



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE
LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MODELACIÓN DE PROCESOS CAÓTICOS MEDIANTE OPERADORES DE
TOEPLITZ

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
RONALD RICHARD JIMÉNEZ MUNGUÍA

DIRECTOR:
ALFREDO PERIS MANGUILLOT
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
RUBÉN ALEJANDRO MARTÍNEZ AVENDAÑO
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
SALVADOR PÉREZ ESTEVA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. MAYO DE 2017.

CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	3
2. Conceptos básicos de dinámica discreta	7
2.1. Funciones topológicamente transitivas	7
2.2. Funciones caóticas	8
2.3. Funciones mezclantes y débil mezclantes	9
3. Dinámica de operadores	11
3.1. Operadores hipercíclicos	12
3.2. Caos lineal	13
3.3. Operadores mezclantes	13
3.4. Operadores débil mezclantes	14
3.5. Clases de operadores no hipercíclicos	14
3.6. Operadores de Toeplitz	15
3.6.1. Matrices de Toeplitz	16
3.6.2. Propiedades básicas de operadores de Toeplitz	17
4. Hiperciclicidad en operadores de Toeplitz	21
4.1. Operadores de Toeplitz con tres diagonales	21
4.1.1. Otra condición de hiperciclicidad para operadores de Toeplitz tridia- gonales	30
4.2. Teorema de Shkarin-Baranov-Lichanskii	37
4.3. Operadores de Toeplitz con finitas diagonales	42
4.4. Operadores de Toeplitz con infinitas diagonales	50
5. Hiperciclicidad disjunta	55
6. Subhiperciclicidad	59
6.1. Subhiperciclicidad contra hiperciclicidad	60
7. Caos para transformaciones fraccionales	65
8. Conclusiones	69

Introducción

En años recientes las nociones de caos lineal e hiperciclicidad, además de algunas variantes de estos conceptos, han tomado importancia en la teoría de operadores [4] y [22]. En el tema central de este trabajo se combinan estas nociones con una teoría clásica como lo son los operadores de Toeplitz [32]. La forma de llevar a cabo este trabajo es dar condiciones para que un operador de Toeplitz cumpla diferentes conceptos de hiperciclicidad y caos lineal.

El problema de decidir si cualquier operador T en un espacio de Hilbert separable tiene un subespacio cerrado invariante no trivial es un problema abierto, esto en gran medida es la motivación de los conceptos de hiperciclicidad y caos lineal.

Teniendo en mente el problema tenemos que una forma de construir un subespacio invariante es la siguiente: Supongamos que tenemos un operador lineal $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert separable. Tomemos un $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$, y consideremos la cerradura del subespacio generado por

$$x, Tx, T^2x, T^3x, \dots$$

Esto genera un subespacio cerrado invariante bajo T , pero puede ocurrir que este subespacio cerrado sea todo el espacio \mathcal{H} . Es decir, podría suceder que el subespacio generado por

$$x, Tx, T^2x, T^3x, \dots$$

sea denso en \mathcal{H} . Si esto sucede, a T le llamamos *cíclico* y a x un vector *cíclico* para T . Pero si ocurre que este subespacio no es todo \mathcal{H} entonces tendremos un subespacio invariante no trivial. Entonces, podemos ver que T tiene un subespacio invariante no trivial si y sólo si T tiene algún vector no cero no-cíclico.

De manera similar pensamos ahora en subconjuntos cerrados invariantes. Tomemos un $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$ y consideremos el conjunto $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$, si la cerradura de este conjunto es todo el espacio \mathcal{H} , es decir el conjunto es denso en \mathcal{H} , a T le llamaremos *hipercíclico*, y a x un vector *hipercíclico* para T . Un operador lineal *caótico* es un operador hipercíclico que además tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Para un subespacio cerrado no cero M de un espacio de Banach X , un operador es llamado *subhipercíclico respecto a un subespacio M* de X si existe un vector $x \in X$ tal que $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\} \cap M$ es denso en M .

En la literatura el primer operador en el que se observó el fenómeno de hiperciclicidad, fuera del contexto de espacios de Hilbert, fue el operador de diferenciación en el espacio

vectorial de funciones enteras. Esto fue observado por G.R. MacLane [30] en 1952. Birkhoff [10], tiempo atrás, en 1929, había probado implícitamente la hiperciclicidad del operador de traslación $T_a f(z) = f(z+a)$, $a \neq 0$, en el espacio vectorial de funciones enteras. En estos dos ejemplos la cerradura de la órbita se toma en la topología normal del espacio de funciones enteras. En 1982 la teoría fue estudiada por Kitai [27] y a mediados de los 80's por Beauzamy [6], Gethner y Shapiro [19]. El término *hiperciclicidad* fue aparentemente introducido con el significado actual por Beauzamy; este término fue motivado por el término *ciclicidad*.

El primer ejemplo de un operador hipercíclico en un espacio de Hilbert o de Banach fue introducido por Rolewicz [39] en 1969. Rolewicz demostró la existencia de vectores hipercíclicos para el operador λS^* en ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) o c_0 , donde S^* es el operador desplazamiento hacia atrás, y $|\lambda| > 1$. Una demostración moderna de la hiperciclicidad de este operador usa el criterio de Kitai-Gethner-Shapiro [27]. En años recientes J. Bès y Peris demuestran en [9] que el criterio de hiperciclicidad para operadores es equivalente a que el operador sea *débil mezclante*.

Por otro lado, los operadores de Toeplitz fueron presentados por Otto Toeplitz en [44]. Su estudio moderno inicia con el trabajo de Brown y Halmos [13]. Estos operadores son de los más estudiados sobre el espacio de Hardy-Hilbert \mathcal{H}^2 , y en este espacio son los operadores para los cuales sus matrices respecto a una base estándar en \mathcal{H}^2 son constantes en las diagonales. Más detalles pueden verse en [13] y [23].

Los principales resultados de este trabajo son: Para operadores tridiagonales de Toeplitz damos condiciones explícitas de sus coeficientes para que sean hipercíclicos. Por ejemplo dado el operador de Toeplitz con la siguiente matriz,

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots \\ a & b & c & 0 & \ddots \\ 0 & a & b & c & \ddots \\ 0 & 0 & a & b & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

concluimos que es hipercíclico si se cumple que

$$|b| - 1 < \frac{|c| - |a|}{3}.$$

Además en el caso de más diagonales se encontraron condiciones suficientes para que los operadores sean hipercíclicos, donde las condiciones no dependen exclusivamente de sus coeficientes.

Sobre el concepto de subhiperciclicidad, un resultado es que damos un ejemplo de un operador T subhipercíclico para el cual existe un vector x tal que el conjunto $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$ es denso en alguna parte del subespacio donde está definido, pero no es denso en todo el subespacio [25].

Al final encontramos condiciones calculables para caos de $\varphi(B)$ sobre espacios de Banach, donde B es el desplazamiento usual hacia atrás y $\varphi(z)$ es una transformación fraccional lineal, que es una función analítica de la forma $\varphi(z) = (az+b)/(cz+d)$, con $bc - ad \neq 0$. Probamos en [26] que $\varphi(B)$ es caótico sobre ℓ^p , donde $1 \leq p < \infty$, si y solo si

$$|d|^2 - |c|^2 - |b\bar{d} - a\bar{c}| < |bc - ad|.$$

A continuación describimos el contenido de la tesis. En los capítulos dos y tres daremos las definiciones de caos e hiperciclicidad, además conceptos complementarios de estas definiciones y también resultados conocidos. Estos capítulos son principalmente obtenidos de [4], [22] y [32]. El capítulo cuatro es el tema central de este trabajo, que es caracterizar a los operadores de Toeplitz que son hipercíclicos. Damos una caracterización para operadores de Toeplitz con tres, finitas e infinitas diagonales diferentes de cero. En el capítulo cinco estudiamos hiperciclicidad disjunta, damos condiciones para que dos operadores tridiagonales de Toeplitz sean hipercíclicos disjuntos. En el capítulo seis estudiamos el concepto de subhiperciclicidad para operadores en espacios de Hilbert, damos ejemplos que responden algunas preguntas acerca de este concepto, este capítulo es un trabajo conjunto con Rubén Martínez-Avenidaño, Alfredo Peris y el autor de la presente tesis publicado en [25]. En el capítulo siete caracterizamos caos para transformaciones fraccionales lineales, este capítulo es un trabajo conjunto de Victor Galán, Félix Martínez-Giménez, Alfredo Peris y el autor de la presente tesis publicado en [26]. Por último tenemos el capítulo, en el cual presentamos conclusiones y problemas abiertos.

Conceptos básicos de dinámica discreta

Este capítulo está dedicado a presentar los conceptos elementales y la notación que usaremos en este trabajo referente a dinámica discreta. Más detalles de los conceptos y las pruebas de los teoremas y proposiciones siguientes pueden verse en [22].

Definición 2.1. *Un sistema dinámico (discreto) es un par (X, T) donde X es un espacio métrico y T una función continua $T : X \rightarrow X$.*

Recordemos que se define T^0 como la identidad en X , y recursivamente definimos $T^{n+1} = T^n T$ para $n \geq 0$. Llamamos la *órbita* de T en $x \in X$ al siguiente conjunto

$$\text{Orb}_T(x) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}.$$

2.1. Funciones topológicamente transitivas

En esta sección presentamos el concepto de función topológicamente transitiva, además un teorema que nos dice cuando una función es topológicamente transitiva.

Definición 2.2. *Un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ es llamado topológicamente transitivo si, cualesquiera U y V conjuntos abiertos no vacíos de X , existe algún $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones topológicamente transitivas:

1. Función duplicadora sobre el círculo S^1 . Está dada por $T : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$.
2. Rotación no racional. Está dada por $T : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto e^{i\alpha}z$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$.
3. Función tienda. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Teorema 2.3 (Birkhoff). *Sea T una función continua sobre un espacio métrico completo separable X sin puntos aislados. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. T es topológicamente transitivo.
2. Existe algún $x \in X$ tal que la $\text{Orb}(x, T)$ es densa en X .

Si una de estas condiciones se cumple entonces el conjunto de puntos en X con órbita densa es un conjunto G_δ denso.

2.2. Funciones caóticas

En esta sección presentamos el concepto de función caótica y resultados acerca de esto.

Definición 2.4. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Decimos que un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ tiene dependencia sensible a condiciones iniciales si existe algún $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe algún $y \in X$ con $d(x, y) < \epsilon$ tal que para algún $n \geq 0$ se tiene $d(T^n x, T^n y) > \delta$. El número δ es llamado una constante de sensibilidad para T .

Ejemplos:

1. La función tienda tiene dependencia sensible a condiciones iniciales con constante de sensibilidad $1/4$. Si $x \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$ existe una $n \geq 0$ tal que la bola de radio ϵ alrededor de x contiene los puntos y_1 y y_2 con $T^n y_1 = 0$ y $T^n y_2 = 1$ entonces $|T^n x - T^n y_j| \geq \frac{1}{2}$ para $j = 1$ o para $j = 2$.
2. Las rotaciones del círculo no tienen dependencia sensible a condiciones iniciales ya que $T^n z_1 - T^n z_2 = z_1 - z_2$ para cualquier $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$.

Definición 2.5 (Devaney). Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Decimos que un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ es caótico si

1. T tiene dependencia sensible a condiciones iniciales;
2. T es topológicamente transitivo;
3. T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Ejemplo:

1. Función duplicadora sobre el círculo. Los puntos periódicos son exactamente las raíces de la ecuación $z^{2^n} = 1$, $n \geq 1$. Entonces la función duplicadora tiene un conjunto denso de puntos periódicos. Usando el teorema 2.3 concluimos que este es un ejemplo de una función caótica.
2. Las rotaciones no son caóticas, pues no tienen dependencia sensible a condiciones iniciales como se mostró antes.

Teorema 2.6 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey). Sea X un espacio métrico no finito. Si un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ es topológicamente transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces T tiene dependencia sensible a condiciones iniciales con respecto a cualquier métrica que defina la topología de X .

Ejemplo:

Sea el espacio $\Sigma_2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} ; x_n \in \{0, 1\}\}$ y sea la función

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, \quad \sigma(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Definimos la topología de Σ_2 con la métrica $d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$, bajo esta métrica σ es continuo. Se puede demostrar que σ , el desplazamiento en dos símbolos, es caótico [22].

2.3. Funciones mezclantes y débil mezclantes

En esta sección presentamos el concepto de función mezclante y débil mezclante.

Definición 2.7. *Un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ es llamado mezclante si para cualesquiera conjuntos abiertos U y V no vacíos de X , existe algún $N \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.*

Algunos ejemplos de funciones mezclantes son la función duplicadora sobre el círculo y la función tienda.

Antes de definir una función débil mezclante necesitamos definir el producto de funciones. Sean $T : X \rightarrow X$ y $S : Y \rightarrow Y$ dos sistemas dinámicos. El producto cartesiano $X \times Y$ está dotado de la topología producto, la cual está inducida por ejemplo por la métrica $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$, donde d_X y d_Y son las métricas de X y Y .

Definición 2.8. *Sean $T : X \rightarrow X$ y $S : Y \rightarrow Y$ dos sistemas dinámicos. Definimos la función $T \times S$ como*

$$T \times S : X \times Y \rightarrow X \times Y, \quad T \times S(x, y) = (Tx, Sy).$$

Entonces $T \times S$ es continuo y sus iteraciones son $(T \times S)^n = T^n \times S^n$. A continuación definimos función débil mezclante.

Definición 2.9. *Un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ es llamado débil mezclante si $T \times T$ es topológicamente transitivo.*

Es fácil ver que T es débil mezclante si y sólo si para cada cuarteta de abiertos U_1, U_2, V_1 y V_2 no vacíos contenidos en X , existe algún $n \geq 0$ tal que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Observación: Si una función es mezclante entonces es débil mezclante y si una función es débil mezclante entonces es topológicamente transitiva.

Dinámica de operadores

Este capítulo está dedicado a dar los conceptos elementales y la notación que usaremos en este trabajo referente a dinámica de operadores. Más detalles de los conceptos y las demostraciones de los resultados de todas las secciones se pueden encontrar en [22], excepto donde se indique otra referencia [32].

Definición 3.1. *Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial X sobre un campo \mathbb{K} dotado con una sucesión creciente (P_n) de seminormas que cumplen que si $P_n(x) = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $x = 0$. Además pedimos que el espacio sea completo con la métrica*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, P_n(x - y)), \quad x, y \in X.$$

Nota: La métrica es invariante bajo traslaciones.

Ejemplos:

1. $H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ entera}\}$ es un espacio de Fréchet, con la sucesión creciente de semi normas $P_n(f) := \sup_{|z| \leq n} |f(z)|$.
2. El espacio de todas las sucesiones (reales o complejas).

$$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n; x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$$

es un espacio de Fréchet, con la sucesión creciente de semi normas $p_n(x) := \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ donde $x = (x_k)_k$

Definición 3.2. *Sean X y Y espacios de Fréchet. A una transformación lineal continua $T : X \rightarrow Y$ le llamamos un operador.*

Antes ya definimos un sistema dinámico, ahora aumentando linealidad tenemos la siguiente definición.

Definición 3.3. *Un sistema dinámico lineal es un par (X, T) que consiste de un espacio de Fréchet separable X y un operador $T : X \rightarrow X$.*

3.1. Operadores hipercíclicos

Definición 3.4. Un operador $T : X \rightarrow X$ es llamado **hipercíclico** si existe un $x \in X$ tal que el conjunto

$$\text{Orb}_T(x) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$$

es denso en X . Además decimos que el vector x es un vector hipercíclico para T .

Observación 3.5. Un operador no tiene subconjuntos cerrados invariantes (no triviales) si y solo si cada vector (diferente de cero) es hipercíclico.

Acerca de hiperciclicidad lo primero en tomar en cuenta es que no se da en espacios vectoriales complejos (sobre \mathbb{C}) de dimensión finita. Un corolario del siguiente teorema dice que no existen vectores hipercíclicos en dimensión finita. El teorema, que es bien conocido, nos da una condición para que un operador no sea hipercíclico.

Teorema 3.6. Sea $T : X \rightarrow X$ un operador. Si $T^* : X^* \rightarrow X^*$, el operador adjunto de T , tiene un autovalor λ entonces T no es hipercíclico.

El siguiente corolario prueba que no existen vectores hipercíclicos en dimensión finita.

Corolario 3.7. Sea $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador, entonces T no es hipercíclico.

Teorema 3.8. Sea T un operador con inverso continuo T^{-1} , entonces T es hipercíclico si y solo si T^{-1} es hipercíclico.

El teorema 2.3 se puede reescribir en este contexto como:

Teorema 3.9 (Transitividad de Birkhoff). Un operador T es hipercíclico si y sólo si es topológicamente transitivo. En este caso el conjunto de vectores hipercíclicos $HC(T)$ es un conjunto G_δ denso.

Ejemplos:

1. Los operadores de Birkhoff son hipercíclicos. Estos operadores están definidos sobre el espacio $H(\mathbb{C})$ de funciones enteras y son los operadores traslación dados por $T_a f(z) = f(z + a)$, con $a \neq 0$.
2. El operador de MacLane es hipercíclico. Este es el operador diferenciación $D : f \mapsto f'$ sobre las funciones enteras $H(\mathbb{C})$.
3. Los operadores de Rolewicz son hipercíclicos. Están definidos sobre el espacio $X := \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, ó $X := c_0$ y son los múltiplos del desplazamiento hacia atrás $T = \lambda B : X \rightarrow X, (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \lambda(x_2, x_3, x_4, \dots)$ con $|\lambda| > 1$.

3.2. Caos lineal

En esta sección presentamos el concepto de Caos Lineal y un criterio para saber si un operador es caótico, es importante mencionar que un operador caótico es un caso particular de operador hipercíclico.

Definición 3.10. *Un operador T se dice que es caótico si satisface las siguientes condiciones.*

1. T es hipercíclico.
2. T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Teorema 3.11. *Sea T un operador hipercíclico. Entonces T tiene dependencia sensible a condiciones iniciales (con respecto a cualquier métrica invariante bajo traslaciones que defina la topología de X).*

Se puede demostrar que los operadores de Rolewicz, Birkhoff y MacLane son caóticos.

3.3. Operadores mezclantes

En esta sección presentamos el concepto de operador mezclante y un criterio para saber si un operador es mezclante, es importante mencionar que un operador mezclante es en particular hipercíclico.

Definición 3.12. *Un sistema dinámico lineal $T : X \rightarrow X$ es llamado mezclante si cualesquiera conjuntos abiertos U y V no vacíos de X , existe algún $N \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.*

El siguiente teorema muestra una condición suficiente para que un operador sea mezclante.

Teorema 3.13. *(Criterio de Kitai [22], [27]). Sea $T : X \rightarrow X$ un operador. Si existen subconjuntos densos X_0, Y_0 en X y una función $S : Y_0 \rightarrow X_0$ (no necesariamente lineal ni continua) tal que para cualquier $x \in X_0, y \in Y_0$*

- i) $T^n x \in Y_0$ cuando $n \in \mathbb{N}$,
- ii) $S^n y \in X_0$ cuando $n \in \mathbb{N}$,
- iii) $T \circ S(y) = y$

Entonces T es mezclante en X , y en particular hipercíclico.

Los operadores de Rolewicz, de Birkhoff y de MacLane son ejemplos de operadores mezclantes.

Existen operadores mezclantes que no son caóticos. Por ejemplo consideramos el desplazamiento con peso $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ donde $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{4}{3}x_4, \dots)$, se puede demostrar que es un operador mezclante pero que no tiene puntos periódicos [22]. El ejemplo se puede generalizar para $\ell^p, 1 \leq p < \infty$.

3.4. Operadores débil mezclantes

En esta sección presentamos el concepto de operador débil mezclante, además un criterio para saber si un operador es débil mezclante. Es importante mencionar que al igual que los operadores caóticos y mezclantes un operador débil mezclante es un caso particular de operador hipercíclico.

Definición 3.14. Sean $T_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ y $T_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ dos operadores. Definimos la suma $T_1 \oplus T_2$ como

$$T_1 \oplus T_2(x_1, x_2) = (T_1x_1, T_2x_2).$$

Observación: En general si X y Y son espacios de Fréchet el espacio $X \oplus Y$ es un espacio de Fréchet, donde las seminormas inducen la topología producto sobre $X \oplus Y$.

Definición 3.15. Un sistema dinámico lineal $T : X \rightarrow X$ es llamado débil mezclante si el operador $T \oplus T$ es hipercíclico.

Teorema 3.16 (Criterio de Hiperciclicidad de Gethner-Shapiro). Sea T un operador. Si existen conjuntos densos $X_0, Y_0 \subset X$, una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos, funciones $S_{n_k} : Y_0 \rightarrow X, k \geq 1$, tal que para cualesquiera $x \in X_0, y \in Y_0$,

1. $T^{n_k}x \rightarrow 0$, si $k \rightarrow \infty$,
2. $S_{n_k}y \rightarrow 0$, si $k \rightarrow \infty$,
3. $T^{n_k}S_{n_k}y \rightarrow y$, si $k \rightarrow \infty$,

entonces T es débil mezclante y en particular hipercíclico.

A continuación damos un ejemplo de un operador débil mezclante que no es mezclante.

Ejemplo 3.17. Sea $T : c_0 \rightarrow c_0$ un desplazamiento con peso dado por $T(x_1, x_2, \dots) = (\omega_2x_2, \omega_3x_3, \dots)$, con $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) = (1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-1}, \dots)$. Se puede demostrar que este es un operador débil mezclante que no es mezclante [22].

De la Rosa y Read demostraron que existen ejemplos de operadores hipercíclicos que no son débil mezclantes [17].

3.5. Clases de operadores no hipercíclicos

Basado en condiciones necesarias para hiperciclicidad se puede demostrar que ciertas clases de operadores no contienen operadores hipercíclicos.

En esta sección T denotará un operador sobre un espacio de Banach X (real o complejo).

Definición 3.18. Un operador $T : X \rightarrow X$ es llamado una contracción si $\|T\| \leq 1$, quasi-nilpotente si $\lim_n \|T^n\|^{1/n} = 0$, de potencias acotadas si $\sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$.

Proposición 3.19. *Los operadores de contracción, quasinilpotentes y de potencias acotadas no son hipercíclicos [22].*

También se puede demostrar lo siguiente.

Proposición 3.20. *Los operadores compactos y de rango finito no son hipercíclicos.*

En Álgebra Lineal, una matriz con entradas complejas es *normal* si $\overline{A}^t A = A \overline{A}^t$. Siguiendo la analogía en espacios de Hilbert \mathcal{H} un operador es *normal* si conmuta con su adjunto, es decir

$$T^*T = TT^*,$$

y es *hiponormal* si se cumple que

$$T^*T - TT^* \geq 0.$$

Un resultado en conexión con operadores hipercíclicos que es importante saber es el siguiente.

Teorema 3.21. *Si T es hiponormal o normal sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} entonces T no es hipercíclico [11].*

3.6. Operadores de Toeplitz

Más detalles de los conceptos y las demostraciones de los resultados de esta sección se pueden encontrar en [32]. Empezamos definiendo el espacio más importante donde desarrollamos este trabajo.

Definición 3.22. *Definimos el espacio de Hardy-Hilbert, denotado con \mathcal{H}^2 , como el espacio de todas las funciones analíticas para las cuales su representación en series de potencias es cuadrado sumable, es decir*

$$\mathcal{H}^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

El producto punto en \mathcal{H}^2 está definido como

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. La norma del vector $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La función $\| \cdot \| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ es claramente un isomorfismo de ℓ^2 a \mathcal{H}^2 . En particular \mathcal{H}^2 es un espacio de Hilbert separable.

Denotamos con $L^2(S^1)$ al espacio de las funciones cuadrado integrables sobre S^1 con respecto a la medida de Lebesgue normalizada. Definimos el espacio $\tilde{\mathcal{H}}^2$ como el siguiente subespacio de $L^2(S^1)$

$$\tilde{\mathcal{H}}^2 = \{ \tilde{f} \in L^2(S^1) : \tilde{f}(e^{-in}) = 0 \text{ para todo } n < 0 \},$$

donde \tilde{f} tiene serie de Fourier de la forma

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \text{ con } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Sea $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}^2$ con serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, y sea $f \in \mathcal{H}^2$ con serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Para $0 < r < 1$, sea f_r definida como

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Es claro que $f_r \in \tilde{\mathcal{H}}^2$ para cada r . Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.23. *Para cada $f \in \mathcal{H}^2$, existe una sucesión creciente r_n de números positivos que convergen a 1 y una $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}^2$ tal que*

$$\lim_n f(r_n e^{i\theta}) = \tilde{f}(e^{i\theta}) \quad \text{c.t.p.}$$

Entonces tenemos que existe una identificación natural entre las funciones de \mathcal{H}^2 y $\tilde{\mathcal{H}}^2$, identificamos cada $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}^2$ con serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ con la función analítica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. A partir de ahora usaremos la notación \mathcal{H}^2 para referirnos a \mathcal{H}^2 o $\tilde{\mathcal{H}}^2$.

Observamos que $\tilde{\mathcal{H}}^2$ es un subespacio cerrado de $L^2(S^1)$. Sea $P : L^2(S^1) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}^2$ la proyección ortogonal de $L^2(S^1)$ a $\tilde{\mathcal{H}}^2$, definida para $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ como $Pf = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$.

Denotaremos \mathcal{H} como todas las funciones analíticas que están acotadas en el disco unitario. La norma de una función $f \in \mathcal{H}$ está definida como $\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$. Como la convergencia en norma en \mathcal{H} implica convergencia uniforme sobre \mathbb{D} , se puede verificar que \mathcal{H} es un espacio de Banach. Además se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.24. *Cada función en \mathcal{H} está en \mathcal{H}^2 .*

3.6.1. Matrices de Toeplitz

En esta sección presentamos los conceptos referentes a matrices de Toeplitz. Empezamos definiendo el operador multiplicación.

Definición 3.25. *Sea ϕ una función en $L^2(S^1)$. El operador de multiplicación por ϕ , denotado por M_ϕ , está definido como $M_\phi f = \phi f$ para cada $f \in L^2(S^1)$. M_ϕ es un operador acotado en $L^2(S^1)$.*

Cada operador lineal en un espacio de Hilbert separable tiene una representación matricial respecto a una base ortonormal del espacio.

El siguiente resultado nos muestra la representación matricial de un operador de Toeplitz.

Teorema 3.31. *La matriz del operador de Toeplitz con símbolo ϕ con respecto a la base $e^{in\theta}_{n=0}$ de \mathcal{H}^2 es*

$$T_\phi = \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \phi_{-3} & & \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \ddots & \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots & \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde ϕ_k es el k -ésimo coeficiente de Fourier de ϕ .

A continuación damos la definición de operador de Toeplitz analítico.

Definición 3.32. *Un operador de Toeplitz T_ϕ es un operador de Toeplitz analítico si ϕ está en \mathcal{H} .*

El teorema a continuación nos da la representación matricial de un operador de Toeplitz analítico.

Teorema 3.33. *Si T_ϕ es un operador de Toeplitz analítico, entonces la matriz de T_ϕ con respecto a la base $e^{in\theta}_{n=0}$ es*

$$T_\phi = \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \phi_1 & \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde $\phi(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{ik\theta}$.

El siguiente teorema nos muestra que el operador adjunto de un operador de Toeplitz es el mismo operador pero que tiene como símbolo la función conjugada.

Teorema 3.34. *La función $\phi \mapsto T_\phi$ es inyectiva, acotada, lineal, preserva adjunto (i. e., $T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}$) y mapea L^∞ sobre el espacio de los operadores de Toeplitz visto como un subespacio del álgebra de los operadores lineales acotados sobre \mathcal{H}^2 .*

A continuación damos la definición de operador de Toeplitz co-analítico.

Definición 3.35. *Un operador de Toeplitz T_ϕ es un operador de Toeplitz co-analítico si T_ϕ^* es analítico.*

Los teoremas a continuación nos dan propiedades de los operadores de Toeplitz.

Teorema 3.36. *Un operador de Toeplitz es autoadjunto si y sólo si su símbolo toma valores reales casi en todas partes.*

Teorema 3.37. *El único operador de Toeplitz compacto es el operador nulo.*

A continuación damos un teorema que nos da el conjunto de valores propios para un caso particular de un operador T_ϕ . En el teorema siguiente $\sigma(T)$ representa el espectro de T y Ind_a representa el índice de un punto a respecto a una función ϕ , que es el número de vueltas que le da la gráfica de ϕ al punto a .

Teorema 3.38. *Sea ϕ una función continua sobre S^1 , entonces*

$$\sigma(T_\phi) = \text{ran } \phi \cup a \in \mathbb{C} : a \in \text{ran } \phi \text{ y } Ind_a \phi = 0 ,$$

donde $\text{ran } \phi$ es el rango de ϕ .

En nuestro trabajo usaremos el caso particular cuando la gráfica de ϕ es una curva cerrada sin intersecciones, por lo cual $\sigma(T_\phi)$ es igual al $\text{ran } \phi$ unión su interior (la región que encierra).

Observamos que un operador multiplicación sobre \mathcal{H}^2 es un operador de Toeplitz analítico si su símbolo $\phi \in \mathcal{H}^2$, a continuación damos un teorema acerca de los adjuntos de estos operadores.

Teorema 3.39. *Sea $\phi \in \mathcal{H}$ una función no constante y sea T_ϕ^* el adjunto del operador de Toeplitz T_ϕ sobre \mathcal{H}^2 . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) T_ϕ^* es hipercíclico;
- (ii) T_ϕ^* es mezclante;
- (iii) T_ϕ^* es caótico;
- (iv) $\phi(\mathbb{D}) \setminus S^1 = \emptyset$.

La demostración se encuentra en [22].

El teorema anterior nos da condiciones para hiperciclicidad de operadores adjuntos de operadores de Toeplitz analíticos, es decir de operadores de Toeplitz co-analíticos.

Por otro lado sabemos que los operadores de Toeplitz co-analíticos siempre tienen valores propios [32], por el teorema 3.6 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.40. *Los operadores analíticos de Toeplitz nunca son hipercíclicos.*

Por lo anterior ya tenemos resultados acerca de hiperciclicidad de operadores de Toeplitz con símbolo analítico y co-analítico, en el siguiente capítulo estudiaremos hiperciclicidad en operadores de Toeplitz que tienen símbolo con parte analítica y co-analítica.

Hiperciclicidad en operadores de Toeplitz

En este capítulo daremos condiciones para que operadores de Toeplitz sean hipercíclicos. Iniciaremos con los operadores cuya matriz asociada tiene solo tres diagonales, después seguiremos con los que su matriz asociada tiene un número finito de diagonales y terminaremos con los operadores cuya matriz asociada tiene una diagonal analítica y un número infinito de diagonales coanalíticas.

4.1. Operadores de Toeplitz con tres diagonales

Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 & \ddots \\ 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $a_{-1}, a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. ¿Cuándo T es hipercíclico?

Observamos que $T_{\bar{z}} = T_{1/z}$ es el operador desplazamiento hacia atrás S^* sobre \mathcal{H}^2 , y T_z es el operador desplazamiento hacia adelante S sobre \mathcal{H}^2 , es decir para f en \mathcal{H}^2 se cumple que:

$$T_{\bar{z}}f = S^*(f) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \quad \text{y} \quad T_zf = S(f(z)) = zf(z). \quad (4.2)$$

Concluimos que el operador asociado a la matriz 4.1 también puede verse como $a_1S + a_0I + a_{-1}S^*$.

A continuación enunciamos el criterio de Godefroy-Shapiro [22], el cual usaremos para demostrar resultados que se dan a continuación.

Teorema 4.1. (Criterio Godefroy-Shapiro). Sea $T : X \rightarrow X$ un operador. Supongamos que los subespacios

$$X_0 := \text{span } \{x \in X ; Tx = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{K} \text{ con } |\lambda| < 1\} \text{ y}$$

$$Y_0 := \text{span } \{x \in X ; Tx = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{K} \text{ con } |\lambda| > 1\}$$

son densos en X . Entonces T es mezclante, y en particular hipercíclico. Si, además,

$$Z_0 := \text{span } \{x \in X ; Tx = e^{\alpha\pi i} x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

es denso en X , entonces T es caótico.

A continuación damos condiciones explícitas sobre a_{-1}, a_0 y a_1 para que el operador de Toeplitz $T = a_{-1}S^* + a_0I + a_1S$ sea hipercíclico. Si a_1 es cero entonces T es un operador co-analítico, y ya existen condiciones para que estos operadores sean hipercíclicos (teorema 3.39). Si a_{-1} es cero entonces T es un operador analítico, y estos operadores nunca son hipercíclicos (teorema 3.40). El objetivo de esta sección es dar condiciones para que estos operadores sean hipercíclicos cuando a_1 y a_{-1} sean ambos diferentes de cero.

Para usar el criterio debemos encontrar vectores y valores propios. Resolveremos la ecuación $Tf = \lambda f$ para $f \in \mathcal{H}^2$. Tenemos que $T = a_{-1}S^* + a_0I + a_1S = a_{-1}T_{\bar{z}} + a_0I + a_1T_z$, entonces $Tf = \lambda f$ es equivalente a

$$a_{-1} \frac{f(z) - f(0)}{z} + a_0f(z) + a_1zf(z) = \lambda f(z).$$

Si $f(0) = 0$ tenemos que

$$(a_{-1} + (a_0 - \lambda)z + a_1z^2)f(z) = 0$$

por lo cual $f(z)$ es idénticamente cero, pues f es analítica en \mathbb{D} .

Si $f(0)$ es diferente de cero, tenemos que

$$f(z) = \frac{a_{-1}f(0)}{a_1z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}}.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos $f(0) = 1$.

Ya tenemos la forma de f , pero necesitamos que f esté en \mathcal{H}^2 . Además, necesitamos conjuntos densos de este tipo de funciones para poder aplicar el criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1). Tenemos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo f está en \mathcal{H}^2 ?
2. ¿Cuándo estas funciones forman un conjunto denso en \mathcal{H}^2 ?

Primero resolvemos la primera pregunta. Tenemos que

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{a_1z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}},$$

necesitamos que f sea una función analítica, *i. e.* que el polinomio $q_\lambda(z) := a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}$ tenga raíces z_1, z_2 tal que $|z_1| > 1$ y $|z_2| > 1$. Esto es equivalente a que las raíces del polinomio

$$p_\lambda(z) := z^2 q_\lambda(1/z) = a_{-1} z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_1$$

pertenezcan a \mathbb{D} .

Para resolver esto necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.2. (*Prueba de Jury*) [1] Para $w \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$, las raíces del polinomio

$$z^2 + wz + r = 0,$$

pertenecen a \mathbb{D} si y solo si $|r| < 1$ y

$$\left(\frac{\operatorname{Re}(w)}{1+r} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(w)}{1-r} \right)^2 < 1.$$

Ahora aplicaremos la *Prueba de Jury* al polinomio $p_\lambda(z)$ pero cuando a_1 y a_{-1} son números reales. Sobre esto trata el siguiente lema.

Lema 4.3. Sean $a_1, a_{-1} \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{C}$ tales que $|a_1| < |a_{-1}|$. Si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\left(\frac{\operatorname{Re}(a_0 - \lambda)}{|a_1| + |a_{-1}|} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(a_0 - \lambda)}{|a_1| - |a_{-1}|} \right)^2 < 1, \quad (4.3)$$

entonces las raíces del polinomio $p_\lambda(z)$ pertenecen a \mathbb{D} .

Demostración. Como $r = \frac{|a_1|}{|a_{-1}|}$ cumple que $|r| < 1$, usando la Prueba de Jury se tiene que ambas raíces del polinomio son de módulo menor que uno si

$$\left(\frac{\operatorname{Re}(w)}{1+r} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(w)}{1-r} \right)^2 < 1,$$

esto ocurre si y solo si $w = \frac{a_0 - \lambda}{a_{-1}}$ satisface que

$$\left(\frac{\operatorname{Re}(a_0 - \lambda)}{|a_1| + |a_{-1}|} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(a_0 - \lambda)}{|a_1| - |a_{-1}|} \right)^2 < 1$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

A continuación encontramos la región explícita donde debemos tomar a_0 para que cumpla la desigualdad (4.3) para algún $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Para esto definimos los siguientes números y conjuntos.

En lo siguiente los términos interior y exterior de curvas cerradas simples son usados en el sentido del teorema de la curva de Jordan. Sea $s_1 := |a_{-1}| + |a_1|$, $s_2 := |a_{-1}| - |a_1|$. Denotamos la elipse

$$E := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{(s_1)^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{(s_2)^2} = 1 \right\},$$

su interior como

$$E_0 := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{(s_1)^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{(s_2)^2} < 1 \right\}.$$

Definimos el conjunto $A_0 := \{ z \in \mathbb{C} : d(z, E) < 1 \}$, es decir como el interior de la curva paralela exterior a distancia uno de la elipse E (cabe decir que la curva paralela no es una elipse). Sea F el conjunto de puntos de la curva paralela interior a distancia 1 de E y sea A_0 la cerradura del interior de F . En el apéndice A damos una descripción más detallada de curvas paralelas.

Concluimos el siguiente resultado.

Lema 4.4. *Sean $a_1, a_{-1} \in \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{C}$. Supongamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

Caso 1. $a_1 + a_{-1} > 1$ y $a_0 \in A_0$.

Caso 2. $a_1 + a_{-1} = 1$ y $a_0 \in A_0 \setminus \{0\}$.

Caso 3. $a_1 + a_{-1} < 1$ y $a_0 \in A_0 \setminus A_0$.

Entonces existe un $\lambda \in S^1$ tal que se cumple $a_0 - \lambda$ pertenece a E_0 (es decir que λ cumple la desigualdad (4.3)).

Demostración. Tenemos tres casos.

Caso 1. Sea $a_1 + a_{-1} > 1$ y $a_0 \in A_0$.

Afirmación 1: Existe $z_1 \in E_0$ tal que $d(a_0, z_1) < 1$.

Prueba: Si $a_0 \in E_0$, es claro que se cumple la afirmación. Supongamos que $a_0 \in A_0 \setminus E_0$, tomamos el segmento ortogonal hacia E que inicia en a_0 , de longitud uno. Por la definición de A_0 (su distancia a E es 1) tenemos que existe un punto z_1 en el segmento en E_0 tal que $d(a_0, z_1) < 1$.

Afirmación 2: Existe $z_2 \in E_0$ tal que $d(a_0, z_2) > 1$.

Prueba: Si $a_0 \in E_0$, la afirmación se cumple pues E_0 es el interior de una elipse con un eje más grande que uno. Si $a_0 \in A_0 \setminus E_0$ el razonamiento es igual al caso 1.

Consideremos la función continua $f : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z) = d(a_0, z)$. Como E_0 es conexo, el conjunto $f(E_0)$ es un intervalo de \mathbb{R} , que como vimos anteriormente tiene puntos mayores y menores que 1, por lo tanto existe $z_0 \in E_0$ tal que $d(a_0, z_0) = 1$. Tomando $\lambda = a_0 - z_0$ obtenemos el resultado.

En la figura 4.1 ilustramos un ejemplo particular de este caso.

Caso 2. $a_1 + a_{-1} = 1$ y $a_0 \in A_0 \setminus \{0\}$.

Afirmación 1: Existe $z_1 \in E_0$ tal que $d(a_0, z_1) < 1$.

Prueba: Igual al caso 1.

Afirmación 2: Existe $z_2 \in E_0$ tal que $d(a_0, z_2) > 1$.

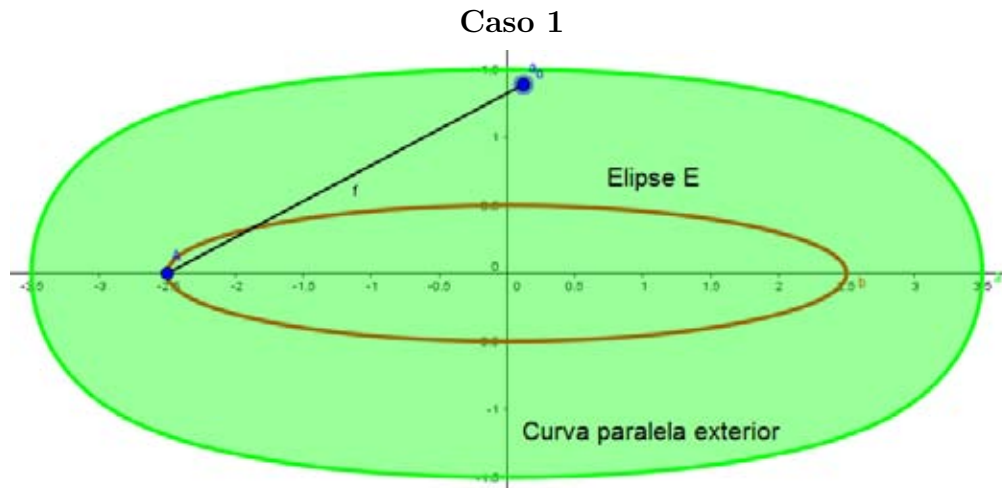


Figura 4.1: La elipse E tiene eje mayor $s_1 = 5/2$ y eje menor $s_2 = 1/2$. La curva verde es la curva exterior paralela a distancia uno de la elipse E , su interior es A_0 .

Prueba: Si $a_0 \in E_0 = 0$, la afirmación se cumple pues un eje de la elipse E es uno y el único punto en E_0 que no tiene un punto en E_0 a distancia mayor a 1 podría ser 0. Si $a_0 \notin A_0 \cap E_0$, sea $a_0 = (x_0, y_0)$. Tomamos el segmento de a_0 al punto $(-sgn(x_0), 0)$, es claro que el segmento tiene longitud mayor a uno, por lo cual se tiene que existe z_2 en el segmento tal que $e_0 \in E_0$ y $d(a_0, z_2) > 1$.

Consideremos la función continua $f : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z) = d(a_0, z)$. Como E_0 es conexo, el conjunto $f(E_0)$ es un intervalo de \mathbb{R} , que como vimos anteriormente tiene puntos mayores y menores que 1, por lo tanto existe z_0 tal que $d(a_0, z_0) = 1$. Tomando $\lambda = a_0 - z_0$ obtenemos el resultado.

En la figura 4.2 damos un ejemplo particular de este caso.

Caso 3. $a_1 + a_{-1} < 1$ y $a_0 \in A_0 \cap A_0$.

Prueba: Si $a_0 \in A_0 \cap A_0$ entonces existe un punto $z_1 \in E_0$ tal que $d(a_0, z_1) < 1$ por el mismo argumento de antes. Llamemos G al conjunto frontera de A_0 , todo punto de G dista uno, interiormente de algún punto de E . Por tanto como $a_0 \notin A_0$, existe algún elemento z_2 de E_0 tal que $d(a_0, z_2) > 1$. Consideremos la función continua $f : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z) = d(a_0, z)$. Como E_0 es conexo, el conjunto $f(E_0)$ es un intervalo de \mathbb{R} , que como vimos anteriormente tiene puntos mayores y menores que 1, por lo tanto existe z_0 tal que $d(a_0, z_0) = 1$. Tomando $\lambda = a_0 - z_0$ obtenemos el resultado. \square

En la figura 4.3 damos un ejemplo particular de este caso también.

En lo anterior hicimos el análisis para cuando $p_\lambda(z)$ tiene sus raíces dentro de \mathbb{D} con los coeficientes a_1 y a_{-1} números reales, a continuación hacemos el análisis para cuando estos coeficientes son números complejos.

Para nuestro objetivo necesitamos generalizar la *Prueba de Jury*.

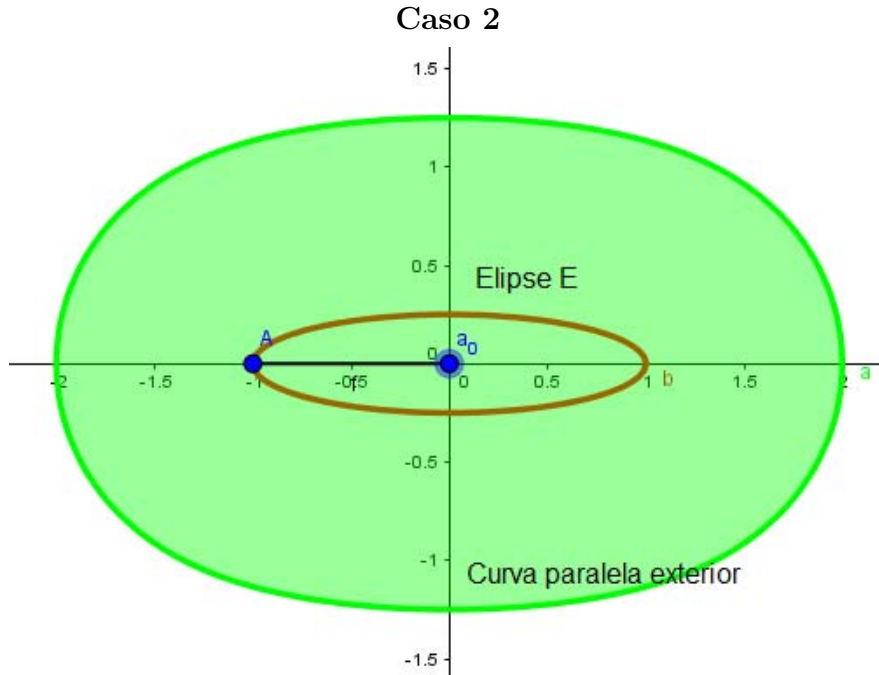


Figura 4.2: La elipse E tiene eje mayor $s_1 = 1$ y eje menor $s_2 = 1/4$. La curva verde es la curva exterior paralela a distancia uno de la elipse E , su interior es A_0 .

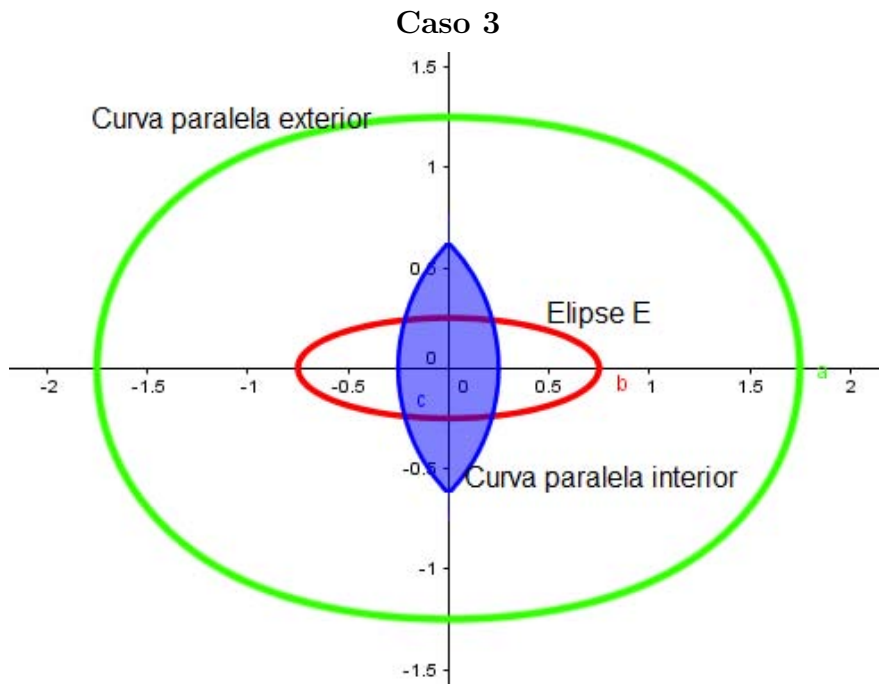


Figura 4.3: La elipse roja es la elipse E con eje mayor $s_1 = 3/4$ y $s_2 = 1/4$. La curva verde es la curva exterior paralela a distancia uno de la elipse E , su interior es A_0 , la curva azul es la curva interior paralela a distancia uno de la elipse E , la región azul es el conjunto A_0 .

Lema 4.5. (Prueba de Jury Generalizada). Las raíces de $z^2 + wz + re^{i\theta} = 0$, con $r \geq 0$ pertenecen a \mathbb{D} si y solo si $r < 1$ y

$$\frac{\operatorname{Re}(we^{-i\frac{\theta}{2}})^2}{(1+r)^2} + \frac{\operatorname{Im}(we^{-i\frac{\theta}{2}})^2}{(1-r)^2} < 1.$$

Demostración. Aplicamos el Prueba de Jury (Lema 4.2) a $p(z) = z^2 + (we^{-i\frac{\theta}{2}})z + r$, y tomamos en cuenta que $p(z) = 0$ si y solo si $q(ze^{i\frac{\theta}{2}}) = 0$ para $q(z) = z^2 + wz + re^{i\theta}$. □

El siguiente resultado nos da condiciones explícitas sobre los coeficientes del polinomio $p_\lambda(z)$, para que este tenga sus raíces dentro de \mathbb{D} , es decir condiciones explícitas para que las funciones $f_\lambda(z)$ sean analíticas.

Lema 4.6. Sean $a_0, a_1, a_{-1} \in \mathbb{C}$, con $a_1 = a_1 e^{i\theta_1}$, $a_{-1} = a_{-1} e^{i\theta_{-1}}$, con $\theta_1, \theta_{-1} \in [0, 2\pi)$, $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_{-1}}{2}$. Si $a_1 < a_{-1}$ y se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $a_{-1} + a_1 > 1$ y $a_0 \in e^{i\theta} A_0$,
2. $a_{-1} + a_1 = 1$ y $a_0 \in e^{i\theta} (A_0 \setminus 0)$,
3. $a_{-1} + a_1 < 1$ y $a_0 \in e^{i\theta} (A_0 \setminus A_0)$,

entonces existe $\lambda \in S^1$ tal que $p_\lambda(z) = a_{-1}z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_1$ tiene sus raíces en \mathbb{D} .

Definición 4.7. Dados a_0, a_1 y a_{-1} números complejos que satisfacen las hipótesis del lema 4.6, decimos que cumplen la condición (*).

Demostración del lema 4.6. Necesitamos que las raíces del polinomio

$$p_\lambda(z) = a_{-1}z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_1$$

pertenezcan a \mathbb{D}

Aplicamos la Prueba de Jury Generalizada al polinomio

$$\frac{1}{a_{-1}}p_\lambda(z) = z^2 + \frac{(a_0 - \lambda)}{a_{-1}}z + \frac{a_1}{a_{-1}},$$

y obtenemos que sus raíces pertenecen a \mathbb{D} si $\frac{a_1}{a_{-1}} < 1$ y si existe un $\lambda \in S^1$ tal que a_0 cumple la condición

$$\frac{\operatorname{Re}\left(\frac{a_0 - \lambda}{a_{-1}} e^{-i\frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2}}\right)^2}{\left(1 + \frac{a_1}{a_{-1}}\right)^2} + \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{a_0 - \lambda}{a_{-1}} e^{-i\frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2}}\right)^2}{\left(1 - \frac{a_1}{a_{-1}}\right)^2} < 1,$$

lo cual ocurre si

$$\frac{\operatorname{Re}\left((a_0 - \lambda) e^{-i\frac{\theta_1 + \theta_{-1}}{2}}\right)^2}{(a_1 + a_{-1})^2} + \frac{\operatorname{Im}\left((a_0 - \lambda) e^{-i\frac{\theta_1 + \theta_{-1}}{2}}\right)^2}{(a_1 + a_{-1})^2} < 1,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{\operatorname{Re}(a_0 e^{-i\theta} - \lambda e^{-i\theta})^2}{(a_1 + a_{-1})^2} + \frac{\operatorname{Im}(a_0 e^{-i\theta} - \lambda e^{-i\theta})^2}{(a_1 + a_{-1})^2} < 1. \quad (4.4)$$

Para que exista un $\lambda \in S^1$ tal que la última desigualdad se cumpla usaremos el lema 4.4. El lema nos da condiciones para que ciertas constantes cumplan una desigualdad, para nuestro caso si a_1, a_{-1} y $a_0 e^{-i\theta}$ cumplen que:

1. $a_{-1} + a_1 > 1$ y $a_0 e^{-i\theta} = A_0$.
2. $a_{-1} + a_1 = 1$ y $a_0 e^{-i\theta} = (A_0 \ 0)$.
3. $a_{-1} + a_1 < 1$ y $a_0 e^{-i\theta} = (A_0 \ A_0)$,

entonces existe un $\lambda \in S^1$ tal que la desigualdad 4.4 se cumple, por lo tanto existe $\lambda \in S^1$ tal que el polinomio $p_\lambda(z) = a_{-1}z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_1$ tiene sus raíces en \mathbb{D} . \square

En conclusión encontramos condiciones suficientes que garantizan que

$$f_\lambda(z) = \frac{a_{-1}}{a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_1} \in \mathcal{H}^2.$$

Lo siguiente es ver si las funciones $f_\lambda(z)$ forman un conjunto denso, lo cual es nuestra pregunta 2.

Antes demostramos el siguiente lema.

Lema 4.8. Sean a_0, a_1 y $a_{-1} \in \mathbb{C}$ que cumplen la condición (*). Entonces existe $\lambda \in S^1$ tal que la función

$$g_\lambda(z) := \frac{z}{a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}}$$

es analítica e inyectiva para z en un abierto $U \supset \overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. Sean $q_\lambda(z) = a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}$, $r := \min(z_1, z_2, \sqrt{\left|\frac{a_{-1}}{a_1}\right|})$ donde z_1 y z_2 son raíces de $q_\lambda(z)$, por el lema 4.6 se tiene que $|z_1| > 1$ y $|z_2| > 1$, y sea U el conjunto $B(0, r)$. Entonces $g_\lambda(z)$ es analítica en U .

Sean $w, z \in U$ tal que $g_\lambda(z) = g_\lambda(w)$ entonces

$$\frac{z}{a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}} = \frac{w}{a_1 w^2 + (a_0 - \lambda)w + a_{-1}},$$

y por lo tanto

$$a_1 w z (w - z) - a_{-1} (w - z) = 0,$$

si $z = w$ entonces $wz = \frac{a_{-1}}{a_1}$ pero como $w, z \in U$ entonces $|w| < \sqrt{\left|\frac{a_{-1}}{a_1}\right|}$ y $|z| < \sqrt{\left|\frac{a_{-1}}{a_1}\right|}$ y por lo cual $|wz| < \frac{a_{-1}}{a_1}$, lo que es una contradicción. Concluimos que $w = z$, y entonces $g_\lambda(z)$ es inyectiva en U . \square

El siguiente teorema responde afirmativamente nuestra pregunta.

Teorema 4.9. *Sea $B \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto con intersección no vacía con S^1 y sea f_λ la función:*

$$f_\lambda(z) := \frac{a_{-1}}{a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}}$$

con a_1, a_{-1} y $a_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f_\lambda \in \mathcal{H}^2$ para todo $\lambda \in B$. Entonces el conjunto

$$Z := \text{span } \{f_\lambda : \lambda \in B\}$$

es denso en \mathcal{H}^2 .

Demostración. Para un conjunto abierto $C \subset \mathbb{C}$, denotamos $\mathcal{H}(C)$, como el conjunto de funciones analíticas de C a \mathbb{C} .

Sea g una función en \mathcal{H}^2 , probaremos que si $\int f_\lambda g = 0$ para todo $\lambda \in B$ entonces $g = 0$, i. e. vamos a probar que el conjunto

$$Z := \text{span } \{f_\lambda : \lambda \in B\}$$

es denso en \mathcal{H}^2 .

Definimos $H : B \rightarrow \mathbb{C}$, como $H(\lambda) := \int f_\lambda g$, se tiene que:

$$H(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_{-1}}{q_\lambda(e^{i\theta})} \overline{g(e^{i\theta})} d\theta, \text{ donde } q_\lambda(z) = a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}.$$

Observamos que $\frac{a_{-1}}{q_\lambda(z)} \overline{g(z)}$ es una función analítica (pues $q_\lambda(z)$ es una función que no se anula en $\overline{\mathbb{D}}$), entonces H es una función analítica en B .

Supongamos que $\int f_\lambda g = 0$, es decir $H(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in D(e^{i\alpha}, \epsilon) \subseteq B$, con $\alpha \in [0, 2\pi)$ y $\epsilon > 0$, como H es una función analítica entonces H es cero y también sus derivadas son cero.

Para $\lambda = e^{i\alpha}$, $H(e^{i\alpha}) = 0$, además

$$\frac{dH}{d\lambda}(e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{q_{e^{i\alpha}}(e^{i\theta})} h(\theta) d\theta = 0, \text{ donde } h(\theta) := \frac{a_{-1}}{q_{e^{i\alpha}}(e^{i\theta})} \overline{g(e^{i\theta})},$$

$$\frac{d^2 H}{d\lambda^2}(e^{i\alpha}) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}}{q_{e^{i\alpha}}(e^{i\theta})} \right)^2 h(\theta) d\theta = 0, \text{ etc.}$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \Phi^n(\theta) h(\theta) d\theta = 0 \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \text{ donde } \Phi(\theta) := \frac{e^{i\theta}}{q_{e^{i\alpha}}(e^{i\theta})}.$$

Por el lema 4.8 tenemos que $\Phi(z) = \frac{z}{q_{e^{i\alpha}}(z)}$ es una función analítica e inyectiva sobre un disco abierto $U \supset \overline{\mathbb{D}}$, por ser Φ inyectiva sobre U existe $\Phi^{-1} : W \rightarrow U$, donde $W := \Phi(U)$ es un conjunto abierto simplemente conexo, por lo tanto Φ es un biholomorfismo.

Definimos $C_\Phi : \mathcal{H}(W) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ (con la topología de convergencia uniforme en compactos), como $f \mapsto f \circ \Phi$, el cual es un isomorfismo. Sabemos que $\text{span } \{1, z, z^2, \dots\}$ es denso en $\mathcal{H}(W)$ porque W es simplemente conexo [40]. Por lo tanto $C_\Phi(\text{span } \{1, z, z^2, \dots\}) =$

$\text{span } 1, \Phi(z), \Phi^2(z), \dots$ es denso en $\mathcal{H}(U)$ y $\mathcal{H}(U)$ es denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, entonces $Y := \text{span } 1, \Phi(z), \Phi^2(z), \dots$ es denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ pero $h(z) \notin Y$, entonces $h = 0$, por lo tanto $g = 0$. \square

El siguiente teorema es la conclusión de lo anterior. En él damos condiciones sobre los coeficientes para que un operador tridiagonal sea hipercíclico.

Teorema 4.10. *Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 & \ddots \\ 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Asumimos que $a_{-1} = a_{-1} e^{i\theta_{-1}}, a_0 = a_0 e^{i\theta_0}, a_1 = a_1 e^{i\theta_1} \in \mathbb{C}$, A_0 y A_1 como antes, y $\alpha = \frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2}$. Si se cumple que $a_1 < a_{-1}$ y para $a_0 \in \mathbb{C}$ se cumple una de las tres siguientes condiciones:

1. $a_{-1} + a_1 > 1$ y $a_0 \in e^{i\alpha} A_0$.
2. $a_{-1} + a_1 = 1$ y $a_0 \in e^{i\alpha} (A_0 \cup 0)$.
3. $a_{-1} + a_1 < 1$ y $a_0 \in e^{i\alpha} (A_0 \cup A_1)$.

Entonces T es hipercíclico.

Demostración. Por la observación 4.12 que haremos más adelante se tiene que las raíces del polinomio $a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}$ son continuas como función de λ , por lo tanto perturbaciones suficientemente pequeñas de λ mantienen cerca a las raíces, además como se cumplen las hipótesis del lema 4.6 tenemos que existe $\lambda \in S^1$ tal que

$$f_\lambda(z) := \frac{a_{-1}}{a_1 z^2 + (a_0 - \lambda)z + a_{-1}}$$

es una función analítica. Por lo anterior existe un conjunto abierto $B \subset \mathbb{C}$ con $B \cap \mathbb{D} = \emptyset$ y $B \cap \mathbb{D}^c = \mathbb{D}^c$ tal que para cada $\lambda \in B$ se cumple que $f_\lambda \in \mathcal{H}^2$. Por el teorema 4.9 y por el criterio de Godefroy y Shapiro (teorema 4.1) concluimos que T es hipercíclico. \square

4.1.1. Otra condición de hiperciclicidad para operadores de Toeplitz tridiagonales

A continuación damos otra condición para que un operador tridiagonal sea hipercíclico, la diferencia es que la siguiente condición involucra directamente los tres coeficientes.

Por notación, para no confundir los cálculos anteriores con los siguientes ahora usaremos a, b y c como coeficientes, es decir ahora $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ es un operador con la siguiente matriz asociada

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots \\ a & b & c & 0 & \ddots \\ 0 & a & b & c & \ddots \\ 0 & 0 & a & b & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Suponemos a y c diferentes de cero y como antes usaremos el criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1) [22].

Ya sabemos que la forma de los vectores propios es la siguiente:

$$f(z) = \frac{c}{az^2 + (b - \lambda)z + c}.$$

Queremos dar condiciones para que f pertenezca a \mathcal{H}^2 . Tenemos que

$$f(z) = \frac{c}{az^2 + (b - \lambda)z + c} = \frac{c}{a(z - z_1(\lambda))(z - z_2(\lambda))}$$

Sabemos que f está en \mathcal{H}^2 cuando $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$ tienen modulo mayor que 1, donde

$$z_1(\lambda) = \frac{-(b - \lambda) + \sqrt{(b - \lambda)^2 - 4ac}}{2a}, z_2(\lambda) = \frac{-(b - \lambda) - \sqrt{(b - \lambda)^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si las raíces son repetidas la condición $c > a$ implica que el módulo de las raíces es mayor a uno. A partir de ahora pensaremos siempre que $c > a$. Ahora supongamos que $z_1(\lambda) = z_2(\lambda)$, es decir $(b - \lambda)^2 - 4ac = 0$.

A continuación damos una observación que usaremos después, para su demostración necesitamos el siguiente lema de [15].

Lema 4.11. *Sea G un conjunto simplemente conexo y sea $f \in \mathcal{H}(G)$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in G$, entonces existe $g \in \mathcal{H}(G)$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Si $z_0 \in G$ y $e^{w_0} = f(z_0)$, podemos elegir g tal que $g(z_0) = w_0$.*

Observación 4.12. *Se puede elegir una función analítica $F(\lambda) = \frac{-(b-\lambda) + \sqrt{(b-\lambda)^2 - 4ac}}{2a}$ en un dominio simplemente conexo abierto y denso en \mathbb{D} . F manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos*

Demostración de la observación: Sean $x_1 = x_2 \in \mathbb{C}$, $f(\lambda) := (\lambda - x_1)(\lambda - x_2)$ y $G := \mathbb{C} - R$, donde R es un rayo que pasa por x_1 y x_2 , se tiene que $f \in \mathcal{H}(G)$ y no se anula en G . Por el lema 4.11 existe $g \in \mathcal{H}(G)$ tal que $e^{g(z)} = f(z)$, entonces $e^{\frac{1}{2}g}$ es una raíz cuadrada analítica de f . Utilizando esto es claro que existe una raíz analítica de la función $(b - \lambda)^2 - 4ac$ en un dominio Ω del plano, por lo tanto $F(\lambda) := \frac{-(b-\lambda) + \sqrt{(b-\lambda)^2 - 4ac}}{2a}$ es una función analítica en Ω . Como F es analítica no constante, se tiene que por el teorema del mapeo abierto manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. \square

Lo siguiente es dar condiciones de a, b y c para las cuales $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$ tengan módulo mayor a uno. Usando un caso particular de un teorema de Ostrowsky (citado por Beauzamy en [5]) tenemos lo siguiente.

Teorema 4.13. *Sea $p(z) := z^2 - \frac{(b-\lambda)}{a}z + \frac{c}{a} = (z - z_1)(z - z_2)$ y $q(z) := (z - y_1)(z - y_2)$. Si se cumple que:*

1.

$$\left| \frac{c}{a} - y_1 y_2 \right| \leq \left| \frac{c}{a} \right| \left(\frac{1}{8} \right)^2, \quad (4.6)$$

2.

$$\left| \frac{\lambda - b}{a} - (y_1 + y_2) \right| \leq \left| \frac{\lambda - b}{a} \right| \left(\frac{1}{8} \right)^2, \quad (4.7)$$

entonces $\left| \frac{y_j}{z_j} - 1 \right| < 8nt^{1/n}$, donde $n = 2$, $t = \left(\frac{1}{8} \right)^2$. Es decir $\left| \frac{y_j}{z_j} - 1 \right| < 2$.

De este teorema concluimos que si existen y_1 y y_2 que cumplen las desigualdades (4.6) y (4.7) entonces $\left| \frac{y_j}{z_j} - 1 \right| < 2$, y de aquí que $y_j - z_j < 2z_j$. Usando la desigualdad del triángulo tenemos que $y_j < z_j(2 + 1)$. Por lo cual para que $z_j > 1$ es suficiente que $y_j \geq 3$.

Por lo anterior si elegimos y_1 y y_2 de modulo mayor o igual a 3 tal que cumplan las condiciones 1 y 2 del teorema 4.13, entonces las raíces de $p(z)$ tienen módulo mayor a uno y por lo tanto f estará en \mathcal{H}^2 .

En lo que sigue damos condiciones sobre a, b y c para las cuales existen y_1 y y_2 que cumplen las desigualdades 1 y 2. Resolvamos primero la desigualdad (4.7) del teorema 4.13

$$\left| \frac{\lambda - b}{a} - (y_1 + y_2) \right| \leq \left| \frac{\lambda - b}{a} \right| \left(\frac{1}{8} \right)^2.$$

Sea $w := \frac{\lambda - b}{a}$. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ que cumpla que $z \geq 3$ y $w - z \geq 3$ elegimos $y_1 = z$ y $y_2 = w - z$, con esto la desigualdad se cumple trivialmente.

Ahora resolvamos la desigualdad (4.6)

$$\left| \frac{c}{a} - y_1 y_2 \right| \leq \left| \frac{c}{a} \right| \left(\frac{1}{8} \right)^2$$

Las desigualdades deben cumplirse de manera simultánea, entonces para y_1 y y_2 elegidos como antes tenemos que ver que pasa con su producto, es decir el conjunto

$$L := \{ y \in \mathbb{C} : y = z(w - z) \text{ con } z \geq 3 \text{ y } w - z \geq 3 \}.$$

Respecto a esto tenemos la siguiente afirmación,

Lema 4.14. *Sean y y $w \in \mathbb{C}$. Si $y > 9 + 3w$, entonces existe $z \in \mathbb{C}$, con $z \geq 3$ y $w - z \geq 3$ tal que $y = z(w - z)$. Es decir, cualquier número en el complemento del círculo complejo de radio $9 + 3w$ centrado en cero está contenido en L .*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{C}$ tal que $|y| > 9 + 3w$. Es claro que existe $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $y = (w - z_0)z_0$ (simplemente escójase a z_0 como una solución de $z^2 - wz + y = 0$).

Por la elección de y se cumple que $|z_0| |w - z_0| = |y| > 9 + 3w \geq 9$.

Por demostrar que $|z_0|$ y $|w - z_0|$ son mayores que 3. Consideremos tres casos:

1. Supongamos $|z_0| = |w - z_0|$. Como $|z_0| |w - z_0| > 9$, entonces $|z_0|$ y $|w - z_0|$ son mayores que 3.
2. Supongamos $|z_0| < |w - z_0|$. Observemos que por la elección de y no puede ocurrir que $|z_0| < 3$ y $|w - z_0| < 3 + w$.
Supongamos $|z_0| \geq 3$, la prueba está terminada porque $|z_0| < |w - z_0|$.
Supongamos $|w - z_0| \geq 3 + w$, entonces $|z_0| = |z_0 - w + w| \geq |w - z_0| - w \geq 3 + w - w = 3$, es decir $|z_0| \geq 3$. Entonces como $|z_0| < |w - z_0|$ la prueba está terminada.
3. Supongamos $|z_0| > |w - z_0|$. Si $|w - z_0| \geq 3$ la prueba está terminada. Supongamos $|w - z_0| < 3$, entonces $|z_0 - w| \leq |w - z_0| < 3$ por lo tanto $|z_0| < 3 + w$ y entonces $|z_0| |w - z_0| < 3(3 + w)$, lo cual es una contradicción a que $y = z_0(w - z_0)$ está en el complemento del círculo de radio $9 + 3w$.

□

Por lo anterior tenemos que si

$$\left| \frac{c}{a} \right| > 9 + 3w$$

entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq 3$ y $|w - z| \geq 3$ y se cumple que $\frac{c}{a} = z(w - z)$.

Es decir, si

$$\left| \frac{c}{a} \right| > 9 + 3 \left| \frac{\lambda - b}{a} \right| \quad (4.8)$$

entonces se cumplen las desigualdades (4.6) y (4.7) del teorema 4.13. Concluimos el siguiente resultado, el cual resuelve nuestra primera pregunta.

Teorema 4.15. *Sea $f : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ una función definida de la siguiente forma,*

$$f(z) := \frac{c}{az^2 + (b - \lambda)z + c},$$

si se cumple que

$$\left| \frac{c}{a} \right| > 9 + 3 \left| \frac{\lambda - b}{a} \right| \quad (4.9)$$

entonces f está en \mathcal{H}^2 .

Ahora pensando en el criterio de Godefroy-Shapiro, necesitamos dos conjuntos densos de vectores propios donde los valores propios correspondientes sean de modulo menor que uno en un conjunto y mayor que uno en el otro. Para esto necesitamos que conjuntos de funciones de la forma de f sean densos en \mathcal{H}^2 (teorema 4.16). Para demostrar esto necesitamos dos

conjuntos abiertos A_1 y A_2 tal que las condiciones del Criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1) se cumplan para $\lambda \in A_1$ con $|\lambda| < 1$ y para $\lambda \in A_2$ con $|\lambda| > 1$.

Observamos que la desigualdad (4.9) es equivalente a

$$|\lambda - b| < \frac{c - 9a}{3}$$

es decir λ está en un disco abierto de centro b y de radio $\frac{c-9a}{3}$. Si este disco abierto intersecta en más de un punto al círculo de radio 1 entonces existen A_1 y A_2 tales que para $\lambda \in A_1$ se cumple $|\lambda| < 1$ y para $\lambda \in A_2$ se cumple $|\lambda| > 1$.

Tenemos que el punto $\frac{b}{b}$ está en el círculo de radio 1 por lo tanto la intersección mencionada ocurre cuando

$$\left| b - \frac{b}{b} \right| < \frac{c - 9a}{3}$$

lo cual es equivalente a

$$|b - 1| < \frac{c - 9a}{3}$$

Concluimos el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Sean a, b y c números complejos con $c > 9a$. Si se cumple que*

$$|b - 1| < \frac{c - 9a}{3}$$

entonces existen dos conjuntos abiertos $A_1 \subseteq \mathbb{D}$ y $A_2 \subseteq \mathbb{D}^c$ tal que $z_1(\lambda) > 1$ y $z_2(\lambda) > 1$ para $\lambda \in A_1 \cup A_2$.

El siguiente resultado nos da una versión alternativa del teorema 4.9 para que los vectores propios formen un conjunto denso en \mathcal{H}^2 .

Teorema 4.17. *Sea B un subconjunto abierto de \mathbb{C} y sea f_λ definida como sigue:*

$$f_\lambda(z) := \frac{c}{az^2 + (b - \lambda)z + c}$$

donde los polos son distintos y de módulo mayor a uno. Entonces el conjunto

$$Z := \text{span} \{f_\lambda : \lambda \in B\}$$

es denso en \mathcal{H}^2 .

Antes de demostrar el teorema recordemos lo siguiente. Para $\beta \in \mathbb{D}$, tenemos que si

$$K_\beta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\beta})^n z^n = \frac{1}{1 - \bar{\beta}z}, \text{ con } z \in \mathbb{D},$$

entonces para cada $\beta \in \mathbb{D}$ se tiene que $K_\beta \in \mathcal{H}^2$, a los cuales se les llama núcleos reproductores (a veces llamados núcleos de Szego), para cada $g \in \mathcal{H}^2$ se cumple:

$$\langle g, K_\beta \rangle = g(\beta). \tag{4.10}$$

Lo que implica que $\{K_\beta : \beta \in \mathbb{D}\}$ es denso en \mathcal{H}^2 .

Demostración. Sea Ω el dominio de $\sqrt{(b-\lambda)^2 - 4ac}$, que es un abierto y denso (observación 4.12). Entonces $B \setminus \Omega$ es un abierto no vacío y sin pérdida de generalidad, tomamos a B como esta intersección.

Ahora sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ los polos de f_λ . Sabemos que $z_1 z_2 = c/a$ y sean

$$z_1(\lambda) := \frac{-(b-\lambda) + \sqrt{(b-\lambda)^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{c}{az_1}.$$

Tenemos que

$$f_\lambda(z) = \frac{c}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

con $z_i > 1$, con $i = 1, 2$.

Sea $\alpha = \frac{c}{z_1 - z_2}$, entonces

$$f_\lambda(z) = \frac{\alpha}{z-z_1} - \frac{\alpha}{z-z_2} = -\frac{\alpha/z_1}{1-z/z_1} + \frac{\alpha/z_2}{1-z/z_2}$$

por lo tanto

$$f_\lambda(z) = -\frac{\alpha}{z_1} K_{\frac{1}{z_1}}(z) + \frac{\alpha}{z_2} K_{\frac{1}{z_2}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\alpha}{z_1} \left(\frac{1}{z_1}\right)^n z^n + \frac{\alpha}{z_2} \left(\frac{1}{z_2}\right)^n z^n$$

Observamos que f es la suma de dos núcleos reproductores, además f depende de z_1 y z_2 que a su vez dependen de λ . A continuación demostraremos que f_λ hace la función de un núcleo reproductor.

Sean $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ y $g^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g_n} z^n \in \mathcal{H}^2$. Tenemos que

$$g, f_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \overline{f_{\lambda,n}}$$

donde $f_{\lambda,n}$ es el n -ésimo coeficiente de Taylor de f_λ .

Supongamos que B es abierto y que la función $H(\lambda) := \overline{g, f_\lambda}$ es cero para todo λ en B , demostraremos que $g = 0$. Recordando que $z_1 z_2 = c/a$, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{g, f_\lambda} &= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} g_n \overline{f_{\lambda,n}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g_n} f_{\lambda,n}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g_n} \left(-\frac{\alpha}{z_1} \left(\frac{1}{z_1}\right)^n + \frac{\alpha}{z_2} \left(\frac{1}{z_2}\right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g_n} \left(-\alpha \left(\frac{1}{z_1}\right)^{n+1} + \alpha \left(\frac{z_1}{c/a}\right)^{n+1} \right), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g_n} (-\alpha) \left(\frac{1}{z_1}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \overline{g_n} \left(\frac{c}{a}\right)^{-(n+1)} \left(\frac{1}{z_1}\right)^{-(n+1)} = \sum_{n=-}^{\infty} h_n \left(\frac{1}{z_1}\right)^n \end{aligned}$$

donde

$$h_n = \begin{cases} -\alpha \overline{g_{n-1}} & \text{para } n \geq 1 \\ 0 & \text{para } n = 0 \\ \alpha \overline{g_{-1-n}} \left(\frac{c}{a}\right)^n & \text{para } n \leq -1. \end{cases}$$

Ahora definimos $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$h(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n w^n, \text{ para } w \in \Omega := \{w \in \mathbb{C} : a/c < w < 1\}$$

notemos que h es una función analítica en Ω , ya que

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha \overline{g_{-1-n}} \left(\frac{c}{aw}\right)^n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \overline{g_{n-1}} w^{n+1}$$

convergen pues por un lado observamos que

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha \overline{g_{-1-n}} \left(\frac{c}{aw}\right)^n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \overline{g_{n-1}} \left(\frac{aw}{c}\right)^n$$

es la serie de g^* con $|\frac{aw}{c}| < 1$, y por otro lado la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \overline{g_{n-1}} w^{n+1} = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \overline{g_{n-1}} w^{n+1}$$

con $w \in \mathbb{D}$ es la serie de g^* .

Recordamos que por definición cada z_1 depende de λ , sea $\Omega := \{z_1(\lambda) : \lambda \in B\}$. Notamos que como $|z_1| > 1$ se tiene que $|\frac{1}{z_1}| < 1$, y como $|z_2| > 1$, se tiene que $|z_1 z_2| > |z_1|$, y como $|z_1 z_2| = c/a$ entonces $a/c < \frac{1}{|z_1|}$, concluimos que $a/c < \frac{1}{|z_1|} < 1$, por lo tanto $\Omega \subset \mathbb{D}$. Además

$$0 = \overline{g, f_\lambda} = H(\lambda) = h\left(\frac{1}{z_1(\lambda)}\right), \text{ para } \lambda \in B$$

es decir h es cero en el recíproco de Ω , y como Ω es un abierto (observación 4.12) tenemos entonces que por el teorema de la identidad h es cero en Ω , y por la unicidad de la serie de Laurent $h_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular $\overline{g_n} = 0$ para todo $n \geq 0$, por lo tanto concluimos que $g^* = 0$ y de aquí que $g = 0$, entonces Z es denso. Así queda demostrado el teorema. □

Concluimos entonces con una condición sobre a, b y c para la cual el operador de Toeplitz tridiagonal es hipercíclico. El resultado es el siguiente:

Teorema 4.18. *Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots \\ a & b & c & 0 & \ddots \\ 0 & a & b & c & \ddots \\ 0 & 0 & a & b & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y son diferentes de cero. Si se cumple que

$$b - 1 < \frac{c - 9a}{3},$$

entonces T es hipercíclico.

Demostración. Por el teorema 4.16 existen dos conjuntos abiertos A_1 y A_2 tales que

$$f_\lambda(z) := \frac{cf(0)}{az^2 + (b - \lambda)z + c}$$

es una función analítica para cada $\lambda \in A_1 \cup A_2$, además para $\lambda \in A_1$ se cumple $|\lambda| < 1$ y para $\lambda \in A_2$ se cumple que $|\lambda| > 1$.

Sean

$$X_0 := \text{span} \{f_\lambda : \lambda \in A_1\}$$

$$Y_0 := \text{span} \{f_\lambda : \lambda \in A_2\}$$

Por el teorema 4.17 sabemos que X_0 y Y_0 son densos en \mathcal{H}^2 . Entonces se cumplen las hipótesis del criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1) por lo tanto T es mezclante y en particular hipercíclico. \square

4.2. Teorema de Shkarin-Baranov-Lichanskii

A continuación damos resultados obtenidos por otros autores relativos a nuestro trabajo. Cabe decir que estos resultados fueron obtenidos independientemente de nuestro trabajo pero simultáneamente. En lo siguiente denotaremos como $\overline{\mathbb{D}}$ al disco unitario cerrado y ponemos $\hat{\mathbb{D}} = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Shkarin, en un artículo no publicado afirma la siguiente proposición.

Proposición 4.19. (Shkarin [43].) Sean $a_{-1}, a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = a_1z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z}$. Entonces el operador $T_g : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ es hipercíclico si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|a_{-1}| > |a_1|$
2. $\min_{z \in \mathbb{T}} |g(z)| < 1 < \max_{z \in \mathbb{T}} |g(z)|$.

En un artículo reciente Baranov y Lishanskii [3] observan que la segunda condición de Shkarin $\min_{z \in \mathbb{T}} |g(z)| < 1 < \max_{z \in \mathbb{T}} |g(z)|$ no necesariamente se cumple. Por ejemplo, si tomamos $a_1 = 2, a_0 = a_{-1} = 0$, se tiene que $T_g = 2S^*$, el cual es hipercíclico pero $\min_{z \in \mathbb{T}} |g(z)| = 2$, que no es menor a uno. Baranov y Lishanskii demuestran un teorema más general sobre operadores de Toeplitz, del cual se obtiene el siguiente teorema replanteado de Shkarin. El resultado es el siguiente:

Teorema 4.20. (Baranov-Lishanskii [3].) El operador de Toeplitz T_g , con $g(z) = \frac{a}{z} + b + cz$ es hipercíclico si y solo si

1. $a > c$;

2. $\mathbb{D} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \lambda \hat{\mathbb{D}} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) =$

donde $g(z) = \frac{a}{z} + b + cz$.

A continuación damos la demostración del teorema 4.20 pero obtenido directamente de las ideas de Shkarin, corrigiendo el error en su demostración.

En la prueba se usan los siguientes resultados.

Lema 4.21. *Sea $d \in \mathbb{C}$ y sea $q : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $|d| < 1$ y $q(z) = q(d/z)$ para cada $z \in A$, donde A es un subconjunto del anillo $W = \{z \in \mathbb{C} : d < z < 1\}$ con al menos un punto de acumulación en W . Entonces q es constante.*

Demostración. Tenemos que las funciones holomorfas en W dadas por $z \mapsto q(z)$ y $z \mapsto q(d/z)$ coinciden en A , el cual tiene un punto de acumulación en W . Entonces por el teorema de la identidad coinciden en todo W . Extendemos q a una función sobre todo \mathbb{C} haciendo $q(z) = q(d/z)$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, observamos que para $\lambda \in S^1$, $\lim_{z \rightarrow \lambda} q(z) = \lim_{z \rightarrow \lambda} q(d/z)$. Ahora como $q(z) = q(d/z)$ para todo $z \in W$ se tiene que la extensión de q es una función entera que satisface $q(z) = q(d/z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus 0$. Observamos que se cumple que $\lim_{z \rightarrow 0} q(z) = q(0)$, entonces q es acotada, y por el teorema de Liouville, q es constante. \square

Lema 4.22. *Sean $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, K la cerradura de su envoltura convexa y $\alpha = \text{dist}(0, K) > 0$. Si K es estrictamente convexa existen $\beta > \alpha$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que*

$$\left\| 1 - \frac{e^{-i\theta} g}{\beta} \right\| = 1 - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Demostración. Como $\alpha = \text{dist}(0, K) > 0$, entonces existe $z_0 \in K$ tal que $z_0 = \alpha e^{i\theta}$, donde $\theta \in [0, 2\pi)$. Como K es estrictamente convexo entonces $e^{-i\theta} K$ también lo es. Entonces $e^{-i\theta} K \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > \alpha\}$, donde $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > \alpha\}$. Para cada $\beta > \alpha$, definimos B_β como la bola abierta de centro $(\beta, 0)$ y radio $\beta - \alpha$. Observamos que $\bigcup_{\beta > \alpha} B_\beta = H$ y además si $\beta < \beta'$ entonces $B_\beta \subseteq B_{\beta'}$. Como $e^{-i\theta} K \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > \alpha\}$ es compacto y está contenido en $\bigcup_{\beta > \alpha} B_\beta$ entonces existe una subcubierta finita. Por lo tanto existe $\beta > \alpha$ tal que $e^{-i\theta} K \subseteq B_\beta$ y entonces se cumple que $\beta - e^{i\theta} w \leq \beta - \alpha$ para todo $w \in K$, en particular $\beta - e^{i\theta} g(z) \leq \beta - \alpha$ para todo $z \in S^1$, entonces

$$\left| 1 - \frac{e^{i\theta} g(z)}{\beta} \right| \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta} \text{ para todo } z \in S^1,$$

por lo cual

$$\left\| 1 - \frac{e^{i\theta} g}{\beta} \right\| \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1.$$

\square

Observamos que si definimos $g(\infty) = 0$ y $g(0) = \infty$ entonces $g(z) = \frac{a}{z} + b + cz$ es una función de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo. Ahora hacemos la siguiente afirmación acerca de la imagen de g .

Afirmación 4.23. $g(S^1)$ es una elipse.

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, tenemos que para todo $z = re^{i\theta}$, con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$g(re^{i\theta}) = a \frac{1}{re^{i\theta}} + b + cre^{i\theta}.$$

Sean $a = r_1 e^{i\theta_1}$, $c = r_2 e^{i\theta_2}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $b = 0$, ya que es un término constante y representa una traslación. Sea $\lambda = e^{-i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$. Entonces

$$\frac{a}{a} \lambda = e^{i\theta_1} e^{-i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} = e^{i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}},$$

$$\frac{c}{c} \lambda = e^{i\theta_2} e^{-i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} = e^{i\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}.$$

Sea $\psi = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$, por lo tanto se tiene que $\frac{a}{a} \lambda = e^{-i\psi}$ y $\frac{c}{c} \lambda = e^{i\psi}$. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda g(re^{i\theta}) &= \frac{\lambda a}{a} a \frac{1}{r} e^{-i\theta} + \frac{\lambda c}{c} c r e^{i\theta}, \\ &= e^{-i\psi} a \frac{1}{r} e^{-i\theta} + e^{i\psi} c r e^{i\theta} \\ &= a \frac{1}{r} e^{-i(\theta + \psi)} + c r e^{i(\theta + \psi)} \\ &= a \frac{1}{r} (\cos(\theta + \psi) - i \operatorname{sen}(\theta + \psi)) + c r (\cos(\theta + \psi) + i \operatorname{sen}(\theta + \psi)) \\ &= \left(\frac{1}{r} a + r c \right) \cos(\theta + \psi) - i \left(\frac{1}{r} a - r c \right) \operatorname{sen}(\theta + \psi). \\ &= \left(\frac{1}{r} a + r c \right) \cos(-(\theta + \psi)) + i \left(\frac{1}{r} a - r c \right) \operatorname{sen}(-(\theta + \psi)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda g(re^{i\theta})$ es una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados para cualquier $r > 0$, en particular $r = 1$. Entonces $g(S^1)$ es una elipse, con eje mayor $a + c$ y eje menor $a - c$, con una rotación dada por $1/\lambda$ y con traslación b . \square

Observamos que para $r \in [0, 1)$ y $a > c$ se cumple

$$\frac{1}{r} a + r c > a + c \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} a - r c > a - c.$$

Por lo anterior tenemos que la imagen de cualquier círculo de radio $r < 1$ es una elipse más grande que la elipse $g(S^1)$. Tenemos entonces que $g(\mathbb{D})$ es el complemento de la región cerrada acotada por la elipse $g(S^1)$, y tenemos que $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})$ es la región cerrada acotada por la elipse $g(S^1)$.

Demostración del teorema 4.20. Primero probaremos la suficiencia, probaremos que si T no cumple las hipótesis del teorema no puede ser hipercíclico. Sabemos que $T_g = aT_{\bar{z}} + bI + cT_z$ y $T_g^* = cT_{\bar{z}} + bI + aT_z$, y un cálculo directo muestra que $T_g^* T_g - T_g T_g^* = (c^2 - a^2)P$, donde

$P = I - T_z T_{\bar{z}} = I - T_z T_z^*$. Como $P \geq 0$, si $c \geq a$ entonces T_g es hiponormal y por lo tanto no puede ser hipercíclico (teorema 3.21).

Si $\widehat{\mathbb{D}} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \emptyset$ entonces $\widehat{\mathbb{D}} \subset g(\mathbb{D})$, afirmamos que $g(S^1) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Supongamos que no, entonces existe $\lambda \in S^1$ tal que $g(\lambda) \notin \overline{\mathbb{D}}$, por lo tanto $g(\lambda) \in \widehat{\mathbb{D}}$, entonces $g(\lambda) \in g(\mathbb{D})$, y como g es inyectiva (lema 4.8) se cumple que $\lambda \in \mathbb{D}$, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que $g(S^1) \subset \overline{\mathbb{D}}$, por lo tanto $\max_{z \in S^1} |g(z)| \leq 1$ y por lo cual T_g es una contracción y por lo tanto no puede ser hipercíclico (proposición 3.19).

Ahora si $\mathbb{D} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \emptyset$ entonces $\mathbb{D} \subset g(\mathbb{D})$ y por lo tanto $\inf_{z \in S^1} \text{dist}(0, g(z)) > 1$ (recordemos que $g(\mathbb{D})$ es el exterior de la elipse $g(S^1)$).

Sea K la envoltura convexa de g y sea $\alpha = \text{dist}(0, K) > 0$, como K es estrictamente convexa se tiene por el lema 4.22 que existen $\beta < \alpha$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\left\| 1 - \frac{e^{-i\theta} g}{\beta} \right\| \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Por otro lado es bien conocido que para un operador T , si $\|I - T\| < 1$ entonces T es invertible y

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}.$$

Entonces como

$$\left\| I - T_{\frac{e^{-i\theta} g}{\beta}} \right\| = \left\| 1 - \frac{e^{-i\theta} g}{\beta} \right\| \leq 1 - \frac{\alpha}{\beta}$$

se tiene que $T_{\frac{e^{-i\theta} g}{\beta}}$ es invertible y

$$\left\| T_{\frac{e^{-i\theta} g}{\beta}}^{-1} \right\| = \beta \|T_g^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - (1 - \frac{\alpha}{\beta})},$$

por lo tanto $\|T_g^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$. Como $\inf_{z \in S^1} \text{dist}(0, g(z)) > 1$ se tiene que $\alpha > 1$ y entonces T_g^{-1} es una contracción por lo cual no puede ser hipercíclico (proposición 3.19). Ahora como T_g^{-1} no es hipercíclico se tiene por el teorema 3.8 que T_g tampoco es hipercíclico.

Ahora probaremos que T_g es hipercíclico suponiendo que $a > c$, $\mathbb{D} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \emptyset$ y $\widehat{\mathbb{D}} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \emptyset$. Primero probaremos que para cada $z \in W := \{z \in \mathbb{C} : c/a < z < 1\}$, se cumple que $T_g f_z = g(z) f_z$, donde

$$f_z(w) = z K_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az} K_{c/az}(w), \text{ si } z^2 = c/a, \text{ y}$$

$$f_z(w) = \frac{1}{(1 - zw)^2}, \text{ si } z^2 = c/a.$$

Sabemos que $T_g = aT_{\bar{z}} + bI + cT_z = aS^* + bI + cS$. Observamos que

$$S^* K_{\bar{z}}(w) = \frac{K_{\bar{z}}(w) - K_{\bar{z}}(0)}{w} = \frac{\frac{1}{1-zw} - 1}{w} = \frac{zw}{w(1-zw)} = z K_{\bar{z}}(w),$$

$$S K_{\bar{z}}(w) = w K_{\bar{z}}(w) \quad \text{y} \quad S(z K_{\bar{z}}(w)) = w \frac{z}{1-zw} = \frac{1 - 1 + zw}{1 - zw} = K_{\bar{z}}(w) - 1$$

Entonces para $z^2 = c/a$ se tiene que

$$\begin{aligned}
T_g(f_z(w)) &= (aS^* + bI + cS) \left(zK_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az} K_{c/az}(w) \right) \\
&= aS^* \left(zK_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az} K_{c/az}(w) \right) + b \left(zK_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az} K_{c/az}(w) \right) + cS \left(zK_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az} K_{c/az}(w) \right) \\
&= az^2 K_{\bar{z}}(w) - a \frac{c^2}{(az)^2} K_{c/az}(w) + bzK_{\bar{z}}(w) - b \frac{c}{az} K_{c/az}(w) + c(K_{\bar{z}}(w) - 1) - c(K_{c/az}(w) - 1) \\
&= \left(az + b + \frac{c}{z} \right) (zK_{\bar{z}}(w)) - \left(az + b + \frac{c}{z} \right) \frac{c}{az} K_{c/az}(w) \\
&= g(z) \left(zK_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az} K_{c/az}(w) \right) = g(z)f_z(w).
\end{aligned}$$

Para $z^2 = c/a$, tenemos que

$$\begin{aligned}
T_g(f_z(w)) &= (aS^* + bI + cS) \frac{1}{(1-zw)^2} \\
&= a \left(\frac{\frac{1}{(1-zw)^2} - 1}{w} \right) + b \frac{1}{(1-zw)^2} + cw \left(\frac{1}{(1-zw)^2} \right) \\
&= a \frac{2zw - (zw)^2}{w(1-zw)^2} + b \frac{1}{(1-zw)^2} + \frac{az^2w}{(1-zw)^2} \\
&= \frac{2az}{(1-zw)^2} + \frac{b}{(1-zw)^2} \\
&= (2az + b) \frac{1}{(1-zw)^2} = g(z)f_w(z).
\end{aligned}$$

Entonces el conjunto de valores propios contiene al conjunto $g(W)$, el cual es un anillo entre dos elipses, la elipse interior es $g(S^1)$ y la exterior $g(C_0(\frac{c}{a}))$, donde $C_0(\frac{c}{a})$ es el círculo de centro 0 y radio $\frac{c}{a}$.

Sabemos que $g(S^1)$ es una elipse y es frontera de la región $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})$, entonces como $\mathbb{D} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \mathbb{D} \cap g(\mathbb{D})$ y $\hat{\mathbb{D}} \setminus (\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})) = \hat{\mathbb{D}} \cap g(\mathbb{D})$ se cumple que $g(S^1)$ interseca a los conjuntos \mathbb{D} y $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, y por lo tanto $g(W)$ también los interseca y tiene un punto de acumulación dentro. Sea $E_- := \text{span } f_z : g(z) < 1$ y $E_+ := \text{span } f_z : g(z) > 1$. Para usar el criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1) necesitamos que E_- y E_+ sean conjuntos densos en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Demostraremos que cada conjunto $\text{span } f_z : z \in A$, donde A es un conjunto con al menos un punto de acumulación en \mathbb{D} , es denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Procedamos por contradicción, supongamos que existe A , un conjunto con al menos un punto de acumulación en \mathbb{D} tal que $\text{span } f_z : z \in A$ no es denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. La no densidad implica que existe una función no cero $h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n w^n$ en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ tal que

$$0 = \langle h, f_z \rangle = \overline{\langle h, f_z \rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \overline{(f_z)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} (f_z)_n \quad (4.12)$$

para todo $z \in A$, donde $(f_z)_n$ son los coeficientes de $f_z(w)$. Tenemos que $(f_z)_n = (z^{n+1} - (c/az)^{n+1})$,

sean $h^*(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} w^n$ y $q(w) = wh^*(w)$, entonces por la ecuación (4.12) se cumple que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} (z^{n+1} - (c/az)^{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} (c/az)^{n+1} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} z^n - \frac{c}{az} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{h_n} (c/az)^n \\
&= zh^*(z) - \frac{c}{az} h^*(c/az),
\end{aligned}$$

por lo tanto $q(z) = q(c/az)$ para todo $z \in A$. Por el lema 4.21 la función q es constante, además $q(0) = 0$ por lo tanto q es la función cero y entonces h^* también, por lo tanto $h = 0$. Lo cual es una contradicción. □

4.3. Operadores de Toeplitz con finitas diagonales

A continuación daremos condiciones para que operadores de Toeplitz con un número finito de diagonales analíticas y coanalíticas (inferiores y superiores), diferentes de cero, cumplan criterios de hiperciclicidad.

Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & 0 & \cdots \\
a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots \\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\
0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots
\end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

donde $a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

¿Cuándo T es hipercíclico?

Si a_1, a_2, \dots, a_n son cero tenemos que T es un operador co-analítico, y ya tenemos condiciones para que éste sea hipercíclico (teorema 3.39). Si $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}$ son cero tenemos que T es un operador analítico, los cuales sabemos nunca son hipercíclicos (teorema 3.40).

A continuación daremos condiciones sobre $a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n$ que garanticen que T es hipercíclico. Usaremos el Criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1).

Para usar el criterio lo primero es encontrar valores propios y vectores propios, es decir, resolvamos la ecuación $Tf = \lambda f$, donde $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$, con $\gamma_0, \gamma_1, \dots \in \mathbb{C}$, los cuales de inicio son diferentes de cero.

Sabemos que

$$T = a_{-m}(S^*)^m + \dots + a_{-2}(S^*)^2 + a_{-1}S^* + a_0I + a_1S + a_2S^2 + \dots + a_nS^n$$

Denotamos con $f^{(i)}$ la i -ésima derivada de f . Por definición

$$S^n f(z) := z^n f(z) \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$S^* f(z) := \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad (S^*)^2 f(z) := \frac{S^* f(z) - f^{(1)}(0)}{z} = \frac{f(z) - f(0) - z f^{(1)}(0)}{z^2},$$

y en general tenemos que

$$(S^*)^n f(z) := \frac{f(z) - f_{n-1}(z)}{z^n} \text{ para } n \geq 1,$$

donde $f_n(z) = \sum_{k=0}^n \gamma_k z^k$ para $n \geq 0$.

Calculando, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda f(z) &= (a_{-m}(S^*)^m + a_{-(m-1)}(S^*)^{m-1} + \dots + a_{-1}S^* + a_0I + a_1S + \dots + a_nS^n) f(z) \\ &= \left(a_{-m} \frac{f(z) - f_{m-1}(z)}{z^m} + a_{-(m-1)} \frac{f(z) - f_{m-2}(z)}{z^{m-1}} + \dots + a_{-1} \frac{f(z) - f_0(z)}{z} + (a_0 + \dots + a_n z^n) f(z) \right) \\ &= \left(\frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots + a_n z^n \right) f(z) - a_{-m} \frac{f_{m-1}(z)}{z^m} - a_{-(m-1)} \frac{f_{m-2}(z)}{z^{m-1}} - \dots - a_{-1} \frac{f_0(z)}{z}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^m \frac{a_{-k} f_{k-1}(z)}{z^k} = \left(\frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + (a_0 - \lambda) + a_1 z + \dots + a_n z^n \right) f(z),$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^m a_{-k} f_{k-1}(z) z^{m-k} = (a_{-m} + a_{-(m-1)} z + \dots + a_{-1} z^{m-1} + (a_0 - \lambda) z^m + a_1 z^{m+1} + \dots + a_n z^{n+m}) f(z),$$

y como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_{-k} f_{k-1}(z) z^{m-k} &= \sum_{k=1}^m a_{-k} \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_s z^s z^{m-k} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^{k-1} a_{-k} \gamma_s z^{m+s-k}, \end{aligned}$$

sean $t = m + s - k$ y $r = m - k$ entonces

$$\sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^{k-1} a_{-k} \gamma_s z^{m+s-k} = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{r=0}^t a_{-(m-r)} \gamma_{t-r} z^t,$$

despejando $f(z)$ tenemos que,

$$f(z) = \frac{\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{r=0}^t a_{-(m-r)} \gamma_{t-r} z^t}{(a_{-m} + a_{-(m-1)}z + \cdots + a_{-1}z^{m-1} + (a_0 - \lambda)z^m + a_1z^{m+1} + \cdots + a_nz^{m+n})}.$$

Lema 4.24. Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada A

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}$$

donde $a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, con $a_{-m} = 0$. Entonces las soluciones de la ecuación $Tf(z) = \lambda f(z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ forman un espacio de dimensión m , donde las soluciones son de la forma

$$f(z) = \frac{q(z)}{(a_{-m} + a_{-(m-1)}z + \cdots + a_{-1}z^{m-1} + (a_0 - \lambda)z^m + a_1z^{m+1} + \cdots + a_nz^{m+n})},$$

con $q(z)$ un polinomio de grado a lo más $m - 1$.

Demostración. En lo anterior ya demostramos que si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$ cumple la ecuación $Tf(z) = \lambda f(z)$ entonces f es de la forma

$$f(z) = \frac{\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{r=0}^t a_{-(m-r)} \gamma_{t-r} z^t}{(a_{-m} + a_{-(m-1)}z + \cdots + a_{-1}z^{m-1} + (a_0 - \lambda)z^m + a_1z^{m+1} + \cdots + a_nz^{m+n})}.$$

Ahora observamos que el numerador de f es un polinomio de grado $m - 1$ y tiene la forma

$$\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{r=0}^t a_{-(m-r)} \gamma_{t-r} z^t =$$

$$a_{-m} \gamma_0 + (a_{-m} \gamma_1 + a_{-(m-1)} \gamma_0) z + \cdots + (a_{-m} \gamma_{m-1} + a_{-(m-1)} \gamma_{m-2} + \cdots + a_{-1} \gamma_0) z^{m-1}.$$

Por lo tanto, para que el numerador de $f(z)$ sea diferente de cero es suficiente con que al menos un γ_k , para $0 \leq k \leq m$ sea diferente de cero, ya que $a_{-m} = 0$. Concluimos que el grado de numerador depende directamente de los γ diferentes de cero, por lo cual a lo más es un polinomio de grado $m - 1$. \square

Con lo anterior ya sabemos la forma de f , ahora para que sea un vector propio necesitamos que esté en \mathcal{H}^2 . Para resolver esto necesitamos que $f(z)$ sea analítica, para esto necesitamos que las raíces del denominador tengan módulo mayor que uno.

Teorema 4.25. Sean $a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ y $P_\lambda(z) := a_{-m} + a_{-(m-1)}z + \cdots + a_{-1}z^{m-1} + (a_0 - \lambda)z^m + a_1z^{m+1} + \cdots + a_nz^{m+n}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo. Si existen números positivos μ_i , con $i = 1, \dots, m+n$, tal que $\sum_{i=1}^{m+n} \mu_i = 1$ y que cumplen que

$$\left| \frac{a_0 - \lambda}{a_{-m}} \right| < \mu_m,$$

$$\left| \frac{a_{-i}}{a_{-m}} \right| < \mu_i \text{ para } i = 1, \dots, m-1$$

y

$$\left| \frac{a_i}{a_{-m}} \right| < \mu_{i+m} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Entonces $P_\lambda(z)$ tiene todas sus raíces fuera del disco de radio 1.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $P_\lambda(z) = 0$, tenemos que se cumple que

$$1 = -\frac{a_{-(m-1)}}{a_{-m}} z - \cdots - \frac{a_{-1}}{a_{-m}} z^{m-1} - \frac{(a_0 - \lambda)}{a_{-m}} z^m - \frac{a_1}{a_{-m}} z^{m+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{-m}} z^{m+n}.$$

Ahora si $|z| \leq 1$ entonces

$$1 \leq \left| \frac{a_{-(m-1)}}{a_{-m}} \right| + \cdots + \left| \frac{a_{-1}}{a_{-m}} \right| + \left| \frac{(a_0 - \lambda)}{a_{-m}} \right| + \left| \frac{a_1}{a_{-m}} \right| + \cdots + \left| \frac{a_n}{a_{-m}} \right| < \sum_{i=1}^{m+n} \mu_i = 1$$

Lo cual nos da una contradicción. Por lo tanto $|z| > 1$ \square

Con lo anterior ya tenemos condiciones para que f sea analítica, es decir condiciones para que existan vectores propios para T .

Ahora falta dar condiciones para que estos vectores propios formen un conjunto denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, para lo cual usaremos los resultados de Baranov y Lishanskii [3].

Sean $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1} \in \mathbb{C}$, definimos

$$\Phi(z) := \frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n,$$

$$q_m(z) := \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{r=0}^t a_{-(m-r)} \gamma_{t-r} z^t$$

y

$$\phi_n(z) := a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n.$$

Ahora, para $\lambda \in \mathbb{C}$, escribimos el vector propio f_λ como sigue:

$$f_\lambda(z) = \frac{q_m(z)}{z^m \Phi(z) - \lambda z^m}.$$

A continuación damos unas definiciones que usaremos en lo siguiente.

Definición 4.26. *Un conjunto A de un espacio de Hilbert \mathcal{H} es llamado completo si es una base ortonormal maximal, y por lo tanto su espacio generado es denso en \mathcal{H} .*

Definición 4.27. *Sea $A(\mathbb{D})$ el conjunto de funciones holomorfas de \mathbb{D} a \mathbb{C} , tales que tienen una extensión continua en $\overline{\mathbb{D}}$ (es decir, $A(\mathbb{D}) = \mathcal{H} \setminus C(\overline{\mathbb{D}})$). A este conjunto le llamamos el álgebra del disco.*

Definición 4.28. *Una función analítica h sobre un dominio D se dice que es N -valente en D si para todo $w \in h(D)$ la ecuación $h(z) = w$ tiene a lo más N soluciones en D contando multiplicidades.*

La siguiente proposición es de [3], lo cual usaremos para demostrar la densidad de los vectores propios.

Proposición 4.29. *1. Sea $h \in A(\mathbb{D})$ inyectiva en $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces el sistema $\{h^k\}_{k \geq 0}$ es completo en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.*

2. Sea $h \in A(\mathbb{D})$ N -valente en $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces el sistema de funciones $\{z^j h^k : k \geq 0, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ es completo en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Como consecuencia tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.30. *Sea $m, n \in \mathbb{N}$, $\Phi(z) := \frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, y U un abierto no vacío en \mathbb{C} tal que $U \subseteq \left(\Phi(\overline{\mathbb{D}}) \setminus 0 \right)^c$. Si para cualquier $w \in \Phi(\overline{\mathbb{D}}) \setminus 0$ la ecuación $\Phi(z) = w$ tiene exactamente m soluciones distintas en $\overline{\mathbb{D}} \setminus 0$; entonces $\text{span } \{f_\lambda : \lambda \in U\}$ es denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, con $f_\lambda(z) = \frac{q_m(z)}{z^m \Phi(z) - \lambda z^m}$.*

La demostración que mostramos a continuación se encuentra en [3], la agregamos por completéz del trabajo.

Demostración. Primero consideramos el caso $m = 1$, es decir $\Phi(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$. Fijamos $\lambda_0 \in U$ y sea

$$h(z) = \frac{1}{\frac{a_{-1}}{z} - \lambda_0 + \phi_n(z)} = \frac{z}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)} = \frac{1}{\Phi(z) - \lambda_0},$$

h es analítica porque $\lambda_0 \notin \overline{\Phi(\mathbb{D} \setminus \{0\})}$ y h es inyectiva en \mathbb{D} por hipótesis.

Sea $\delta = \min \{ |a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)| : z \in \mathbb{D} \}$. Supongamos que $\delta = 0$, entonces $a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z) = 0$ para algún $z \in \mathbb{D}$. Si $z = 0$ entonces $a_{-1} = 0$, lo cual no puede ser. Ahora si $z \neq 0$ entonces $\frac{a_{-1}}{z} - \lambda_0 + \phi_n(z) = 0$, es decir $\Phi(z) - \lambda_0 = 0$, lo cual no es posible por la elección de λ_0 . Concluimos que $\delta > 0$.

Notemos que para λ en la vecindad $D(\lambda_0, \delta)$, se tiene que

$$\frac{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)}{\lambda - \lambda_0} \geq \frac{\delta}{\lambda - \lambda_0} > 1.$$

Por lo tanto para $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$z < \frac{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)}{\lambda - \lambda_0},$$

y entonces

$$\begin{aligned} f_\lambda(z) &= \frac{1}{a_{-1} - \lambda z + z\phi_n(z)} \left(\frac{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)} \right) \\ &= \frac{1}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)} \left(\frac{1}{\frac{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z) - (\lambda - \lambda_0)z}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)}} \right) \\ &= \frac{1}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)} \left(\frac{1}{1 - \frac{(\lambda - \lambda_0)z}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)z}{(a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z))} \right)^k \left(\frac{1}{(a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z))} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k z^k}{(a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z))^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)} h^k(z) \text{ para } z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Sea $g(z) = a_{-1} - \lambda_0z + z\phi_n(z)$, entonces

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \frac{h^k(z)}{g(z)},$$

observamos que $\frac{h^k(z)}{g(z)}$ son los coeficientes de Taylor de f_λ como función de λ , además $f_\lambda \in \mathcal{H}^2$, es infinitamente diferenciable con respecto de λ y sus derivadas también están en \mathcal{H}^2 .

Supongamos que $f = f_\lambda$ para todo $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$, entonces $f = f_{\lambda_0}$ por lo cual $f = f_\lambda - f_{\lambda_0}$, entonces $f = \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ y tomando límite cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ se tiene que $f = \frac{df_\lambda}{d\lambda}$, del mismo modo ahora como $f = \frac{df_\lambda}{d\lambda}$ entonces también $f = \frac{df_{\lambda_0}}{d\lambda}$ por lo cual $f = \frac{f'_\lambda - f'_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$, y tomando límite tenemos que $f = \frac{d^2 f_\lambda}{d\lambda^2}$. De forma inductiva tenemos que $f = \frac{d^k f_\lambda}{d\lambda^k}$, para $k \geq 0$.

Por lo tanto si $f = f_\lambda$ para todo $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$ entonces

$$f = \frac{h^k(z)}{(a_{-1} - \lambda_0 z + z\phi_n(z))} \quad \text{para } k \geq 0.$$

Por otro lado la proposición 4.29 asegura que el sistema $\{h^k\}_{k \geq 0}$ es completo en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. El factor $1/(a_{-1} - \lambda_0 z + z\phi_n(z))$ es un elemento invertible de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, entonces el sistema

$$(a_{-1} - \lambda_0 z + z\phi_n(z))^{-1} h^k \quad k \geq 0$$

también es completo y entonces $f = 0$ y por lo tanto el conjunto $\{f_\lambda : \lambda \in U\}$ es denso.

Ahora sea $m > 1$. Fijamos $\lambda_0 \in U$. En este caso, por el lema 4.24, tenemos m vectores propios correspondientes a λ_0 ,

$$f_{\lambda_0, j}(z) = \frac{z^j}{z^m \Phi(z) - \lambda_0 z^m}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Usando como antes la expansión de Taylor para λ cercano a λ_0 , concluimos que si f es ortogonal al vector propio correspondiente a λ en una vecindad pequeña de λ_0 , entonces

$$f = \frac{z^j h^k(z)}{z^m \Phi(z) - \lambda_0 z^m}, \quad k \geq 0, 0 \leq j \leq m-1, \quad (4.14)$$

donde

$$h(z) = \frac{z^m}{z^m \Phi(z) - \lambda_0 z^m} = \frac{1}{\Phi(z) - \lambda_0}.$$

Por la condición de Φ , se tiene que h es m -valente y para cualquier $w \in h(\overline{\mathbb{D}})$ la ecuación $h(z) = w$ tiene exactamente m soluciones en $\overline{\mathbb{D}}$ contando multiplicidades. Entonces argumentando como antes por la proposición 4.29 el sistema $\{z^j h^k : k \geq 0, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ es completo en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, concluimos que cualquier función que satisface (4.14) es cero. \square

Concluimos con el siguiente resultado.

Teorema 4.31. *Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

donde $a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, diferentes de cero y sea $\Phi(z) := \frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$.

Si se cumple las siguientes condiciones:

1. Existen números positivos μ_i , con $i = 1, \dots, m+n$, tal que $\sum_{i=1}^{m+n} \mu_i = 1$ que cumplen que

$$\left| a_0 - \frac{a_0}{a_0} \right| < \frac{1}{2} \mu_m a_{-m},$$

$$\left| \frac{a_{-i}}{a_{-m}} \right| < \mu_i \text{ para } i = 1, \dots, m-1$$

y

$$\left| \frac{a_i}{a_{-m}} \right| < \mu_{i+m} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

2. Se cumple que $\frac{a_0}{a_0} \in \overline{\Phi(\mathbb{D} \setminus \{0\})}$ y que para cualquier $w \in \overline{\Phi(\mathbb{D} \setminus \{0\})}$ la ecuación $\Phi(z) = w$ tiene exactamente N soluciones en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Entonces T es hipercíclico.

Demostración. Sean

$$B := \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{a_0}{a_0} \right| < \frac{1}{2} \mu_m a_{-m} \text{ y } \lambda < 1 \right\}$$

y

$$C := \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{a_0}{a_0} \right| < \frac{1}{2} \mu_m a_{-m} \text{ y } \lambda > 1 \right\},$$

es claro que B y C son conjuntos abiertos no vacíos. Además observamos que para $\lambda \in B \cup C$ se cumple que

$$a_0 - \lambda \leq \left| a_0 - \frac{a_0}{a_0} \right| + \left| \lambda - \frac{a_0}{a_0} \right| < \mu_m a_{-m} \quad (4.16)$$

Para $\lambda \in B \cup C$ sea f_λ definida como sigue:

$$f_\lambda(z) = \frac{\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{r=0}^t a_{-(m-r)} \frac{f^{(t-r)}(0)}{(t-r)!} z^t}{(a_{-m} + a_{-(m-1)}z + \dots + a_{-1}z^{m-1} + (a_0 - \lambda)z^m + a_1z^{m+1} + \dots + a_nz^{m+n})}$$

Por hipótesis y por (4.16) tenemos que f_λ cumple las hipótesis del teorema 4.25, entonces $f_\lambda \in \mathcal{H}^2$ para cada $\lambda \in B \cup C$. Además por construcción f_λ es un vector propio de T .

Ahora usando la condición 2, tenemos que por la proposición 4.30 los conjuntos

$$\text{span } \{f_\lambda : \lambda \in A\} \text{ y } \text{span } \{f_\lambda : \lambda \in B\}$$

son densos, por lo tanto tenemos por el teorema 4.1 que el operador T es hipercíclico. \square

4.4. Operadores de Toeplitz con infinitas diagonales

A continuación caracterizamos operadores de Toeplitz con una diagonal analítica (inferior) y un número infinito de diagonales co-analíticas (superiores), diferentes de cero, para que cumplan criterios de hiperciclicidad.

Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada A

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \bar{a}_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

donde $a, a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$ pertenecen a \mathbb{C} .

Sea $\phi(z) := a_0 + a_{-1}z + a_{-2}z^2 + a_{-3}z^3 + \cdots$, observamos que ϕ es analítica. Además definimos $\phi^*(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_{-1}z + \bar{a}_{-2}z^2 + \bar{a}_{-3}z^3 + \cdots$, es decir $\phi^*(z) = \overline{\phi(\bar{z})}$. Ahora definimos $\check{\phi}(z) := \phi(\bar{z})$, notemos que $\check{\phi} = \overline{\phi^*}$, y se cumple que para cualquier $f \in \mathcal{H}^2$

$$Tf = T_{az + \check{\phi}(z)}f,$$

es decir T es el operador de Toeplitz con símbolo $az + \check{\phi}(z)$.

Esta sección se centrará en encontrar condiciones para saber cuando T es hipercíclico.

Si $a_{-1}, \dots, a_{-n}, \dots$ son cero tenemos que T es un operador analítico, los cuales sabemos nunca son hipercíclicos (teorema 3.40), y si a es cero entonces tenemos que T es un operador co-analítico y ya tenemos condiciones para que estos sean hipercíclicos (teorema 3.39).

Recordemos que para $\lambda \in \mathbb{D}$ se tiene que $K_\lambda(z) := \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$ es el núcleo reproductor de \mathcal{H}^2 . Además sabemos que en general para un operador de Toeplitz T con símbolo una función γ analítica y acotada se cumple que:

$$T_\gamma^* K_\lambda = \overline{\gamma(\lambda)} K_\lambda.$$

Usando la igualdad anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} T_{az + \check{\phi}(z)} K_{\bar{\lambda}}(z) &= az K_{\bar{\lambda}}(z) + T_{\check{\phi}(z)} K_{\bar{\lambda}}(z) \\ &= az K_{\bar{\lambda}}(z) + T_{\phi^*(z)}^* K_{\bar{\lambda}}(z) \\ &= az K_{\bar{\lambda}}(z) + \overline{\phi^*(\bar{\lambda})} K_{\bar{\lambda}}(z) \\ &= az K_{\bar{\lambda}}(z) + \phi(\lambda) K_{\bar{\lambda}}(z). \end{aligned}$$

A continuación damos condiciones sobre $a, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_n, \dots$ las cuales garantizan que T es hipercíclico. Usaremos el criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1).

Para usar el criterio lo primero es encontrar valores propios y vectores propios. Sobre esto tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 4.32. *Para λ y μ números complejos distintos, de modulo menor que uno, si se cumple que $a = \frac{\mu\lambda(\phi(\lambda)-\phi(\mu))}{\lambda-\mu}$ entonces las funciones de la forma $\lambda K_{\bar{\lambda}} - \mu K_{\bar{\mu}}$ son vectores propios del operador T con valor propio $\frac{a}{\lambda} + \phi(\lambda)$.*

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$T(\lambda K_{\bar{\lambda}} - \mu K_{\bar{\mu}}) = (az + \phi(\lambda))\lambda K_{\bar{\lambda}} - (az + \phi(\mu))\mu K_{\bar{\mu}}.$$

Queremos que se cumpla la siguiente igualdad

$$(az + \phi(\lambda))\lambda K_{\bar{\lambda}} - (az + \phi(\mu))\mu K_{\bar{\mu}} = \left(\frac{a}{\lambda} + \phi(\lambda)\right) (\lambda K_{\bar{\lambda}} - \mu K_{\bar{\mu}}),$$

la cual es equivalente a que se cumpla

$$(az)\lambda K_{\bar{\lambda}} - (az + \phi(\mu))\mu K_{\bar{\mu}} = \left(\frac{a}{\lambda}\right) (\lambda K_{\bar{\lambda}}) - \left(\frac{a}{\lambda} + \phi(\lambda)\right) \mu K_{\bar{\mu}},$$

y esto a

$$(az)\lambda K_{\bar{\lambda}} - \left(\frac{a}{\lambda}\right) (\lambda K_{\bar{\lambda}}) = (az + \phi(\mu))\mu K_{\bar{\mu}} - \left(\frac{a}{\lambda} + \phi(\lambda)\right) \mu K_{\bar{\mu}},$$

factorizando los núcleos reproductores tenemos que

$$(az\lambda - a) K_{\bar{\lambda}} = \left(az + \phi(\mu) - \frac{a}{\lambda} - \phi(\lambda)\right) \mu K_{\bar{\mu}},$$

y por lo tanto

$$(az\lambda - a) \frac{1}{1 - \lambda z} = \left(az + \phi(\mu) - \frac{a}{\lambda} - \phi(\lambda)\right) \mu \frac{1}{1 - \mu z},$$

y entonces

$$(az\lambda - a) (1 - \mu z) - \left(az + \phi(\mu) - \frac{a}{\lambda} - \phi(\lambda)\right) \mu (1 - \lambda z) = 0,$$

factorizando $1 - \lambda z$ se tiene que

$$a(1 - \mu z) + \mu a \left(z - \frac{1}{\lambda}\right) + \mu (\phi(\mu) - \phi(\lambda)) = 0,$$

que es equivalente

$$a = \frac{\mu\lambda(\phi(\lambda) - \phi(\mu))}{\lambda - \mu}.$$

□

Ya tenemos la forma de los vectores propios ahora nos ocuparemos de la existencia de estos, para esto primero necesitamos el siguiente teorema de varias variables complejas.

Teorema 4.33. [42] Sean $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^m$ conjuntos abiertos, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}^m$ holomorfa, $N(f) := \{(z, w) \in X \times Y : f(z, w) = 0\}$, $y(a, b) \in N(f)$ tal que el rango de la matriz $\frac{\partial f}{\partial w}(a, b)$ es igual a m . Entonces existen vecindades $U(a) \subset X$ y $W(b) \subset Y$ y una función holomorfa $h : U \rightarrow W$ con la propiedad de que $(z, w) \in (U \times W) \setminus N(f)$ si y solo si $w = h(z)$, con $(z, w) \in U \times W$.

Para nuestro objetivo necesitamos el siguiente teorema, el cual es un caso particular del teorema anterior.

Corolario 4.34. Sean $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $N(f) := \{(z, w) \in X \times Y : f(z, w) = 0\}$, $y(a, b) \in N(f)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial w}(a, b) = 0$. Entonces existen vecindades $U(a) \subset X$ y $W(b) \subset Y$ y una función holomorfa $h : U \rightarrow W$ tales que $(z, w) \in (U \times W) \setminus N(f)$ si y solo si $w = h(z)$, con $(z, w) \in U \times W$.

El siguiente teorema nos asegura la existencia de infinidad de vectores propios para el operador T .

Teorema 4.35. Si existe $z_0 = 0$ en \mathbb{D} tal que $\phi(z_0) = -\frac{z_0 \phi''(z_0)}{2}$, entonces existen abiertos no vacíos $U(z_0)$ y $W(z_0)$ en \mathbb{D} tal que para cada $\lambda \in U(z_0)$ existe $\mu \in W(z_0)$ tal que $\lambda K_{\bar{\lambda}}(z) - \mu K_{\bar{\mu}}(z)$ es un vector propio de T .

Demostración. Usando la serie de Taylor de ϕ alrededor de un x_0 en \mathbb{D} , tenemos que para cualquier μ en \mathbb{D} se cumple que

$$\phi(\mu) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(\mu - x_0) + g(\mu)(\mu - x_0)^2,$$

donde $g(\mu) := \frac{\phi''(x_0)}{2} + \frac{\phi'''(x_0)}{3!}(\mu - x_0) + \frac{\phi^{(4)}(x_0)}{4!}(\mu - x_0)^2 + \dots$.

Sea $a := z_0^2 \phi'(z_0)$, y sea $\Phi : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, definida como sigue

$$\Phi(\lambda, \mu) = \begin{cases} \frac{\mu \lambda (\phi(\lambda) - \phi(\mu))}{\lambda - \mu} - a, & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ \lambda^2 \phi'(\lambda) - a, & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases} \quad (4.18)$$

Sabemos que Φ es holomorfa si es holomorfa en cada entrada (proposición 1.2.2 en [42]), es decir necesitamos que las derivadas parciales existan. Por definición de Φ , si $\lambda = \mu$ es claro que las parciales existen, por lo cual solo calculamos el caso cuando $\lambda \neq \mu$.

Sean x_0 en \mathbb{D} , calculamos la derivada parcial respecto μ (el calculo respecto a λ es análogo). Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(x_0, x_0) &= \lim_{\mu \rightarrow x_0} \frac{\Phi(x_0, \mu) - \Phi(x_0, x_0)}{\mu - x_0} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow x_0} \frac{\frac{\mu x_0(\phi(x_0) - \phi(\mu))}{x_0 - \mu} - x_0^2 \phi'(x_0)}{\mu - x_0} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow x_0} \frac{\frac{\mu x_0(\phi(x_0) - [\phi(x_0) + \phi'(x_0)(\mu - x_0) + g(\mu)(\mu - x_0)^2])}{x_0 - \mu} - x_0^2 \phi'(x_0)}{\mu - x_0} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow x_0} \frac{\mu x_0(\phi(x_0) + g(\mu)(\mu - x_0)) - x_0^2 \phi'(x_0)}{\mu - x_0} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow x_0} \frac{x_0(\mu - x_0)\phi'(x_0) + \mu x_0 g(\mu)(\mu - x_0)}{\mu - x_0} \\
&= x_0 \phi'(x_0) + x_0^2 g(x_0) \\
&= x_0 \phi'(x_0) + x_0^2 \frac{\phi''(x_0)}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto la derivadas parciales existen.

Ahora queremos usar el teorema 4.34, para eso ya tenemos que $\Phi(z_0, z_0) = 0$, y necesitamos que $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(z_0, z_0) = 0$.

Usando el cálculo anterior, para el caso particular de $x_0 = z_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(z_0, z_0) &= \lim_{\mu \rightarrow z_0} \frac{\Phi(z_0, \mu) - \Phi(z_0, z_0)}{\mu - z_0} \\
&= z_0 \phi'(z_0) + z_0^2 \frac{\phi''(z_0)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Con lo anterior, se cumplen las hipótesis del teorema 4.34 y entonces existen vecindades $U(z_0) \subset \mathbb{D}$ y $W(z_0) \subset \mathbb{D}$ y una función holomorfa $h : U \rightarrow W$ tal que $\Phi(z, w) = 0$ si y solo si $z = h(w)$ con $(z, w) \in U \times W$. Entonces para cada $\lambda \in U(z_0)$ existe $\mu \in W(z_0)$ tal que $\lambda K_{\bar{\lambda}}(z) - \mu K_{\bar{\mu}}(z)$ es un vector propio para T . \square

Como las funciones de la forma $\lambda K_{\bar{\lambda}}(z) - \mu K_{\bar{\mu}}(z)$ son vectores propios de T tenemos que si se cumplen las hipótesis del teorema anterior entonces se cumple que

$$\text{span } \{\lambda K_{\bar{\lambda}}(z) - \mu K_{\bar{\mu}}(z) : \lambda \in U(z_0)\}$$

es un subespacio invariante de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Usando el criterio de Godefroy-Shapiro (teorema 4.1) concluimos el siguiente resultado.

Teorema 4.36. *Sea $T : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ un operador con la siguiente matriz asociada A*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

donde $a, a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$ pertenecen a \mathbb{C} . Sea $\phi(z) := a_0 + a_{-1}z + a_{-2}z^2 + a_{-3}z^3 + \dots$. Si existe $z_0 = 0$ en \mathbb{D} tal que $\phi'(z_0) = -\frac{z_0\phi''(z_0)}{2}$ entonces existe un abierto $U(z_0)$ tal que T es hipercíclico en el subespacio invariante $\overline{\text{span } \lambda K_{\bar{\lambda}}(z) - \mu K_{\bar{\mu}}(z) : \lambda \in U(z_0)}$.

Hiperciclicidad disjunta

En este capítulo estudiamos la existencia de vectores en común con órbitas densas para casos particulares de operadores de Toeplitz, un fenómeno conocido como hiperciclicidad disjunta. El concepto de hiperciclicidad disjunta fue presentado de forma independiente por J. Bès y A. Peris en [9] y por L. Bernal en [8]. A continuación damos la definición de operadores hipercíclicos disjuntos.

Definición 5.1. Sea $N \geq 2$, los operadores hipercíclicos T_1, \dots, T_N actuando sobre un espacio de Fréchet X son hipercíclicos disjuntos (o d -hipercíclicos) si existe algún vector (z, z, \dots, z) en la diagonal de $X^N = X \times X \times \dots \times X$ tal que

$$(z, z, \dots, z), (T_1 z, T_2 z, \dots, T_N z), (T_1^2 z, T_2^2 z, \dots, T_N^2 z), \dots$$

es denso en X^N , X^N dotado de la topología producto. Llamamos al vector z un vector d -hipercíclico asociado a los operadores T_1, T_2, \dots, T_N .

Es claro que la hiperciclicidad disjunta se mantiene sin importar el orden de los operadores, además implica la hiperciclicidad de cada operador, pero la hiperciclicidad de dos operadores, digamos T y S , no implica que sean hipercíclicos disjuntos, por ejemplo si tomamos $T = S$. Además es importante no confundir la hiperciclicidad del operador $T \oplus S : X \times X \rightarrow X$ con la hiperciclicidad disjunta de T y S , si T y S son d -hipercíclicos entonces el operador $T \oplus S$ es hipercíclico, el converso es falso pues la hiperciclicidad del operador $T \oplus S$ implica que existe un vector $(z_1, z_2) \in X \times X$ tal que el conjunto $(z_1, z_2), (T z_1, S z_2), (T^n z_1, S^n z_2), \dots$ es denso en $X \times X$, donde z_1 no necesariamente es igual a z_2 .

En lo siguiente obtenemos condiciones para que dos operadores tridiagonales de Toeplitz sean d -hipercíclicos. Aunque no damos condiciones explícitas sobre sus coeficientes, obtenemos el teorema 5.3 con el cual se pueden obtener ejemplos explícitos. Al final del capítulo mostramos un ejemplo.

También tenemos el teorema 5.4, el cual da condiciones para que dos operadores de Toeplitz co-analíticos sean d -hipercíclicos, usando este teorema también se pueden obtener ejemplos explícitos.

En lo siguiente denotaremos con $\lambda(T, e)$ al valor propio de T correspondiente al vector propio e . Para nuestro objetivo necesitamos el siguiente resultado conocido.

Teorema 5.2. [8] Sean T_1, \dots, T_p operadores sobre un F -espacio separable X . Supongamos que existen $p+1$ subconjuntos D_0, D_1, \dots, D_p de X , satisfaciendo las siguientes propiedades para todo $j = 1, \dots, p$:

- (a) Cada vector $e \in D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_p$ es un vector propio de T_j .
- (b) $\lambda(T_j, e) < 1$ para todo $e \in D_0$.
- (c) $\lambda(T_j, e) > 1$ para todo $e \in D_j$.
- (d) $\lambda(T_j, e) < \lambda(T_i, e)$ para todo $e \in D_i$ y para todo $i = 1, \dots, p \neq j$.

Entonces la sucesión $([T_1^n, \dots, T_p^n])$ es mezclante. En particular, los operadores T_1, \dots, T_p son d -hipercíclicos.

Usando el resultado anterior obtenemos los teoremas principales de este capítulo, los cuales son los siguientes:

Teorema 5.3. Sean $a, b, c, d, e, h \in \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ dadas como $f(z) = \frac{a}{z} + b + cz$, $g(z) = \frac{d}{z} + e + hz$. Entonces los operadores T_f y T_g son d -hipercíclicos en $L(\mathcal{H}^2(\mathbb{D}))$ si se cumple las siguientes condiciones:

1. $a > c$, $d > h$.
2. $\frac{c}{a} = \frac{h}{d}$.
3. El conjunto $A := \{z \in \mathbb{D} : f(z) < 1, g(z) < 1\}$ es un abierto no vacío.
4. El conjunto $B := \{z \in \mathbb{D} : f(z) > 1, f(z) > g(z)\}$ es un abierto no vacío.
5. El conjunto $C := \{z \in \mathbb{D} : g(z) > 1, g(z) > f(z)\}$ es un abierto no vacío.

Demostración. Usando la condición 1 y las ideas de la demostración del teorema 4.20, tenemos que $f(z)$ y $g(z)$ están bien definidas para z en el anillo $W_f = \{z \in \mathbb{C} : c/a < z < 1\}$.

Además se cumple que $T_f h_z = f(z)h_z$ y $T_g h_z = g(z)h_z$, donde h_z es la función definida como

$$h_z(w) := \begin{cases} zK_{\bar{z}}(w) - \frac{c}{az}K_{\bar{c}/\bar{a}\bar{z}}(w), & \text{para } z^2 = c/a, \\ \frac{1}{(1-zw)^2}, & \text{para } z^2 = c/a. \end{cases} \quad (5.1)$$

Es decir h_z es vector propio de T_f y T_g . Además por la condición 2 tenemos que T_f y T_g tienen el mismo conjunto de vectores propios, con la diferencia que a cada uno le corresponde un valor propio no necesariamente igual.

Definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{h_z : z \in A\} \\ D_1 &:= \{h_z : z \in B\} \\ D_2 &:= \{h_z : z \in C\} \end{aligned}$$

Tenemos que el espacio vectorial generado de cada conjunto es denso en $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, entonces los conjuntos anteriores cumplen las hipótesis del teorema 5.2, por lo tanto T_f y T_g son d -hipercíclicos. \square

Para operadores co-analíticos, es decir operadores que tienen su matriz con las diagonales inferiores cero, tenemos un teorema similar al teorema 5.3.

Teorema 5.4. Sean $f : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ funciones tal que \bar{f} y \bar{g} están en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, es decir T_f y T_g son operadores co-analíticos en $L(\mathcal{H}^2(\mathbb{D}))$. Entonces T_f y T_g son d-hipercíclicos en $L(\mathcal{H}^2(\mathbb{D}))$ si se cumple las siguientes condiciones:

1. El conjunto $A := \{z \in \mathbb{D} : f(z) < 1, g(z) < 1\}$ es un abierto no vacío.
2. El conjunto $B := \{z \in \mathbb{D} : f(z) > 1, f(z) > g(z)\}$ es un abierto no vacío.
3. El conjunto $C := \{z \in \mathbb{D} : g(z) > 1, g(z) > f(z)\}$ es un abierto no vacío.

Demostración. Para $g \in \mathcal{H}^2$ se cumple que

$$\begin{aligned} g, T_f K_z &= T_{\bar{f}} g, K_z \\ &= \overline{f} g, K_z \\ &= \overline{f(z)} g(z) \\ &= \overline{f(z)} g, K_z \\ &= g, f(z) K_z, \end{aligned}$$

como g es arbitrario se tiene que $T_f K_z = f(z) K_z$, es decir K_z es un vector propio de T_f con valor propio $f(z)$, análogamente K_z es un vector propio de T_g con valor propio $g(z)$. Además sabemos que el conjunto de núcleos reproductores es denso en \mathcal{H}^2 y sean

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{z \in \mathbb{D} : z \in A\} \\ D_1 &:= \{z \in \mathbb{D} : z \in B\} \\ D_2 &:= \{z \in \mathbb{D} : z \in C\}, \end{aligned}$$

entonces por el teorema 5.3 se tiene que T_f y T_g son d-hipercíclicos. □

Ejemplo 5.5. Los operadores T_f y T_g son d-hipercíclicos, donde

$$f(z) = \frac{3}{2z} + i - z \text{ y } g(z) = -\frac{3}{2z} + \frac{1}{2} - i + z.$$

En la figura 5.1 se muestra la gráfica de $f(z)$ en rojo y $g(z)$ en azul, donde $z = \frac{9}{10}e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Es decir las gráficas mostradas son la imagen bajo las funciones módulo de f y g del círculo de radio $\frac{9}{10}$, el cual está contenido en \mathbb{D} .

Observamos que para t en el intervalo verde las dos funciones son menor que uno, este intervalo sería el correspondiente a los puntos z en el conjunto D_0 . Para t en el intervalo amarillo tenemos que $g(z) > f(z)$ y además $g(z) > 1$, este intervalo sería el correspondiente a los puntos z en D_2 . Para t en el intervalo magenta tenemos que $f(z) > g(z)$ y además $f(z) > 1$, este intervalo sería el correspondiente a los puntos z en D_1 . Por lo tanto f y g cumplen las hipótesis del Teorema 5.3, entonces T_f y T_g son d-hipercíclicos.

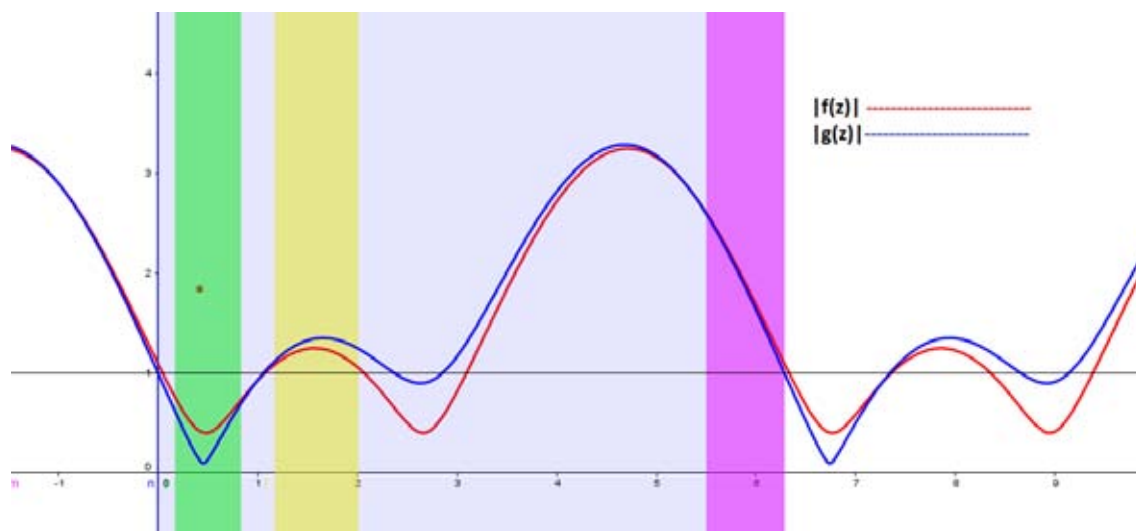


Figura 5.1: Gráfica del módulo de operadores tridiagonales d -hipercíclicos.

Subhiperciclicidad

Existen operadores que aunque no son hipercíclicos cumplen ciertas características de hiperciclicidad, el concepto de subhiperciclicidad se refiere a operadores de este tipo, en este capítulo estudiamos mediante ejemplos la subhiperciclicidad. Este capítulo es un trabajo conjunto con R. A. Martínez-Avenidaño y A. Peris [25].

Recientemente, B. F. Madore and R. A. Martínez-Avenidaño presentaron en [29] este concepto. La definición de operadores subhipercíclicos es la siguiente.

Definición 6.1. *Sea X un espacio de Banach y sea M un subespacio cerrado no cero de X . Un operador lineal acotado $T : X \rightarrow X$, es llamado subhipercíclico respecto al subespacio M de X si existe un vector $x \in X$ tal que $\text{Orb}_T(x) \setminus M$ es denso en M . El vector x es llamado subhipercíclico para T .*

Rezaei demostró en [38] que si un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach X es subhipercíclico respecto a algún subespacio M de X y p es un polinomio complejo, entonces $\ker(p(T^*)) \subseteq M$, lo cual da una respuesta afirmativa a la pregunta (v) de [29]. Además como consecuencia prueba que bajo condiciones adicionales, un operador subhipercíclico T respecto a un subespacio M de X tiene una variedad lineal densa de M que consiste, excepto del cero, de vectores que son hipercíclicos en M . Más ejemplos y resultados de operadores subhipercíclicos se encuentran en [2, 28, 29, 33, 38].

Acerca de lo anterior, daremos ejemplos que responden algunas preguntas hechas por Rezaei en [38]. En particular se mostrará un ejemplo de un operador T tal que $\text{Orb}_T(x) \setminus M$ es densa en alguna parte en M , pero no es densa en M .

A continuación respondemos negativamente las siguientes preguntas de [38]:

Pregunta 1. Sea M un subespacio no trivial de un espacio de Banach X y sea $x \in M$. ¿Si el conjunto $\text{Orb}_T(x) \setminus M$ es denso en alguna parte en M implica que es denso en M ? (i.e. para un subconjunto $U \subset M$ con interior no vacío, ¿la densidad de $\text{Orb}_T(y) \setminus U$ en U implica la densidad de $\text{Orb}_T(y) \setminus M$ en M ?)

Pregunta 2. Sean $T \in L(X)$, M un subespacio de dimensión infinita y $x \in M$. ¿Si $M \subseteq \overline{\text{Orb}_T(x)}$ implica que T es subhipercíclico respecto al subespacio M ?

Pregunta 3. ¿Existe un operador T subhipercíclico respecto a un subespacio no trivial M que cumpla que $T^n(M) \subset M$ y $M \subset T^n(M)$ para todo entero $n \geq 0$?

Presentamos algo de notación. Denotamos por $\ell^2(v)$ el espacio de Hilbert definido como

$$\ell^2(v) := \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 v_i < \infty \right\},$$

donde v es la sucesión con pesos $v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}} = (2^{-j})_{j \in \mathbb{N}}$. Denotamos por B el desplazamiento hacia atrás sobre $\ell^2(v)$ y por S el desplazamiento hacia adelante sobre $\ell^2(v)$ definidos de la siguiente manera:

Si $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(v)$ tenemos

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots) \text{ y } S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Observe que

$$Sx = \frac{1}{2} x,$$

y entonces se cumple que para todo $n \geq 0$

$$S^n x = \frac{1}{2^{n/2}} x. \quad (6.1)$$

6.1. Subhiperciclicidad contra hiperciclicidad

Sabemos por [12] que para operadores lineales una órbita densa en alguna parte es densa en todo el espacio. El siguiente es un ejemplo de un operador T subhipercíclico para el cual existe un vector y tal que su órbita es densa en alguna parte del subespacio pero no es densa en todo el subespacio; i.e. construimos un subespacio M y un subconjunto $U \subset M$ con interior no vacío, tal que $\text{Orb}_T(y) \setminus U$ es denso en U pero $\text{Orb}_T(y) \setminus M$ no es denso en M , lo cual nos da una respuesta negativa a la pregunta 1.

Este operador además tendrá la propiedad de

$$T^n(M) \subset M \text{ y } M \subset T^n(M)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y T es subhipercíclico respecto al subespacio M , lo cual nos da una respuesta negativa para la pregunta 3. A continuación mostramos esto en el siguiente teorema.

Teorema 6.2. *Sea B el desplazamiento hacia atrás sobre $\ell^2(v)$. Sean*

$$A := \left\{ j \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N} \text{ con } 2^n - 2 < j \leq 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \right\}, \quad M := \left\{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(v) : x_j = 0 \text{ si } j \in A \right\}$$

y

$$U := M \setminus \left\{ x \in \ell^2(v) : x_2 \leq 1 \right\}.$$

Entonces B es subhipercíclico respecto al subespacio M , y se cumple que $\text{Orb}_B(y) \setminus U$ es denso en U pero $\text{Orb}_B(y) \setminus M$ no es denso en M . Además $B^n(M) \subset M$ y $M \subset B^n(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consideramos la sucesión creciente $(C_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de A^c dada por

$$C_j = A^c \setminus [1, 2^{j+1} - 2], \quad j \in \mathbb{N}.$$

Construimos un vector y el cual tiene órbita densa en U pero no densa en M .

Afirmamos que podemos encontrar vectores $y(j) \in U$, tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, se satisface

- (i) $\overline{y(j) : j \in \mathbb{N}} = U$,
- (ii) $y(j)_k = 0$ si y solo si $k \in C_j$,
- (iii) $y(j)_k \leq j$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$.

Para ver esto, sea $z(j) : j \in \mathbb{N}$ un subconjunto numerable denso de U . Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos $x(j)$ como

$$x(j)_k = \begin{cases} z(j)_k, & \text{si } k \in C_j \text{ y } z(j)_k \leq j, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Observamos que $x(j)_k \in \ell^2(v)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ por construcción.

Además $z(j) : j \in \mathbb{N}$ es un subconjunto denso en U , lo cual mostramos a continuación, sea $x \in U$ y $\varepsilon \in]0, 1[$. Fijamos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k \geq j_0} x_k^2 v_k < \varepsilon^2/2$. Sea $\alpha := \max_{k < j_0} x_k$; $k < j_0$ y $j > 2^{j_0} + \alpha$ tal que $z(j) - x < \varepsilon/2$.

Observemos que si $k \in C_j$ entonces $k \in A$ o $k \geq 2^{j+1} - 1$. Si $k \in A$ entonces $x(j)_k = 0$, y si $k \geq 2^{j+1} - 1$ entonces $k > j_0$ porque $j > 2^{j_0} + \alpha > j_0$.

Además $z(j)_k > j$ implica que $k \geq j_0$; pues en otro caso,

$$z(j) - x \geq z(j)_k - x_k \quad \overline{v_k} > (z(j)_k - \alpha)2^{-j_0/2} > 1,$$

lo cual no es posible.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} x(j) - x^2 &= \sum_{k \in C_j \text{ y } z(j)_k \leq j} z(j)_k - x_k^2 v_k + \sum_{k \in C_j \text{ o } z(j)_k > j} x_k^2 v_k \\ &\leq z(j) - x^2 + \sum_{k \geq j_0} x_k^2 v_k < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

Finalmente definimos $(y(j))_{j \in \mathbb{N}}$ como

$$y(j)_k = \begin{cases} 2^{-jk}, & \text{si } k \in C_j \text{ con } x(j)_k = 0, \\ x(j)_k, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

y por construcción las condiciones (i), (ii), y (iii) se satisfacen.

Definimos el vector

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} S^{nj} y(j),$$

donde $n_j := \sum_{i=1}^j m_i$, y $m_j := 3 \cdot 2^{3j} - 2$, para $j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $y \notin M$ y

$$\overline{\text{Orb}_B(y) \setminus M} = U.$$

Observamos que para cada $j \in \mathbb{N}$, el vector $y(j)$ tiene (posiblemente) elementos no cero en un bloque de tamaño $2^{j+1} - 2$. Por otro lado un vector en M , empezando en su posición $m_j + 1$, tiene un bloque de tamaño 2^{3j} de (posiblemente) elementos no cero.

Un cálculo muestra que

$$n_{j-1} = \sum_{i=1}^{j-1} m_i = \frac{3}{7}2^{3j} - 2j - \frac{10}{7}.$$

Observamos que

$$n_{j-1} + 2^{j+1} - 2 = \frac{3}{7}2^{3j} - 2j - \frac{10}{7} + 2^{j+1} - 2 < 2^{3j}.$$

Afirmamos que $S^{n_j}y(j) \notin M$ puesto que tiene ceros en sus primeras m_j posiciones y empezando en su posición $m_j + 1$ tiene a lo más $n_{j-1} + 2^{j+1} - 2$ (posiblemente) elementos no cero. Como $n_{j-1} + 2^{j+1} - 2 < 2^{3j}$ se cumple la afirmación. La condición (iii) asegura que la serie que expresa a y converge. Entonces $y \notin U$.

Mostraremos que

- (a) $B^{n_j}y \notin U$ y $\|B^{n_j}y - y(j)\| < 1/2^j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
- (b) Si $n_{j-1} < k < n_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$ ($n_0 := 0$), entonces $B^k y \notin M$ o $(B^k y)_2 = 0$ (y entonces $B^k y \notin U$).

Observamos que

$$B^{n_j}y = B^{n_j} \sum_{i=1}^{\infty} S^{n_i}y(i) = \sum_{n_i < n_j} B^{n_j - n_i}y(j) + y(j) + \sum_{n_i > n_j} S^{n_i - n_j}y(i).$$

Sabemos que para $j \in \mathbb{N}$ el índice más grande donde ocurre un elemento no cero de $y(j)$ es $2^{j+1} - 2$. Si $n_i < n_j$ entonces $n_j - n_i \geq m_j > 2^{j+1}$, por lo tanto

$$\sum_{n_i < n_j} B^{n_j - n_i}y(j) = 0. \quad (6.2)$$

Si $n_j < n_i$ entonces $m_i \leq n_i - n_j < n_i$ y por lo tanto, usando el mismo argumento de antes, cada vector $S^{n_i - n_j}y(i)$ está en M . Como sus elementos no cero solo están en un bloque de tamaño 2^{3j} empezando en la posición $m_j + 1$, entonces

$$\sum_{n_i > n_j} S^{n_i - n_j}y(i) \in M,$$

y por lo tanto $B^{n_j}y \in U$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Por (6.1), (6.2) y por (iii) en la construcción de $(y(j))_{j \in \mathbb{N}}$ tenemos que

$$B^{n_j}y - y(j) = \sum_{i=j+1} S^{n_i - n_j} y(i) \leq \sum_{i=j+1} \frac{\sqrt{(2^{i+1} - 2)i}}{2^{n_i - n_j}},$$

además un cálculo muestra que

$$\sum_{i=j+1} \frac{\sqrt{(2^{i+1} - 2)i}}{2^{n_i - n_j}} \leq \sum_{i=j+1} \frac{\sqrt{(2^{i+1} - 2)i}}{2^{m_k + \dots + m_{j+1}}} \leq \sum_{i=j+1} \frac{\sqrt{(2^{i+1} - 2)i}}{2^{2i} \cdot 2^{m_{k-1} + \dots + m_{j+1}}} \leq \sum_{i=j+1} \frac{1}{2^i}.$$

Entonces tenemos (a).

Ahora observamos que si $n_{j-1} < k < n_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$ entonces $k = m + n_{j-1}$ para algún $1 \leq m < m_j$ y

$$B^k y = \sum_{i=j-1} B^k S^{n_i} y(i) = B^{k - n_{j-1}} y(j-1) + \sum_{i=j} S^{n_i - k} y(i)$$

Tenemos dos casos, que $B^k y \in M$ o que $B^k y \notin M$. En caso de que $B^k y \in M$ supongamos $(B^k y)_2 = 0$, entonces $B^k y = (0, a, 0, \dots)$ con $a = 0$. Pero esto es imposible pues la cadena $[0, a, 0]$ con $a = 0$ solo aparece en $B^m y(j-1)$ cuando $m = 0$, por la condición (ii), y $S^p y(i) = (0, a, 0, \dots)$ con $a = 0$ solo cuando $p = 0$. Entonces tenemos que $B^k y \notin M$ o $B^k y \in M$ con $(B^k y)_2 = 0$, y por lo tanto en U . Concluimos que se cumple (b).

Por (a) y (b) tenemos que $\overline{\text{Orb}_B(y) \setminus M} = U$. Entonces B tiene una órbita que es densa en alguna parte pero no es densa en todo el espacio.

Observamos que B es subhipercíclico respecto al subespacio M , ya que podemos repetir la misma construcción de antes: sea una sucesión de vectores $(y(j))_{j \in \mathbb{N}} \subset M$ que satisfacen

- (i) $\overline{y(j) ; j \in \mathbb{N}} = M$,
- (ii) $y(j)_k = 0$ si y solo si $k \in C_j$,
- (iii) $y(j)_k \leq j$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$.

Entonces el vector

$$y = \sum_{j=1} S^{n_j} y(j),$$

donde $n_j := \sum_{i=1}^j m_i$, y $m_j := 3 \cdot 2^{3j} - 2$, para $j \in \mathbb{N}$, satisface que

$$\overline{\text{Orb}_B(y) \setminus M} = M.$$

Esto nos da una respuesta negativa para la pregunta 1.

Ahora observamos que el conjunto $A = \{j \in \mathbb{N} ; n \in \mathbb{N} \text{ con } 2^n - 2 < j \leq 3 \cdot 2^{n-1} - 2\}$ y A^c contienen intervalos de longitud arbitraria, entonces $B^n(M) \subset M$ y $M \subset B^n(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

El siguiente es un ejemplo donde la densidad de $\text{Orb}_T(x)$ en un subespacio no implica que T es subhipercíclico, lo cual nos da una respuesta negativa a la pregunta 2. A continuación en el siguiente teorema mostramos esto.

Teorema 6.3. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces existe $T : H \rightarrow H$ un operador hipercíclico, z un vector hipercíclico para T y M un subespacio no cero de X tal que $M \subset \overline{\text{Orb}_T(z)}$ pero $\text{Orb}_T(z) \setminus M$ no es denso en M .*

Demostración. Grivaux muestra en [20] que es posible construir un operador hipercíclico $T : H \rightarrow H$ sobre el espacio de Hilbert H tal que $Tx = x$ para cada $x \in H_1$, donde H_1 es cierto subespacio cerrado de dimensión infinita de H . Sea z un vector hipercíclico para T , y sea $M := H_1 \oplus \langle z \rangle$, es decir si $x \in M$ entonces $x = \lambda z + h$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $h \in H_1$.

Es claro que $M \subset \overline{\text{Orb}_T(z)}$, por ser z un vector hipercíclico. En contraste, mostraremos que $\text{Orb}_T(z) \setminus M = \emptyset$. Sea $y \in \text{Orb}_T(z) \setminus M$, entonces $y = \lambda z + x$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in H_1$, como $y \in \text{Orb}_T(z)$ se tiene $\lambda z + x = T^n z$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(T^n - \lambda I)z = x$, mostraremos que esto es imposible. Como T es hipercíclico entonces $T^n - \lambda I$ tiene rango denso (lema 2.53 en [22]). Ahora como z es un vector hipercíclico para T tenemos que $(T^n - \lambda I)z$ también lo es [22], lo cual es imposible porque $(T^n - \lambda I)z = x$, y $x \in H_1$, es decir x es un punto fijo para T . Por lo tanto tenemos que T no es subhipercíclico respecto al subespacio M .

□

Caos para transformaciones fraccionales

En este capítulo caracterizaremos caos para $\varphi(B)$ sobre espacios de Banach de sucesiones, donde φ es una transformación fraccional lineal (TFL) y B es el operador de desplazamiento hacia atrás. Las caracterizaciones son calculables porque ellas solo involucran los cuatro números complejos que definen a φ . Los resultados de este capítulo son un trabajo conjunto con Víctor J. Galán, Félix Martínez-Giménez y Alfredo Peris [26].

La hiperciclicidad para desplazamientos hacia atrás con pesos definida sobre ℓ^p fue caracterizada por Salas. Además él demostró que cualquier perturbación de la identidad por un desplazamiento hacia atrás con pesos es siempre hipercíclico [41]. Siguiendo en esta dirección, caracterizaciones de hiperciclicidad y caos para desplazamientos hacia atrás definidos en espacios de sucesiones en general fueron obtenidos en [21, 35], y caracterizaciones para perturbaciones caóticas de la identidad por desplazamientos hacia atrás con pesos fueron obtenidas en [35]. Otros resultados para dinámica lineal de operadores de la forma $P(T)$, donde T es un operador y $P(z)$ es un polinomio o una función más en general, podemos encontrarlos en [7, 14, 18, 24, 34, 36].

DeLaubenfels y Emamirad [18] probaron que dado un polinomio no constante $P(z)$, el operador $P(B)$ es caótico sobre ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, siempre que $P(\mathbb{D})$ intersekte al círculo unitario. Además, para $a, b \in \mathbb{K}$, donde \mathbb{K} es un campo escalar, demostraron que $aI + bB$ es caótico si y solo si $|b| > 1 - |a|$. También resultados de condiciones suficientes para caos de $P(B)$ en términos de los coeficientes de los polinomios se encuentran en [14]. El objetivo principal de este capítulo es encontrar condiciones calculables para caos de $\varphi(B)$, donde $\varphi(z)$ es una transformación fraccional lineal, es decir, una función analítica de la forma $\varphi(z) = (az + b)/(cz + d)$, con $ad - bc \neq 0$. Probaremos que $\varphi(B)$ es caótico sobre ℓ^p si y solo si

$$|d^2 - c^2 - b\bar{d} - a\bar{c}| < |bc - ad|,$$

lo cual generaliza los resultados antes mencionados en [18]. Aunque se demostrará más tarde, cabe señalar que todos los operadores considerados son de hecho operadores de Toeplitz (con matriz asociada una matriz superior).

Empezamos definiendo nuestro espacio, sea

$$\ell^p := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad x^p := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Para evitar los casos triviales cuando $\varphi(z)$ se reduce una constante o a un polinomio de grado uno, asumimos que $ad - bc = 0$ y $c = 0$. Entonces diremos que φ es una transformación fraccional lineal (TFL) si

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 0, \quad c = 0. \quad (7.1)$$

Existen varios caminos para describir como el operador $\varphi(B)$ está definido pero solo hablaremos de dos de ellos. Observaremos más adelante que $\varphi(B)$ se puede definir si φ no tiene polos en $\overline{\mathbb{D}}$, equivalentemente si $d > c$. El primero es recordar que el espectro de B (i.e., el conjunto $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - B$ es no invertible) es el disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$. Ahora, si pedimos $d/c > 1$ tenemos que $\varphi(B) = (aB + bI)(cB + dI)^{-1}$ es un operador acotado bien definido sobre ℓ^p . Nuestro segundo camino para definir a $\varphi(B)$ es usando la expansión de Taylor (alrededor del origen) de φ , la cual es

$$\frac{b}{d} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ad - bc}{cd} \left(\frac{c}{d}\right)^n z^n.$$

Si $d/c > 1$, entonces para cada $x \in \ell^p$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^n B^n x \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^n \|x\| < \infty.$$

Por lo tanto la serie

$$\frac{b}{d}I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ad - bc}{cd} \left(\frac{c}{d}\right)^n B^n$$

converge puntualmente sobre ℓ^p y denotamos el límite como el operador $\varphi(B)$, el cual es acotado por el Teorema de Banach-Steinhaus (ver, Apéndice A en [22]).

Debemos tomar en cuenta varias observaciones: 1) La Teoría de Cálculo Funcional asegura que ambos caminos nos dan el mismo operador. 2) El primer camino es más directo, pero en el segundo es más fácil observar que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de B entonces $\varphi(\lambda)$ es un valor propio de $\varphi(B)$. 3) El segundo camino muestra que $\varphi(B)$ es un operador de Toeplitz co-analítico con la siguiente matriz asociada

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{d} & -\frac{ad-bc}{cd} \frac{c}{d} & \frac{ad-bc}{cd} \left(\frac{c}{d}\right)^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{b}{d} & -\frac{ad-bc}{cd} \frac{c}{d} & \frac{ad-bc}{cd} \left(\frac{c}{d}\right)^2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{b}{d} & -\frac{ad-bc}{cd} \frac{c}{d} & \frac{ad-bc}{cd} \left(\frac{c}{d}\right)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Para obtener caos para $\varphi(B)$ sobre ℓ^p usaremos el teorema 3.39. Tenemos que el espectro puntual (i. e., el conjunto de valores propios) de B es $\sigma_p(B) = \mathbb{D}$. El teorema nos dice que $\varphi(B)$ es caótico sobre ℓ^p si y solo si $\varphi(\mathbb{D})$ intersecta el círculo unitario. El siguiente resultado nos da una descripción geométrica de $\varphi(\mathbb{D})$ cuando el polo de φ está fuera del disco unitario cerrado. Este resultado ya es conocido y es usado para caracterizar transformaciones fraccionales lineales cuando van del disco en sí mismo [16, 31]. Aquí daremos una prueba elemental.

Lema 7.1. *Sea φ una TFL como en (7.1) y $d > c$. Entonces $\varphi(\mathbb{D})$ es el disco $P + r\mathbb{D}$ con centro P y radio r dado por*

$$P = \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d^2 - c^2}, \quad r = \frac{bc - ad}{d^2 - c^2}.$$

Demostración. Primero recordamos que las funciones TFL mandan círculos y líneas en círculos y líneas. Como $\overline{\mathbb{D}}$ es, obviamente, un conjunto convexo acotado, y el polo $-d/c$ vive fuera del disco unitario, tenemos que $\varphi(\overline{\mathbb{D}})$ debe ser acotado y convexo, entonces $\varphi(\overline{\mathbb{D}})$ es un círculo con frontera $\varphi(\partial\mathbb{D})$. Ahora tomamos tres puntos distintos en el círculo unitario, sean $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, y $z_3 = i$. Como φ es una transformación uno a uno, tenemos que $A := f(z_1)$, $B := f(z_2)$, y $C := f(z_3)$ son tres puntos distintos en el círculo $\varphi(\partial\mathbb{D})$, que es, el círculo circunscrito que pasa a través de A , B y C , de hecho coincide con $\varphi(\partial\mathbb{D})$. Para esto tenemos que mostrar que

$$A - P = B - P = C - P = r.$$

Usando las propiedades $z^2 = z\bar{z}$ y $c + d = \bar{c} + \bar{d}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A - P &= \left| \frac{a+b}{c+d} - \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d^2 - c^2} \right| \\ &= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{(a+b)(d^2 - c^2) - (b\bar{d} - a\bar{c})(c+d)}{c+d} \right| \\ &= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{add - bc\bar{c} - bc\bar{d} + ad\bar{c}}{c+d} \right| \\ &= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{(ad - bc)(\bar{c} + \bar{d})}{c+d} \right| = r. \end{aligned}$$

Análogamente, observando que $c - d = \bar{c} - \bar{d}$ y $ci + d = \bar{c} + \bar{d}i$ obtenemos

$$\begin{aligned} B - P &= \left| \frac{-a+b}{-c+d} - \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d^2 - c^2} \right| \\ &= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{(-a+b)(d^2 - c^2) - (b\bar{d} - a\bar{c})(-c+d)}{-c+d} \right| \\ &= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{-add - bc\bar{c} + bc\bar{d} + ad\bar{c}}{-c+d} \right| = r. \\ &= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{(ad - bc)(\bar{c} - \bar{d})}{-c+d} \right| = r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C - P &= \left| \frac{ai + b}{ci + d} - \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d^2 - c^2} \right| \\
&= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{(ai + b)(d^2 - c^2) - (b\bar{d} - a\bar{c})(ci + d)}{ci + d} \right| \\
&= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{addi - bc\bar{c} - bc\bar{d}i + ad\bar{c}}{ci + d} \right| \\
&= \frac{1}{d^2 - c^2} \left| \frac{(ad - bc)(\bar{c}i + \bar{d})}{ci + d} \right| = r.
\end{aligned}$$

□

Teorema 7.2. *Sea φ una TFL como en 7.1 y $d > c$. El operador $\varphi(B)$ es caótico sobre ℓ^p si y solo si*

$$|d^2 - c^2 - b\bar{d} - a\bar{c}| < bc - ad.$$

Demostración. Como en el lema previo, denotamos $\varphi(\mathbb{D}) = P + r\mathbb{D}$. Tenemos que $\varphi(B)$ es caótico si y solo si $P + r\mathbb{D}$ interseca el disco unitario. Si el centro P vive dentro del disco unitario, entonces $P + r > 1$; si P vive fuera del disco unitario, entonces $P - r < 1$. Ambas condiciones nos dan que

$$-r < 1 - P < r,$$

sustituyendo los valores de P y r tenemos que

$$-\left| \frac{bc - ad}{d^2 - c^2} \right| < 1 - \left| \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d^2 - c^2} \right| < \left| \frac{bc - ad}{d^2 - c^2} \right|,$$

multiplicando por $d^2 - c^2$ se tiene que

$$-bc - ad < d^2 - c^2 - |b\bar{d} - a\bar{c}| < bc - ad.$$

□

Corolario 7.3. *Sea φ una TFL como en (7.1), $d > c$, y $g(z) = z^n$, con n cualquier entero positivo. Consideramos la composición $\varphi \circ g(z) = (az^n + b)/(cz^n + d)$, entonces el operador $\varphi \circ g(B)$ es caótico sobre ℓ^p si y solo si*

$$|d^2 - c^2 - b\bar{d} - a\bar{c}| < bc - ad.$$

Demostración. Observamos que $g(\mathbb{D})$ solo toma valores en \mathbb{D} , por lo cual $(\varphi \circ g)(\mathbb{D})$ interseca el círculo unitario si y solo si también lo hace $\varphi(\mathbb{D})$, usando el teorema 7.2 se concluye el resultado. □

Conclusiones

Para finalizar la tesis se presentan conclusiones y problemas abiertos.

En el capítulo 4 estudiamos hiperciclicidad en operadores de Toeplitz. Para operadores de tres diagonales concluimos en el teorema 4.20 condiciones necesarias y suficientes para que el operador sea hipercíclico. En los teoremas 4.10 y 4.18 dimos condiciones necesarias explícitas sobre los coeficientes de su símbolo para que el operador sea hipercíclico, queda como problema abierto probar si las condiciones dadas por el teorema 4.10 son necesarias y suficientes. Para operadores de Toeplitz con finitas diagonales dimos en el teorema 4.31 condiciones necesarias para ser hipercíclico, queda como problema abierto dar condiciones suficientes. Para operadores de Toeplitz con infinitas diagonales en el teorema 4.36 dimos condiciones necesarias para que el operador sea hipercíclico pero solo en un subespacio, queda como problema abierto probar si este subespacio es todo \mathcal{H}^2 , además encontrar condiciones suficientes para que este tipo de operadores sean hipercíclicos.

En el capítulo 5 estudiamos hiperciclicidad disjunta, concluimos el teorema 5.3 donde damos condiciones necesarias para que dos operadores de Toeplitz sean hipercíclicos disjuntos. Queda como problema abierto una caracterización general para que dos o más operadores de Toeplitz sean hipercíclicos disjuntos.

En el capítulo 6 estudiamos subhiperciclicidad, contestamos algunas preguntas de [38] y el resultado principal de este capítulo es el teorema 6.2, queda como un tema abierto estudiar subhiperciclicidad en operadores de Toeplitz.

En el capítulo 7 estudiamos caos para $\varphi(B)$, donde φ es una transformación fraccional lineal y B es el operador de desplazamiento hacia atrás, concluimos en el teorema 7.2 una caracterización para que este operador sea caótico.

Como comentario final cabe decir que la hiperciclicidad y caos es un área que en los últimos años ha tomado importancia en la teoría de operadores. Existen muchos temas interesantes a estudiar acerca de esto, por ejemplo estudiar caos e hiperciclicidad en diferentes tipos de operadores. Por lo anterior el autor de esta tesis tiene un amplia área de estudio para continuar su investigación científica.

Curvas paralelas a una elipse

Definición A.1. [37] Dada una parametrización $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la elipse, definimos la **curva r -paralela** $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\beta(t) = \alpha(t) + rn(t)$, donde r es un número real no nulo y $n(t)$ es el vector ortogonal en $\alpha(t)$, observamos que $\beta(t) - \alpha(t) = r \cdot n(t)$.

Para nuestro objetivo usamos las curvas paralelas para cuando $r = 1$, para $r = 1$ le llamamos la curva paralela exterior a la elipse, y para $r = -1$ le llamamos la curva paralela interior a la elipse. A continuación mostramos un ejemplo gráfico.

Curvas paralelas a la elipse

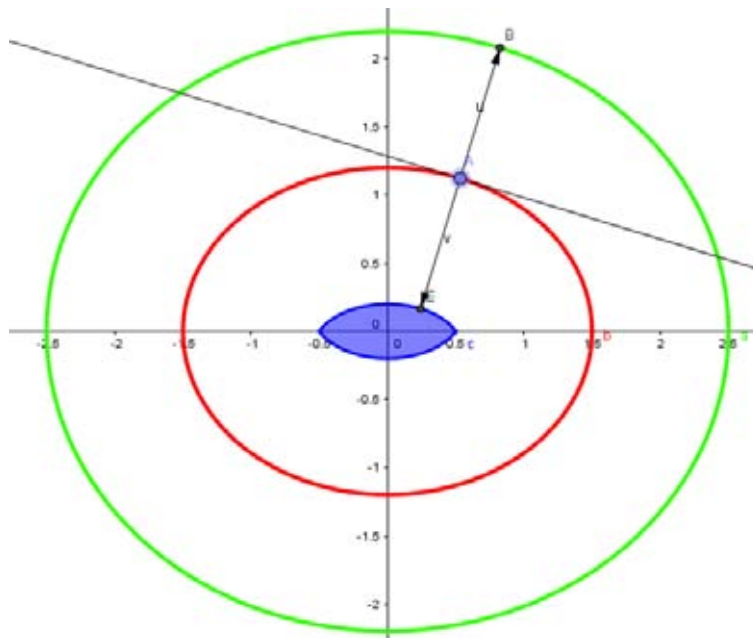


Figura A.1: La curva roja es una elipse con eje mayor igual a $\frac{3}{2}$ y eje menor $\frac{6}{5}$, la curva verde es la curva paralela exterior a distancia 1, la curva azul es la curva paralela interior a distancia 1.

Es importante mencionar que las curvas paralelas a la elipse no son elipses.

Es conocida la forma paramétrica de las curvas paralelas exteriores e interiores a una elipse. En el caso particular de curvas a distancia uno tenemos que la curva paralela exterior a distancia uno tiene la siguiente forma paramétrica:

$$x := \left(s_1 + \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 \operatorname{sen}^2(t) + s_2^2 \operatorname{cos}^2(t)}} \right) \operatorname{cos}(t)$$

$$y := \left(s_2 + \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 \operatorname{sen}^2(t) + s_2^2 \operatorname{cos}^2(t)}} \right) \operatorname{sen}(t)$$

y la curva paralela interior a distancia uno tiene la siguiente forma paramétrica:

$$x := \left(s_1 - \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 \operatorname{sen}^2(t) + s_2^2 \operatorname{cos}^2(t)}} \right) \operatorname{cos}(t)$$

$$y := \left(s_2 - \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 \operatorname{sen}^2(t) + s_2^2 \operatorname{cos}^2(t)}} \right) \operatorname{sen}(t).$$

Bibliografía

- [1] J. Aroza and A. Peris, *Chaotic behaviour of birth-and-death models with proliferation*, J. of Diff. Eq. and Appl. 18 (2012), 647–655.
- [2] N. Bamerni, V. Kadets and A. Kilicman, *Hypercyclic operators are subspace hypercyclic*. J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), 1812–1815.
- [3] A. Baranov and A. Lishanskii, *Hypercyclic Toeplitz operators*, Results. Math. 70 (2016), 337–347.
- [4] F. Bayart and É. Matheron *Dynamics of linear operators*. Cambridge University Press, Cambridge, (2009).
- [5] B. Beauzamy, *How the Roots of a Polynomial Vary with its Coefficients: A Local Quantitative Result*, Canad. Math. Bull. 42 (1999), 3–12.
- [6] B. Beauzamy, *Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynomes sont hypercycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. 303 (1986), 923–925.
- [7] T. Bermúdez and V.G. Miller, *On operators T such that $f(T)$ is hypercyclic*, Integral Equations Operator Theory 37 (2000), 332–340.
- [8] L. Bernal-González. *Disjoint hypercyclic operators*. Studia Math. 182 (2007), 113–131.
- [9] J. Bès and A. Peris, *Disjointness in hypercyclicity*, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007) 297–315.
- [10] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473–475.
- [11] P. S. Bourdon, *Orbits of Hypornormal Operators*, Michigan Math J. 44 (1997), 345–353.
- [12] P. S. Bourdon and N. S. Feldman, *Somewhere dense orbits are everywhere dense*, Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), 811–819.
- [13] A. Brown and P.R. Halmos, *Algebraic Properties of Toeplitz Operators*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 1964, (2009), 89–102.

- [14] J. A. Conejero and F. Martínez-Giménez, *Chaotic differential operators*, R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM 105 (2011), 423–431.
- [15] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, second edition Springer, New York-Berlin, 1978.
- [16] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, M. J. Martín and D. Vukotić, *Holomorphic self-maps of the disk intertwining two linear fractional maps*, in *Topics in complex analysis and operator theory*, vol. 561 of *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2012), 199–227.
- [17] M. De La Rosa and C. J. Read. *A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic*. J. Operator Th. 61 (2009), 369–380.
- [18] R. deLaubenfels and H. Emamirad, *Chaos for functions of discrete and continuous weighted shift operators*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 21 (2001), 1411–1427.
- [19] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on space of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281–288.
- [20] S. Grivaux, *Hypercyclic operators with an infinite dimensional closed subspace of periodic points*, Rev. Mat. Complut. 16 (2003), 383–390.
- [21] K. G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, Stud. Math. 139 (2000), 47–68.
- [22] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext, Springer, London, 2011.
- [23] P. Hartman and A. Wintner, *On the spectra of Toeplitz’s matrices*, Amer. J. Math. 76 (1950), 359–366.
- [24] G. Herzog and C. Schmoeger, *On operators T such that $f(T)$ is hypercyclic*, Studia Math. 108 (3) (1994), 209–216.
- [25] R. R. Jiménez-Munguía, R. A. Martínez-Avendaño and A. Peris, *Some questions about subspace-hypercyclic operators*, J. of Math. Anal. Appl. 408 (2013), 209–212.
- [26] R. R. Jiménez-Munguía, V. J. Galán, F. Martínez-Giménez and A. Peris, *Chaos for Linear Fractional Transformations of Shifts.*, Topology Appl. 203 (2016), 84–90.
- [27] C. Kitai, *Invariant Closed Sets for Linear Operators*, Tesis de Doctorado, Univ. of Toronto, Toronto, 1982.
- [28] C. M. Le, *On subspace-hypercyclic operators*, Amer. Math. Soc. 139 (8) (2011), 2847–2852.
- [29] B. F. Madore and R. A. Martínez-Avendaño, *Subspace hypercyclicity*, J. Math. Anal. Appl. 373 (2) (2011), 502–511.

- [30] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. (1952/53), 72–87.
- [31] M. J. Martín, *Composition operators with linear fractional symbols and their adjoints*, in: *Proceedings of the First Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis*, Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville (2006), 105–112.
- [32] R. A. Martínez-Avendaño and P. Rosenthal *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York 2007.
- [33] R. A. Martínez-Avendaño, O. Zatarain-Vera, *Subspace hypercyclicity for Toeplitz operators*. J. Math. Anal. Appl. 422 (2015), 772–775.
- [34] F. Martínez-Giménez, *Chaos for power series of backward shift operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 1741–1752.
- [35] F. Martínez-Giménez and A. Peris, *Chaos for backward shift operators*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 12 (2002), 1703–1715.
- [36] V. Müller, *On the Salas Theorem and hypercyclicity of $f(T)$* , Integr. Equ. Oper. Theory 67 (2010), 439–448.
- [37] C. Pita Ruiz, *Curvas paralelas*, Miscelánea Matemática 21 (1994), 29–52.
- [38] H. Rezaei, *Notes on subspace-hypercyclic operators*, J. Math. Anal. Appl. 397 (2013), 428–433.
- [39] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Stud. Math. 32 (1969), 17–22.
- [40] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [41] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 993–1004.
- [42] V. Scheidemann *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2005.
- [43] S. Shkarin, *Orbits of coanalytic Toeplitz operators and weak hypercyclicity*, arXiv:1210.3191v1 (2012).
- [44] O. Toeplitz, *Zur theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen*, Math. Ann. 70 (1911), 351–376.