi - x)^2 \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty r^2 f(r) dr$$

y

$$\int_R \int_R \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\eta - y)^2 \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\infty r^2 f(r) dr.$$

Todas las demás integrales están multiplicadas por el incremento h del tiempo que tiende a cero, de modo que (omitiendo las variables espaciales para ahorrar espacio)

$$\frac{p(t) - p(t-h)}{h} \approx p(t) + \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(t) \right) - p(t) + p(t)(1-p(t)).$$

Cuando $h \rightarrow 0$ se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + p(1-p). \quad (17)$$

El tipo de soluciones que nos interesan son funciones de la forma

$$u(x, t) = w(x + ct)$$

llamadas ondas viajeras, donde c representa la velocidad del frente de onda y la función w es al menos dos veces diferenciable. Este tipo de soluciones representan la propagación espacial de la población en función del tiempo a una velocidad constante, recordemos de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales que la línea recta $x + ct$ es la curva característica a lo largo de la cual se transportan los datos iniciales partiendo de la frontera, en este caso la densidad poblacional inicial que parte de un punto en el espacio dado.

En la sección 3 vimos que la probabilidad de fijación en una población finita se puede calcular como una ecuación hacia adelante (en el sentido de Kolmogorov). En forma matricial representa la medida de probabilidad invariante de una cadena de Markov; esto es, en el límite con respecto al tiempo esperamos obtener como solución una función con la forma de una distribución de probabilidad como en la sección sobre deriva aleatoria y selección constante, el frente de onda esta representado por la probabilidad de fijación.

Se puede verificar fácilmente que en el caso de una sola variable temporal la linealización de la ecuación F-KPP temporal alrededor del punto de equilibrio 1 es la ecuación de Fokker-Planck asociada a un proceso de ramificación browniano (la ecuación de Fokker-Planck o también llamada ecuación de Kolmogorov hacia atrás del movimiento browniano ramificado estándar es

$$u_t = xu_x + u_{xx}$$

donde u representa la densidad de transición del procesos estocástico), veremos cómo construir ondas viajeras en términos de martingalas aditivas (Sección 9) y se probará que las ondas viajeras asociadas a la ecuación F-KPP se construyen a partir de las anteriores.

El comportamiento asintótico (Sección 8) de las ondas viajeras es esencialmente el de funciones exponenciales (con velocidades adecuadas). Para probar esta afirmación vamos a seguir un procedimiento de localización para obtener martingalas locales a partir de la integral de Itô (Sección 6) y posteriormente la construcción de la llamada representación de Feynman-Kac (Sección 7).

En la siguiente sección damos una sencilla construcción de la integral de Itô para entender la integración con respecto al movimiento browniano y poder construir martingalas locales.

4. Integración de Itô

La integral de Itô lleva la noción de martingala a tiempo discreto transformándola a tiempo continuo, esto es; la propiedad de martingala a tiempo discreto que satisfacen procesos escalonados se mantiene al momento de integrarlos en el sentido de Itô, al aproximar procesos a tiempo continuo con procesos escalonados esta propiedad también se preserva. La construcción de esta integral nos proporciona una manera sistemática para obtener nuevas martingalas.

La meta principal de esta parte es proveer una definición de la siguiente integral:

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t) dB_t. \quad (18)$$

Como el movimiento browniano no es de variación acotada, la integral anterior no puede ser interpretada como una integral en el sentido de Riemann; los aspectos de convergencia son un tanto más delicados.

La idea es definir esta integral en una clase sencilla de funciones y extender la definición a una clase más grande por un argumento de continuidad.

4.1. Integral de Itô como variable aleatoria

Para que la integral (18) tenga sentido, debemos considerar algunos aspectos básicos sobre integrabilidad y medibilidad.

Comenzamos con la medibilidad. Sean (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y \mathcal{B} la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los subconjuntos abiertos de $[0, T]$; es decir, \mathcal{B} es la familia de conjuntos de Borel de dicho intervalo.

Tomamos a $F_t \subset F$ como la filtración estándar del movimiento browniano y para cada $t \geq 0$ tomamos a $F_t \times \mathcal{B}$ como la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos producto $A \times B$ con $A \in F_t$ y $B \in \mathcal{B}$, decimos que $f(\cdot, \cdot)$ es adaptada si $f(\cdot, t) \in F_t$ para toda $t \in [0, T]$.

En la primera etapa del desarrollo de la integral de Itô nos fijaremos en integrandos de la clase $H^2 = H^2[0, T]$ que consiste de todas las funciones medibles adaptadas f que satisfacen la condición de integrabilidad

$$E \left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt \right] < \infty. \quad (19)$$

Notamos que (19) es una doble integral y que H^2 es un subespacio lineal cerrado de $L^2(P \times \lambda)$; es decir, el espacio de funciones definidas en $\Omega \times [0, T]$ y cuadrado integrables con respecto a la medida producto $P \times \lambda$ (λ la medida de Lebesgue).

Para anticipar la definición de la integral de Itô, primero consideremos cómo esperaríamos que fuera tal integral para los casos más sencillos, por ejemplo si tomamos $f(\omega, t)$ como la función indicadora del intervalo $(a, b] \subset [0, T]$ esperamos que

$$I(f)(\omega) = \int_a^b dB_t = B_b - B_a. \quad (20)$$

Como es natural que la integral sea lineal, definamos a la clase H_0^2 como el subconjunto de H^2 de todas las funciones de la forma

$$f(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1_{(t_i < t \leq t_{i+1})} \quad (21)$$

donde $a_i \in F_{t_i}$, $E(a_i^2) < \infty$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Estamos forzados a definir I en H_0^2 por

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (22)$$

Ahora nos gustaría mostrar que podemos extender el dominio de I desde H_0^2 a todo H^2 . Para realizar esta extensión necesitamos saber si $I : H_0^2 \rightarrow L^2(P)$ es un mapeo continuo.

Lema 4.1 (Isometría de Itô en H_0^2) Para $f \in H_0^2$ se cumple:

$$\|I(f)\|_{L^2(P)} = \|f\|_{L^2(P \times \lambda)}. \quad (23)$$

Dem: La prueba es sencilla, sólo basta con calcular ambas normas. Para calcular $\|f\|_{L^2(P \times \lambda)}$ notamos que para f de la forma (21)

$$f^2(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega) 1_{(t_i < t \leq t_{i+1})}.$$

Entonces

$$\|f\|_{L^2(P \times \lambda)}^2 = \int_{\Omega} \int_0^T f^2 d\lambda dP = E \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega) (t_{i+1} - t_i) \right].$$

Por otro lado, como cada $a_i \in F_{t_i}$ y $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ es independiente de F_{t_i} (incrementos independientes del movimiento browniano) se sigue que

$$E \left[\sum_{i < j} a_i a_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right] = 0,$$

luego

$$\|I(f)\|_{L^2(P)}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2) E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2) (t_{i+1} - t_i).$$

Se concluye que $\|f\|_{L^2(P \times \lambda)} = \|I(f)\|_{L^2(P)}$. \diamond

La isometría de Itô implica que I mapea H_0^2 a $L^2(P)$ de manera continua y entonces sucesiones fundamentales en H_0^2 son llevadas a sucesiones fundamentales en $L^2(P)$. (i.e si $\langle f_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy en H_0^2 entonces $\langle I(f_n) \rangle$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(P)$).

Necesitamos saber si elementos de H^2 pueden ser aproximados por elementos de H_0^2 . El siguiente lema da el resultado deseado y lo enunciamos sin demostración (para una prueba completa véase [3] pag. 90).

Lema 4.2 (H_0^2 es denso en H^2) Para cualquier $f \in H^2$ existe una sucesión $\langle f_n \rangle \subset H_0^2$ tal que $\|f - f_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Las integrales $I(f_n)$ para cada $f_n \in H_0^2$ están bien definidas y son elementos de $L^2(P)$. El plan ahora es definir $I(f)$ como el límite $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$

La interpretación del límite anterior es en el sentido de $L^2(P)$; es decir (por la isometría de Itô),

$$\|I(f) - I(f_n)\|_{L^2(P)} = \|I(f) - I(f_n)\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Para estar seguros de que la definición es la adecuada tenemos que verificar dos cosas, primero es necesario mostrar que $\|f - f_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow 0$ implica que $\langle I(f_n) \rangle$ converge en $L^2(P)$. Esto es sencillo, ya que la convergencia de $f - f_n$ en $L^2(P \times \lambda)$ nos dice que $\langle f_n \rangle$ es una sucesión fundamental en $L^2(P \times \lambda)$ y la isometría de Itô implica que $\langle I(f_n) \rangle$ es una sucesión fundamental en $L^2(P)$. La completitud de este último nos lleva a la existencia del límite de $\langle I(f_n) \rangle$ a algún elemento de $L^2(P)$ al cual denotamos por $I(f)$.

Para verificar que I está bien definida, en el sentido de que si $\langle g_n \rangle$ es tal que $\|f - g_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow 0$ entonces $\langle I(g_n) \rangle$ tiene el mismo límite en $L^2(P)$ que $\langle f_n \rangle$, basta con notar que la desigualdad del triángulo junto con el hecho de que

$$\|f_n - g_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow 0$$

y la isometría de Itô implican que

$$\|I(f_n) - I(g_n)\|_{L^2(P)} \rightarrow 0.$$

Teorema 4.1 (Isometría de Itô en H^2) Para $f \in H^2$ se cumple:

$$\|I(f)\|_{L^2(P)} = \|f\|_{L^2(P \times \lambda)}. \quad (24)$$

Dem: Primero escogemos $\langle f_n \rangle \subset H_0^2$ tal que $\|f - f_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La desigualdad del triángulo en $L^2(P \times \lambda)$ implica

$$\|f_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow \|f\|_{L^2(P \times \lambda)}.$$

De forma similar, como $\langle I(f_n) \rangle$ converge a $I(f)$ en $L^2(P)$, la desigualdad del triángulo en $L^2(P)$ nos dice que

$$\|I(f_n)\|_{L^2(P)} \rightarrow \|I(f)\|_{L^2(P)}.$$

Sabemos que $\|I(f_n)\|_{L^2(P)} = \|f_n\|_{L^2(P \times \lambda)}$, tomando límite se concluye. \diamond

La siguiente proposición nos resultará muy útil para establecer la relación entre algunas ecuaciones diferenciales parciales y la fórmula de representación de Feynman-Kac.

Proposición 4.1 Para cada $b \in H^2$ y cualquier $0 \leq s \leq t$, se cumple la siguiente igualdad:

$$E \left[\left(\int_s^t b(\omega, u) dB_u \right)^2 \middle| F_s \right] = E \left[\int_s^t b^2(\omega, u) du \middle| F_s \right]. \quad (25)$$

Dem: Notamos que la igualdad anterior es equivalente a decir que para todo $A \in F_s$ se cumple

$$E \left[1_A \left(\int_s^t b(\omega, u) dB_u \right)^2 \right] = E \left[1_A \int_s^t b^2(\omega, u) du \right].$$

Para probar esta última, sea

$$\hat{b}(\omega, u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [0, s] \\ 1_A b(\omega, u) & \text{si } u \in (s, t]. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E \left[1_A \left(\int_s^t b(\omega, u) dB_u \right)^2 \right]^2 &= \|I(\hat{b})\|_{L^2(P)}^2 \\ &= \|\hat{b}\|_{L^2(P \times \lambda)}^2 \\ &= E \left[1_A \int_s^t b^2(\omega, u) du \right]^2. \diamond \end{aligned}$$

4.2. Integral de Itô como proceso estocástico

La construcción del mapeo $I : H^2 \rightarrow L^2(P)$ lleva un proceso estocástico a una variable aleatoria, lo que necesitamos es un mapeo que lleve un proceso a otro proceso estocástico. Veremos que la integral de Itô nos lo proporciona e inclusive se obtiene una martingala continua.

Para este propósito usamos la función de truncamiento $m_t \in H^2$ definida por

$$m_t(\omega, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in [0, t] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que para $f \in H^2$ el producto $m_t f$ también es un elemento de H^2 para toda $t \in [0, T]$, así, $I(m_t f)$ es un elemento bien definido de $L(P)$.

Teorema 4.2 (La integral de Itô como martingala) Sea $f \in H^2$, entonces existe un proceso $\{X_t : t \in [0, T]\}$ que es una martingala continua con respecto a la filtración estándar del movimiento browniano F_t y el evento

$$\{\omega : X_t(\omega) = I(m_t f)(\omega)\}$$

tiene probabilidad 1 para cada $t \in [0, T]$.

Dem: Sea $\langle f_n \rangle \subset H_0^2$ una sucesión tal que $\|f - f_n\|_{L^2(P \times \lambda)} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para $t \in [0, T]$ tenemos que $m_t f_n \in H_0^2$, entonces podemos definir un nuevo proceso $X_t^{(n)}$ como

$$X_t^{(n)}(\omega) = I(m_t f_n)(\omega).$$

De acuerdo a la definición de $I(\cdot)$ en H_0^2 podemos dar una fórmula explícita para $X_t^{(n)}$. Para $t_k < t \leq t_{k+1}$ se tiene

$$X_t^{(k)} = a_k(\omega)(B_t - B_{t_k}) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (26)$$

Cada $X_t^{(n)}$ es una martingala continua F_t -adaptada, esto implica que para cada $n \geq m$ podemos aplicar la desigualdad maximal de Doob en $L^2(P)$ a la submartingala $M_t = |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|$; esto es, para todo $\epsilon > 0$ se cumple:

$$P\left(\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E\left[|X_T^{(n)} - X_T^{(m)}|^2\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \|f_n - f_m\|_{L^2(P \times \lambda)}^2. \quad (27)$$

Como $\langle f_n \rangle$ converge a f en $L^2(P \times \lambda)$, podemos encontrar una subsucesión con índices crecientes n_k tal que

$$\max_{n \geq n_k} \|f_n - f_{n_k}\|_{L^2(P \times \lambda)} \leq 2^{-3k}. \quad (28)$$

En particular tomando $\epsilon = 2^{-k}$ en la cota (27) obtenemos

$$P\left(\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t^{(n_k)}| \geq 2^{-k}\right) \leq 2^{-k}.$$

Sumando sobre k y usando el lema de Borel-Cantelli tenemos la existencia de un conjunto Ω_0 de probabilidad 1 junto con una variable aleatoria $c < \infty$ para los cuales,

$$\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n_{k+1})}(\omega) - X_t^{(n_k)}(\omega)| \leq 2^{-k} \quad (29)$$

para toda $k \geq c(\omega)$ y $\omega \in \Omega_0$.

Como 2^{-k} es sumable, la cota (29) nos dice que $\langle X_t^{n_k} \rangle$ es fundamental en la norma uniforme en $C[0, T]$ restringida a Ω_0 . Entonces para cada $\omega \in \Omega_0$ existe una función continua $t \mapsto X_t(\omega)$ tal que $X_t^{(n_k)}(\omega) \rightarrow X_t(\omega)$ cuando $k \rightarrow \infty$ uniformemente en $[0, T]$ para cada $\omega \in \Omega_0$.

Como las F_t -martingalas $\langle X_t^{(n_k)} \rangle$ también convergen en $L^2(P)$ a X_t la propiedad de martingala se sigue de la identidad para los procesos $X_t^{(n_k)}$.

Para probar la última parte del teorema notamos que $m_t f_{n_k} \rightarrow m_t f$ en $L^2(P)$ y por la isometría de Itô se sigue que $I(m_t f_{n_k}) \rightarrow I(m_t f)$ en $L^2(P)$, luego

$$X_t^{(n_k)} = I(m_t f_{n_k}) \rightarrow X_t \text{ en } L^2(P).$$

La unicidad de límites en $L^2(P)$ implica que $\|X_t - I(m_t f)\|_{L^2(P)} = 0$ para toda $t \in [0, T]$. Entonces $X_t = I(m_t f)$ c.s $[P]$; es decir,

$$P(\{\omega : X_t(\omega) = I(m_t f)(\omega)\}) = 1. \diamond$$

5. Localización y la Integral de Itô

Si $f : R \rightarrow R$ es una función continua, deberíamos ser capaces de poder calcular integrales como

$$\int_0^T f(B_t) dB_t.$$

Sin embargo, hasta ahora tenemos una restricción de integrabilidad:

$$E \left[\int_0^T f^2(B_t) dt \right] < \infty.$$

Esta condición puede fallar inclusive para funciones bien comportadas como $f(x) = e^{x^4}$.

Queremos relajar la condición de integrabilidad, esto lo lograremos con el concepto de localización. El uso adecuado de este concepto permitirá extender la definición de integral de Itô a cualquier función continua del movimiento browniano.

5.1. Integral de Itô en L^2_{LOC}

Comenzamos por considerar la clase $L^2_{LOC} = L^2_{LOC}[0, T]$ de todas las funciones adaptadas $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow R$ tal que

$$P \left(\int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty \right) = 1.$$

Esta clase de funciones contiene a H^2 . También, para cualquier función continua $g : R \rightarrow R$ tenemos que $f(\omega, t) = g(B_t(\omega)) \in L^2_{LOC}$, ya que la continuidad (c.s $[\lambda]$) del movimiento browniano implica que el mapeo $t \mapsto g(B_t(\omega))$ es una función esencialmente acotada en $[0, T]$.

Recordemos que si $\{F_n\} \subset F$ es una filtración, un tiempo de paro es un mapeo $\tau : \Omega \rightarrow N \cup \{0, \infty\}$ tal que $\{\tau \leq n\} \in F_n$ para toda $n \in N$

Definición 5.1 (Sucesión localizadora en H^2) Una sucesión creciente de tiempos de paro es llamada sucesión localizadora en H^2 para f si se cumple:

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t) 1_{(t \leq \nu_n)} \in H^2 \quad (30)$$

para toda $n \in N$ y

$$P\left(\bigcup_{n \in N} \{\omega : \nu_n = T\}\right) = 1. \quad (31)$$

Una razón para la cual la clase L_{LOC}^2 es el dominio natural de la integral de Itô es que cualquier f en esta clase tiene una sucesión localizadora.

Proposición 5.1 (Localización en L_{LOC}^2) Para cualquier $f \in L_{LOC}^2$, la sucesión definida por

$$\tau_n = \text{Inf}\left\{s : \int_0^s f^2(\omega, t) dt \geq n \text{ ó } s \geq T\right\}$$

es una sucesión localizadora en H^2 para f .

Dem: Notemos que si $\omega \in \bigcup_{n \in N} \{\omega : \tau_n = T\}$ entonces

$$\text{Inf}\left\{s : \int_0^s f^2(\omega, t) dt \geq n \text{ ó } s \geq T\right\} = \tau_n = T$$

para algún $n \in N$, esto pasa sólo si $\int_0^T f^2(\omega, t) dt < n < \infty$. Esto muestra la contención

$$\bigcup_{n \in N} \{\omega : \tau_n = T\} \subset \left\{\omega : \int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty\right\},$$

buscamos la igualdad; supongamos que $\tau_n(\omega) \neq T$ para toda $n \in N$, no puede suceder que $T < \tau_n(\omega)$, entonces debe pasar $\tau_n(\omega) < T$.

Luego

$$\int_0^{\tau_n(\omega)} f^2(\omega, t) dt \leq \int_0^T f^2(\omega, t) dt.$$

Por la definición de τ_n tenemos que $n \leq \int_0^{\tau_n(\omega)} f^2(\omega, t) dt$ para toda $n \in N$, de modo que $\int_0^T f^2(\omega, t) dt$ no puede ser finita. Tenemos entonces

$$\bigcap_{n \in N} \{\omega : \tau_n(\omega) \neq T\} \subset \Omega \setminus \left\{\omega : \int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty\right\},$$

por lo tanto $P\left(\bigcup_{n \in N} \{\omega : \tau_n(\omega) = T\}\right) = 1$.

Sean $f_k(\omega, t) = f(\omega, t) 1_{(t \leq \tau_k)}$ con $k \in N$ fijo pero arbitrario, queremos probar que f_k pertenece a H^2 .

$$\int_{\Omega} \int_0^T f_k^2(\omega, t) dt dP = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \tau_n(\omega) = T\}} \int_0^T f^2(\omega, t) 1_{t \leq \tau_k} dt dP.$$

Evidentemente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \tau_n(\omega) = T\} \supset \{\omega : \tau_k(\omega) = T\}$, entonces $1_{(t \leq \tau_k = T)} = 1$ para toda $t \leq T$ y $\int_0^T f^2(\omega, t) dt < k$ para toda $\omega \in \{\omega : \tau_k(\omega) = T\}$.

Concluimos que

$$E \left[\int_0^T f_k(\omega, t) dt \right] < \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \tau_n(\omega) = T\}} k dP = k < \infty.$$

Esto prueba que $\langle \tau_n \rangle$ es una sucesión localizadora. \diamond

5.2. Extensión en L_{LOC}^2

Para la construcción de la integral de Itô de $f \in L_{LOC}^2$ vamos a tomar una sucesión localizadora $\langle \nu_n \rangle$ para f , sabemos que para cada $f_n(\cdot, t) = f(\cdot, t) 1_{(t \leq \nu_n)}$ existe una única martingala continua $X_{t,n}$, que es una versión de la integral de Itô de $I(m_t f_n)$.

Finalmente, definimos al proceso por el límite de $\langle X_{t,n} \rangle$ como la integral de Itô de $f \in H^2$. De forma precisa, demostraremos la existencia de un único proceso continuo $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ tal que

$$P \left(X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n} \right) = 1.$$

Definiremos entonces

$$\int_0^T f(\omega, s) dB_s \stackrel{\text{def}}{=} X_t(\omega).$$

5.2.1. Consistencia, convergencia y continuidad

Para lograr la definición discutida anteriormente necesitamos asegurarnos de la existencia del límite que pretendemos tomar como integral de Itô, así como la unicidad con respecto a la localización. Para ello enunciamos los siguientes resultados.

Teorema 5.1 (Persistencia de la identidad) *Si f y g pertenecen a H^2 y si ν es un tiempo de paro para el cual $f(\omega, s) = g(\omega, s)$ para casi toda $\omega \in \{\omega : s \leq \nu(\omega)\}$, entonces las integrales $X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s) dB_s$ y $Y_t(\omega) = \int_0^t g(\omega, s) dB_s$ son iguales para casi toda $\omega \in \{\omega : t \leq \nu(\omega)\}$.*

Dem: Tomemos $f_n = f1_{(|f| \leq n)}$, $g_n = g1_{(|g| \leq n)}$. Por el teorema de convergencia dominada $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en $L^2(P \times \lambda)$ y la isometría de Itô implica que $\int_0^t f_n(\omega, s) dB_s \rightarrow X_t$ y $\int_0^t g_n(\omega, s) dB_s \rightarrow Y_t$ en $L^2(P)$.

Pero $\int_0^t f_n(\omega, s) dB_s = \int_0^t g_n(\omega, s) dB_s$ para casi toda $\omega \in \{\omega : t \leq \nu(\omega)\}$, por lo tanto $X_t = Y_t$ c.s $[P]$. \diamond

Proposición 5.2 (Consistencia secuencial) Sean $f \in H_0^2$ y $\langle \nu_n \rangle$ cualquier sucesión localizadora. Si $\{X_{t,n}\}$ es una versión de las integrales de Itô $I(m_t f 1_{(t \leq \nu_n)})$, entonces para todo $t \in [0, T]$ y $n \geq m$ tenemos que

$$X_{t,n} = X_{t,m}$$

para casi toda $\omega \in \{\omega : t \leq \nu_m(\omega)\}$.

Dem: Como $\nu_m \leq \nu_n$, las funciones

$$f_m(\omega, t) = f(\omega, t) 1_{(t \leq \nu_m)}$$

y

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t) 1_{(t \leq \nu_n)}$$

son iguales en el conjunto $\{\omega : t \leq \nu_m\}$.

Por el teorema anterior se sigue que $X_{t,n} = X_{t,m}$ para casi toda ω en el conjunto $\{\omega : t \leq \nu_m(\omega)\}$. \diamond

Proposición 5.3 Existe un proceso continuo $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ tal que

$$P\left(X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n}\right) = 1 \quad (32)$$

para toda $t \in [0, T]$.

Dem: Sea $\langle \nu_n \rangle$ una sucesión localizadora y definamos el índice aleatorio

$$N := \min\{n : \nu_n = T\}.$$

Entonces $\omega \in \{N < \infty\}$ ssi existe $n \in N$ tal que $\nu_n(\omega) = T$; esto es, ssi $\omega \in \bigcup_{n \in N} \{\omega : \nu_n(\omega) = T\}$. Por lo tanto $P(N < \infty) = 1$.

Ahora, sea Ω_0 el conjunto de probabilidad 1 en el que todas las trayectorias $t \mapsto X_{t,n}(\omega)$ son continuas y para cada $\omega \in \Omega_1 = \Omega_0 \cap \{N < \infty\}$ definimos $X_t(\omega)$ por $X_t(\omega) = X_{t,N}(\omega)$, este mapeo es continuo en Ω_1 .

Por la consistencia secuencial se tiene

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n} = X_{t,N}\right) = 1$$

para todo $[0, T]$. \diamond

5.2.2. Independencia de la localización

La integral de Itô está definida sin ambigüedad para toda función $f \in L^2_{LOC}$, sin embargo, la definición $\int_0^t f(\omega, s) dB_s = X_t(\omega)$ parece depender de la sucesión localizadora para f . La siguiente proposición prueba que con probabilidad 1 cada sucesión localizadora lleva al mismo límite.

Proposición 5.4 (Independencia de la localización) *Si $\langle \nu_n \rangle$ y $\langle \hat{\nu}_n \rangle$ son sucesiones localizadoras de $f \in L^2_{LOC}$, entonces las versiones continuas correspondientes $X_{t,n}$ y $\hat{X}_{t,n}$ de las integrales de Itô $I(m_t f 1_{(t \leq \nu_n)})$, $I(m_t f 1_{(t \leq \hat{\nu}_n)})$ satisfacen:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{X}_{t,n}$$

con probabilidad 1 para cada $t \in [0, T]$.

Dem: Sea $\tau_n = \min\{\nu_n, \hat{\nu}_n\}$. La persistencia de la identidad implica que para toda $n \geq m$, $\hat{X}_{t,m} = X_{t,n}$ para casi toda $\omega \in \{\omega : t \leq \tau_m(\omega)\}$.

Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{X}_{t,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n}$ casi siempre en $\{t \leq \tau\}$.

Finalmente notemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n = T\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\nu_n = T\} \cap \{\hat{\nu}_n = T\}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n = T\}\right) = 1. \text{ Por lo tanto } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{X}_{t,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n}.$$

5.3. Martingalas locales

Una de las propiedades de la integral de Itô de una función en H^2 es que es una martingala. Para funciones en L^2_{LOC} no se puede decir lo mismo, pero las integrales en L^2_{LOC} están cerca de ser martingalas en cierto sentido.

Definición 5.2 (Martingala local) *Si un proceso $\{M_t\}$ es adaptado a la filtración $\{F_t\}$ para toda $0 \leq t < \infty$, entonces $\{M_t : 0 \leq t < \infty\}$ es llamada martingala local si existe una sucesión no decreciente $\langle \tau_n \rangle$ de tiempos de paro con la propiedad de que $\tau_k \rightarrow \infty$ con probabilidad 1 cuando $k \rightarrow \infty$ y tal que para cada k , el proceso definido por $M_t^{(k)} = M_{t \wedge \tau_k} - M_0$ para todo $t \in [0, \infty)$ es una martingala con respecto a la filtración $\{F_t : 0 \leq t < \infty\}$.*

La razón principal de aislar el concepto de martingala local es que la integral de Itô de una función en L^2_{LOC} es una martingala local.

Proposición 5.5 (Integrales de Itô en L^2_{LOC} son martingalas locales) *Para cualquier función $f \in L^2_{LOC}$ existe una martingala local continua X_t que cumple*

$$P\left(X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s) dB_s\right) = 1. \quad (33)$$

Dem: Sea $\tau_n(\omega) = \text{Inf}\{t : \int_0^t f(\omega, s) ds \geq n \text{ ó } t \geq T\}$, sabemos que $\langle \tau_n \rangle$ es una sucesión localizadora de f y que existe una versión continua X_t de la integral de Itô de f que satisface (33). Además

$$X_{t \wedge \tau_n} = \int_0^{t \wedge \tau_n} f(\cdot, s) dB_s = \int_0^t f(\cdot, s) 1_{(s \leq \tau_n)} 1_{[0, t]}(s) dB_s.$$

La última igualdad nos dice que $X_{t \wedge \tau_n}$ es una versión continua de la integral de Itô de la función $f 1_{(s \leq \tau_n)} \in H^2$. Por la independencia de la localización $X_{t \wedge \tau_n}$ es una martingala y por lo tanto X_t es una martingala local. \diamond

Proposición 5.6 (Teorema de tiempo de paro de Doob versión local) *Si X_t es una martingala local y τ es un tiempo de paro, entonces $Y_t = X_{t \wedge \tau}$ también es una martingala local.*

Dem: Sin pérdida de generalidad podemos suponer $X_0 = 0$. Por hipótesis, existe una sucesión creciente de tiempos de paro $\langle \tau_k \rangle$ con $\tau_k \rightarrow \infty$ tal que $X_{t \wedge \tau_k}$ es una martingala para cada k . Luego

$$Y_{t \wedge \tau_k} = X_{(t \wedge \tau) \wedge \tau_k} = X_{(t \wedge \tau_k) \wedge \tau}$$

y como $\{X_{t \wedge \tau_k} : 0 \leq t < \infty\}$, el teorema de tiempo de paro de Doob dice que $\{X_{(t \wedge \tau_k) \wedge \tau} : 0 \leq t < \infty\}$ también es una martingala. Esto implica que $\{Y_{t \wedge \tau} : 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala local con la misma sucesión localizadora. \diamond

Teorema 5.2 *Si X_t es una martingala local y $M > 0$ es una constante tal que $|X_t| \leq M$ para toda $t \geq 0$, entonces X_t es una martingala.*

Dem: Una vez más suponemos que $X_0 = 0$ y tomamos una sucesión no decreciente de tiempos de paro tal que $\{X_{t \wedge \tau_k} : 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala para cada k y $\tau_k \rightarrow \infty$.

Consideremos $s \leq t$ y $E[X_{t \wedge \tau_k} | F_s] = X_{s \wedge \tau_k}$. Como $\tau_k \rightarrow \infty$ tenemos que $X_{s \wedge \tau_k} \rightarrow X_s$ y $X_{t \wedge \tau_k} \rightarrow X_t$, también se cumple $|X_{t \wedge \tau_k}| \leq B$ para todo k .

Por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$E[X_t | F_s] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[X_{t \wedge \tau_k} | F_s] = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{s \wedge \tau_k} = X_s. \diamond$$

Proposición 5.7 *Cualquier martingala local no negativa $\{X_t : 0 \leq t < T\}$ con $E[X_0] < \infty$ es también una supermartingala, y si $E[X_T] = E[X_0]$ entonces $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es de hecho una martingala.*

Dem: Si $\langle \tau_n \rangle$ es una sucesión localizadora, entonces por la propiedad de martingala local tenemos que $X_{s \wedge \tau_n} = E[X_{t \wedge \tau_n} | F_s]$ para todo $0 \leq s \leq t \leq T$. Por el lema de Fatou, conforme $n \rightarrow \infty$ se cumple que

$$X_s \geq E[X_t | F_s] \tag{34}$$

para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Esto implica que $\{X_t\}$ es una supermartingala y si tomamos esperanza en (34) tenemos que $E[X_s] \geq E[X_t]$.

En particular,

$$E[X_0] \geq E[X_s] \geq E[X_t] \geq E[X_T].$$

La hipótesis $E[X_0] = E[X_T]$ implica la igualdad en todas las desigualdades anteriores. Regresando a (34), si la desigualdad fuese estricta en un conjunto de probabilidad positiva, tendríamos $E[X_s] > E[X_t]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X_s = E[X_t|F_s]$ para toda $0 \leq s \leq t \leq T$. c.s $[P]$. \diamond

6. Fórmula de representación de Feynman-Kac

Para la construcción de ondas viajeras monótonas se requiere una conexión entre una ecuación diferencial estocástica y la ecuación de Fokker-Planck asociada con el proceso que es solución de la anterior. El calculo estocástico de Itô proporciona tal conexión y además permite ver que la solución de la ecuación de Fokker-Planck tiene una representación probabilística llamada *fórmula de representación de Feynman-Kac*.

Como veremos mas adelante la representación mencionada es la esperanza de una martingala local y tiene un comportamiento asintótico exponencial para la ecuación F-KPP.

6.1. Fórmula de Itô

Definición 6.1 *Considere un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ que satisface*

$$X(\omega, r) = x_s + \int_s^r F(\omega, t) dt + \int_s^r G(\omega, t) dB_t,$$

que vamos escribir de forma abreviada como

$$X_r = x_s + \int_s^r F dt + \int_s^r G dB_t,$$

para funciones conocidas $F \in H^1 = H^1[0, T]$ y $G \in H^2 = H^2[0, T]$, donde H^1 es el espacio de funciones absolutamente integrables con respecto a la medida $P \times \lambda$. Decimos que X tiene el diferencial estocástico $dX = F dt + G dB$, para $0 \leq t \leq T$.

Teorema 6.1 (Fórmula de Itô) *Sea X con diferencial estocástico*

$$dX = F dt + G dB,$$

para $F \in H^1$ y $G \in H^2$. Supongamos que $u : R \times [0, T] \rightarrow R$ es una función continua y que existen las derivadas parciales u_t, u_x, u_{xx} también continuas.

Si $Y_t = u(X_t, t)$, entonces Y tiene diferencial estocástico:

$$dY = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 dt = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dB. \quad (35)$$

A (35) se le llama regla de la cadena de Itô o simplemente fórmula de Itô. Para una prueba junto con su generalización en varias dimensiones, véase [3] capítulo 8.

Observaciones:

- El argumento de u , u_t , etc es (X_t, t) .
- De acuerdo a nuestra definición de diferencial estocástico, la expresión (35) significa que para todo $0 \leq s \leq r \leq T$,

$$Y_r - Y_s = \int_s^r u_t + u_x F(\cdot, t) + \frac{1}{2} u_{xx} G^2(\cdot, t) dt + \int_s^r u_x G(\cdot, t) dB_t. \quad (36)$$

- Como $X_t = X_0 + \int_0^t F ds + \int_0^t G dB_s$, entonces $X(\cdot)$ tiene trayectorias continuas (casi siempre), lo mismo podemos decir de $Y(\cdot)$.

Teorema 6.2 (Regla del producto de Itô) Consideremos los siguientes procesos estocásticos con diferenciales

$$\begin{cases} dX^1 = F_1 dt + G_1 dB \\ dX^2 = F_2 dt + G_2 dB \end{cases}$$

con $F_i \in H^1(0, T)$, $G_i \in H^2(0, T)$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt.$$

Una demostración completa del lema de Itô junto con la regla del producto se puede encontrar en [5].

6.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Se dice que un proceso estocástico X real valuado es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX = a(X, t) dt + b(X, t) dB \\ X_0 = x_0 \in R \end{cases}$$

para $0 \leq t \leq T$ si se satisface que

- a) $F := a(X, t) \in H^1(0, T)$
- b) $G := b(X, t) \in H^2(0, T)$
- c) $X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s) ds + \int_0^t b(X_s, s) dB_s$ para toda $0 \leq t \leq T$.

Por ejemplo, supongamos que g es una función continua de cuadrado integrable, entonces la solución de

$$\begin{cases} dX = gX dB \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

es

$$X_t = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dB_s}.$$

Para verificar esto notemos que

$$Y_t := -\frac{1}{2} \int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dB_s$$

satisface $dY = -\frac{1}{2}g^2 dt + g dB$, aplicando a $u(x) = e^x$ la regla de la cadena de Itô tenemos que

$$dX = \frac{\partial u}{\partial x} dY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g^2 dt$$

y por lo tanto $dX = g dB$.

Un ejemplo interesante es el cálculo del precio de una acción: sea A_t el precio de una acción al tiempo $t \geq 0$, una forma de modelar la evolución de A_t es suponer que la razón de cambio relativa del precio de la acción satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dA}{A} = \mu dt + \sigma dB,$$

es decir, la evolución en el tiempo es similar al caso determinista pero existe una perturbación aleatoria debida a la incertidumbre que presenta el medio financiero.

Las cantidades μ y σ son conocidas como deriva y volatilidad respectivamente. Entonces podemos escribir la ecuación anterior como $dA = \mu A dt + \sigma A dB$ y una vez más por la regla de la cadena de Itô obtenemos

$$d(\log A) = \frac{dA}{A} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 A^2 dt}{A^2} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + dB.$$

En consecuencia $A_t = A_0 e^{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$.

Una observación adicional es que por definición de diferencial estocástico

$$A_t = A_0 + \int_0^t \mu A ds + \int_0^t \sigma A_s dB_s,$$

tomando esperanza y recordando que $E \left[\int_0^t \sigma A_s dB_s \right] = 0$ obtenemos

$$E[A_t] = A_0 + \int_0^t \mu A ds,$$

por lo tanto $E[A_t] = A_0 e^{\mu t}$. El valor esperado del precio de la acción coincide con el caso no estocástico.

Usaremos una técnica similar para encontrar la formula de representación de Feynman-Kac analizando una ecuación diferencial estocástica, por medio de la regla de la cadena de Itô relacionarla con una ecuación diferencial parcial y así obtener una formula en términos de una esperanza.

Ahora vamos a probar existencia de la solución de una ecuación diferencial estocástica sencilla pero que en el caso mas general la idea de la prueba es en esencia la misma.

Supongamos que $a : R \rightarrow R$ es C^1 con $|a'| \leq L$ para alguna constante L y consideremos la ecuación

$$\begin{cases} dX = a(X) dt + dB \\ X_0 = x \in R, \end{cases}$$

esta ecuación significa que $X_t = x + \int_0^t a(X) ds + B_t$ y sugiere que un esquema de aproximación similar al que se usa para ecuaciones diferenciales ordinarias define una solución. Definamos $X^0 \equiv x$ y entonces

$$X_t^{n+1} := x + \int_0^t a(X^n) ds + B_t$$

para $n \in N$ y todo $t \geq 0$.

Sea $d^n(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|$ y notemos que para una trayectoria continua del movimiento Browniano se tiene que $d^0(t) \leq C$ para alguna constante C que depende posiblemente de ω .

Aseguramos que

$$d^n(t) \leq C \frac{L^n t^n}{n!},$$

en efecto,

$$d^n(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^t a(X_r^n) - a(X_r^{n-1}) dr \right| \leq L \int_0^t d^{n-1}(s) ds,$$

haciendo un argumento inductivo se sigue que

$$L \int_0^t d^{n-1}(s) ds \leq L \int_0^t C \frac{L^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!} ds = C \frac{L^n t^n}{n!}.$$

De acuerdo a lo anterior, para $m \geq n$ se cumple que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^m - X_t^n| \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^k T^k}{k!} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Esto muestra que la sucesión $\langle X^n \rangle_{n \in N}$ es uniformemente Cauchy y por la completéz de $H^1(0, T)$ converge a un elemento de este mismo espacio.

Teorema 6.3 (Existencia y unicidad) Consideremos un par de funciones $a : R \times [0, T] \rightarrow R$ y $b : R \times [0, T] \rightarrow R$ continuas y que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $|a(x, t) - a(y, t)| \leq L|x - y|$ para toda $0 \leq t \leq T$, $x, y \in R$

$|b(x, t) - b(y, t)| \leq L|x - y|$ para toda $0 \leq t \leq T$, $x, y \in R$,

b) $|a(x, t)| \leq L(1 + |x|)$ para todo $0 \leq t \leq T$, $x \in R$

$|a(x, t)| \leq L(1 + |x|)$ para todo $0 \leq t \leq T$, $x \in R$,

para alguna constante L .

Sea X_0 una variable aleatoria tal que

c) $E[|X_0|^2] < \infty$

y

d) X_0 es independiente de $\sigma(\{B_t : t \geq 0\})$.

Entonces existe una solución única $X \in H^2(0, T)$ a la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX = a(X, t) dt + b(X, t) dB, (0 \leq t \leq T) \\ X_0 \in H^2(0, T) \end{cases}$$

La demostración es análoga a la discusión anterior, para los detalles véase [5].

Proposición 6.1 (Tiempo de paro especial: llegada a un conjunto) Considere la solución de la EDE:

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB$$

donde b , σ y X_0 satisfacen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad.

Sea E un subconjunto abierto o cerrado no vacío de R^n . Entonces

$$\tau := \text{Inf}\{t \geq 0 | X_t \in E\}$$

es un tiempo de paro (hacemos $\tau = \infty$ para aquellas trayectorias de $X(\cdot)$ que nunca llegan a E).

Dem: Primero supongamos que $E = U$ es abierto. Entonces $\omega \in \{\omega : \tau(\omega) \leq t\}$ ssi $\tau(\omega) \leq t$ y como $\tau(\omega)$ es la máxima cota inferior del conjunto

$$\{t \geq 0 : X_t \in U\} =: A$$

entonces t no pertenece a A . Esto implica que existe un $s \in A$ tal que $s \leq t$; esto es, $\omega \in \bigcup_{s \leq t} \{X_s \in U\}$, luego $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s \leq t} \{X_s \in U\}$.

Ahora, tomemos $s \leq t$ fijo y $\langle q_n \rangle \subset Q \cap [0, \infty)$ con $q_n \uparrow s$. Sea $A_s := \{X_s \in U\}$, si $\omega \in A_s$ entonces $X_s(\omega) \in U$ y como U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(X_s(\omega)) \subset U$.

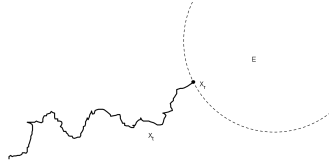


Figura 5: Tiempo de primer llegada a U

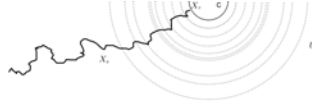


Figura 6: Tiempo de primer llegada a C

La continuidad de $X.(\omega)$ dice que existe $\delta > 0$ tal que si $|s - r| < \delta$ entonces $X_r(\omega) \in B_\epsilon(X_s(\omega)) \subset U$. Como $q_n \uparrow s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene $0 < s - q_n < \delta$, esto implica que $X_{q_n}(\omega) \in U$; es decir, $\omega \in A_{q_n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ con $q_n \leq s \leq t$.

Hemos mostrado que si $\omega \in \bigcup_{s \leq t} A_s$ entonces existe $q \leq t$ y $q \in Q$ tal que $\omega \in A_q$; es decir, se cumple la contención

$$\bigcup_{s \leq t} A_s \subset \bigcup_{q \in Q \cap [0, t]} A_q.$$

La contención

$$\bigcup_{q \in Q \cap [0, t]} A_q \subset \bigcup_{s \leq t} A_s$$

es obvia.

Concluimos que $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{q \in Q \cap [0, t]} A_q$, esta última unión es numerable y

$$A_q = \{X_q \in U\} \in F_q \subset F_t,$$

entonces $\{\tau \leq t\} \in F_t$.

Ahora, supongamos que $E = C$ es un conjunto cerrado y sea

$$d(x, C) = \text{Inf}\{|y - x| : y \in C\},$$

la función $d(\cdot, C)$ es continua, entonces los conjuntos $U_n := \{x : d(x, C) < \frac{1}{n}\}$ son abiertos para cada $n \in N$.

Vemos que $\tau(\omega) \leq t$ ssi $X_s(\omega) \in U_n$ para toda $n \in N$ y algún $s \leq t$; es decir, la trayectoria debió cruzar todos los conjuntos abiertos U_n que envuelven a C en algún tiempo anterior a t , por lo tanto

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n \in N} \bigcup_{s \leq t} \{X_s \in U_n\}.$$

Por el mismo argumento que en el caso anterior

$$\bigcup_{s \leq t} \{X_s \in U_n\} = \bigcup_{q_n \in Q \cap [0, t]} \{X_{q_n} \in U_n\}.$$

Esto implica que

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n \in N} \bigcup_{q_n \in Q \cap [0, t]} \{X_{q_n} \in U_n\}.$$

Pero $\{X_{q_n} \in U_n\} \in F_{q_n} \subset F_t$ y entonces $\{\tau \leq t\} \in F_t$. \diamond

Usando la fórmula de Itô podemos obtener una representación probabilística de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales. Para esto, recordemos que si $dX = b(X, t) dt + \sigma(X, t) dB$ entonces para cada función $u \in C^2 \cap H^2$ la fórmula de Itô nos dice que

$$u(X, t) - u(X_0, 0) = \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x} \sigma(X, s) dB_s,$$

para el operador diferencial $Lu = b(X, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2(X, t)$.

Con $\omega \in \Omega$ fijo la fórmula de Itô es válida para cada $0 \leq t \leq T$, parece razonable suponer que la fórmula sigue siendo válida si reemplazamos t por un tiempo de paro τ acotado, y lo es; basta con ver que la definición de integral de Itô con tiempo de paro es consistente haciendo para cada $G \in H^2$:

$$\int_0^\tau G dB_s := \int_0^T 1_{\{t \leq \tau\}} G dB_s.$$

La fórmula toma la siguiente forma:

$$u(X_\tau, \tau) - u(X_0, 0) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial x} \sigma dB_s.$$

Tomando esperanza obtenemos

$$E[u(X_\tau, \tau)] - E[u(X_0, 0)] = E \left[\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds \right] \quad (37)$$

La fórmula (37) es de gran importancia para la conexión con algunas ecuaciones diferenciales parciales como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.1 Sea $U \subset R^n$ un conjunto abierto con frontera suave ∂U . De acuerdo a la teoría estandar de las ecuaciones diferenciales parciales existe una solución suave u de la ecuación

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u = 1 & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Nuestra meta es encontrar una representación probabilística de u . Para esto, fijemos cualquier $x \in U$ y consideremos el movimiento browniano n -dimensional $\vec{B}(\cdot)$ y $\vec{X}(\cdot) = \vec{B}(\cdot) + x$ representa un movimiento browniano que inicia en x .

Definamos el tiempo de paro $\tau_x := \text{Inf}\{t \geq 0 \mid \vec{X}_t \in \partial U\}$, afirmamos que

$$u(x) = E[\tau_x].$$

En efecto, usamos la fórmula (37) con $Lu = \frac{1}{2}\Delta u$, para cada $n \in N$

$$E[u(\vec{X}_{\tau_x \wedge n})] - E[u(\vec{X}_0)] = E\left[\int_0^{\tau_x} \frac{1}{2}\Delta u ds\right].$$

Como $\tau_x \wedge n = \tau_x$ para algún $n \in N$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\tau_x \wedge n] < \infty$.

Entonces τ_x es integrable y obtenemos, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$u(x) - E[u(\vec{X}_{\tau_x})] = E\left[\int_0^{\tau_x} 1 ds\right] = E[\tau_x].$$

Pero $u = 0$ en ∂U , así que $u(\vec{X}_{\tau_x}) = 0$ y entonces $u(x) = E[\tau_x]$. \diamond

Ejemplo 6.2 (Representación probabilística de funciones armónicas)

Sean $U \subset R^n$ un dominio suave, acotado y $g : \partial U \rightarrow R$ una función continua. Es conocido de la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales parciales que existe una función $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ que satisface el problema de valor frontera

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

A u se le llama función armónica. Aseguramos que $u(x) = E[g(\vec{X}_{\tau_x})]$ para todo $x \in U$ y $\vec{X}(\cdot) = \vec{B}(\cdot) + x$, basta con observar que justo como antes,

$$E[u(\vec{X}_{\tau_x})] = E[u(\vec{X}_0)] + E\left[\int_0^{\tau_x} \frac{1}{2}\Delta u(\vec{X}_s) ds\right] = E[u(\vec{X}_0)] = u(x).$$

Como $u = g$ en ∂U se tiene que $E[g(\vec{X}_{\tau_x})] = u(x)$. \diamond

Ahora, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u + cu = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Supongamos que c y f son funciones continuas con $x \geq 0$ en U . Vamos a mostrar que si u es una solución, entonces admite la representación

$$u(x) = E \left[\int_0^{\tau_x} f(\vec{X}_t) e^{-\int_0^t c(\vec{X}_s) ds} dt \right],$$

donde como antes $\vec{X}(\cdot) = \vec{B}(\cdot) + x$ es el movimiento browniano n -dimensional que comienza en x y τ_x denota la primer llegada a ∂U .

Sabemos que $E[\tau_x] < \infty$ y como $c \geq 0$, las integrales anteriores convergen. Primero nos fijamos en el proceso $Y_t := e^{Z_t}$ para $Z_t := -\int_0^t c(\vec{X}_s) ds$, entonces $dZ = -c(\vec{X}) dt$ y la fórmula de Itô nos dice que si $v(z) = e^z$ entonces

$$dY = \frac{\partial v}{\partial z} dZ = e^Z (-c(\vec{X}) dt) = -Y c(\vec{X}) dt.$$

La regla del producto de Itô implica que

$$d\left(u(\vec{X}) e^{-\int_0^t c(\vec{X}) ds}\right) = d\left(u(\vec{X}) Y\right) = Y du(\vec{X}) + u(\vec{X}) dY.$$

Pero

$$du(\vec{X}) = \frac{1}{2} \Delta u(\vec{X}) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{X}) dB_i$$

y por lo tanto

$$d(uY) = \left\{ \frac{1}{2} \Delta u e^{-\int_0^t c ds} - Y cu \right\} dt + Y \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dB_i.$$

Tomando esperanza y usando la formula (37) con $\tau = \tau_x$, obtenemos

$$E \left[u(\vec{X}_{\tau_x}) e^{-\int_0^{\tau_x} c ds} \right] - E \left[u(\vec{X}_0) \right] = E \left[\int_0^{\tau_x} \left(\frac{1}{2} \Delta u - cu \right) e^{-\int_0^t c ds} dt \right].$$

Luego,

$$u(x) = E \left[u(\vec{X}_0) \right] = E \left[\int_0^{\tau_x} f(\vec{X}) e^{-\int_0^t c(\vec{X}) ds} \right]. \quad (38)$$

Una interpretación heurística de la fórmula anterior es la siguiente. Suponga que partículas que se mueven de forma browniana podrían desaparecer en un tiempo aleatorio σ , por ejemplo, podrían ser absorbidas por el medio en el que se mueven.

Supongamos que la probabilidad de ser eliminadas en un intervalo de tiempo $[t, t+h]$ es $c(\vec{X}_t)h + o(h)$ donde c es la tasa de aniquilación (que depende de la posición y el tiempo). Entonces la probabilidad de que la partícula sobreviva hasta el tiempo t , es aproximadamente igual a

$$\left(1 - c(\vec{X}_{t_1})h\right) \left(1 - c(\vec{X}_{t_2})h\right) \cdots \left(1 - c(\vec{X}_{t_n})h\right),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $h = t_{k+1} - t_k$.

Conforme $h \rightarrow 0$ esta probabilidad converge a $e^{-\int_0^t c(\vec{X}_s)ds}$.

Entonces debería ser que

$$\begin{aligned} u(x) &= \text{Promedio de } f(\vec{X}) \text{ sobre trayectorias que sobreviven hasta } \partial U \\ &= E \left[\int_0^{\tau_x} f(\vec{X}_t) e^{-\int_0^t c(\vec{X}_s)ds} dt \right]. \end{aligned}$$

A esta última expresión se le conoce cómo la fórmula de Feynman-Kac.

Vamos a analizar la fórmula anterior de una manera un tanto más precisa para el caso unidimensional. La representación de Feynman-Kac nos dice que para cualquier par de funciones $q: R \rightarrow R$ y $f: R \rightarrow R$ y para cualquier solución acotada $u(t, x)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \frac{1}{2}u_{xx}(t, x) + q(x)u(t, x) \\ u(0, x) = f(x), \end{cases}$$

entonces $u(t, x)$ puede ser representada como

$$E \left[f(x + B_t) e^{\int_0^t q(x+B_s)ds} \right]. \quad (39)$$

Los beneficios de ésta representación son varios, en los que destaca de forma inmediata es que proporciona información del comportamiento global de la trayectoria del movimiento browniano.

Para dar un ejemplo concreto; supongamos que queremos saber cual es la cantidad de tiempo T_t que el movimiento browniano gasta en el conjunto $[0, \infty)$ durante el periodo de tiempo $[0, t]$. Vemos que T_t puede ser representado como

$$T_t = \int_0^t 1_{(B_s \geq 0)} ds.$$

Podemos tomar $q(x) = -\lambda 1_{(x \geq 0)}$ y $f(x) = 1$ en la fórmula (39) para encontrar que

$$u(t, 0) = E \left[\exp \left(-\lambda \int_0^t 1_{(B_s \geq 0)} ds \right) \right] = E [\exp(-\lambda T_t)]$$

representa la transformada de Laplace de T_t . Resolviendo el problema de valor inicial planteado podemos calcular esta transformada y deducir que T_t tiene una distribución arco-seno, un notable resultado de P.Lévy.

Sabemos que para una función bien comportada (dos veces continuamente diferenciable digamos) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existe una solución acotada $u(t, x)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \frac{1}{2} u_{xx}(t, x) \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Es conocido de la teoría estándar de las ecuaciones diferenciales parciales que la solución puede ser escrita como la integral gaussiana

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-\frac{(v-x)^2}{2t}} dv.$$

Por inspección podemos ver que $u(t, x)$ puede ser escrita como

$$u(t, x) = E[f(x + B_t)],$$

que es precisamente la fórmula de Feynman-Kac para el caso especial $q = 0$.

6.3. Movimiento Browniano aniquilado

Tome cualquier variable aleatoria no negativa T y definamos el proceso $\{X_t\}$ con valores en el conjunto $\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$ como

$$X_t = \begin{cases} B_t & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ \Delta & \text{si } t > T. \end{cases}$$

El valor de Δ realmente no importa mientras sea fijo, sólo es un artificio para que la caminata browniana tenga un lugar a donde ir una vez que es aniquilada, podemos extender la definición de f al conjunto $\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$ haciendo $f(x + \Delta) \equiv 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos también que T tiene una distribución exponencial con parámetro λ independiente de B_t ; esto es, $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$.

Nos preguntamos ahora si podemos encontrar un problema de valor inicial que sea satisfecho por $u(t, x) = E[f(x + X_t)]$. Claramente $u(0, x) = f(x)$, veamos como es u_t :

Por la definición de $u(t, x)$ junto con la independencia de B_t con el tiempo de aniquilación T ,

$$E[f(x + X_t)] = E[f(x + X_t) (1_{(0 \leq t \leq T)} + 1_{(T < t)})]$$

y

$$E[f(x + B_t) 1_{(0 \leq t \leq T)}] = P(T \geq t) E[f(x + B_t)],$$

entonces

$$u(t, x) = E[f(x + X_t) 1_{(T < t)}] + E[f(x + X_t) 1_{(0 \leq t \leq T)}] = e^{-\lambda t} E[f(x + B_t)].$$

Calculando directamente la derivada tenemos que

$$u_t(t, x) = e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} E[(x + B_t)] - \lambda e^{-\lambda t} E[f(x + B_t)].$$

Luego, recordando que $E[f(x + B_t)]$ satisface la ecuación de calor se sigue que

$$u_t(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E[f(x + X_t) 1_{(T > t)}] - \lambda E[f(x + X_t) 1_{(T > t)}]$$

lo cual muestra que $u_t = \frac{1}{2} u_{xx} - \lambda u$.

Para darnos una idea de como se debería ver el caso en el que q no es constante, podemos interpretar a $E[f(x + B_t)] e^{-\lambda t}$ como un pago llevado a valor presente con una tasa de interés λ , el factor correspondiente $e^{\int_0^t q(x+X_s) ds}$ quizá lo podríamos interpretar como la fuerza de interés actuando en la trayectoria de $x + X_t$.

6.4. Representación de Feynman-Kac

Nuestro trabajo ahora será encontrar una martingala $\{M_t\}$ para la cual

$$M_0 = u(t, x)$$

y

$$E[M_t] = E\left[f(x + B_t) e^{\int_0^t q(x+B_s) ds}\right].$$

Cualquier martingala satisface $E[M_0] = E[M_t]$; es decir,

$$u(t, x) = E[M_t] = E\left[f(x + B_t) e^{\int_0^t q(x+B_s) ds}\right],$$

uno puede pensar en esta técnica como algún tipo de interpolación.

Teorema 6.4 (Representación de Feynman-Kac) Consideremos un par de funciones $q: R \rightarrow R$, $f: R \rightarrow R$ acotadas y el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \frac{1}{2} u_{xx}(t, x) + q(x) u(t, x) \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (40)$$

Si u es una solución acotada del problema de valor inicial (40), entonces tiene la representación

$$u(t, x) = E\left[f(x + B_t) e^{\int_0^t q(x+B_s) ds}\right]. \quad (41)$$

Dem: Consideremos $M_s := u(t-s, x+B_s) e^{\int_0^s q(x+B_v) dv}$, por la fórmula de Itô y como $u(t, x)$ satisface la ecuación diferencial parcial (40) tenemos que (haciendo $N_s = x + B_s$)

$$\begin{aligned} du(t-s, N_s) &= -u_t(t-s, N_s) ds + \frac{1}{2} u_{xx}(t-s, N_s) ds + u_x(t-s, N_s) dB_s \\ &= -q(N_s) u(t-s, N_s) ds + u_x(t-s, N_s) dB_s. \end{aligned}$$

Por la fórmula del producto de Itô, encontramos que dM_s es igual a

$$\begin{aligned} dM_s &= e^{\int_0^s q(N_r) dr} \{u_x(t-s, N_s) dB_s - q(N_s) u(t-s, N_s) ds + q(N_s) u(t-s, N_s) ds\} \\ &= e^{\int_0^s q(x+B_r) dr} u_x(t-s, x+B_s) dB_s. \end{aligned}$$

La última igualdad muestra que $\{M_s : 0 \leq s \leq t\}$ es una versión de la integral de Itô de una función en L^2_{LOC} y por lo tanto es una martingala local. Además, por la definición de M_s y como q junto con f son acotadas, encontramos que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \leq \|u\|_{\infty} e^{t\|q\|_{\infty}}.$$

Entonces $\{M_s : 0 \leq s \leq t\}$ es una martingala local acotada y en consecuencia es una martingala, por lo tanto

$$u(t, x) = E[M_0] = E[M_t] = E\left[f(x+B_t) e^{\int_0^t q(x+B_s) ds}\right]. \diamond$$

7. Ondas viajeras para la ecuación F-KPP

Consideremos la ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovski-Piscounov de reacción-difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(u-1), \quad (42)$$

donde $u = u(t, x)$ es una función de $[0, \infty) \times R$.

Particular atención se ha puesto a soluciones de la forma $u(t, x) = w(x-ct)$ con w satisfaciendo

$$\frac{1}{2} \ddot{w} + c\dot{w} + rw(w-1) = 0. \quad (43)$$

Tal solución w es conocida como onda viajera de velocidad c .

Estamos interesados en ondas viajeras monótonas de velocidad c que conectan a 0 con 1, donde $w : R \rightarrow R$ es dos veces diferenciable, satisface (43) con $w(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$, $w(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\dot{w}(x) > 0$ para toda $x \in R$.

Veremos que al considerar un movimiento browniano ramificado, el estudio de algunas martingalas llevan a la existencia de ondas viajeras monótonas con velocidad $c > \sqrt{2r}$. También encontraremos un argumento que revela la no existencia

de ondas viajeras monótonas con velocidad $c < \sqrt{2r}$. Un tratado especial se tiene que dar para la velocidad crítica $c = \sqrt{2r}$.

El resultado principal es dar el comportamiento asintótico de tales ondas viajeras, en particular si consideramos un movimiento browniano de una sola partícula se muestra que dada una onda viajera con velocidad $c \geq \sqrt{2r}$, su comportamiento asintótico tiene que lucir esencialmente como la solución de decaimiento más lenta f de la linealización alrededor del objetivo 1, satisfaciendo

$$\frac{1}{2}\ddot{f} + c\dot{f} + rf = 0. \quad (44)$$

Para encontrar la velocidad crítica se puede consultar [4], donde los autores se enfocan principalmente en técnicas de análisis y la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La combinación de este resultado asintótico junto con el estudio del movimiento browniano ramificado, se encuentra la unicidad de las ondas viajeras monótonas que conectan 0 con 1 salvo traslaciones por una constante.

7.1. Asintótica de ondas viajeras con velocidad $c \geq \sqrt{2r}$

Primero consideraremos ondas viajeras con velocidad estrictamente mayor que la velocidad crítica $\sqrt{2r}$.

Teorema 7.1 *Sea w una onda viajera con velocidad $c > \sqrt{2r}$. Entonces existe una $y \in \mathbb{R}$ tal que*

$$1 - w(x) \approx e^{\lambda(x+y)}$$

conforme $x \rightarrow \infty$, donde λ es la raíz más grande de $\frac{1}{2}\lambda^2 + c\lambda + r = 0$; esto es, $\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2r} < 0$.

Dem: Sea $u = 1 - w$, entonces u es estrictamente decreciente de 1 a 0 y satisface

$$\frac{1}{2}\ddot{u} + c\dot{u} + ru(1 - u) = 0. \quad (45)$$

Sea $M_s = u(cs + B_s) e^{r \int_0^s (1 - u(cv + B_v)) dv}$ y $W_s = cs + B_s$, por la formula de Itô el diferencial estocástico de u es

$$du(W_s) = c\dot{u}(W_s) ds + \frac{1}{2}\ddot{u}(W_s) ds + \dot{u}(W_s) dB_s = -r(1 - u(W_s))u(W_s) ds + \dot{u}(W_s) dB_s,$$

de acuerdo a la formula de Itô encontramos que el diferencial estocástico de M_s es

$$dM_s = e^{r \int_0^s (1 - u(cv + B_v)) dv} [c\dot{u}(W_s) dB_s - (1 - u(W_s))u(W_s) ds + (1 - u(W_s))u(W_s) ds],$$

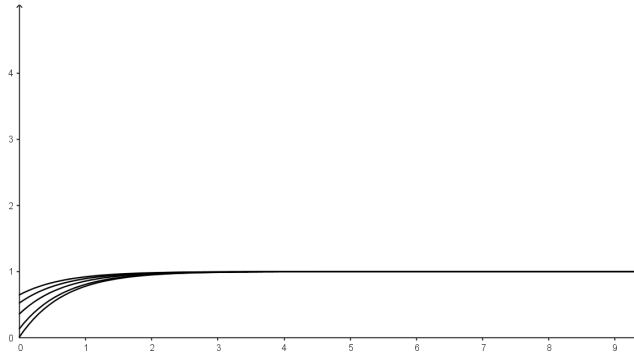


Figura 7: Perfiles de $v = 1 - w$ con velocidad mayor que $\sqrt{2}$

por lo tanto

$$dM_s = e^r \int_0^s (1 - u(cv + B_v)) dv [c \dot{u}(W_s) dB_s].$$

La última ecuación muestra que $\{M_s : s \leq t\}$ es una versión de la integral de Itô de una función en L^2_{LOC} y entonces

$$u(B_t + ct) e^r \int_0^t (1 - u(B_s + cs)) ds$$

es una martingala local y como $0 \leq u \leq 1$, es también acotada para cada tiempo fijo, por tanto es una martingala y si $X_t = B_t + x$ entonces

$$u(X_t + ct) e^r \int_0^t (1 - u(X_s + cs)) ds$$

también es una martingala local acotada y por lo tanto es una martingala.

Luego

$$\begin{aligned} u(x) &= E[u(X_0)] \\ &= E\left[u(X_t + ct) e^r \int_0^t (1 - u(X_s + cs)) ds\right] \\ &=: E^x\left[u(B_t + ct) e^r \int_0^t (1 - u(B_s + cs)) ds\right]. \end{aligned}$$

La notación E^x significa que se condiciona con respecto al inicio del movimiento browniano, en este caso comienza en x .

Para $\lambda \in R$ podemos expresar la esperanza anterior como

$$e^{-\lambda x} u(x) = E^x \left[e^{-\lambda(X_t + ct)} u(X_t + ct) e^{-r \int_0^t u(X_s + cs) ds} e^{\lambda(X_t - x) + (r + c\lambda)t} \right].$$

Si escogemos λ tal que $r + c\lambda = -\frac{1}{2}\lambda^2$, el término dentro de la esperanza se convierte en una martingala que cambia la deriva del movimiento browniano.

Así que tomamos $\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2r} < 0$ y $\lambda + c > 0$, entonces sean

$$v(x) := e^{-\lambda x} u(x)$$

y X un movimiento browniano con deriva λ .

Bajo la medida de probabilidad $P_\lambda = e^\lambda P$ tenemos que

$$v(x) = E_\lambda^x \left[v(X_t + ct) e^{-r \int_0^t u(X_s + cs) ds} \right],$$

donde el subíndice denota que estamos tomando la esperanza con respecto a la nueva medida P_λ . Esto muestra que el proceso

$$v(X_t + ct) e^{-r \int_0^t u(X_s + cs) ds} \tag{46}$$

es una P_λ -martingala positiva y por tanto casi seguramente convergente (Apéndice B).

El primer objetivo será mostrar que $\int_0^\infty u(X_s + cs) ds < \infty$ c.s $[P_\lambda]$.

Tomando logaritmo en (46) y luego dividiendo entre $X_t + ct$ obtenemos:

$$0 \geq \frac{\log v(X_t + ct)}{X_t + ct} - \frac{r}{X_t + ct} \int_0^t u(X_s + cs) ds,$$

ya que $0 \leq v \leq 1$. Lo mismo podemos decir casi seguramente $[P_\lambda]$ del limite superior; esto es,

$$0 \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log v(X_t + ct)}{X_t + ct} - \frac{r}{X_t + ct} \int_0^t u(X_s + cs) ds \right\}.$$

Notemos que $\frac{1}{t} \int_0^t u(X_s + cs) ds \leq \sup_{s \leq t} u(X_s + cs)$. Y como $u(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $X_t + ct \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ casi seguramente bajo $[P_\lambda]$ (recordemos que $c + \lambda > 0$ y la medida P_λ solamente escala λ unidades la deriva del movimiento browniano X_t), se sigue que $u(X_t + ct) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto

$$\frac{1}{t} \int_0^t u(X_s + cs) ds \rightarrow 0$$

c.s $[P_\lambda]$.

Además $X_t/t \rightarrow \lambda$ ya que X_t tiene deriva λ , luego $(X_t + ct)/t \rightarrow c + \lambda > 0$ y por tanto el recíproco de este límite es finito.

De éstas observaciones tenemos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log v(X_t + ct)}{X_t + ct} \leq 0$$

casi seguramente con respecto a P_λ . Pero $v(X_t + ct) = e^{\lambda(X_t + ct)} u(X_t + ct)$.

Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log u(X_t + ct)}{X_t + ct} \leq \lambda,$$

el decrecimiento de u es exponencialmente rápido con una tasa $\lambda < 0$.

Lo anterior implica que está siempre acotada por una función integrable y deducimos que

$$\int_0^\infty u(X_s + cs) ds < \infty.$$

Adicionalmente, como la σ -álgebra de cola de un movimiento browniano con deriva es trivial (ley 0-1 de Kolmogorov, apéndice A), debemos tener que

$$v(X_t + ct) \rightarrow K$$

para alguna constante $K \geq 0$. Entonces por la propiedad de ser P_λ -martingala concluimos que

$$v(x) = E^x \left[v(X_t + ct) e^{-r \int_0^t u(X_s + cs) ds} \right] = K E^x \left[e^{-r \int_0^\infty u(X_s + cs) ds} \right]. \diamond$$

Ahora consideremos ondas viajeras con velocidad crítica $\sqrt{2r}$.

Teorema 7.2 *Sea w una onda viajera con velocidad $\tilde{c} = \sqrt{2r}$. Entonces existe un $\tilde{y} \in R$ tal que*

$$1 - w(x) \approx x e^{\tilde{\lambda}(x + \tilde{y})}$$

cuando $x \rightarrow \infty$, donde $\tilde{\lambda}$ es la raíz repetida de $\frac{1}{2}\lambda^2 + \tilde{c}\lambda + r = 0$ (así que $\tilde{\lambda} = -\sqrt{2r}$).

Dem: El argumento que se usó en el teorema anterior ahora ya no es válido ya que $\frac{1}{2}\lambda^2 + \sqrt{2r}\lambda + r = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{2r})^2$ tiene raíces repetidas para $\lambda + \tilde{c} = 0$. De forma crucial para poder hacer un cambio de medida que nos permita encontrar una martingala acotada necesitamos que $\lambda + \tilde{c} > 0$.

Sin embargo usando $\tilde{\lambda} = -\tilde{c} + \delta$ para $\delta > 0$ pequeño y siguiendo las mismas ideas como antes, nos lleva a

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log u(x)}{x} \leq \tilde{\lambda} - \frac{\delta}{2} = -\sqrt{2r} + \frac{\delta}{2}.$$

Una vez más, encontramos decaimiento exponencial en u con una tasa al menos como $\sqrt{2r} + \frac{\delta}{2}$.

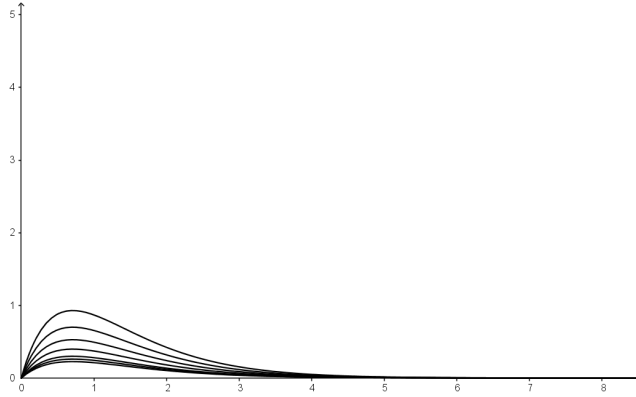


Figura 8: Perfiles de $v = 1 - w$ con velocidad igual a $\sqrt{2}$

Ahora, notemos que la linealización de la ecuación para u alrededor de 0 es $\frac{1}{2}\ddot{f} + \sqrt{2r}\dot{f} + rf = 0$, que tiene soluciones de la forma $e^{-\sqrt{2r}x}$ y $xe^{-\sqrt{2r}x}$.

Escribamos $u = fv$ donde f es una de estas soluciones, v satisfice:

$$f \left(\frac{1}{2}\ddot{v} + \left(\sqrt{2r} + \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{v} - ruv \right) = 0. \quad (47)$$

Tomando $f(x) = xe^{-\sqrt{2r}x}$ en (47) debemos tener para $x > 0$ que v satisfice

$$\frac{1}{2}\ddot{v} + \frac{1}{x}\dot{v} - ruv = 0.$$

Este es la deriva que corresponde a un proceso de Bessel, usando la definición $v(x) = u(x)/xe^{-\sqrt{2r}x}$ y la fórmula de Itô se verifica que $v(R_t)e^{-r\int_0^t u(R_s)ds}$ es una martingala local cuando R_t es un proceso de Bessel con generador asociado $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$, pero cerca de cero v no está acotada y por lo tanto no necesariamente es una martingala, sin embargo, martingalas locales positivas son supermartingalas positivas y entonces debe de converger.

Ademas u decae exponencialmente, esto garantiza que $\int_0^\infty u(R_s)ds < \infty$. En consecuencia $v(R_t)$ es convergente c.s y como la σ -álgebra de cola de R es también trivial, existe una constante $K \geq 0$ tal que $v(R_t) \rightarrow K$ c.s conforme $t \rightarrow \infty$.

Queremos mostrar que $K > 0$, para ello procedemos por contradicción.

Si $K = 0$, tenemos que $u(x)/xe^{\lambda x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Sea $y > 0$ y $x > y$, usando la propiedad de martingala local para el tiempo de paro $T_y = \text{Inf} \{t > 0 : R_t = y\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{u(x)}{xe^{\lambda x}} &= E^x \left[\frac{u(R_{t \wedge T_y})}{R_{t \wedge T_y} e^{\lambda R_{t \wedge T_y}}} e^{-r \int_0^{t \wedge T_y} u(R_s) ds} \right] \\ &= \frac{u(y)}{ye^{\lambda y}} E^x \left[e^{-r \int_0^{T_y} u(R_s) ds} | T_y < \infty \right].\end{aligned}$$

Ahora, para el proceso de Bessel encontramos que $P^x(T_y < \infty) = y/x$, así que

$$\frac{u(x)}{xe^{\lambda x}} \leq \frac{u(y)}{ye^{\lambda x}} P^x(T_y < \infty) = \frac{u(y)}{xe^{\lambda y}}.$$

Como $x > y$ tenemos que la función $u(x)/e^{\lambda x}$ es positiva, continua y decreciente para $x > 0$, también tiende a cero cuando $x \rightarrow -\infty$ ya que el decrecimiento de u es al menos exponencial.

Recordamos que $u(B_t)/e^{\lambda B_t} e^{-r \int_0^t u(B_s) ds}$ es una martingala local, positiva y además acotada. Entonces podemos decir que $u(B_t)/e^{\lambda B_t}$ es una submartingala positiva y acotada, por lo tanto es convergente.

Como la σ -álgebra de cola del movimiento browniano es trivial, la convergencia debe de ser a una constante $C \geq 0$.

Entonces $u(B_t)/e^{\lambda B_t} \rightarrow C$ c.s cuando $t \rightarrow \infty$ y como $\limsup B_t = \infty$, $\liminf B_t = -\infty$ se tiene de hecho $u(B_t)/e^{\lambda B_t} \equiv C$, pero sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u(x)}{e^{\lambda x}} = 0,$$

esto implica que $u(x) \equiv 0$ y por lo tanto u no es una onda viajera monótona que conecta a 0 con 1, en consecuencia $K > 0$. \diamond

Consideremos ahora un movimiento browniano ramificado estándar donde cada partícula actualmente viva realiza un movimiento browniano estándar y tiene un solo descendiente en forma de partícula a una tasa r que se mueve de forma independiente de su posición de nacimiento también como un movimiento estándar dando nacimientos a una tasa r y así sucesivamente.

Una vez que nacen viven para siempre y son etiquetados en orden de nacimiento con N_t representando el número de partículas vivas al tiempo t y $X_t^{(k)}$ representando la posición al tiempo t de la k -ésima partícula para $k = 1, 2, \dots, N_t$. (Para ver por que la representación de Feynman-Kac satisface la ecuación F-KPP bajo un proceso de ramificación browniano véase [7])

7.2. Martingalas Aditivas

Sea $f : R \rightarrow R$ al menos dos veces diferenciable y que satisface $\frac{1}{2}f'' + cf' + rf = 0$.

Entonces

$$\sum_{k=1}^{N_t} f\left(X_t^{(k)} + ct\right) \quad (48)$$

es una martingala local. Podemos definir entonces a la familia parametrizada de martingalas aditivas $Z_t^{(\lambda)} := \sum_{k=1}^{N_t} e^{\lambda(X_t^{(k)} + c_\lambda t)}$ donde $c_\lambda = -\frac{r}{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda$.

Si $-\sqrt{2r} < \lambda \leq 0$ entonces la martingala local $Z_t^{(\lambda)}$ es acotada (basta comparar la suma con una serie geométrica) estrictamente positiva y por tanto convergente; esto es, $Z_t^{(\lambda)} \rightarrow Z_\infty^{(\lambda)}$ c.s.

También es cierto que $\prod_{k=1}^{N_t} w\left(X_t^{(k)} + ct\right)$ es una martingala local siempre que w satisfaga la ecuación de onda viajera $\frac{1}{2}\ddot{w} + c\dot{w} + rw(w - 1) = 0$.

Consideremos al proceso $M_t^{(\lambda)} := E\left[e^{-Z_\infty^{(\lambda)}} | F_t\right]$, entonces este proceso es una martingala, además para $-\sqrt{2r} < \lambda \leq 0$ es acotada y $M_t^{(\lambda)} \rightarrow e^{-Z_\infty^{(\lambda)}}$ c.s.

Si definimos $w_\lambda(x) := E^x\left[e^{-Z_\infty^{(\lambda)}}\right] = E^0\left[e^{-e^{\lambda x} Z_\infty^{(\lambda)}}\right]$, vemos que w_λ es monótona creciente y conecta a 0 con 1.

Notando que $Z_\infty^{(\lambda)} = \sum_{k=1}^{N_t} e^{\lambda(X_t^{(k)} + c_\lambda t)} W_k$ donde las variables aleatorias W_k para $k = 1, 2, \dots, N_t$ son independientes unas de las otras y al proceso hasta el tiempo t , cada una idénticamente distribuidas como $Z_\infty^{(\lambda)}$ comenzando con una sola partícula en el origen. Entonces

$$\begin{aligned} M_t^{(\lambda)} &= E\left[e^{-Z_\infty^{(\lambda)}} | F_t\right] \\ &= E\left[\prod_{k=1}^{N_t} e^{-e^{\lambda(X_t^{(k)} + c_\lambda t)} W_k} | F_t\right] \\ &= \prod_{k=1}^{N_t} E\left[e^{-e^{\lambda(X_t^{(k)} + c_\lambda t)} W_k} | F_t\right] \\ &= \prod_{k=1}^{N_t} w_\lambda\left(X_t^{(k)} + c_\lambda t\right). \end{aligned}$$

Tenemos que $\prod_{k=1}^{N_t} w_\lambda\left(X_t^{(k)} + c_\lambda t\right)$ es una martingala uniformemente integrable con $w_\lambda(x) = E^x\left[\prod_{k=1}^{N_t} w_\lambda\left(X_t^{(k)} + c_\lambda t\right)\right]$, por lo tanto w_λ satisface la ecuación de onda viajera

$$\frac{1}{2}\ddot{w}_\lambda + c_\lambda \dot{w}_\lambda + rw_\lambda(w_\lambda - 1) = 0,$$

esto proporciona existencia de ondas viajeras monótonas de 0 a 1 para todas las velocidades $c > \sqrt{2r}$.

7.3. Unicidad de ondas viajeras

Sea w una onda viajera monótona que conecta a 0 con 1 con velocidad $c > \sqrt{2r}$, entonces $M_t := \prod_{k=1}^{N_t} w(X_t^{(k)} + ct)$ es una martingala acotada tal que para cada $t \geq 0$,

$$w(x) = E^x [M_0] = E^x [M_t] = E^x \left[\prod_{k=1}^{N_t} w(X_t^{(k)} + ct) \right].$$

Como tenemos una martingala positiva entonces es convergente c.s a una variable aleatoria M_∞ y como M_t es acotada, también es uniformemente integrable con $M_t = E[M_\infty | F_t]$ y $w(x) = E^x [M_\infty]$.

Definamos la posición de la partícula más hacia la izquierda $L_t := \inf_{k \leq N_t} X_t^{(k)}$.

Notemos que $Z_t^{(-\sqrt{2r})} \leq \min_{k \leq N_t} N_t e^{-\sqrt{2r}(X_t^{(k)} + \sqrt{2r}t)} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ c.s,

ya que el crecimiento de N_t es lineal, además $0 \leq e^{-\sqrt{2r}(L_t + \sqrt{2r}t)} \leq Z_t^{(-\sqrt{2r})}$ y encontramos que $L_t + \sqrt{2r}t \rightarrow \infty$ c.s.

El resultado asintótico de antes nos dice que existe un $y \in R$ tal que si

$$\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2r} < 0$$

entonces se cumple que $-\log \approx 1 - w(x) \approx e^{\lambda(x+y)}$ conforme $x \rightarrow \infty$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $D \in R$ tal que

$$1 - \epsilon \leq \frac{-\log w(x)}{e^{\lambda(x+y)}} \leq 1 + \epsilon$$

para todo $x \geq D$. Entonces, siempre que $L_t + ct \geq D$ se tiene

$$(1 - \epsilon) e^{\lambda y Z_t^{(\lambda)}} \leq -\log M_t = -\sum_{k=1}^{N_t} \log w(X_t^{(k)} + ct) \leq (1 + \epsilon) e^{\lambda y Z_t^{(\lambda)}},$$

haciendo $t \rightarrow \infty$ y como $L_t + ct \rightarrow \infty$ c.s encontramos que

$$(1 - \epsilon) e^{\lambda y Z_\infty^{(\lambda)}} \leq -\log M_\infty \leq (1 + \epsilon) e^{\lambda y Z_\infty^{(\lambda)}}.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, lo anterior implica que $M_\infty = e^{-e^{\lambda y Z_\infty^{(\lambda)}}}$ c.s. Esto nos dice que $w(x) = E^x [M_\infty] = E^{x+y} [e^{-Z_\infty^{(\lambda)}}] = w_\lambda(x+y)$. Así, w es una traslación de la onda viajera w_λ .

La unicidad en el caso critico es mas delicado para ver tal caso por medio de técnicas analíticas se puede consultar [4] y con técnicas probabilísticas ver [8].

Para concluir este texto mencionamos algunos aspectos de que nos interesan para estudios posteriores:

- Consideremos la ecuación

$$u_t = ru_{xx} + f(u)$$

con $r > 0$, supongamos que la función $f : R \rightarrow R$ es continua, diferenciable y satisface las siguientes condiciones:

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(u) > 0, \quad 0 < u < 1$$

$$f'(0) = \alpha > 0, \quad f'(u) < \alpha, \quad 0 < u \leq 1$$

Nos preguntamos si podemos esperar soluciones del tipo onda viajera y si las técnicas probabilísticas resultan efectivas para encontrar la existencia de soluciones y entender su comportamiento asintótico.

- Estudiar al operador diferencial L asociado al proceso estocástico que aparece en la formula de Itô, nos preguntamos por la interpretación probabilística de su espectro y el papel que juega como generador infinitesimal.
- La interpretación de los frentes de onda como la propagación de un continuo de estrategias desde el punto de vista de la teoría de juegos y vincular conceptos de equilibrio (equilibrio de Nash, equilibrio estratégicamente estable, etc.) con el equilibrio en el sentido de las ecuaciones diferenciales.

Apéndice A: *Movimiento Browniano*

Recordemos que una variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ si $P(X > x) = \int_x^\infty e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$ para toda $x \in R$.

Definición 1 Un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ es llamado movimiento browniano estándar si

- $B_0 = 0$.
- El proceso tiene incrementos independientes, i.e para todos los tiempos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, $B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}$, ..., $B_{t_2} - B_{t_1}$, B_{t_1} , son variables aleatorias independientes.
- Para todo $t \geq 0$ y $h > 0$, los incrementos $B_{t+h} - B_t$ tienen distribución normal con media cero y varianza h .
- La función $t \rightarrow B_t$ es continua c.s.

Proposición 1 (Inversión en el tiempo) Sea $\{B_t : t \geq 0\}$ un movimiento browniano estándar. Entonces el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ definido por

$$X_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ tB_{\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$

también es un movimiento browniano estándar.

Dem: Notemos que para cualquier $h > 0$ y $t \geq 0$,

$$X_{t+h} - X_t = (t+h)B_{\frac{1}{t+h}} - tB_{\frac{1}{t}} = hB_{\frac{1}{t+h}} - t\left(B_{\frac{1}{t}} - B_{\frac{1}{t+h}}\right),$$

que es una combinación lineal de variables aleatorias normales e independientes, entonces $X_{t+h} - X_t$ tiene una distribución normal con media cero y varianza $\frac{h^2}{t+h} + t^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+h}\right) = h$, claramente $X_0 = 0$.

Para ver la independencia de los incrementos consideremos $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Entonces para $0 < i \neq j \leq n$ tenemos que

$$\text{Cov}[X_{t_j} - X_{t_{j-1}}, X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] = (t_i \wedge t_j) - (t_{i-1} \wedge t_j) - (t_i \wedge t_{j-1}) + (t_{i-1} \wedge t_{j-1}).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i < j$, entonces

$$0 < t_{i-1} \leq t_i \leq t_{j-1} \leq t_j$$

evaluando directamente la última igualdad tenemos

$$\text{Cov}[X_{t_j} - X_{t_{j-1}}, X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] = 0.$$

Y como los incrementos son variables aleatorias normales, esto implica la independencia.

Las trayectorias $t \mapsto X_t$ para $t > 0$ son claramente continuas. Para $t = 0$ consideremos $\{X_t : t \in Q \cap (0, \infty)\}$, como $Q \cap (0, \infty)$ es denso en $(0, \infty)$ tenemos que

$$\lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ t \in Q \cap (0, \infty)}} X_t = \lim_{t \downarrow 0} X_t$$

pero para cada $t \in Q \cap (0, \infty)$ $X_t \sim N(0, t)$ entonces con probabilidad 1, $0 = \lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ t \in Q \cap (0, \infty)}} X_t$, concluimos que X_t es un movimiento browniano estándar. \diamond

Corolario 1 (Ley de los grandes números)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

Dem: sea X_t como en la proposición anterior entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} X_{\frac{t}{2}} = X_0 = 0. \diamond$$

Definición 2 Sean X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y considere un conjunto A de sucesiones en R tal que $\{X_1, X_2, \dots \in A\} \in F$. Se dice que el evento anterior es intercambiable si

$$\{X_1, X_2, \dots \in A\} \subset \{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots \in A\}$$

para todas la biyecciones $\sigma : N \rightarrow N$.

Teorema 1 (Ley 0-1 de Hewitt-Savage) Sea $\langle X_n \rangle$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces la σ -álgebra de eventos intercambiables Σ es trivial, i.e $P(A) \in \{0, 1\}$ para todo $A \in \Sigma$.

Dem: Sea $A \in \Sigma$ y $F_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Entonces existe una sucesión de eventos $A_n \in F_n$ tal que $P(A \Delta A_n) \rightarrow 0$ ya que $\sigma(\bigcup F_n)$ contiene a Σ . Podemos escribir $A_n = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in B_n\}$ para algún B_n boreliano de la σ -álgebra de Borel de R^n , sea $\tilde{A}_n = \{(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{2n}) \in B_n\}$ entonces por la intercambiabilidad, el mapeo $A \mapsto \tilde{A}_n$ deja invariante a A bajo P ya que este mapeo es una biyección.

Entonces $P(\tilde{A}_n \Delta A) = P(A_n \Delta A) \rightarrow 0$ y $P(A_n \cap \tilde{A}_n) \rightarrow P(A)$. Pero las variables aleatorias X_n son idénticamente distribuidas e independientes, tenemos entonces que

$$P(A_n \cap \tilde{A}_n) = P(A_n)P(\tilde{A}_n) = P^2(A_n) \rightarrow P(A).$$

Por lo tanto $P(A) \in \{0, 1\}$. \diamond

Proposición 2 *Casi siempre*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Dem: Por el lema de Fatou se tiene que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{B_n > c\sqrt{n}\}\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(B_n > c\sqrt{n}).$$

Sea $X_n = B_n - B_{n-1}$, entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{B_n > c\sqrt{n}\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^n X_j > c\sqrt{n} \right\},$$

este último evento es intercambiable debido a la independencia de los incrementos del movimiento browniano.

Por la ley 0-1 de Hewitt-Savage con probabilidad 1 se tiene que $B_n > c\sqrt{n}$ infinitas veces, i.e $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{B_n > c\sqrt{n}\}\right) = 1$.

Notemos que $\bigcap_{c \in \mathbb{N}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{B_n > c\sqrt{n}\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \right\}$, por lo tanto $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \right\}\right) = 1$. La parte del límite inferior se prueba de manera analoga. \diamond

Teorema 2 (Ley 0-1 de Kolmogorov) Sea $\langle X_n \rangle$ una sucesión de variables aleatorias independientes, defina la σ -álgebra de cola como

$$\tau = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots).$$

Entonces τ es trivial, i.e $P(A) \in \{0, 1\}$ para todo $A \in \tau$.

Dem: Sean $\tau_n = \sigma(X_{n+1}, \dots)$ y $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Entonces F_n es independiente de τ_m para toda $m \geq n$, por lo tanto F_n también es independiente de τ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Ahora, vemos que la σ álgebra $F_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right)$ también es independiente de τ ya que cada F_n lo es. Trivialmente, $A \in \tau$ implica que $A \in F_\infty$, entonces $P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A)$, por lo tanto $P(A) \in \{0, 1\}$. \diamond

Apéndice B: *Martingalas*

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, una familia de sub- σ -álgebras $\{F_n : n \geq 0\}$ se le llama filtración si $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F$.

Se verifica que $F_\infty = \sigma\left(\bigcup_n F_n\right)$ es una σ -álgebra y $F_\infty \subset F$, decimos que un proceso estocástico es adaptado a $\{F_n : n \geq 0\}$ si X_n es F_n -medible.

Definición 3 Un proceso estocástico X es llamado *martingala* relativo a una filtración $\{F_n\}$, si

- X es adaptado a $\{F_n\}$
- $E[|X_n|] < \infty$ para toda $n \in N$
- $E[X_n | F_{n-1}] = X_{n-1}$ c.s para toda $n \geq 1$.

Si la ultima condición se intercambia la igualdad por \leq se le llama *supermartingala* y si se intercambia por \geq se le llama *submartingala*.

Definición 4 (Tiempo de paro) Un mapeo $\tau : \Omega \rightarrow N \cup \{0, \infty\}$ es llamado *tiempo de paro* si $\{\tau \leq n\} \in F_n$ para toda $n \leq \infty$.

Teorema 3 (*Parada opcional de Doob*)

- a) Si τ es un tiempo de paro y X una supermartingala. Entonces X_τ es integrable y $E[X_\tau] \leq E[X_0]$ en cada una de las siguientes situaciones:
- i) τ es acotado (para algun $M > 0$ $|\tau| \leq M$ para toda n).
 - ii) X es acotado y τ finito casi siempre.
 - iii) $E[\tau] < \infty$ y para alguna $K > 0$ se cumple $|X_n - X_{n-1}| \leq K$ para toda n .
- b) Si cualquier condición i), ii), iii) se cumple y si X es una martingala, entonces $E[X_\tau] = E[X_0]$.

Dem: Sea $c_\tau = 1_{(n \leq \tau)}$ y notemos que $c_\tau X_n = X_{\tau \wedge n} - X_0$ el lado izquierdo es claramente integrable y por ser X supermartingala se tiene que $E[X_{\tau \wedge n} - X_0] = 0$.

Para i) podemos tomar $n = M$, para ii) hacemos $n \rightarrow \infty$ en

$$E[X_{\tau \wedge n} - X_0] \leq 0$$

y el teorema de convergencia dominada nos da la conclusión. Para iii) tenemos que

$$|X_{\tau \wedge n} - X_0| = \left| \sum_{j=1}^{\tau \wedge n} (X_j - X_{j-1}) \right| \leq K\tau,$$

además $E[K\tau] < \infty$, una vez mas por el teorema de convergencia dominada cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene el resultado. Para probar b) basta con aplicar a) a X y a $-X$. \diamond

Definición 5 (Numero de cruces) La variable aleatoria $U_{N,[a,b]}(\omega)$ es el numero de cruces en $[a, b]$ hechos por la trayectoria $n \mapsto X_n(\omega)$ hasta el tiempo N . Esta definida como el entero positivo k mas grande tal que podemos encontrar $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k < N$ con $X_{s_i}(\omega) < a$, $X_{t_i}(\omega) > b$ con $1 \leq i \leq k$.

Lema 1 (Cruces ascendentes de Doob) Sea X una supermartingala y $U_{N,[a,b]}$ el numero de cruces en $[a, b]$ al tiempo N . Entonces

$$(a - b) E [U_{N,[a,b]}] \leq E [(X_N - a)^-].$$

Para una demostración de este importante lema ver [5].

Teorema 4 Sea X una supermartingala acotada en L^1 tal que $\text{Sup}_n E [|X_n|] < \infty$.

Sean $a, b \in R$ con $a < b$, entonces con $U_{\infty,[a,b]} := \lim_{N \rightarrow \infty} U_{N,[a,b]}$ se tiene que

$$(b - a) E [U_{\infty,[a,b]}] \leq |a| + \text{Sup}_n E [|X_n|] < \infty$$

y por lo tanto $P(U_{\infty,[a,b]} = \infty) = 0$.

Dem: Por el lema anterior, tenemos para $N \in N$,

$$(b - a) E [U_{N,[a,b]}] \leq |a| + E [|X_N|] \leq |a| + \text{Sup}_n E [|X_n|].$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$ junto con el teorema de convergencia monótona obtenemos el resultado. \diamond

Teorema 5 (Convergencia de Doob) Sea X una supermartingala acotada en L^1 con $\text{Sup}_n E [|X_n|] < \infty$. Entonces $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existe c.s y es finita. (Por definición hacemos $X_\infty(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ para toda ω en la que existe el límite, así que X_∞ sera F_∞ -medible.

Dem: Sea $\Lambda := \{X_n \text{ no converge a un límite en } [-\infty, \infty]\}$, entonces

$$\Lambda = \{\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n\}.$$

Luego $\Lambda = \bigcup_{\{a,b \in Q: a < b\}} \Lambda_{a,b}$ con

$$\Lambda_{a,b} = \{\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n\} \subset \{U_{\infty,[a,b]} = \infty\}.$$

Por el teorema anterior $P(\Lambda_{a,b}) = 0$, esto implica que $P(\Lambda) = 0$. Entonces $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existe casi siempre en $[-\infty, \infty]$, el lema de Fatou muestra que

$$E [|X_\infty|] = E \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n| \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E [|X_n|] \leq \text{Sup}_n E [|X_n|] < \infty.$$

Así que $P(X_\infty \text{ es finito}) = 1$. \diamond

Corolario 2 Si X es una supermartingala no negativa, entonces $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existe casi siempre.

Dem: Es claro que X es acotada en L^1 ya que

$$E[|X_n|] = E[X_n] \leq E[X_0] < \infty. \diamond$$

Definición 6 (Integrabilidad uniforme) Una familia C de variables aleatorias es llamada uniformemente integrable si dado $\epsilon > 0$, existe $K \in [0, \infty)$ tal que $E[|X|1_{(|X|>K)}] < \epsilon$ para toda $X \in C$.

Notamos que para $\epsilon = 1$ existe $K_1 > 0$ tal que

$$E[|X|] = E[|X|1_{(|X|>K_1)}] + E[|X|1_{(|X|\leq K_1)}] \leq 1 + K_1,$$

entonces la integrabilidad uniforme implica que la familia C es uniformemente acotada en L^1 .

Lema 2 (Una propiedad sobre continuidad absoluta)

- a) Sea $X \in L^1$. Entonces dada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para $A \in F$ con $P(A) < \delta$ implica que $E[|X|1_A] < \epsilon$.
- b) Si $X \in L^1$ y $\epsilon > 0$ entonces existe $K > 0$ tal que $E[|X|1_{(|X|>K)}] < \epsilon$.

Dem: Para probar a), supongamos que la conclusión es falsa, entonces para algún $\epsilon_0 > 0$ podemos encontrar una sucesión $\langle F_n \rangle \subset F$ tal que $P(F_n) < 2^{-n}$ y $E[|X|1_{F_n}] \geq \epsilon_0$. Sea $H := \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n$ se verifica que $P(H) = 0$, pero el lema de Fatou nos dice:

$$E[|X|1_H] = \int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} |X|1_{F_n} dP \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |X|1_{F_n} dP \geq \epsilon_0,$$

lo cual es una contradicción.

Para probar b), sea $\delta > 0$ como en el inciso a), por la desigualdad de Markov tenemos que $KP(|X| > K) \leq E(|X|)$. Podemos escoger K de forma que $P(|X| > K) < \delta$. \diamond

Teorema 6 (Condiciones suficientes para la integrabilidad uniforme)

- a) Sea C una familia de variables aleatorias uniformemente acotada en L^p con $p > 1$ tal que para algún $M > 0$ se cumple $E[|X|^p] < M$ para toda $X \in C$. Entonces C es uniformemente integrable.

b) Sea C una familia de variables aleatorias dominadas por una variable aleatoria Y no negativa e integrable; esto es, $|X| \leq Y$ para toda $X \in C$ y $E[Y] < \infty$. Entonces C es uniformemente integrable.

Dem: Claramente para cualquier $v \geq K > 0$ se cumple que $v \leq K^{1-p}v^p$, entonces

$$E[|X|1_{(|X|>K)}] \leq K^{1-p}E[|X|^p 1_{(|X|>K)}] \leq K^{1-p}A.$$

Esto prueba a).

Ahora, $E[|X|1_{(|X|>K)}] \leq E[Y1_{(Y>K)}]$, usando la propiedad de continuidad absoluta para Y se obtiene el resultado. \diamond

Definición 7 (Convergencia en probabilidad) Sea X_n una sucesión de variables aleatorias y se sea X una variable aleatoria, decimos que $X_n \rightarrow X$ en probabilidad si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Lema 3 Si $X_n \rightarrow X$ c.s entonces $X_n \rightarrow X$ en probabilidad.

Dem: Dado $\epsilon > 0$, por el lema de Fatou:

$$0 = P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon). \diamond$$

Teorema 7 (Convergencia acotada débil) Sea $\langle X_n \rangle$ una sucesión de variables aleatorias convergente en probabilidad a una variable aleatoria X y para la cual existe $K > 0$ tal que $|X_n| \leq K$. Entonces $E[|X_n - X|] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Dem: Primero verificamos que $P(|X| \leq K) = 1$. Tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(|X| > K + k^{-1}) \leq P(|X - X_n| > k^{-1}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Entonces $P(|X| > K + k^{-1}) = 0$ y por lo tanto

$$P(|X| > K) = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{|X| > K + k^{-1}\}\right) = 0.$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$ podemos escoger n_0 tal que $P(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3}) < \frac{\epsilon}{3K}$ para $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned} E[|X_n - X|] &= E\left[|X_n - X|1_{(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3})}\right] + E\left[|X_n - X|1_{(|X_n - X| \leq \frac{\epsilon}{3})}\right] \\ &\leq 2KP\left(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3}\right) + \frac{\epsilon}{3} \\ &\leq \epsilon. \diamond \end{aligned}$$

Teorema 8 (condición suficiente para la convergencia en L^1) Sean $\langle X_n \rangle$ y X variables aleatorias tal que

- i) $X_n \rightarrow X$ en probabilidad y $X \in L^1$,
- ii) la sucesión $\langle X_n \rangle$ es uniformemente integrable.

Entonces $X_n \rightarrow X$ en L^1 .

Dem: Para $K > 0$ definamos $\phi_K : R \rightarrow R$ como

$$\phi_K(x) = \begin{cases} K & \text{si } x > K \\ x & \text{si } |x| \leq K \\ -K & \text{si } x < -K. \end{cases}$$

Con $\epsilon > 0$, por la propiedad de integrabilidad uniforme y por la parte b) del teorema sobre continuidad absoluta podemos escoger $K > 0$ tal que

$$E[|\phi_K(X_n) - X_n|] < \frac{\epsilon}{3}$$

para toda $n \in N$ y $|\phi_K(X) - X| < \frac{\epsilon}{3}$. Pero $|\phi_K(x) - \phi_K(y)| \leq |x - y|$, entonces $\phi_K(X_n) \rightarrow \phi_K(X)$ en probabilidad.

Por el teorema de convergencia dominada débil podemos escoger n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumple que $E[|\phi_K(X_n) - \phi_K(X)|] < \frac{\epsilon}{3}$. Por último, usando la desigualdad triangular concluimos que $E(|X_n - X|) < \epsilon$. \diamond

Teorema 9 Sea M una martingala uniformemente integrable. Entonces $M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existe c.s y pertenece a L^1 , además para cada n se tiene

$$M_n = E[M_\infty | F_n].$$

Dem: De acuerdo a la definición de integrabilidad uniforme M está acotada en L^1 , así que $M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ existe c.s y por el teorema anterior es convergente en L^1 .

Ahora, probamos que $M_n = E[M_\infty | F_n]$ c.s. Para $A \in F_n$ y $r \geq n$ la propiedad de martingala implica que $E[M_r 1_A] = E[M_n 1_A]$, pero

$$\begin{aligned} |E[M_r 1_A] - E[M_\infty 1_A]| &\leq E[|M_r - M_\infty| 1_A] \\ &\leq E[|M_r - M_\infty|]. \end{aligned}$$

Haciendo $r \rightarrow \infty$ encontramos que $E[M_\infty 1_A] = E[M_n 1_A]$ para toda n y todo $A \in F_n$, por definición de esperanza condicional se concluye que

$$M_n = E[M_\infty | F_n]. \diamond$$

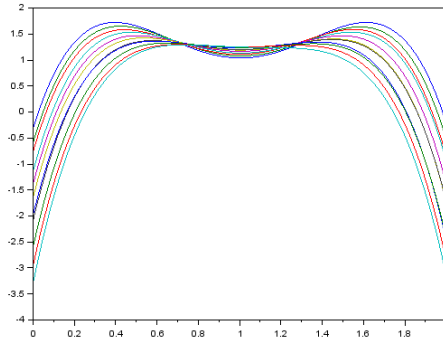


Figura 9: Ecuacion de calor

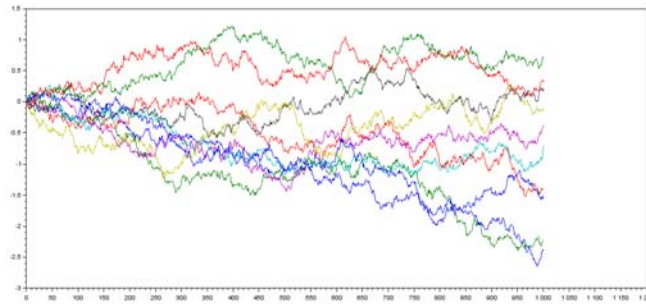


Figura 10: Trayectorias de un movimiento Browniano

Código de simulaciones

```
function [B]=TMB(dt,n,N) %% N trayectorias de un movimiento
    Browniano
    B=zeros(n+1,N);
    for j=1:N
        for i=1:n
            dB = sqrt(dt)*rand(1,'normal')
            B(i+1,j) = B(i,j) + dB;
        end
    end
end
endfunction
```

```

function [y]=poli(x)    %% Ecuacion de calor por medio de Montecarlo
p=0;
y=12*x-26*x.^2+20*x.^3-5*x.^4    %% u(x,0) es un polinomio fig 9
endfunction

```

```

function [u]=MCC(N,x,t)    %% N trayectorias Brownianas evaluadas en
    la condicion inicial y promediadas
p=0;
for i=1:N
    w = x + sqrt(t)*rand(1, 'normal')
    p = p + poli(w)
end
u = p/N
endfunction

```

```

function [u]=FKM(M,N,x,t,j)    %% Feynman-Kac de forma recursiva
    comenzando
dt=t/N; s=0;p=0;
select j
case 1 then
    u=f    %% Comenzando con una funcion f dada
else
    for i=1:M
        for k=1:N-1
            s=s + (1 - FKM(M,N,x+sqrt(k*dt)*rand(1, 'normal')+c*t,t,j-1))*dt
        end
        w= x + sqrt(t)*exp(s)
        p= p + FKM(M,N,w,t,j-1)*exp(s)
        u= p/M
    end
end
endfunction

```

Referencias

- [1] David Williams (1991) Probability with Martingales, Cambridge University Press
- [2] Fisher, R. A. (1937) The wave of advance of an advantageous gene. Ann. Eugenics, 7, 353-369.
- [3] J.Michael Steele. (2001) Stochastic Calculus and Financial Applications, Springer
- [4] Kolmogorov, A.N., Petrowski, I. Piscounov, N. (1937) *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application á un problème biologique*, Mosc. Univ. Bull. Math. 1, 1-25.
- [5] Lawrence C. Evans. Stochastic Differential Equations, <http://math.berkeley.edu/evans>
- [6] Martin A. Nowak. (2006) Evolutionary Dynamics: exploring the equations of life, Harvard University Press
- [7] McKean, H. P. (1975) Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov- Petrovskii-Piskunov. Comm. Pure Appl. Math., 28, 323-331.
- [8] Simon C. Harris. (1999) Travelling-waves for the FKPP equation via probabilistic arguments, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 129. pag. 503-517.