



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Sobre la geometría y topología de las variedades de gráficas

Tesis

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

ADRIANA HAYDEE CONTRERAS PERUYERO

DIRECTOR DE LA TESIS

DR. PABLO SUÁREZ SERRATO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CU
UNAM

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Junio 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e
Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM **IN102716**;
*Geometría dinámica 2; fibrados corrugados, rigidez topológica y complejidad de orden
polinomial.*

Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción	iv
1. Preliminares	1
1.1. Propiedades del Grupo fundamental	1
1.1.1. Teorema de Seifert-Van Kampen	4
1.2. Espacios cubrientes	5
1.2.1. Clasificación de espacios cubrientes	6
1.3. Grupos de Homotopía	7
1.4. Grupos de Lie	9
1.5. Espacios esféricos	9
2. Acciones de grupos	10
2.1. Conceptos	10
2.2. Aplicación al Grafeno	11
2.2.1. Geometría del grafeno	11
2.2.2. Geometría del CNT	12
2.2.3. Acciones de grupo en el grafeno	14
2.2.4. Restricciones geométricas	16
3. Retículas no uniformes en espacios de curvatura no positiva	18
3.1. Antecedentes	18
3.1.1. Puntos al infinito y topología cono	25
3.1.2. Horoesferas	28
3.1.3. Variedades de Visibilidad	34
3.1.4. Clasificación de las Isometrías	36
3.1.5. Fines	48
3.1.6. Retículas y grupos nilpotentes	49
3.2. Retículas no uniformes en espacios irreducibles	50
3.3. Subgrupos maximales casi nilpotentes de Γ	58

4. Gráficas de grupos	60
4.1. Conceptos básicos de gráficas y árboles	60
4.2. Variedades de gráficas	65
4.2.1. π_1 inyectividad de variedades de curvatura negativa	66
5. Nociones de teoría geométrica de grupos	69
5.1. Crecimiento de grupos	75
5.2. Crecimiento uniformemente exponencial	90
Apéndice	94
A. 1. Presentación Plug-in	94
A. 1.1. Plano	96
A. 1.2. Cilindro-Nanotubo	97
Bibliografía	102

Introducción

En [14], R. Frigerio, J.F. Lafont, A. Sisto, describen el siguiente tipo de variedades a las que llaman variedades de gráficas.

Definición. Una variedad diferenciable M de dimensión n , $n \geq 3$, se llama una **variedad de gráficas** si puede ser construida de la siguiente forma:

- (1) Para cada $i = 1, \dots, r$, tomar una variedad riemanniana N_i de dimensión n_i , completa, de volumen finito, no compacta, hiperbólica, con cúspides tóricas, donde $3 \leq n_i \leq n$.
- (2) Denotar por \bar{N}_i , a la variedad obtenida por truncar las cúspides de N_i , es decir, por remover de N_i una vecindad horoesférica de cada cúspide.
- (3) Tomar el producto $V_i = \bar{N}_i \times T^{n-n_i}$, donde $T^k = (S^1)^k$ es el toro de dimensión k .
- (4) Fijar un par de componentes de frontera de algunos V_i y pegar los pares de componentes de frontera usando difeomorfismos afines en los toros frontera, de tal forma que obtengamos una variedad conexa de dimensión n .

El objeto de estudio de este trabajo son las variedades descritas por N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez en [3], las cuales son una generalización de las variedades de R. Frigerio, J.F. Lafont, A. Sisto que aparecen en [14]. Estas variedades son las siguientes.

- Definición.** (1) Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.
- (2) Denotar por M_i la variedad diferenciable, compacta con frontera, obtenida por truncar las cúspides de V_i , es decir, por remover de V_i una vecindad abierta, horoesférica (no maximal) de cada cúspide.
 - (3) Tomar un fibrado $Z_i \rightarrow M_i$ con fibra un cociente compacto N_i de un grupo de Lie aesférico, simplemente conexo \tilde{N}_i por la acción de una retícula uniforme Γ_i de dimensión $n - n_i$, es decir, N_i es difeomorfo a \tilde{N}_i/Γ_i , donde \tilde{N}_i es un grupo de Lie simplemente conexo y Γ_i es una retícula uniforme.

- (4) Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes de frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

Llamaremos a los Z_i las piezas de M y cuando $\dim(M_i) = n$, diremos que $Z_i = M_i$ es una pieza pura.

Las fronteras de las piezas Z_i que se identifican las llamamos las **paredes** de M y las denotamos por W^{ij} . Denotaremos por E_i a un fin de V_i .

El primer objetivo de este trabajo es describir el grupo fundamental de las variedades de N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez en [3] como una gráfica de grupos. El segundo objetivo es probar que el grupo fundamental de estas variedades es de crecimiento uniformemente exponencial.

En el capítulo 1 se dan una serie de definiciones y resultados clásicos de geometría diferencial y topología algebraica.

En años recientes se han estudiado a los nanotubos de Carbono (CNTs) y al grafeno como uno de los materiales más prometedores para sistemas nanoelectromecánicos debido a su extremadamente alto modulo de Young, fuerza y otras propiedades. En el capítulo 2 se da una descripción de la retícula de panel de este material por medio de acciones de grupos con el fin de construir un plug-in que pueda modelar este material, el cual se describe en el apéndice de este trabajo.

En el capítulo 3 se estudian algunos resultados de retículas no uniformes en espacios de curvatura no positiva, con el proposito de poder entender dos resultados de P. Eberlein que prueba en [12]. Estos resultados son los que nos ayudan a alcanzar el primer objetivo de este trabajo.

En el capítulo 4 se introduce el concepto de gráficas de grupos y se prueban los siguientes dos teoremas, con lo cual obtenemos el primer objetivo del trabajo.

Teorema. *Si $\pi_i(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(M_i)$ entonces $\pi_i(W^{ij})$ se inyecta en $\pi_1(Z_i)$. Donde E_i es un fin de V_i y W^{ij} son las fronteras de las piezas Z_i que se identifican a las cuales llamamos **paredes** de M .*

Teorema. *El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 153 es isomorfo al grupo fundamental de una gráfica de grupos.*

En el capítulo 5 se estudian algunos resultados importantes de teoría geométrica de grupos, en especial de crecimiento exponencial de grupos. Esto para cumplir con nuestro segundo objetivo que es el siguiente teorema.

Teorema. *El grupo fundamental de las variedades descritas por N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez en [3] tiene crecimiento uniformemente exponencial.*

Capítulo 1

Preliminares

Vamos a asumir que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de geometría diferencial.

1.1. Propiedades del Grupo fundamental

Empezaremos recordando algunos conceptos y resultados básicos de topología algebraica, seguiremos la notación de [15]. Las pruebas que se omiten se pueden encontrar en el mismo libro.

Sea (X, x_0) un espacio basado, denotamos por $\Omega(X, x_0)$ al conjunto de todos los lazos basados en x_0 :

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha : I \longrightarrow X : \alpha \text{ es continua y } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, decimos que son **homotópicos** si existe una función continua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), & H(0, t) &= x_0 \quad \forall t \in I \\ H(s, 1) &= \beta(s), & H(1, t) &= x_0 \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Si α y β son lazos homotópicos, escribimos $\alpha \simeq \beta$ y a la clase de homotopía de un lazo la denotamos por $[\alpha]$. Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ un lazo, definimos $\bar{\alpha}(s) : I \longrightarrow X$ como $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$. La clase de equivalencia de $\bar{\alpha}$ la denotamos por $[\alpha]^{-1}$.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, definimos

$$(\alpha \cdot \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Definición 1. Sea (X, x_0) un espacio basado. El conjunto

$$\pi_1 = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ es un lazo basado en } x_0\}$$

es un grupo con respecto a la multiplicación $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$, con elemento neutro $1 = 1_{x_0} = [c_{x_0}]$, donde c_{x_0} es el lazo constante y con $[\alpha]^{-1}$ como el inverso de cada $[\alpha]$. Este grupo es llamado el **grupo fundamental** de X basado en el punto x_0 y se denota por $\pi_1(X, x_0)$. Por abuso de notación lo vamos a denotar por $\pi_1(X)$.

Para los siguientes resultados nos basaremos en la notación del capítulo 2 de [1].

Definición 2. Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una función continua, tal que $f(x_0) = y_0$. Definimos el homomorfismo inducido

$$\pi_1(f) = f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.

Veamos que esto está bien definido. Sea $\beta \in [\alpha]$, entonces existe $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & H(0, t) &= x_0 \\ H(s, 1) &= \beta(s) & H(1, t) &= x_0 \end{aligned}$$

Definimos una homotopía $G : I \times I \longrightarrow Y$ como $G = f \circ H$, entonces

$$\begin{aligned} G(s, 0) &= f \circ H(s, 0) = f \circ \alpha(s) & G(0, t) &= f \circ H(0, t) = f(x_0) = y_0 \\ G(s, 1) &= f \circ H(s, 1) = f \circ \beta(s) & G(1, t) &= f \circ H(1, t) = f(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$, es decir, $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$.

El homomorfismo inducido f_* en efecto es un homomorfismo ya que $f(\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$.

Dos propiedades importantes de este homomorfismo son

1. $id_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$
 $id_*[\alpha] = [id \circ \alpha] = [\alpha]$.
2. $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$
 $(g \circ f)_*[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_* \circ f_*[\alpha]$
 $\therefore (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Una función $f : X \longrightarrow Y$ se llama **equivalencia homotópica** si tiene un **inverso homotópico**, es decir, una función $g : Y \longrightarrow X$ tal que $[g \circ f] \simeq [id_X]$ y $[f \circ g] \simeq [id_Y]$.

Teorema 3. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo para cada punto $x_0 \in X$.

Demostración. Ver capítulo 2 de M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto [1]. □

Nota 4. Sea $A \subset X$ y $x_0 \in A$, la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ induce un homomorfismo $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. En general, no es un monomorfismo.

Proposición 5. Si X y Y son conectables por trayectorias entonces $\pi_1(X \times Y)$ es isomorfo a $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Demostración. Ver capítulo 2 de M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto [1]. □

Definición 6. Una sucesión de homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

se llama **exacta** si $\ker \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}$ para cada n .

Varios conceptos algebraicos se pueden expresar en términos de las sucesiones exactas, por ejemplo:

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker \alpha = 0$, es decir, si α es inyectiva.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si $\text{Im } \alpha = B$, es decir, α es sobreyectiva.
3. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo.
4. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es sobreyectiva y el $\ker \beta = \text{Im } \alpha$, así β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{Im } \alpha$. A este tipo de sucesiones exactas se les llama **sucesión exacta corta**.

Lema 7. En un diagrama conmutativo de grupos abelianos como el siguiente, si las dos filas son exactas y α, β, δ y ε son isomorfismos, entonces γ también es un isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

Demostración. Ver capítulo 2 de A. Hatcher [15]. □

1.1.1. Teorema de Seifert-Van Kampen

El teorema de Seifert-Van Kampen nos da una forma de calcular el grupo fundamental de espacios que se pueden descomponer en espacios mas simples cuyos grupos fundamentales son más fáciles de obtener o ya se conocen. Primero, vamos a describir el proceso de pegar dos grupos a lo largo de un subgrupo común.

Definición 8. Sea A un grupo, y sean $\alpha_1 : A \rightarrow G_1$ y $\alpha_2 : A \rightarrow G_2$ homomorfismos de grupos. Un grupo G junto con los homomorfismos $\beta_1 : G_1 \rightarrow G$ y $\beta_2 : G_2 \rightarrow G$ que satisfacen $\beta_1 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_2$ es llamado **producto libre amalgamado** de G_1 y G_2 sobre A (con respecto a α_1 y α_2) si se satisface la siguiente propiedad universal: para cualquier grupo H y cualesquiera dos homomorfismos de grupos $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H$ y $\varphi_2 : G_2 \rightarrow H$ con $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$ existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ de grupos con $\varphi \circ \beta_1 = \varphi \circ \beta_2$. Este producto libre amalgamado lo denotamos por $G_1 *_A G_2$

Si A es el grupo trivial, entonces escribimos $G_1 * G_2 := G_1 *_A G_2$ y lo llamamos **producto libre** de G_1 y G_2 . El producto libre $G_1 * G_2$ de dos grupos, consiste de todas las palabras finitas $x_1 x_2 \cdots x_{2n}$, donde $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, x_3 \in G_1, x_4 \in G_2$, y así sucesivamente, y ningún elemento x_i es el elemento trivial, el producto de dos de estas palabras se obtiene por yuxtaposición.

Consideremos un espacio topológico $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ y $x_0 \in X_1 \cap X_2$. El diagrama conmutativo de inclusiones de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

induce un diagrama conmutativo de homomorfismos de grupos

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, x_0) \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Lema 9. Si X_1 y X_2 son subconjuntos abiertos en X tal que $X_1 \cap X_2$ es conectable por trayectorias, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es generado por las imágenes de $\pi_1(X_1, x_0)$ y $\pi_1(X_2, x_0)$ bajo j_{1*} y j_{2*} respectivamente. Así, el homomorfismo

$$\varphi : \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

inducido por j_{1*} y j_{2*} es un epimorfismo.

Demostración. Ver capítulo 3 de M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto [1]. \square

Si queremos calcular $\pi_1(X)$ en términos de $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ y $\pi_1(X_1 \cap X_2)$, tenemos que calcular el subgrupo $N = \ker(\varphi)$. N es el subgrupo normal de $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$ generado por

$$\{i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}.$$

Teorema 10. (Seifert-Van Kampen) *Sea $X = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 abiertos. Si X_1, X_2 y $X_1 \cap X_2$ son no vacíos y conectables por trayectorias, entonces, para $x_0 \in X_1 \cap X_2$,*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / N,$$

donde N es el subgrupo normal generado por el conjunto

$$\{i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}.$$

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

1.2. Espacios cubrientes

Un **espacio cubriente** de un espacio X es un espacio \tilde{X} junto con un mapeo $p : \tilde{X} \rightarrow X$ que satisface la siguiente condición: existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X tal que para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos en \tilde{X} que se mapean homeomórficamente sobre U_α por p .

Un **levantamiento** de una función $f : Y \rightarrow X$ es una función $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Estas funciones tienen tres propiedades que vamos a describir a continuación.

Proposición 11. (Propiedad del levantamiento homotópico) *Dados un espacio cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$, una homotopía $f_t : Y \rightarrow X$ y un levantamiento de f_0 , $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$, entonces existe una única homotopía $\tilde{f}_t : Y \rightarrow \tilde{X}$ de \tilde{f}_0 que levanta a f_t .*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

La **propiedad de levantamiento de trayectorias** para un espacio cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$, dice que para cada trayectoria $f : I \rightarrow X$ y cada levantamiento \tilde{x}_0 de un punto inicial $f(0) = x_0$, existe una única trayectoria $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ que levanta a f y empieza en \tilde{x}_0 .

Proposición 12. *La función $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ inducida por el espacio cubriente $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ es inyectiva. El subgrupo imagen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$ consiste de las clases de homotopía de lazos en X basados en x_0 cuyos levantamientos a \tilde{X} empiezan en \tilde{x}_0 y son lazos.*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

Proposición 13. (Criterio de levantamiento) *Dados un espacio cubriente $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ y un mapeo $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ con Y conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Entonces existe un levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ de f si y sólo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

Proposición 14. (Propiedad del levantamiento único) *Dados un espacio cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ y un mapeo $f : Y \rightarrow X$, si dos levantamientos $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ coinciden en un punto de Y y Y es conexo, entonces \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 coinciden en todo punto en Y .*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

1.2.1. Clasificación de espacios cubrientes

Vamos a asumir que todos los espacios X son al menos localmente conexos por trayectorias. Una condición necesaria para que X tenga un espacio cubriente simplemente conexo es la siguiente: cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U tal que la inclusión inducida $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ es trivial; decimos que X es semi localmente simplemente conexo si lo anterior es cierto. Un espacio localmente simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo.

Proposición 15. *Sea X conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y semi localmente simplemente conexo. Entonces, para cada subgrupo $H \subset \pi_1(X, x_0)$ existe un espacio cubriente $p : X_H \rightarrow X$ tal que $p_*(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ para una elección adecuada del punto base $\tilde{x}_0 \in X_H$.*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

Un **isomorfismo** entre espacios cubrientes $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ y $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ es un homeomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_1 = p_2 \circ f$. Esta condición significa que f preserva la estructura de espacio cubriente, mandando $p_1^{-1}(x)$ a $p_2^{-1}(x)$ para cada $x \in X$. El inverso f^{-1} es también un isomorfismo, por lo tanto tenemos una relación de equivalencia.

Proposición 16. *Si X es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias, entonces dos espacios cubrientes conexos por trayectorias $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ y $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ son isomorfos por el isomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ mandando el punto base $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ a $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ si y sólo si $p_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_2(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. \square

Teorema 17. *Sea X un espacio conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y localmente simplemente conexo. Entonces existe una biyección entre el conjunto de clases de isomorfismos de espacios cubrientes conexos por trayectorias que preservan el punto base, $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, y el conjunto de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$, obtenido por asociar el subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ al espacio cubriente (\tilde{X}, \tilde{x}_0) . Si los puntos base son ignorados, esta correspondencia da una biyección entre clases de isomorfismos de espacios cubrientes conexos por trayectorias $p : \tilde{X} \rightarrow X$ y clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Ver capítulo 1 de A. Hatcher [15]. □

1.3. Grupos de Homotopía

La teoría de homotopía es una generalización del grupo fundamental en dimensiones superiores. Vamos a describir unos conceptos y resultados básicos.

Sean X, Y espacios basados y consideremos las parejas (X, A) , (Y, B) donde $A \subset X$ y $B \subset Y$. Una función

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B),$$

es una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Dadas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, decimos que son homotópicas si existe una homotopía

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

A las clases de homotopía de funciones de parejas las denotamos por $[(X, A), (Y, B)]$.

Sea I^q el producto de q copias del intervalo $[0, 1]$, el cubo unitario q -dimensional. La frontera de I^q la denotamos por ∂I^q .

Definición 18. Sea X un espacio con punto base $x_0 \in X$. Definimos los grupos de homotopía de orden superior $\pi_q(X, x_0)$, como el conjunto de clases de homotopía de funciones de pareja $f : (I^q, \partial I^q) \rightarrow (X, x_0)$, donde las homotopías deben satisfacer $H_t(\partial I^q) = x_0$ para todo t . Lo vamos a denotar como

$$\pi_q(X, x_0) = [(I^q, \partial I^q), (X, x_0)].$$

En el caso $q = 0$, I^0 es un punto y ∂I^0 es el conjunto vacío, así $\pi_0(X, x_0)$ es el conjunto de componentes por trayectorias de X .

La estructura de grupo esta dada de la siguiente forma. Sean $\alpha, \beta : I^q \rightarrow X$. Definimos $\alpha \cdot \beta : I^q \times I^q \rightarrow X$ como

$$(\alpha \cdot \beta)(s_1, s_2, \dots, s_q) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_q) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_q) & \text{si } 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

y

$$\bar{\alpha}(s_1, s_2, \dots, s_q) = \alpha(1 - s_1, s_2, \dots, s_q).$$

La operación en el grupo $\pi_q(X, x_0)$, esta dada por $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ y el inverso de un elemento $[\alpha]$ se denota por $[\bar{\alpha}]$.

Definición 19. Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función continua. Definimos el homomorfismo inducido

$$f_{\#} : \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$$

por $f_{\#} [\alpha] = [f \circ \alpha]$.

1. $Id_{\#} = Id_{\pi_q(X, x_0)}$
2. $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$

Lema 20. $f_{\#} : \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$ es un homomorfismo.

Proposición 21. Sean $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ funciones continuas tal que $f \simeq g$. Si

$$g_{\#}, f_{\#} : \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$$

entonces $f_{\#} = g_{\#}$.

Definición 22. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios basados, decimos que X es del mismo tipo de homotopía basada que Y , si existen funciones continuas

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

y

$$g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ y $g \circ f \simeq Id_X$ y escribimos $X \simeq Y$.

Proposición 23. Si $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ entonces $\pi_q(X, x_0) \cong \pi_q(Y, y_0)$.

Demostración. Por hipótesis, existen $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $g \circ f \simeq Id_X$. Usando la proposición anterior tenemos que $(g \circ f)_{\#} = (Id_X)_{\#}$ de donde $g_{\#} \circ f_{\#} = Id_{\pi_q(X, x_0)}$. Análogamente, $f_{\#} \circ g_{\#} = Id_{\pi_q(Y, y_0)}$. Por lo tanto, $f_{\#}$ es un isomorfismo \square

Nota 24. El grupo fundamental $\pi_q(\{x_0\}) = \{e\}$ para todo q , ya que $\pi_q(\{x_0\}) = [(S^q, *), (\{x_0\}, x_0)]$ que es la función constante.

Corolario 25. Si $(X, x_0) \simeq x_0$ entonces $\pi_q(X, x_0) = \{e\}$ para todo q .

Definición 26. Un espacio (X, x_0) se dice que es **contraíble** si $(X, x_0) \simeq x_0$.

Ejemplo 27. 1. El espacio \mathbb{R}^n es contraíble para $n \geq 0$

2. El disco unitario de dimensión n , \mathbb{D}^n es contraíble para $n \geq 0$.
3. Cualquier subconjunto convexo de \mathbb{R}^n es contraíble.

1.4. Grupos de Lie

Definición 28. Un grupo de Lie sobre un campo K es un grupo G equipado con la estructura de una variedad diferenciable sobre K , de tal forma que los mapeos

$$\begin{array}{ccc} \mu : G \times G & \longleftrightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \iota : G & \longleftrightarrow & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

son mapeos diferenciables.

Ejemplo 29. 1. El círculo $\mathbb{T} = z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ es un grupo de Lie real.

2. El grupo $GL_n(K)$ de matrices invertibles de orden n sobre el campo K , con la estructura diferenciable de un subconjunto abierto del espacio vectorial $L_n(K)$ de todas las matrices $n \times n$.

Definición 30. Una retícula en un grupo de Lie G , es un subgrupo discreto Γ tal que el cociente $\Gamma \backslash G$ tiene volumen finito.

1.5. Espacios aesféricos

Definición 31. Un espacio **aesférico** es un espacio topológico X tal que sus grupos de homotopía $\pi_n(X) = 0$ para $n > 1$.

Los espacios aesféricos también los podemos definir de la siguiente forma. Sea E un espacio conectable por trayectorias y $p : E \rightarrow B$ un mapeo cubriente, entonces E es aesférico si y sólo si B es aesférico.

Ejemplo 32. 1. Toda superficie compacta orientable de genero mayor que 0 es aesférica ya que tiene el plano Euclideano o el plano Hiperbólico como cubierta universal.

2. Una 3-variedad hiperbólica es por definición cubierta por el 3-espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , que es aesférico.
3. Espacios métricos con curvatura no positiva (localmente espacios $CAT(0)$) son aesféricos. (Teorema de Hadamard-Cartan)

Capítulo 2

Acciones de grupos

2.1. Conceptos

Definición 33. Dado un grupo G con elemento identidad e y un conjunto X , una acción de G en X , es una función que asocia a cada $g \in G$ y a cada $x \in X$ un elemento $gx \in X$, tal que

1. $(gh)x = g(hx)$
2. $e \cdot x = x$

Ejemplo 34. Cualquier grupo G actúa en si mismo ($X = G$) por multiplicación a la izquierda. La acción $L : G \times G \rightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto gh$ para todo $h \in G$ cumple que $(g_1g_2)h = g_1(g_2h)$ por ser G asociativo y $e \cdot h = h$.

Ejemplo 35. Cualquier grupo G actúa en si mismo por conjugación, es decir, cada $g \in G$ define una función $\alpha_g : G \rightarrow G$ por conjugación $\alpha_g(h) \mapsto ghg^{-1}$.

Definición 36. Sea G un grupo actuando en un conjunto X

1. La **órbita** de un elemento $x \in X$ con respecto a la acción es el conjunto

$$G \cdot x := \{gx \mid g \in G\}$$

2. El **cociente** de X por la acción G o espacio de órbitas, es el conjunto

$$G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\}$$

3. El **estabilizador** de un elemento $x \in X$ con respecto a la acción es el subgrupo

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

4. EL conjunto de puntos fijos de un elemento $g \in G$ es

$$X^g := \{x \in X \mid gx = x\}$$

Definición 37. Una acción es **libre** si para todo $x \in X$, $gx = x$ implica que $g = e$, es decir, si todos los estabilizadores son triviales.

Ejemplo 38. La acción de un grupo en si mismo por multiplicación a la izquierda $L : G \times G \rightarrow G$ es libre.

Definición 39. Sea G un grupo actuando por homeomorfismos en un espacio topológico X localmente compacto. La acción es **propia** si para cada subespacio K compacto de X , el conjunto $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

Teorema 40. Dada una acción propia, el espacio de órbitas $G \backslash X$ es Hausdorff y localmente compacto.

2.2. Aplicación al Grafeno

En esta sección vamos a describir como aplicar acciones de grupos a una teselación.

Los nanotubos de Carbono (CNTs) y el grafeno han sido propuestos como uno de los materiales mas prometedores para sistemas nanoelectromecánicos debido a su extremadamente alto modulo de Young, fuerza y otras propiedades.

El desarrollo de nuevos materiales puede permitir tanto el crecimiento de nuevas áreas de investigación como la solución a los problemas tecnológicos actuales. El grafeno es uno de los últimos avances en ciencia y tecnología que promete nuevas aplicaciones en diferentes aspectos de la vida. Su estructura es una retícula de panel. Consultar [22],[2], [17] para una explicación más detallada.

2.2.1. Geometría del grafeno

La retícula de panel del grafeno tiene una unidad de celda representada en la Figura 2.1 por los vectores r_1 y r_2 tal que

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{3}r_0 \tag{2.1}$$

donde r_0 es la distancia carbono-carbono. En esta base, cualquier vector r se representa como

$$r = nr_1 + mr_2 \tag{2.2}$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$. En coordenadas cartesianas

$$r_1 = r_0 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.3)$$

$$r_2 = r_0 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

Los vectores que conectan cualquier átomo a su vecino más cercano son

$$\delta_1 = \frac{(r_1 - 2r_2)}{3} \quad (2.5)$$

$$\delta_2 = \frac{(r_2 - 2r_1)}{3} \quad (2.6)$$

$$\delta_3 = \frac{(r_1 + r_2)}{3} \quad (2.7)$$

Las ecuaciones anteriores describen completamente la geometría discreta plana del grafeno, está definida por las posiciones de los átomos de carbono.

2.2.2. Geometría del CNT

Un CNT se genera enrollando una hoja de grafeno para hacer un cilindro. La hoja de grafeno se debe enrollar en la dirección del vector quiral C_h definido como

$$C_h = nr_1 + mr_2 \quad (2.8)$$

donde los enteros (n, m) son el número de pasos a lo largo de la frontera zigzag del carbono y se usan para nombrar al nanotubo. Un nanotubo (n, n) es llamado silla mientras que un nanotubo $(n, 0)$ es llamado zigzag. El ángulo quiral $\psi (0 \leq \psi \leq 30^\circ)$ se define como

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{3}m}{(2n + m)} \quad (2.9)$$

Para un nanotubo silla $\psi = 30$ y para uno zigzag $\psi = 0$.

El diámetro D del nanotubo está dado por la siguiente ecuación

$$D = \frac{r_0 \sqrt{3(n^2 + nm + m^2)}}{\pi} \quad (2.10)$$

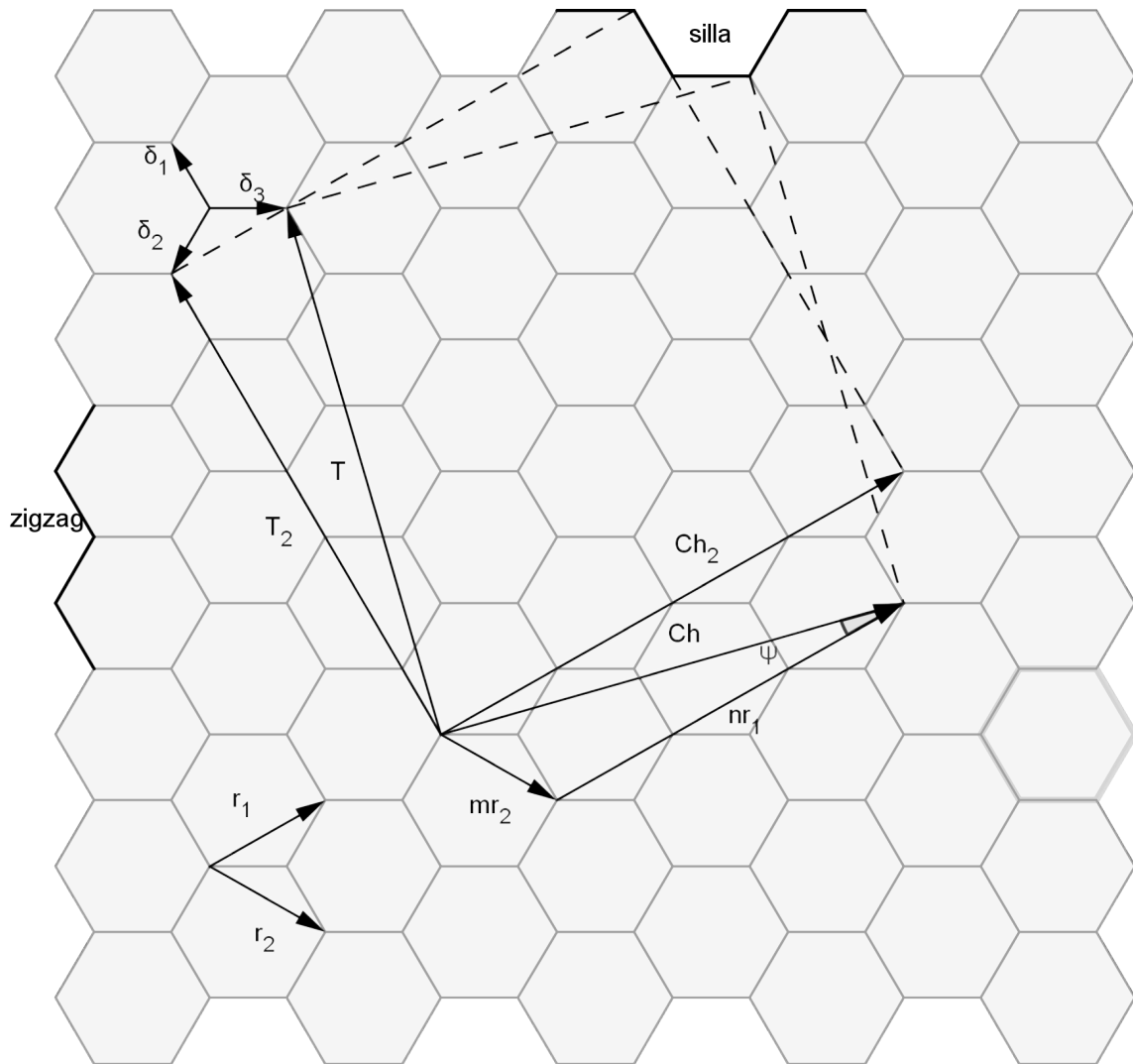


Figura 2.1: Retícula de grafeno

2.2.3. Acciones de grupo en el grafeno

Ahora, vamos a ver cómo describir estas teselaciones hexagonales en términos de acciones de grupo.

Sea G el grupo generado por la reflexión

$$R : (x, y) \mapsto (1 - x, y)$$

y las traslaciones

$$t_1 : (x, y) \mapsto (x + \frac{3}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$t_2 : (x, y) \mapsto (x + \frac{3}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Consideremos la pieza base de la figura 2.2, donde las aristas tienen una longitud de $\frac{1}{2}$ y la colocamos de tal forma que el vértice central quede en el origen y una de las aristas esté alineada con el eje x con punto final en la coordenada $(\frac{1}{2}, 0)$.

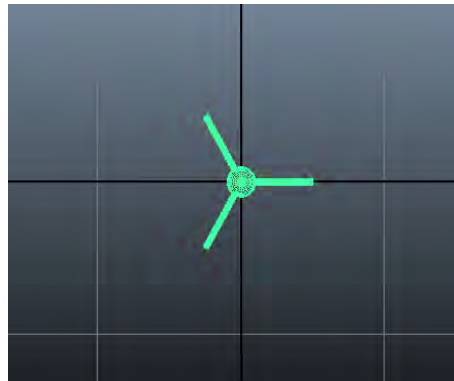


Figura 2.2: Pieza base

Afirmación: La teselación de hexagonos regulares de lado 1 es la órbita de la pieza base bajo G .

Demostración. Veamos que la órbita de la pieza está contenida en la teselación. Pero esto se sigue de que R, t_1, t_2 son simetrías de la teselación y que la pieza es parte de la teselación. La acción de R en la pieza es reflejar sobre la línea roja de la figura 2.3(a) y la acción de t_1 y t_2 en la pieza son la traslaciones de la figura 2.3(b). Entonces, cada pieza es parte de

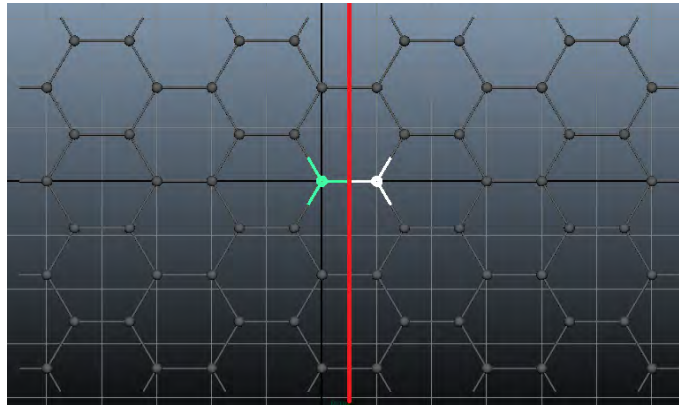
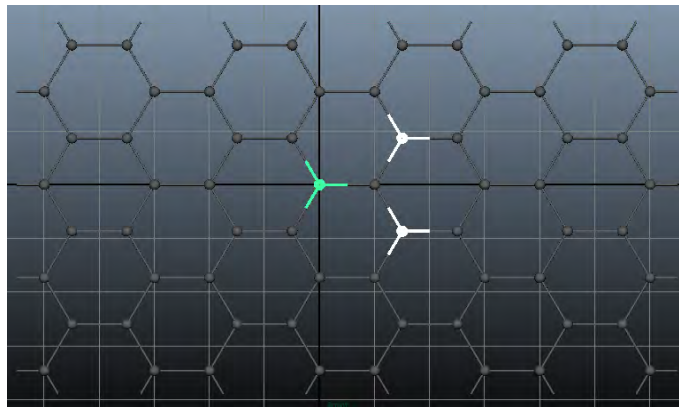
(a) Acción de R (b) Acción de t_1 y t_2

Figura 2.3: Acciones sobre la pieza base.

la teselación. Observemos la figura 2.4. Las piezas blancas son la órbita de la pieza base (verde) bajo t_1 y t_2 . Las piezas grises son la órbita de la pieza base bajo R y después aplicar t_1, t_2 . Como todo vértice es blanco o gris, entonces todo vértice de la teselación es $t(\text{pieza})$ o $t(R(\text{pieza}))$, para $t \in \{t_1, t_2\}$. \square

El CNT se obtiene de hacer cociente por una traslación que preserve la teselación. En la figura 2.5(a), la traslación por la que se debe hacer cociente es la línea azul y lo que obtenemos es que se identifican las dos líneas rojas, con lo cual obtenemos el CNT 2.5(b).

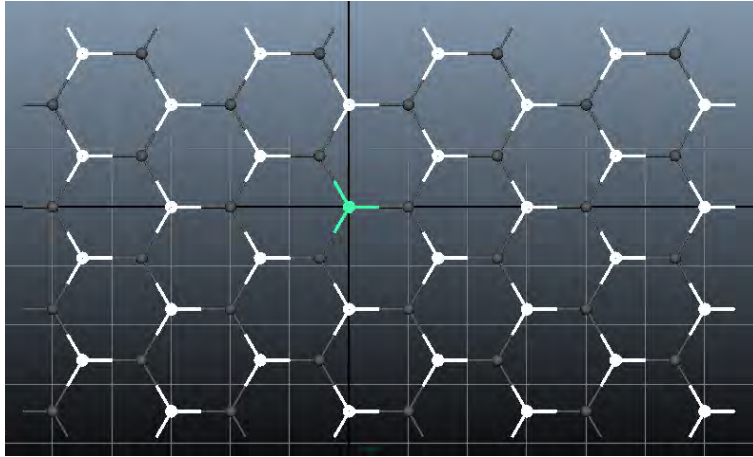


Figura 2.4: Órbitas de la pieza base bajo R, t_1, t_2

2.2.4. Restricciones geométricas

Las estructuras puras de grafeno cerradas tienen una restricción: cada átomo de carbono tiene tres enlaces con átomos vecinos y cada arista es compartida por dos vértices, es decir, $3V = 2A$, donde V representa el número de vértices y A el de aristas. De esta relación podemos ver que el número de vértices debe ser par.

Por otro lado, por cada cara, C , tenemos 6 vértices y cada arista está en dos caras, es decir, $2A = 6C$.

Estas dos relaciones las podemos escribir como

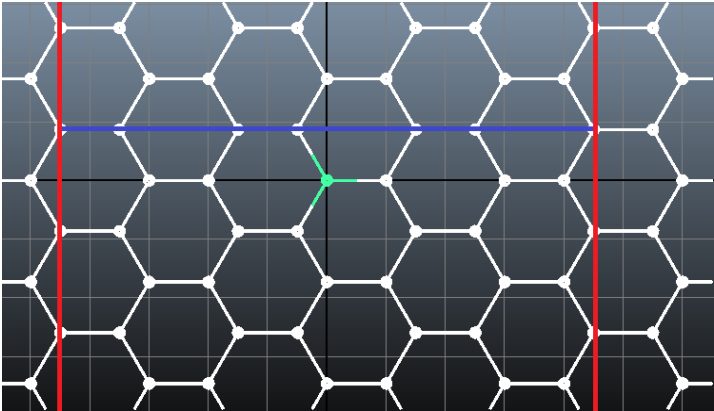
$$A = \frac{3}{2}V, \quad C = \frac{1}{3}A = \frac{1}{2}V.$$

Sustituyendo esto en la característica de Euler, $C + V - A = 2 - 2g$, tenemos que

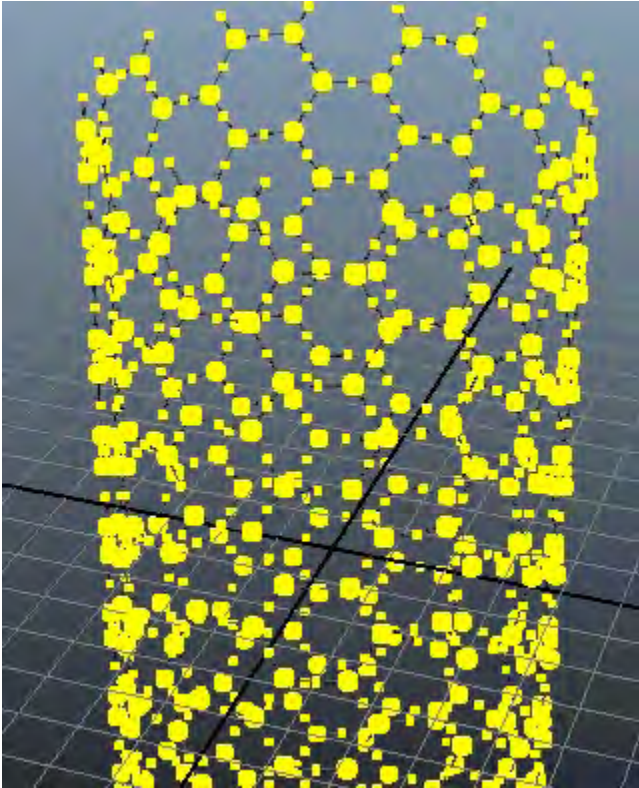
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V + V - \frac{3}{2}V &= 2 - 2g \\ 0 &= 2 - 2g \\ g &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única superficie cerrada pura de grafeno es el toro.

Si queremos construir una superficie cerrada con género $g = 0$, debemos reducir el número de aristas de algunas caras usando polígonos con z aristas, donde $z < 6$.



(a)



(b)

Figura 2.5: CNT

Capítulo 3

Retículas no uniformes en espacios de curvatura no positiva

3.1. Antecedentes

Sea M una variedad riemanniana, denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su estructura riemanniana y por d su métrica riemanniana. Sea p un punto en M , vamos a denotar por $S(p)$ a la esfera unitaria en el espacio tangente $T_p M$ y por SM al haz tangente unitario con proyección $\mu : SM \rightarrow M$. Sean $v, w \in S(p)$, el **ángulo** $\theta = \angle(v, w)$ es el único número $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que $\langle v, w \rangle = \cos \theta$. Sea M es una variedad completa y $v \in SM$, denotaremos por $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$ a la geodésica tal que $\gamma'_v(0) = v$. Vamos a asumir que todas las geodésicas tienen velocidad unitaria y que están definidas en toda la recta real, a menos que se indique lo contrario. Por **segmento geodésico** nos vamos a referir a una geodésica que está definida en un intervalo compacto.

Sea X un espacio métrico, llamamos a (X, d) **espacio métrico geodésico** si cada par de puntos se puede unir con una geodésica. Como corolario del teorema de Hopf-Rinow tenemos que toda variedad riemanniana completa, conexa es un espacio métrico geodésico.

Dado $r > 0$, un espacio métrico (X, d) se dice que es **r-geodésico** si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $d(x, y) < r$ existe una geodésica que une a x con y .

Definición 41. Sea X un espacio métrico. Un **triángulo de comparación** en \mathbb{E}^2 para una terna de puntos (p, q, r) en X , es un triángulo en el plano Euclideo con vértices $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ tal que

$$d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q}), \quad d(q, r) = d(\bar{q}, \bar{r}), \quad d(p, r) = d(\bar{p}, \bar{r})$$

Tal triángulo es único salvo isometrías y lo denotaremos por $\bar{\Delta}(p, q, r)$. El ángulo interior de $\bar{\Delta}(p, q, r)$ en \bar{p} se llama el **ángulo de comparación** entre q y r en p y lo denotaremos por

$\overline{\mathcal{L}}_p(q, r)$.

Vamos a denotar por \mathbb{M}_k^n a la variedad riemanniana de dimensión n , completa, conexa, simplemente conexa, de curvatura seccional constante $k \in \mathbb{R}$. Para cada entero n , clasificamos a \mathbb{M}_k^n en tres distintas clases según k sea positivo, negativo o cero.

1. Si $k = 0$, entonces el espacio \mathbb{M}_0^n es el espacio Euclideo \mathbb{E}^n .
2. Si $k > 0$, entonces \mathbb{M}_k^n es obtenido del espacio esférico \mathbb{S}^n multiplicando la función distancia por la constante $\frac{1}{\sqrt{k}}$. En particular, cuando $k = 1$, tenemos $\mathbb{M}_1^n = \mathbb{S}^n$.
3. Si $k < 0$, entonces \mathbb{M}_k^n es obtenido del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n por multiplicar la función distancia por la constante $\frac{1}{\sqrt{-k}}$. En particular, cuando $k = -1$, tenemos $\mathbb{M}_{-1}^n = \mathbb{H}^n$.

Denotemos por $V_k(r)$ al volumen del disco de radio r en el espacio M_k^n y por $A_k(r)$ a su área.

El diámetro de \mathbb{M}_k^n lo vamos a denotar por D_k . Para $k > 0$ tenemos que $D_k := \pi/\sqrt{k}$. Para $k \leq 0$ tenemos que $D_k := \infty$.

Definición 42. Una variedad riemanniana completa, simplemente conexa, de curvatura seccional no positiva donde sea, se le llama **variedad de Hadamard**.

Ejemplo 43. 1. \mathbb{R} con la métrica usual es una variedad de Hadamard con curvatura seccional constante 0.

2. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n es una variedad Hadamard con curvatura seccional constante igual a -1 .

Definición 44. Sea X un espacio métrico y $k \in \mathbb{R}$. Sea \triangle un triángulo geodésico en X con perímetro menor que $2D_k$. Sea $\overline{\triangle} \subset \mathbb{M}_k^2$ un triángulo de comparación para \triangle . Se dice que \triangle satisface la desigualdad CAT(k) si para todo $x, y \in \triangle$ y todos los puntos de comparación $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\triangle}$

$$d(x, y) \leq d(\overline{x}, \overline{y}).$$

1. Si $k \leq 0$, X se llama espacio CAT(k) si X es un espacio geodésico y todos sus triángulos geodésicos satisfacen la desigualdad CAT(k).
2. Si $k > 0$, X se llama espacio CAT(k) si X es D_k -geodésico y todos sus triángulos geodésicos de perímetro menor que $2D_k$ satisfacen la desigualdad CAT(k).

Los espacios CAT(0) son espacios Hadamard. Vamos a denotar por H a una variedad Hadamard. Sean $p \neq q$ en H , denotaremos por $\gamma_{p,q}$ a la única geodésica (de velocidad unitaria) tal que $\gamma_{p,q}(0) = p$, $\gamma_{p,q}(t) = q$, donde $t = d(p, q)$. El **ángulo** $\angle_p(m, n)$ que subtienden dos puntos distintos $m, n \in H$ en p , se define como el ángulo $\angle(\gamma'_{pm}(0), \gamma'_{pn}(0))$. Tres puntos distintos no colineales definen un triángulo geodésico. Algunos resultados básicos, pero importantes para triángulos geodésicos son los siguientes:

1. **Ley de Cosenos:** Si a, b, c son los lados de un triángulo geodésico y θ es el ángulo opuesto a c , tenemos que $c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.

2. **Suma de ángulos:** La suma de los ángulos interiores de un triángulo es a lo más π .

Lema 45. (Segunda ley de cosenos) Si a, b, c son los lados de un triángulo geodésico y α, β y γ son los ángulos interiores del triángulo geodésico, opuestos a a, b y c respectivamente, entonces

$$c \leq b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

Demostración. Por la ley de cosenos tenemos que

$$a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

y

$$b^2 \geq a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Sumando estas dos desigualdades obtenemos que

$$0 \geq 2c^2 - 2bc \cos \alpha - 2ac \cos \beta$$

de donde

$$c \leq b \cos \alpha + a \cos \beta$$

□

Lema 46. Si a, b, c son los lados de un triángulo geodésico y α, β y γ son los ángulos interiores del triángulo, opuestos a a, b y c respectivamente, entonces

$$1 - \cos \gamma \leq \frac{c^2}{2ab}.$$

No se admiten triángulos degenerados.

Demostración. De la ley de cosenos tenemos que

$$\begin{aligned} c^2 &\geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos \gamma) \\ &\geq 2ab(1 - \cos \gamma) \end{aligned}$$

□

Nota 47. Del resultado anterior se sigue que si $\{p_n\}, \{q_n\}$ y $\{r_n\}$ son sucesiones en H tales que $d(p_n, q_n) \rightarrow \infty$, pero $d(q_n, r_n) \leq A$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\angle_{p_n}(q_n, r_n) \rightarrow 0$.

Nota 48. Para simplificar notación, vamos a escribir γt en lugar de $\gamma(t)$.

Definición 49. Dos geodésicas γ, σ de velocidad unitaria en H son **asintóticas** si existe una constante $C > 0$ tal que $d(\gamma t, \sigma t) \leq C$ para todo $t \geq 0$.

Algunas consecuencias importantes sobre geodésicas asymptóticas son las siguientes:

1. La relación de asymptoticidad es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las geodésicas de H .
2. Si geodésicas asymptóticas en H tienen un punto en común, entonces son la misma, salvo reparametrización.
3. Dada una geodésica α y un punto $p \in H$, existe una única geodésica β , tal que, $\beta(0) = p$ y β sea asymptótica a α .

Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I (no necesariamente cerrado o compacto), se llama **convexa** si, para cualesquiera $t, t' \in I$ y $s \in [0, 1]$ tenemos

$$f((s-1)t + st') \leq (s-1)f(t) + sf(t').$$

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un espacio métrico geodésico es **convexa** si, para cualquier trayectoria geodésica $c : I \rightarrow X$ parametrizada por longitud de arco, la función

$$t \mapsto f(c(t))$$

definida en el intervalo I es convexa. O equivalentemente, si para cada trayectoria geodésica parametrizada por longitud de arco $c : [0, 1] \rightarrow I$, tenemos

$$f(c(s)) \leq (s-1)f(c(0)) + sf(c(1))$$

para cada $s \in [0, 1]$.

Proposición 50. Si X es un espacio CAT(0), entonces la función distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, es decir, dado cualquier par de geodésicas $c, c' : [0, 1] \rightarrow X$ parametrizadas por longitud de arco, se cumple la siguiente desigualdad

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1-t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1)).$$

Demostración. Primero, vamos a asumir que $c(0) = c'(0)$. Consideremos el triángulo de comparación $\overline{\Delta} \subset \mathbb{E}^2$ para el triángulo geodésico $\Delta(c(0), c(1), c'(1))$. Dado $t \in [0, 1]$, sabemos que

$$\frac{d(\overline{c(t)}, \overline{c'(t)})}{d(\overline{c(1)}, \overline{c'(1)})} = \frac{t}{1}$$

entonces

$$\begin{aligned} d(\overline{c(t)}, \overline{c'(t)}) &= t d(\overline{c(1)}, \overline{c'(1)}) \\ &= t d(c(1), c'(1)). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la relación entre triángulos de comparación. Ahora, por la desigualdad CAT(0), tenemos que

$$d(c(t), c'(t)) \leq d(\overline{c(t)}, \overline{c'(t)})$$

de donde

$$d(c(t), c'(t)) \leq t d(c(1), c'(1)).$$

Para el caso general, sea $c'' : [0, 1] \rightarrow X$ una geodésica reparametrizada que cumple

$$c''(0) = c(0) \quad c''(1) = c'(1)$$

Aplicando el caso anterior a c y c'' y después a c' y c'' revirtiendo orientación, obtenemos

$$\begin{aligned} d(c(t), c''(t)) &\leq t d(c(1), c''(1)) \\ d(c''(t), c'(t)) &\leq (1-t) d(c''(0), c'(0)) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} d(c(t), c'(t)) &\leq d(c(t), c''(t)) + d(c''(t), c'(t)) \\ &\leq t d(c(1), c''(1)) + (1-t) d(c''(0), c'(0)) \\ &= t d(c(1), c'(1)) + (1-t) d(c(0), c'(0)). \end{aligned}$$

□

Proposición 51. *Sea α una geodésica en H y sean $\{p_n\} \rightarrow p$ en H y $\{t_n\} \rightarrow \infty$ en \mathbb{R} . Si β_n es la geodésica que va de p_n a $\alpha(t_n)$, entonces, $\beta'_n(0)$ converge al vector $v \in S(p)$, y $\beta = \gamma_v$ es asintótica a α .*

Demostración. Ver sección 1 de P. Eberlein y B. O'Neill [13].

□

Proposición 52. *Sea X un espacio CAT(0) y sea C un subconjunto convexo, el cual es completo con la métrica inducida. Entonces*

1. *Para cada $x \in X$, existe un único punto $\pi(x) \in C$ tal que*

$$d(x, \pi(x)) = d(x, C) := \inf_{y \in C} \{d(x, y)\}.$$

2. Si x' pertenece al segmento geodésico $[x, \pi(x)]$, entonces $\pi(x') = \pi(x)$.

3. Dados $x \notin C$ y $y \in C$, si $y \neq \pi(x)$ entonces

$$\angle_{\pi(x)}(x, y) \geq \pi/2$$

Demostración. 1. Para mostrar la existencia de $\pi(x)$, consideremos una sucesión de puntos $y_n \in C$ tal que $d(y_n, x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} d(x, C)$.

Afirmación: Esta sucesión es de Cauchy: Sea $D = d(x, C)$ y sea $\varepsilon > 0$ muy pequeño en comparación a D . Por hipótesis, existe $N > 0$ tal que $d(y_n, x) < D + \varepsilon$ para todo $n > N$. Fijemos $n, m > N$ y consideremos el triángulo de comparación $\bar{\Delta}(x, y_n, y_m) \in \mathbb{E}^2$. Consideremos dos círculos alrededor de \bar{x} , uno de radio D y otro de radio $D + \varepsilon$. Vamos a probar ahora que cualquier segmento recto que esté contenido completamente en la región acotada por los dos círculos, tiene longitud a lo más $2\sqrt{2(D\varepsilon + \varepsilon^2)}$. Para esto vamos a considerar tres casos:

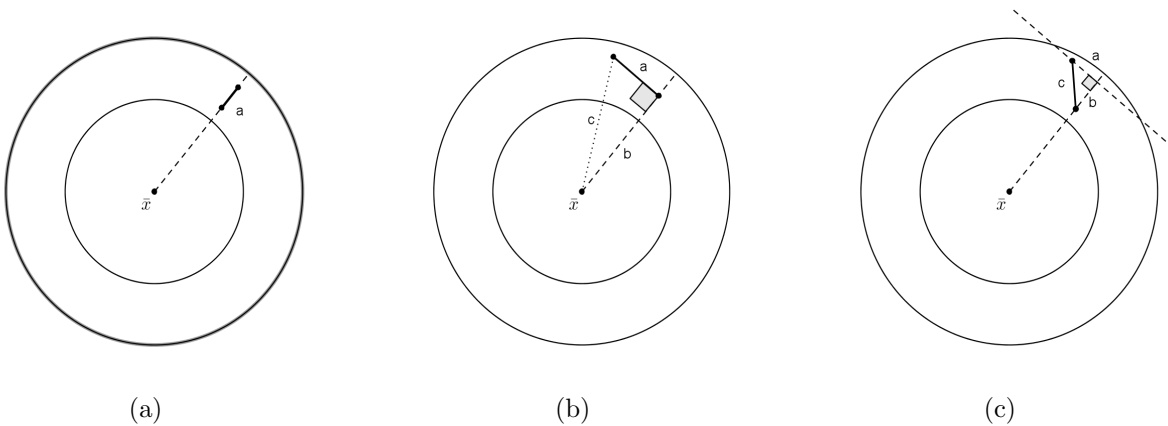


Figura 3.1:

- (i) El segmento está contenido en un radio de los círculos, Fig. 3.1(a). En este caso, es inmediato que $a < \varepsilon$.
- (ii) El segmento es perpendicular a un radio, Fig. 3.1(b). Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \leq (D + \varepsilon)^2 - D^2 \\ &= 2D\varepsilon + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Entonces, $a \leq \sqrt{2D\varepsilon + \varepsilon^2}$.

- (iii) El segmento no es perpendicular a ningún radio que lo atraviesa ni está contenido en ningún radio, Fig. 3.1(c). Por los dos casos anteriores,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \leq \varepsilon^2 + 2D\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &= 2(\varepsilon^2 + D\varepsilon). \end{aligned}$$

Entonces $c \leq \sqrt{2(\varepsilon^2 + D\varepsilon)}$.

El segmento $[\overline{y_n}, \overline{y_m}]$, debe estar contenido en esta región, ya que si no lo estuviera, existiría $\bar{z} \in [\overline{y_n}, \overline{y_m}]$ tal que $d(\bar{x}, \bar{z}) < D$. Pero, por la desigualdad CAT(0), el punto correspondiente $z \in [y_n, y_m] \subset C$ debería satisfacer que $d(x, z) < D$, lo cual contradice la definición de D . Así, si $n, m > N$, entonces $d(y_n, y_m) < 2\sqrt{2(D\varepsilon + \varepsilon^2)}$. Por lo tanto, la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy.

Ahora, podemos tomar a $\pi(x)$ como el punto límite de esta sucesión, el cual existe al ser C completo. Más aún, el hecho que cada sucesión $\{y_n\}$ sea de Cauchy, nos da la unicidad de $\pi(x)$, ya que si existiera otro punto $\pi(x)' \in C$ con $d(\pi(x)', x) = d(x, C)$, entonces la sucesión de términos donde alternamos $\pi(x)$ y $\pi(x)'$ debería de satisfacer la definición de $\{y_n\}$, pero no es de Cauchy.

2. Usando la desigualdad del triángulo tenemos

$$d(x, \pi(x')) \leq d(x, \pi(x)) + d(\pi(x), \pi(x'))$$

como $d(x, \pi(x)) = \inf_{y \in C} \{d(x, y)\}$, entonces $d(\pi(x), \pi(x')) = 0$.

3. Si $\angle_{\pi(x)}(x, y)$ fuera menor a $\pi/2$, entonces, podemos encontrar dos puntos $x' \in [\pi(x), x]$ y $y' \in [\pi(x), y]$ distintos de $\pi(x)$, tales que, en el triángulo de comparación $\overline{\Delta}(x', \pi(x), y')$, el ángulo en $\pi(x)$ es también menor que $\pi/2$. Esto y la desigualdad CAT(0) implican que, para algún punto $p \in [\pi(x), y'] \subset C$ tendríamos

$$d(x', p) < d(x', \pi(x))$$

pero por el punto anterior, $d(x', \pi(x)) = d(x', C)$.

□

Corolario 53. Sea C un subconjunto convexo, completo, en un espacio CAT(0) X . Sea d_C la función distancia a C , definida por $d_C(x) = d(x, C) = \inf_{y \in C} \{d(x, y)\}$. Entonces

1. La función d_C es convexa.
2. Para todo $x, y \in X$, tenemos que $|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y)$.

3. La restricción de d_C a la esfera con centro x y radio $r \leq d_C(x)$ alcanza su ínfimo en un único punto y , además, $d_C(x) = d_C(y) + r$.

Demostración. 1. Sea π la proyección de X sobre C . Sea $c : [0, 1] \rightarrow X$ una parametrización de un segmento geodésico y sea $c' : [0, 1] \rightarrow C$ la parametrización del segmento geodésico $[\pi(c(0)), \pi(c(1))]$. Por la convexidad de la función distancia (proposición 50), tenemos:

$$\begin{aligned} d_C(c(t)) &\leq d(c(t), c'(t)) \\ &\leq (1-t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1)) \\ &= (1-t)d_C(c(0)) + td_C(c(1)). \end{aligned}$$

2. Como

$$\begin{aligned} d_C(x) &\leq d(x, \pi(y)) \\ &\leq d(x, y) + d(y, \pi(y)) \\ &= d(x, y) + d_C(y) \end{aligned}$$

entonces $|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y)$.

3. Sea $y \in [x, \pi(x)]$ tal que $d(x, y) = r$, entonces $d_C(x) = d_C(y) + r$. Para ver que alcanza su ínfimo en un único punto, por la proposición 52, si y' es un punto tal que $d(x, y') = r$ y $d_C(y') \leq d_C(y)$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, \pi(y')) &\leq d(x, y') + d(y', \pi(y')) \\ &\leq r + d_C(y) \\ &= d(x, \pi(x)) \end{aligned}$$

entonces $\pi(y') = \pi(x)$ y $y' = y$.

□

3.1.1. Puntos al infinito y topología cono

Las variedades completas M de dimensión $n \geq 2$ y curvatura seccional $k \leq 0$ son las variedades cocientes H/D , donde H es una variedad Hadamard y D es un grupo propiamente discontinuo de isometrías de H . Las variedades H/D las vamos a estudiar a partir de la acción de D en H y de las propiedades geométricas de H al infinito.

Definición 54. Definimos los **puntos al infinito** de H como las clases de geodésicas asintóticas de H . Vamos a denotar al conjunto de puntos al infinito por $H(\infty)$ y definimos $\overline{H} := H \cup H(\infty)$.

Ejemplo 55. Si \mathbb{H}^n es el espacio hiperbólico de dimensión n , la bola unitaria abierta en \mathbb{R}^n con la métrica de Poincaré, entonces $H(\infty)$ es la esfera frontera \mathbb{S}^{n-1} .

Sea $\alpha : (-\infty, \infty) \rightarrow H$ una geodésica, denotamos por $\alpha(\infty)$ a la clase asintótica de α y por $\alpha(-\infty)$ a la clase asintótica de la curva que revierte orientación $t \mapsto \alpha(-t)$. La función resultante $\alpha : [-\infty, \infty] \rightarrow \overline{H}$, es la **extensión asintótica** de α . Por abuso de notación, vamos a escribir $\alpha(\infty) = x$ o $\alpha \in x$ para $x \in H(\infty)$. Dados $x \in H(\infty)$ y $p \in H$, existe una única geodésica γ_{px} tal que $\gamma_{px}(0) = p$ y $\gamma_{px}(\infty) = x$, es decir, existe una única geodésica que une un punto finite con un punto al infinito.

Sea φ una isometría de H y $x \in H(\infty)$, tenemos que $\varphi(x) = (\varphi \circ \alpha)(\infty)$, donde α es cualquier geodésica que representa a x . Como la relación de asintoticidad es preservada por isometrías, la función $\varphi : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ está bien definida, es biyectiva y manda $H(\infty)$ en si mismo.

Decimos que una topología τ en \overline{H} es **admisibile** si satisface las siguientes cuatro condiciones:

- (1) **Propiedad de cerradura:** La topología en H inducida por τ es la topología original de H , y H es un conjunto abierto denso de \overline{H} .
- (2) **Propiedad de la extensión geodésica:** Si α es cualquier geodésica de H , entonces su extensión asintótica es continua.
- (3) **Propiedad de la extensión isométrica:** Si φ es cualquier isometría de H , entonces su extensión asintótica es continua.
- (4) **Propiedad intensiva:** Si $x \in H(\infty)$, V una vecindad de x y $r > 0$ cualquier número positivo, entonces existe una vecindad U de x tal que

$$N_r(U) = \{q \in \overline{H} : d(q, U) < r\} \subseteq V$$

Aquí, hemos ampliado la métrica trivialmente, por lo que $d(a, b) = \infty$ si $a \neq b$ y cualquiera de los dos puntos esta en $H(\infty)$. Esta es la única extensión continua de la métrica, asumiendo la propiedad de la extensión geodésica.

Sea $p \in H$, la **órbita** de p es el conjunto $D(p) = \{\varphi(p) : \varphi \in D\}$. La órbita de un punto $p \in H$ no tiene puntos de acumulación en H . El conjunto de puntos de acumulación de una

órbita se encuentra en $H(\infty)$ y es independiente de la elección de $p \in H$, este conjunto se llama **conjunto límite** y se denota por $L(D)$

$$L(D) = \{x \in H(\infty) : \varphi_n(p) \rightarrow x, \text{ para alguna sucesión } \{\varphi_n\} \subseteq D \text{ y cualquier punto } p \in H\}$$

Ahora, vamos a definir una topología en $\bar{H} = H \cup H(\infty)$ que hace a \bar{H} homeomorfo a la bola cerrada unitaria en \mathbb{R}^n y a $H(\infty)$ homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^{n-1} .

Sea $p \in H$ distinto de $a, b \in \bar{H}$. El **ángulo subtendido** por a, b en p es $\angle_p(a, b) = \angle(\gamma'_{pa}(0), \gamma'_{pb}(0))$.

Nota 56. Si $p \in H$ y si $\alpha : [0, \infty) \rightarrow H$ es una geodésica, entonces la función $[0, \infty] \rightarrow S(p)$ dada por $t \rightarrow \gamma'_{p, \alpha t}(0)$ es continua. Esto es obvio para $t < \infty$ y como $\gamma_{p\alpha(\infty)}$ es la única geodésica de p asintótica a α , la continuidad al infinito se sigue de la proposición 51.

Definición 57. Sea $v \in S(p) \subseteq T_p H$ y sea ε un número, $0 < \varepsilon < \pi$. El conjunto

$$C(v, \varepsilon) = \{b \in \bar{H} : \angle_p(\gamma_v(\infty), b) < \varepsilon\}$$

se llama el **cono del vértice** $p = \mu(v)$, **eje** v y **ángulo** ε , donde μ es la proyección canónica $TH \rightarrow H$.

Así, $C(v, \varepsilon)$ consiste de todos los puntos, finitos o infinitos, cuya diferencia angular a v es menor que ε .

Proposición 58. Si H es una variedad Hadamard, existe una topología única κ en \bar{H} tal que

1. κ tiene la propiedad de cerradura.
2. Para cada $x \in H(\infty)$, el conjunto de conos que continen a x es una base local para κ en x . Llamamos a κ la **topología cono** en \bar{H} .

Proposición 59. La topología cono κ para \bar{H} es admisible.

Demostración. Ver sección 2 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. □

Nota 60. (1) Para $p \in H$, la función $\varphi_p : S(p) \rightarrow H(\infty)$ tal que $\varphi_p(v) = \gamma_v(\infty)$ es un homeomorfismo.

(2) La función $\psi : SH \times [-\infty, \infty] \rightarrow \bar{H}$ dada por $\psi(v, t) = \gamma_v(t)$, es continua.

(3) Sea $D = \{(p, b) \in H \times \bar{H} : p \neq b\}$. La función $V : D \rightarrow SH$ dada por $V(p, b) = \gamma'_{pb}(0)$, es continua.

- (4) Si denotamos también por ψ a la restricción de la función ψ anterior, $\psi : SH \rightarrow H(\infty)$, de tal forma que $\psi(v) = \gamma_v(\infty)$, entonces las funciones

$$\mu \times \psi : SH \rightarrow H \times H(\infty), \quad V \mid H \times H(\infty)$$

son homeomorfismos inversos.

- (5) La función ángulo $\angle_p(a, b)$ es continua en $\{(p, a, b) \in H \times \bar{H} \times \bar{H} : p \neq a, p \neq b\}$, esto por que tenemos la relación $\cos(\angle_p(a, b)) = \langle V(p, a), V(p, b) \rangle$.

3.1.2. Horoesferas

El objetivo de esta sección es definir un concepto similar a “esfera” en H cuyo centro es un punto $x \in H(\infty)$ y algunos resultados importantes sobre estas, para lo cual nos basaremos en P. Eberlein [11], P. Eberlein y B. O’Neill [13] y R. Bridson y A. Haefliger [6].

Sea $B : SH \times H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $B(v, p) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, \gamma_v t) - t$. Esta función está bien definida ya que $t \rightarrow d(p, \gamma_v t)$ es monótona no creciente y está acotada por abajo por $-d(p, \gamma_v(0))$.

Lema 61. *Sea $T > 0$ dado. Para cada $t > 0$, sea $B_t : SH \times H \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $B_t(v, p) = d(p, \gamma_v t) - t$. Si $s, t > T$, entonces*

$$|B_t(v, p) - B_s(v, p)| \leq \frac{d^2(p, \mu v)}{T}$$

donde $\mu : SH \rightarrow H$ es la proyección natural.

Demostración. Sean $s > t \geq T > 0$ y $(v, p) \in SH \times H$ dados. Sea $\theta = \angle_{\gamma_v t}(p, \mu v)$ y $\delta = \angle_{\gamma_v s}(p, \mu v)$. Como B_t es decreciente en t ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_t(v, p) - B_s(v, p) \\ &= (s - t) + d(p, \gamma_v t) - d(p, \gamma_v s) \end{aligned}$$

por la ley doble de cosenos (45) tenemos

$$(s - t) \leq d(p, \gamma_v t)(1 - \cos \theta) + d(p, \gamma_v s)(1 - \cos \delta)$$

y por (46)

$$\begin{aligned} d(p, \gamma_v t)(1 - \cos \theta) &\leq \frac{d^2(p, \mu v)}{2t} \\ &\leq \frac{d^2(p, \mu v)}{2T}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$d(p, \gamma_v s)(1 - \cos \delta) \leq \frac{d^2(p, \mu v)}{2T}.$$

Por lo tanto,

$$|B_t(v, p) - B_s(v, p)| \leq \frac{d^2(p, \mu v)}{T}$$

□

Proposición 62. 1. Para un $v \in SH$ fijo, la función $p \rightarrow B(v, p)$ es una función convexa, uniformemente continua en H tal que

$$|B(v, p) - B(v, q)| \leq d(p, q).$$

2. La función $B : SH \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Demostración. 1. Usando la desigualdad del triángulo es inmediato que

$$B(v, p) - B(v, q) \leq d(p, q)$$

y de esta desigualdad se sigue que la función es uniformemente continua.

Para demostrar la convexidad, sea $\alpha : [a, b] \rightarrow H$ un segmento geodésico y sea $0 \leq \lambda \leq 1$ dado. Fijemos $s > 0$. Por el corolario 53, la función $p \rightarrow d(\gamma_v s, p)$ es una función convexa, continua, por lo cual

$$d(\gamma_v s, \alpha(\lambda a + (1 - \lambda)b)) \leq \lambda d(\gamma_v s, \alpha a) + (1 - \lambda) d(\gamma_v s, \alpha b)$$

$$d(\gamma_v s, \alpha(\lambda a + (1 - \lambda)b)) - s \leq \lambda [d(\gamma_v s, \alpha a) - s] + (1 - \lambda) [d(\gamma_v s, \alpha b) - s]$$

haciendo tender $s \rightarrow \infty$ en ambos lados de la última desigualdad, tenemos que B es convexa.

2. Para cada $t > 0$, tenemos que B_t es continua y $B_t \rightarrow B$ puntualmente cuando $t \rightarrow \infty$. Para probar la continuidad de B , es suficiente probar que para cada conjunto compacto $C \subseteq SH \times H$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $T = T(C, \varepsilon)$ tal que para $t > T$, $|B_t - B| < \varepsilon$ en C , pero esto se sigue del lema anterior (lema 61).

□

Definición 63. Definimos la función $\alpha : H \times \overline{H} \times H \rightarrow \mathbb{R}$ como:

1. Si $x \in H(\infty)$ entonces $\alpha(p, x, q) = B(V(p, x), q)$, donde V es la función vector de la nota 60.3, $V(p, b) = \gamma'_{pb}(0)$.

2. Si $x \in H$ entonces, $\alpha(p, x, q) = d(q, x) - d(p, x)$.

Proposición 64. *La función α es continua con respecto a la topología producto en $H \times \overline{H} \times H$.*

Demostración. Sea $(p, x, q) \in H \times \overline{H} \times H$ un punto cualquiera y sea (p_n, x_n, q_n) una sucesión que converge a ese punto. Vamos a mostrar que $\alpha(p_n, x_n, q_n)$ converge a $\alpha(p, x, q)$. Vamos a probar esto por casos:

Caso I Tomemos una subsucesión de términos $x_n \subseteq H(\infty)$, entonces por continuidad de B y de V , tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha(p_n, x_n, q_n) &= B(V(p_n, x_n), q_n) \rightarrow B(V(p, x), q) \\ &= \alpha(p, x, q).\end{aligned}$$

Caso II Tomemos una subsucesión de términos $x_n \subseteq H(\infty)$ tales que $d(p, x_n)$ no está acotada. Sean $v_n = V(p, x_n)$, $v = V(p, x)$ y $s_n = d(p, x_n)$. Entonces, tenemos que $s_n \rightarrow \infty$ y v_n está bien definido. Así

$$\begin{aligned}\alpha(p_n, x_n, q_n) &= d(q_n, x_n) - d(p_n, x_n) \\ &= d(q_n, \gamma_{v_n} s_n) - s_n + d(p, x_n) - d(p_n, x_n) \\ &= B_{s_n}(v_n, q_n) + d(p, x_n) - d(p_n, x_n)\end{aligned}$$

como $v_n \rightarrow v$, $p_n \rightarrow p$, $q_n \rightarrow q$ y $B_{s_n} \rightarrow B$ por el lema 61 en subconjuntos compactos, entonces

$$\begin{aligned}B_{s_n}(v_n, q_n) + d(p, x_n) - d(p_n, x_n) &\rightarrow B(v, q) \\ &= B(V(p, x), q) \\ &= \alpha(p, x, q).\end{aligned}$$

□

Definición 65. Si $\gamma = \gamma_v$ es una geodésica en H , la **función de Busemann** $f_\gamma : H \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f_\gamma(q) = B(v, q) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(q, \gamma t) - t$$

Si $v = V(p, x)$, entonces $f_\gamma(q) = \alpha(p, x, q)$.

Algunas propiedades importantes de las funciones de Busemann se mencionan en la siguiente proposición.

Proposición 66. 1. Para cada geodésica γ , f_γ es una función convexa, uniformemente continua, tal que

$$|f_\gamma(p) - f_\gamma(q)| \leq d(p, q).$$

2. Si γ y β son geodésicas asintóticas, entonces $f_\gamma - f_\beta \equiv f_\gamma(\beta(0))$ en H .

3. Si γ y β son geodésicas asintóticas, entonces $f_\gamma(\beta t) - f_\gamma(\beta s) = s - t$, para cualquier $s, t \in \mathbb{R}$.

Demostración. 1. Es inmediato de la proposición 62.

2. Sean $p, q \in H$ y $x \in H(\infty)$ tales que $\gamma = \gamma_{px}$ y $\beta = \gamma_{qx}$. Vamos a probar que, para cualquier punto $r \in H$, $\alpha(p, x, r) - \alpha(q, x, r) = \alpha(p, x, q)$.

Sea $\{x_n\} \in H$ una sucesión que converge a x , por la proposición 64, tenemos que

$$\alpha(p, x, r) = \lim_{n \rightarrow \infty} [d(r, x_n) - d(p, x_n)]$$

$$\alpha(q, x, r) = \lim_{n \rightarrow \infty} [d(r, x_n) - d(q, x_n)]$$

Así,

$$\begin{aligned} \alpha(p, x, r) - \alpha(q, x, r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [d(q, x_n) - d(p, x_n)] \\ &= \alpha(p, x, q) \end{aligned}$$

3. Para cualquier geodésica β , tenemos que

$$f_\beta(\beta s) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\beta s, \beta t) - t = -t$$

Sean β y γ son geodésicas asintóticas, por el punto anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} f_\gamma(\beta t) - f_\gamma(\beta s) &= f_\beta(\beta t) + f_\beta(\beta 0) - f_\beta(\beta s) - f_\beta(\beta 0) \\ &= f_\beta(\beta t) - f_\beta(\beta s) \\ &= s - t. \end{aligned}$$

□

Definición 67. Sea f una función de Busemann en $x \in H(\infty)$ y sea $p \in H$, la **horoesfera** en x a través de p , es el conjunto

$$L(p, x) = \{q \in H : f(q) = f(p)\}.$$

La **horobola** en x determinada por p , es el conjunto

$$N(p, x) = \{q \in H : f(q) < f(p)\}.$$

Como $f_\beta - f_\gamma$ es constante, entonces estas definiciones son independientes de la elección de f en x . La frontera topológica de $N(p, x)$ es $L(p, x)$ y $N(p, x)$ es el subconjunto abierto convexo $\bigcup_{t>0} N_t(\alpha t)$, donde α es la geodésica, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(\infty) = x$.

Si L es un horoesfera en x , entonces cada geodésica $\gamma \in x$ interseca a L en un único punto. Además, $L = f_\gamma^{-1}(a)$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Sea $\eta_L : H \rightarrow L$ la función que manda al punto $p \in H$, al único punto en el cual γ_{px} interseca a L . Llamaremos a η_L la **proyección en L** .

Proposición 68. *Sea $p \in H$ y L es una horoesfera en x , entonces η_L es el único punto de L más cercano a p .*

Demostración. Sea f una función de Busemann tal que $L = f^{-1}(0)$. Supongamos que p está dentro de L , es decir, $f(p) < 0$. Sea α la geodésica que une p con x , parametrizada de tal forma que $\alpha(0) = \eta(p)$, donde $\eta = \eta_L$. Entonces, si $a = d(p, \eta(p))$, tenemos que $p = \alpha(a)$. Sea $q \neq \eta(p)$ cualquier otro punto de L , la función $t \mapsto d(q, \alpha t) - t$ decrece estrictamente a cero. En particular,

$$d(q, p) - d(\eta(p), p) = d(q, \alpha(a)) - a > 0.$$

Supongamos ahora que p está fuera de L , es decir, $f(p) > 0$. Sea α la geodésica que une a p con x , parametrizada de tal forma que $\alpha(0) = \eta(p) \in L$ y sea $q \neq \eta(p)$ cualquier otro punto de L . Por la ley de cosenos, tenemos que $\angle_{\eta(p)}(q, \alpha t) \leq \pi/2$ para cualquier $t > 0$. Así $\angle_{\eta(p)}(q, q) \geq \pi/2$ y

$$d(q, p)^2 \geq d(p, \eta(p))^2 + d(q, \eta(p))^2 - 2d(p, \eta(p))d(q, \eta(p))\cos(\angle_{\eta(p)}(p, q)),$$

por lo tanto,

$$d(p, \eta(p)) < d(q, p).$$

□

Corolario 69. *Sean L y L' dos horoesferas en $x \in H(\infty)$ y sea f una función de Busemann en x . Entonces, para cualesquiera puntos $p \in L$ y $p' \in L'$*

$$d(L, L') = d(p, L') = d(p', L) = |fL - fL'| = |f(p) - f(p')|.$$

Demostración. Sea $\eta_{L'}$ la proyección en L' . Como $\eta_{L'}(p)$ está en la geodésica γ_{px} , entonces por la proposición 66.3 y por la proposición 68 que

$$d(p, L') = d(p, \eta_{L'}(p)) = |f(p) - f(\eta_{L'}(p))| = |f(p) - f(p')|$$

la última igualdad se da porque $f(\eta_{L'}(p)) = f(p')$. Análogamente, si η_L es la proyección sobre L y $\eta_L(p') \in L$, tenemos

$$d(p', L) = d(p', \eta_L(p')) = |f(p') - f(\eta_L(p'))| = |f(p') - f(p)|.$$

□

El resultado anterior, lo que nos dice es que dos horoesferas centradas en el mismo punto $x \in H(\infty)$ son “paralelas”.

Sea f una función convexa en M . Una geodésica f -**monótona** es una geodésica, en la cual f es monótona no creciente.

Proposición 70. *Sea f una función convexa en una variedad completa M . Para cada punto $m \in M$, existe una geodésica f -monótona que empieza en m , tal que el rayo positivo γ^+ es minimal.*

Demostración. Ver sección 9 de R.L Bishop y B. O’Neill [4]. □

Proposición 71. *Sea f una función convexa en una variedad completa M . Una geodésica asintótica a una geodésica f -monótona es f -monótona.*

Demostración. Sea α asintótica a la geodésica f -monótona σ y sea $\{\alpha_i\}$ una sucesión aproximante con $\alpha_i(s_i) = \sigma(t_i)$. Fijemos $s \geq 0$. Como $f \circ \alpha_i$ es convexa, para $s_i \geq s \geq 0$ tenemos que

$$f(\alpha_i(s)) \leq \max\{f(\alpha_i(0)), f(\alpha_i(s_i))\}.$$

Pero

$$\begin{aligned} f(\alpha_i(s_i)) &= f(\sigma(t_i)) \\ &\leq f(\sigma(0)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando el límite obtenemos

$$f(\alpha(s)) \leq \max\{f(\alpha(0)), f(\sigma(0))\}.$$

Así, como $f \circ \alpha$ es convexa, entonces α es f -monótona. □

Lema 72. *Sea H una variedad Hadamard que satisface la siguiente condición: para cualesquiera dos puntos $x \neq y \in H(\infty)$ existe al menos una geodésica que une a x con y . Sea $x \in H(\infty)$. Si f es cualquier función de Busemann en x y si σ es cualquier geodésica en H tal que $\sigma(\infty) \neq x$, entonces $f(\sigma t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sea σ una geodésica en H tal que $\sigma(\infty) \neq x$ y sea β una geodésica en H tal que $\beta(-\infty) = \sigma(\infty)$ y $\beta(\infty) = x$. Por la proposición 66

$$f(\beta t) = f(\beta(0)) - t$$

y así $f(\beta t) \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow -\infty$. Como las geodésicas σ y β^{-1} son asintóticas y f es convexa, entonces $f(\sigma t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, ó $f(\sigma t)$ es monótona no creciente y aplicando la proposición 71 $f(\sigma t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. □

Proposición 73. *Sean H una variedad de Hadamard, $x \in H(\infty)$ y f una función de Busemann en x . Entonces, f es C^1 y $\text{grad}(f) = -X$, donde $X(p) = V(p, x)$.*

Demostración. Sección 3 de P. Eberlein y B. O’Neill [13]. □

3.1.3. Variedades de Visibilidad

En una variedad de Hadamard H , tenemos que dados dos puntos $p \neq q$, existe una única geodésica γ_{pq} de p a q . El objetivo de esta sección es ver cómo se puede extender esto a $\bar{H} = H \cup H(\infty)$. Si $p \in H$ y $x \in H(\infty)$ ya vimos que existe siempre una única geodésica γ_{px} que los une. ¿Qué pasa cuando $x \neq y$ están en $H(\infty)$?

Definición 74. Una variedad de Hadamard H satisface

Axioma 1 Si para cualesquiera puntos $x \neq y$ en $H(\infty)$ existe al menos una geodésica que une a x con y .

Axioma 2 Si para cualesquiera puntos $x \neq y$ en $H(\infty)$ existe a lo más una geodésica que une a x con y .

El axioma 1 es cierto si la curvatura seccional de H satisface $K \leq c < 0$ y el axioma 2 es cierto si $K < 0$. Llamamos a las geodésicas α y β **equivalentes**, si $\{\alpha(\infty), \alpha(-\infty)\} = \{\beta(\infty), \beta(-\infty)\}$. Así, el axioma 2 nos dice que geodésicas equivalentes son la misma excepto por reparametrización. Una propiedad equivalente al axioma 1 es la siguiente.

Definición 75. Una variedad H satisface el **Axioma de Visibilidad**, si dado $p \in H$ y $\varepsilon > 0$, existe un número $r = r(p, \varepsilon)$ con la propiedad siguiente: si $\sigma : [a, b] \rightarrow H$ es un segmento geodésico tal que $d(p, \sigma) \geq r$, entonces $\angle_p(\sigma a, \sigma b) \leq \varepsilon$.

El Axioma de Visibilidad es cierto también para rayos geodésicos o geodésicas maximales. Por continuidad de los ángulos, el mismo $r = r(p, \varepsilon)$ funciona.

Una sucesión $\{\gamma_n\}$ de geodésicas en H , **converge** a una geodésica γ , $\{\gamma_n\} \rightarrow \gamma$, si para una parametrización adecuada, los vectores tangentes $\{\gamma'_n(0)\}$ convergen en SH a $\gamma'(0)$. Si cada elemento de una sucesión de geodésicas interseca a un conjunto compacto de H , entonces existe una subsucesión convergente.

Proposición 76. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *La variedad H satisface el Axioma de Visibilidad.*
2. *Sea $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow H$ una sucesión de geodésicas en H , $-\infty \leq a_n < b_n \leq \infty$. Si $\gamma_n(a_n) \rightarrow x$ y $\gamma_n(b_n) \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde x, y son puntos distintos de $H(\infty)$, entonces cada geodésica γ_n interseca a algún conjunto compacto K de H . Por lo tanto, alguna subsucesión de $\{\gamma_n\}$ converge a una geodésica que une a x con y .*

Demostración. Primero, supongamos que se cumple el Axioma de Visibilidad para un punto $p \in H$. Por continuidad de los ángulos, la sucesión $\{\angle_p(\gamma_n a_n, \gamma_n b_n)\}$ converge a $\angle_p(x, y)$.

Como $x \neq y$, $\angle_p(x, y) > 0$. Por el Axioma de Visibilidad para rayos geodésicos, existe un número $r > 0$ tal que $d(p, \gamma_n) \leq r$ para cada entero n , por lo tanto, la bola con centro p y radio r , $B_r(p)$, interseca a cada γ_n . Tomando una subsucesión si es necesario y una parametrización adecuada, podemos encontrar que $\{\gamma'_n(0)\}$ converge a un vector $v \in S(q)$, así $\gamma_n \rightarrow \gamma_v$. Por la proposición 3, la sucesión $\{\gamma'_n(0)\} = \{V(\gamma_n 0, \gamma_n b_n)\}$ converge a $V(q, y)$ y la sucesión $\{-\gamma'_n(0)\} = \{V(\gamma_n 0, \gamma_n a_n)\}$ converge a $V(q, x)$. Por lo tanto, γ_v une a x con y . Para probar que (2) implica (1), supongamos que el Axioma de Visibilidad falla. Entonces, para algún punto $p \in H$ y algún $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ de geodésicas de H tal que $d(p, \gamma_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\angle_p(\gamma_n a_n, \gamma_n b_n) \geq \varepsilon$, para cada n . Tomando una subsucesión si es necesario, $\{\gamma_n(a_n)\} \rightarrow x \in H(\infty)$, $\{\gamma_n(b_n)\} \rightarrow y \in H(\infty)$ y $\angle_p(x, y) \geq \varepsilon > 0$, por lo tanto $x \neq y$. Pero por 2, cada γ_n interseca a un conjunto compacto y esto contradice la hipótesis de que $d(p, \gamma_n) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

La proposición anterior lo que nos dice es que el Axioma de Visibilidad implica el Axioma 1, también se puede probar el converso. Si $M = H/D$ es una variedad completa, de curvatura seccional $K \leq 0$, tal que H satisface el Axioma 1, llamaremos a M una **Variedad de Visibilidad**.

Corolario 77. *Si H satisface el Axioma 1, entonces para cualesquiera dos puntos $x \neq y$ de $H(\infty)$, existe un conjunto compacto K de H , tal que cada geodésica que une x con y interseca a K .*

Un punto $x \in H(\infty)$ es **especial**, si para cualquier $\gamma \in x$, existe un conjunto compacto $K \subseteq H$ tal que para valores positivos, arbitrariamente grandes de t , γ interseca a $I(H)K = \{\varphi(k) : k \in K \text{ y } \varphi \text{ es una isometría de } H\}$. Por la relación de asintoticidad es suficiente verificar esta propiedad para una única geodésica. Si H es homogéneo o tiene cociente compacto H/D , entonces cada punto de $H(\infty)$ es especial.

Sean x, y puntos distintos de $H(\infty)$, denotaremos por $x \wedge y$ al conjunto de todas las geodésicas que unen a x con y . Se dice que el par (x, y) está **acotado**, si existe un conjunto compacto $K = K(x, y)$, tal que cualquier geodésica en $x \wedge y$ interseca a K . Si $x \wedge y$ es vacío, el par (x, y) también se dice que está acotado. Se dice que la variedad H es **geodésicamente acotada**, si cada par $(x, y) \in H(\infty) \times H(\infty)$ con $x \neq y$ está acotado. Si H satisface el Axioma 1 o el Axioma 2, entonces H es geodésicamente acotado.

Un punto $x \in H(\infty)$ es **acotado**, si existe $C > 0$ tal que $d(\gamma, \sigma) \leq C$ para cualesquiera dos geodésicas $\gamma, \sigma \in x$. Por la convexidad de la función $t \rightarrow d(\gamma t, \sigma)$ podemos concluir que cada punto de $H(\infty)$ es acotado y así H es geodésicamente acotado.

Lema 78. *Sean α y β geodésicas de H tales que $\alpha(\infty) = \beta(\infty) = x$. Si $\{p_n\}$ es cualquier sucesión en H que converge a x , entonces*

$$\angle_{p_n}(\alpha(-\infty), \beta(-\infty)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Demostración. Sean $q \in \alpha$ y $q^* \in \beta$. Por la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo

$$\begin{aligned}\angle_{p_n}(q^*, \beta(-\infty)) &\leq \angle_{q^*}(p_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \angle_{p_n}(q, \alpha(-\infty)) &\leq \angle_q(p_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Como $\angle_{p_n}(q, q^*) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por la ley de cosenos tenemos que

$$\angle_{p_n}(\alpha(-\infty), \beta(-\infty)) \leq \angle_{p_n}(\alpha(-\infty), q) + \angle_{p_n}(q, q^*) + \angle_{p_n}(q^*, \beta(-\infty)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Proposición 79. *Sea H geodésicamente acotado y sea $x \in H(\infty)$ un punto especial. Entonces x está acotado.*

Demostración. Ver proposición 4.10 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. □

Por una **banda plana** en H , nos referiremos a un encaje isométrico totalmente geodésico $x : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow H$. Cada **curva longitudinal** $\alpha_u(t) = x(t, u)$ de x es una geodésica de H . Las bandas planas están únicamente determinadas por sus **curvas frontera** α_a y α_b . Debemos notar, que todas las geodésicas longitudinales de x son equivalentes, ya que tienen los mismos puntos finales en $H(\infty)$.

Proposición 80. *Si geodésicas distintas $\alpha, \beta \in H$ son equivalentes, entonces son las curvas frontera de una banda plana en H .*

Demostración. Ver sección 5 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. □

Corolario 81. *Si $K < 0$ entonces H satisface el Axioma 2.*

3.1.4. Clasificación de las Isometrías

Nos interesa ahora, estudiar las isometrías de una variedad de Hadamard H individualmente y como elementos de un grupo propiamente discontinuo, con énfasis en los puntos fijos al infinito.

Sea H una variedad de Hadamard y sea φ una isometría de H , definimos la **función de desplazamiento** de φ como

$$d_\varphi(p) := d(p, \varphi p).$$

La **longitud de traslación** de φ , es el número

$$|\varphi| := \inf\{d_\varphi(p) : p \in H\}.$$

El conjunto de puntos donde d_φ alcanza su ínfimo lo denotaremos por $\text{Min}(\varphi)$. Si D es un grupo actuando por isometrías en H , entonces

$$\text{Min}(D) := \bigcap_{\varphi \in D} \text{Min}(\varphi).$$

Proposición 82. *Si H es una variedad Hadamard, la función de desplazamiento d_φ es convexa y así, $\text{Min}(\varphi)$ es un conjunto cerrado convexo.*

Demostración. La prueba se sigue del hecho que la función distancia en espacios CAT(0) es convexa (Proposición 50). \square

La función desplazamiento divide al grupo de isometrías de H en tres clases:

- (a) Decimos que φ es **elíptica**, si d_φ tiene mínimo cero en H .
- (b) Decimos que φ es **hiperbólica** (o axial), si d_φ tiene mínimo estrictamente positivo en H .
- (c) Decimos que φ es **parabólica**, si d_φ no tiene mínimo en H , es decir, si Min_φ es vacío.

Teorema 83. *Sea H una variedad Hadamard. Una isometría φ de H es hiperbólica si y sólo si φ traslada una geodésica γ , es decir, $\varphi(\gamma t) = \gamma(t + a)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y algún $a \neq 0$. El conjunto $\gamma(\mathbb{R})$ se llama **eje** de φ . Para tal eje, el número a es igual a $|\varphi|$.*

Demostración. Ver Teorema 6.8 de R. Bridson y A. Haefliger [6]. \square

Lema 84. *Cada isometría no elíptica φ de H tiene un punto fijo en $H(\infty)$.*

Demostración. El resultado es inmediato aplicando el Teorema del punto fijo de Brouwer a \overline{H} . \square

Lema 85. *Sea φ una isometría de H . Si $p \in H$, entonces cualquier punto de acumulación en $H(\infty)$ del conjunto $\{\varphi^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un punto fijo de φ .*

Demostración. Supongamos que $\{\varphi^{n_k}(p)\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \in H(\infty)$. Por continuidad

$$\{\varphi^{n_k+1}(p)\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$$

Pero

$$d(\varphi^{n_k+1}(p), \varphi^{n_k}(p)) = d(\varphi(p), p)$$

Así, por la ley de cosenos

$$\angle_p(\varphi^{n_k}(p), \varphi^{n_k+1}(p)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Por lo tanto, $\varphi(x) = x$. \square

Lema 86. *Sea f una función convexa en una variedad de Hadamard H , y sea $x \in H(\infty)$. Entonces, f es monótona decreciente en x si y sólo si existe una sucesión $\{p_n\} \in H$ tal que $\{p_n\} \rightarrow x$ y $\{f(p_n)\} \rightarrow \inf(f)$.*

Demostración. Ver sección 11 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Lema 87. *Sea D un grupo de isometrías de H propiamente discontinuas. Sea f una función convexa D -invariante en H . Si $x \in L(D)$, entonces f es monótona decreciente en x .*

Demostración. Ver sección 11 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Proposición 88. *Sea H una variedad de Hadamard que satisface el Axioma 1. Si una función convexa f en H es monótona decreciente en puntos distintos $x, y \in H(\infty)$, entonces f tiene un mínimo. En efecto, existe una geodésica γ uniendo x y y tal que γ esta contenida en el conjunto minimal $\text{mín}(f)$ de f .*

Demostración. Por el lema 87, existen sucesiones minimizantes $\{p_n\} \rightarrow x$ y $\{q_n\} \rightarrow y$. Si σ_n es un segmento geodésico de p_n a q_n , entonces la proposición 76 implica que, pasando a una subsucesión si es necesario, $\{\sigma_n\}$ converge a una geodésica γ que une a x y y . Por convexidad,

$$f \circ \sigma_n \leq \text{máx}\{f(p_n), f(q_n)\},$$

y como son sucesiones minimizantes podemos concluir que $\gamma \subseteq \text{Min}(f)$. \square

Proposición 89. *Sea H una variedad de Hadamard que satisface el Axioma 1. Sea φ una isometría no elíptica que fija puntos distintos x y y de $H(\infty)$. Entonces φ traslada una geodésica uniendo a x con y . Además, x y y son los únicos puntos fijos de φ .*

Demostración. Que φ fije a $x \in H(\infty)$ significa que $\varphi \circ \alpha$ es asintótica a α para todo $\alpha \in x$. Por lo cual, existe $c > 0$ tal que

$$d(\varphi\alpha(t), \alpha(t)) \leq c$$

para todo $t \geq 0$. Entonces, para cada $\alpha \in x$ y para todo $t > 0$, tenemos que

$$d_\varphi(\alpha(t)) = d(\alpha(t), \varphi\alpha(t)) \leq c.$$

Así, del lema 87 tenemos que d_φ es monótona decreciente en x y y . Por la proposición 88 d_φ alcanza su mínimo y existe una geodésica γ uniendo a x y y , con $\gamma \subseteq \text{Min}(d_\varphi)$.

Falta probar que φ traslada a γ . Como d_φ tiene un mínimo en $\gamma(0)$, entonces φ traslada la geodésica β desde $\gamma(0)$ hasta $\varphi\gamma(0)$. Por el corolario 77, podemos escoger $c > 0$ tal que $d(\alpha, \beta) \leq c$, para cualquier par de geodésicas α, β que unen x con y . Entonces

$$\begin{aligned} d(\beta(na), \gamma) &= d(\varphi^n\gamma(0), \gamma) \\ &= d(\varphi^n\gamma, \gamma) \leq c \end{aligned}$$

para cualquier entero positivo n . Así, $\beta(\infty) = \alpha(\infty)$. Por lo tanto, $\beta = \alpha$, ya que ambas geodésicas contienen a $\gamma(0)$.

Finalmente, x, y son los únicos puntos fijos de φ . Si z fuera un tercer punto fijo de φ , entonces φ debería trasladar una geodésica de x a z , pero más adelante se probara que cualesquiera dos ejes de φ tienen los mismos puntos finales (proposición 93 (3)). \square

Teorema 90. *Sea H una variedad de Hadamard que satisface el Axioma 1. Entonces, cada isometría no elíptica de H tiene a lo más dos puntos fijos en $H(\infty)$: uno si es parabólica y dos si es hiperbólica.*

Demostración. Ver sección 6 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. □

Nota 91. (a) $x \in H(\infty)$ fijo por una isometría φ de H y f_γ una función de Busemann en x . Entonces $f_\gamma \circ \varphi = f_{\varphi^{-1}\gamma}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} f_{\varphi^{-1}\gamma}(p) &= \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, \varphi^{-1}\gamma t) - t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(p), \gamma t) - t \\ &= f_\gamma(\varphi(p)). \end{aligned}$$

□

(b) Por la proposición 3, existe un número bien definido $T_x(\varphi)$ que es el valor de la función constante $f \circ \varphi - f$, para cada función de Busemann f en x .

(c) Por el corolario 69

$$\begin{aligned} |T_x(\varphi)| &= |f\varphi(p) - f(p)| \\ &= d(L(\varphi(p), x), L(p, x)) \end{aligned}$$

entonces, $T(\varphi)$ es la distancia signada de $L(p, x)$ a $L(\varphi(p), x)$.

(d) Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) $T_x(\varphi) = 0$
- (2) $f \circ \varphi = f$, para cualquier función de Busemann f en x .
- (3) $\varphi(L) = L$, para cualquier horoesfera L en x .
- (4) $\varphi \circ \eta_L = \eta_L \circ \varphi$, donde η_L es la proyección en L .

Proposición 92. 1. Si $x \in H(\infty)$ es un punto fijo de φ , entonces $|T_x(\varphi)| \leq \inf d_\varphi$. Además, si x es un punto final de un eje α de φ , entonces $|T_x(\varphi)| = \min d_\varphi$.

2. Sea $I_x(H)$ el grupo de isometrías de H que fijan $x \in H(\infty)$. Entonces

$$T_x : I_x(H) \rightarrow \mathbb{R}$$

es un homomorfismo en el grupo aditivo de números reales.

Demostración. 1. Por la proposición 68, para cualquier punto $p \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_\varphi(p) &= d(p, \varphi p) \\ &\geq d(p, L(\varphi p, x)) \\ &= |f(p) - f(\varphi p)| \\ &= |T_x(\varphi)|. \end{aligned}$$

Para el caso axial, si $\varphi(\alpha 0) = \alpha(a)$, entonces $\varphi(\alpha 0)$ es la proyección de $\alpha(0)$ en $L(\varphi\alpha 0, x) = L(\alpha a, x)$. Así,

$$|a| = \text{mín } d_\varphi = d(\alpha 0, L) = |T_x(\varphi)|.$$

2.

$$\begin{aligned} T_x(\varphi \circ \psi) &= f \circ \varphi \circ \psi - f \\ &= [(f \circ \varphi - f) \circ \psi] + [f \circ \psi - f] \\ &= T_x(\varphi) + T_x(\psi). \end{aligned}$$

□

Proposición 93. *Si φ es una isometría hiperbólica de H , entonces:*

1. φ genera un grupo propio y discontinuo.
2. Si α es un eje de φ , entonces para cada orientación adecuada de α ,

$$\varphi^{-n}(p) \rightarrow \alpha(-\infty), \quad \varphi^n(p) \rightarrow \alpha(\infty)$$

para cualquier punto $p \in H$, cuando $n \rightarrow \infty$.

3. Todos los ejes de φ son equivalentes, es decir, tienen los mismos puntos finales.
4. Si una isometría ψ conmuta con una potencia no trivial de φ , entonces ψ fija los dos puntos finales del eje de ψ .

Demostración. 1. Sea φ tal que traslada una geodésica α por $a \neq 0$. Sea $p \in H$ y sea $\alpha(t)$ el pie de p en α . Entonces, $\varphi^n(p)$ es el pie de $\varphi^n(\alpha(t)) = \alpha(t + na)$ en α . El resultado se sigue de lo siguiente, para $n \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} d(p, \varphi^n(p)) &\geq d(\alpha(t), \alpha(t + na)) \\ &= |na| \geq |a|. \end{aligned}$$

2. Sea φ tal que traslada α por $a \neq 0$. Invirtiendo la orientación de α si es necesario, podemos asumir que $a > 0$. Ahora, para cada entero n , tenemos que

$$d(\varphi^n p, \alpha(na)) = d(p, \alpha(0))$$

usando la ley de cosenos, se obtiene el resultado deseado.

3. Es inmediato de 2.
4. Supongamos $\psi\varphi^n = \varphi^n\psi$ con $n > 0$. Si φ traslada α por a , entonces φ^n traslada α por $na > 0$. Como

$$\begin{aligned} \varphi^n\psi(\alpha t) &= \psi\varphi^n(\alpha t) \\ &= \psi(\alpha(t + na)), \end{aligned}$$

entonces φ^n traslada $\psi \circ \alpha$ por na . Usando el argumento de 2, obtenemos el resultado. \square

Proposición 94. *Sea α un eje de una isometría φ de H con puntos finales x y y . Sea ψ una isometría de H que fija uno de esos puntos finales y tal que ψ y φ generan un grupo propio y discontinuo. Entonces ψ conmuta con una potencia de φ , y por lo tanto fija el otro punto final de α .*

Demostración. Supongamos que $\psi(y) = y$, orientemos α de tal forma que $\alpha(\infty) = y$ y, si es necesario, reemplacemos φ por φ^{-1} de tal forma que φ traslade a α por $a > 0$. Sea $p = \alpha(0)$ y sea $n > 0$, entonces

$$\begin{aligned} d(p, \varphi^{-n}\psi\varphi^n(p)) &= d(\varphi^n(p), \psi\varphi^n(p)) \\ &= d(\alpha(na), \psi\alpha(na)). \end{aligned}$$

Como $\psi(y) = y$, entonces α y $\psi\alpha$ son asintóticas y existe $c > 0$ tal que, para cada $n > 0$

$$d(p, \varphi^{-n}\psi\varphi^n(p)) \leq c.$$

Además, por ser propio y discontinuo, $\varphi^{-n}\psi\varphi^n = \varphi^{-m}\psi\varphi^m$, para enteros $m \neq n$. Entonces, ψ conmuta con φ^{m-n} y por la proposición 93 fija a x también. \square

Proposición 95. *Sean φ, ψ isometrías hiperbólicas de H que generan un grupo propiamente discontinuo. Si φ y ψ tienen ejes asintóticos, entonces existen enteros m, n tales que $\varphi^m = \psi^n$. Por lo tanto, los ejes de φ y de ψ son equivalentes.*

Demostración. Orientamos los ejes α, β de tal forma que $\alpha(\infty) = \beta(\infty)$, reemplazando φ y ψ por sus inversos si es necesario. Asumimos que, φ traslada a α por $a > 0$ y que ψ traslada a β por $b > 0$. Entonces, para cada entero $n \geq 1$, sea $\beta(t_n)$ el pie de $\alpha(na)$ en β . Por lo cual, existe un entero $m = m(n)$ tal que $|t_n - mb| < b$. Ahora,

$$\begin{aligned} d(\alpha(0), \psi^{-m}\varphi^n\alpha(0)) &= d(\psi^m\alpha(0), \varphi^n\alpha(0)) \\ &\leq d(\psi^m\alpha(0), \psi^m\beta(0)) + d(\beta(mb), \beta(t_n)) + d(\beta(t_n), \alpha(na)). \end{aligned}$$

Si $c = d(\alpha(0), \beta(0))$ entonces $d(\alpha t, \beta t) \leq c$ para todo $t \geq 0$, por lo tanto,

$$d(\alpha(0), \psi^{-m}\varphi^n\alpha(0)) \leq b + 2c.$$

El resultado se sigue de que el grupo sea propio y discontinuo. \square

Definición 96. Sea D un grupo propiamente discontinuo de isometrías de H . Decimos que D , y la variedad H/D , son **axiales**, si existen puntos distintos $x, y \in H(\infty)$ tales que cada $1 \neq \varphi \in D$ traslada un geodésica de x a y .

Por lo tanto, D es axial si cada $1 \neq \varphi \in D$ es axial y todos sus ejes son equivalentes.

Lema 97. Sean ψ, φ isometrías de H que trasladan una geodésica γ . Sean C_ψ, C_φ los conjuntos minimales de las funciones de desplazamiento d_ψ, d_φ respectivamente. Entonces, ocurre cualquiera de las dos: $C_\varphi \supseteq C_\psi$ o $C_\varphi \cap C_\psi$ es denso en ninguna parte en C_ψ .

Demostración. Ver sección 6 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Definición 98. Un elemento ψ de un grupo D es una **raíz** de $\varphi \in D$, si $\psi^k = \varphi$ para algún entero k . Si $|k| \geq 2$, entonces ψ es una **raíz propia**; se dice que φ no tiene raíces si no tiene raíces propias en D .

Lema 99. Sea D un grupo axial. Entonces, cada elemento de D no tiene raíces.

Demostración. Ver sección 6 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Teorema 100. Un grupo axial D en una variedad arbitraria Hadamard H es cíclico infinito.

Demostración. Primero, notemos que D es abeliano: si x, y son los puntos finales de los ejes de D , entonces por la proposición 92, T_x es un homomorfismo de D en \mathbb{R} cuyo kernel es la identidad. Ahora, por el lema 99, D contiene un elemento sin raíces $\varphi \neq 1$.

Afirmación: φ genera a D : sea $\psi \in D$, por la proposición 95 tenemos que

$$\varphi^m = \psi^n, \tag{3.1}$$

para algunos m, n . Como $D \cong \pi_1(H/D)$ es libre de torsión, podemos asumir que m y n son primos relativos, es decir $mp + nq = 1$. De (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi^{mp} \varphi^{nq} \\ &= \psi^{np} \varphi^{nq} \\ &= (\psi^p \varphi^q)^n\end{aligned}$$

Como φ no tiene raíces entonces, $n = \pm 1$. Por lo tanto, por (3.1) concluimos que ψ es una potencia de φ . \square

Definición 101. Una geodésica de velocidad unitaria $\gamma \in M$ es **casi minimizante**, si existe un número $c > 0$ tal que $d(\gamma 0, \gamma t) \geq t - c$ para todo t . Decimos que una clase asintótica $y \in A(M)$ es **casi minimizante**, si cada geodésica $\gamma \in y$ es casi minimizante. Además, $x \in H(\infty)$ es **casi minimizante**, si $\pi_\alpha(x)$ es casi minimizante.

Proposición 102. *Un punto $x \in H(\infty)$ es casi D -minimizante, si y sólo si $x \in O_h(D) = H(\infty) - L_h(D)$, el conjunto de puntos horocíclicos ordinarios.*

Demostración. Ver sección 7 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Nota 103. (a) Si una isometría φ de H no preserva horoesferas en un punto fijo $x \in H(\infty)$, entonces φ genera un grupo propio y discontinuo.

Demostración. Por hipótesis, $T_x \neq 0$ (nota 91.d). Pero

$$\begin{aligned}d(p, \varphi^n p) &\geq |T_x(\varphi^n)| \\ &= |n| |T_x(\varphi)| \\ &\geq T_x(\varphi).\end{aligned}$$

\square

(b) Sea φ una isometría parabólica que genera un grupo propio y discontinuo. Si φ tiene un único punto fijo $x \in H(\infty)$, entonces para cualquier $p \in H$, las sucesiones $\{\varphi^n(p)\}$ y $\{\varphi^{-n}(p)\}$ convergen a x cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Por el lema 85, x es el único punto de acumulación de cada sucesión. \square

Proposición 104. *Sea D un grupo de isometrías propio y discontinuo, y sea $z \in H(\infty)$ un punto fijo común de D . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $z \in O_h(D)$, es decir, z es casi D -minimizante.

2. Cada elemento de D preserva horoesferas en z .

3. z es D -minimizante.

Demostración. Ver sección 7 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Proposición 105. Si φ es una isometría parabólica de H , entonces φ preserva horoesferas en al menos un punto fijo $x \in H(\infty)$.

Demostración. Sea D el grupo generado por φ . Si D no es propio y discontinuo, por la nota 103 D preserva las horoesferas en todos los puntos fijos de φ .

Supongamos ahora que D es propio y discontinuo. Como D es abeliano, entonces la función de desplazamiento d_φ es D -invariante e induce una función convexa diferenciable f en $M = H/D$ tal que $d_\varphi = f \circ \pi$. Como φ es parabólica, d_φ no tiene mínimo y por lo tanto f tampoco. Por la proposición 70, existe un rayo geodésico α en H tal que $\pi \circ \alpha$ es minimizante y f es monótona decreciente en $\pi \circ \alpha$. Así, d_φ es monótona decreciente en α y $x = \alpha(\infty)$ es un punto fijo de φ que es casi D -minimizante. Como $Dx = x$, por la proposición 104 tenemos el resultado. \square

Definición 106. Una variedad **parabólica** es una variedad completa $M = H/D$ con $K \leq 0$, tal que existe un punto $z \in H(\infty)$ que es el único punto fijo de cada $1 \neq \varphi \in D$.

Definición 107. Una curva continua $\alpha : [0, \infty] \rightarrow M$ es **divergente**, si para cada conjunto compacto K en M , existe $t = t_K$ tal que para $s \geq t$, $\alpha(s) \in M - K$. Si α es una geodésica, entonces α es divergente si y sólo si cada asíntota de α es divergente. Un punto $x \in H(\infty)$ se llama **D -divergente**, si $\pi_\alpha(x)$ es divergente en $M = H/D$.

Definición 108. La función de desplazamiento libre h_φ de una isometría φ de un grupo D propio y discontinuo, se define como el conjunto

$$h_\varphi(p) = \inf\{d_\varphi(\psi p) : \psi \in D\},$$

para cada $p \in H$.

Si σ es un segmento geodésico de p a $\varphi(p)$, entonces $d_\varphi(p)$ es la longitud de $\pi \circ \sigma$, mientras que $h_\varphi(p)$ es el mínimo de las longitudes de los lazos en $\pi(p)$ que son homotópicos libres a $\pi \circ \sigma$.

Lema 109. Sea D un grupo propio y discontinuo y sea $1 \neq \varphi \in D$. Entonces,

1. Para cualquier $p \in H$, existe $\psi \in D$ tal que

$$h_\varphi(p) = d_\varphi(\psi p).$$

2. La función de desplazamiento libre h_φ es uniformemente continua en H .

3. La función de desplazamiento libre h_φ es D -invariante.

Demostración. 1. Sea $r = h_\varphi(p)$. Al ser D propio y discontinuo, existe solo una cantidad finita de elementos distintos $\psi^{-1}\varphi\psi$ tales que

$$d(p, \psi^{-1}\varphi\psi) \leq r + 1.$$

Si $\psi^{-1}\varphi\psi$ corresponde al valor más pequeño, entonces

$$h_\varphi(p) = d_\varphi(\psi p).$$

2. Debemos mostrar que para cualesquiera dos puntos p, q , se tiene

$$|h_\varphi(p) - h_\varphi(q)| \leq 2d(p, q).$$

Sean p, q dados y $\psi \in D$ tal que $h_\varphi(q) = d_\varphi(\psi q)$. Entonces,

$$\begin{aligned} h_\varphi(p) - h_\varphi(q) &\leq d_\varphi(\psi p) - d_\varphi(\psi q) \\ &= d(\psi p, \varphi\psi p) - d(\psi q, \varphi\psi q) \\ &\leq d(\psi p, \psi q) + d(\varphi\psi p, \varphi\psi q) \\ &= 2d(p, q). \end{aligned}$$

Intercambiando p y q obtenemos el resultado.

3. Es inmediato. □

Teorema 110. *Sea H geodésicamente acotado. Entonces, un punto fijo x de una isometría parabólica φ es D -divergente para cualquier grupo D propio y discontinuo que contiene a φ .*

Demostración. Si x no es especial, entonces cualquier geodésica en $\pi_\alpha(x)$ es divergente en $M = H/D$.

Si x es especial, por la proposición 79, x es acotado y existe $c > 0$, tal que $d(\gamma, \sigma) \leq c$ para cualesquiera dos geodésicas $\gamma, \sigma \in x$. Sea K un conjunto compacto de M y sea

$$K_c = \{q \in M : d(q, k) \leq 2c\}$$

. Lo que queremos probar es que toda geodésica de $\pi_\alpha(x)$ en algún momento se sale de K , para esto es suficiente probar que una geodésica de $\pi_\alpha(x)$ se sale de K_c en algún momento. Entonces, como K_c es compacto y h_φ es continua y D -invariante, h_φ alcanza su valor mínimo

b en $\pi^{-1}(K_c)$. Por el lema 109, d_φ toma el valor b en algún punto. Además, como d_φ no tiene mínimo, existe $p \in H$ tal que $d_\varphi < b$.

Sea γ el rayo geodésico γ_{px} . Como φ fija a x , d_φ es monótona decreciente en γ . Si $\gamma(t) \in \pi^{-1}(K_c)$ para algún $t \geq 0$, entonces

$$d_\varphi(p) < b \leq h_\varphi(\gamma t) \leq d_\varphi(\gamma t) \leq \gamma_\varphi(p)$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto γ no interseca a $\pi^{-1}(K_c)$ y así $\pi \circ \gamma$ no interseca a K_c . \square

Sea $A(D)$ el conjunto de puntos fijos de los elementos axiales de D y sea $P(D)$ el conjunto de puntos fijos de los elementos parabólicos de D . Y recordemos que el conjunto de puntos ordinarios es $O(D) = H(\infty) - L(D)$.

Definición 111. Dos puntos $x, y \in H(\infty)$, no necesariamente distintos, se dice que son **duales** relativos a D siempre que, dadas vecindades U, V de x, y respectivamente en \overline{H} , existe $\varphi \in D$ tal que $\varphi(\overline{H} - U) \subseteq V$ y por lo tanto $\varphi^{-1}(\overline{H} - V) \subseteq U$.

Proposición 112. Sea H una variedad que satisface el Axioma 1. Sean $x, y \in H(\infty)$ y sea $\{\varphi_n\} \subseteq D$ una sucesión tal que para $p \in H$ tenemos $\varphi_n(p) \rightarrow y$ y $\varphi_n^{-1}(p) \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, x y y son duales. Más aún, si U y V son vecindades en \overline{H} de x y y respectivamente, entonces para n suficientemente grande $\varphi_n(\overline{H} - U) \subseteq V$ y $\varphi_n^{-1}(\overline{H} - V) \subseteq U$.

Demostración. Ver sección 8 de P. Eberlein y B. O'Neill [13]. \square

Proposición 113. Sea H una variedad de Hadamard que satisface el Axioma 1 y sea X un subconjunto no vacío de $H(\infty)$ invariante bajo $1 \neq \varphi \in D$. Entonces, X consiste de uno, dos o infinitos puntos. Y si X es finito, φ fija cada punto de X .

Demostración. Si X es finito, entonces alguna potencia de φ fija cada punto de X , además, $D \cong \pi_1(H/D)$ es libre de torsión. Por lo tanto, X puede contener a lo más dos puntos, ya que $\varphi^n \neq 1$ fija a lo más dos puntos. Si X consta de un punto, entonces es claro que φ lo fija. Supongamos que $X = \{x, y\}$, si φ fija alguno de los dos puntos, entonces fija al otro. Si φ no fija ninguno de los dos puntos, entonces debe fijar algún punto z distinto de x, y ; pero φ^2 debe fijar a x, y y z , lo cual es una contradicción al teorema 90. \square

Nota 114. Sea H tal que satisface el Axioma 1, entonces las posibles cardinalidades para una órbita $D(x)$ son 1, ∞ ; para $L(D)$ son 1, 2, ∞ ; para $P(D)$ son 0, 1, ∞ ; para $A(D)$ son 0, 2, ∞ .

Los resultados mencionados anteriormente con respecto a las isometrías elípticas, axiales y parabólicas se pueden resumir en las siguientes tres proposiciones, las pruebas detalladas se encuentran en la sección 8 de P. Eberlein y B. O'Neill [13].

Proposición 115. *Sea H una variedad Hadamard que satisface el Axioma 1, entonces para cualquier grupo D , los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) $L(D)$ consta de un solo punto, $\{x\}$.
- (2) D tiene un único punto fijo común, x .
- (3) H/D es parabólica.
- (4) Cada $1 \neq \varphi \in D$ es parabólica.

Proposición 116. *Sea H una variedad que satisface el Axioma 1, entonces los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier grupo D :*

- (1) $L(D)$ consiste de dos puntos x y y .
- (2) D tiene exactamente dos puntos fijos comunes x y y .
- (3) H/D es axial y D es cíclico infinito.

Una variedad de visibilidad que no es axial ni parabólica se llama **fuchsiana**.

Proposición 117. *Sea H una variedad que satisface el Axioma 1, entonces los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier grupo D :*

- (1) $L(D)$ es un conjunto infinito.
- (2) D no tiene puntos fijos comunes.
- (3) H/D es fuchsiana.
- (4) $A(D)$ es infinito.

Para H y D arbitrarios y $x \in H(\infty)$, denotamos al grupo estabilizador por $D_x := \{\varphi \in D : \varphi(x) = x\}$. Sea $M = H/D$ una variedad de visibilidad, de los resultados anteriores tenemos que, los elementos no identidades de los grupos estabilizadores son todos parabólicos o todos axiales. En el último caso, los ejes son todos equivalentes y D_x es cíclico infinito. Entonces, las variedades de visibilidad H/D axiales o parabólicas son exactamente aquellas para las cuales D mismo es el único grupo estabilizador.

Proposición 118. *Sea $M = H/D$ fuchsiana, entonces*

1. $D \cong \pi_1(M)$ es la unión disjunta (excepto por $\{e\}$) de sus grupos estabilizadores D_x , $x \in H(\infty)$.

2. Los grupos estabilizadores son permutados por automorfismos internos: $\varphi D \varphi^{-1} = D_\varphi$. Además, $D_{\varphi x} = D_x$ si y sólo si $\varphi \in D_x$.

Demostración. 1. Si $1 \neq \varphi \in D_x \cap D_y$, entonces por la proposición 89, φ traslada una geodésica uniendo a x con y . Así, por la proposición 94 tenemos que $D_x = D_y$, es un grupo axial.

2. Si $\varphi \notin D_x$, entonces la condición $D_{\varphi x} = D_x$ implica como en el punto 1, que existe un eje γ de x a φx . Como los ejes γ y $\varphi \circ \gamma$ tienen el mismo punto final $\varphi(x)$, entonces por la proposición 95 tenemos que γ y $\varphi \circ \gamma$ son equivalentes, y así $\varphi^2(x) = x$. Además, como φ deja invariante el conjunto $\{x, \varphi(x)\}$, la proposición 113 implica que φ fija a x , lo cual es una contradicción. □

Definición 119. Sea $D \subseteq I(H)$ un grupo discreto y sea $p \in H$ un punto no fijo de cualquier elemento elíptico de D , definimos

$$R_p := \{q \in H : d(p, q) \leq d(\varphi p, q) \text{ para todo } \varphi \in D\}.$$

El conjunto R_p se llama el **dominio fundamental de Dirichlet o canónico** para D con centro p .

Es fácil verificar que $H = \bigcup_{\varphi \in D} \varphi(R_p)$ y que dos copias $\varphi(R_p)$ y $\psi(R_p)$ se intersecan en a lo más un subconjunto de la frontera de cada uno.

Si D tiene elementos no elípticos, entonces $M = H/D$ es una variedad diferenciable y un rayo geodésico $\gamma : [0, \infty) \rightarrow H$ con $\gamma(0) = p$ está contenido en R_p si y sólo si el rayo geodésico $\pi \circ \gamma$ minimiza la distancia en M entre cualesquiera dos de sus puntos.

Proposición 120. Sea δ una transformación de deck del espacio cubriente simplemente conexo $\pi : M_1 \rightarrow M$, donde M es una variedad completa de curvatura seccional no positiva $K \leq c < 0$, entonces una de los dos enunciados siguientes se cumple:

1. $\inf d_\delta = 0$.
2. δ traslada geodésicas.

Demostración. Ver sección 10 de R.L Bishop y B. O'Neill [4]. □

3.1.5. Fines

Recordemos que una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos se llama **propia** si $f^{-1}(C) \subseteq X$ es compacto cuando $C \subseteq Y$ es compacto.

Definición 121. Sea X un espacio topológico. Un rayo en X es una función $r : [0, \infty) \rightarrow X$. Sean $r_1, r_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ rayos propios, decimos que r_1, r_2 **convergen al mismo final** si para cada compacto $C \subseteq X$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 [N, \infty)$ y $r_2 [N, \infty)$ están contenidos en la misma componente por trayectorias de $X \setminus C$.

Esto define una relación de equivalencia entre rayos propios continuos. La clase de equivalencia de r se denota por $\text{end}(r)$ (si no hay confusión vamos a denotarla también por E) y el conjunto de clases de equivalencia por $\text{Ends}(X)$. Si la cardinalidad de $\text{Ends}(X)$ es m , decimos que X tiene m **fines** o m **puntas**.

La convergencia en fines, se define por

$$\text{end}(r_n) \rightarrow \text{end}(r)$$

si y sólo si, para cada conjunto compacto $C \subset X$, existe una sucesión de enteros N_n tales que $r_n [N_n, \infty)$ y $r [N_n, \infty)$ están en la misma componente por trayectorias de $X \setminus C$, cuando n es suficientemente grande.

La topología en $\text{Ends}(X)$ se define con sus conjuntos cerrados. Un subconjunto $B \subset \text{Ends}(X)$ se define como cerrado si satisface la siguiente condición: si $\text{end}(r_n) \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{end}(r_n) \rightarrow \text{end}(r)$ implica que $\text{end}(r) \in B$.

Un final E de M es **parabólico** si existe un rayo geodésico divergente $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ que converge a E , y puede ser expresado como $\pi \circ \bar{\gamma}$, donde $\pi : H \rightarrow M$ es la proyección canónica y la geodésica $\bar{\gamma} \in H$ determina un punto fijo al infinito para algún elemento parabólico $\gamma \in D$.

Definición 122. Un fin E de M tiene un **collar riemanniano**, si existen una vecindad U de E , una subvariedad N de M de codimensión 1, compacta C^2 y un difeomorfismo $F : N \times (0, \infty) \rightarrow U$ de clase C^1 , tales que las curvas $t \mapsto F(n, t)$, con $n \in N$, son geodésicas de velocidad unitaria que minimizan distancia en M y que intersecan cada hipersuperficie $F(N \times \{s\})$ ortogonalmente.

3.1.6. Retículas y grupos nilpotentes

Sea H una variedad riemanniana, simplemente conexa, completa de curvatura seccional no positiva K y sea $I(H)$ el grupo de isometrías de H . Un grupo $\Gamma \subseteq I(H)$ es una **retícula** en H si y sólo si Γ actúa libre, propia y discontinuamente en H y si la variedad cociente $M = H/\Gamma$ tiene volumen finito. Una retícula se dice que es **uniforme** si M es compacta y se dice que es **no uniforme** si M no es compacta.

Decimos que una variedad riemanniana M es **reducible** si M es isométrica a un producto riemanniano $M_1 \times M_2$ de dos variedades de dimensión positiva. Si M no es reducible se dice que es **irreducible**. Análogamente, una retícula Γ en H es **reducible** si $M = H/\Gamma$ tiene una cubierta riemanniana finita M^* que es reducible y se dice que es **irreducible** si no es reducible.

Sea $[A, B] := \{[a, b] = aba^{-1}b^{-1} : a \in A, b \in B\}$ y sea G un grupo, definimos la **serie derivada** de G por

$$\begin{aligned} G^0 &= G \\ G^1 &= [G, G] \\ G^{i+1} &= [G^i, G^i] \\ G^{i+1} &\subset G^i \subset G^{i-1} \subset \dots \subset G \\ G^i &\triangleleft G. \end{aligned}$$

La **serie central** de G la definimos por

$$\begin{aligned} G_0 &= G \\ G_1 &= G^1 \\ G_2 &= [G_1, G] \\ G_{i+1} &= [G_i, G] \\ G_{i+1} &\subset G_i \\ G_i &\triangleleft G. \end{aligned}$$

Definición 123. (a) Decimos que un grupo G es **soluble** si existe n tal que $G^n = \{e\}$.

(b) Decimos que G es **nilpotente** si existe n tal que $G_n = \{e\}$.

Decimos que Γ tiene virtualmente una propiedad P si existe Γ_1 subgrupo de Γ de índice finito tal que Γ_1 tiene la propiedad P .

3.2. Retículas no uniformes en espacios irreducibles

Teorema 124. *Sea H una variedad de visibilidad que satisface la condición de curvatura $-b \leq K \leq 0$. Si Γ es cualquier retícula no uniforme en H , entonces $M = H/\Gamma$ tiene solo un número finito de fines, cada uno es parabólico y tiene un collar riemanniano. En particular, Γ es finitamente presentable.*

Este es el resultado principal de esta sección, antes de proceder con la demostración, probaremos una serie de resultados auxiliares.

Proposición 125. *Sea Γ una retícula en H . Entonces, para cada número positivo δ existe un conjunto compacto $A \subseteq H$ tal que $\Gamma \cdot A = \{\psi(a) : \psi \in \Gamma, a \in A\}$, contiene el conjunto $H_\delta = \{q \in H : d_\Gamma(q) \geq \delta\}$.*

Demostración. El resultado es obvio si Γ es una retícula uniforme.

Supongamos que Γ es una retícula no uniforme. Sea p cualquier punto en $M = H/\Gamma$ y sea t_0 un número positivo tal que

$$\text{vol}(M - B_{t_0}(p)) < \eta,$$

donde η es el volumen de una bola esférica de radio $\delta/3$ en \mathbb{R}^n y

$$B_{t_0}(p) = \{q \in M : d(p, q) \leq t_0\}.$$

Sea $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ y definimos el conjunto $A^* = B_{(t_0+\delta)}(\tilde{p})$ y $A = B_{(t_0+\delta)}(\tilde{p})$.

Afirmación: $H_\delta \subseteq \Gamma \cdot A$. Sea $\tilde{q} \in H_\delta$ dado y supongamos que $\tilde{q} \in H \setminus \Gamma \cdot A$. Si $q = \pi\tilde{q}$, entonces π manda $B_{\delta/3}(\tilde{q})$ isométricamente sobre $B_{\delta/3}(q)$, ya que $d_\Gamma(\tilde{q}) \geq \delta$. Entonces, $B_{\delta/3}(q)$ es disjunto de $B_{t_0}(p)$, ya que $q \in M \setminus A^*$. Así,

$$\eta > \text{vol}(M - B_{t_0}(p)) \geq \text{vol}(B_{\delta/3}(q)) = \text{vol}(B_{\delta/3}(\tilde{q})) \geq \eta$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\tilde{q} \in \Gamma \cdot A$. □

Lema 126. *(Lema de Margulis-Gromov) Sea $n \geq 2$ un entero y sea b un número positivo dado. Entonces, existe un número $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$ con la siguiente propiedad: Sea H una variedad de Hadamard de dimensión n que satisface la condición de curvatura $-b \leq K \leq 0$. Sea Γ cualquier subgrupo discreto de $I(H)$ y p cualquier punto de H . Sea $\Gamma_\varepsilon(p)$ el subgrupo de Γ generado por los elementos $\varphi \in \Gamma$ tales que $d_\varphi(p) < \varepsilon$. Entonces $\Gamma_\varepsilon(p)$ es virtualmente nilpotente; es decir, $\Gamma_\varepsilon(p)$ contiene un subgrupo nilpotente de índice finito.*

Demostración. Ver [16]. □

Lema 127. *Sea H una variedad de visibilidad y $\Gamma \subseteq I(H)$ un subgrupo discreto. Sea N cualquier subgrupo de Γ virtualmente nilpotente, entonces $N \subseteq \Gamma_x = \{\varphi \in \Gamma : \varphi x = x\}$ para algún $x \in H(\infty)$. En particular, los elementos de N son todos hiperbólicos o todos parabólicos. Más aún, si $\text{Fix}(\varphi) = \{z \in H(\infty) : \varphi z = z\}$, entonces $\text{Fix}(\varphi) = \text{Fix}(\psi)$ para cualesquiera dos elementos $\varphi, \psi \in N$.*

Demostración. Consideremos primero el caso donde $N \subseteq \Gamma$ sea un subgrupo nilpotente y escojamos $\varphi \neq 1$ del centro de N . Si x es un punto fijo de φ , entonces así lo es $\psi(x)$ para cada $\psi \in N$, ya que

$$\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \psi(x).$$

Entonces, sabemos por el teorema 90 que una isometría no elíptica φ de H tiene a lo más dos puntos fijos en $H(\infty)$, y por la proposición 113, si N es finito y φ invariante, entonces φ

fija cada punto de N , es decir, $N \subseteq \Gamma_x$ para cada punto fijo x de φ .

Ahora, sea $N \subseteq \Gamma$ virtualmente nilpotente, y sea $N^* \subseteq N$ un subgrupo nilpotente de índice finito en N . Entonces, $N^* \subseteq \Gamma_x$ para algún $x \in H(\infty)$, y por lo tanto, la órbita $N(x)$ es un subconjunto finito de $H(\infty)$. De nuevo, por la proposición 113, $N \subseteq \Gamma_x$.

Si N contiene una isometría hiperbólica y $N \subseteq \Gamma_x$ para algún $x \in H(\infty)$, entonces aplicando las proposiciones 94,95,100 al grupo $D = \Gamma_x$, tenemos que Γ_x es un grupo cíclico infinito de isometrías hiperbólicas. Por lo tanto, N también es un grupo cíclico infinito de isometrías hiperbólicas. En general, los elementos de N son todos hiperbólicos o todos parabólicos.

Ahora, si los elementos son todos hiperbólicos, entonces existe una geodésica $\gamma \in H$ que es trasladada por cada $\varphi \in N$ y $\text{Fix}(\varphi) = \{\gamma(\infty), \gamma(-\infty)\}$. Si N contiene solo elementos parabólicos y $x \in H(\infty)$ se escoge de tal forma que $N \subseteq \Gamma_x$, entonces $\text{Fix}(\varphi) = \{x\}$ para todo $\varphi \in N$. \square

Lema 128. *Sea $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$ el número que aparece en el lema de Margulis-Gromov 126, donde $-b \leq K \leq 0$ en H y n es la dimensión de H . Sea $A \subseteq H$ un conjunto conexo por trayectorias, tal que $d_\Gamma \leq \varepsilon/2$ en cada punto de A . Sean $\varphi, \psi \in \Gamma$ elementos tales que $d_\varphi(r) \leq \varepsilon/2$ y $d_\psi(r') \leq \varepsilon/2$ para puntos $r, r' \in A$. Entonces $\text{Fix}(\varphi) = \text{Fix}(\psi)$.*

Demostración. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ una curva continua con $r = \gamma(0)$ y $r' = \gamma(1)$. Sea X el siguiente conjunto:

$$X = \{t \in [0, 1] : \exists \alpha \in \Gamma \text{ con } d_\alpha(\gamma t) \leq \varepsilon/2 \text{ y } \text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\varphi)\}.$$

Es obvio que X contiene al $\{0\}$. Lo que queremos probar es que X y su complemento en $[0, 1]$ son abiertos, y por lo tanto $X = [0, 1]$. Esto significa que existe $\alpha \in \Gamma$ con $d_\alpha(r') \leq \varepsilon/2$ y $\text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\varphi)$, y como α, ψ son elementos de un grupo casi nilpotente $\Gamma_\varepsilon(r')$, por el lema 127 $\text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\psi)$.

Entonces, sea $t \in X$ y tomemos $\alpha \in \Gamma$ tal que $d_\alpha(\gamma t) \leq \varepsilon/2$ y $\text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\varphi)$. Escogemos $\delta > 0$ de tal forma que si $|s - t| < \delta$ entonces $d(\gamma s, \gamma t) < \varepsilon/4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_\alpha(\gamma s) &= d(\gamma s, \alpha \gamma s) \\ &< d(\gamma s, \gamma t) + d(\gamma t, \alpha \gamma t) + d(\alpha \gamma t, \alpha \gamma s) \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

si $|s - t| < \delta$. Ahora, sea s un número tal que $|s - t| < \delta$ y escogemos $\beta \in \Gamma$ de tal forma que $d_\beta = d_\Gamma(\gamma s) \leq \varepsilon/2$. Los elementos $\alpha, \beta \in \Gamma_\varepsilon(\gamma s)$ y por el lema anterior $\text{Fix}(\alpha) = \text{Fix}(\beta) = \text{Fix}(\varphi)$. Por lo tanto, $(t - \delta, t + \delta) \subseteq X$ y X es abierto. Un argumento similar muestra que $[0, 1] \setminus X$ es abierto en $[0, 1]$, con lo cual la prueba esta completa. \square

Lema 129. *Sea $p \in H$ dado y sea R_p el dominio fundamental canónico de Γ con centro en p . Entonces, existe un número finito de rayos geodésicos γ , con $\gamma[0, \infty) \subseteq R_p$ y $\gamma(0) = p$. Más aún, algún elemento parabólico de Γ fija a $\gamma(\infty)$ para cualesquiera de tales rayos geodésicos.*

Demostración. Sea $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$ el número que aparece en el lema de Margulis-Gromov (lema 126), donde $b \leq K \leq 0$ en H y n es la dimensión de H . Por la proposición 125, podemos escoger $R > 0$ tal que $d_\Gamma < \varepsilon/2$ en cada punto de $H \setminus \Gamma \cdot B_R(p)$, donde $B_R(p) = \{q \in H : d(p, q) \leq R\}$. Ahora, sea γ cualquier geodésica de H con $\gamma(0) = p$ y $\gamma[0, \infty) \subseteq R_p$. Entonces, como $d(\gamma t, p) \leq d(\gamma t, \varphi p)$ para todo $t \leq 0$ y para todo $\varphi \in \Gamma$, tenemos que $\gamma(R, \infty) \subseteq H \setminus \Gamma \cdot B_R(p)$.

Afirmación: Si $d_\varphi(\gamma t) < \varepsilon/2$ para algún $t > R$ y algún $\varphi \neq 1$ en Γ , entonces φ es parabólico y $\text{Fix}(\varphi) = \{\gamma(\infty)\}$.

Sea S el siguiente conjunto

$$S = \{1 \neq \varphi \in \Gamma : d_\varphi(\gamma t) < \varepsilon/2 \text{ para algún } t > R\}.$$

Aplicando el lema 128 al conjunto $\gamma(R, \infty)$, tenemos que $\text{Fix}(\varphi) = \text{Fix}(\psi)$ para cualesquiera dos elementos $\varphi, \psi \in S$. Si algún $\varphi \in S$ fuera hiperbólico, entonces por el mismo argumento del lema 127, tendríamos que Γ_x es un grupo cíclico infinito de isometrías que contiene a S , donde x es cualquiera de los puntos fijos de φ . Si α genera a Γ_x y traslada una geodésica σ de H por una cantidad $\delta > 0$, entonces $d_\varphi \geq \delta$ en σ y por lo tanto en H , para cada $\varphi \neq 1$ en $S \subseteq \Gamma_x$. Pero esto contradice el hecho que $d_\Gamma(\gamma t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, todo $\varphi \in S$ es parabólico con un único punto fijo común $x \in H(\infty)$.

Falta ver que $x = \gamma(\infty)$. Sea $\{\varphi_n\} \subseteq S$ una sucesión tal que $d_{\varphi_n}(\gamma(n)) < \varepsilon/2$ para cada entero $n > R$, y fijemos un punto $p \in H$. Si $\{d(p, \varphi_n p)\}$ es una sucesión acotada, como Γ es discreto, solo una cantidad finita de φ_n son distintos. Si $\varphi_n = \varphi \neq 1$ pasando a una subsucesión, $d_\varphi(\gamma(n)) < \varepsilon/2$ para una cantidad infinita de enteros n y como $t \mapsto (d_\varphi \circ \gamma)^2$ es una función convexa en \mathbb{R} , entonces $d_\varphi \circ \gamma$ está acotada en $[0, \infty)$. Por lo tanto, φ fija $\gamma(\infty)$, lo cual implica que $\gamma(\infty) = x$.

Supongamos ahora que la sucesión $\{\varphi_n(p)\}$ es divergente en H . Por la proposición 105, las sucesiones $\{\varphi_n p\}$ y $\{\varphi_n^{-1} p\}$ estan contenidas en la horoesfera $L(p, x)$ y aplicando el lema 72 $\varphi_n p \rightarrow x$ y $\varphi_n^{-1} p \rightarrow x$, cuando $n \rightarrow \infty$. Si $x \neq \gamma(\infty)$, podemos escoger vecindades ajenas U, V de $x, \gamma(\infty)$ respectivamente en \bar{H} . Por la proposición 112, tenemos que

$\varphi_n(\overline{H} - U) \subseteq V$ y $\varphi_n^{-1}(\overline{H} - V) \subseteq U$ para todo n suficientemente grande. Sin embargo, como $\gamma(n) \in V \subset \overline{H} - U$ para n suficientemente grande, obtenemos una contradicción con el hecho que $d_{\varphi_n}(\gamma(n)) < \varepsilon/2$ para n grande. Por lo tanto, $x = \gamma(\infty)$.

Falta mostrar que $\gamma[0, \infty) \subseteq R_p$ y $\gamma(0) = p$ para una cantidad finita de rayos geodésicos γ . Para esto, vamos a suponer lo contrario, es decir que hay una cantidad infinita de estos rayos. Sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de estos rayos geodésicos. Tomando una subsucesión, podemos encontrar un rayo γ tal que $\gamma'_n(0) \rightarrow \gamma'(0)$, $\gamma(0) = p$ y $\gamma[0, \infty) \subseteq R_p$. Por como elegimos a R en el principio de la prueba, tenemos que $d_\Gamma(\gamma t) < \varepsilon/2$ para todo $t > R$ y por continuidad de d_Γ , existe una vecindad conexa por trayectorias U de $\gamma(R+1)$ tal que $d_\Gamma < \varepsilon/2$ en U . Entonces, $\gamma_n(R+1) \in U$ para n suficientemente grande y por todo lo anterior, podemos escoger un elemento parabólico $\varphi_n \in \Gamma$ tal que $d_{\varphi_n}(\gamma_n(R+1)) < \varepsilon/2$ y φ_n fije a $\gamma_n(\infty)$. Aplicando el lema 128 al conjunto U , podemos concluir que $\text{Fix}(\varphi_n) = \text{Fix}(\varphi)$ o $\gamma_n(\infty) = \gamma(\infty)$ para todo n suficientemente grande. Esto implica que $\gamma_n = \gamma$ para n grande, lo cual contradice la hipótesis de que los rayos γ_n eran distintos. Así, solo existe una cantidad finita de rayos geodésicos que emanan de p y que están contenidos en R_p . □

Lema 130. *Sea $p \in H$ fijo y sean $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ los rayos geodésicos en H que emanan de p y están contenidos en R_p . Sea $x_i = \gamma_i(\infty)$, $1 \leq i \leq N$. Entonces, para cada $\delta > 0$, existe una horoesfera invariante L_i en x_i tal que $d_\Gamma < \delta$ en cada punto de la horobola cerrada acotada por L_i .*

Demostración. Sea x cualquiera de los puntos x_1, \dots, x_N y sea $\gamma = \gamma_{px}$ su correspondiente rayo geodésico. Sea $\delta > 0$ dado y $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$ el número de lema 126. Es suficiente considerar el caso donde $0 < \delta < \varepsilon < 1$. Sea η el volumen de una bola de radio $\delta/4$ en \mathbb{R}^n , con $n = \dim H$. Sea $\pi : H \rightarrow M = H/\Gamma$ el mapeo proyección. Si $\text{vol}(\pi B_R(q)) < \eta$ para algún $q \in H$ y algún número $R > \delta/4$, entonces $d_\Gamma(q) < \delta/2$.

Ahora, sea $t_0 > 0$ tan grande para que se cumpla

$$\text{vol}(\pi B_{t_0}(p)) > \text{vol}(M) - \eta.$$

Sea B^* la horobola cerrada, acotada por la horoesfera $L(\gamma(1+t_0), x)$, entonces como $\pi \circ \gamma$ es minimizante en M sobre el intervalo $[0, \infty)$, tenemos que $\pi(B^*)$ es disjunta de $\pi B_{t_0}(p)$. Así, el $\text{vol}(\pi B^*) < \eta$. Sea B una horobola cerrada, concéntrica en x que está dentro de B^* con $d(B, B^*) \geq 1$. Para cada $q \in B$, tenemos que $B_1(q) \subseteq B^*$ y por lo tanto, $\text{vol}(\pi B_1(q)) < \eta$, de donde $d_\Gamma(q) \leq \delta/2$.

Falta ver que $L = \partial B$ es la horoesfera invariante en x . Supongamos que $\varphi(B) \cap B$ es no vacío para algún $1 \neq \varphi \in \Gamma$ y escogemos $p^* \in B$ de tal forma que $\varphi p^* = q \in B$. Entonces,

podemos escoger $A, C \in \Gamma - \{e\}$ tales que $d_A(p^*) \leq \delta/2$ y $d_C(q) \leq \delta/2$. Si $\psi = \varphi^{-1}C\varphi$, entonces $d_\psi(p^*) = d_C(q) \leq \delta/2$. Por el lema 129, podemos encontrar un elemento parabólico ξ que fija x y tal que $d_\xi(r) \leq \delta/2 < \varepsilon/2$ para algún punto $r \in \gamma \cap B$. Aplicando el lema 128 a el conjunto B , tenemos que A, C, ψ y ξ son todos parabólicos con un único punto fijo x . Por último, $x = \psi x = (\varphi^{-1}C\varphi)(x)$ o $C(\varphi x) = \varphi x$. Por lo tanto $\varphi x = x$ y $\varphi(B) = B$, ya que φ deja invariante todas las horoesferas en x . □

Lema 131. *Sea x cualquiera de los puntos $x_1, \dots, x_N \in H(\infty)$ del lema 130. Sea $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$ como en el lema de Margulis-Gromov 126. Entonces, para cada geodésica $\gamma \in x$, tenemos que $d_\Gamma > \varepsilon/2$ en algún punto de γ .*

Demostración. La prueba será por contradicción. Usando la notación del lema anterior, el rayo γ_{px} está contenido en R_p . Sea $R > 0$ una constante tal que $d_\Gamma < \varepsilon/2$ en cada punto de $H - \Gamma \cdot B_R(p)$. Entonces, $d(\gamma s, \Gamma \cdot B_R(p)) = s - R$ para algún $s \geq R$ y por el lema 129, existe una isometría parabólica φ que fija x y tal que $d_\varphi(\gamma_{px}(R+1)) < \varepsilon/2$.

Ahora, sea $\gamma \in x$ cualquier geodésica maximal y supongamos que $d_\Gamma < \varepsilon/2$ en cada punto de γ .

Afirmación: Si $d_\psi(\gamma t) \leq \varepsilon/2$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces ψ es parabólica con punto fijo x . Sea $c > 0$ tal que $d(\gamma_{px}s, \gamma s) \leq c$ para todo $s \geq 0$. Para s suficientemente grande, tenemos que el segmento geodésico ρ de $\gamma_{px}s$ a γs está contenido en $H - \Gamma \cdot B_R(p)$. Como φ fija x , entonces $d_\varphi \leq \varepsilon/2$ en el rayo geodésico $\gamma_{px}[R+1, \infty)$. Aplicando el lema 128 al conjunto $\gamma \cup \rho \cup \gamma_{px}[R+1, \infty)$ tenemos que si $d_\psi(\gamma t) \leq \varepsilon/2$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces $\text{Fix}(\psi) = \text{Fix}(\varphi) = \{x\}$. Por lo tanto, ψ debe ser parabólico ya que tiene un único punto fijo $x \in H(\infty)$. Para cada entero positivo n , escogemos $\psi_n \in \Gamma$ de tal forma que $d_{\psi_n}(\gamma(-n)) = d_\Gamma(\gamma(-n)) \leq \varepsilon/2$. Por lo anterior tenemos que ψ_n es parabólico con punto fijo x , y por lo tanto la función convexa $t \mapsto (d_{\psi_n} \circ \gamma)(t)$ es no creciente en t . En particular, $d_{\psi_n} \gamma(0) \leq d_{\psi_n} \gamma(-n) \leq \varepsilon/2$ para cada n . Como Γ es discreto, solo una cantidad finita de elementos $\{\psi_n\}$ son distintos, es decir $\psi_n = \psi \neq 1$ para una cantidad infinita de enteros n . Así, $(d_\psi \circ \gamma) \leq \varepsilon/2$ en $(-\infty, \infty)$ ya que $(d_{\psi_n} \circ \gamma) \leq \varepsilon/2$ en $[-n, \infty)$. Por lo tanto, ψ fija ambos puntos finales de γ , pero esto contradice el hecho que ψ es parabólica con punto fijo x . Con esto, concluimos que $d_\Gamma > \varepsilon/2$ en algún punto de γ para cualquier geodésica $\gamma \in x$. □

Lema 132. *Sea x cualquiera de los puntos $x_1, \dots, x_N \in H(\infty)$ del lema 130 y sea L cualquier horoesfera en x . Entonces L/Γ_x es compacta.*

Demostración. Como Γ_x actúa libre, propia y discontinuamente en L , entonces el espacio topológico cociente L/Γ_x es una variedad \mathcal{C}^2 . Primero, vamos a ver que si L/Γ_x es compacto para una horoesfera L en x , entonces L/Γ_x es compacto para toda horoesfera L en x . Supongamos que L/Γ_x es compacto para una horoesfera L en x , y sea L' otra horoesfera en x . Sea

$q \in L$ fijo y $D_S(q) = \{q \in L : d(p, q) \leq S\}$. Tomamos $\delta > 0$ tal que $L = \bigcup_{\varphi \in \Gamma_x} \varphi(D_S(q))$. Sea $q' = \gamma_{qx} \cap L'$. Entonces $d(L, L') = d(q, q') = R > 0$.

Afirmación: Si $T = 2R + S$, entonces $L' = \bigcup_{\varphi \in \Gamma_x} \varphi(D_T(q'))$; con esto probaríamos que L'/Γ_x es compacto. Sea $r' \in L'$ dado y sea $r = \gamma_{r'x} \cap L$. Sea $\varphi \in \Gamma_x$ tal que $d(\varphi r, q) \leq S$. Entonces $d(r', r) = R$ y así

$$\begin{aligned} d(\varphi r', q') &\leq d(\varphi r', \varphi r) + d(\varphi r, q) + d(q, q') \\ &\leq R + S + R = 2R + S = T. \end{aligned}$$

Ahora, vamos a mostrar que L/Γ_x es compacto para alguna horoesfera L en x . Con la notación del lema 130, tenemos que el rayo geodésico γ_{px} esta contenido en el dominio fundamental R_p y existe un elemento parabólico de Γ que fija a x . Sea $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$, por el lema 130, podemos escoger una horoesfera invariante L en x tal que $d_\Gamma < \varepsilon/4$ en cada punto de la horobola cerrada B que está acotada por L .

Afirmación: Para alguna constante $R > 0$, $L = \bigcup_{\varphi \in \Gamma_x} \varphi(D_R(q))$, donde $q \in L$ esta fijo y $D_R(q) = \{r \in L : d(q, r) \leq R\}$. Supongamos que esta afirmación es falsa, entonces para cada entero positivo n , podemos encontrar $q_n \in L$ tales que $d(\varphi q_n, q) \geq n$ para cada $\varphi \in \Gamma_x$. Escogemos $\psi_n \in L$ de tal forma que $d_\psi(q_n) = d_\Gamma(q_n) \leq \varepsilon/4$. Por la prueba del lema 129, podemos encontrar un punto $r \in \gamma_{px} \cap B$ y una isometría parabólica φ que fija x tal que $d_\varphi(r) < \varepsilon/4$. Aplicando el lema 128 a la horobola cerrada B , tenemos que ψ_n es parabólica con punto fijo x para cada n . En particular, $d_{\psi_n}(\gamma_{q_n x} t) \leq \varepsilon/4$ para cada $t \geq 0$. Por el lema anterior, podemos encontrar t_n tal que $d_\Gamma(\gamma_{q_n x} t_n) = \varepsilon/2$ y $d_\Gamma(\gamma_{q_n x} t) < \varepsilon/2$ para todo $t > t_n$. Como $d_\Gamma(\gamma_{q_n x} t) \leq d_{\psi_n}(\gamma_{q_n x} t) \leq \varepsilon/4$ para $t \geq 0$, entonces $t < 0$. Por lo tanto, q_n es un punto interior del rayo geodésico $\gamma_{q_n^* x}$, donde $q_n^* = \gamma_{q_n x} t_n$.

Ahora, escogemos $\psi_n^* \in \Gamma$ tal que $d_{\psi_n^*}(q_n^*) = d_\Gamma(q_n^*) = \varepsilon/2$. Aplicando el lema 128 al rayo geodésico $\gamma_{q_n^* x}$, tenemos que ψ_n^* es parabólica con punto fijo x . Por la proposición 125, existe un conjunto compacto $C \subseteq H$ tal que $d_\Gamma < \varepsilon/2$ en $H - \Gamma \cdot C$. Así, $q_n^* \in \Gamma \cdot C$ y podemos escoger $\xi_n \in \Gamma$ tal que $r_n = \xi_n(q_n^*) \in C$ para cada n . Sea $\alpha_n = \xi_n \psi_n^* \xi_n^{-1}$ y sea $r_n \rightarrow r \in C$ al pasar a una subsucesión. Entonces, $d_{\alpha_n}(r_n) = d_{\psi_n^*}(q_n^*) = \varepsilon/2$ para cada n . Por lo tanto, $d_{\alpha_n}(r) < \varepsilon$ para n suficientemente grande. Como Γ es discreto, $\alpha_n = \alpha \neq 1$ para cada n al tomar una subsucesión. Sin embargo, α_n es parabólico por construcción, con punto fijo $\xi_n(x)$. Así, $\xi_n = \xi_0 \theta_n$ para cada n , donde $\xi_0 \in \Gamma$ y $\theta_n \in \Gamma_x$.

Como $q_n \in L$ y q_n es un punto interior de $\gamma_{q_n^* x} [0, \infty)$, tenemos que $d(q_n, q_n^*) = d(q_n^*, L)$. Por lo tanto, como $\xi_n q_n^* = r_n \rightarrow r$, tenemos

$$\begin{aligned} d(\xi_n q_n, \xi_n q_n^*) &= d(\xi_n q_n^*, \xi_n L) \\ &= d(r_n, \xi_0 L) \rightarrow d(r, \xi_0 L). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $\{\xi_n q_n\}$ es una sucesión acotada en H y

$$\begin{aligned} \{d(q, \theta_n q_n)\} &= \{d(\xi_n q_n, \xi_0 \theta_n q_n)\} \\ &= \{d(\xi_0 q, \xi_n q_n)\} \end{aligned}$$

es una sucesión de números acotada, lo que contradice la hipótesis que $d(q, \theta_n q_n) \geq n$ para algún n . Entonces, $L = \bigcup_{\varphi \in \Gamma_x} \varphi(D_R(q))$ para algún $R > 0$. Por lo tanto, L/Γ_x es compacto. \square

Demostración. (Teorema 124) Sea $\pi : H \rightarrow M = H/\Gamma$. Fijemos un punto $p \in M$ y un punto $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Para cada fin E de M , existe al menos un rayo geodésico $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$, γ es minimizante y $\gamma(t) \rightarrow E$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow H$ el levantamiento de γ que empieza en \tilde{p} , la propiedad minimizante de γ implica que $\tilde{\gamma} [0, \infty) \subseteq R_{\tilde{p}}$, donde $R_{\tilde{p}}$ es el dominio fundamental de Γ con centro en \tilde{p} . El lema 129 implica que solo puede haber un número finito de rayos geodésicos $\tilde{\gamma}$ que emanan de \tilde{p} y que estén contenidos en $R_{\tilde{p}}$, y en cada caso $\tilde{\gamma}(\infty)$ es fijado por alguna isometría parabólica de Γ . Así, M tiene solo un número finito de fines E y cada uno es parabólico.

Falta probar que cada fin E tiene un collar riemanniano. Sea E un fin de M dado, y sean $\gamma, \tilde{\gamma}$ rayos geodésicos como arriba. Sea $x = \tilde{\gamma}(\infty)$ y $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$, por los lemas 130, 132, podemos encontrar una horoesfera invariante L en x tal que L/Γ_x es compacta y $d_{\Gamma} < \varepsilon/4$ en cada punto de la horobola cerrada, acotada por L . Como el grupo Γ_x actúa libre, propia y discontinuamente en la subvariedad L , entonces $N = \pi(L)$ es una subvariedad compacta \mathcal{C}^2 de M difeomorfa a L/Γ_x y con grupo fundamental Γ_x , ya que la horoesfera L es simplemente conexa e invariante.

Sea \tilde{U} una horobola abierta en x , acotada por L , y sea $U = \pi(\tilde{U})$.

Afirmación: U es una vecindad con collar riemanniano de E . Como L es invariante y L/Γ_x es compacta, entonces $d(L, \varphi L) \geq B$ para todo $\varphi \in \Gamma \setminus \Gamma_x$ y algún $B > 0$. Sea \tilde{V} el conjunto de puntos en H que se encuentran fuera de todas las horoesferas $\varphi(L)$, cuando φ varía sobre Γ , entonces $U = \pi(\tilde{U})$ y $V = \pi(\tilde{V})$ son componentes conexas por trayectorias de $M - N$. Como $N = \pi(L)$ es compacto y U es la componente por trayectorias de $M - N$ que contiene todos los rayos geodésicos $\pi \circ \gamma_{qx}$, con $q \in \tilde{U}$, entonces U es una vecindad de E .

Falta definir la parametrización de collar riemanniano de U . Sea $\tilde{F} : L \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{U}$ dada por

$$\tilde{F}(p, t) = \gamma_{px}(t) = \exp_p(tV(p, x)).$$

Sea f cualquier función de Busemann en x , entonces por la proposición 73, el campo vectorial dado por

$$q \rightarrow V(q, x) = -(\text{grad } f)(q)$$

es \mathcal{C}^1 . Por lo tanto, \tilde{F} es un difeomorfismo \mathcal{C}^1 tal que $\tilde{F}(\psi p, t) = (\psi \circ \tilde{F})(p, t)$ para todo $(p, t) \in L \times (0, \infty)$ y para todo $\psi \in \Gamma_x$. Además, las curvas $t \mapsto \tilde{F}(p, t)$, $p \in L$, son geodésicas de velocidad unitaria pertenecientes a x y que intersecan a cada horoesfera $\tilde{F}(L \times \{s\})$ ortogonalmente para cada s . Así, \tilde{F} induce una función \mathcal{C}^1 , $F : N \times (0, \infty) \rightarrow U$ dada por

$$F(\pi p, t) = (\pi \circ \tilde{F})(p, t),$$

para todo $(p, t) \in L \times (0, \infty)$. La invarianza de L nos asegura que $\varphi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ si y sólo si $\varphi(\tilde{U}) = \tilde{U}$ y $\varphi \in \Gamma_x$. Por lo tanto, F es un difeomorfismo y las curvas $t \mapsto F(n, t)$, $n \in N$, son geodésicas minimizantes de velocidad unitaria de M que intersecan cada hipersuperficie $F(N \times \{s\})$ ortogonalmente. Además, $U_T = F(N \times (T, \infty))$ es una vecindad de collar riemanniano de E para cualquier número positivo T , y así las vecindades de collar riemanniano de E forman una base local. Por lo tanto, E es un fin parabólico de M , con collar riemanniano.

Para cada fin E_i , sea U_i la imagen bajo π de la horobola abierta \tilde{U}_i centrada en x y acotada por L_i . Entonces, la variedad M se puede retraer a

$$M^* = M - \bigcup_{i=1}^k U_i$$

a lo largo de las geodésicas parametrizadas de los conjuntos U_i . Reemplazando cada \tilde{U}_i por una horobola concéntrica pequeña, concluimos que M es difeomorfa al interior de M^* , lo cual implica que Γ es finitamente presentable. \square

3.3. Subgrupos maximales casi nilpotentes de Γ

Lema 133. *Sea H una variedad de visibilidad que satisface la condición de curvatura $-b \leq K \leq 0$, y sea Γ una retícula no uniforme en H . Sea $p \in H$ fijo y sean $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ rayos geodésicos en H que emanan de p y están contenidos en R_p , el dominio fundamental de Γ con centro p . Sea $x_i = \gamma_i(\infty)$, $1 \leq i \leq N$. Si $x \in H(\infty)$ es fijo para algún elemento parabólico de Γ , entonces $x = \varphi(x_i)$ para algún $\varphi \in \Gamma$ y algún i , $1 \leq i \leq N$.*

Demostración. Sea $\pi : H \rightarrow M = H/\Gamma$. Sea $\tilde{\gamma}$ cualquier geodésica de x y sea $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$. Entonces, por el teorema 110 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ es divergente en M y por lo tanto converge a un fin E de M . Por el teorema 124, existe un entero i , $1 \leq i \leq N$ y una horoesfera invariante L en x_i tal que $U = \pi(\tilde{U})$ es una vecindad de collar riemanniano de E , donde \tilde{U} es la horobola abierta en x_i acotada por L . Sea $T > 0$ tal que $\gamma[T, \infty) \subseteq U$ y sea $\varphi \in \Gamma$ tal que $(\varphi \circ \tilde{\gamma})[T, \infty) \subseteq \tilde{U}$. Por el lema 72 tenemos que $\varphi x = (\varphi \circ \tilde{\gamma}) = x_i$, lo que prueba el lema. \square

Corolario 134. *Sea H una variedad que satisface la condición de curvatura $-b \leq K \leq a < 0$ para algunas constantes positivas a, b . Y sea Γ una retícula no uniforme en H . Entonces, los subgrupos maximales casi nilpotentes de Γ son los estabilizadores no triviales Γ_x , con $x \in H(\infty)$. Más aún, cada grupo Γ_x es finitamente generado. Cada subgrupo casi nilpotente no trivial de Γ está contenido en un único subgrupo maximal casi nilpotente.*

Demostración. Por el lema 127, si N es un subgrupo casi nilpotente de Γ , entonces $N \subseteq \Gamma_x$ para algún $x \in H(\infty)$.

Sea $x \in H(\infty)$ dado. Vamos a probar que Γ_x es casi nilpotente y finitamente generado. Asumimos que $\Gamma_x \neq \{e\}$. Si Γ_x contiene un elemento hiperbólico, entonces aplicando las proposiciones 94,95 y 100 o 115,116 y 117, Γ_x es un grupo cíclico infinito de elementos hiperbólicos. Ahora, supongamos que Γ_x contiene solo elementos parabólicos. Por el lema 133, $x = \varphi(x_i)$ para algún $\varphi \in \Gamma$ y algún entero i , $1 \leq i \leq N$. Sea L_i cualquier horoesfera en x_i . Entonces, por el lema 132, L_i/Γ_{x_i} es compacta y por lo tanto Γ_{x_i} tiene un conjunto finito de generadores. Como $\Gamma_x = \varphi\Gamma_{x_i}\varphi^{-1}$, entonces Γ_x tiene un conjunto generador finito ψ_1, \dots, ψ_k . Sea γ cualquier geodésica de x . Por la proposición 120 y el hecho que $K \leq -a < 0$, tenemos que $d_{\psi_i}(\gamma t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, para cada $1 \leq i \leq k$. Para cada i y un t adecuado grande, $d_{\psi_i}(\gamma t) < \varepsilon(n, b)$, lo cual implica que $\Gamma_x \subseteq \Gamma_\varepsilon(\gamma t)$, y por el lema 127 $\Gamma_\varepsilon(\gamma t) \subseteq \Gamma_y$ para algún $y \in H(\infty)$. Por la proposición 118, $\Gamma_z \cap \Gamma_{z'} = \{e\}$ o $\Gamma_z = \Gamma_{z'}$ para puntos distintos z, z' de $H(\infty)$. Por lo tanto, $\Gamma_x = \Gamma_y$ y $\Gamma_x = \Gamma_\varepsilon(\gamma t)$ es casi nilpotente.

Ahora, sea $\Gamma_z \neq \{e\}$ cualquier subgrupo de estabilizadores y sea N un subgrupo casi nilpotente de Γ que contiene a Γ_z . Por el lema 127 tenemos que $\Gamma_z \subseteq N \subseteq \Gamma_{z'}$ para algún $z' \in H(\infty)$. La proposición 118 implica que $\Gamma_z = N = \Gamma_{z'}$, ya que $\Gamma_z \cap \Gamma_{z'} = \Gamma_z$. Entonces, cualquier grupo de estabilizadores $\Gamma_z \neq \{e\}$ es un subgrupo maximal casi nilpotente de Γ , y por el lema 127, cualquier subgrupo maximal casi nilpotente de Γ debe ser un grupo de estabilizadores Γ_z .

Finalmente, si Γ_x y Γ_y son dos subgrupos casi nilpotentes de Γ que contienen un subgrupo dado casi nilpotente N de Γ , entonces $\Gamma_x \cap \Gamma_y \supseteq N$, lo cual implica que $\Gamma_x = \Gamma_y$. □

Capítulo 4

Gráficas de grupos

4.1. Conceptos básicos de gráficas y árboles

En esta sección introducimos algunos resultados básicos de gráficas y árboles, hasta llegar a la definición de gráficas de grupos con el objetivo de demostrar que los grupos fundamentales de las variedades de la definición 153 se pueden ver como una gráfica de grupos.

Definición 135. Una gráfica Γ consiste de un conjunto de vértices $X = V(\Gamma)$, un conjunto de aristas $Y = A(\Gamma)$ y dos funciones

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow X \times X, & Y &\longrightarrow Y \\ y &\longmapsto (o(y), t(y)), & y &\longmapsto \bar{y} \end{aligned}$$

que satisfacen la siguiente condición: para cada $y \in Y$ tenemos que $\bar{\bar{y}} = y$, $\bar{y} \neq y$ y $o(y) = t(\bar{y})$

Un elemento $P \in X$ se llama vértice de Γ , un elemento $y \in Y$ se llama arista (orientada) y \bar{y} se llama la arista inversa. El vértice $o(y) = t(\bar{y})$ se llama el origen de y y $t(y) = o(\bar{y})$ el final de y .

Decimos que un morfismo de gráficas es inyectivo si las correspondientes funciones en los vértices y aristas lo son.

Sea Γ una gráfica y sean $X = V(\Gamma)$ y $Y = A(\Gamma)$. Construimos un espacio topológico T , el cual es la unión ajena de X y $Y \times [0, 1]$, donde X, Y están equipados con la topología discreta. Sea R la relación de equivalencia en T para la cual $(y, t) = (\bar{y}, 1 - t)$, $(y, 0) = o(y)$ y $(y, 1) = t(y)$ para $y \in Y$ y $t \in [0, 1]$. El espacio cociente T/R se llama la **realización de la gráfica** Γ .

Sea n un entero $n \geq 0$. Consideremos la gráfica orientada de la figura 4.1. Esta gráfica tiene $n + 1$ vértices $V = \{0, 1, \dots, n\}$ y la orientación está dada por las n aristas $[i, i + 1]$, $0 \leq i < n$, con $o([i, i + 1]) = i$ y $t([i, i + 1]) = i + 1$.

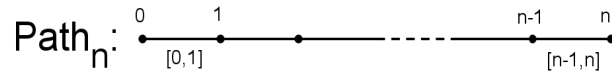


Figura 4.1: Trayectoria $Path_n$.

Definición 136. Una **trayectoria** de longitud n en una gráfica Γ es un morfismo c de $Path_n$ en Γ .

Para $n \geq 1$, la sucesión (y_1, \dots, y_n) de aristas $y_i = c([i - 1, i])$ tales que $t(y_i) = o(y_{i+1})$, $1 \leq i < n$, determina a c . Un par de la forma $(y_i, y_{i+1}) = (y_i, \bar{y}_1)$ en la trayectoria se llama **retroceso**.

Definición 137. Una gráfica se dice que es **conexa** si cualesquiera dos vértices son las extremidades de al menos una trayectoria. Las subgráficas maximales conexas se llaman las componentes conexas de la gráfica.

Una gráfica es conexa si y sólo si su realización es conexa o conexa por trayectorias.

Sea n un entero $n \geq 1$. Consideremos la gráfica orientada de la figura 4.2. El conjunto de vértices de la gráfica está dado por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y la orientación está dada por las n aristas $[i, i + 1]$, con $o([i, i + 1]) = i$ y $t([i, i + 1]) = i + 1$.

Definición 138. Un **circuito** de longitud n en una gráfica, es cualquier subgráfica isomorfa a $Circ_n$.

Definición 139. Una gráfica se llama **combinatoria** si no tiene circuitos de longitud menor o igual a 2.

Sea Γ una gráfica combinatoria. Un conjunto $\{P, Q\}$ de extremidades de una arista y se llama una **arista geométrica** de Γ . Las aristas geométricas $\{P, Q\}$ determinan el conjunto $\{y\bar{y}\}$ de aristas orientadas. La estructura de Γ queda determinada por el conjunto de sus vértices y sus aristas geométricas.

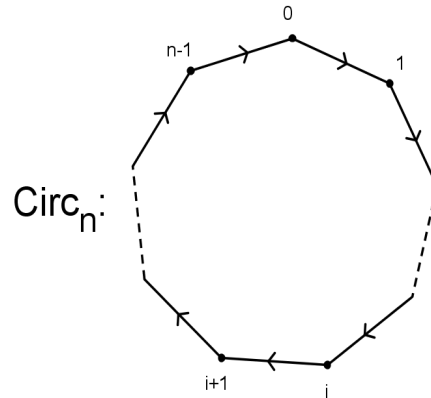


Figura 4.2: Circuito $Circ_n$.

Sea G un grupo y sea S un subconjunto de G . Denotamos por $\Gamma = \Gamma(G, S)$ a la gráfica orientada que tiene a G como su conjunto de vértices y a $(G \times S) = A(\Gamma)_+$ como su conjunto de aristas con la orientación $o(g, s) = g$ y $t(g, s) = gs$ para cada $(g, s) \in G \times S$. La multiplicación a la izquierda por elementos de G , define una acción de G en Γ que preserva orientación. Además, G actúa libremente en los vértices y aristas.

Una gráfica Γ se llama finita si $V(\Gamma)$ y $A(\Gamma)$ son finitos.

Definición 140. Una gráfica **bipartita** es una gráfica donde su conjunto de vértices puede ser dividido en dos subconjuntos X y Y , de tal forma que cada arista tiene un extremo en X y el otro está en Y .

Definición 141. Un **automorfismo** de una gráfica G es un isomorfismo de G en si mismo, que es una permutación en $V(G)$ que preserva adyacencia. El conjunto de todos los automorfismos de G forman un grupo que denotamos por $Aut(G)$.

Definición 142. Sean x, y dos vértices en G . Decimos que x es **similar** a y , si existe un elemento $\sigma \in Aut(G)$ tal que $y = \sigma(x)$. Esta es una relación de equivalencia en $V(G)$. Una gráfica G se dice que es **transitiva en vértices** si cada par de vértices en G son similares.

Definición 143. Un **árbol** es una gráfica conexa, no vacía sin circuitos.

Una **geodésica** en un árbol es una trayectoria sin retroceso.

Proposición 144. Sean P y Q dos vértices en un árbol Γ . Entonces, existe exactamente una geodésica de P a Q y es una trayectoria inyectiva.

Demostración. Ver sección I.2 de J.P. Serre [21]. \square

La longitud de la geodésica de P a Q se llama distancia de P a Q y se denota por $l(P, Q)$. Tenemos que $l(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$ y $l(P, Q) = 1$ si y sólo si P y Q son adyacentes.

Sea X una gráfica en la cual actúa un grupo G . Una **inversión** es un par consistente de un elemento $g \in G$ y una arista y de X tales que $gy = \bar{y}$; si no existe tal par, decimos que G actúa sin inversión.

Si G actúa sin inversión, podemos definir la gráfica cociente $G \backslash X$ de la siguiente forma: el conjunto de vértices de $G \backslash X$ es el cociente de $V(X)$ por la acción de G y el conjunto de aristas de es el cociente de $A(X)$ por la acción de G .

Proposición 145. Sea $X = \Gamma(G, S)$ una gráfica definida por un grupo G y un subconjunto S de G . Los siguientes enunciados son equivalentes.

(1) X es un árbol.

(2) G es un grupo libre con base S .

Demostración. Ver sección I.3 de J.P. Serre [21]. \square

Definición 146. Sea G un grupo actuando en una gráfica X . Un **dominio fundamental** de $X \text{ mod } G$ es una subgráfica T de X tal que $T \rightarrow G \backslash X$ es un isomorfismo.

Una gráfica isomorfa a $Path_1$ se llama segmento.

Teorema 147. Sea $G = G_1 *_A G_2$. Entonces, existe un árbol X (y sólo uno, salvo isomorfismo) en el cual G actúa, con dominio fundamental el segmento $T = P \xrightarrow{y} Q$, donde los vértices y aristas son $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$ y $G_y = A$.

Demostración. Ver sección I.4 de J.P. Serre [21]. \square

Definición 148. Una gráfica de grupos (G, T) consiste de una gráfica T , un grupo G_P para cada $P \in V(T)$ y un grupo G_y para cada $y \in A(T)$, junto con un monomorfismo $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ (denotado por $a \mapsto a^y$). Adicionalmente pedimos que $G_{\bar{y}} = G_y$.

Denotaremos por $G_T \xrightarrow{\lim} (G, T)$ al **límite directo** y lo llamamos el amalgamamiento de G_P sobre G_Y .

Ejemplo 149. Tomamos T un segmento $P \xrightarrow{y} Q$. Tenemos tres grupos G_P, G_Q y $G_y = G_{\bar{y}}$ y dos monomorfismos $G_y \xrightarrow{\bar{y}} G_P$ y $G_y \xrightarrow{y} G_Q$; el grupo G_T es igual a $G_P *_{G_y} G_Q$.

Al grupo generado por los grupos G_P y los elementos $y \in A(Y)$, sujeto a las relaciones

$$\bar{y} = y^{-1} \quad y \quad ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}} \quad \text{si} \quad y \in A(Y), \quad a \in G_y$$

lo denotamos por $F(G, Y)$. Sea Γ el producto libre de G_P con el grupo libre con base $A(Y)$; el grupo $F(G, Y)$ se define como el cociente de Γ por el subgrupo normal generado por los elementos $y\bar{y}$ y $ya^y y^{-1}(a^{\bar{y}})^{-1}$, $y \in A(Y)$, $a \in G_y$. Estas relaciones son equivalentes a las relaciones

$$ya^y \bar{y} = a^{\bar{y}} \quad \text{si} \quad y \in A(Y), \quad a \in G_y$$

Ahora, vamos a describir a las palabras de $F(G, Y)$.

Definición 150. Sea c una trayectoria en Y con origen el vértice P_0 . Las aristas de c las denotamos por y_1, \dots, y_n , donde $n = l(c)$ y $P_i = o(y_{i+1}) = t(y_i)$. Una **palabra de tipo** c en $F(G, Y)$ es un par (c, μ) donde $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ es una sucesión de elementos $r_i \in G_{P_i}$. Al elemento

$$|c, \mu| = r_0 y_1 r_1 y_2 \cdots y_n r_n$$

de $F(G, Y)$ se le asocia con la palabra (c, μ) . Cuando $n = 0$ tenemos $|c, \mu| = r_0$.

Definición 151. Sea P_0 un vértice de Y . Sea $\pi_1(G, Y, P_0)$ el conjunto de elementos de $F(G, Y)$ de la forma $|c, \mu|$, donde c es una trayectoria con extremos iguales, es decir, $o(c) = P_0 = t(c)$. El conjunto $\pi_1(G, Y, P_0)$ es un subgrupo de $F(G, Y)$ llamado el *grupo fundamental* de (G, Y) en P_0 .

Si G es la gráfica de grupos trivial I ($I_P = 1$ para cada vértice P de Y), el grupo $\pi_1(I, Y, P_0)$ coincide con el grupo fundamental $\pi_1(Y, P_0)$ de la gráfica Y en P_0 . El morfismo canónico $G \rightarrow I$ se extiende a un homomorfismo

$$\pi_1(G, Y, P_0) \rightarrow \pi_1(Y, P_0)$$

además es sobreyectivo y su kernel es el subgrupo normal de $\pi_1(G, Y, P_0)$ generado por G_P .

Ejemplo 152. Si $Y = P \xrightarrow{y} Q$ es un segmento, tenemos que

$$\pi_1(G, Y, Y) = G_P *_{G_y} G_Q$$

4.2. Variedades de gráficas

El objeto de estudio de este trabajo son las variedades M diferenciables de dimensión n , con $n \geq 3$, descritas por N. Bárcenas, D. Juan-Pineda y P. Suárez en [3].

Definición 153. 1. Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.

2. Denotar por M_i la variedad diferenciable, compacta con frontera, obtenida por truncar las cúspides de V_i , es decir, por remover de V_i una vecindad abierta, horoesférica (no maximal) de cada cúspide.

3. Tomar un fibrado $Z_i \rightarrow M_i$ con fibra un cociente compacto N_i de un grupo de Lie aesférico, simplemente conexo \tilde{N}_i por la acción de una retícula uniforme Γ_i de dimensión $n - n_i$, es decir, N_i es difeomorfo a \tilde{N}_i/Γ_i , donde \tilde{N}_i es un grupo de Lie simplemente conexo y Γ_i es una retícula uniforme.

4. Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes de frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

Llamaremos a los Z_i las piezas de M y cuando $\dim(M_i) = n$, diremos que $Z_i = M_i$ es una pieza pura.

Las fronteras de las piezas Z_i que se identifican las llamamos las **paredes** de M y las denotamos por W .

Denotemos por c_i al número de componentes frontera de los Z_i :

$$c_i = \#\pi_0(\partial Z_i).$$

Para fijar notación, fijamos un orden en las componentes c_i de la siguiente forma:

$$Z_i, \partial Z_i = \prod_{\alpha=1}^{c_1} W_\alpha^i$$

$$Z_j, \partial Z_j = \prod_{\alpha=1}^{c_2} W_\alpha^j.$$

Los difeomorfismos de pegado entre las piezas Z_i, Z_j los denotamos por $d_{ij,k}$, donde el índice k indica la pared k de la pieza Z_i :

$$d_{ij,k} : W_k^i \rightarrow W_{d(k)}^j.$$

Por abuso de notación el índice k en la mayoría de los casos.

Estos difeomorfismos inducen un isomorfismo en grupo fundamentales:

$$d_{ij*} : \pi_1(W^i) \rightarrow \pi_1(W^j)$$

sin pérdida de generalidad, vamos a llamar a este grupo $\pi_1(W^{ij})$.

Denotaremos por E_i a un fin de V_i .

4.2.1. π_1 inyectividad de variedades de curvatura negativa

El primer objetivo de este trabajo es describir el grupo fundamental de las variedades de la definición 153 como una gráfica de grupos, lo cual se prueba en los siguientes dos teoremas.

Teorema 154. *Si $\pi_i(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(M_i)$ entonces $\pi_i(W^{ij})$ se inyecta en $\pi_1(Z_i)$.*

Demostración. Primero, vamos a demostrar que $\pi_i(E_i)$ se inyecta en $\pi_1(M_i)$, para lo cual usaremos el teorema 124 que se demostró en el capítulo 3.

Las variedades V_i están dadas como cocientes de una variedad H por la acción de una retícula no uniforme Γ . Sea $\pi : H \rightarrow V_i = H/\Gamma$. Sean $p \in V_i = H/\Gamma$ fijo y $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Para cada fin E_i de V_i existe al menos un rayo geodésico γ tal que $\gamma(0) = p$, γ es minimizante y $\gamma(t) \rightarrow E_i$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea $\tilde{\gamma}$ el levantamiento de γ que empieza en \tilde{p} , la propiedad minimizante de γ implica que $\tilde{\gamma}[0, \infty) \subseteq R_{\tilde{p}}$, donde $R_{\tilde{p}}$ es el dominio fundamental de Γ con centro en \tilde{p} . El lema 129 implica que solo puede haber un número finito de rayos geodésicos $\tilde{\gamma}$ que emanan de \tilde{p} y que estén contenidos en $R_{\tilde{p}}$, y en cada caso $\tilde{\gamma}(\infty)$ queda fijo por alguna isometría parabólica de Γ . Así, V_i tiene solo un número finito de fines y cada uno es parabólico.

Sea $x = \tilde{\gamma}(\infty)$ y $\varepsilon = \varepsilon(n, b) > 0$, por los lemas 130,132, existe una horoesfera invariante L_i en x tal que L_i/Γ_x es compacta. Como el grupo Γ_x actúa libre, propia y discontinuamente en la subvariedad L_i , entonces $T_i = \pi(L_i)$ es una subvariedad compacta \mathcal{C}^2 de V_i difeomorfa a L_i/Γ_x y con grupo fundamental Γ_x , ya que la horoesfera L es simplemente conexa e invariante.

Sea \tilde{U}_i una horobola abierta en x , acotada por L_i , y sea $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$. Siguiendo los argumentos de la prueba del teorema 124, tenemos que U_i es una vecindad con collar Riemanniano de E_i . La parametrización de collar Riemanniano de U_i esta dada como sigue: Sea $\tilde{F} : L_i \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{U}_i$ dada por

$$\tilde{F}(p, t) = \gamma_{px}(t) = \exp_p(tV(p, x)).$$

La parametrización \tilde{F} es un difeomorfismo \mathcal{C}^1 que induce una función \mathcal{C}^1 , $F : T_i \times (0, \infty) \rightarrow U_i$ dada por

$$F(\pi p, t) = (\pi \circ \tilde{F})(p, t),$$

para todo $(p, t) \in L_i \times (0, \infty)$. La invarianza de L_i asegura que $\varphi(\tilde{U}_i) \cap \tilde{U}_i \neq \emptyset$ si y sólo si $\varphi(\tilde{U}_i) = \tilde{U}_i$ y $\varphi \in \Gamma_x$. Por lo tanto, F es un difeomorfismo y las curvas $t \mapsto F(n, t)$, $n \in \mathbb{N}$, son geodésicas minimizantes de velocidad unitaria de V_i que intersecan cada hipersuperficie $F(T_i \times \{s\})$ ortogonalmente. Además, $U_R = F(T_i \times (R, \infty))$ es una vecindad de collar Riemanniano de E_i para cualquier número positivo R .

Entonces, para cada fin E_i tenemos que la variedad V_i se puede retraer a

$$V_i^* = V_i - \bigcup_{i=1}^k U_i$$

Al reemplazar cada \tilde{U}_i por una horobola concéntrica no maximal, obtenemos que V_i es difeomorfa al interior de V_i^* . Las variedades V_i^* corresponden a las variedades M_i de la definición 153 y la imagen de la horoesfera no maximal corresponde a una pared W^i .

El difeomorfismo F implica que para todo $t_1, t_2 \in (0, \infty)$, los grupos fundamentales de $F(T_i \times \{t_1\})$ y $F(T_i \times \{t_2\})$ son isomorfos. Por lo tanto

$$\pi_1(E_i) \hookrightarrow \pi_1(M_i).$$

Ahora, el fibrado $N_i \rightarrow Z_i \rightarrow M_i$ determina la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(Z_i) \longrightarrow \pi_1(M_i) \longrightarrow 0$$

y del resultado anterior tenemos también la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(W^{ij}) \longrightarrow \pi_1(E_i) \longrightarrow 0$$

Aplicando el lema del cinco 7 al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(W^{ij}) & \longrightarrow & \pi_1(E_i) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(Z_i) & \longrightarrow & \pi_1(M_i) \longrightarrow 0 \end{array}$$

tenemos que

$$\pi_1(W^{ij}) \hookrightarrow \pi_1(Z_i).$$

□

Teorema 155. *El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 153 es isomorfo al grupo fundamental de una gráfica de grupos.*

Demostración. Sea G_M la gráfica de grupos que describe la descomposición de M en las piezas Z_i de la siguiente forma:

- (a) A cada Z_i le asociamos su grupo fundamental $\pi_1(Z_i)$.
- (b) El grupo de aristas corresponde al grupo fundamental $\pi_1(W^{ij})$.
- (c) Por el teorema 154, existe un monomorfismo del grupo de aristas $\pi_1(W^{ij})$ sobre el grupo de vértices adyacentes $\pi_1(Z_i)$.

Entonces tenemos un isomorfismo $\pi_M \cong \pi_i(G_M)$.

□

Capítulo 5

Nociones de teoría geométrica de grupos

En esta sección introduciremos algunos conceptos básicos de teoría geométrica de grupos.

Dado un conjunto S , el conjunto de palabras en S , es el conjunto $W(S)$ de sucesiones infinitas de elementos en S ; el producto de dos palabras esta dado por yuxtaposición y la unidad es la palabra vacía. Un elemento en $W(S)$ lo escribimos como $w = s_1 s_2 \cdots s_n$, donde $s_i \in S$. Al entero n le llamamos la longitud de la palabra. Si la palabra es vacía, su longitud es 0.

Sean $(\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de grupos y $A = \coprod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$. Sea \sim una relación de equivalencia en $W(S)$ generada por

- $w e_\iota w' \sim w w'$, donde e_ι es el elemento unidad de Γ_ι .
- $w a b w' \sim w c w'$ si se cumple que $c = a b$ para $a, b, c \in \Gamma_\iota$.

para todo $w, w' \in W(S)$. El cociente $W(S)/\sim$ es un grupo al que llamamos **producto libre** y se denota por $*_{\iota \in I} \Gamma_\iota$. El inverso de una clase representada por un elemento $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ es la clase representada por $s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \cdots s_1^{-1}$.

Ejemplo 156.

Una palabra $w = s_1 s_2 \cdots s_n \in W(S)$ con $s_j \in \Gamma_{\iota_j}$ se llama **reducida** si $\iota_j \neq \iota_{j+1}$ para $1 \leq j \leq n-1$ y si s_j es diferente del elemento unidad de Γ_{ι_j} para $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 157. Sea $\Gamma_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{e_1, a\}$ y $\Gamma_2 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{e_2, b, b^2\}$.

- (1) La palabra $abab^2a$ es reducida.
- (2) La palabra ae_1 no es reducida.

(3) La palabra *abba* no es reducida.

(4) La palabra bb^2 no es reducida.

Proposición 158. *Sea $(\Gamma_i)_{i \in I}$ una familia de grupos y $A = \prod_{i \in I} \Gamma_i$. Sea $*_{i \in I} \Gamma_i = W(S) / \sim$ el producto libre. Cualquier elemento en el producto libre $*_{i \in I} \Gamma_i$ se representa por una única palabra reducida en $W(S)$.*

Demostración. (i) **Existencia:** Sean $n \geq 0$ un entero, $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ en $W(S)$ una palabra reducida, un elemento $s \in S$ y la palabra $sw \in W(S)$. Sea

$$R(sw) = \begin{cases} w & \text{si } s = e_i \text{ para algún } i \in I \\ sw & \text{si } s \in \Gamma_i, i \neq k, s \neq e_i \\ s_2 \dots s_n & \text{si } s \in \Gamma_k, s = s_1^{-1} \\ rs_2 \dots s_n & \text{si } s \in \Gamma_k, ss_1 = r \neq e_k \\ s & \text{si } w \neq \emptyset, s \neq e_i \text{ para todo } i \\ \emptyset & \text{si } w = \emptyset, s = e_i \end{cases}$$

donde $k \in I$ es el índice para el cual $s_i \in \Gamma_k$. Es fácil ver que $R(sw)$ es de nuevo una palabra reducida, y $R(sw) \sim sw$. Entonces, haciendo inducción en la longitud de w , cualquier palabra $w \in W(S)$ es equivalente a una palabra reducida.

(ii) **Unicidad:** Para cada $s \in S$, sea $T(s)$ una transformación del conjunto de palabras reducidas en si mismo, dada por:

$$T(s) : w \mapsto R(sw).$$

Si $u = s_1 \dots s_n \in W(S)$, definimos

$$T(u) = T(s_1) \circ \dots \circ T(s_n).$$

Para $a, b, c \in \Gamma_i$ con $ab = c$, tenemos que $T(a) \circ T(b) = T(c)$; también $T(e_i) = Id$ para todo $i \in I$. Entonces, si $u_1 \sim u_2$ tenemos que $T(u_1) = T(u_2)$. Ahora, sea u una palabra reducida y denotemos por \emptyset la palabra vacía, entonces $T(u)(\emptyset) = T(s_1) \circ \dots \circ T(s_n)(\emptyset) = u$. Supongamos que $u_1 \sim u_2$ son palabras reducidas, entonces

$$u_1 = T(u_1)(\emptyset) = T(u_2)(\emptyset) = u_2.$$

Esto muestra la unicidad. □

Sea S un conjunto. El **grupo libre** sobre S es el producto libre de una familia de copias del grupo \mathbb{Z} indexado por S y se denota por $F(S)$; $F(S)$ se puede identificar con el conjunto de palabras reducidas en $S \cup S^{-1}$. El producto en el grupo corresponde a la yuxtaposición de palabras seguidas por una multiplicación y reducción, es decir, borrar letras consecutivas de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$.

Definición 159. Un grupo Γ es **finitamente generado** o de **tipo finito**, si existe un subconjunto finito $S \subset \Gamma$ tal que, para cualquier $\gamma \in \Gamma$ existe una sucesión de elementos $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ con $\gamma = s_1 s_2 \cdots s_n$.

Ejemplo 160. El grupo \mathbb{Z}^n es finitamente generado por cualquier entero n .

Definición 161. Sea Γ un grupo dado como un cociente $\pi : F(S) \rightarrow \Gamma$ de un grupo libre en el conjunto S . La **longitud de la palabra**, $l_S : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, $l_S(\gamma)$ de un elemento $\gamma \in \Gamma$, se define como el entero más pequeño n tal que existen elementos $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ con $\gamma = \pi(s_1 \cdots s_n)$.

La **métrica de la palabra** d_s se define en Γ como

$$d_s(\gamma_1, \gamma_2) = l_s(\gamma_1^{-1} \gamma_2).$$

El grupo Γ es así un espacio métrico y Γ actúa en si mismo por isometrías por la izquierda. Para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, la longitud de la palabra l_s , satisface $l_s(\gamma_1 \gamma_2) \leq l_s(\gamma_1) + l_s(\gamma_2)$.

Definición 162. Sean X, Y espacios métricos con funciones de distancia d_X, d_Y respectivamente. Un **encaje isométrico** es una función $\phi : X \rightarrow Y$ tal que

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2),$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. Un encaje isométrico es inyectivo, si además es sobreyectivo se dice que es una **isometría**. Equivalentemente, X y Y son isométricos, si existen funciones $\phi : X \rightarrow Y$ y $\psi : Y \rightarrow X$, tal que $\phi \circ \psi = Id_Y$ y $\psi \circ \phi = Id_X$.

Definición 163. Un **segmento geodésico** entre dos puntos $x, y \in X$, es la imagen de un encaje isométrico $\phi : [0, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$, tal que $\phi(0) = x$ y $\phi(L) = y$, donde $L = d_X(x, y)$. Un espacio métrico se dice que es **geodésico** si cualesquiera dos puntos pueden ser unidos por un segmento geodésico.

Definición 164. Un espacio métrico es **propio** si sus bolas cerradas de radio finito son compactas.

Definición 165. Un espacio **pseudo métrico** es un espacio X con una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

que satisface

- (i) $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$

Definición 166. Sean X, Y dos espacios pseudo métricos. Una función $\phi : X \rightarrow Y$ es un **encaje casi-isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1, c \geq 0$ tales que

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. Si además, existe una constante $D \geq 0$, tal que cualquier punto en Y se encuentra a una distancia pequeña D de algún punto en $\phi(X)$ se dice que es una **casi-isometría**.

Equivalentemente, X, Y son casi-isométricos, si existen dos funciones

$$\phi : X \rightarrow Y \quad \text{y} \quad \psi : Y \rightarrow X$$

y constantes $\lambda \geq 1, c \geq 0, D \geq 0$ tales que

- (i) $d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + C$
- (ii) $d_X(\psi(y_1), \psi(y_2)) \leq \lambda d_Y(y_1, y_2) + C$
- (iii) $d_X(\psi\phi(x), x) \leq D$
- (iv) $d_Y(\phi\psi(y), y) \leq D$

para todo $x, x_1, x_2 \in X$ y para todo $y, y_1, y_2 \in Y$.

Es fácil ver que las casi-isometrías entre espacios pseudo métricos son un relación de equivalencia.

Nota 167. Las casi-isometrías no preservan dimensión.

Ejemplo 168. 1. Cualquier espacio métrico de diámetro finito es casi-isométrico a un punto.

2. El espacio métrico \mathbb{Z} es casi-isométrico a \mathbb{R} . El encaje isométrico esta dado por la inclusión y las constantes son $\lambda = 1$ y $c = 1$.

3. El espacio \mathbb{Z}^2 no es casi-isométrico a \mathbb{F}^2 .

Proposición 169. *Sea Γ un grupo finitamente generado, dado como $\pi : F(S) \rightarrow \Gamma$ y $\pi' : F(S') \rightarrow \Gamma$, donde S, S' son dos conjuntos finitos de generadores. Sean d, d' las métricas correspondientes en Γ . Entonces (Γ, d) es casi isométrico a (Γ, d') .*

Demostración. Sea $\phi : (\Gamma, d) \rightarrow (\Gamma, d')$ la función identidad. Afirmamos que esta es una casi isometría. Sean

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \text{máx}\{d'(\pi(s), e) : s \in S\} \\ \lambda_2 &= \text{máx}\{d(\pi'(s'), e) : s' \in S'\} \\ \lambda &= \text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}\end{aligned}$$

es claro que

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) \leq d'(\phi(x), \phi(y)) \leq \lambda d(x, y) + c$$

para todo $x, y \in \Gamma$ y cualquier $c \geq 0$. □

Proposición 170. *Sea Γ un grupo finitamente generado, y sea $\Gamma_1 \subset \Gamma$ de índice finito. Entonces, Γ y Γ_1 son casi isométricos.*

Demostración. Ver P. de la Harpe [8]. □

Proposición 171. *(Lema de Milnor-Švarc, [8]) Sea X un espacio métrico geodésico y propio. Sea Γ un grupo y sea $\Gamma \times X \rightarrow X$ una acción por isometrías por la izquierda. Asumimos que la acción es propia y que el cociente $\Gamma \backslash X$ es compacto. Entonces el grupo Γ es finitamente generado y casi-isométrico a X . Más aún, para cualquier $x_0 \in X$, el mapeo $\Gamma \rightarrow X$ dado por $\gamma \mapsto \gamma x_0$, es una casi-isometría.*

Demostración. Sea $\pi : X \rightarrow \Gamma \backslash X$ la proyección canónica. El espacio $\Gamma \backslash X$ tiene una métrica canónica dada por

$$d(p, q) = \text{ínf}\{d(x, y) \mid x \in \pi^{-1}(p), y \in \pi^{-1}(q)\}.$$

Sea

$$R = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in \Gamma \backslash X\}$$

el diámetro de $\Gamma \backslash X$. Como $\Gamma \backslash X$ es compacto, entonces su diámetro es finito. Sea $x_0 \in X$ un punto base y sea

$$B = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq R\}.$$

Observemos que $(\gamma B)_{\gamma \in \Gamma}$ es una cubierta de X . Sea

$$S = \{s \in \Gamma \mid s \neq 1 \text{ y } sB \cap B \neq \emptyset\}$$

Como la acción es propia, S es finito, además $S^{-1} = S$. Finalmente, sea

$$r = \inf\{d(B, \gamma B) \mid \gamma \in \Gamma \text{ y } \gamma \notin S \cup \{1\}\}$$

y sea

$$\lambda = \max_{s \in S} \{d(x_0, sx_0)\}.$$

Afirmación 1: $r = \inf\{d(B, \gamma B) \mid \gamma \in \Gamma \text{ y } \gamma \notin S \cup \{1\}\} > 0$.

Escoger $\gamma' \in \Gamma$ tal que $\gamma' \notin S \cup \{1\}$. Sea $r' = d(B, \gamma' B)$. Entonces, por definición de S y compacidad de B , tenemos que $r' > 0$. Sea

$$T = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \notin S \cup \{1\} \text{ y } d(B, \gamma B) \leq r'\}$$

Entonces, T es no vacío ya que contiene a γ' y es finito. Como r es el infimo de los números $d(B, \gamma B)$ estrictamente positivos para $\gamma \in T$, la afirmación es cierta.

Sea $x \in B$ y $\gamma \notin S \cup \{1\}$, entonces

$$r \leq d(x, \gamma x) \leq d(x, x_0) + d(x_0, \gamma x) \leq R + R = 2R$$

es decir, $r \leq 2R$.

Afirmación 2: S genera a Γ y

$$\frac{1}{\lambda} d(x_0, \gamma x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d(x_0, \gamma x_0) + 1, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (5.1)$$

Sea $\gamma \in \Gamma$, asumimos que $\gamma \notin S \cup \{1\}$, ya que si no, (5.1) es inmediata. Sea $k \in \mathbb{Z}$ definido por

$$R + (k-1)r \leq d(x_0, \gamma x_0) \leq R + kr \quad (5.2)$$

como $\gamma \notin S \cup \{1\}$ entonces $d(x_0, \gamma x_0) > R$, así $k \geq 1$. Dado que X es un espacio geodésico, podemos elegir $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = \gamma x_0 \in X$ tal que $d(x_0, x_1) < R$ y $d(x_i, x_{i+1}) < r$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Como las Γ -traslaciones de B cubren a X , podemos escoger $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k = \gamma$ en Γ de tal forma que $x_i \in \gamma_{i-1} B$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Sea $s_i = \gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i$, entonces $\gamma = s_1 s_2 \dots s_k$. Como

$$d(B, s_i B) \leq d(\gamma_{i-1}^{-1} x_i, s_i \gamma_{i-1}^{-1} x_{i+1}) = d(x_i, x_{i+1}) < r$$

tenemos que $s_i \in S \cup \{1\}$. Por lo tanto, S genera a Γ . Más aún, usando la primera desigualdad de (5.2) tenemos que

$$d_S(1, \gamma) \leq k \leq \frac{1}{r} d(x_0, \gamma x_0) + 1 - \frac{R}{r}$$

así, la segunda desigualdad de (5.1) se sigue. La primera desigualdad de (5.1) es directa por inducción en $d_S(1, \gamma)$.

Afirmación 3: El mapeo

$$\begin{aligned} f : (\Gamma, d_S) &\rightarrow (X, d) \\ \gamma &\mapsto \gamma x_0 \end{aligned}$$

es una casi-isometría.

Por la invarianza de las dos métricas y la afirmación 2, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda} d(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} d(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Además, como $(\gamma B)_{\gamma \in \Gamma}$ es una cubierta de X , tenemos que $d(f(\Gamma), x) \leq R$ para todo $x \in X$. Así, f es una casi-isometría. \square

5.1. Crecimiento de grupos

Definición 172. Sea Γ un grupo finitamente generado por un conjunto S . La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$. A la siguiente serie de potencias

$$B(\Gamma, S; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta(\Gamma, S; k) z^k$$

se le conoce como **serie de crecimiento**. La **función de crecimiento esférica** esta dada por

$$k \mapsto \sigma(\Gamma, S; k) = \beta(\Gamma, S; k) - \beta(\Gamma, S; k-1)$$

con $\sigma(\Gamma, S; 0) = \beta(\Gamma, S; 0) = 1$; y la correspondiente **serie de crecimiento esférica** es

$$\begin{aligned} \Sigma(\Gamma, S; z) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} z^{l_S(\gamma)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\Gamma, S; k) z^k \\ &= (1-z)B(\Gamma, S; z) \end{aligned}$$

Si no hay confusión se puede escribir $\beta(k)$, $B(z)$, $\sigma(k)$, $\Sigma(z)$.

Ejemplo 173. 1. Para el grupo cíclico infinito \mathbb{Z} generado por 1, su función de crecimiento esta dada por

$$\begin{aligned} \beta(\mathbb{Z}, \{1\}; r) &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ r &\mapsto 2r + 1 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\Sigma(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2z^k, & B(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)z^k \\ &= \frac{1+z}{1-z} & &= \frac{1+z}{(1-z)^2}\end{aligned}\tag{5.3}$$

2. Para el grupo libre abeliano \mathbb{Z}^2 con dos generadores, tenemos que $\sigma(0) = 1$ y $\sigma(k) = 4k$ para $k \geq 1$, entonces su serie de crecimiento esférica es

$$\Sigma(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 4kz^k = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

Y su función de crecimiento es

$$\begin{aligned}\beta(\mathbb{Z}^2, S; r) &= 1 + 4 \sum_{j=1}^r j \\ &= 1 + 4 \left(\frac{r(r+1)}{2}\right) \\ &= 1 + 2(r^2 + r) \\ &= 1 + 2r + 2r^2\end{aligned}$$

3. Para \mathbb{Z} generado por el conjunto $\{2, 3\}$, su función de crecimiento esta dada por

$$\beta(\mathbb{Z}, \{2, 3\}; r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 5 & \text{si } r = 1 \\ 6r + 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

4. Para el grupo libre \mathbb{F}_2 con conjunto generador $S = \{a, b\}$, tenemos que $\beta(0) = 1$, $\beta(1) = 5$ y

$$\beta(n) - \beta(n-1) = 4(3^{n-1})$$

entonces

$$\begin{aligned}\beta(\mathbb{F}_2, S; n) &= 1 + \sum_{i=1}^n 4 \cdot 3^{i-1} \\ &= 1 + 4 \frac{1-3^n}{1-3} \\ &= 1 + 4 \frac{3^n - 1}{2} \\ &= 1 + 2(3^n - 1).\end{aligned}$$

5. En general, para el grupo libre F de rango finito $n \geq 2$, con respecto a un conjunto finito de generadores S tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(F, S; r) &= 1 + 2 \cdot n \sum_{j=0}^{r-1} (2 \cdot n - 1)^{j-1} \\ &= 1 + \frac{n}{n-1} ((2n-1)^r - 1).\end{aligned}$$

Lema 174. Sea Γ finitamente generado y sean S_1, S_2 dos conjuntos finitos de generadores de Γ . Entonces, existe $c > 0$ tal que para todo $n \geq 0$

$$\beta(\Gamma, S_1; \lfloor \frac{n}{c} \rfloor) \leq \beta(\Gamma, S_2; n) \leq \beta(\Gamma, S_1; cn),$$

donde $x - 1 < \lfloor x \rfloor < x$ denota la parte entera de x .

Algunas propiedades inmediatas de la función de crecimiento son

1. La función de crecimiento es submultiplicativa

$$\beta(\Gamma, S; k_1 + k_2) \leq \beta(\Gamma, S; k_1) \beta(\Gamma, S; k_2)$$

para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.

2. La función de crecimiento está acotada por la del grupo libre de rango n con respecto a un conjunto generador libre

$$\beta(\Gamma, S; k) \leq \beta(F(S), S; r) = 2n(2n-1)^r$$

3. Si Γ es infinito, la función de crecimiento $\beta(\Gamma, S; k)$ es estrictamente creciente en k .

Definición 175. Sea Γ un grupo finitamente generado y S su conjunto finito de generadores.

- El grupo Γ es de **crecimiento exponencial**, si existen $A, B > 0$ tales que para $n \geq 0$,

$$\beta(\Gamma, S; n) \geq A \exp^{Bn}.$$

- El grupo Γ tiene **crecimiento polinomial**, si existen d, c tales que para todo $n \geq 1$,

$$\beta(\Gamma, S; n) \leq cn^d.$$

- El grupo Γ es de **crecimiento intermedio** si no es ni exponencial ni polinomial

Es sencillo demostrar que el tipo de crecimiento no depende del conjunto generador.

Vamos a desarrollar dos ejemplos de grupos con crecimiento polinomial. Para esto, primero necesitamos el siguiente resultado.

Lema 176. Sea $F_p(n) := \sum_{j=0}^n j^p$. Entonces, F_p es un polinomio en n grado $p + 1$. [5]

Demostración. La prueba se hace por inducción. Para $p = 1$ se cumple, ya que $F_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, que es un polinomio de grado 2.

Ahora, supongamos que se cumple para todos los polinomios $F_q(n)$ con $q < p$. Consideremos la siguiente suma:

$$Q_p(n) = \sum_{k=1}^n [(k+1)^{p+1} - k^{p+1}],$$

si desarrollamos el lado derecho obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{p+1} - k^{p+1}] &= 2^{p+1} - 1^{p+1} + 3^{p+1} - 2^{p+1} + \dots + (n+1)^{p+1} - n^{p+1} \\ &= (n+1)^{p+1} - 1^{p+1} \end{aligned}$$

Entonces, $Q_p(n)$ es un polinomio de grado $p+1$. Por otro lado, si desarrollamos $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ usando la fórmula del binomio de Newton, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (k+1)^{p+1} - k^{p+1} &= \binom{p+1}{0} k^{p+1} + \binom{p+1}{1} k^p + \dots + \binom{p+1}{p-1} k^2 + \binom{p+1}{p} k + \binom{p+1}{p+1} k^0 - k^{p+1} \\ &= \sum_{q=0}^p \binom{p+1}{q} k^q, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Q_p(n) &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{q=0}^p \binom{p+1}{q} k^q \right] \\ &= \sum_{q=0}^p \binom{p+1}{q} \sum_{k=1}^n k^q \\ &= \sum_{q=0}^p \binom{p+1}{q} F_q(n). \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que $F_q(n)$ es un polinomio de grado $q+1 \leq p$, entonces el $\text{grado}(F_p) = \text{grado}(Q_p) = p+1$. \square

Ejemplo 177. El grupo Z^m , con conjunto generador $S = \{e_1, \dots, e_m\}$ tiene crecimiento polinomial, donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Además, $\beta_S(n) \leq (2n+1)^m$.

Demostración. Sea $v \in \mathbb{Z}^m$ y $|v|_S = |v|_{L^1} = \sum_{i=1}^m |v_i|$.

Sea $f_m(n)$ el número de elementos de longitud menor o igual a n en \mathbb{Z}^m . Vamos a ver por inducción que es un polinomio de grado m .

Sea $w = (l, v)$ con $l \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}^{m-1}$ y $|w|_S = |l| + |v|$. Entonces

$$\begin{aligned} f_m(n) &= \underbrace{f_{m-1}(n)}_{l=0} + \sum_{j=1}^n \underbrace{2f_{m-1}(n-j)}_{\text{dos opciones para } l \text{ fijo}} \\ &= -f_{m-1}(n) + \sum_{j=0}^k 2f_{m-1}(n-j). \end{aligned}$$

En el ejemplo 173.1 y 173.2 se probó el caso para $m = 1, 2$. Supongamos que

$$f_{m-1}(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k n^k$$

con $a_{m-1} \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f_m(n) &= \sum_{j=0}^n 2 \sum_{k=0}^{m-1} a_k (n-j)^k - f_{m-1}(n) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{m-1} a_k \sum_{j=0}^n (n-j)^k - f_{m-1}(n) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{m-1} a_k F_k(n) - f_{m-1}(n) \end{aligned}$$

donde $F_k(n)$ es el polinomio del lema anterior. Como F_k es un polinomio de grado $k+1$ y $f_{m-1}(n)$ también es un polinomio, podemos concluir que $f_m(n)$ es un polinomio de grado m . Por lo tanto, \mathbb{Z}^m tiene crecimiento polinomial. \square

Ejemplo 178. Sea H el grupo de Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sea $S = \{A, B, C\}$ su conjunto generador, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por demostrar: Existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $n \geq 1$

$$c_1 n^4 \leq \beta(H, S; n) \leq c_2 n^4. \quad (5.4)$$

Para esto, necesitamos el siguiente lema.

Lema 179. *Sea $g = A^k B^l C^m$, entonces*

$$(1) |g|_S \leq |k| + |l| + 6\sqrt{|m|}.$$

$$(2) \text{ Si } |g|_S \leq r \text{ entonces } |k| + |l| \leq r \text{ y } |m| \leq r^2.$$

$$(3) |g|_S \geq \frac{|k| + |l| + \sqrt{|m|}}{2}.$$

Además, $[A^i, B^j] = C^{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Es obvio que $|g|_S \leq |k| + |l| + |m|$, pero queremos mejorar esta cota.

(1) Supongamos que $i = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, $m = i^2 + j$, $m \geq 0$, entonces $j \leq 2\sqrt{m}$ ya que

$$j = (\sqrt{m})^2 - i^2 \leq \int_i^{\sqrt{m}} (t^2)' dt = \int_i^{\sqrt{m}} 2t dt \leq 2\sqrt{m}.$$

Ahora,

$$C^m = C^j C^{i^2} = C^j [A^i, B^i]$$

de donde

$$|C^m|_S \leq j + 4i \leq 2\sqrt{m} + 4\sqrt{m} = 6\sqrt{m}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |A^k B^l C^m|_S &\leq |A^k|_S + |B^l|_S + |C^m|_S \\ &\leq |k| + |l| + 6\sqrt{|m|}. \end{aligned}$$

- (2) Sea $|g|_S \leq r$. Vamos a usar el hecho que existe un homomorfismo de $\varphi : H \rightarrow \mathbb{Z}^2$, el cual esta dado de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y).$$

Entonces, $g = A^k B^l C^m \mapsto (k, l)$. Así

$$\begin{aligned} |\varphi(g)|_{l^1} &\leq r \\ |k| + |l| &\leq r. \end{aligned}$$

Donde l^1 es la base asociada a \mathbb{Z}^2 . Ahora, supongamos $|g|_S = r$. Vamos a hacer inducción sobre r .

Si $r = 0$, la desigualdad es cierta $|m| \leq r^2$, ya que

$$g = \begin{pmatrix} 1 & k & m + kl \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $|g|_S = r + 1$, entonces

$$g = \begin{cases} (a) hC^\varepsilon \\ (b) hA^\varepsilon \\ (c) hB^\varepsilon \end{cases}$$

donde $|h|_S = r$ es nuestra hipótesis de inducción.

- (a) Sea $A^k B^l C^{m-\varepsilon} = h$. Por demostrar que $|m - \varepsilon| \leq (r + 1)^2$.

$$\begin{aligned} |m| &\leq |m - \varepsilon| + 1 \\ &\leq r^2 + 1 \\ &\leq (r + 1)^2. \end{aligned}$$

- (b) Sea $h = A^k B^l C^m A^{-\varepsilon}$ y tengamos en cuenta que A conmuta con C y B conmuta con

C. Entonces

$$\begin{aligned}
h &= A^k B^l C^m A^{-\varepsilon} \\
&= A^k B^l A^\varepsilon C^m \\
&= A^{k-\varepsilon} A^\varepsilon B^l A^{-\varepsilon} B^{-l} B^l C^m \\
&= A^{k-\varepsilon} [A^\varepsilon, B^l] B^l C^m \\
&= A^{k-\varepsilon} C^{\varepsilon l} B^l C^m \\
&= A^{k-\varepsilon} B^l C^{\varepsilon l} C^m \\
&= A^{k-\varepsilon} B^l C^{m+\varepsilon l},
\end{aligned}$$

por lo tanto $|m + \varepsilon l| \leq r^2$, lo cual implica que

$$|m| \leq r^2 + |l| \leq r^2 + r \leq (r + 1)^2.$$

(c) Sea $h = A^k B^l C^m B^{-\varepsilon}$, entonces

$$\begin{aligned}
h &= A^k B^l C^{-\varepsilon} C^m \\
&= A^k B^{l-\varepsilon} C^m,
\end{aligned}$$

por lo tanto $|m| \leq r^2 \leq (r + 1)^2$.

(3) Para probar (3), lo que vamos a hacer es ver que (2) implica (3). Tomamos $r = |g|_S$, entonces $|k| + |l| \leq r$ y $\sqrt{|m|} \leq |g|_S$, de donde

$$|k| + |l| + \sqrt{|m|} \leq 2|g|_S.$$

□

Demostración. Vamos ahora a probar que se cumple (5.4):

$$c_1 n^4 \leq \beta(H, S; n) \leq c_2 n^4.$$

Supongamos que

$$|k| \leq \frac{r}{8}, \quad |l| \leq \frac{r}{8}, \quad |m| \leq \left(\frac{r}{8}\right)^2,$$

entonces, usando (1) del lema tenemos

$$|g|_S \leq \frac{r}{8} + \frac{r}{8} + \frac{6r}{8} \leq r,$$

de donde

$$\beta_{H,S;r} \geq \underbrace{\left(2\lfloor \frac{r}{8} \rfloor + 1\right)^2}_{\text{posibilidades de escoger } k \text{ y } l} \overbrace{\left(2\lfloor \frac{r^2}{64} \rfloor + 1\right)}^{\text{posibilidades de escoger } m} \geq c_1 r^4,$$

para algún $c_1 > 0$ y $r \in \mathbb{N}$.

Ahora, usando (3) del lema, tenemos

$$r \geq \frac{|k| + |l| + \sqrt{|m|}}{2}$$

entonces $|k| \leq 2r$, $|l| \leq 2r$ y $|m| \leq 4r^2$. Así,

$$\begin{aligned} \beta(H, S; r) &\leq (8r^2 + 1)(4r + 1)(4r + 1) \\ &\leq c_2 r^4 \end{aligned}$$

para algún $c_2 > 0$ y $r \in \mathbb{N}$. □

Sea (X, d) un espacio métrico y sea M un subconjunto de X . Para $C \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto siguiente

$$\begin{aligned} V_C(M) &= \{x \in X : d(x, M) \leq C\} \\ &= \{x \in X : \exists m \in M \ d(x, m) \leq C\} \end{aligned}$$

Si M es finito, se puede demostrar que

$$|V_C(M)| \leq (2|S| + 1)^C |M|.$$

Corolario 180. *El tipo de crecimiento de grupos finitamente generados es un invariante casi-isométrico, es decir, grupos finitamente generados, casi-isométricos tienen el mismo tipo de crecimiento. En otras palabras, grupos finitamente generados que tienen diferente tipo de crecimiento no pueden ser casi-isométricos*

Demostración. Sean Γ_1, Γ_2 los dos grupos finitamente generados, y sean S_1, S_2 sus conjuntos finitos de generadores respectivamente. Sea f una (λ, c) casi isometría

$$f : (\Gamma_1, d_{S_1}) \longrightarrow (\Gamma_2, d_{S_2})$$

Entonces se cumple que

$$\frac{1}{\lambda} d_{S_1}(x, y) \leq d_{S_2}(f(x), f(y)) \leq \lambda d_{S_1}(x, y) + c,$$

y tod $\gamma \in \Gamma_2$ está a distancia menor o igual a c de $f(\Gamma_1)$.

Por demostrar: Existen constantes A, B, D tales que para todo n

$$B(n, d_{S_2}) \subset V_D(f(B(An + B, d_{S_1}))),$$

donde $B(n, d)$ es el conjunto de elementos a distancia menor o igual n del elemento identidad e .

Sea $y \in \Gamma_2$ tal que $d_{S_2}(e, y) \leq n$. Entonces, por ser f una casi isometría existe $x \in \Gamma_1$ tal que $d_{S_2}(y, f(x)) \leq C$. Así

$$\begin{aligned} d_{S_1}(x, e) &\leq \lambda d_{S_2}(f(x), f(e)) + \lambda C \\ &\leq d_{S_2}(y, f(e)) + \lambda C + \lambda C \\ &\leq d_{S_2}(y, e) + \lambda d_{S_2}(e, f(e)) + 2\lambda C \\ &\leq \lambda n + B \\ &\leq An + B, \end{aligned}$$

donde $\lambda d_{S_2}(e, f(e)) + 2\lambda C = B \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{N}$. Entonces, se cumple que:

$$B(n, d_{S_2}) \subset V_D(f(B(An + B, d_{S_1}))).$$

Esta relación implica lo siguiente.

(a) Supongamos que Γ_1 tiene crecimiento polinomial. Entonces $\beta(\Gamma_1, S_1; n) \leq En^F$, de donde

$$\begin{aligned} \beta(\Gamma_2, S_2; n) &\leq (2|S_2| + 1)^D \beta(\Gamma_1, S_1; An + B) \\ &\leq (2|S_2| + 1)^D E(An + B)^F, \end{aligned}$$

por lo tanto, Γ_2 tiene crecimiento polinomial. Usando el hecho de que ser casi isométricos es una propiedad simétrica, tenemos que Γ_1 tiene crecimiento polinomial si y sólo si Γ_2 tiene crecimiento polinomial.

(b) Ahora, supongamos que Γ_2 tiene crecimiento exponencial, es decir $\beta(\Gamma_2, S_2; n) \geq E \exp^{nF}$. Como

$$\beta(\Gamma_2, S_2; n) \leq (2|S_2| + 1)^D D\beta(\Gamma_1, S_1; An + B),$$

entonces

$$\frac{E \exp^{nF}}{(2|S_2| + 1)^D} \leq \beta(\Gamma_1, S_1; An + B).$$

Sea $m \in \mathbb{N}$, si $m = \lfloor \frac{n-B}{A} \rfloor$ entonces $n \geq Am + B$. Así,

$$\begin{aligned} \beta(\Gamma_1, S_1; n) &\geq \beta(\Gamma_1, S_1; Am + B) \\ &\geq \frac{E}{\underbrace{(2|S_2| + 1)^D}_{=\text{constante } E_1}} \exp^{mF} \\ &\geq \underbrace{H \exp^{(-1-B/A)F}}_{=\text{constante } E_2} \exp^{nF/A} \\ &\geq E_2 \exp^{nG}, \end{aligned}$$

por lo tanto, Γ_1 tiene crecimiento exponencial. □

Ejemplo 181. (a) \mathbb{Z}^m es casi-isométrico a \mathbb{Z}^n si y sólo si $m = n$.

(b) El grupo fundamental de dos variedades Riemannianas con cubierta universal isométrica tienen el mismo tipo de crecimiento.

Una **función de crecimiento** es una función no decreciente de \mathbb{R}^+ a \mathbb{R}^+ . A cualquier función no decreciente $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ se le puede asociar una función de crecimiento $\alpha(t) = \beta(\lceil t \rceil)$, donde $\lceil t \rceil$ denota el entero más pequeño tal que $t \leq \lceil t \rceil$. También podemos escoger $\tilde{\alpha}(t) = \beta(k)^{1-\tau} \beta(k+1)^\tau$, donde $t = k + \tau$ con $0 \leq \tau \leq 1$; además α es continua. Si β es submultiplicativa entonces también lo serán α y $\tilde{\alpha}$.

Definición 182. Una función de crecimiento α_2 **domina débilmente** a una función de crecimiento α_1 , si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $C \geq 0$ tales que

$$\alpha_1(t) \leq \lambda \alpha_2(\lambda t + C) + C,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Se denota por

$$\alpha_1 \stackrel{\omega}{\prec} \alpha_2 \quad \text{o} \quad \alpha_1(t) \stackrel{\omega}{\prec} \alpha_2(t).$$

Dos funciones de crecimiento α_1, α_2 son débilmente equivalentes si cada una domina débilmente a la otra. Se denota por

$$\alpha_1 \stackrel{\omega}{\sim} \alpha_2 \quad \text{o} \quad \alpha_1(t) \stackrel{\omega}{\sim} \alpha_2(t).$$

Denotamos por $[\alpha]_\omega$ o $[\alpha(t)]_\omega$ a la clase de equivalencia módulo $\stackrel{\omega}{\sim}$ de una función de crecimiento.

Ejemplo 183. (a) Para $a, b \in (0, \infty)$, tenemos que

$$t^a \stackrel{\omega}{\prec} t^b \Leftrightarrow a \leq b$$

y

$$e^{at} \stackrel{\omega}{\prec} e^{bt}.$$

(b) Si una función de crecimiento α es polinomial de grado d , tenemos

$$\alpha(t) \stackrel{\omega}{\prec} t^a \Leftrightarrow d \leq a$$

y

$$\alpha(t) \stackrel{\omega}{\sim} t^a \Leftrightarrow d = a.$$

(c) Sea Γ un grupo generado por un conjunto finito S . Entonces

$$\beta(\Gamma, S; k) \stackrel{\omega}{\prec} e^k$$

(d) Usando la notación del lema de Milnor-Švarc, las funciones de crecimiento siguientes son débilmente equivalentes:

$$k \mapsto \beta(\Gamma, S; k) = |\{\gamma \in \Gamma : d_S(e, \gamma) \leq k\}|$$

$$k \mapsto |\{\gamma \in \Gamma : d(x_0, \gamma x_0) \leq k\}|.$$

Más aún, si X es una variedad Riemanniana, también son equivalentes a la función cuyo valor en k es el volumen Riemanniano de una bola en X de radio k en el punto base x_0 . Esto se demostrará más adelante, (184).

Algunos resultados importantes que relacionan estos conceptos con variedades Riemannianas, son los siguientes teoremas.

Proposición 184. (Milnor-Švarc) *Sea X una variedad Riemanniana completa con distancia Riemanniana d . Sea $x_0 \in X$ y para cada número real $t \geq 0$ sea $v(t)$ el volumen Riemanniano de la bola cerrada con centro en x_0 y radio t en X . Sea Γ un grupo actuando propiamente por isometrías en X de tal forma que el cociente $\Gamma \backslash X$ es compacto. Sea $\beta(k)$ la función de crecimiento de Γ con respecto a algún conjunto finito de generadores. Entonces $v(t)$ y $\beta(k)$ son funciones de crecimiento débilmente equivalentes.*

Demostración. Para $x \in X$ y $t \geq 0$, sea $B(x, t)$ la bola cerrada con centro en x y radio t en X . Considerar

- El diámetro R del espacio cociente $\Gamma \backslash X$.

- La cubierta $(\gamma B(x_0, R))_{\gamma \in \Gamma}$ de X .
- El conjunto finito de generadores $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1 \text{ y } sB \cap B \neq \emptyset\}$ de Γ .
- La distancia separadora $r = \min\{d(B, \gamma B) : \gamma \in \Gamma, \gamma \notin S \cup \{1\}\}$.
- La distancia $\lambda = \max\{d(x_0, sx_0) : s \in S\}$.
- El orden a del subgrupo de isotropía $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x_0 = x_0\}$. Observar que Γ_0 es finito y está en $S \cup \{e\}$.

Sea $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Sea x en la órbita de Γx_0 , entonces las bolas cerradas $B(x, \frac{1}{3}r)$ son ajenas por pares y así

$$\frac{1}{a}\beta(\Gamma, S; k)v(\frac{1}{3}r) \leq v(k\lambda + \frac{1}{3}r),$$

de donde $\beta(\Gamma, S; k) \stackrel{\omega}{\prec} v(k)$.

Ahora, sea $x \in B(x_0, k)$. Entonces, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $x \in B(\gamma x_0, R)$. Por el lema de Milnor-Švarc 171, la longitud de la palabra $l_S(\gamma)$ de γ satisface:

$$l_S(\Gamma) \leq \frac{1}{r} d(x_0, \gamma x_0) + 1 \leq \frac{1}{r} d(x_0, x) + C,$$

donde $C = \frac{R}{r} + 1$. De donde, la bola $B(x_0, k)$ está cubierta por las bolas $\gamma B(x_0, R)$, para cada $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma)$ como arriba y

$$v(k) \leq \beta(\Gamma, S; \frac{k}{r} + C)v(R).$$

Así

$$v(k) \stackrel{\omega}{\prec} \beta(\Gamma, S; k).$$

□

Los siguientes dos teoremas son consecuencia del teorema 184 y son los resultados de J. Milnor [19].

Teorema 185. *Sea M una variedad Riemanniana completa de dimensión n , cuyo tensor de curvatura media R_{ij} es positivo semidefinido en todas partes, entonces la función de crecimiento $\beta(s)$ asociada a un subgrupo finito de generadores del grupo fundamental $\pi_1(M)$ debe satisfacer*

$$\beta(s) \leq c \cdot s^n \tag{5.5}$$

donde c es una constante.

Demostración. Sea \tilde{M} la cubierta universal de M y sea $x_0 \in \tilde{M}$. Sea $v(r)$ el volumen de la vecindad $N_r(x_0)$ que consiste de todos los puntos $y \in \tilde{M}$ con $d(x_0, y) \leq r$. Si la curvatura media es positiva donde sea, usando la desigualdad de Bishop (ver sección III.4 de [7]):

$$v(r) \leq \omega_n r^n, \quad (5.6)$$

donde ω_n es el volumen del disco unitario en el espacio Euclideo de dimensión n .

Usando el teorema principal de espacios cubrientes 17, sabemos que podemos identificar $\pi_1(M)$ con el grupo de todas las transformaciones cubrientes de \tilde{M} sobre M . Sean $g_1, g_2, \dots, g_p : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ un conjunto de generadores para algún subgrupo de $\pi_1(M)$ y sea $\mu = \max\{d(x_0, g_i x_0)\}$. La vecindad $N_{\mu s}(x_0)$ contiene al menos $\beta(s)$ puntos distintos de la forma $g(x_0)$ con $x_0 \in \pi_1(M)$.

Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, de tal forma que la vecindad $N_\varepsilon(x_0)$ en \tilde{M} sea ajena a todas las traslaciones $g(N_\varepsilon(x_0))$, con $g \neq 1$. Entonces, la vecindad $N_{\mu s + \varepsilon}(x_0)$ contiene al menos $\beta(s)$ conjuntos distintos de la forma $g(N_\varepsilon(x_0))$. Así,

$$\beta(s)v(\varepsilon) \leq v(\mu s + \varepsilon). \quad (5.7)$$

De (5.6) y (5.7) tenemos que para $s \geq 1$

$$\begin{aligned} \beta(s)v(\varepsilon) &\leq v(\mu s + \varepsilon) \\ &\leq \omega_n (\mu s + \varepsilon)^n \\ &\leq \omega_n (\mu + \varepsilon)^n s^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\beta(s) \leq cs^n,$$

donde $c = \frac{\omega_n (\mu + \varepsilon)^n}{v(\varepsilon)}$. □

Teorema 186. *Sea M una variedad Riemanniana compacta con todas sus curvaturas seccionales menores que cero, entonces la función de crecimiento de su grupo fundamental $\pi_1(M)$ es al menos exponencial*

$$\beta(s) \geq a^s \quad (5.8)$$

para alguna constante $a > 1$.

Demostración. Sea $-\alpha^2 < 0$ una cota superior para la curvatura seccional de M . Usando un teorema de comparación de volumen de Günther (ver sección III.4 de [7]) tenemos que para un r suficientemente grande

$$v(r) > \exp^{\lambda r}. \quad (5.9)$$

Sea δ el diámetro de M . La proyección $\tilde{M} \rightarrow M$ manda la vecindad $N = N_\delta(x_0)$ en M . Por lo tanto, las traslaciones gN forman una cubierta de \tilde{M} , donde $g \in \pi_1(M)$. Notemos que esta

cubierta es localmente finita, ya que si no lo fuera, para algún r finito, la vecindad $N_r(x_0)$ se intersecaría con una cantidad infinita de gN y así $N_{r+\delta+\varepsilon}(x_0)$ contendría una cantidad infinita de conjuntos disjuntos $gN_\varepsilon(x_0)$, cada uno de volumen $v(\varepsilon) > 0$ y esto es imposible ya que $V(r + \delta + \varepsilon) < \infty$.

Sea F el conjunto finito de todos los elementos $g \in \pi_1(M)$ tales que las traslaciones gN intersecan a N , es decir

$$F = \{g \in \pi_1(M) : gN \cap N \neq \emptyset\}.$$

Sea $\nu > 0$

$$\nu = \min\{d(gN, N) : gN \cap N = \emptyset, g \notin F \cup \{1\}\}.$$

Afirmación: Los elementos de F generan a $\pi_1(M)$. Antes de seguir con la demostración, necesitamos el siguiente lema.

Lema 187. Si $d(x_0, gN) < \nu t + \delta$ para algún entero t positivo, entonces g puede ser expresado como un producto de t elementos $f_i \in F$, es decir, $g = f_1 f_2 \cdots f_t$.

Demostración. Sea $y \in gN$ tal que $d(x_0, y) < \nu t + \delta$ y escogemos puntos $y_1, y_2, \dots, y_{t+1} = y$ sobre la geodésica de x a y de tal forma que $d(x_0, y_1) \leq \delta$ y $d(y_i, y_{i+1}) < \nu$. Cada y_i está en alguna traslación $h_i N$, donde podemos escoger $h_1 = 1$ y $h_{t+1} = g$. Sea $f_i = h_i^{-1} h_{i+1}$, entonces $f_1 f_2 \cdots f_t = g$. Como $d(h_i^{-1} y_i, h_i^{-1} y_{i+1}) < \nu$ y $h_i^{-1} y_i \in N$, $h_i^{-1} y_{i+1} \in f_i N$, entonces $f_i \in F$, lo cual prueba el lema. \square

En particular, el lema prueba que los elementos de F generan el grupo $\pi_1(M)$.

Sea $\beta'(t)$ la función de crecimiento de $\pi_1(M)$, usando como conjunto generador a F . Por el lema, tenemos que el interior de la vecindad $N_{\nu t + \delta}(x_0)$ se cubre completamente por las traslaciones $f_1 f_2 \cdots f_t N$, con $f_i \in F$. Como $\beta'(s)$ traslaciones de esas son distintas, eso prueba que

$$\beta'(s)v(\delta) \geq v(\nu t + \delta). \quad (5.10)$$

Por el lema 174, tenemos que existe un entero positivo k tal que

$$\beta(kt) \geq \beta'(t), \quad (5.11)$$

o para $s \geq k$

$$\beta(s) \geq \beta'(\lfloor \frac{s}{k} \rfloor).$$

Combinando (5.9),(5.10),(5.11), tenemos que para todo s suficientemente grande

$$\begin{aligned} \beta'(\frac{s}{k})v(s) &\geq v(\frac{\nu s}{k} + \delta) \\ &> c \exp(\frac{\lambda \nu}{k} s + \lambda \delta), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\beta(s) &\geq c \frac{\exp(\lambda s)}{v(\delta)} \exp\left(\frac{\lambda v}{k} s\right) \\ &\geq c_1 \exp(\lambda_1 s).\end{aligned}$$

con $c_1, \lambda_1 > 0$. Como $\beta(s) > 1$ para todo $s \geq 1$, es fácil escoger una constante $a > 1$ tal que

$$\beta(s) \geq a^s$$

para todo s . □

5.2. Crecimiento uniformemente exponencial

Denotamos por SF_2 al monoide en dos generadores $A = \{a_1, a_2\}$, entonces $SF_2 = W(\{a_1, a_2\})$. La función de crecimiento $\beta(k) = \beta(SF_2, A; k)$ está dada por

$$\beta(k) = 1 + 2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1,$$

y satisface $\beta(k) \sim 2^k$. Sea Γ un grupo finitamente generado que contiene a SF_2 como subgrupo semilibre, entonces podemos escoger un conjunto finito S de generadores de Γ que contiene un conjunto libre de generadores de este subgrupo semilibre. Así

$$\beta(\Gamma, S; k) \geq 2^{k+1} - 1.$$

Proposición 188. *Un grupo finitamente generado que contiene un semigrupo libre en dos generadores es de crecimiento exponencial.*

Demostración. Es una consecuencia del párrafo anterior. □

Proposición 189. *(Lema Ping-Pong) Sea Γ actuando en un conjunto X . Asumir que existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ y $X_1, X_2 \subset X$ tales que*

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset, \quad \gamma_1(X_1 \cup X_2) \subset X_1, \quad \gamma_2(X_1 \cup X_2) \subset X_2.$$

Entonces, el semigrupo generado en Γ por γ_1 y γ_2 es libre. En particular, Γ es de crecimiento exponencial.

Demostración. Ver sección VII.A de P. de la Harpe [8]. □

Vamos a fijar notación y reformular las definiciones de tipo de crecimiento siguiendo la notación de P. de la Harpe y M. Bucher en [9].

Definición 190. Sea Γ un grupo finitamente generado por un conjunto S y sea $\beta(\Gamma, S; k) = \beta_S(k)$ su correspondiente función de crecimiento. El **tipo de crecimiento exponencial** del par (Γ, S) es

$$\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta_S(k)}.$$

Denotamos por $\omega(\Gamma)$ a

$$\omega(\Gamma) = \inf \omega(\Gamma, S) : S \text{ es un conjunto finito de generadores de } \Gamma.$$

El grupo Γ se dice que es de

1. **Crecimiento exponencial** si $\omega(\Gamma, S) > 1$.
2. **Crecimiento subexponencial** si $\omega(\Gamma, S) = 1$.
3. **Crecimiento uniformemente exponencial** si $\omega(\Gamma) > 1$.

Definición 191. Una automorfismo s de X es **hiperbólico** si no fija vértices y no fija aristas geométricas. Para tal $s \in \text{Aut}(X)$, existe una geodésica L_s en X , llamada el eje de s con conjunto de vértices

$$\{x \in V(X) : d(x, sx) = \min_{y \in V(X)} d(y, sy)\}.$$

Lema 192. Considerar dos automorfismos hiperbólicos s, t de un árbol X . Sea Γ_0 el grupo de generadores y sea $S_0 = \{s, t\}$. Si $L_s \neq L_t$ entonces

$$\omega(\Gamma_0, S_0) \geq 2.$$

Demostración. Numeremos los vértices $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de L_s y $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de L_t de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

- (i) $d(x_m, x_n) = d(y_m, y_n) = |m - n|$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Si L_s y L_t son disjuntas, entonces el segmento geodésico en X que une a L_s con L_t tiene a x_0 y y_0 como sus dos finales.
- (iii) Si L_s y L_t no son disjuntas, entonces $x_0 = y_0$ y $x_m \neq y_n$ para todo $m, n > 0$.

Salvo reemplazar s por s^{-1} y t por t^{-1} , podemos asumir que existen enteros $a, b \geq 1$ tales que $s(x_n) = x_{n+a}$ y $t(y_n) = y_{n+b}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sean P, Q los subconjuntos de $V(X)$ siguientes

$$\begin{aligned} P &= \{z \in V(X) : d(z, x_1) = d(z, x_0) + 1\} \\ Q &= \{z \in V(X) : d(z, y_1) = d(z, y_0) + 1\} \end{aligned}$$

Es claro que $P \cap Q = \emptyset$, $s^k(P \cup Q) \subset P$ y $t^k(P \cup Q) \subset Q$ para todo $k \geq 1$. Usando el lema del Ping-Pong, podemos mostrar que S_0 genera un semigrupo libre M_0 en dos generadores y así

$$\omega(M_0, S_0) = 2$$

Por lo tanto

$$\omega(\Gamma_0, S_0) \geq \omega(M_0, S_0) = 2.$$

□

Proposición 193. *Sea X un árbol y sea Γ un grupo finitamente generado actuando por automorfismos en X . Asumir cualquiera de las dos: Γ es transitivo en vértices $X^0 = V(X)$ o que X es bipartita, que Γ actúa por automorfismos pares en X y tiene exactamente dos órbitas en X^0 . Más aún, asumir que X es infinito y no isomorfo a una línea. Entonces*

$$\omega(\Gamma, S) \geq \sqrt[4]{2}$$

para cualquier conjunto finito S de generadores de Γ .

Demostración. Primero, supongamos que S contiene un elemento s el cual es hiperbólico en X con eje L_s . Si $u(L_s) = L_s$ para todo $u \in S$, deberíamos tener que $\gamma(L_s) = L_s$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y por lo tanto $L_s = X$ ya que Γ tiene a lo más dos órbitas en X^0 , lo cual contradice la hipótesis. Así, existe $t \in S$ con $t(L_s) \neq L_s$. Sea $S_0 = \{s, tst^{-1}\}$ y Γ_0 un subgrupo de Γ generado por S_0 , por el lema anterior tenemos que

$$\omega(\Gamma_0, S_0) \geq 2.$$

Denotemos por $B(k)$ la bola de radio k al rededor de $e \in \Gamma$ relativa a la longitud de la palabra l_s , de modo que $S_0 \subset B(3)$. Es claro que $\omega(\Gamma, B(k)) = \omega(\Gamma, S)^k$ para todo $k \geq 1$. Entonces, tenemos

$$\omega(\Gamma, S)^3 = \omega(\Gamma, B(3)) \geq \omega(\Gamma_0, S_0) \leq 2.$$

Ahora, suponer que cualquier $u \in S$ tiene un vértice fijo en X^0 . Entonces existe $s \in S \cup S^2$ hiperbólico en X y usando el argumento anterior

$$\omega(\Gamma, S)^4 = \omega(\Gamma, B(4)) \geq 2.$$

□

Teorema 194. Sean A, B dos grupos finitamente generados y sea C un grupo dado como un subgrupo de A y de B . Asumir que $([A : C] - 1)([B : C] - 1) \geq 2$, donde $([A : C] - 1) \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ denota el índice de un subgrupo C en A . Entonces

$$\omega(A *_C B) \geq \sqrt[4]{2}.$$

En particular, el producto libre con amalgamación $A *_C B$ es de crecimiento uniformemente exponencial.

Demostración. La prueba es una consecuencia directa de la proposición 193. □

El segundo objetivo de este trabajo es demostrar que el grupo fundamental de las variedades de la definición 153 tiene crecimiento exponencial, lo cual se prueba en el siguiente teorema y es una consecuencia del teorema 194.

Teorema 195. El grupo fundamental de una variedad M como las descritas en la definición 153 tiene crecimiento uniformemente exponencial.

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre el número de piezas Z_i que se identifican. Lo que haremos será probar solo el paso de inducción. Fijemos Z_i, Z_j y W^{ij} . Vamos a asociarle su gráfica de grupos descrita en el teorema 155. Por el ejemplo 152 tenemos que el grupo fundamental de esta gráfica de grupos esta dado por

$$\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W^{ij})} \pi_1(Z_j).$$

Por el corolario 134 tenemos que $\pi_1(W^{ij})$ es finitamente generado y por el teorema 154, podemos deducir que el grupo fundamental de M_i es finitamente generado, ya que V_i se puede retraer a M_i y V_i tiene una cantidad finita de fines E_i .

Recordemos que N_i es un cociente compacto de un grupo de Lie aesférico, simplemente conexo \tilde{N}_i por la acción de una retícula uniforme Γ_i de dimensión $n - n_i$, por lo tanto su grupo fundamental $\pi_1(N_i)$ es finitamente generado.

De la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(Z_i) \longrightarrow \pi_1(M_i) \longrightarrow 0$$

tenemos que $\pi_1(Z_i)$ es finitamente generado.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 194, lo cual implica que $\pi_1(Z_i) *_{\pi_1(W^{ij})} \pi_1(Z_j)$ tiene crecimiento uniformemente exponencial. □

Apéndice: Códigos de implementación de Plug-in de Grafeno

A. 1. Presentación Plug-in

La pieza base que necesitamos para poder teselar cualquier superficie con hexágonos la construimos con el siguiente código.

```
import maya.cmds as cmds
from maya.cmds import *
from math import *
from itertools import*

re=0.1#radio esfera
rc=0.02#radio cilindro
hc=0.5#altura cilindro
r0=1#distancia carbono-carbono

cmds.polySphere(r=re,n='e')#crea esfera
cmds.polyCylinder(r=rc,h=hc,n='c')#crear cilindro1 , moverlo y rotarlo
rotate(0,0,90)
move(0.25,0,0)
cmds.polyCylinder(r=rc,h=hc,n='c')#crear cilindro2 , moverlo y rotarlo
rotate(120,0,90)
move(-0.125,0,-sqrt(3)/8)
cmds.polyCylinder(r=rc,h=hc,n='c')#crear cilindro3 , moverlo y rotarlo
rotate(-120,0,90)
move(-0.125,0,sqrt(3)/8)

select(all=1)#seleccionar todos los objetos
cmds.polyUnite(n='hex')#unirlos en una sola pieza que llamaremos hex
```

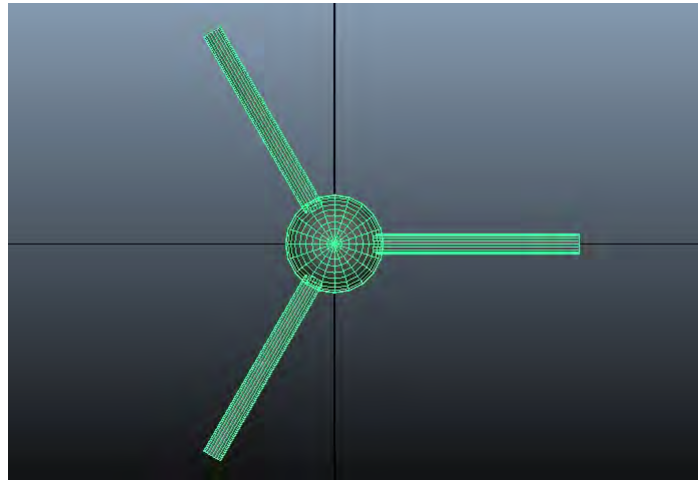


Figura 1: Pieza base

El plug-in final es el siguiente, donde las dos funciones que no están definidas son las que aparecen en las siguientes dos subsecciones.

```
import maya.cmds as cmds
from maya.cmds import *
from math import *
from itertools import*

def plano(self):

def nanotubo(self):

def comenzar():
    cmds.window(title="Mayas Grafeno", width=200,height=200)
    cmds.columnLayout()
    cmds.button(label="Plano",command=plano)
    cmds.button(label="Nanotubo",command=nanotubo)
    cmds.showWindow()

comenzar()
```

A. 1.1. Plano

Para construir un plano de grafeno, el código que utilizamos es el siguiente.

```

Lista=ls(s1=1)
def F(Li):
    elec=duplicate(Li)
    return elec

g=2
z=0.0

#Calcular las coordenadas de los vertices de los hexagonos

S1x=[-0.5*r0+3*m*r0 for m in range(-g,g)]
S1y=[sqrt(3.0)*(0.5+n)*r0 for n in range(-g,g)]
coord1=list(product(S1x,S1y))

S2x=[0.5*r0+3*i*r0 for i in range(-g,g)]
S2y=[sqrt(3.0)*(j+0.5)*r0 for j in range(-g,g)]
coord2=list(product(S2x,S2y))

S3x=[-1*r0+3*k*r0 for k in range(-g,g)]
S3y=[sqrt(3.0)*(l)*r0 for l in range(-g,g)]
coord3=list(product(S3x,S3y))

S4x=[1*r0+3*p*r0 for p in range(-g,g)]
S4y=[sqrt(3.0)*(q)*r0 for q in range(-g,g)]
coord4=list(product(S4x,S4y))

#Duplicar el objeto hex y moverlo a las coordenadas calculados

for pos in coord1:
    x,y=pos
    obj=F(Lista)
    move(x,y,z,obj)
    rotate(90,0,0,obj)

for pos2 in coord2:
    x2,y2=pos2

```

```

    obj=F(Lista)
    move(x2,y2,z,obj)
    rotate(90,0,60,obj)

for pos3 in coord3:
    x3,y3=pos3
    obj=F(Lista)
    move(x3,y3,z,obj)
    rotate(90,0,60,obj)

for pos4 in coord4:
    x4,y4=pos4
    obj=F(Lista)
    move(x4,y4,z,obj)
    rotate(90,0,0,obj)

a=select('hex')
cmds.delete() #Borrar el primer objeto hex

select(all=1)
cmds.polyUnite(n='graf')#Unimos todas las piezas
cmds.select('graf.vtx[0:]')#Seleccionamos todos los vertices
cmds.polyMergeVertex(d=0.001)#Los vertices que esten a una distancia
# menor a 0.001 se van a volver un solo vertice

```

A. 1.2. Cilindro-Nanotubo

Para constuir el Nanotubo, el código es el siguiente.

```

nh=8.0 #numero de hexagonos en la circunferencia'''
re=0.1 #radio de la esfera
rc=0.02 #radio del cilindro que sirve de enlace
hc=0.505 #altura del cilindro que sirve de enlace
r0=1.0 #longitud del enlace
rnt=(3.0*nh)/(2.0*pi) #radio del nanotubo
theta=360.0/(3.0*nh) #angulo para coordenadas de x,z en el nanotubo
cmds.polySphere(r=re,n='e')
cmds.polyCylinder(r=rc,h=hc,n='c')
rotate(0,0,90)

```

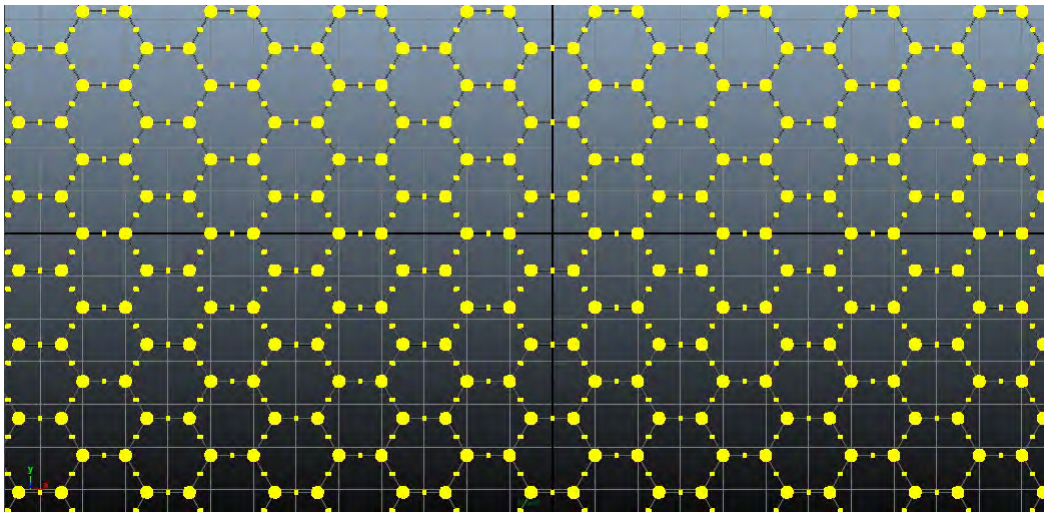


Figura 2: Plano

```

move(0.25,0,0)
cmds.polyCylinder(r=rc,h=hc,n='c')
rotate(120,0,90)
move(-0.125,0,-sqrt(3)/8)
cmds.polyCylinder(r=rc,h=hc,n='c')
rotate(-120,0,90)
move(-0.125,0,sqrt(3)/8)

select(all=1)
cmds.polyUnite(n='hex')

Lista=ls(sl=1)
def F(Li):
    elec=duplicate(Li)
    return elec

g=5 # constante para calcular las coordenadas en y
f=8 #debemos poner nh para calcular las coordenadas en x,z

S1x=[rnt*cos((3.0*theta*m)*pi/180) for m in range(0,f)]
S1y=[sqrt(3.0)*(0.5+n)*r0 for n in range(-g,g)]
S1z=[rnt*sin((3.0*theta*m)*pi/180) for m in range(0,f)]

```

```

S1=[]
for i in range(0,f):
    S1.append((S1x[i],S1z[i]))
coord1=list(product(S1y,S1))
del(S1)#borrar
S1=[]
for i in range(len(coord1)):
    S1.append((coord1[i][0],coord1[i][1][0],coord1[i][1][1]))

S2x=[rnt*cos((3.0*theta*m+theta)*pi/180) for m in range(0,f)]
S2y=[sqrt(3.0)*(j+0.5)*r0 for j in range(-g,g)]
S2z=[rnt*sin((3.0*theta*m+theta)*pi/180) for m in range(0,f)]
S2=[]
for i in range(0,f):
    S2.append((S2x[i],S2z[i]))
coord2=list(product(S2y,S2))
del(S2)#borrar
S2=[]
for i in range(len(coord2)):
    S2.append((coord2[i][0],coord2[i][1][0],coord2[i][1][1]))

S3x=[rnt*cos((3.0*theta*m+5.0*theta/2.0)*pi/180) for m in range(0,f)]
S3y=[sqrt(3.0)*(1)*r0 for l in range(-g,g)]
S3z=[rnt*sin((3.0*theta*m+5.0*theta/2.0)*pi/180) for m in range(0,f)]
S3=[]
for i in range(0,f):
    S3.append((S3x[i],S3z[i]))
coord3=list(product(S3y,S3))
del(S3)#borrar
S3=[]
for i in range(len(coord3)):
    S3.append((coord3[i][0],coord3[i][1][0],coord3[i][1][1]))

S4x=[rnt*cos((3.0*theta*m+3.0*theta/2.0)*pi/180) for m in range(0,f)]
S4y=[sqrt(3.0)*(q)*r0 for q in range(-g,g)]
S4z=[rnt*sin((3.0*theta*m+3.0*theta/2.0)*pi/180) for m in range(0,f)]
S4=[]
for i in range(0,f):
    S4.append((S4x[i],S4z[i]))

```

```
coord4=list(product(S4y, S4))
del(S4)#borrar
S4=[]
for i in range(len(coord4)):
    S4.append((coord4[i][0], coord4[i][1][0], coord4[i][1][1]))

for i in range(len(S1)):
    y, x, z=S1[i]
    obj=F(Lista)
    rotate(90, 270-3*theta*i, 0, obj)
    move(x, y, z, obj)

for i in range(len(S2)):
    y2, x2, z2=S2[i]
    obj=F(Lista)
    rotate(90, 90-(3*theta*i+theta), 0, obj)
    move(x2, y2, z2, obj)

for i in range(len(S3)):
    y3, x3, z3=S3[i]
    obj=F(Lista)
    rotate(90, 360-(3.0*theta*i+5.0*theta/2.0-90), 0, obj)
    move(x3, y3, z3, obj)

for i in range(len(S4)):
    y4, x4, z4=S4[i]
    obj=F(Lista)
    rotate(90, 360-(3.0*theta*i+3.0*theta/2.0-90)-180, 0, obj)
    move(x4, y4, z4, obj)

a=select('hex')
cmds.delete()

select(all=1)
cmds.polyUnite(n='graf')
cmds.select('graf.vtx[0:]')
cmds.polyMergeVertex(d=0.006)
```

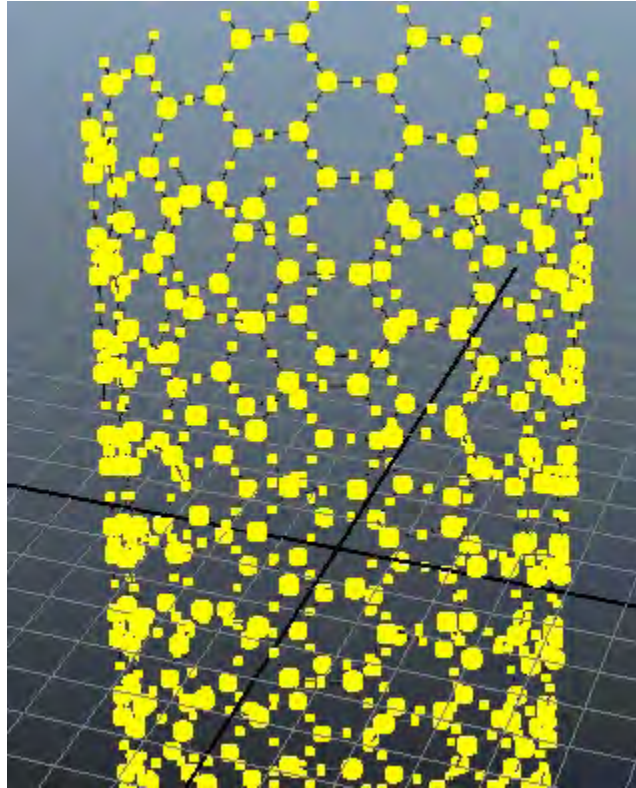


Figura 3: CNT

Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [2] J. M. Arrieta. *Modelling of Plasmonic and Graphene Nanodevices*. Springer, 2014.
- [3] N. Bárcenas, D. Juan-Pineda, and P. Suárez-Serrato. Topological rigidity of higher graph manifolds. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, en prensa*, 2016.
- [4] R. L. Bishop and B. O’Neill. Manifolds of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145:1–49, 1969.
- [5] M. Bourrigan. Sommes des puissances. <http://culturemath.ens.fr/content/sommes-des-puissances>, 2014.
- [6] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 1999.
- [7] I. Chavel. *Riemannian geometry: a modern introduction*, volume 98. Cambridge University Press, 2006.
- [8] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL.
- [9] P. de la Harpe and M. Bucher. Free products with amalgamation and hnn-extensions of uniformly exponential growth. *Math. Notes*, 67(6):686–689, 2000.
- [10] M. P. do Carmo Valero. *Riemannian geometry*. 1992.
- [11] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds. ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, 178:57–82, 1973.
- [12] P. Eberlein. Lattices in spaces of nonpositive curvature. *Annals of Mathematics*, 111(3):435–476, 1980.

-
- [13] P. Eberlein and B. O'Neill. Visibility manifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, 46(1):45–109, 1973.
- [14] R. Frigerio, J.-F. Lafont, and A. Sisto. Rigidity of high dimensional graph manifolds. *Astérisque*, (372), 2015.
- [15] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press.
- [16] H. Karcher. Report on m. gromov's almost flat manifolds. *Séminaire Bourbaki*, 31e année, 526, 1978/79.
- [17] Y. D. Kim, H. Kim, Y. Cho, J. H. Ryoo, C.-H. Park, P. Kim, Y. S. Kim, S. Lee, Y. Li, S.-N. Park, et al. Bright visible light emission from graphene. *Nature nanotechnology*, 2015.
- [18] C. Löh. Geometric group theory, an introduction. *Universität Regensburg*, 2011.
- [19] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. *Journal of Differential geometry*, 2(1):1–7, 1968.
- [20] M. S. Raghunathan. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer, 1972.
- [21] J. P. Serre. *Trees*. Springer, 1980.
- [22] K. I. Tserpes and N. Silvestre. *Modeling of carbon nanotubes, graphene and their composites*. Springer, 2014.
- [23] J. Xu. *Theory and application of graphs*, volume 10. Springer Science & Business Media, 2013.