



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CÁLCULO NUMÉRICO DE DOMINIOS DE ANALITICIDAD PARA EL
MAPEO ESTÁNDAR Y EL MAPEO ESTÁNDAR DISIPATIVO

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ADRIÁN PÉREZ BUSTAMANTE

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. RENATO CARLOS CALLEJA CASTILLO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS (IIMAS), UNAM.

MÉXICO, D.F., MAYO 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción.

Durante las últimas décadas la teoría de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) a jugado un papel importante para ayudarnos a entender el comportamiento de algunos sistemas dinámicos. En principio, la teoría KAM fue desarrollada para estudiar sistemas dinámicos Hamiltonianos que son *cercanos* a los integrables. Es bien sabido que el retrato fase de los sistemas integrables contiene toros invariantes, la teoría KAM establece la persistencia de esos toros para los sistemas perturbados, los cuales contienen órbitas cuasi-periódicas. Con el paso del tiempo la teoría KAM se ha extendido fuera del mundo de los sistemas Hamiltonianos y se ha convertido en un área de investigación bastante activa en Matemáticas.

El objetivo de este trabajo es hacer un estudio numérico de los dominios de analiticidad de las parametrizaciones de los toros invariantes de los sistemas perturbados para algunos sistemas particulares, a saber, el mapeo estándar y el mapeo estándar disipativo. La razón de estudiar dominios de analiticidad es que, en aplicaciones, frecuentemente se usan expansiones de perturbaciones cuyo comportamiento y utilidad está afectado por sus singularidades complejas, incluso si el comportamiento de la solución original es bastante bueno para valores reales del parámetro.

El esquema de este trabajo es el siguiente. Comenzaremos estudiando un mapeo bastante conocido en teoría KAM, es decir, empezaremos este trabajo haciendo un estudio numérico del dominio de analiticidad del mapeo estándar. Esto se hará ya que este mapeo ha sido ampliamente estudiado y, por esto, disponemos de resultados con los cuales podemos comparar los obtenidos aquí¹. Este estudio será llevado a cabo utilizando *aproximantes de Padé* de la parametrización de los toros invariantes, la cual es obtenida utilizando un método conocido como *series de Lindstedt*. Ambos conceptos serán introducidos a lo largo del primer capítulo.

Posteriormente, en el segundo capítulo, procederemos a hacer un estudio numérico del dominio de analiticidad de los toros invariantes para el mapeo estándar disipativo, cuando la disipación tiende a cero, tratando de utilizar las mismas técnicas aplicadas para el caso sin disipación. En este punto es conveniente notar dos cosas. Primero, en el caso en el que hay una disipación no se han hecho estudios tan exhaustivos como en el caso del mapeo estándar. Aún más, no se sabe con certeza cual es el dominio de analiticidad de las parametrizaciones de los toros invariantes en el plano complejo, lo más que se tiene es una conjetura² de la forma de este dominio. Segunda, el lector tiene que tomar en cuenta que añadir una disipación a un sistema Hamiltoniano es una perturbación singular. En general

¹Véase, por ejemplo [8].

²Véase, [4]. En este artículo se considera la disipación $b(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^3$, que es la que se utilizará en este trabajo.

se espera que un sistema Hamiltoniano admita soluciones cuasi-periódicas con muchas frecuencias. Sin embargo, un sistema con disipación positiva, incluso si es extremadamente pequeña, conduce a la creación de atractores que tienen muy pocas, o incluso ninguna solución cuasi-periódica. Es por esto que el mapeo disipativo que consideraremos en el segundo capítulo tiene un parámetro externo en forma de forzamiento.

Debido a la complejidad del caso disipativo nos dimos a la tarea de explorar otro método para tratar de aproximar este dominio de analiticidad. Éste es conocido como *método de Nash-Moser* y se basa en el que quizá sea el principio heurístico más básico en la Teoría KAM, es decir, ***convergencia cuadrática puede superar a los pequeños divisores***. A grandes rasgos esto quiere decir que, si tenemos un método de aproximación que reduce el error a algo que es de orden cuadrático en el error original, entonces, podemos obtener convergencia incluso si la solución requiere resolver una ecuación que involucra *pequeños divisores*.

Para finalizar, el autor quiere enfatizar que en este trabajo se optó por enfocarse en el aspecto numérico. Es por esto que en algunas partes se prefirió exponer las ideas detrás de los métodos utilizados de una forma heurística. Esto se debe en parte a la extensión de este trabajo, ya que exponer minuciosamente todos los resultados necesarios hubiera incrementado sustancialmente la longitud de esta tesina. Se ha tratado de incorporar una bibliografía lo suficientemente completa para satisfacer las necesidades del lector que desee ahondar en los resultados de los que hablamos a lo largo de este trabajo.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Introducción. | III |
| 1. El mapeo estándar. | 1 |
| 1.1. Series de Lindstedt. | 2 |
| 1.2. El método de Padé. | 9 |
| 1.3. Descripción del algoritmo numérico y resultados. | 10 |
| 2. El mapeo estándar disipativo. | 17 |
| 2.1. Series de Lindstedt para el caso disipativo. | 18 |
| 2.2. Resultados. | 22 |
| 2.3. Método de Nash-Moser | 24 |
| 2.3.1. Algoritmo y resultados. | 28 |
| 3. Conclusiones. | 31 |

Capítulo 1

El mapeo estándar.

Empezaremos este trabajo estudiando el mapeo estándar. El mapeo estándar es un mapeo de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ en si mismo. Denotando como p a la coordenada real y como q al ángulo, el mapeo estándar queda definido como:

$$T_\varepsilon(p, q) = (p - \varepsilon V'(q), q + p - \varepsilon V'(q)) \quad (1.1)$$

donde $V(q) = V(q+1)$ es una función periódica suave (para los propósitos de este trabajo, analítica). Denotando como p_n y q_n los valores de las coordenadas en el tiempo discreto n , el mapeo estándar puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - \varepsilon V'(q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + p_{n+1} \quad \text{mod } 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Sustituyendo la expresión para p_{n+1} , dada por la segunda ecuación de (1.2), en la primera ecuación de (1.2) podemos ver que el sistema (1.2) es equivalente a la siguiente ecuación de segundo orden:

$$q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = -\varepsilon V'(q_n). \quad (1.3)$$

La primera formulación, Hamiltoniana, (1.2) aparece naturalmente en algunos sistemas mecánicos. La segunda formulación, Lagrangiana, (1.3) aparece como parte de un principio variacional, es decir, (1.3) es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_n} = 0$$

donde

$$\mathfrak{L}(q) = - \sum_n \left[\frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n - a)^2 + \varepsilon V(q_n) \right].$$

Si consideramos el mapeo (1.2) con $\varepsilon = 0$, éste adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \\ q_{n+1} &= q_n + p_n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

En este nuevo mapeo, (1.4), los círculos *horizontales* $\{p_n = \text{const} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ en el cilindro son invariantes y la dinámica de la coordenada q en cada círculo es una rotación rígida que es más rápida en los círculos donde p_n es más grande. Notese que cuando p_0 es un número irracional, no es difícil demostrar que la órbita de q_n es densa en el círculo.

Aun más, notemos que el mapeo (1.2) es una perturbación del mapeo (1.4). Un resultado bastante bien conocido en teoría KAM asegura que para ε relativamente pequeños el mapeo (1.2) presenta órbitas cuasi-periódicas que son densas en un *círculo* (este resultado puede consultarse en [10] y/o en las múltiples referencias contenidas ahí). Es decir, para ε *suficientemente* pequeño, la perturbación (1.2) del mapeo (1.4) sigue admitiendo *círculos* invariantes que contienen una órbita densa.

Dado que sabemos que el sistema (1.2) posee *toros* (*círculos*) invariantes, si ε es suficientemente pequeña, nuestro objetivo es desarrollar una implementación numérica para tratar de entender a que nos referimos con la expresión *suficientemente pequeña* cuando hablamos del parámetro ε . Es decir, a continuación presentaremos las ideas detrás de la implementación numérica que utilizaremos para determinar el dominio, en el plano complejo, de las ε para las cuales el mapeo (1.2) tiene un toro invariante.

1.1. Series de Lindstedt.

La idea básica del método de Lindstedt es considerar una familia de funciones cuasi-periódicas que dependen de un parámetro ε y suponer que es una solución de nuestras ecuaciones de movimiento. La ecuación que resulta de hacer el anterior supuesto se resuelve, en el sentido de series de potencias en ε , igualando los términos con la misma potencia de ε en ambos lados de la ecuación. A continuación se explicará con más detalle como se lleva a cabo este proceso para el caso del mapeo estándar. La siguiente discusión está basada en las ideas expuestas en [10].

Utilizando la formulación Hamiltoniana (1.1) buscamos una función $K_\varepsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ de tal forma que

$$T_\varepsilon \circ K_\varepsilon(\theta) = K_\varepsilon(\theta + \omega). \quad (1.5)$$

Notemos que si (1.5) se cumple, entonces, la función K_ε representaría un *círculo* invariante y para cada punto en este círculo el comportamiento de su órbita quedaría determinado por el número ω .

Suponiendo que

$$K_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\theta)\varepsilon^n \quad \text{y que} \quad T_\varepsilon(p, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(p, \theta)\varepsilon^n$$

el objetivo es introducir estas expresiones en (1.5) y, posteriormente, igualar las potencias de ε en ambos lados de (1.5), ésto después de expandir $T_\varepsilon \circ K_\varepsilon(\theta)$ tanto como sea

posible en ε utilizando el teorema de Taylor. Es decir, (1.5) adquiere la forma

$$\begin{aligned} T_\varepsilon \circ K_\varepsilon(\theta) &= T_0 \circ K_0(\theta) + [T_1 \circ K_0(\theta) + (DT_0 \circ K_0)K_1(\theta)]\varepsilon \\ &\quad + \left[T_2 \circ K_0(\theta) + (DT_0 \circ K_0)K_2 + (DT_1 \circ K_0)K_1 + \frac{1}{2}(D^2T_0 \circ K_0)K_1^{\otimes 2} \right] \varepsilon^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\theta + \omega)\varepsilon^n \\ &= K_\varepsilon(\theta + \omega) \end{aligned}$$

Se puede observar que los coeficientes de cada potencia de ε , en la expansión de $T_\varepsilon \circ K_\varepsilon(\theta)$, se van volviendo mucho muy complicados conforme n crece. Antes de ir más lejos será mejor explorar este desarrollo en serie de potencias desde el punto de vista lagrangiano.

En la formulación lagrangiana (1.3), el objetivo es buscar una función $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$g_\varepsilon(\theta + 1) = g_\varepsilon(\theta) + 1$$

o, equivalentemente,

$$g_\varepsilon(\theta) = \theta + \ell_\varepsilon(\theta)$$

con $\ell_\varepsilon(\theta + 1) = \ell_\varepsilon(\theta)$, i.e., queremos encontrar una función $\ell_\varepsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ que satisfaga la ecuación

$$\ell_\varepsilon(\theta + \omega) - 2\ell_\varepsilon(\theta) + \ell_\varepsilon(\theta - \omega) = -\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)). \quad (1.6)$$

Esto ya que si encontramos soluciones de (1.6), podemos asegurar que algunas órbitas q_n que resuelven (1.3) pueden ser escritas como

$$q_n = n\omega + \ell_\varepsilon(n\omega).$$

Aun más,

$$p_n = \omega + \ell_\varepsilon(n\omega) - \ell_\varepsilon(n\omega - \omega)$$

y la función K_ε estaría dada explícitamente por

$$K_\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \omega + \ell_\varepsilon(\theta) - \ell_\varepsilon(\theta - \omega) \\ \theta + \ell_\varepsilon(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Ésto pues, si se cumple (1.6), se tendrá lo siguiente

$$\begin{aligned} T_\varepsilon \circ K_\varepsilon(\theta) &= T_\varepsilon \begin{pmatrix} \omega + \ell_\varepsilon(\theta) - \ell_\varepsilon(\theta - \omega) \\ \theta + \ell_\varepsilon(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega + \ell_\varepsilon(\theta) - \ell_\varepsilon(\theta - \omega) - \varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)) \\ \theta + \ell_\varepsilon(\theta) + \omega + \ell_\varepsilon(\theta) - \ell_\varepsilon(\theta - \omega) - \varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega + \ell_\varepsilon(\theta + \omega) - \ell_\varepsilon(\theta) \\ \theta + \omega + \ell_\varepsilon(\theta + \omega) \end{pmatrix} \\ &= K_\varepsilon(\theta + \omega). \end{aligned}$$

Es decir, si encontramos una función periódica $\ell_\varepsilon(\theta)$ que satisfaga (1.6), existirá un toro invariante bajo T_ε cuya parametrización estará dada por (1.7). De este modo la existencia de *círculos* invariantes para el mapeo estándar estará supeditada a la existencia de $\ell_\varepsilon(\theta)$. En seguida iniciaremos nuestro estudio para determinar para que valores de ε existe una función ℓ_ε .

Observación 1.1. *Es importante notar el hecho de que, cuando escogemos coordenadas en el círculo, podemos poner el origen en cualquier lugar, lo cual implica que $K_\varepsilon(\cdot + \sigma)$ es una solución de (1.5) si K_ε lo es y que $\ell_\varepsilon(\cdot + \sigma) + \sigma$ es una solución de (1.6) si ℓ_ε lo es. Debido a esto podemos asumir, y a lo largo de este trabajo asumiremos, que*

$$\int_0^1 \ell_\varepsilon(\theta) d\theta = 0. \quad (1.8)$$

La condición (1.8) se impone para asegurar la unicidad de la solución.

A continuación empezaremos a investigar la existencia de soluciones de (1.6) como series de potencias formales en ε . Si escribimos

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(\theta) \varepsilon^n$$

la ecuación (1.6) tendrá la siguiente forma¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\ell_n(\theta + \omega) - 2\ell_n(\theta) + \ell_n(\theta - \omega)] \varepsilon^n = -V'(\theta)\varepsilon - V''(\theta)\ell_1(\theta)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (1.9)$$

Empatando los términos de orden ε^0 tenemos que

$$L_\omega \ell_0 \equiv \ell_0(\theta + \omega) - 2\ell_0(\theta) + \ell_0(\theta - \omega) = 0; \quad \int_0^1 \ell_0(\theta) d\theta = 0. \quad (1.10)$$

En este punto vale la pena hacer una pequeña digresión para estudiar algunas particularidades del operador

$$L_\omega \varphi = \varphi(\theta + \omega) - 2\varphi(\theta) + \varphi(\theta - \omega).$$

Este operador aparece frecuentemente en teoría KAM y se sabe que puede ser convenientemente analizado utilizando series de Fourier.

¹En este punto la notación es un poco desafortunada ya que ℓ_n podría referirse al n -ésimo término de la serie de potencias así como a ℓ_ε evaluado en $\varepsilon = n$. En la discusión en que estamos apunto de embarcarnos, ℓ_1 , ℓ_2 , etc. siempre se referirán al n -ésimo término de la serie de potencias. Nótese que ℓ_0 tiene ambos significados.

Lema 1.1. *Sea $\omega \notin \mathbb{Q}$. Si $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y periódica (de periodo 1), tal que $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$. Entonces, existe una solución formal, φ , a la ecuación*

$$L_\omega \varphi(\theta) = \eta(\theta) \quad (1.11)$$

dada en términos de los coeficientes de Fourier de η . Aún más, la solución φ puede ser encontrada de tal forma que $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$.

Prueba: Empecemos notando que

$$\begin{aligned} L_\omega e^{2\pi i k \theta} &= e^{2\pi i k(\theta+\omega)} - 2e^{2\pi i k \theta} + e^{2\pi i k(\theta-\omega)} = e^{2\pi i k \theta} (e^{2\pi i k \omega} - 2 + e^{-2\pi i k \omega}) \\ &= 2(\cos(2\pi k \omega) - 1)e^{2\pi i k \theta} \end{aligned}$$

entonces, si $\eta(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k \theta}$ y $\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k \theta}$, la ecuación (1.11) se reduce, formalmente, a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2(\cos(2\pi k \omega) - 1) \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k \theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k \theta}$$

es decir,

$$2(\cos(2\pi k \omega) - 1) \hat{\varphi}_k = \hat{\eta}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Ahora, dado que $\omega \notin \mathbb{Q}$ y que $\hat{\eta}_0 = \int_0^1 \eta(\theta) d\theta$, es claro que una solución de (1.12) es

$$\hat{\varphi}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}_k = \frac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k \omega) - 1)} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Es decir, una solución formal, φ , de (1.11) está dada por

$$\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k \omega) - 1)} e^{2\pi i k \theta}. \quad (1.13)$$

Finalmente, el hecho de escoger a $\hat{\varphi}_0 = 0$ implica que $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$.

q.e.d.

Observación 1.2. *Notemos que el estatus de (1.13) como una solución analítica es algo complicado, esto ya que $\{2\pi k \omega \mid k \in \mathbb{Z}\}$ es denso en el círculo y, entonces, los denominadores de los coeficientes en (1.13) se pueden hacer arbitrariamente pequeños, lo cual podría causar que la serie no converja. Este problema es central en teoría KAM y es conocido como problema de pequeños divisores. Se sabe que cuando el lado derecho de la ecuación (1.11) es una función analítica y el número ω es diofántico (esto asegura que los denominadores no sean tan pequeños²), entonces, la solución de (1.11) es una función analítica. Véase, por ejemplo [10].*

²Véase, Definición 1.2.

Regresando a nuestro análisis de la ecuación (1.10). El Lema 1.1 nos permite concluir que, si $\omega \notin \mathbb{Q}$, la ecuación (1.10) puede resolverse formalmente en términos de sus coeficientes de Fourier y, claramente, la solución es

$$\ell_0 \equiv 0.$$

Ahora, empatando los términos de orden ε^1 en (1.9) tenemos que

$$L_\omega \ell_1(\theta) = -V'(\theta); \quad \int_0^1 \ell_1(\theta) d\theta = 0. \quad (1.14)$$

Como $\int_0^1 V'(\theta) d\theta = 0$ (V es periódica), entonces, el Lema 1.1 implica que (1.14) admite una solución formal $\ell_1(\theta)$ (la cual será una función analítica si ω es diofántico).

Haciendo lo mismo para los términos de orden ε^2 tenemos que

$$L_\omega \ell_2(\theta) = -V''(\theta)\ell_1(\theta); \quad \int_0^1 \ell_2(\theta) d\theta = 0, \quad (1.15)$$

y en general, para ε^n , se tiene que

$$L_\omega \ell_n(\theta) = S_n(\theta); \quad \int_0^1 \ell_n(\theta) d\theta = 0,$$

donde $S_n(\theta)$ es el n -ésimo coeficiente de la expansión en serie de Taylor de $-\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta))$ alrededor de $\varepsilon = 0$, es decir,

$$-\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\theta) \varepsilon^n. \quad (1.16)$$

Cabe resaltar que los términos $S_n(\theta)$ involucrarán derivadas de V y los términos $\ell_1(\theta)$, $\ell_2(\theta)$, \dots , $\ell_{n-1}(\theta)$; los cuales se tendrán si se han resuelto las $n - 1$ ecuaciones anteriores.

Entonces, para que la ecuación (1.18) tenga una solución formal a cualquier orden n , de acuerdo con el Lema 1.1, es necesario que

$$\int_0^1 S_n(\theta) d\theta = 0. \quad (1.17)$$

Ésto es lo que demostraremos en el siguiente lema.

Lema 1.2. *Sea ω un número diofántico. Si V una función real, analítica y periódica ($V(\theta) = V(\theta + 1)$), entonces, existe una solución $\ell_n(\theta)$ a la ecuación*

$$L_\omega \ell_n(\theta) = S_n(\theta); \quad \int_0^1 \ell_n(\theta) d\theta = 0, \quad (1.18)$$

que está dada en términos de sus coeficientes de Fourier. Donde las funciones $S_n(\theta)$ están dadas por (1.16).

Prueba: Procederemos por inducción. Para $n = 0$ la ecuación tiene la forma (1.10) y ya se estableció que ésta tiene solución $\ell_0 \equiv 0$. Ahora supongamos que (1.18) tiene solución para $k = 1, \dots, n-1$. Demostraremos que la ecuación tiene una solución para $k = n$.

Por el Lema 1.1 es suficiente demostrar que

$$\int_0^1 S_n(\theta) d\theta = 0.$$

Antes que nada introduciremos la notación $\ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i(\theta) \varepsilon^i$. Primero notemos que

$$-\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)) = -\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) + \ell_\varepsilon^{[\geq n]}(\theta)) = -\varepsilon [V'(\theta + \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) + \mathcal{O}(\ell_\varepsilon^{[\geq n]}(\theta))]$$

pero $\mathcal{O}(\ell_\varepsilon^{[\geq n]}(\theta)) = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$, de aquí que

$$-\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)) = -\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \quad (1.19)$$

Por otro lado, utilizando el hecho de que $L_\omega \ell_k(\theta) = S_k(\theta)$ para toda $0 \leq k \leq n-1$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(\theta) \varepsilon^k = \sum_{k=0}^{n-1} L_\omega \ell_k(\theta) \varepsilon^k + S_n(\theta) \varepsilon^n + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \quad (1.20)$$

Utilizando la linealidad del operador L_ω y, sustituyendo (1.19) y (1.20) en (1.16), obtenemos la relación

$$L_\omega \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) + \varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) + \varepsilon^n S_n(\theta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \quad (1.21)$$

Ahora, multiplicando (1.21) por $[1 + \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)]$ e integrado³, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 L_\omega \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) d\theta + \int_0^1 L_\omega \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 V'(\theta + \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) [1 + \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)] d\theta \\ &\quad + \varepsilon^n \int_0^1 S_n(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta \\ &\quad + \varepsilon^n \int_0^1 S_n(\theta) d\theta \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Analicemos las integrales que aparecen en (1.22). Primero, utilizando un cambio de variable y el hecho de que V es periódica tenemos que

$$\int_0^1 V'(\theta + \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) [1 + \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)] d\theta = 0.$$

³En este caso $\prime = \frac{d}{d\theta}$.

Por otro lado, es claro que

$$\int_0^1 L_\omega \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) d\theta = 0,$$

ésto pues, para cualquier función periódica f , se tiene que

$$\int_0^1 f(\theta) d\theta = \int_0^1 f(\theta + \omega) d\theta = \int_0^1 f(\theta - \omega) d\theta.$$

Ahora, para analizar que pasa con la segunda integral notemos que

$$\int_0^1 \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta = \int_0^1 \frac{1}{2} \left([\ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta)]^2 \right)' d\theta = 0,$$

además, integrando por partes y usando la periodicidad de las funciones $\ell_n(\theta)$, encontramos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta + \omega) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta &= - \int_0^1 \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta + \omega) \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) d\theta \\ &= - \int_0^1 \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta - \omega) d\theta. \end{aligned}$$

Las dos relaciones anteriores implican que

$$\int_0^1 L_\omega \ell_\varepsilon^{[<n]}(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta = 0.$$

De acuerdo a las líneas anteriores podemos notar que la igualdad (1.21) en realidad tiene la forma

$$\varepsilon^n \int_0^1 S_n(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta + \varepsilon^n \int_0^1 S_n(\theta) d\theta = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \quad (1.23)$$

Sin embargo, dado que $\ell_0 \equiv 0$, tenemos que $\ell_\varepsilon^{[<n]'} = \varepsilon \ell_1'(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ y por lo tanto

$$\varepsilon^n S_n(\theta) \ell_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

Debido a ésto y a (1.23) se concluye que

$$\int_0^1 S_n(\theta) d\theta = 0.$$

q.e.d.

Resumiendo, el Lema 1.2 asegura que dada la ecuación

$$\ell_\varepsilon(\theta + \omega) - 2\ell_\varepsilon(\theta) + \ell_\varepsilon(\theta - \omega) = -\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta))$$

podemos encontrar una solución formal $\ell_\varepsilon(\theta)$ dada por

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(\theta) \varepsilon^n, \quad (1.24)$$

donde cada $\ell_n(\theta)$ es solución al problema (1.18).

el cual tiene solución si $N \leq M$. Esto se puede hacer de la siguiente forma, primero se resuelve el sistema que sólo involucra los coeficientes de Q y, una vez hecho esto, se sustituye en el otro sistema para así obtener los coeficientes de P .

La base del método de Padé, que queremos utilizar para estimar el dominio de analiticidad de $\ell_\varepsilon(\theta)$, radica en la observación de que los aproximantes de Padé usualmente convergen en dominios mucho más grandes que la misma expansión de Taylor en base a la cual están construidos, ésto ya que la aproximación puede presentar singularidades (como polos) que no se presentan en la serie de Taylor. De aquí que, usualmente, los dominios de analiticidad de una función pueden ser *estimados* buscando los ceros del denominador de la aproximación de Padé.

Regresando a nuestro problema, en la sección anterior establecimos que $\ell_\varepsilon(\theta)$ puede ser expresada formalmente como

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(\theta) \varepsilon^n$$

ya hemos comentado que, de hecho, esta función es analítica *cerca* de $\varepsilon = 0$. Para tratar de encontrar su dominio de analiticidad utilizaremos aproximantes de Padé. Notemos que esto parece ser una muy buena idea, ya que para encontrar los aproximantes de Padé es suficiente tener un número finito de coeficientes de la expansión de $\ell_\varepsilon(\theta)$. Es decir, sólo es necesario resolver un número finito de veces la ecuación (1.18).

1.3. Descripción del algoritmo numérico y resultados.

A continuación haré una descripción de como fueron implementadas las ideas arriba expuestas para poder encontrar el dominio de analiticidad, en el plano complejo, de la función $\ell_\varepsilon(\theta)$.

Antes que nada, recordemos que para poder hablar de analiticidad necesitamos que el número ω que define al operador L_ω sea diofántico. Para nuestra implementación utilizamos el número

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Antes de mostrar los resultados obtenidos veamos que el número que escogimos efectivamente es diofántico. Para ésto, primero recordaremos la definición de número diofántico y luego probaremos un Teorema que nos permitirá probar que la razón áurea lo es.

Definición 1.2. *Un número ω es diofántico de tipo (K, ν) para $K > 0$ y $\nu \geq 1$, si*

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| > K|q|^{-1-\nu}$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. A los números que no son diofánticos se les llama números de Liouville.

Teorema 1.1. *Sea $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $P(\omega) = 0$ donde P es un polinomio de grado r con coeficientes en los enteros. Además, supongamos que $P'(\omega) = 0, \dots, P^{(j)}(\omega) = 0, P^{(j+1)}(\omega) \neq 0$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\left| \omega - \frac{m}{n} \right| \geq C n^{-r/(j+1)} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.27)$$

Prueba: Dado que los ceros de los polinomios son aislados, se tiene que $P(\frac{m}{n}) \neq 0$ cuando $\frac{m}{n}$ es muy cercano a ω . Ésto, aunado al hecho de que $n^r P(\frac{m}{n}) \in \mathbb{Z}$, implica que $\left| n^r P\left(\frac{m}{n}\right) \right| \geq 1$, es decir,

$$\left| P\left(\frac{m}{n}\right) - P(\omega) \right| \geq n^{-r}. \quad (1.28)$$

Por otro lado, el Teorema de Taylor asegura que

$$\left| P\left(\frac{m}{n}\right) - P(\omega) \right| \leq \widehat{C} \left| \omega - \frac{m}{n} \right|^{j+1} \quad (1.29)$$

para alguna $\widehat{C} > 0$ (el lado derecho de (1.29) es el residuo de la expansión de Taylor). Finalmente utilizando (1.28) y (1.29) concluimos (1.27) para $\frac{m}{n}$ cerca de ω . Para $\frac{m}{n}$ lejos de ω el resultado es obvio.

q.e.d.

Lema 1.3. *El número irracional $\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es diofántico.*

Prueba: Notemos que $\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ son raíces del polinomio $P(x) = x^2 - x - 1$. Luego, por el Teorema 1.1 se concluye que

$$\left| \omega - \frac{m}{n} \right| \geq C n^{-2}. \quad (1.30)$$

Es decir, ω es diofántico de tipo $(C, 1)$.

q.e.d.

Los números diofánticos que satisfacen (1.30) se dice que son de *tipo constante*. Si pensamos a un número diofántico como un número irracional que es *difícil* de aproximar por números racionales, entonces los números diofánticos de tipo constante serán los *más difíciles* de aproximar por racionales. Luego, estos números son los ideales para evitar el problema de pequeños divisores. Es por esto que para nuestra implementación hemos elegido a la razón áurea.

Ahora, lo primero que se implementó fue encontrar una solución numérica, en términos de sus coeficientes de Fourier, a las ecuaciones

$$L_\omega \ell_n(\theta) = S_n(\theta). \quad (1.31)$$

Es importante resaltar que los términos $S_n(\theta)$ pueden ser calculados de una forma bastante eficiente utilizando el siguiente ardid descrito en [9]:

Denotando a

$$s(\theta, \varepsilon) = \sin(2\pi(\theta + \ell_\varepsilon(\theta))) \quad \text{y a} \quad c(\theta, \varepsilon) = \cos(2\pi(\theta + \ell_\varepsilon(\theta)))$$

tenemos que

$$\frac{d}{d\varepsilon}s(\theta, \varepsilon) = 2\pi c(\theta, \varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon}\ell_\varepsilon(\theta) \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}c(\theta, \varepsilon) = -2\pi s(\theta, \varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon}\ell_\varepsilon(\theta). \quad (1.33)$$

Ahora, considerando las expansiones formales $s(\theta, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(\theta)\varepsilon^j$ y $c(\theta, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\theta)\varepsilon^j$

y sustituyendo en (1.32) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)s_{j+1}(\theta)\varepsilon^j &= 2\pi \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j(\theta)\varepsilon^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\ell_{j+1}(\theta)\varepsilon^j \right) \\ &= 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^j c_{j-m}(\theta)(m+1)\ell_{m+1}(\theta) \right) \varepsilon^j \end{aligned}$$

y, análogamente, (1.33) tendrá la forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j+1}(\theta)\varepsilon^j = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^j s_{j-m}(\theta)(m+1)\ell_{m+1}(\theta) \right) \varepsilon^j.$$

Finalmente, para que las series sean iguales, formalmente, es necesario que tengan los mismos coeficientes. Esto nos permite concluir que

$$(N+1)s_{N+1}(\theta) = 2\pi \sum_{m=0}^N c_{N-m}(\theta)(m+1)\ell_{m+1}(\theta) \quad (1.34)$$

$$(N+1)c_{N+1}(\theta) = -2\pi \sum_{m=0}^N s_{N-m}(\theta)(m+1)\ell_{m+1}(\theta) \quad (1.35)$$

donde $c_0(\theta) = \cos(2\pi\theta)$ y $s_0(\theta) = \sin(2\pi\theta)$.

Después de resolver la ecuación (1.31) un número finito, N , de veces se buscaron aproximantes de Padé de la expresión

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{j=0}^N \ell_j(\theta)\varepsilon^j + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$$

y una vez encontrada la aproximación se procedió a graficar las raíces del denominador de los aproximantes. Cabe mencionar que implementamos el método de Padé utilizando

una librería de alta precisión del programa de dominio público PARI/gp. Se optó por esta librería de alta precisión ya que calcular los aproximantes de Padé es una tarea delicada, pues el sistema (1.26) es bastante inestable, es decir, pequeños errores numéricos en los coeficientes de la serie pueden ser enormemente amplificadas.

En las siguientes figuras resumimos los resultados obtenidos al implementar lo descrito anteriormente. La función utilizada para llevar a cabo los cálculos fue

$$V'(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x).$$

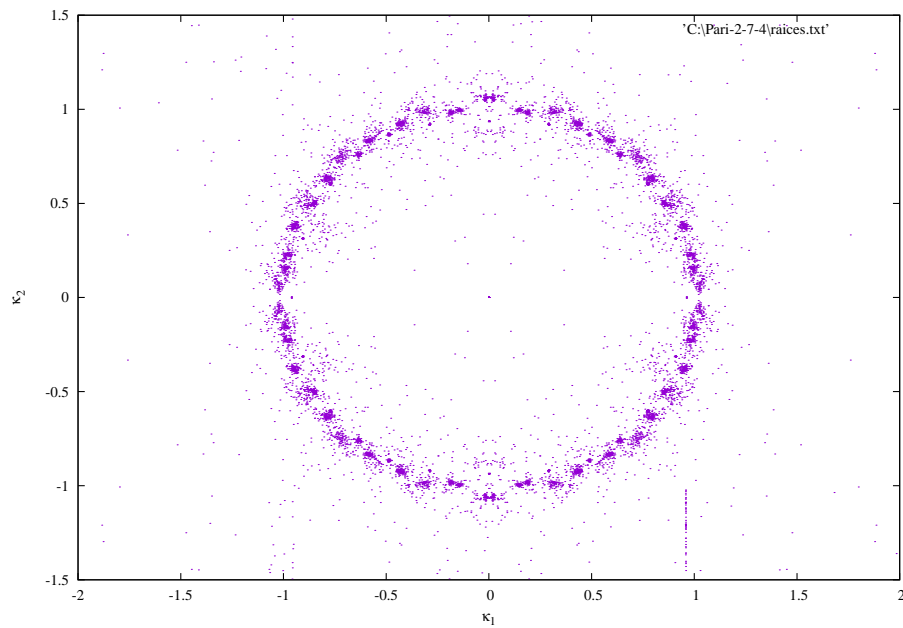
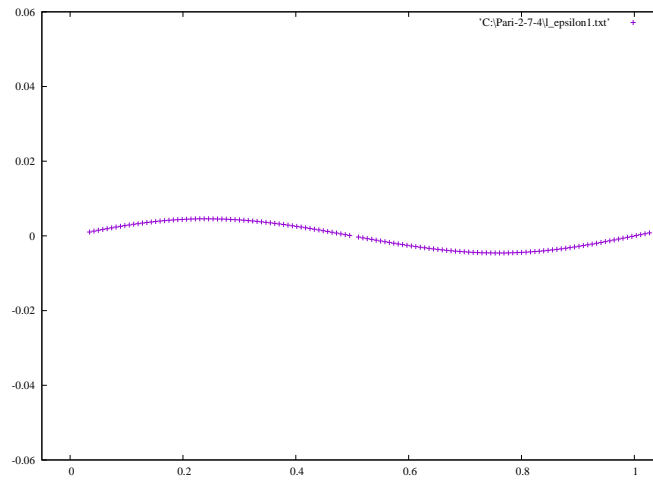
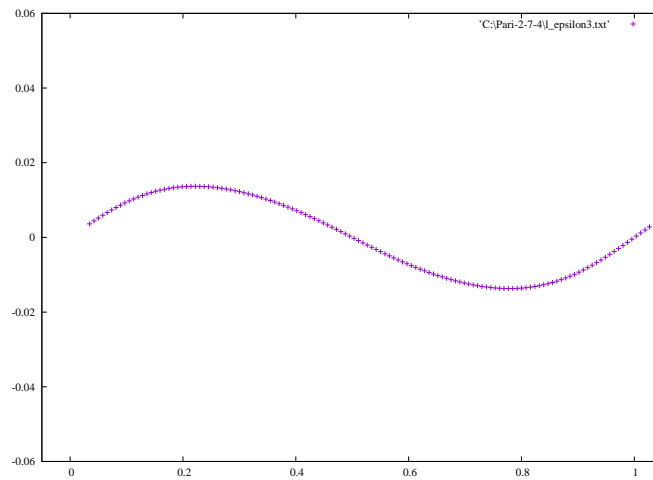
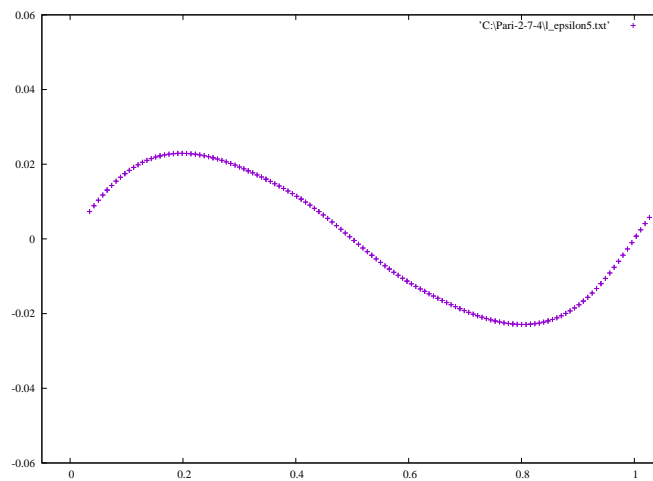


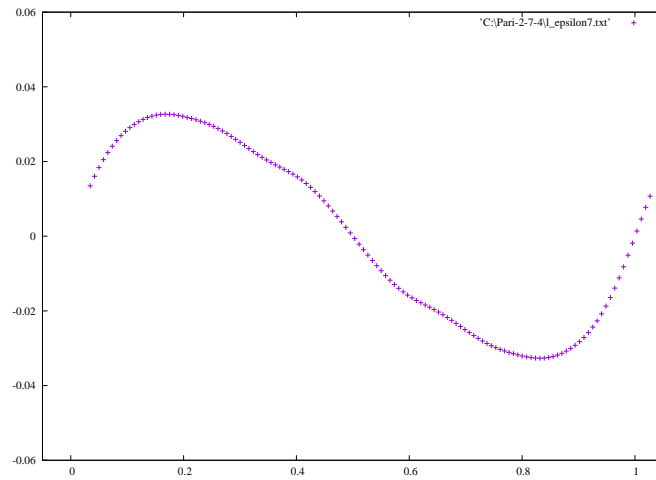
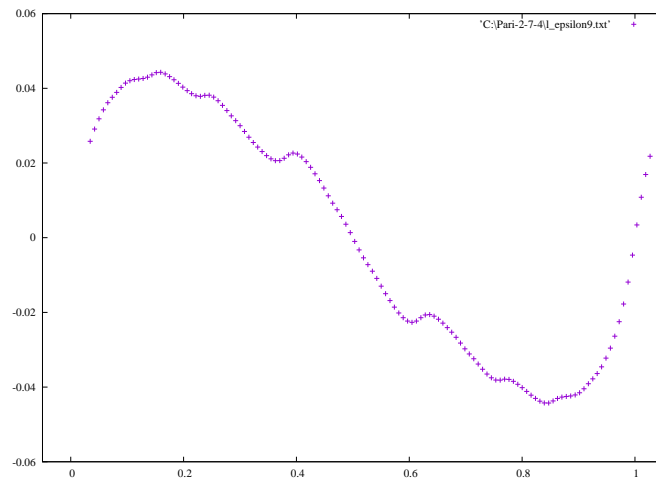
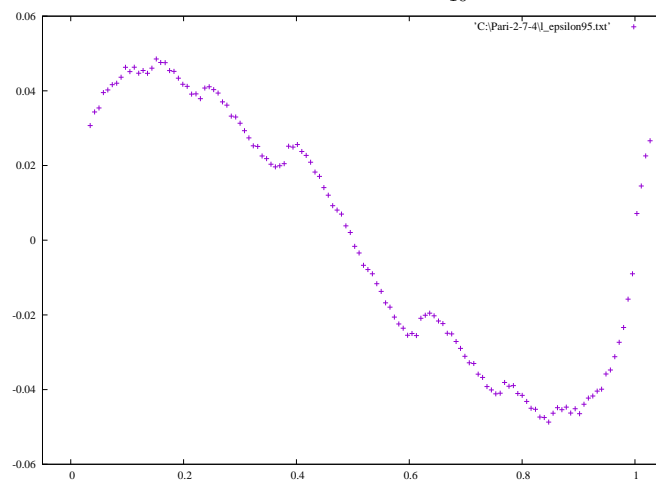
Figura 1.1: En esta figura se presentan los polos, en el plano complejo, de los aproximantes de Padé de tipo $[95, 95]$ para los ángulos $\theta = i/2^7 + 0,034546$, $i = 1, \dots, 2^7$. Fue utilizada una precisión de 300 cifras significativas. El dominio de analiticidad parece ser una bola con centro en el origen y radio muy cercano a 1.

En la figura de arriba se puede apreciar que el dominio de analiticidad parece ser una bola con centro en el origen y cuyo radio está muy cerca de 1. En este punto cabe mencionar que este resultado está en completa concordancia con lo publicado en [8]. Aún más, este resultado parece indicar que el dominio de analiticidad, de la expansión de $\ell_\varepsilon(\theta)$ en ε para θ fija, es independiente de θ .

A continuación se presentan algunas gráficas de la función $\ell_\varepsilon(\theta)$ para algunos valores de ε . En los casos que se muestran en seguida se utilizaron 195 términos para aproximar a la función $\ell_\varepsilon(\theta)$, es decir,

$$\ell_\varepsilon(\theta) \approx \sum_{k=1}^{190} \ell_\varepsilon(\theta) \varepsilon^k.$$

Figura 1.2: Función $\ell_{\frac{1}{10}}(\theta)$.Figura 1.3: Función $\ell_{\frac{3}{10}}(\theta)$.Figura 1.4: Función $\ell_{\frac{1}{2}}(\theta)$.

Figura 1.5: Función $\ell_{\frac{7}{10}}(\theta)$.Figura 1.6: Función $\ell_{\frac{9}{10}}(\theta)$.Figura 1.7: Función $\ell_{0,95}(\theta)$.

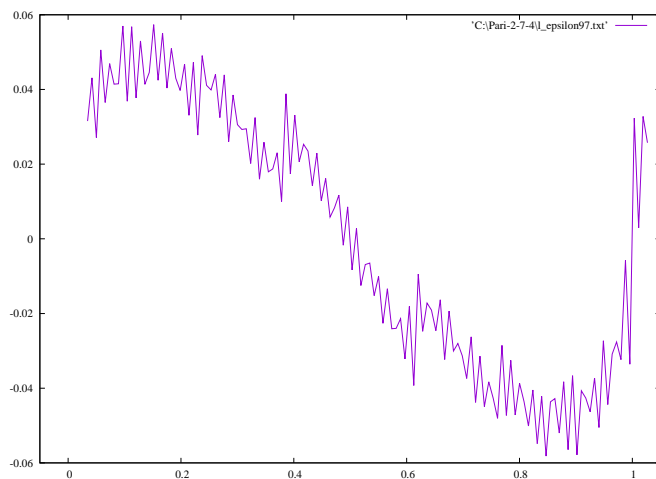


Figura 1.8: Función $\ell_{0,97}(\theta)$. En este caso parece que se está perdiendo analiticidad. Lo que sugiere que el radio de la bola es menor que 1.

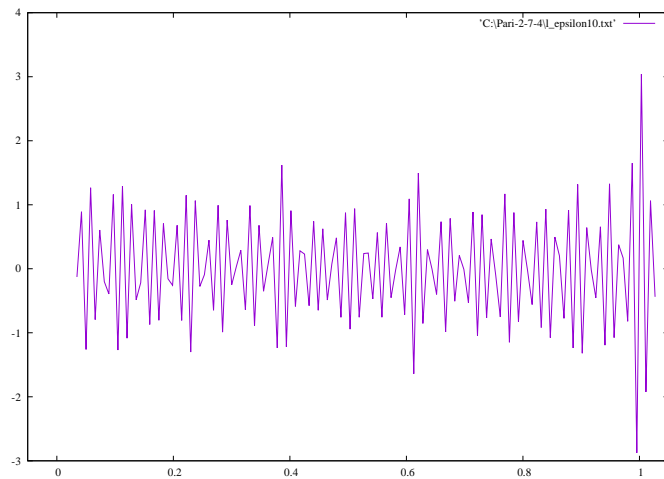


Figura 1.9: Función $\ell_1(\theta)$. Aquí se aprecia una completa pérdida de analiticidad. Lo que parece indicar que $\varepsilon = 1$ no está en el dominio de analiticidad.

Capítulo 2

El mapeo estándar disipativo.

El mapeo estándar disipativo es un mapeo de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ en si mismo, el cual es una generalización de el mapeo estándar. Denotando como p a la coordenada real y como q al ángulo, el mapeo estándar disipativo se define como:

$$T_\epsilon(p, q) = (bp + c - \epsilon V'(q), q + bp + c - \epsilon V'(q)),$$

donde V es una función periódica y analítica. Denotando a p_n, q_n como los valores de las coordenadas en el tiempo discreto n , el mapeo estándar disipativo puede escribirse como:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= bp_n + c - \epsilon V'(q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + p_{n+1} \quad \text{mod } 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sustituyendo la expresiones para p_n y p_{n+1} , dadas por la segunda ecuación de (2.1), dentro de la primera ecuación de (2.1) podemos observar que el sistema es equivalente a la forma Lagrangiana

$$q_{n+1} - (1 + b)q_n + bq_{n-1} - c = -\epsilon V'(q_n). \tag{2.2}$$

La primera observación que cabe hacer acerca de este mapeo es que cuando $b \rightarrow 1$ y $c \rightarrow 0$ el mapeo estándar disipativo converge a el mapeo estándar.

Para los fines de este trabajo consideramos la disipación como $b(\epsilon) = 1 - \epsilon^3$ y el forzamiento¹ como $c = c(\epsilon)$ tal que $c(\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En este caso (2.2) tendrá la siguiente forma,

$$q_{n+1} - (2 - \epsilon^3)q_n + (1 - \epsilon^3)q_{n-1} - c(\epsilon) = -\epsilon V'(q_n) \tag{2.3}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1 - \epsilon^3)p_n + c(\epsilon) - \epsilon V'(q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + p_{n+1} \quad \text{mod } 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

¹El hecho de agregar una disipación hace que la perturbación sea singular. Agregar un forzamiento (un parámetro externo) hará que los *toros* invariantes se preserven. Los métodos descritos más adelante convencerán al lector de la necesidad de agregar este forzamiento.

De esta última expresión se puede notar fácilmente que cuando $\varepsilon = 0$ en (2.4), la dinámica está dada por círculos invariantes y, cuando p_0 es irracional, la órbita de q_0 es densa en el círculo.

Ahora, el mapeo (2.4) es una perturbación de (1.4) y la primera pregunta que viene a la mente es si bajo estas perturbaciones se conserva la existencia de los círculos invariantes. La respuesta a esta pregunta está dada en [4] y es afirmativa, es decir, en [4] se demuestra que las series de Lindstedt convergen a una solución analítica en un dominio que evita las singularidades (la convergencia de la serie garantizará la existencia de los conjuntos invariantes). Nuestro objetivo es tratar de describir este dominio utilizando métodos numéricos. Primero, veamos como se aplica el método de Lindstedt para el caso disipativo.

2.1. Series de Lindstedt para el caso disipativo.

Procediendo de manera análoga al capítulo anterior ahora nos interesa encontrar una función $u_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de periodo 1, que satisfaga la ecuación

$$u_\varepsilon(\theta + \omega) - (1 + b)u_\varepsilon(\theta) + bu_\varepsilon(\theta - \omega) + (1 - b)\omega - c = -\varepsilon V'(\theta + u_\varepsilon(\theta)). \quad (2.5)$$

Esto ya que si nos es posible encontrar soluciones de (2.5), entonces podemos asegurar que algunas órbitas q_n que resuelven (2.2) pueden ser escritas como

$$q_n = n\omega + u_\varepsilon(n\omega).$$

Y la parametrización del toro invariante $K_\varepsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ estará dada explícitamente por

$$K_\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \omega + \ell_\varepsilon(\theta) - \ell_\varepsilon(\theta - \omega) \\ \theta + \ell_\varepsilon(\theta) \end{pmatrix}.$$

Utilizando el hecho de que en este trabajo consideraremos $b(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^3$ y $c = c(\varepsilon)$, la ecuación (2.5) tendrá la forma:

$$u_\varepsilon(\theta + \omega) - (2 - \varepsilon^3)u_\varepsilon(\theta) + (1 - \varepsilon^3)u_\varepsilon(\theta - \omega) + \varepsilon^3\omega - c(\varepsilon) = -\varepsilon V'(\theta + u_\varepsilon(\theta)). \quad (2.6)$$

El método de Lindstedt aplicado a el mapeo estándar disipativo será como sigue. Considerando las expansiones formales

$$u_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta)\varepsilon^n \quad \text{y} \quad c(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n$$

y la expansión en serie de Taylor alrededor de $\varepsilon = 0$

$$-\varepsilon V'(\theta + u_\varepsilon(\theta)) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\theta)\varepsilon^k,$$

tendremos que la ecuación (2.6) tendrá la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta+\omega)\varepsilon^n - (2-\varepsilon^3) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta)\varepsilon^n + (1-\varepsilon^3) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta-\omega)\varepsilon^n + \varepsilon^3\omega - \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n = -\varepsilon V'(\theta+u_\varepsilon(\theta))$$

es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_\omega u_k(\theta)\varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta)\varepsilon^{n+3} - \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta-\omega)\varepsilon^{n+3} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varepsilon^k + \varepsilon^3\omega = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\theta)\varepsilon^k.$$

A su vez, esta última expresión puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\theta)\varepsilon^k &= \sum_{k=0}^2 (L_\omega u_k(\theta) - c_k)\varepsilon^k + (L_\omega u_3(\theta) - c_3 + u_0(\theta) - u_0(\theta-\omega) + \omega)\varepsilon^3 \\ &\quad + \sum_{k=4}^{\infty} (L_\omega u_k(\theta) - c_k + u_{k-3}(\theta) - u_{k-3}(\theta-\omega))\varepsilon^k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Recordemos que el n -ésimo coeficiente, $S_n(\theta)$, de la expansión de Taylor de $-\varepsilon V'(\theta+u_\varepsilon(\theta))$ involucrará derivadas de V (que se supone analítica y de periodo 1) y los términos $u_1(\theta)$, $u_2(\theta), \dots, u_{n-1}(\theta)$.

Ahora, el método de Lindstedt sugiere empatar las potencias de la ecuación (2.7). Nótese que en este caso necesitamos encontrar funciones $u_n(\theta)$ y coeficientes c_n tales que se satisfaga (2.7). Veamos que es lo que sucede.

- Para los términos de orden ε^0 tenemos que la ecuación es

$$L_\omega u_0(\theta) - c_0 = 0 \quad (2.8)$$

esto ya que $S_0(\theta) \equiv 0$. De acuerdo al Lema 1.1, si $c_0 = 0$, entonces, (2.8) tendrá una solución. Es decir, la solución de (2.8) es

$$c_0 = 0 \quad \text{y} \quad u_0 \equiv 0.$$

- Para los términos de orden ε^1 se tiene que

$$L_\omega u_1(\theta) - c_1 = S_1(\theta). \quad (2.9)$$

Como $S_1(\theta) = -V'(\theta)$, al ser V una función periódica, se tiene que $\int_0^1 S_1(\theta)d\theta = 0$.

Luego, por el Lema (1.1), si $\int_0^1 (S_1(\theta) - c_1)d\theta = 0$, i.e., $c_1 = 0$, se tendrá que (2.9) tendrá la solución formal

$$c_1 = 0 \quad \text{y} \quad u_1(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\widehat{S}_{1,k}}{2(\cos(2\pi k\omega) - 1)} e^{2\pi i k \theta}.$$

- Términos de orden ε^2 . En este caso la ecuación es

$$L_\omega u_2(\theta) - c_2 = S_2(\theta). \quad (2.10)$$

Si $c_2 = 0$, el Lema 1.2 asegura que $\int_0^1 S_2(\theta)d\theta = 0$. Ésto ya que al ser c_0 , c_1 y c_2 iguales a cero, las ecuaciones para $u_0(\theta)$, $u_1(\theta)$ y $u_2(\theta)$ son de la forma (1.18). Es decir, si $c_2 = 0$ la ecuación (2.10) tiene una solución formal $u_2(\theta)$ dada en serie de Fourier.

- Cuando queremos empatar los términos de orden ε^3 empezamos a ver un comportamiento diferente. Utilizando el hecho de que $u_0 \equiv 0$, la ecuación que se obtiene de igualar los términos de orden tres es

$$L_\omega u_3(\theta) - c_3 + \omega = S_3(\theta). \quad (2.11)$$

En este caso, la ecuación puede resolverse de la siguiente forma: primero podemos considerar a $c_3 = \omega$. De esta forma la ecuación se convierte en $L_\omega u_3(\theta) = S_3(\theta)$ y, por el mismo argumento del punto anterior, se tendrá que $\int_0^1 S_3(\theta)d\theta = 0$. Es decir, si $c_3 = \omega$, la ecuación (2.11) tiene una solución formal $u_3(\theta)$.

- Por último, cuando igualamos los términos de orden ε^n , $n \geq 4$, tenemos la siguiente ecuación

$$L_\omega u_n(\theta) + u_{n-3}(\theta) - u_{n-3}(\theta - \omega) - c_n = S_n(\theta), \quad n \geq 4; \quad (2.12)$$

es decir,

$$L_\omega u_n(\theta) = S_n(\theta) - u_{n-3}(\theta) + u_{n-3}(\theta - \omega) + c_n, \quad n \geq 4. \quad (2.13)$$

Ahora, de acuerdo al Lema 1.1, la ecuación (2.13) tendrá una solución formal si

$$\int_0^1 (S_n(\theta) - u_{n-3}(\theta) + u_{n-3}(\theta - \omega) + c_n) d\theta = 0. \quad (2.14)$$

Esta igualdad es equivalente a la condición

$$c_n = - \int_0^1 S_n(\theta)d\theta, \quad (2.15)$$

ya que $\int_0^1 u_{n-3}(\theta)d\theta = 0$, esto pues $u_{n-3}(\theta)$ es una solución previamente encontrada y su existencia está garantizada por el Lema 1.1 (el cual afirma que la solución puede ser encontrada de tal forma que tenga promedio igual a cero). Además, como $u_{n-3}(\theta)$ es periódica, se tiene que, $\int_0^1 u(\theta - \omega)d\theta = 0$.

Entonces, si se cumple (2.15), la ecuación (2.12) tendrá una solución formal para todo $n \geq 4$.

Resumiendo, acabamos de argumentar como es que podemos resolver, formalmente, las ecuaciones que se obtienen de empatar las potencias de ε^n en (2.7) para todo $n \geq 0$. Es decir, podemos encontrar expresiones formales para $u_\varepsilon(\theta)$ y $c(\varepsilon)$ que están dadas por

$$u_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta)\varepsilon^n \quad \text{y} \quad c(\varepsilon) = \omega\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (2.16)$$

Hasta este punto sólo nos hemos referido a (2.16) como una expansión formal en serie de potencias. Sin embargo, una consecuencia de lo demostrado en [4] es que si ω es diofántico y V es analítica, entonces, la expresión formal (2.16) es una función analítica en un dominio que evita las singularidades, esto en el plano complejo. Sin embargo, el dominio de analiticidad de esta nueva función, u_ε , parece ser mucho más complicado que el dominio de analiticidad de la función ℓ_ε para el mapeo estándar. La Figura 2.1 muestra lo complicado que parece ser el dominio de analiticidad de (2.16).

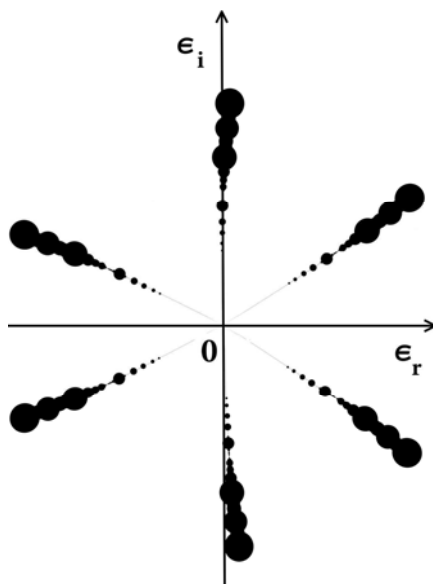


Figura 2.1: La figura muestra la conjetura, publicada en [4], de como es el dominio de analiticidad de la función (2.16). La parte sombreada representa el complemento del dominio de analiticidad. Esta parte consiste de bolas cuyos centros se ubican en $|e^{2\pi ik\omega} - 1|^{\frac{1}{3}}$. El radio de las bolas decrece más rápido que cualquier potencia de la distancia de su centro al origen. El radio de las bolas ha sido re-escalado por razones gráficas.

2.2. Resultados.

En esta sección se presentarán los resultados numéricos obtenidos después de utilizar el método de Padé. Al igual que en el capítulo anterior, la función en base a la cual está definido el mapeo estándar disipativo será

$$V'(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$$

y el número diofántico que define al operador L_ω es, una vez más, la razón áurea

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

A continuación se resumirán los resultados en las siguientes figuras.

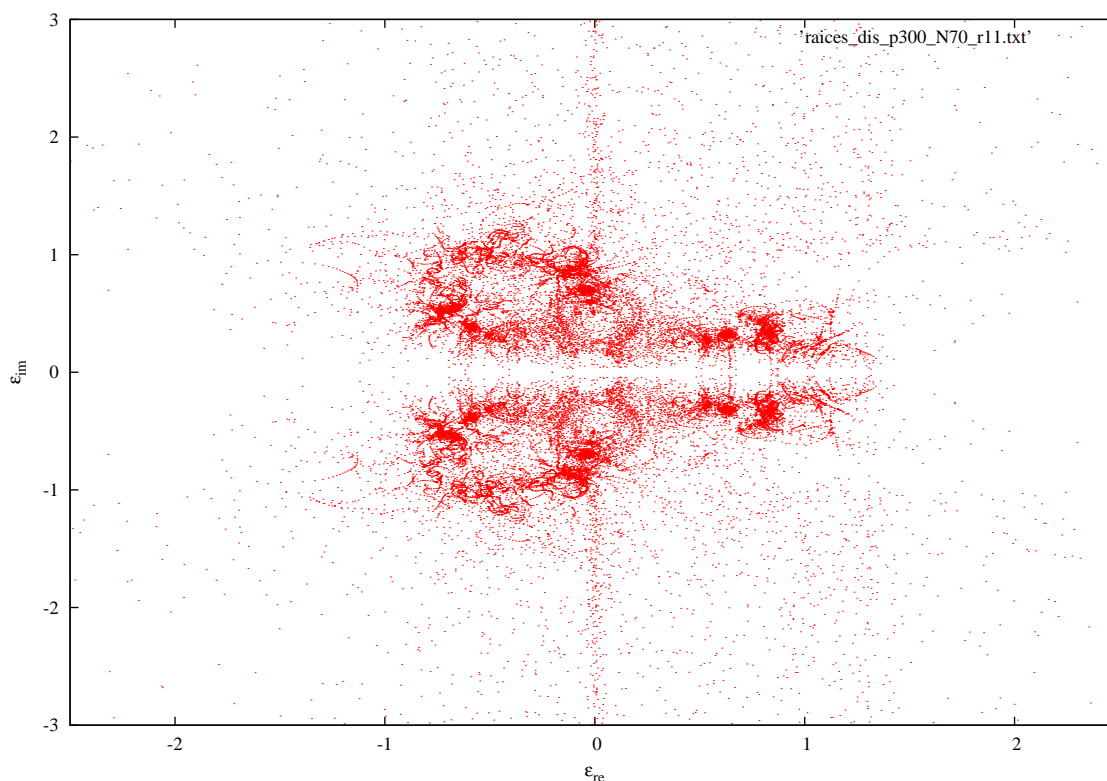


Figura 2.2: En esta figura se presentan los ceros de un aproximante de Padé de tipo $[35, 35]$ para los ángulos $\theta = i/2^{11} + 0,034546$, $i = 1, \dots, 2^{11}$. Fue utilizada una precisión de 300 cifras significativas.

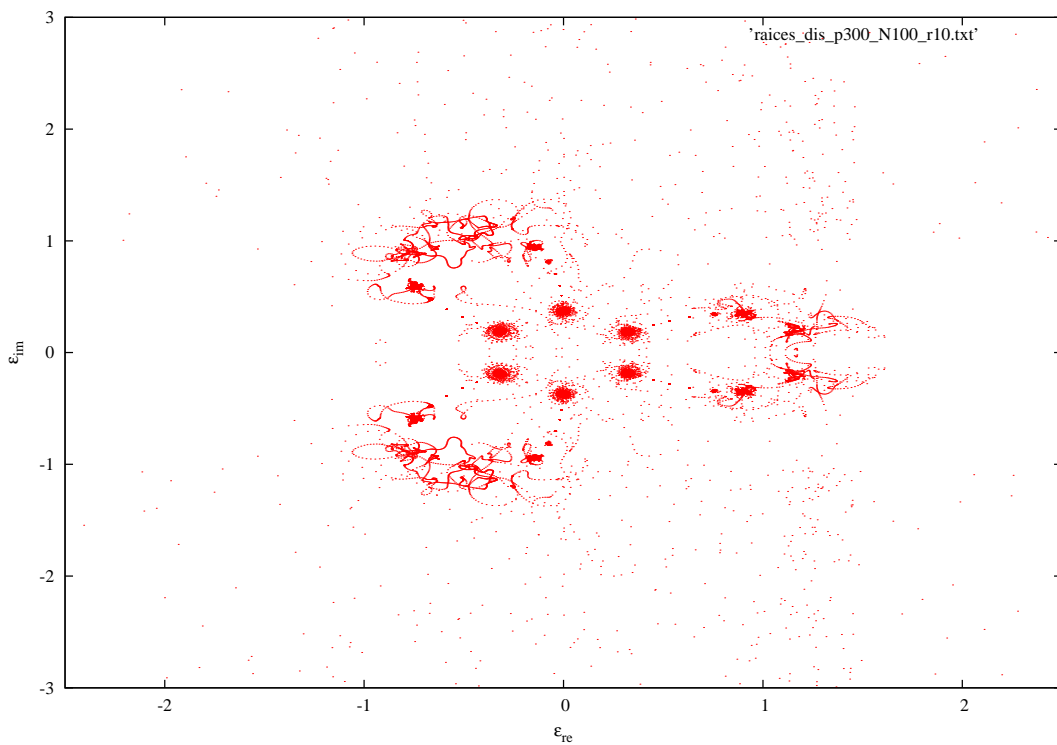


Figura 2.3: En esta figura se presentan los ceros de un aproximante de Padé de tipo $[50, 50]$ para los ángulos $\theta = i/2^{10} + 0,034546$, $i = 1, \dots, 2^{10}$. Fue utilizada una precisión de 300 cifras significativas.

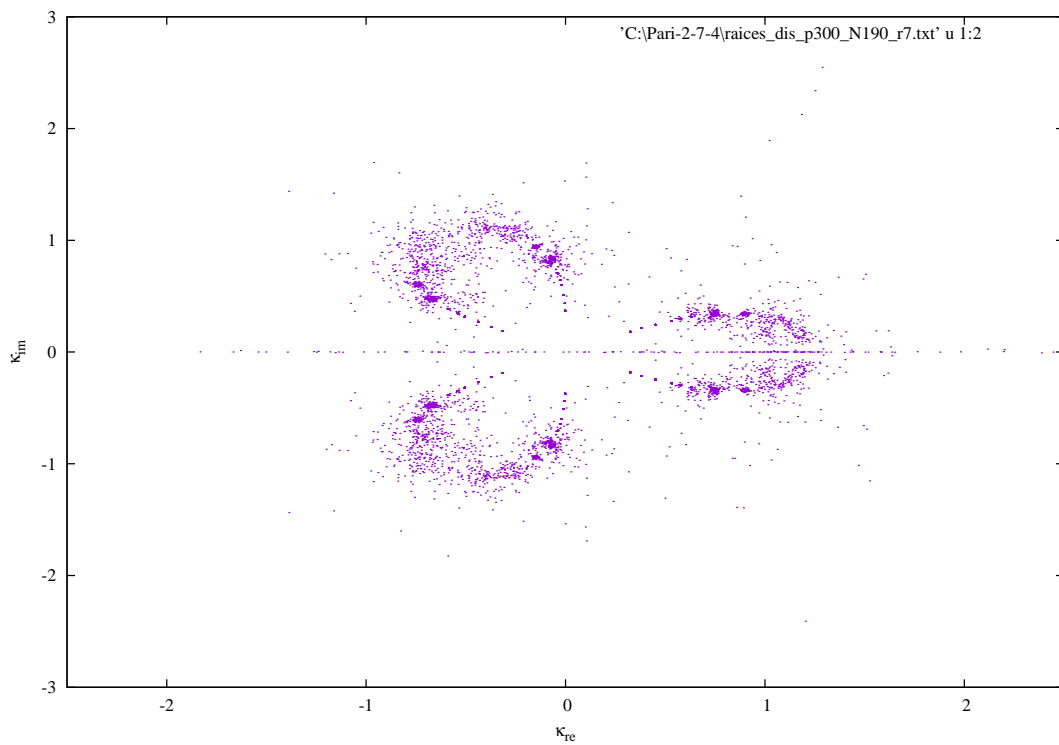


Figura 2.4: En esta figura se presentan los ceros de un aproximante de Padé de tipo $[95, 95]$ para los ángulos $\theta = i/2^7 + 0,034546$, $i = 1, \dots, 2^7$. Fue utilizada una precisión de 300 cifras significativas.

2.3. Método de Nash-Moser

Debido a la complejidad del dominio de analiticidad del mapeo estándar disipativo, se decidió explorar otras alternativas para tratar de dar una mejor descripción numérica de este dominio. Para esto utilizaremos un método de Newton modificado, mejor conocido como método de Nash-Moser. Lo que se expone a continuación está basado en lo publicado en [3].

A continuación daremos una descripción meramente heurística de como es que se *construye* este método. Para esto vamos a cambiar un poco la notación de las secciones anteriores. Notemos que la ecuación (2.5) puede escribirse como

$$u(\theta + \omega) - (1 + b)u(\theta) + bu(\theta - \omega) + (1 - b)\omega - \tilde{c} = -\varepsilon V'(\theta + u(\theta)),$$

que a su vez puede ser re-escrita como

$$u(\theta + \omega) - (1 + b)u(\theta) + bu(\theta - \omega) - c = -\varepsilon V'(\theta + u(\theta)) \quad (2.17)$$

donde $c = \tilde{c} - (1 - b)\omega$ y en este caso u no se considerará como una función de ε .

Ahora, para poder describir el algoritmo a utilizar, introduciremos el operador error que actúa sobre la función u

$$E_c(u) := u(\theta + \omega) - (1 + b)u(\theta) + bu(\theta - \omega) - c + \varepsilon V'(\theta + u(\theta)). \quad (2.18)$$

El objetivo del método de Nash-Moser será encontrar una solución (u, c) de (2.17) por medio de iteraciones del operador $E_c(u)$. Más precisamente, el primer paso del método empieza con un par (u_0, c_0) tal que la norma de $E_{c_0}(u_0)$ es *pequeña*, después el objetivo es buscar una corrección (v, δ) de tal forma que la nueva solución $(u_0 + v, c_0 + \delta)$ satisfaga la ecuación

$$E_{c_0 + \delta}(u_0 + v) = 0$$

al menos a primer orden en la variable v . Veamos esto con más detalle, partiendo de una solución (u_0, c_0) tendremos que

$$e_0(\theta) := E_{c_0}(u_0) = u_0(\theta + \omega) - (1 + b)u_0(\theta) + bu_0(\theta - \omega) - c_0 + \varepsilon V'(\theta + u_0(\theta)). \quad (2.19)$$

El objetivo es buscar funciones $u_1(\theta) = u_0(\theta) + v(\theta)$ y $c_1 = c_0 + \delta$ que *mejoren* el error $E_{c_1}(u_1)$. Veamos, el operador error evaluado en esta nueva función será $e_1(\theta) := E_{c_1}(u_1)$, es decir,

$$\begin{aligned} e_1(\theta) &= u_0(\theta + \omega) + v(\theta + \omega) - (1 + b)[u_0(\theta) + v(\theta)] + b[u_0(\theta - \omega) + v(\theta - \omega)] \\ &\quad - c_0 - \delta + \varepsilon V'(\theta + u_0(\theta) + v(\theta)). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Luego, expandiendo a V en serie de Taylor alrededor de $\theta + u_0(\theta)$ obtendremos que la ecuación (2.20) tiene la siguiente forma

$$e_1(\theta) = e_0(\theta) + v(\theta + \omega) - (1 + b)v(\theta) + bv(\theta - \omega) - \delta + \varepsilon V''(\theta + u_0(\theta))v(\theta) + \mathcal{O}(\|v\|^2). \quad (2.21)$$

El objetivo del método es encontrar una corrección (v, δ) de tal forma que

$$\mathcal{O}(\|e_1(\theta)\|) = \mathcal{O}(\|e_0(\theta)\|^2) \quad (2.22)$$

y en general

$$\mathcal{O}(\|e_n(\theta)\|) = \mathcal{O}(\|e_{n-1}(\theta)\|^2) = \mathcal{O}(\|e_0(\theta)\|^{2^n}).$$

De esta forma, si $e_0(\theta)$ es *suficientemente pequeño* se esperará que la sucesión de funciones que se construirá converja a una solución de (2.17). Para ver como se obtiene esta convergencia se recomienda consultar [5].

Ahora, para poder satisfacer la condición (2.22) analicemos la ecuación (2.21), notemos que si la identidad

$$-(e_0(\theta) - \delta) = v(\theta + \omega) - (1 + b)v(\theta) + bv(\theta - \omega) + \varepsilon V''(\theta + u_0(\theta))v(\theta) \quad (2.23)$$

se satisface, entonces, (2.21) tendría la forma

$$e_1(\theta) = \mathcal{O}(\|v(\theta)\|^2).$$

Nótese que el lado derecho de (2.23) es un operador lineal aplicado a la función v , es decir, (2.23) puede escribirse como $Av = e_0(\theta) - \delta$, luego, $\|v(\theta)\| \sim \|e_0(\theta)\|$, es decir,

$$\mathcal{O}(\|e_1(\theta)\|) = \mathcal{O}(\|v(\theta)\|^2) = \mathcal{O}(\|e_0(\theta)\|^2).$$

El argumento dado en el párrafo anterior no es nada riguroso, se expone de esta forma para que el lector se dé una idea de por qué es que el método funciona. Recordemos que el objetivo de este trabajo es hacer un análisis numérico de los dominios de analiticidad de las funciones encontradas al utilizar estos métodos.

Siguiendo con nuestra descripción del Método de Nash-Moser, lo expuesto arriba indica que para encontrar funciones $u_1(\theta)$ y c_1 tales que (2.22) se satisfaga es necesario encontrar una solución (v, δ) de la ecuación (2.23). Para poder dar una descripción de como encontrar estas soluciones será necesario escribir la ecuación (2.23) de otra forma. Antes de llevar esto a cabo introduciremos algunas definiciones:

Definición 2.1. *Definiremos a los operadores Δ_{-1} y Δ_1^b como sigue:*

$$\Delta_{-1}f(\theta) \equiv f(\theta - \omega) - f(\theta),$$

$$\Delta_1^b f(\theta) \equiv f(\theta + \omega) - bf(\theta).$$

También definiremos a la función h como

$$h(\theta) = \theta + u_0(\theta).$$

Lema 2.1. *Suponiendo que $e_0(\theta)$ es como en (2.19), entonces, la ecuación (2.23) es equivalente a la ecuación*

$$\Delta_1^b [-h'(\theta - \omega)h'(\theta)\Delta_{-1} [(h'(\theta))^{-1}v(\theta)]] = -h'(\theta)(e_0(\theta) - \delta). \quad (2.24)$$

Prueba: Lo primero a notar es que la ecuación (2.21) es equivalente a

$$h'(\theta)e_1(\theta) = h'(\theta) [e_0(\theta) + v(\theta + \omega) - (1 + b)v(\theta) + bv(\theta - \omega) - \delta + \varepsilon V''(\theta + u_0(\theta))v(\theta)] + \mathcal{O}(\|v\|^2). \quad (2.25)$$

Considerando el hecho de que

$$e'_0(\theta) = \mathcal{O}(e_0(\theta))$$

(esto es una estimación de Cauchy que se puede consultar en [10]), tendremos que

$$e'_0(\theta)v(\theta) = \mathcal{O}(\|v\|^2). \quad (2.26)$$

Lo último se tiene pues (2.23) implica que $e_0(\theta) = \mathcal{O}(\|v\|)$. De este modo la ecuación (2.25) es equivalente a

$$\begin{aligned} h'(\theta)e_1(\theta) &= h'(\theta) [e_0(\theta) + v(\theta + \omega) - (1 + b)v(\theta) + bv(\theta - \omega) - \delta + \varepsilon V''(\theta + u_0(\theta))v(\theta)] \\ &\quad - e'_0(\theta)v(\theta) + e'_0(\theta)v(\theta) + \mathcal{O}(\|v\|^2) \\ &= h'(\theta) [e_0(\theta) + v(\theta + \omega) - (1 + b)v(\theta) + bv(\theta - \omega) - \delta + \varepsilon V''(\theta + u_0(\theta))v(\theta)] \\ &\quad - e'_0(\theta)v(\theta) + \mathcal{O}(\|v\|^2), \end{aligned}$$

esto se tiene debido a (2.26). Entonces, por el mismo argumento por el que fue obtenida, la ecuación (2.23) será equivalente a

$$\begin{aligned} -h'(\theta) [e_0(\theta) - \delta] &= h'(\theta)v(\theta + \omega) - (1 + b)h'(\theta)v(\theta) + bh'(\theta)v(\theta - \omega) \\ &\quad + \varepsilon V''(\theta + u_0(\theta))h'(\theta)v(\theta) - e'_0(\theta)v(\theta) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por otro lado, utilizando la función $h(\theta)$, podemos re-escribir la ecuación (2.19) como

$$e_0(\theta) = h(\theta + \omega) - (1 + b)h(\theta) + bh(\theta - \omega) - c_0 - \omega(1 - b) + \varepsilon V'(h(\theta)).$$

Derivando esta expresión respecto a θ y multiplicando por $v(\theta)$ tenemos que

$$e'_0(\theta)v(\theta) = h'(\theta + \omega)v(\theta) - (1 + b)h'(\theta)v(\theta) + bh'(\theta - \omega)v(\theta) + \varepsilon V''(h(\theta))h'(\theta)v(\theta). \quad (2.28)$$

Ahora, introduciendo el cambio de variable $v(\theta) = h'(\theta)w(\theta)$ las ecuaciones (2.27) y (2.28) se transforman en

$$\begin{aligned} -h'(\theta) [e_0(\theta) - \delta] &= h'(\theta)h'(\theta + \omega)w(\theta + \omega) - (1 + b)h'(\theta)^2w(\theta) + bh'(\theta)h'(\theta - \omega)w(\theta - \omega) \\ &\quad + \varepsilon V''(h(\theta))h'(\theta)^2w(\theta) - e'_0(\theta)h'(\theta)w(\theta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

y

$$\begin{aligned} e'_0(\theta)h'(\theta)w(\theta) &= h'(\theta + \omega)h'(\theta)w(\theta) - (1 + b)h'(\theta)^2w(\theta) + bh'(\theta - \omega)h'(\theta)w(\theta) \\ &\quad + \varepsilon V''(h(\theta))h'(\theta)^2w(\theta), \end{aligned} \quad (2.30)$$

respectivamente. Por último, sustituyendo (2.30) en (2.29) obtendremos la ecuación.

$$-h'(\theta) [e_0(\theta) - \delta] = -h'(\theta)h'(\theta+\omega) [w(\theta) - w(\theta + \omega)] + bh'(\theta-\omega)h'(\theta) [w(\theta - \omega) - w(\theta)].$$

Utilizando el operador Δ_1^b , la ecuación de arriba se escribe como

$$\Delta_1^b [-h'(\theta - \omega)h'(\theta)[w(\theta - \omega) - w(\theta)]] = -h'(\theta) [e_0(\theta) - \delta]$$

que a su vez se re-escribe como

$$\Delta_1^b [-h'(\theta - \omega)h'(\theta)\Delta_{-1}w(\theta)] = -h'(\theta) [e_0(\theta) - \delta].$$

Es decir,

$$\Delta_1^b [-h'(\theta - \omega)h'(\theta)\Delta_{-1} [(h'(\theta))^{-1}v(\theta)]] = -h'(\theta)(e_0(\theta) - \delta).$$

q.e.d.

El lema anterior sugiere que para poder encontrar la corrección (v, δ) , es necesario resolver ecuaciones de la forma

$$\Delta_1^b \varphi(\theta) = \eta(\theta) \tag{2.31}$$

y

$$\Delta_{-1} \varphi(\theta) = \eta(\theta). \tag{2.32}$$

La ventaja de introducir los operadores Δ_1^b y Δ_{-1} es que las ecuaciones (2.31) y (2.32) pueden ser resueltas fácilmente en términos de los coeficientes de Fourier (nótese que estos operadores son muy parecidos al operador L_ω introducido en el Capítulo 1). Es decir, si

$$\eta(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k \theta} \quad \text{y} \quad \varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k \theta},$$

entonces, (2.31) tendrá la solución formal

$$\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{\eta}_k}{e^{2\pi i k \omega} - b} e^{2\pi i k \omega}$$

y (2.32) tendrá la solución formal

$$\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{\eta}_k}{e^{-2\pi i k \omega} - 1} e^{2\pi i k \omega}.$$

En conclusión, la introducción de la ecuación (2.24) nos permitirá implementar el método de Nash-Moser de una forma más eficiente.

2.3.1. Algoritmo y resultados.

La implementación de cada paso del método de Nash-Moser está descrita en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2.1. *i)* Encontrar dos funciones φ y ν que satisfagan las ecuaciones

$$\Delta_1^b \varphi = -h' E_{c_0}(u_0) \quad y \quad \Delta_1^b \nu = -h'. \quad (2.33)$$

Nótese que si φ y ν son soluciones de las ecuaciones (2.33), entonces, para todo $\delta \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente ecuación:

$$\Delta_1^b(\varphi - \delta\nu) = -h'(E_{c_0}(u_0) - \delta). \quad (2.34)$$

ii) Encontrar $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\theta) - \delta\nu(\theta)}{h'(\theta)h'(\theta - \omega)} d\theta = 0 \quad (2.35)$$

Ésto se podrá hacer siempre y cuando $\int_0^1 \frac{\nu(\theta)}{h'(\theta)h'(\theta - \omega)} d\theta \neq 0$.

iii) Resolver la ecuación

$$\Delta_{-1} w = \frac{\varphi - \delta\nu}{-h'(\theta)h'(\theta - \omega)}. \quad (2.36)$$

La función w que es solución a la ecuación (2.36) puede ser encontrada gracias a que se tiene la condición (2.35).

iv) Construir una función $v(\theta) = h'(\theta)w(\theta)$ y, así, obtener la nueva solución (u_1, c_1) dada por

$$u_1(\theta) = u_0(\theta) + v(\theta), \quad c_1 = c_0 + \delta.$$

El algoritmo anterior sólo nos indica como construir las funciones u_n que aproximan a la solución de la ecuación (2.17). Sin embargo, el objetivo de este trabajo es tratar de describir el dominio de analiticidad de la solución a (2.17) considerándola como una función compleja del parámetro ε (estamos interesados en el caso $b = b(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^3$).

Para describir el método para buscar el dominio de analiticidad de las parametrizaciones de los toros invariantes (i.e., soluciones de la ecuación (2.17)). Utilizaremos el hecho² de que *cerca del rompimiento (cuando las soluciones dejan de existir) la norma de las derivadas de u explota*.

Para ser más específicos en el punto anterior nos dispondremos a definir la siguiente norma. Escribiendo la expansión en serie de Fourier de la función $u = u(\theta)$ como

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{2\pi i k \theta}, \quad \text{entonces, } \|u\|_{L^2} \equiv \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k|^2 \right)^{1/2}. \quad \text{Así, podemos definir}$$

$$\|u\|_r := \|\partial_\theta^r u\|_{L^2} \quad (2.37)$$

²Rigurosamente estudiado en [6], [7] y [11].

donde ∂_θ^r denota la r -ésima derivada con respecto a θ . De esta manera, para polinomios trigonométricos de la forma

$$u^{(N)}(\theta) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{u}_k e^{2\pi i k \theta}. \quad (2.38)$$

que es el caso de nuestras aproximaciones, consideraremos la norma de Sobolev, definida arriba, como la siguiente suma finita

$$\|u^{(N)}\|_r = \left(\sum_{|k| \leq N} (2\pi k)^{2r} |\widehat{u}_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Se sabe que (2.37) es una norma en el espacio de funciones periódicas, que es el caso en el que estamos interesados.

Resumiendo, el dominio de existencia de los toros invariantes puede ser *estimado* utilizando una solución aproximada de la ecuación (2.17), encontrada por el método de Nash-Moser con u_0 representado por un polinomio trigonométrico como en (2.38). Luego, el *comportamiento regular* de la norma de Sobolev de $u^{(N)}$, conforme el parámetro crece, proporcionará evidencia de la existencia, y el rompimiento, del toro invariante. En seguida presentamos el algoritmo utilizado para identificar la frontera del dominio de existencia.

Algoritmo 2.2.

Escoger un camino en el espacio de parámetros ($\varepsilon \in \mathbb{C}$) que empiece con el caso integrable ($\varepsilon = 0$).

Inicializando

$u^{(N)}$ del caso integrable

Repetir

Incrementar el parámetro sobre el camino previamente escogido.

Correr un paso del algoritmo de Nash-Moser (Algoritmo 2.1)

If Las iteraciones del método de Nash-Moser no convergen

Disminuir el incremento del parámetro.

Else (*Éxito en la iteración*)

Guardar el valor de el parámetro

y calcular la norma de Sobolev de la solución

If La norma $\|u^{(N)}\|_r$ excede un valor dado

Duplicar el número de coeficientes de Fourier y continuar con $u^{(2N)}$

Hasta que la norma de Sobolev de la solución aproximada exceda un valor dado o la implementación se detenga

En la siguiente figura se presentan los resultados obtenidos al implementar el Algoritmo 2.2.

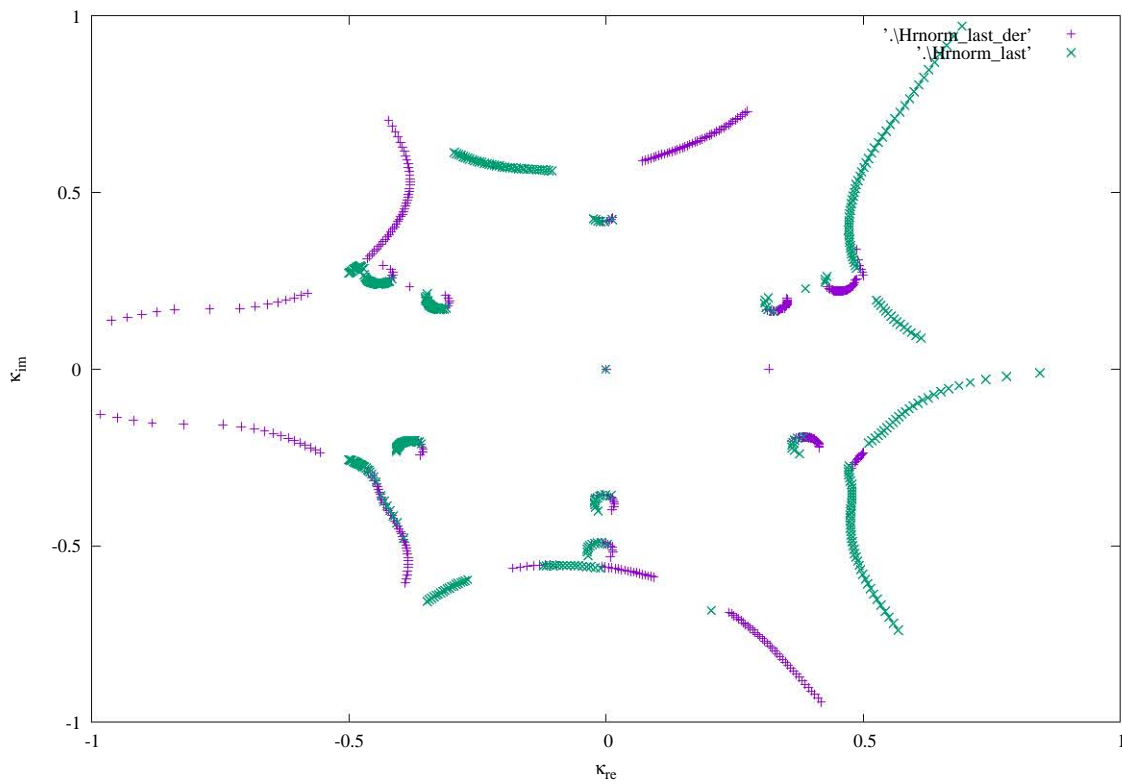


Figura 2.5: Cada punto en la figura representa el último valor del parámetro para el cual el Algoritmo 2.2 pudo ejecutarse, esto para cada una de las trayectorias escogidas. Cabe mencionar que el algoritmo pudo haberse detenido por el hecho de haber llegado al último parámetro contemplado y no por que la derivada halla excedido un valor dado.

Capítulo 3

Conclusiones.

Los resultados obtenidos en el Capítulo 1 concuerdan con los obtenidos en [8]. Como se mencionó en la introducción, se decidió comenzar este trabajo con el mapeo estándar debido a que ya ha sido ampliamente estudiado y porque, tener resultados con los cuales poder comparar los aquí expuestos, nos permitió calibrar los métodos utilizados así como su implementación.

En el segundo capítulo se procedió a estudiar el caso disipativo. El hecho de agregar una disipación hace que la perturbación sea singular, para poder asegurar la existencia de toros invariantes es necesario agregar un parámetro externo en forma de un forzamiento. Después de ilustrar los métodos utilizados en el Capítulo 2 se espera que el lector tenga un mejor entendimiento de la razón por la cual es necesario introducir el forzamiento.

La disparidad de los resultados expuestos en las figuras 2.2, 2.2 y 2.3 (las cuales se obtienen al utilizar el método de los aproximantes de Padé) parece deberse al hecho de que el sistema (1.26) es bastante sensible, es decir, pequeños errores numéricos en los coeficientes de la serie podrían ser amplificados enormemente a la hora de resolver el sistema.

Con el objetivo de explorar resultados obtenidos con otros métodos se llevo a cabo la implementación del método de Nash-Moser. Este método se basa en el principio heurístico de que *convergencia cuadrática puede superar a los pequeños divisores*. La exposición de este método fue meramente heurística, hecha con la finalidad de que el autor se de una idea de lo que nos referimos cuando decimos *convergencia cuadrática*. Pese a que la implementación de este método es más sofisticada, se puede apreciar que se obtuvieron *muy buenos resultados* (esto de acuerdo con [4]).

El autor cree que los resultados expuestos en el Capítulo 2 pueden ser mejorados modificando los algoritmos utilizados para que puedan manejar una mejor precisión. Este es un proyecto que se piensa llevar a cabo en un futuro cercano.

Bibliografía

- [1] G. BAKER, M. GRAVES-MORRIS. *Padé Approximants*. Addison-Wesley, 1981.
- [2] R. CALLEJA. *Existence and persistence of invariant objects in dynamical systems and mathematical physics*. Ph.D. thesis, The University of Texas at Austin, 2009.
- [3] R. CALLEJA, A. CELLETTI. *Breakdown of invariant attractors for the dissipative standar map*. CHAOS, 20(1):013121, 2010.
- [4] R. CALLEJA, A. CELLETTI, R. DE LA LLAVE. *Domains of analyticity of Lindstedt expansions of KAM tori in dissipative perturbarions of hamiltonian systems*. Preprint.
- [5] R. CALLEJA, A. CELLETTI, R. DE LA LLAVE. *KAM theory for conformally symplectic systems: Efficient algorithms and their validation*. DCDS-A, Vol. 33 (2013), No. 10, p. 411-443.
- [6] R. CALLEJA, R. DE LA LLAVE. *A numerically accessible criterion for the breakdown of quasi-periodic solutions and its rigorous justification*. Nonlinearity 23, (2010) 2029-2058.
- [7] R. CALLEJA, R. DE LA LLAVE. *Computation of the breakdown of analyticity in statistical mechanics models: numerical results and a renormalization group explanation*. Journal of Statistical Physics (2010) 141:940-951.
- [8] C. FALCOLINI, R. DE LA LLAVE. *Numerical Calculation of Domains of Analyticity for Perturbation Theories in the Presence of Small Divisors*. Journal of Statistical Physics, Vol. 67, Nos. 3/4, 1992, páginas 645-666.
- [9] D. E. KNUTH. *The Art of Computer Programming, Vol. II*. 2nd ed. Addison-Wesley, 1981.
- [10] R. DE LA LLAVE. *A tutorial on KAM theory*. In Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), páginas 175 -292. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [11] R. DE LA LLAVE. *KAM theory for equilibrium states in 1-D statistical mechanics models*. Ann. Henri Poincare **9**, 835-880 (2008).