



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA  
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Sobre la dinámica de la familia de los mapeos tienda en los complejos

TESINA  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
Renato Leriche Vázquez

DIRECTOR DE LA TESINA  
Dr. Guillermo Javier Francisco Sierra Loera  
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Mayo de 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>Antecedentes</b>	<b>3</b>
Transformaciones de Möbius por pedazos	3
Conjuntos de Julia y de Mandelbrot	6
La familia de mapeos tienda y su dinámica	6
<b>La familia de mapeos tienda en <math>\hat{\mathbb{C}}</math></b>	<b>7</b>
Análisis de las funciones componentes	7
Algunos resultados sobre la dinámica	8
<b>Apéndices</b>	<b>12</b>
Algoritmos de dibujo	12
Imágenes	14

# Resumen

En este trabajo se investigan algunas propiedades dinámicas de la familia de los mapeos tienda, en su versión complejificada. Al complejificar los mapeos tienda, estos se convierten en un tipo particular de transformaciones conformes en dos pedazos, que fueron estudiados en su forma general en la tesis de licenciatura del autor (véase [Leriché]). El estudio de la dinámica de las transformaciones conformes por pedazos es un área emergente en la teoría de sistemas dinámicos, con bastante investigación aun por realizar. Por este motivo, es de relevancia analizar la complejificación de sistemas reales bien estudiados (la familia de las funciones tienda, en este caso), que resultan en sistemas de transformaciones conformes por pedazos con propiedades dinámicas aun no determinadas completamente, y que pueden “heredar” algunas características del sistema real original.

En la sección sobre resultados de la investigación, se demuestra una proposición que indica en que casos se puede asegurar que los mapeos de la familia son globalmente atractores o repulsores. Asimismo, se encuentran las características de los conjuntos de Julia rellenos y de órbitas eventualmente periódicas en varios casos.

Para los elementos restantes de la familia, se conjeturan algunos comportamientos dinámicos, con base en resultados previamente reportados y observaciones sobre gráficos generados por computadora. También se define un *locus* en el espacio de parámetros, para el cual se conjetura que no puede incluir transformaciones con conjuntos de Julia completamente desconexos, a la manera del conjunto de Mandelbrot de la familia de mapeos cuadráticos en los complejos.

Finalmente, se incluye como apéndice la lista de algoritmos utilizados para generar los gráficos por computadora necesarios. También se incluyen algunas imágenes generadas para ejemplos y contra-ejemplos, así como para dar soporte a los resultados obtenidos y las conjeturas propuestas.

Es importante hacer notar que este estudio forma parte del diccionario de Sullivan, en el que originalmente se establecieron relaciones entre grupos kleinianos y dinámica de mapeos racionales. Posteriormente, el diccionario se ha extendido a la dinámica de funciones trascendentes y, como en este trabajo, a la dinámica de transformaciones conformes por pedazos. Entre las relaciones con mapeos racionales, se encuentran coincidencias del conjunto irracional con el conjunto de Julia, de las celdas del conjunto regular con los componentes del conjunto de Fatou, del carácter periódico de las celdas con el teorema de dominios no errantes, sólo por citar algunas (véanse [Goetz00, Goetz01]).

Finalmente, vale la pena mencionar que un punto de interés adicional para el desarrollo de esta teoría, son las conexiones que existen con otros temas. Por ejemplo, las transformaciones conformes por pedazos son generalizaciones de sistemas de intercambio de intervalos, y además están relacionadas con la teoría de billares duales y sistemas hamiltonianos (véanse [Goetz00, Goetz01]). Fuera del área de sistemas dinámicos discretos, se puede mencionar que la monodromía de las soluciones de ecuaciones diferenciales complejas, son precisamente transformaciones conformes por pedazos (véase [Cruz05]).

# Antecedentes

## Transformaciones de Möbius por pedazos

Una función  $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una **transformación de Möbius** si

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ . Estas transformaciones forman un grupo isomorfo a  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Una transformación  $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  **de Möbius por pedazos** (particularmente, **en dos pedazos**) es

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in D \\ g(z), & \text{si } z \notin D \end{cases}$$

donde  $f$  y  $g$  son de Möbius, y el pedazo  $D$  del dominio es la cerradura de un abierto simplemente conexo cuya frontera es una curva suave por partes. Obsérvese que  $F$  no es continua en  $\partial D$ , pues en general  $f(z) \neq g(z)$  para  $z \in \partial D$ .

La **telaraña** de la transformación de Möbius por pedazos  $F$  se define como

$$Spid(F) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(\partial D)}$$

Al conjunto se le llama de esa manera, porque está formado principalmente por una unión de segmentos de curvas que asemeja a las estructuras creadas por los arácnidos. La notación del conjunto viene de su nombre en inglés: *spiderweb*.

Nótese que la telaraña es el conjunto de los puntos, que bajo iteraciones de  $F$ , caerán eventualmente en la frontera  $\partial D$  (donde  $F$  no es continua). Lo anterior implica que la dinámica en regiones separadas por un segmento de la telaraña, puede ser totalmente distinta. Por esta razón, al conjunto telaraña también se le llama **excepcional** o **irregular**. Se muestra un ejemplo en la figura [1].

Como contraparte de la telaraña, el **conjunto regular** es

$$\mathcal{F}(F) = \hat{\mathbb{C}} - Spid(F)$$

De las definiciones, se deriva que telaraña es invariante hacia atrás y el conjunto regular invariante hacia adelante, esto es

$$F^{-1}(Spid(F)) \subset Spid(F) \quad \text{y} \quad F(\mathcal{F}(F)) \subset \mathcal{F}(F)$$

La función **itinerario**  $I_F : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma_2$  asociada a una transformación de Möbius en dos pedazos  $F$  está definida como

$$(I_F(z))_n = \begin{cases} 0, & \text{si } F^n(z) \in D \\ 1, & \text{si } F^n(z) \notin D \end{cases}$$

donde  $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  es el conjunto de sucesiones (o palabras) de dos símbolos. Por la definición,  $I_F$  codifica las 'visitas' de cada punto a  $D$  y  $D^c$ , al iterar  $F$ .

La relación  $z \sim w \iff I_F(z) = I_F(w)$  es de equivalencia, por lo que las clases de equivalencia  $\mathcal{C}_F(s) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid I_F(z) = s\}$  determinan una partición de  $\hat{\mathbb{C}}$ . En [Cruz04] y [Romero], se demuestran las siguientes relaciones de la telaraña y el conjunto regular con la partición determinada por el itinerario:

$$\begin{aligned} Spid(F) &= \overline{\bigcup_{s \in \Sigma_2} \partial \mathcal{C}_F(s)} \\ \mathcal{F}(F) &= \bigcup_{s \in \Sigma_2} \text{int}(\mathcal{C}_F(s)) \end{aligned}$$

De esta manera, se observa que el conjunto regular está formado por componentes abiertas y disjuntas, donde cada una de ellas contiene todos los puntos con un mismo itinerario.

El **conjunto límite de la telaraña** es

$$\Lambda_{Spid}(F) = Spid(F) - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(\partial D)$$

Intuitivamente,  $\Lambda_{Spid}(F)$  es el conjunto de límites de sucesiones de la forma  $F^{-n}(z)$ , con  $z \in \partial D$ . De hecho, se tiene el siguiente

**Teorema.**  $\Lambda_{Spid}(F) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} F^{-n}(\partial D)}$  en el espacio de compactos  $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})^1$ . (Véase [Leriche]).

La estructura de la telaraña telaraña puede comprenderse de mejor manera con la siguiente construcción: Sea  $C = \partial D$  y  $E = D^c$ , entonces

$$\begin{aligned} F^0(C) &= C \\ F^{-1}(C) &= \\ (f^{-1}(C) \cap D) \cup (g^{-1}(C) \cap E) &= C_0 \cup C_1 \\ F^{-2}(C) = F^{-1}(C_0 \cup C_1) &= \\ (f^{-1}(C_0 \cup C_1) \cap D) \cup (g^{-1}(C_0 \cup C_1) \cap E) &= \\ (f^{-1}(C_0) \cap D) \cup (f^{-1}(C_1) \cap D) \cup &= \\ (g^{-1}(C_0) \cap E) \cup (g^{-1}(C_1) \cap E) &= C_{00} \cup C_{10} \cup C_{01} \cup C_{11} \\ &\vdots \\ F^{-n}(C) &= \bigcup_{s \in \Sigma_2(n)} C_s \\ &\vdots \\ \Lambda_{Spid}(F) &= \overline{\bigcup_{s \in \Sigma_2} C_s} \end{aligned}$$

donde  $\Sigma_2(n) = \{0, 1\}^n$  es el conjunto de palabras de dos símbolos de tamaño  $n$ ,  $C_{s_0} = f^{-1}(C_s) \cap D$  y  $C_{s_1} = g^{-1}(C_s) \cap E$ . Nótese que puede ocurrir que  $C_s = \emptyset$ , y por lo tanto  $C_{s_0} = C_{s_1} = \emptyset$ . Además, se puede definir  $Spid_N(F) = \bigcup_{n \leq N} \overline{F^{-n}(\partial D)} = \bigcup_{s \in \Sigma_2(N)} \partial \mathcal{C}_F(s)$ .

También es útil distinguir al **conjunto irracional**, el cual se define como

$$\mathcal{I}(F) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid I_F(z) \text{ es irracional}\}$$

Nótese que  $\hat{\mathbb{C}} - \mathcal{I}(F)$  es el conjunto de todos puntos con itinerarios racionales, esto es, itinerarios que determinan sucesiones de símbolos eventualmente periódicos, y por lo tanto de celdas  $\mathcal{C}_F(s)$  eventualmente periódicas.

<sup>1</sup> $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}) = \{K \subset \hat{\mathbb{C}} \mid K \text{ es compacto}\}$ , con la métrica de Hausdorff derivada de la métrica esférica en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Es importante resaltar el caso  $\Lambda_{Spid}(F) = \emptyset$ , que implica  $Spid(F) = Spid_N(F)$  para algún  $N$ . Así,  $\mathcal{F}(F)$  estaría formado por un número finito de celdas, y por lo tanto, todos los itinerarios deberían ser racionales.

Debido a la naturaleza discontinua de las transformaciones Möbius por pedazos, las propiedades dinámicas son difíciles de analizar. Sin embargo, se han obtenido algunos resultados sobre su estabilidad, utilizando algunas relaciones con grupos de transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

En primer lugar, se define el **grupo asociado** a una transformación Möbius en dos pedazos  $F$  como el subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  generado por las transformaciones definidas en cada pedazo, esto es,  $G_F = \langle f, g \rangle$ .

A los subgrupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , se les llama **kleinianos**. El conjunto de puntos de acumulación de una órbita de cualquier punto  $p$  bajo la acción de  $G$ , es llamado **conjunto límite** y se denota  $\Lambda(G)$  (esto es,  $\Lambda(G) = \{q \in \mathbb{C} \mid q \text{ es punto de acumulación de } Gp\}$ , donde  $Gp = \{g(p) \mid g \in G\}$  es la órbita de  $p$  bajo la acción de  $G$ ). Si  $G$  es kleiniano,  $\Lambda(G)$  puede ser una de las siguientes posibilidades: vacío, un punto, dos puntos, una circunferencia, una recta, un conjunto fractal o todo  $\hat{\mathbb{C}}$ . Si  $G$  no es kleiniano,  $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$ .

De aquí en adelante se considerará que el grupo asociado  $G_F$  es kleiniano y que  $\Lambda(G_F) \neq \hat{\mathbb{C}}$ .

Un primer resultado que relaciona el grupo asociado y la dinámica de  $F$ , es el siguiente

**Teorema.** Si  $\partial D \cap \Lambda(G_F) = \emptyset$ , entonces  $\Lambda_{Spid}(F) \subset \Lambda(G_F)$ . (Véase [Leriche]).

Como ejemplo, considérese  $F$  definida por  $f(z) = z$  en  $D = \overline{B(1, 1)}$  (el disco cerrado centrado en 1 de radio 1) y  $g(z) = \frac{1}{2}z$  en  $D^c$ . En este caso  $G_F$  es kleiniano y  $\Lambda(G_F) = \{0, \infty\}$ . Obsérvese que  $\partial D \cap \Lambda(G_F) = \{0\}$  y que  $\Lambda_{Spid}(F) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Re}(z) = 0\}$ . Por otro lado, tomando  $D = \overline{B(1, r)}$  con  $r \neq 1$  y las mismas funciones componentes, se tiene que  $\partial D \cap \Lambda(G_F) = \emptyset$  y  $\Lambda_{Spid}(F) = \{\infty\} \subset \Lambda(G_F)$ . Véase la figura [2].

Un interrogante es determinar la estabilidad es el sistema dinámico asociado a  $F$  al perturbar el dominio  $D$ , manteniendo fijas las funciones  $f$  y  $g$  (y por lo tanto fijando a  $G_F$ ). Un resultado en este sentido es el siguiente

**Teorema.** La función  $\partial D \mapsto Spid_N(F)$  es continua del subespacio de las curvas de Jordan en  $\hat{\mathbb{C}}$  a  $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$ , para cualquier  $N \in \mathbb{N}$ . (Véase [Leriche]).

De los dos teoremas anteriores, se tiene como consecuencia el siguiente

**Teorema.** Si  $\partial D \cap \Lambda(G_F) = \emptyset$ , entonces la función  $\partial D \mapsto Spid(F)$  es continua del subespacio de las curvas de Jordan en  $\hat{\mathbb{C}}$  a  $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$ . (Véase [Leriche]).

Este último teorema implica cierto tipo de estabilidad, pues al ser la función descrita continua, pequeñas perturbaciones en el dominio  $D$  derivan en pequeñas variaciones de las respectivas telarañas, y, por lo tanto, del comportamiento dinámico.

Para la estabilidad estructural, al perturbar las transformaciones  $f$  y  $g$  y fijando  $D$ , se requieren condiciones más fuertes:

**Teorema.** Si  $G_F$  es de Schottky<sup>2</sup> y  $\partial D$  está contenida en la región fundamental de  $G_F$ , entonces  $F$  es estable en el espacio de transformaciones. (Véase [Lerichel]).

## Conjuntos de Julia y de Mandelbrot

El **conjunto de Julia relleno** de una función  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es

$$\mathcal{JR}(f) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists C \in \mathbb{R}, |f^n(z)| < C \forall n \in \mathbb{N}\} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \mathcal{O}(z, f) \text{ está acotada}\}$$

donde  $\mathcal{O}(z, f) = \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots\}$  es la **órbita** de  $z$  bajo  $f$ .

El **conjunto de Mandelbrot** de una familia de mapeos uniparamétrica  $\{f_\alpha : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ , con una semilla  $s_0 \in \mathbb{C}$  dada, se puede definir como

$$\mathcal{M}(\{f_\alpha\}, s_0) = \{\beta \in \mathbb{C} \mid \mathcal{O}(s_0, f_\beta) \text{ está acotada}\}$$

Para la familia de polinomios cuadráticos  $\{q_c\}$ , donde  $q_c(z) = z^2 + c$ , el conjunto de Mandelbrot  $\mathcal{M}(\{q_c\}, 0)$  representa el *locus* de conectividad de los conjuntos de Julia rellenos  $\mathcal{JR}(q_c)$ , esto es, si  $c \in \mathcal{M}(\{q_c\}, 0)$  entonces  $\mathcal{JR}(q_c)$  es conexo, pero totalmente disconexo en caso contrario. La elección de 0 como semilla es debido a que es punto crítico de todos los mapeos  $q_c$  (pues  $\frac{\partial}{\partial z} q_c(z) = 2z = 0 \iff z = 0$ ).

## La familia de mapeos tienda y su dinámica

La **familia de mapeos tienda**  $\{T_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{\kappa \in (0, \infty)}$  está definida por funciones lineales por pedazos de la siguiente manera:

$$T_\kappa(x) = \begin{cases} \kappa x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \kappa - \kappa x, & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Algunas propiedades dinámicas de los elementos de la familia de los mapeos tienda:

- Si  $\kappa < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\kappa^n(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\kappa = 1$ ,  $T_\kappa \equiv Id$  en  $(-\infty, \frac{1}{2}]$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\kappa^n(x) = T_\kappa(x) = 1 - x$  para todo  $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ .
- Si  $1 < \kappa \leq 2$ ,
  - Si  $x \in [0, 1]$ ,  $T_\kappa^n(x) \in [0, 1]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Si  $x \notin [0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\kappa^n(x) = -\infty$ .
- Si  $\kappa > 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\kappa^n(\frac{1}{2}) = \infty$ .

<sup>2</sup>Un grupo kleiniano es **de Schottky** si es generado por un número de finito de transformaciones de Möbius  $g_i$ , tales que existen  $C_i$  y  $C'_i$ , parejas de circunferencias disjuntas, que acotan una región fundamental  $R$ ,  $g_i(C_i) = C'_i$  y  $g_i(R) \cap R = \emptyset$ .

La familia de los mapeos tienda es de relevancia en sistemas dinámicos discretos, porque sus elementos son ejemplos representativos y bien estudiados de distintos conceptos importantes en la teoría. Véase [KingMendez].

En relación con los conjuntos de Julia rellenos, para la familia de mapeos tienda se tiene que:

- Si  $\kappa \leq 1$ ,  $\mathcal{JR}(T_\kappa) = \mathbb{R}$ .
- Si  $1 < \kappa \leq 2$ ,  $\mathcal{JR}(T_\kappa) = [0, 1]$ .
- Si  $\kappa > 2$ ,  $\mathcal{JR}(T_\kappa) = C_\kappa \subset [0, 1]$ , un conjunto de Cantor (compacto y totalmente desconexo).

Lo anterior indica que  $\mathcal{M}(\{T_\kappa\}, \frac{1}{2}) = [0, 2]$  es el *locus* de conectividad de los conjuntos  $\mathcal{JR}(T_\kappa)$ . Obsérvese que en este caso,  $\frac{1}{2}$  es similar a un punto crítico, pues  $T_\kappa(x) \leq T_\kappa(\frac{1}{2}) = \frac{\kappa}{2}$  para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ .

## La familia de mapeos tienda en $\hat{\mathbb{C}}$

La familia de mapeos tienda en el plano complejo puede definirse como sigue:  $\mathcal{T}_{\kappa, D} = \{T_{\kappa, D} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{\kappa \in \mathbb{C} - \{0\}}$ , tales que

$$T_{\kappa, D}(z) = \begin{cases} f_\kappa(z) = \kappa z, & \text{si } z \in D \\ g_\kappa(z) = \kappa - \kappa z, & \text{si } z \notin D \end{cases}$$

donde  $D$  es un conjunto cerrado cuya frontera es en una circunferencia o una recta.

### Análisis de las funciones componentes

Como  $\kappa = |\kappa|e^{\angle(\kappa)i}$ , se tiene que:

- $f_\kappa$  es la rotación en ángulo  $\angle(\kappa)$  compuesta con la homotecia  $|\kappa|$ . Sus puntos fijos son  $fix(f_\kappa) = \{0, \infty\}$ .
- Si  $\kappa \neq -1$ ,  $g_\kappa$  es la rotación en ángulo  $\angle(-\kappa) = \angle(\kappa) + \pi$  alrededor del punto fijo  $o_\kappa = \frac{\kappa}{\kappa+1}$ , compuesta con la homotecia  $|\kappa|$ . Entonces  $g_\kappa(z) = \kappa - \kappa z = (1 + \kappa)o_\kappa - \kappa z = \kappa(o_\kappa - z) + o_\kappa$ .  $fix(g_\kappa) = \{o_\kappa, \infty\}$ .

De acuerdo al parámetro  $\kappa$ , las transformaciones  $f_\kappa$  y  $g_\kappa$  tienen las siguientes características:

$\kappa$	Tipo de $f_\kappa$	Tipo de $g_\kappa$	Puntos fijos
$ \kappa  < 1$	Loxodrómicas		$0, o_\kappa$ atractores, $\infty$ repulsor
$\kappa = -1$	Elíptica	Parabólica	$0, \infty$ indiferentes, $\infty$ parabólico
$ \kappa  = 1, \kappa \neq \pm 1$	Elípticas		$0, o_\kappa, \infty$ indiferentes
$\kappa = 1$	Id.	Elíptica	$o_\kappa, \infty$ indiferentes
$ \kappa  > 1$	Loxodrómicas		$0, o_\kappa$ repulsores, $\infty$ atractor

Obsérvese que  $f_\kappa(\frac{1}{2}) = g_\kappa(\frac{1}{2}) = \frac{\kappa}{2}$ , pero  $f_\kappa(\partial D) \neq g_\kappa(\partial D)$  en general. Es claro que si  $f_\kappa$  y  $g_\kappa$  son transformaciones de Möbius distintas,  $f_\kappa(\partial D) \neq g_\kappa(\partial D)$  para cualquier circunferencia  $\partial D$ . Sólo en el caso  $\partial D$  una recta que pasa por  $\frac{1}{2}$ , se tiene que  $f_\kappa(\partial D) = g_\kappa(\partial D)$ <sup>3</sup>.

Ningún elemento  $T_{\kappa,D}$  tiene puntos críticos, pues su derivada es

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{\kappa,D}(z) = \begin{cases} \kappa, & \text{si } z \in D \\ -\kappa, & \text{si } z \notin D \end{cases},$$

la cual nunca es cero porque  $\kappa \neq 0$ .

Para que la dinámica de los mapeos tienda  $T_\kappa$  en  $\mathbb{R}$  esté “contenida” en la dinámica de los mapeos tienda  $T_{\kappa,D}$  en  $\mathbb{C}$ , se requiere que  $(-\infty, \frac{1}{2}] \subset D$  y  $(\frac{1}{2}, \infty) \subset D^c$ . De esta manera,  $D$  tendría que ser un semiplano, con  $\partial D$  una recta que pasa por  $\frac{1}{2}$ . Sin embargo, en este trabajo se investiga el caso general.

Como consecuencia de las características propias de  $f_\kappa$  y  $g_\kappa$ , el grupo generado por ellas no es kleiniano en general. Esto implica que no pueden aprovecharse los resultados antes descritos en el tema de estabilidad. Esta afirmación se formaliza en un corolario y es consecuencia del siguiente

**Teorema.** Sean dos transformaciones distintas  $f, g \in G < PSL(2, \mathbb{C})$ . Si  $f$  es loxodrómica y  $fix(f) \cap fix(g)$  consiste en un sólo punto, entonces  $G$  no es discreto. (Véase [Lascurain]).

**Corolario.** Si  $|\kappa| \neq 1$ , entonces el grupo asociado a  $T_{\kappa,D}$  no es kleiniano.

*Demostración:*

Como  $|\kappa| \neq 1$ ,  $f_\kappa$  y  $g_\kappa$  son loxodrómicas. Además  $fix(f_\kappa) \cap fix(g_\kappa) = \{\infty\}$ . Por el teorema anterior,  $G = \langle f_\kappa, g_\kappa \rangle$  no es discreto, es decir, no es kleiniano.  $\square$

## Algunos resultados sobre la dinámica

En primer lugar, se analiza el comportamiento global de las órbitas. Se dice que una función  $T$  en un espacio métrico  $X$  es **globalmente atractora** si existen  $R \in \mathbb{R}^+$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $|T^n(x)| \leq R$  para toda  $x \in X$  y  $n \geq N$ . Se dice que es **globalmente repulsora** si existe  $R \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |T^n(x)| = \infty$  si  $|x| \geq R$ .

### Proposición 1.

1. Si  $|\kappa| < 1$ ,  $T_{\kappa,D}$  es globalmente atractora.
2. Si  $|\kappa| > 1$ ,  $T_{\kappa,D}$  es globalmente repulsora.

*Demostración:*

1. Sea  $|k| < 1$ .

a) Caso  $D = \overline{B(z_0, r)}$ , un disco cerrado.

<sup>3</sup>Una recta que pasa por  $\frac{1}{2}$  se puede escribir de manera paramétrica como  $\gamma(t) = \frac{1}{2} + tv$ , donde  $v \in \mathbb{C}$ ,  $v \neq 0$ , es la dirección de la recta.  $f_\kappa(\gamma(t)) = \frac{\kappa}{2} + t\kappa v$  es una recta que pasa por  $\frac{\kappa}{2}$  y dirección  $\kappa v$ .  $g_\kappa(\gamma(t)) = \kappa - \kappa(\frac{1}{2} + tv) = \frac{\kappa}{2} - t\kappa v$  representa la misma recta que  $f_\kappa(\gamma(t))$ .

Sea  $B = \overline{B(o_\kappa, R)}$ , con  $R = \max\{|o_\kappa - z_0| + r, |o_\kappa - \kappa z_0| + |\kappa|r\}$ . Por construcción,  $D \cup f_\kappa(D) \subset B$ . Si  $z \notin B$ , entonces existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T_{\kappa, D}^n(z) = g_\kappa^n(z)$  para  $n \leq N$  y  $g_\kappa^N(z) \in B$ , porque  $o_\kappa$  es el centro de  $B$  y es el punto fijo atractor de  $g_\kappa$ . Si  $z \in B$ , puede suceder

- 1)  $z \in B - D$ , entonces  $T_{\kappa, D}(z) = g_\kappa(z) \in B$ , porque  $o_\kappa$  es el centro de  $B$  y es el punto fijo atractor de  $g_\kappa$ .
- 2)  $z \in D$ , entonces  $T_{\kappa, D}(z) = f_\kappa(z) \in B$ , pues  $f_\kappa(D) \subset B$  por construcción.

b) Caso  $D = B(z_0, r)^c$ , el complemento de un disco abierto.

Sea  $B = \overline{B(0, R)}$ , con  $R = \max\{|z_0| + r, |\kappa - \kappa z_0| + |\kappa|r\}$ . Por construcción,  $D^c \cup g_\kappa(D^c) \subset B$ . Si  $z \notin B$ , entonces existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T_{\kappa, D}^n(z) = f_\kappa^n(z)$  para  $n \leq N$  y  $f_\kappa^N(z) \in B$ , porque  $0$  es el centro de  $B$  y es el punto fijo atractor de  $f_\kappa$ . Si  $z \in B$ , puede suceder

- 1)  $z \in B - D^c$ , entonces  $T_{\kappa, D}(z) = f_\kappa(z) \in B$ , porque  $0$  es el centro de  $B$  y es el punto fijo atractor de  $f_\kappa$ .
- 2)  $z \in D^c$ , entonces  $T_{\kappa, D}(z) = g_\kappa(z) \in B$ , pues  $g_\kappa(D^c) \subset B$  por construcción.

c) Caso  $D$  un semiplano cerrado. Sea  $B = \overline{B(0, R)}$ , con  $R = \frac{2|o_\kappa|}{1-|\kappa|}$ .

Para  $z \notin B$ , puede suceder

- 1)  $z \in B^c \cap D$ , entonces  $|T_{\kappa, D}(z)| = |f_\kappa(z)| = |\kappa z| < |z|$ , porque  $|\kappa| < 1$ .
- 2)  $z \in B^c \cap D^c$ , entonces  $|T_{\kappa, D}(z)| = |g_\kappa(z)| = |(1 + \kappa)o_\kappa - \kappa z| < 2|o_\kappa| + |\kappa||z| < |z|$ , pues como  $z \notin B$  se tiene que  $|z| > R \implies |z| - |\kappa||z| > 2|o_\kappa| \implies |z| > 2|o_\kappa| + |\kappa||z|$ .

Por lo tanto,  $z \notin B$  implica que  $|T_{\kappa, D}(z)| < |z|$ . Entonces, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T_{\kappa, D}^N(z) \in B$ .

Para  $z \in B$ , puede suceder

- 1)  $z \in B \cap D$ , entonces  $T_{\kappa, D}(z) = f_\kappa(z) \in B$ , pues  $0$  es el centro de  $B$  y es el punto fijo atractor de  $f_\kappa$ .
- 2)  $z \in B \cap D^c$ , entonces  $|T_{\kappa, D}(z)| = |g_\kappa(z)| = |(1 + \kappa)o_\kappa - \kappa z| < 2|o_\kappa| + |\kappa||z| \leq 2|o_\kappa| + |\kappa|R = 2|o_\kappa| + |\kappa|\frac{2|o_\kappa|}{1-|\kappa|} = R$ . Por lo tanto,  $T_{\kappa, D}(z) \in B$ .

Por lo anterior,  $T_{\kappa, D}^n(z) \in B$  para todo  $n \geq N$ , para algún  $N \in \mathbb{N}$  y para el disco cerrado  $B$  según sea el caso.

2. Sea  $|k| > 1$ .

a) Caso  $D = \overline{B(z_0, r)}$ , un disco cerrado.

Sea  $B = \overline{B(o_\kappa, R)}$ , con  $R = |o_\kappa - z_0| + r$ . Por construcción,  $D \subset B$ . Si  $z \notin B$ , entonces  $|T_{\kappa, D}(z) - o_\kappa| = |g_\kappa(z) - o_\kappa| = |\kappa(o_\kappa - z)| > |z - o_\kappa|$ . De aquí que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{\kappa, D}^n(z) - o_\kappa) = \infty$ .

b) Caso  $D = B(z_0, r)^c$ , el complemento de un disco abierto.

Sea  $B = \overline{B(0, R)}$ , con  $R = |z_0| + r$ . Por construcción,  $D^c \subset B$ . Si  $z \notin B$ ,  $|T_{\kappa, D}(z)| = |f_\kappa(z)| = |\kappa z| > |z|$ .

c) Caso  $D$  un semiplano cerrado. Sea  $B = \overline{B(0, R)}$ , con  $R = \frac{|\kappa+1||o_\kappa|}{|\kappa|-1}$ .  
Sea  $z \notin B$ .

- 1) Si  $z \in D$ , entonces  $|T_{\kappa, D}(z)| = |f_\kappa(z)| = |\kappa z| > |z|$ , pues  $|\kappa| > 1$ .
- 2) Si  $z \notin D$ , entonces  $|T_{\kappa, D}(z)| = |g_\kappa(z)| = |(1+\kappa)o_\kappa - \kappa z| = |\kappa z - (1+\kappa)o_\kappa| > |\kappa||z| - |\kappa+1||o_\kappa| > |z|$ , pues como  $z \notin B$  se tiene que  $|z| > R \implies |\kappa||z| - |\kappa+1||o_\kappa| > |z| \implies |\kappa||z| - |\kappa+1||o_\kappa| > |z|$ .

Por lo anterior,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\kappa, D}^n(z) = \infty$  para todo  $z \notin B$ , donde el disco cerrado  $B$  es según el caso.  $\square$

**Corolario 1.**  $B(0, 1) \subset \mathcal{M}(\mathcal{T}_{\kappa, D}, s)$  para todo  $s \in \mathbb{C}$ .

*Demostración:*

Si  $|k| < 1$ , por la proposición 1 inciso 1, se tiene que  $\mathcal{O}(s, T_{\kappa, D})$  está acotada para toda  $s \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto  $\kappa \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_{\kappa, D}, s)$ .  $\square$

En [BruinDeane] y [CatsigerasEtAl], se demuestra que para transformaciones contractoras afines por pedazos, todas las órbitas son asintóticamente periódicas o existe un atractor de tipo Cantor. La complejificación de las funciones tienda  $T_{\kappa, D}$ , es contractora cuando  $|\kappa| < 1$ . Se complementan los resultados antes reportados con el siguiente

**Teorema 1.** Si  $|\kappa| < 1$ ,  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa, D}) = \mathbb{C}$  e  $\infty \in \text{Spid}(T_{\kappa, D})$ .

*Demostración:*

1. Por la proposición 1 inciso 1, se tiene que  $\mathcal{O}(z, T_{\kappa, D})$  está acotada para toda  $z \in \mathbb{C}$ , por lo tanto  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa, D}) = \mathbb{C}$ .
2. Si  $\partial D$  es una circunferencia, supongamos que  $\infty \notin \Lambda_{\text{Spid}}(T_{\kappa, D})$ . Entonces existe un vecindad del infinito  $V = \{z \mid |z| > R\}$  tal que  $V \subset \mathcal{C}$ , donde  $\mathcal{C}$  es una celda componente de  $\mathcal{F}(T_{\kappa, D})$ . Tomemos  $D = B(z_0, r)^c$  (el caso  $D = \overline{B(z_0, r)}$  se demuestra de manera análoga). Como  $\infty \in D$  y es fijo repulsor de  $f_\kappa$ , entonces  $\infty \in T_{\kappa, D}^n(V) = f_\kappa^n(V) = \{z \mid |z| > |\kappa|^n R\} \subset \mathcal{C}$  para toda  $n$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T_{\kappa, D}^N(V) \cap \partial D \neq \emptyset$ , contradiciendo la invariancia de  $\mathcal{F}(T_{\kappa, D})$ .

Si  $\partial D$  es una recta, es claro que  $\infty \in \partial D \subset \text{Spid}(T_{\kappa, D})$ .  $\square$

Véase la figura [3], donde se muestran ejemplos de telarañas de  $T_{\kappa, D}$  con  $|\kappa| < 1$ . Nótese que la primera afirmación del teorema anterior ( $|\kappa| < 1 \implies \mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa, D}) = \mathbb{C}$ ), está en completa concordancia con el caso de las funciones reales tienda  $T_\kappa$  cuando  $\kappa < 1$ , pues  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_\kappa) = \mathbb{R}$ .

Para los casos con  $|\kappa| = 1$ , el comportamiento global es variable, tanto puede ser globalmente atractor, repulsor o “indiferente” (véanse [Goetz96, Goetz98, Goetz00, Goetz09], donde se estudian isometrías por pedazos generales). Sin embargo, el comportamiento es relativamente fácil de determinar para los casos  $\kappa = \pm 1$ .

**Teorema 2.** Si  $\kappa = 1$ ,  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{1, D}) = \mathbb{C}$ ,  $\Lambda_{\text{Spid}}(T_{1, D}) = \emptyset$  y todo  $z \in \mathbb{C}$  es eventualmente periódico.

*Demostración:*

$f_1 \equiv Id$  y  $g_1(z) = 1 - z = (\frac{1}{2} - z) + \frac{1}{2}$  es la rotación en  $\pi$ , con centro en  $\frac{1}{2}$ .

1. Si  $z \in D$ ,  $\mathcal{O}(z, T_{1, D} \equiv Id) = \{z\}$ . Si  $z \notin D$ ,  $\mathcal{O}(z, T_{1, D}) = \{z, 1 - z\}$ , independientemente de que  $1 - z \in D$  o no, pues  $g_1^2 \equiv Id$ . De aquí que  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{1, D}) = \mathbb{C}$  y que todo punto es eventualmente periódico.

2.  $T_{1,D}^{-1}(\partial D) = (f_1^{-1}(\partial D) \cap D) \cup (g_1^{-1}(\partial D) \cap D^c) = \partial D \cup (g_1^{-1}(\partial D) \cap D^c)$ . Es fácil ver que  $T_{1,D}^{-2}(\partial D) \subset T_{1,D}^{-1}(\partial D) \cup \partial D$ . De aquí que  $Spid(T_{1,D}) = Spid_1(T_{1,D})$ , entonces  $\Lambda_{Spid}(T_{1,D}) = \emptyset$ .  $\square$

Véase la figura [4], donde se muestran ejemplos de telarañas y órbitas en el caso  $\kappa = 1$ . En este caso también se observa “herencia” de la función tienda real  $T_1$ , pues  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_1) = \mathbb{R}$  y todo punto es eventualmente periódico.

**Teorema 3.** Si  $\kappa = -1$ ,  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{-1,D}) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} g_{-1}^{-n}(A)}$ , donde  $A$  es cierto subconjunto de  $D$ , y todo  $z \in \mathcal{J}\mathcal{R}(T_{-1,D})$  es eventualmente periódico.

*Demostración:*

$f_{-1}(z) = -\kappa z$  es la rotación de ángulo  $\pi$  y  $g_{-1}(z) = z - 1$  es una traslación. Se define  $A = D \cap f_{-1}^{-1}(B) \subset D$ , donde  $B = \bigcup_{n \geq 0} g_{-1}^{-n}(D)$ .

Si  $z \in A$ ,  $T_{-1,D}(z) = f_{-1}(z) = -z$ . Si  $-z \in D$ , entonces  $-z \in f_{-1}(D) \cap D$  por construcción y  $T_{-1,D}(-z) = f_{-1}^2(z) = z$ , de aquí que  $\mathcal{O}(z, T_{-1,D}) = \{z, -z\}$ . Si  $-z \in D^c$ , entonces  $T_{-1,D}^n(-z) = g_{-1}^n(-z) \in A$  para algún  $n$ , por construcción. En este caso,  $\mathcal{O}(z, T_{-1,D}) = \{z, -z, -z - 1, \dots, -z - n, z + n\}$  si  $T_{-1,D}^{n+1}(-z) \in D$  (órbita eventualmente periódica) u  $\mathcal{O}(z, T_{-1,D}) = \{z, -z, -z - 1, \dots, -z - n, z + n, z + n - 1, \dots, z + 1\}$  si  $T_{-1,D}^{n+1}(-z) \notin D$  (órbita periódica). La demostración es análoga para encontrar que las órbitas de  $z \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} g_{-1}^{-n}(A)}$  son periódicas o eventualmente periódicas. De todo esto se concluye que  $\overline{\bigcup_{n \geq 0} g_{-1}^{-n}(A)} \subset \mathcal{J}\mathcal{R}(T_{-1,D})$ .

Sea  $z \notin \overline{\bigcup_{n \geq 0} g_{-1}^{-n}(A)}$ . Si  $z \notin B$ , entonces  $z \notin D$  y es claro que  $T_{-1,D}^n(z) = g_{-1}^n(z) \notin D$  para toda  $n$ , por lo tanto  $T_{-1,D}^n(z) \rightarrow \infty$ . Si  $z \in B$ , por construcción existe  $n$  tal que  $g_{-1}^n(z) \in D - A$ . Si  $z \in D - A$ ,  $T_{-1,D}(z) = f_{-1}(z) \notin f_{-1}(D) \cap B$  por la definición de  $A$ . De lo anterior,  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{-1,D}) \subset \overline{\bigcup_{n \geq 0} g_{-1}^{-n}(A)}$ .  $\square$

Véase la figura [5], donde se muestran ejemplos conjuntos de Julia rellenos en el caso  $\kappa = -1$ .

En el caso  $|z| > 1$  (incluyendo el caso  $|\kappa| = 1$ , con  $\kappa \neq \pm 1$ ), la dinámica es mucho más complicada, en concordancia con la dinámica para la familia de los mapeos tienda reales con parámetro  $\kappa > 1$ . Como se observa en los experimentos, aparecen órbitas periódicas repulsoras, estructuras atractoras diversas y los conjuntos de Julia rellenos pueden ser conexos, disconexos o, aparentemente, de tipo Cantor. Un análisis detallado de estos conjuntos va más allá de los alcances de este trabajo, sin embargo, pueden presentarse algunas conjeturas a partir de las observaciones.

**Conjetura 1.** Si  $|\kappa| > 1$ ,  $\Lambda_{Spid}(T_{\kappa,D}) \subset \mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa,D})$  y  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa,D}) \neq \mathbb{C}$ .

Lo anterior implicaría que todos los conjuntos atractores (excepto  $\infty$ ) y repulsores de  $T_{\kappa,D}$ , estarían contenidos en un conjunto acotado, a saber,  $\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa,D})$ . De esta manera,  $\mathcal{F}(T_{\kappa,D}) - \mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa,D})$  estaría compuesto de las celdas que se “mueven” hacia  $\infty$ . Véanse las figuras [6] y [7], donde se muestran conjuntos de Julia rellenos y telarañas para  $|\kappa| > 1$ .

En analogía con el *locus* de conectividad de una familia de funciones, se define el **locus conectividad e interior no vacío** de la familia  $\mathcal{T}_{\kappa,D}$  como

$$\mathcal{M}_c(\mathcal{T}_{\kappa,D}) = \{\kappa \in \mathbb{C} \mid \text{int}(\mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa,D})) \neq \emptyset \text{ ó } \mathcal{J}\mathcal{R}(T_{\kappa,D}) \text{ es conexo}\}.$$

Se eligió esta definición, porque existen  $\mathcal{JR}(T_{\kappa,D})$  desconexos con interior no vacío (véase la figura [8]) y conexos con interior vacío<sup>4</sup>.

**Conjetura 2.** Si  $\kappa \notin \mathcal{M}_c(\mathcal{T}_{\kappa,D})$ ,  $\Lambda_{Spid}(T_{\kappa,D}) = \mathcal{JR}(T_{\kappa,D})$  y es totalmente desconexo.

Véanse las figuras [9] y [10], donde se ejemplifica esta conjetura.

Como se mencionó antes,  $f_{\kappa}(\frac{1}{2}) = g_{\kappa}(\frac{1}{2}) = \frac{\kappa}{2}$ , pero  $\frac{1}{2}$  no se comporta como un punto crítico, como en el caso real. Sin embargo la siguiente conjetura relaciona el conjunto de Mandelbrot con semilla  $\frac{1}{2}$  y el *locus* de conectividad e interior no vacío.

**Conjetura 3.**  $\mathcal{M}(\mathcal{T}_{\kappa,D}, \frac{1}{2}) \subset \mathcal{M}_c(\mathcal{T}_{\kappa,D})$ .

De hecho se observa que  $\mathcal{M}(\mathcal{T}_{\kappa,D}, s_0) \subset \mathcal{M}_c(\mathcal{T}_{\kappa,D})$  para casi cualquier elección de  $s_0 \in \mathbb{C}$ . Aunque  $\mathcal{M}(\mathcal{T}_{\kappa,D}, s_0)$  no es simplemente conexo en general, se propone la siguiente

**Conjetura 4.**  $\mathcal{M}_c(\mathcal{T}_{\kappa,D})$  es simplemente conexo.

Lo anterior implicaría que existe continuidad en el espacio de parámetros, determinando cierta continuidad en el comportamiento dinámico de los elementos de  $\mathcal{T}_{\kappa,D}$ . Véase la figura [11], que ejemplifica la conjetura 4.

## Apéndices

### Algoritmos de dibujo

En los siguientes algoritmos se toman las transformaciones de Möbius por pedazos definidas como antes

$$F_{\kappa,D}(z) = \begin{cases} f_{\kappa}(z), & z \in D \\ g_{\kappa}(z), & z \notin D \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$  es el número máximo de iteraciones para los algoritmos y  $\{color_n\}_{n=1,\dots,N}$  el conjunto de colores para etiquetar las iteraciones.

---

**Algoritmo** Dibujo de la telaraña  $Spid(F)$ :

Iteración hacia atrás de puntos en la frontera.

---

Sea  $C_0 := \{z_m\} \subset \partial D$  un conjunto finito de puntos en la frontera

$n := 0$

Mientras  $n < N$ :

$C_{n+1} := \emptyset$

Para cada  $z_m \in C_n$ :

Si  $f^{-1}(z_m) \in D$ :

Añadir  $f^{-1}(z_m)$  a  $C_{n+1}$

Si  $g^{-1}(z_m) \notin D$ :

Añadir  $g^{-1}(z_m)$  a  $C_{n+1}$

Dibujar los puntos  $C_{n+1}$  usando  $color_{n+1}$

$n := n + 1$

---

<sup>4</sup>Tómese  $\kappa = 2$  y  $D = \{z \mid Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$ . En este caso,  $\mathcal{JR}(T_{2,D}) = [0, 1]$ , pues la dinámica del mapeo tienda real está “contenida” y es fácil ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_{2,D}^n(z)| = \infty$  para  $z \notin [0, 1]$ .

---

**Algoritmo** Dibujo de la telaraña  $Spid(F)$ :

Búsqueda de puntos de la telaraña en una región.

---

Sea  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \varepsilon \ll 1$

Sea  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \subset \mathbb{C}$  la región

Sea  $M$  el número de puntos a evaluar en cada dirección

$\Delta x := (x_{max} - x_{min})/(M - 1)$  y  $\Delta y := (y_{max} - y_{min})/(M - 1)$

$y := y_{min}$

Mientras  $y \leq y_{max}$ :

$x := x_{min}$

    Mientras  $x \leq x_{max}$ :

$z := x + yi$

$n := 1$

        Mientras  $n \leq N$ :

            Si  $d(z, \partial D) < \varepsilon$ :

                Dibujar el punto  $z$  usando  $color_n$

                Salir del ciclo sobre  $n$

$z := F(z)$

$n := n + 1$

$x := x + \Delta x$

$y := y + \Delta y$

---

---

**Algoritmo** Dibujo de partición por itinerarios  $\mathcal{C}_F(s)$ :

Cálculo itinerarios finitos de puntos en una región.

---

Sea  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \subset \mathbb{C}$  la región

Sea  $M$  el número de puntos a evaluar en cada dirección

$\Delta x := (x_{max} - x_{min})/(M - 1)$  y  $\Delta y := (y_{max} - y_{min})/(M - 1)$

$y := y_{min}$

Mientras  $y \leq y_{max}$ :

$x := x_{min}$

    Mientras  $x \leq x_{max}$ :

$z := x + yi$

        Si  $z \in D$ :  $s := (0)$

        En el otro caso:  $s := (1)$

$n := 1$

        Mientras  $n \leq N$ :

$z := F(z)$

            Si  $z \in D$ :  $s := (s0)$

            En el otro caso:  $s := (s1)$

$n := n + 1$

        Dibujar el punto  $z$  usando el color  $color_{n(s)}$

$x := x + \Delta x$

$y := y + \Delta y$

---

Véase la figura [12], donde se muestran dibujos de itinerarios.

## Imágenes

En los gráficos se utilizan los dominios  $D = \overline{B(\frac{1}{5}, \frac{3}{10})}$  y  $H = \{z \mid \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\}$ , a menos que se indique de otra forma. En general, los colores blanco y azul representan pocas iteraciones o puntos con órbitas que tienden a infinito, mientras que el rojo representa el máximo de iteraciones ó los puntos con órbitas acotadas.

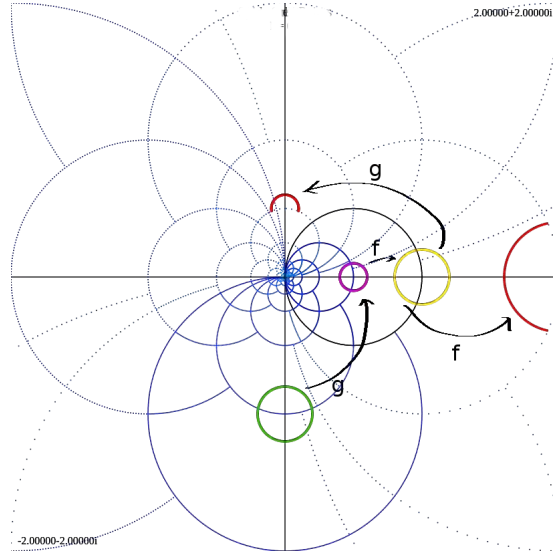


Figura 1: En azul,  $\operatorname{Spid}(F)$ , donde  $F$  está dada por  $f(z) = 2z$  en el disco  $\overline{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$  (en negro) y  $g(z) = \frac{i}{2}z$  fuera del disco. También se muestra parte de la órbita de una circunferencia.

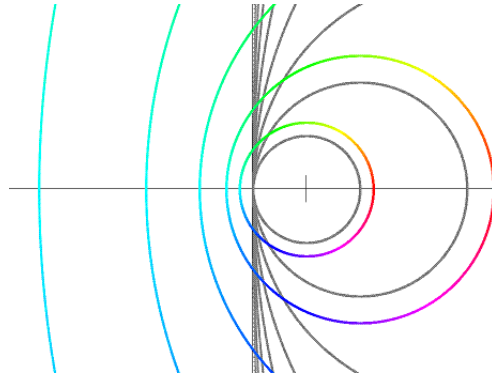


Figura 2: Telarañas  $\operatorname{Spid}(F)$ , donde  $F$  está dada por  $f(z) = z$  en el disco y  $g(z) = \frac{1}{2}z$  fuera del disco. En gris se muestra el caso  $D = \overline{B(1, 1)}$  y en colores un caso  $D = \overline{B(1, 1 + \varepsilon)}$ .

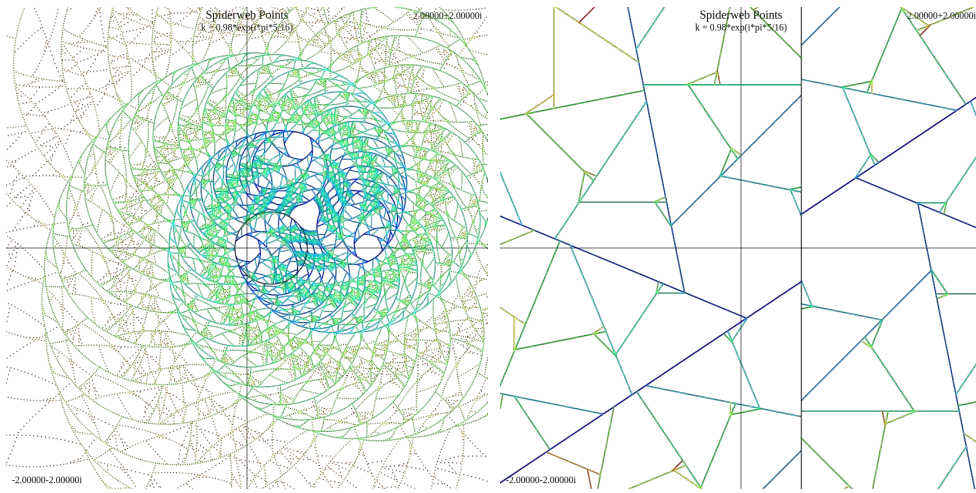


Figura 3:  $Spid(T_{\kappa,D})$  a la izquierda y  $Spid(T_{\kappa,H})$  a la derecha, con  $\kappa = 0.98e^{\frac{5\pi i}{16}}$ .

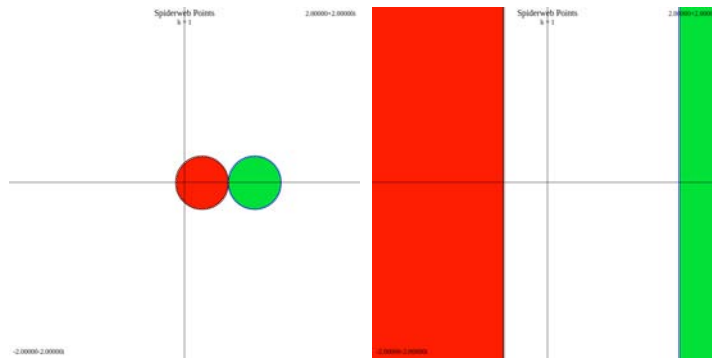


Figura 4:  $Spid(T_{1,D})$  a la izquierda y  $Spid(T_{1,H})$  a la derecha, con  $H = \{z \mid \text{Re}(z) \leq -\frac{1}{2}\}$ . La celda en rojo contiene todos los puntos fijos, la celda verde los puntos preimagen de la celda roja, y la celda en blanco los puntos de periodo 2.

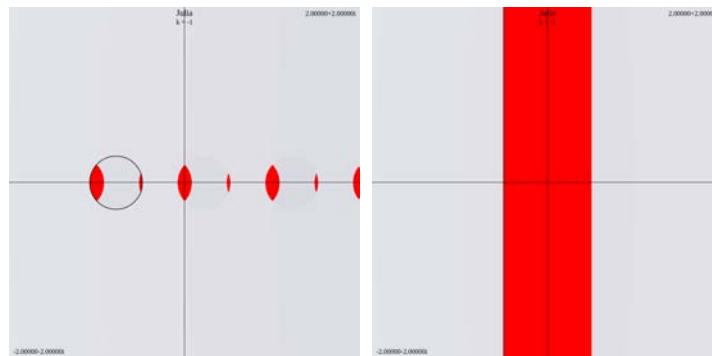


Figura 5: En rojo,  $\mathcal{JR}(T_{-1,D})$  con  $D = \overline{B(-0.78, 0.3)}$  a la izquierda, y  $\mathcal{JR}(T_{-1,H})$  con  $H = \{z \mid \text{Re}(z) \geq -\frac{1}{2}\}$  a la derecha.

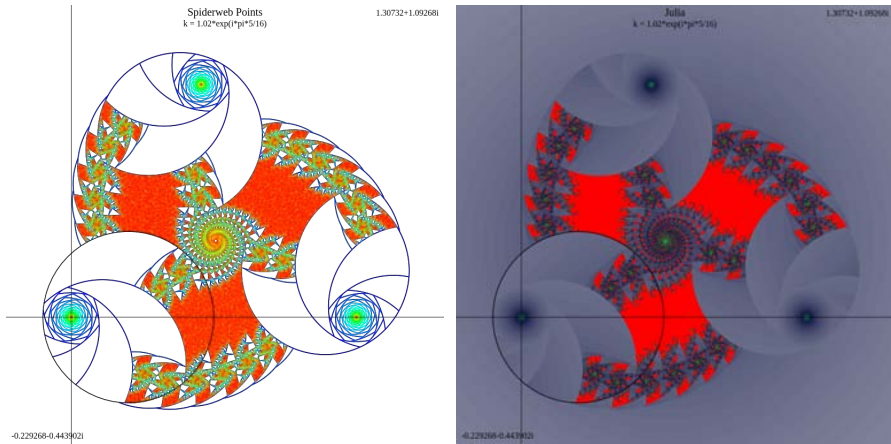


Figura 6:  $Spid(T_{\kappa,D})$  a la izquierda y  $\mathcal{JR}(T_{\kappa,D})$  a la derecha, con  $\kappa = 1.02e^{\frac{5\pi i}{16}}$ .

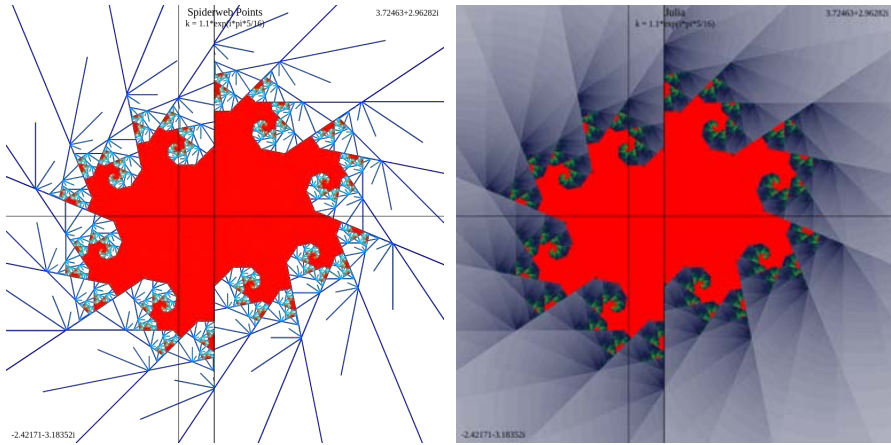


Figura 7:  $Spid(T_{\kappa,H})$  a la izquierda y  $\mathcal{JR}(T_{\kappa,H})$  a la derecha, con  $\kappa = 1.1e^{\frac{5\pi i}{16}}$ .

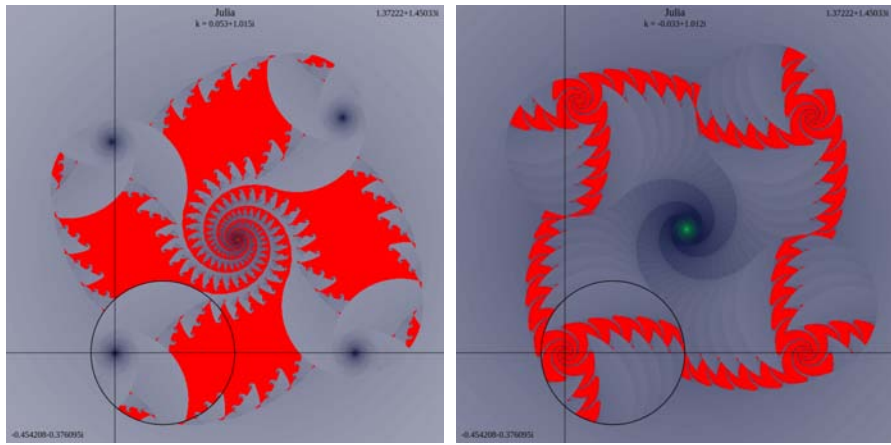


Figura 8:  $\mathcal{JR}(T_{0.053+1.015i,D})$  a la izquierda y  $\mathcal{JR}(T_{-0.033+1.012i,D})$  a la derecha.

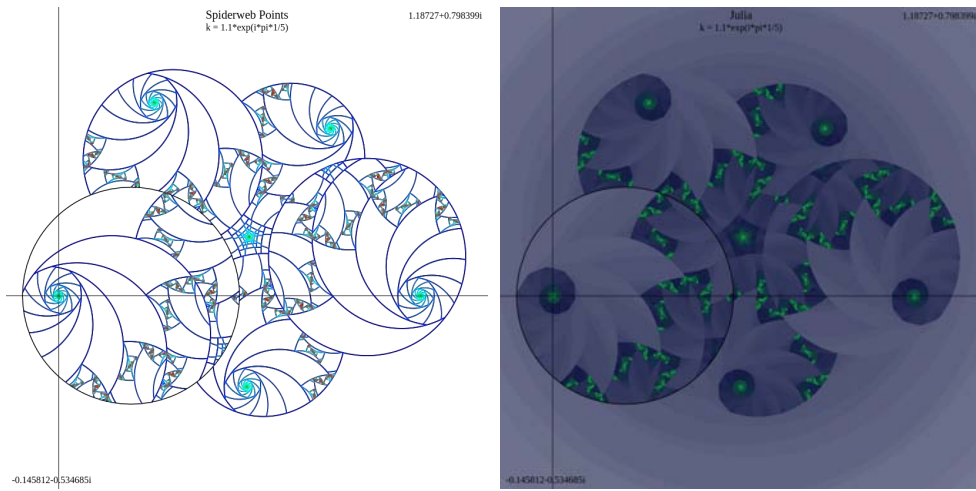


Figura 9:  $Spid(T_{\kappa,D})$  a la izquierda y  $\mathcal{JR}(T_{\kappa,D})$  a la derecha, con  $\kappa = 1.1e^{\frac{\pi i}{5}}$ .

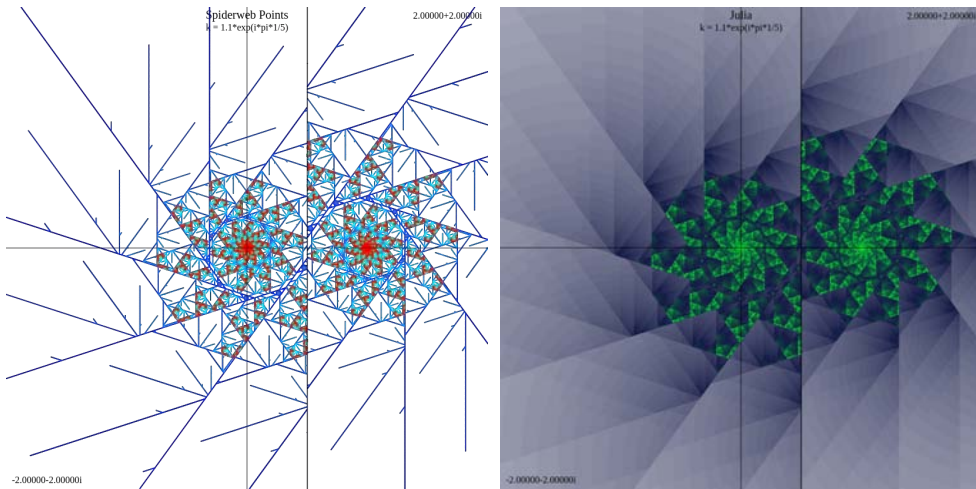


Figura 10:  $Spid(T_{\kappa,D})$  a la izquierda y  $\mathcal{JR}(T_{\kappa,D})$  a la derecha, con  $\kappa = 1.1e^{\frac{\pi i}{5}}$ .

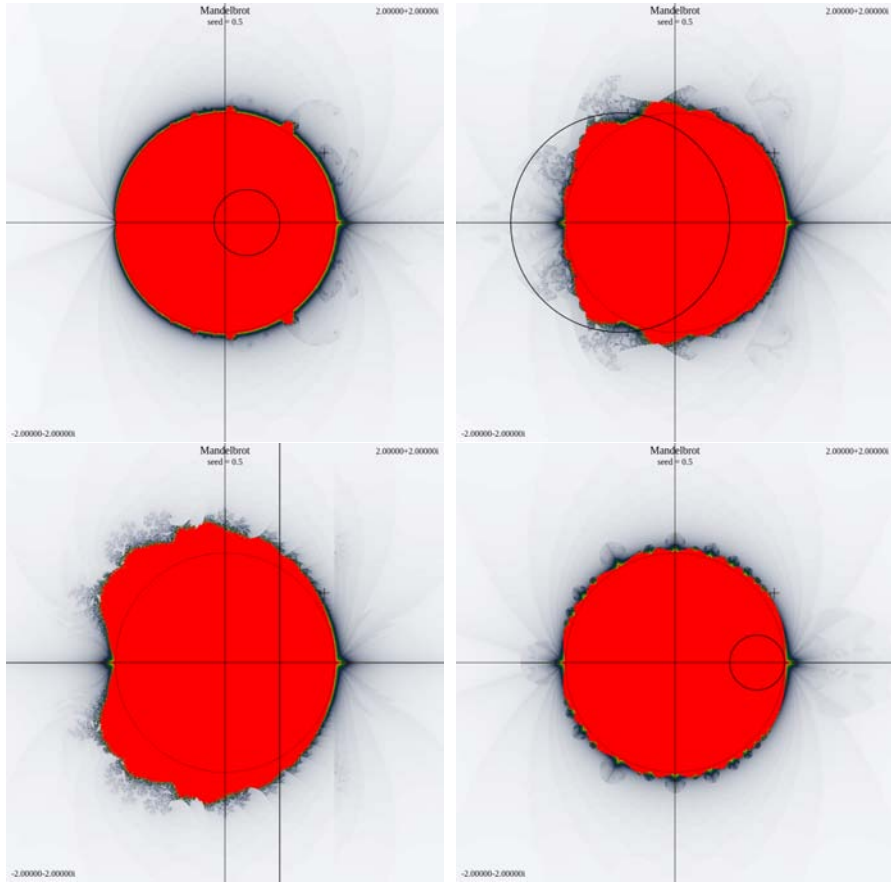


Figura 11:  $\mathcal{M}(\mathcal{T}_{\kappa,D}, \frac{1}{2})$ , con  $D = \overline{B(\frac{1}{5}, \frac{3}{10})}$ ,  $D = \overline{B(-\frac{1}{2}, 1)}$ ,  $D = H$  y  $D = \overline{B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})}^c$ .

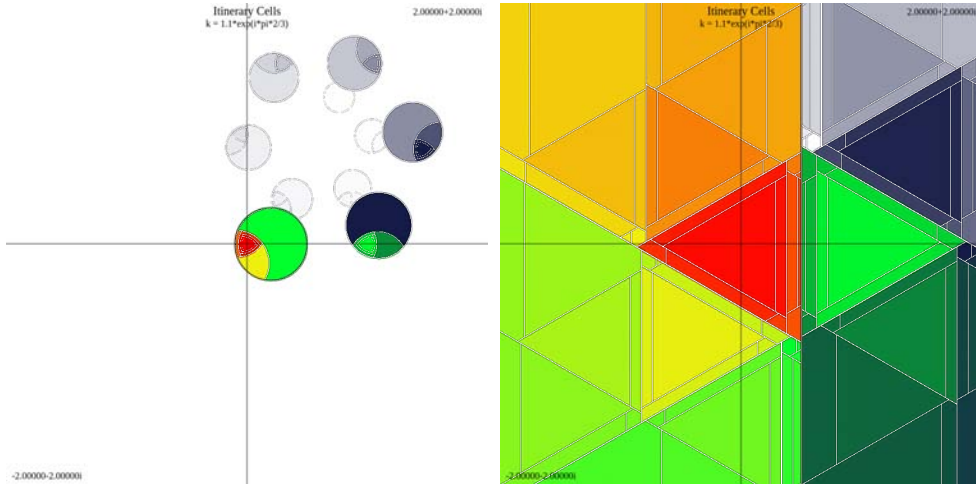


Figura 12: Algunas celdas de  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_{\kappa,D})$  a la izquierda y de  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_{\kappa,H})$  a la derecha, con  $\kappa = 1.1e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . El rojo y amarillo indican los puntos sobre los que se aplica principalmente  $f_{\kappa}$ , bajo un número finito de iteraciones. Con azul y blanco se indican los puntos a los que se aplica principalmente  $g_{\kappa}$ .

## Referencias

- [BruinDeane] Bruin, Henk y Deane, Jonathan. *Piecewise contractions are asymptotically periodic*. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 1389-1395.
- [CatsigerasEtAl] Catsigeras, E., et. al. *On the Asymptotic Properties of Piecewise Contracting Maps*. Dynamical Systems - An International Journal (published online). 2015.
- [Cruz04] Cruz López, Manuel. *Acciones de grupos en sistemas dinámicos*. Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. 2004.
- [Cruz05] Cruz López, Manuel. *Dynamics of piecewise conformal automorphisms of the Riemann sphere*. Ergodic Theory and Dynamical Systems 25 (2005), no. 6, 1767-1774.
- [Goetz96] Goetz, Arek. *Dynamics of piecewise isometries*. PhD Thesis, University of Illinois. 1996.
- [Goetz98] Goetz, Arek. *Dynamics of a piecewise rotation*. Continuous and Discrete Dynamical Systems 4 (1998), no. 4, 593-608.
- [Goetz00] Goetz, Arek. *Dynamics of piecewise isometries*. Illinois Journal of Mathematics, 44 (2000), no. 3, 465-478.
- [Goetz01] Goetz, Arek. *Piecewise isometries – an emerging area of dynamical systems*. Trends in Mathematics: Fractals in Graz 2001 (2003), chapter, 135-144.
- [Goetz09] Goetz, Arek y Quas, Anthony. *Global properties of a family of piecewise isometries*. Ergodic Theory and Dynamical Systems 29 (2009), no. 2.
- [KingMendez] King Dávalos, Jefferson Edwin y Méndez Lango, Héctor. *Sistemas dinámicos discretos*. Las Prensas de Ciencias (2014).
- [Lascurain] Lascurain Orive, Antonio. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Las Prensas de Ciencias (2005).
- [Leriche] Leriche Vázquez, Renato. *Continuidad y estabilidad en la dinámica de sistemas de transformaciones conformes por pedazos*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. 2005.
- [Romero] Romero Méndez, Juan Pablo. *Análisis de órbitas periódicas en una familia de funciones conformes por pedazos*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. 2003.