



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE
LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MODELACIÓN COMPUTACIONAL DE PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS
POROELÁSTICOS CON APLICACIONES GEOFÍSICAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
Reymundo Ariel Itzá Balam

TUTORA PRINCIPAL:
Dra. Úrsula Xiomara Iturrarán Viveros
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

COMITÉ TUTOR:
Dr. Pedro González Casanova Henríquez
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
Dr. Francisco José Sánchez Sesma
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Ciudad de México, México.

Agosto, 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado

A mi amada esposa Heidi.

No hay matemáticas sin imaginación
pero tampoco sin esfuerzo.

Anónimo

Agradecimientos

Agradezco a mi Dios por su bondad.

Agradezco a Heidy Cecilia Escamilla Puc, mi amada esposa, todo su amor, paciencia y apoyo en esta etapa de nuestras vidas.

Agradezco a mis padres su apoyo incondicional.

Agradezco a la Dra. Úrsula X. Iturrarán Viveros, mi directora de tesis, por su apoyo incondicional y la confianza que me tuvo al aceptar este proyecto.

Agradezco a mis nuevos amigos, que hice en esta etapa, por los momentos divertidos que me brindaron los cuales me ayudaron a tener una estadía mas agradable.

Agradezco los atinados consejos del Dr. Francisco Sánchez Sesma y del Dr. Pedro González-Casanova.

Agradezco a los sínodos por el tiempo invertido en la lectura de esta tesis.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por todas las facilidades otorgadas para la realización de esta tesis.

Agradezco el apoyo económico dado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

A los que no menciono en esta lista pero que de alguna manera formaron parte de esta experiencia, ¡Gracias!

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo introducir y realizar la aplicación correcta del esquema de diferencias finitas implícitas a las ecuaciones poroelásticas en un rango de frecuencias bajas. Se determina una condición de tipo Courant y se analiza la dispersión numérica. Los ejemplos muestran el modelado correcto de los tres modos de la onda y concuerda con los análisis previos de otros autores. La implementación del esquema propuesto muestra que no es complicado de aplicar, utiliza una cantidad aceptable de recursos computacionales y mejora el rango de estabilidad numérica en comparación con trabajos similares.

Palabras claves: Poroelasticidad, Estabilidad, Dispersión numérica, Sismograma sintético, Diferencias Finitas Implícitas Óptimas, Malla alternada .

Contenido

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Introducción	1
Medio poroelástico	5
1. Definiciones básicas	6
2. Fluido en medios porosos	9
3. Problemas de escalas en medios porosos	11
Propagación de ondas elásticas en un medio poroso saturado	15
1. Suposiciones de la teoría de Biot	16
2. Ecuaciones constitutivas	19
3. Ecuaciones de movimiento	21
4. Existencia de la onda <i>P</i> -lenta	24
5. Algunas consideraciones	27
5.1. Mecanismo de atenuación	28
5.2. Rigidez de las ecuaciones de Biot	29
5.3. Condición de estabilidad física	30
Métodos Numéricos	31
1. Diferencias finitas implícitas	31
1.1. Diferencias finitas implícitas para la segunda derivada	32
1.2. Diferencias finitas implícitas en una malla alternada	37
1.3. Diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alternada	45
2. Discusión	53
Implementación Numérica	58
1. Formulación numérica	59
1.1. Notación	59
1.2. Diferencias implícitas: variable espacial	61
1.3. Diferencias implícitas: variable temporal	63
2. Condición inicial y condición de frontera	67
3. Implementación de la fuente	69
4. Discusión	69

Análisis de estabilidad y dispersión	70
1. Estabilidad	70
2. Dispersión	78
Aplicaciones	80
1. Validación numérica	80
2. Ejemplos clásicos	81
3. Obtención de sismogramas sintéticos: Rancho Waggoner	82
4. Conclusiones	90
Conclusiones y trabajo futuro	93
1. Conclusiones finales	93
2. Trabajo futuro	94
Anexo: Álgebra lineal	95
Anexo: Diferencias finitas y el método LOD	97
Anexo: Cálculos complementarios al capítulo 6	104
Bibliografía	111

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
a, a_i	Coefficientes		
b	Mobilidad del fluido	Pa s/m ²	$\frac{\eta}{\kappa}$
\hat{b}	Coefficiente del operador ISFD		
A, A_1, A_2	Matriz genérica		
\hat{A}, \dots, \hat{K}	Constantes/Coefficientes		
A^C	Complemento de A		
B	Constante arbitraria		
B_1, B_2	Matriz genérica		
e	Coefficiente del operador OISFD		
E_C	Función Error cuadrático		
E	Matriz de propagación		
$\mathcal{A}, \dots, \mathcal{F}$	Coefficientes del esquema LOD		
$C_{N,n}$	Coefficientes del operador de diferencias		
$C_{\mathbf{u}}(h)$	Función de covarianza (dirección \mathbf{u})		
C_{ijkl}^n	Tensor de elasticidad del medio saturado	Pa	
cP	centipoise	0.01P	
d	Diámetro del grano		
D	Darcy	μm^2	

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
f	Función real valuada		
f_i	Función real valuada evaluada en x_i		
f_c	Frecuencia dominante central		
F	Factor de formación eléctrica		
\mathbf{F}	Campo vectorial		
g	Factor de amplificación		
G_1, H_1	Vector genérico		
G_u	Módulo de cortante saturado	GPa	
G_{dry}, G_d	Módulo de cortante seco	GPa	
h	Incremento espacial	m, cm	
$\mathbf{H}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{R}$	Matrices de propagación		
i	Unidad imaginaria		$\sqrt{-1}$
id	Función identidad		
\mathbf{I}	Matriz identidad		
$\Im(z)$	Parte imaginaria del complejo z		
k	Número de onda	1/m	
K_{dry}, K_d	Modulo de compresibilidad de la matriz	GPa	$\frac{k_{\text{sat}}(\phi k_s / K_f + 1 - \phi) - k_s}{\phi k_s / k_f + K_{\text{sat}} / k_s - 1 - \phi}$
K_f	Módulo de compresibilidad del fluido	GPa	
K_{sat}, K_G	Módulo de compresibilidad de saturación/ Módulo de Gassmann	GPa	$K_d + \alpha^2 M$
l	Máximo valor del número de onda		

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
	en el esquema OISFD		
l_d	Línea de corriente del modelo	m	
l_m	Línea de corriente real	m	
mD	milidarcy	10^{-15}m^2	
m	Densidad efectiva del fluido	Kg/m^3	$\frac{T\rho_f}{\phi}$
M	Módulo de acoplamiento	Pa	$\left(\frac{\phi}{k_f} + \frac{\alpha - \phi}{k_s}\right)^{-1}$
\mathbf{n}	Vector normal		
N	Orden del operador de diferencias finitas		
n_b	Espesor de la esponja absorbente		
p	Presión poral/fluido	Pa	
\mathbf{p}_j^n	Presión poral/fluido discreto	Pa	
P	poise	$\text{g}/(\text{s cm})$	
q	Función derivada		
q_i	Función derivada evaluada en x_i		
\mathbb{Q}	Flujo volumétrico elemental		
R	Radio del capilar	m	
R_0	Resistencia eléctrica		
R_w	Resistencia de compresión		
$\Re(z)$	Parte real del complejo z		
\mathcal{S}	Superficie	m^2	
\mathcal{S}_0	Superficie específica	m^2	
\mathcal{S}_m	Unidad de masa	Kg	
\mathcal{S}_v	Unidad de volumen	m^3	

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
S_1, S_2	Funciones fuente		
T, T_ϕ	Tortuosidad		
u_j	Componente i -ésimo del vector \mathbf{u}	m	
\mathbf{u}	Desplazamiento del sólido	m	
\mathbf{U}	Promedio de desplazamientos del fluido (continuo)	m	
\mathcal{U}_j^n	Velocidad del sólido		
v_{fase}	Velocidad de la onda P	m/s	
v_j	Componente de velocidad del sólido		
v_P	Velocidad de la onda P	m/s	
v_S	Velocidad de la onda S	m/s	
V_j	Componente de velocidad del fluido (relativo al sólido)		
\mathcal{V}_p	Volumen del poro	m^3	
\mathcal{V}_s	Volumen del sólido	m^3	
\mathcal{V}_t	Volumen total	m^3	$\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_T - \mathcal{V}_p$
\mathcal{V}_j^n	Velocidad relativa del fluido		
w_j	Componente j -ésimo del vector \mathbf{w}	m	
\mathbf{w}	Desplazamiento relativo del fluido	m^3	
W_f, W_s	Peso correspondiente a la energía de la fase fluido/sólido		
x_j	punto j -ésimo		
x	Número real		
\mathbf{X}, \mathbf{Y}	Vector genérico		

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
α	Coefficiente de esfuerzo efectivo		$1 - \frac{k_{\text{dry}}}{k_s}$
β	Cambio de variable		$\frac{k\Delta x}{2}$
β_b	Factor de atenuación de la capa absorbente		
δ_{ij}	Delta de Kronecker		
δ	Error global		
Δt	Incremento de tiempo		
Δx	Incremento espacial		
ε_{ij}	Tensor de deformación		
η	Viscosidad	cP	
γ	Cambio de variable		$k\Delta x$
κ	Permeabilidad del medio poroso	m^2	
λ_0, λ	Constante de Lamé del sistema abierto		$k_{\text{dry}} - \frac{2\mu}{3} + \alpha^2 M$
λ_c, λ_u	Constante de Lamé de la matriz saturada		$k_{\text{dry}} - \frac{2\mu}{3}$
Λ	Operador matriz		
μ	Modulo de cortante de la roca sin fluido	Pa	$\rho_s v_s^2$
ρ	Densidad promedio	Kg/m^3	$\phi\rho_f + (1 - \phi)\rho_s$
ρ_f	Densidad del fluido	Kg/m^3	
ρ_s	Densidad del sólido	Kg/m^3	
ρ_{ij}	Coefficientes de la ecuación movimiento		
σ_{ij}	Esfuerzo total (continuo)		
$\sigma_{ij}^{(m)}$	Esfuerzo efectivo		
$\sigma^{(f)}$	Esfuerzo hidrostático		$-\phi p$

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\tau_{ij}, \boldsymbol{\tau}_j^n$	Esfuerzo total (discreto)		
ϕ	Porosidad		$\frac{\mathcal{V}_v}{\mathcal{V}_t}$
Φ	Campo vectorial		
Φ_i	Campo vectorial		
ω	Frecuencia circular	1/s	
ω_B	Frecuencia crítica	1/s	
Ω	Volumen macroscópico	m ³	
ζ	Variación local del fluido		

Subíndices

Subíndice	Término
dry	Material seco
N	Orden del operador de diferencias finitas
f	Fluido
P_i	Onda P_i
P	Onda P
s	Sólido
S	Onda S
sat	Material saturado
u	Material saturado/no drenado
x	Dirección del eje x
z	Dirección del eje z

Superíndices

Superíndice	Término
N	Tiempo
u	Saturado

Abreviaturas

Abreviatura	Término
FD	Diferencias finitas (Finite Difference)
IFD	Diferencias finitas implícitas (Implicit Finite Difference)
ISFD	Diferencias finitas implícitas en una malla alternada (Implicit Staggered Grid Finite Difference)
i.e.	Del Latin <i>id est</i> que significa: es decir, esto es
LOD	Método localmente 1-dimensional (Locally one dimensional)
OESFD	Diferencias finitas explícitas óptimas en una malla alternada (Optimal Explicit Staggered Grid Finite Difference)
OISFD	Diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alternada (Optimal Implicit Staggered Grid Finite Difference)

Operadores

Abreviatura	Término
D_{tt}	Operador de diferencias discreto (temporal)
D_{xx}	Operador de diferencias discreto (espacial)
$\delta_x, \hat{\delta}_x,$	Operador discreto de primer orden
$\delta^2/\delta x^2$	Operador discreto de segundo orden
$\partial_i, \partial/\partial i$	Primera derivada parcial en dirección i
$\partial^2/\partial i^2$	Segunda derivada parcial en dirección i
Y	Operador viscodinámico
∇f	Operador gradiente

Abreviatura	Término
	aplicado a f (escalar)
$\nabla^2 f$	Operador Laplaciano
	aplicado a f (escalar)
$\nabla \cdot \mathbf{F}$	Operador divergencia
	aplicado a \mathbf{F} (vector)
$\nabla \times \mathbf{F}$	Operador rotacional
	aplicado a \mathbf{F} (vector)

Lista de Figuras

2.1.	Ejemplo de un modelo intergranular simplificado. El sólido queda representado por la parte más oscura y el espacio de los poros, o simplemente poros, por la parte de color claro.	12
2.2.	Ejemplos de escalas que pueden ser un factor a considerar cuando se realiza un análisis o se mide un parámetro; están ordenadas de mayor a menor tamaño y de izquierda a derecha: macroscópica, mesoscópica, microscópica.	13
3.1.	La parte de color oscuro es la matriz (rocosa) o esqueleto y la parte de color claro el fluido. El sólido es el material del cual está constituido la matriz rocosa.	18
3.2.	Configuración de las pruebas de compresibilidad con envoltura (imagen izquierda) y sin envoltura (imagen derecha).	21
4.1.	La figura muestra la comparación de la gráfica de la función g , para diferentes valores de \hat{b} , y la gráfica de la función id	36
4.2.	Gráfica de las funciones id (exacta) y f_{ISFD} con diferentes valores de N . La gráfica de la izquierda muestra las aproximaciones con valores pequeños de N , en tanto que en el lado derecho se muestran aproximaciones con N mayores. El caso $N = 1$, parece ser, por mucho, el que ofrece menor precisión.	40
4.3.	Colección de nodos dispuestos en una malla alternada 1D. Existen tres grupos de nodos desconocidos: los nodos centrales $\{q_N, q_{N+1}, \dots, q_{L-N}, q_{L-N+1}\}$, los nodos cercanos a los extremos $\{q_1, \dots, q_{N-1}, q_{L-N+2}, \dots, q_L\}$ y los nodos extremos $\{q_0, q_{L+1}\}$	43
4.4.	Gráfica de la función derivada $f'(x) = \cos(x)$ y la gráfica de la derivada aproximada usando el esquema de diferencias finitas implícitas en un malla alternada con orden de exactitud 12 y $L = 40$	44
4.5.	Gráfica de los errores absolutos entre la derivada f' y la derivada aproximada sobre los nodos $\{x_j\}_{j=0}^L$ y $L = 40$	45
4.6.	Gráfica de las funciones id (exacta) y f_{OISFD} para diferentes valores de δ . La gráfica de la izquierda muestra las aproximaciones con $N = 3$, en tanto que en el lado derecho se muestran aproximaciones $N = 8$. En ambos casos, cuando δ disminuye el intervalo donde hay buena precisión también disminuye. . . .	50
4.7.	Colección de nodos dispuestos en una malla alternada 1D. Existen tres grupos de nodos: los nodos centrales $\{q_N, q_{N+1}, \dots, q_{L-N}, q_{L-N+1}\}$, los nodos cercanos a los extremos $\{q_2, \dots, q_{N-1}, q_{L-N+2}, \dots, q_{L-1}\}$ y los nodos extremos $\{q_0, q_1, q_{L-1}, q_L\}$	51
4.8.	Gráfica de la derivada exacta $f'(x) = \cos(x)$ y la gráfica de la derivada aproximada usando el esquema de diferencias finitas implícitas óptimas en un malla alternada con $N = 5$ y $L = 40$	52

4.9.	Gráfica de los errores absolutos entre la derivada exacta f' y la derivada aproximada sobre los nodos $\{x_j\}_{j=0}^L$, con $L = 40$	53
4.10.	Comparación entre la función derivada f' y las aproximaciones numéricas. Ambos esquemas proporcionan resultados aceptables aún cuando $h = 1$. . .	54
4.11.	Gráfica de los errores absolutos de los esquemas implícitos comparados con la derivada exacta f' . Se puede observar que ambas gráficas están acotadas por la constante $\delta = 10^{-8}$	54
4.12.	Comparación entre la función derivada f' y las aproximaciones numéricas. La gráficas son prácticamente iguales y no se puede apreciar una diferencia entre el valor exacto y la aproximación, aún cuando $h = 0.1$	55
4.13.	Gráfica de los errores absolutos de los esquemas implícitos comparados con la derivada exacta f' . Aunque ambas gráficas están acotadas por la constante $\delta = 10^{-8}$ el esquema OISGFD ofrece la mejor aproximación.	56
4.14.	Gráfica de los errores absolutos del esquema OSIFD para $\delta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-8}$ y $N = 3$, y del esquema ISFD para $N = 10$. En ambos casos el tamaño de paso espacial es $h = 1$ (es decir, corresponde a $L = 50$).	56
4.15.	Gráfica de los errores absolutos para los esquemas ISFD y OISFD cuando el tamaño de paso de $h = 0.1$ (es decir, cuando $L = 500$). Se puede observar que para cada valor de $\delta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-8}$, se cumple que la correspondiente gráfica está acotada por su respectiva δ	57
5.1.	Malla alternada que se usa en la discretización de las ecuaciones poroelásticas. Los parámetros que definen las propiedades petrofísicas del medio sólo están definidos sobre los puntos con coordenadas enteras.	60
5.2.	Configuración de la malla alternada y la frontera absorbente. El interior del dominio numérico es la región con puntos y la capa absorbente es la región sin puntos. La capa absorbente consta de n_b filas o columnas en cada lado. .	68
6.1.	Gráfica de las cuatro raíces dado un intervalo, lo suficientemente grande, del número de onda y valores pequeños de Δt . Se puede observar que todas las raíces pertenecen al círculo unitario. La norma euclidiana de las cuatro raíces se muestran en la figura del lado derecho. Las raíces muestran un buen comportamiento debido a que pertenecen al círculo unitario.	75
6.2.	Gráfica de las cuatro raíces dado un intervalo, lo suficientemente grande, del número de onda y un valor de Δt mayor que en la figura 6.1. Observar que las raíces r_1 y r_2 , correspondientes a la onda P -rápida y P -lenta, respectivamente, no pertenecen al círculo unitario para algunos valores de k . La gráfica del lado derecho muestra el mal comportamiento de las raíces.	76
6.3.	Las curvas separan los dominios de estabilidad e inestabilidad. Se bosqueja Δt como función de T/ϕ . La gráfica izquierda muestra la comparación entre curvas que usan coeficientes del esquema OISFD y el esquema OESFD en (6.34) y (6.38), respectivamente. La gráfica del lado derecho muestra la comparación entre la curva dada por (6.35) y la curva obtenida de simulaciones numéricas cuando $b > 0$	77

- 6.4.** Curvas de dispersión de las ondas P -lenta y P -rápida correspondientes a cuatro diferentes tamaños de paso $\Delta t = 0.2\Delta t_s$, $\Delta t = 0.5\Delta t_s$, $\Delta t = 0.7\Delta t_s$ y $\Delta t = 0.99\Delta t_s$, donde Δt_s es el tiempo límite de estabilidad. 79
- 7.1.** Los sismogramas sintéticos de las velocidades se simularon en un medio poroso 2D sin fricción, usando el método de diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alternada (OISFD) cuyo operador de diferencias es de longitud 8 y $\Delta x = \Delta z = 0.8\text{m}$ como espaciamiento de la malla. Se compara la solución transitoria con sismogramas sintéticos que corresponden a: a) la velocidad relativa del fluido (con respecto al sólido) y b) velocidad relativa del sólido. 82
- 7.2.** Los sismogramas sintéticos de las velocidades se simularon en un medio poroso 2D sin fricción, usando el método LOD en una malla alternada con $\Delta x = \Delta z = 0.3\text{m}$ como espaciamiento de la malla. Se compara la solución transitoria con sismogramas sintéticos que corresponden a a) la velocidad relativa del fluido (con respecto al sólido) y b) velocidad relativa del sólido. 83
- 7.3.** Capturas de pantalla de la componente vertical del modelo de contacto gas-agua: (a) y (c) velocidad del sólido; (b) y (d) velocidad relativa (con respecto al sólido) del fluido. 85
- 7.4.** (a) Sección sísmica de la línea de cruce 1176 del Rancho Waggoner. (b) Tres etiquetas sísmicas para la línea sísmica Waggoner: arenas (amarillo), esquistos (verde) y calizas (azul) obtenidas de la clasificación SOM. Además, se bosquejan las etiquetas que fueron calculadas directamente de los datos de la sección del pozo. 86
- 7.5.** Bosquejo del medio poroelástico y la ubicación espacial de los estratos. 87
- 7.6.** La gráfica muestra el número de estratos de cada traza de la región a modelar. Cada cambio en el material de una traza se considera un estrato nuevo. 88
- 7.7.** (a) Traza sísmica real que corresponde a pozo perforado y su (b) espectro de frecuencias. 89
- 7.8.** Capturas de pantallas de la presión poral usando el esquema OISFD y las propiedades del material del modelo poroso heterogéneo en los tiempos (a) $t = 0.24\text{s}$ (b) $t = 0.24\text{s}$ (c) $t = 0.24\text{s}$. Las capturas tienen como fondo la litografía del medio. 90
- 7.9.** Componente vertical del desplazamiento del sólido (traza sintética v_z) de los modelos elástico, poroacústico y poroelástico. Las líneas negras delimitan la ventana de tiempo que se muestra en la figura **7.10** y corresponden al intervalo de profundidad [1600.6 , 2600.3] ft. Al inicio de las trazas sintéticas se observan mayores amplitudes que corresponden al efecto de la fuente. 91
- 7.10.** Comparación entre el sismograma real y los sismogramas sintéticos. Todos los sismogramas están normalizados con el objetivo de hacer una comparación visual en la sección de interés. 92

Introducción

El modelado sísmico es una herramienta que se utiliza para simular la propagación de ondas en la tierra. Uno de sus objetivos es construir sismogramas sintéticos, y compararlos con la respuesta que un conjunto de sensores podrían grabar del interior de una estructura (cuya composición es conocida). Esta técnica es importante en la interpretación de los datos sísmicos y una parte esencial en algoritmos de inversión sísmica. Existen muchas formas de realizar el modelado sísmico. Los métodos se pueden agrupar en tres categorías principales: directos, de ecuaciones integrales y de trazado de rayos. El trabajo se centrará en la primera categoría. Esta categoría incluye los métodos de diferencias finitas (FD), seudoespectrales (PS), elementos finitos de bajo orden (FE) y elemento finito espectral (SE).

Si se usan métodos directos cuando se resuelve la ecuación de onda, es necesario aproximar el modelo geológico (modelo continuo) mediante una malla numérica; esto es, el modelo se discretiza sólo sobre un número finito de puntos en lugar de considerar el modelo continuo. Los métodos directos se llaman también métodos con mallas o métodos de ecuación de onda completa, esto último porque la solución provee el campo de onda completo. Los métodos directos se caracterizan por la ausencia de restricciones en la variabilidad del material y tener un orden alto de exactitud, siempre que se considere una malla suficientemente fina. Estas técnicas, representan una de las mejores opciones cuando se necesita generar capturas de pantalla que permitan interpretar resultados numéricos, por tanto, son importantes en el modelado sísmico.

Morency & Tromp (2008) hacen un trabajo exhaustivo para mostrar una aplicación correcta del método del elemento espectral y así poder modelar la propagación de ondas en un medio poroelástico. Otras técnicas que han tenido un gran crecimiento en el modelado numérico son los métodos de tipo Galerkin, no es extraño que también hayan causado impacto en la simulación de propagación de ondas; varias aplicaciones se pueden consultar en trabajos tales como Dupuy et al. (2011), de la Puente et al. (2008), Santos & Oreña (1986II) y Santos et al. (1988b). Carcione et al. (2010) realizan un trabajo bastante completo al revisar y analizar brevemente diferentes métodos numéricos directos. También discuten sobre variantes del modelo de propagación de ondas en medios porosos.

Los esquemas de diferencias finitas (FD) siguen siendo una de las herramientas más populares entre los métodos numéricos que se utilizan para modelar propagación de ondas. Esta popularidad se debe, principalmente, a que son métodos con un costo computacional bajo y poseen un orden alto de exactitud. Entre los esquemas FD, los esquemas de mallas alternadas son los algoritmos numéricos más usados, en la simulación de propagación de ondas, por su gran exactitud. El primero en adoptar un esquema de malla alternada y simular la propagación de una onda en un medio elástico isótropo fue Madariaga (1976). En la actualidad, los esquemas FD en mallas alternadas son las más populares y se debe al trabajo propuesto en Virieux (1984) y Virieux (1986). Son utilizados de forma cotidiana en la solución numérica de

la ecuación de onda elástica 2D en un medio isotrópico y se usan aproximaciones de segundo orden en ambas variables espacial y temporal. Las mallas alternadas, en su configuración estándar, permiten modelar el efecto de anisotropía en un medio ortorrómbico.

Se han presentado diferentes esquemas de diferencias finitas en medios elásticos (Graves (1996), Levander (1988), Moczo (1998) entre muchos otros) y en medios poroelásticos (Zhu & McMechan (1991), Carcione & Quiroga-Goode (1995), Özdenvar & McMechan (1997), Carcione & Helle (1999), Krzikalla & Müller (2007) sólo por mencionar algunos). Los esquemas más comunes son los explícitos. Para la simulación de propagación de ondas durante un periodo de tiempo, es necesario aproximar las derivadas temporales y espaciales usando operadores FD. Esto indica que se tienen errores numéricos que provienen de la discretización espacial y temporal. En teoría, estos errores pueden reducirse usando mallas más finas. En la práctica, se usan métodos de diferencias finitas implícitas y esto asegura Emerman et al. (1982) presentan un trabajo dirigido a mejorar la exactitud de un esquema numérico usando diferencias finitas implícitas (IFD). Sin embargo, los autores expresan ciertas reservas a este tipo de métodos por los resultados obtenidos. Unos años después, Mufti (1984) presenta una implementación exitosa del esquema IFD para el caso acústico 2D. Esta formulación expresa el valor de una variable en algún punto de la malla en un tiempo futuro en términos del valor de una variable en ese mismo punto y de sus vecinos en tiempos pasado, presente y futuro. La estrategia también incluye hacer el cálculo de las derivadas espaciales en diferentes subpasos en cada paso de tiempo, y lleva a resolver sistemas lineales tridiagonales en cada subpaso de tiempo. Estas técnicas son conocidas como esquema implícito de dirección alternada con pesos (ADI) y esquema local 1-dimensional (LOD) (Leveque (2007) y Thomas (1941)). En Qin (2010) y Qin (2009) el autor aplica el esquema ADI, basado en la idea de dividir el operador FD para resolver ecuaciones diferenciales parabólicas 3D y ecuaciones de onda 2D, respectivamente. En Zhang et al. (2012) los autores estudian los esquemas ADI y LOD; modelan la propagación de ondas elásticas y acústicas; también presentan análisis de dispersión y estabilidad. Los métodos implícitos para derivadas temporales son usadas en migración sísmica (Ristow & Ruhl (1997) y Zhang & Zhang (2007)).

En la solución de la ecuación de onda acústica, y tomando como base la idea de los métodos implícitos para derivadas temporales, Kosloff et al. (2008) desarrollan un esquema FD implícito sobre una malla estándar donde la parte implícita del esquema corresponde a la variable espacial en lugar de la variable temporal como es usual. En un trabajo reciente de Liu & Sen (2009a), se desarrollan esquemas implícitos para determinar derivadas espaciales eficientemente usando una malla estándar y en un trabajo posterior de Liu & Sen (2009b) adaptan estos esquemas a mallas alternadas. En ambos trabajos, a modo de ejemplo, se resuelve la ecuación de onda elástica 2D en un medio isotrópico y homogéneo. Los dos trabajos presentan resultados interesantes: los esquemas son robustos, eliminan dispersión numérica (en comparación a métodos explícitos) y los operadores de diferencias son de orden arbitrario. Para estudiar la ecuación de onda (escalar), Chu & Stoffa (2012) presentan una técnica implícita que consiste en separar cada paso de tiempo en tres nuevos pasos esto corresponde a la integración de la derivada temporal, en tanto, que la aproximación de la derivada espacial se determina con operadores FD implícitos de orden arbitrario.

Los esquemas FD de orden alto se usan con el fin de mejorar la exactitud de la aproximación (Alford et al., 1974). Por lo general, los esquemas de diferencias finitas de orden alto están

asociados con operadores FD de gran longitud. Como resultado la modelación numérica tiene un costo computacional mayor. Una opción para reducir el costo computacional, mantener la exactitud y no aumentar la dispersión en el método numérico es truncar los operadores Suo-Liang & Liu (2013). Otra opción es usar esquemas FD óptimas donde se puede fijar la exactitud (tolerancia del error global o relativo) y la longitud del operador con el objetivo de encontrar coeficientes adecuados del operador FD. Para determinar los coeficientes óptimos de un operador FD en un rango fijo del número de onda y cierta longitud del operador, se usan métodos de optimización, como lo es mínimos cuadrados (LS), y su objetivo es minimizar la dispersión numérica. En un artículo de Liu (2014), el autor muestra las ventajas de su método y propone un esquema basado en LS para determinar coeficientes óptimos globales del operador FD. Los resultados muestran que si la exactitud del esquema aumenta, el rango del número de onda disminuye. El análisis de dispersión hecho en este trabajo muestra que los operadores FD óptimos pueden mejorar la precisión o reducir el costo computacional comparados con los operadores FD cuyos coeficientes se obtienen a partir del desarrollo tradicional en series de Taylor.

La teoría de poroelasticidad es esencial en muchas aplicaciones de la geofísica donde los poros saturados del material son interesantes, por ejemplo, exploración de hidrocarburos, monitoreo sísmico de las reservas de CO_2 , hidrogeología y en general en ingeniería de yacimientos. La teoría clásica y más popular fue desarrollada por Maurice Biot, en los años cincuenta, (Biot, 1956a 1956b, 1962), cuyas ecuaciones modelan la dinámica de la propagación de ondas en un medio totalmente saturado y predice la existencia de dos modos de la onda compresional P : la onda P lenta y la onda P rápida (estas predicciones fueron confirmadas experimentalmente usando rocas artificiales en al menos dos estudios subsecuentes de Berryman (1980) y Plona (1980)). Tomando como base estos trabajos, en los siguientes años se realizaron un gran número de publicaciones que aportaban conocimiento tanto al estudio teórico como al experimental.

El problema de la modelación de propagación de ondas numéricas en medios porosos se ha estudiado ampliamente aplicando técnicas diferentes. Por mencionar algunos trabajos: Carcione & Quiroga-Goode (1995) y Carcione & Helle (1999) usan la formulación velocidad-esfuerzo en una malla alternada para calcular las aproximaciones en un proceso de integración de dos etapas. Zhu & McMechan (1991) investigan los efectos de los desplazamientos sísmicos en la estructura sólida y en el fluido debido a las variaciones espaciales de la porosidad, permeabilidad y viscosidad mediante la aplicación de un esquema explícito de segundo orden. Özdenvar & McMechan (1997) desarrollan un método seudoespectral para resolver las ecuaciones diferenciales poroelásticas mediante la formulación de desplazamientos. Tomando como base el trabajo clásico de Levander (1988) (caso elástico), Masson et al. (2006) desarrolla la técnica estándar de integración explícita de la variable temporal para resolver las ecuaciones de Biot.

En Masson & Pride (2007) los autores estudian la atenuación y la dispersión debido a la escala mesoscópica de las heterogeneidades mediante la aplicación de un esquema FD explícito. Masson & Pride (2010) extienden los trabajos previos de esquemas FD explícitos para modelar medios poroelásticos cubriendo completamente el rango de frecuencias. O'Brien (2010) usa mallas rotadas alternadas con un esquema FD explícito en la simulación de propagación de ondas en un medio poroelástico 3D. Los esquemas de FD con mallas

alternadas también han sido usadas para estudiar el efecto de heterogeneidades a diferentes escalas, como fracturas e inclusiones de gas, y su relación con la frecuencia según Wenzlau & Müller (2009).

El trabajo completo está organizado en siete capítulos y tres anexos. En el capítulo 2 se hace una descripción de definiciones básicas de los parámetros del modelo poroelástico. Además, se discute sobre algunos conceptos, por ejemplo porosidad, permeabilidad, etc, relacionados a los materiales y parámetros, esto con el objetivo de hacer el trabajo autocontenido. En el capítulo 3 se bosqueja brevemente la obtención de las ecuaciones poroelásticas en un rango de frecuencias bajo. Como parte del análisis se justifica, analíticamente, la existencia de la onda lenta y la atenuación presente en este modelo. La descripción de los esquemas numéricos se hace en el capítulo 4. Además se agregan ejemplos correspondientes a estas técnicas. La implementación numérica se hace en el capítulo 5. El capítulo 6 muestra el análisis de estabilidad y dispersión numérica para el esquema de diferencias finitas. Finalmente, el capítulo 7 muestra la validación y aplicación de los esquemas presentados en el capítulo 4.

Medio poroelástico

*No estudio por saber más,
sino por ignorar menos.*

Sor Juana Inés de la Cruz.

La teoría clásica para modelar propagación de ondas, supone que el medio es continuo y que sólo está compuesto de un tipo de material. Toda la teoría se desarrolla bajo estas dos suposiciones esenciales. Es posible tener un modelo más realista o más complejo si se incluyen variantes o atributos físicos al medio, por ejemplo, considerar medios heterogéneos, medios anisótropos (que en algunos casos tienen una respuesta sísmica similar a un medio heterogéneo), medios con fracturas o grietas, medios con estratos (en cada estrato sólo se considera un material) y combinaciones de estos. Sin embargo, estas variantes son insuficientes cuando se desea estudiar propiedades físicas de las rocas o caracterizar la respuesta sísmica de formaciones geológicas. Por tanto, realizar este tipo de análisis, implica imponer al medio algunas características físicas adicionales, que se traduce en imponer características adicionales a la teoría clásica de propagación de ondas, por ejemplo, *porosidad*, *permeabilidad*, etc. Cuando se consideran propiedades adicionales en el medio surgen nuevas problemáticas, tanto en el entendimiento de la propagación de ondas en el medio, como en el desarrollo de un modelo matemático que incluya estas nuevas características físicas.

Los *cuerpos porosos* o *matrices porosas* son agregados de elementos sólidos, por ejemplo, rocas granulares, cuyos espacios vacíos forman entre sí, los *poros*. El simple hecho que de un material tenga espacios vacíos (no son sólidos densos) lleva a dinámicas complicadas y la presencia de algún fluido en estos espacios, aunque sea en pequeñas cantidades, aumenta la complejidad del sistema. El concepto de porosidad, es usualmente fácil de definir y de medir en términos del espacio vacío (volumen vacío), sin embargo, es bastante difícil de hacer una descripción geométrica precisa de los vacíos en poros y, por lo general, sólo se pueden dar descripciones relativas. Es importante hacer distinción entre poros (volúmenes vacíos que pueden llenarse con fluidos y pueden permitir su flujo), y micro-grietas (o fronteras granulares) que son superficies que enmarcan las discontinuidades entre los elementos sólidos (Bourbie et al., 1987). Ambos conceptos tienen un rol importante en las propiedades mecánicas.

Otra importante característica de los medios porosos es posible permitir el flujo del fluido (aunque sea en pequeñas cantidades) a través del espacio de los poros. Por tanto, es importante definir el concepto permeabilidad y su relación con la viscosidad.

Finalmente, otro concepto importante que influye en la descripción de los medios porosos es la escala. Una escala hace referencia al *esqueleto* completo o matriz rocosa formado por los sólidos granulares (escala macroscópica), sin embargo, es posible que esta escala no sea lo suficientemente buena en el entendimiento de algunos conceptos y se requiere cambiar a una escala más apropiada.

En este capítulo se explica brevemente algunos de los conceptos principales relacionados al concepto de *medio poroso*. En la sección 1 Como información complementaria sobre los parámetros de medios porosos, se hacen algunas observaciones sobre la medición y visualización de estos conceptos sin llegar a ser exhaustivo. La mayor parte de la información presentada en este capítulo fue obtenida de Bourbie et al. (1987) y Dullien (2012). Algunos de los conceptos también se pueden consultar en Mavko et al. (2009).

1. Definiciones básicas

La descripción del medio poroso inicia con una descripción de los conceptos básicos. Una forma de entender estos conceptos es conocer, a modo de introducción, cómo se miden o cómo se visualizan.

Uno de los conceptos centrales del trabajo es la *porosidad*.

Porosidad

La porosidad (se denota por ϕ) de un sólido se define como la razón de volumen del poro (\mathcal{V}_p) sobre el volumen total (\mathcal{V}_T).

Además, el volumen del sólido (\mathcal{V}_s) se puede escribir como $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_T - \mathcal{V}_p$.

Esta igualdad, indica que es suficiente conocer dos de las tres cantidades para calcular la porosidad. Dependiendo del medio poroso, la porosidad puede variar de valores cercanos a cero hasta valores cercanos a la unidad. Por ejemplo, los metales y ciertas rocas volcánicas tienen baja porosidad (cercano a 0), en tanto que los filtros fibrosos y aislantes termales son altamente porosos (cercano a 1).

Los métodos experimentales que se utilizan al determinar el valor de la porosidad son variados, aunque se pueden agrupar en las siguientes categorías (Dullien, 2012): método directo, métodos ópticos, método de inmersión, método de inyección de mercurio, método de expansión de gas y métodos de densidad.

Estos métodos no son equivalentes entre sí y cada uno permite medir el volumen de un tipo especial de *poro*. De acuerdo al método seleccionado se puede medir el volumen total, el volumen del poro o el volumen del sólido.

Para la medición del volumen total no se requiere un conocimiento teórico especial, sin embargo, los otros dos parámetros requieren conocer dos conceptos nuevos: *poros interconectados* (o *efectivos*) y *poros no interconectados* (o *aislados* o *vacíos dispersos*). De estos dos tipos de poros, los poros no interconectados son los menos comunes en la naturaleza, y un ejemplo de este fenómeno se presenta en las inclusiones de fluidos en cristales. Los poros no interconectados no permiten transporte de materia.

Los poros que están interconectados a un sólo lado del medio se conocen como *poros ciegos*. Este tipo de poros, aunque contribuyen al transporte de materia a menudo son despreciables. Existen casos de poros interconectados que están prácticamente aislados y se les denomina *poros atrapados*. La *porosidad interconectada* es el volumen del espacio de los poros interconectados. La *porosidad total* es el volumen del espacio de los poros que estén interconectados o no. La diferencia entre la porosidad interconectada y la porosidad total es el valor de la *porosidad no interconectada*.

En el caso de materiales sintéticos (artificiales), en ocasiones, se exhibe una cantidad substancial de porosidad no interconectada (hasta un 9% del volumen total). De todos los diferentes tipos de materiales porosos, aunque la cantidad de porosidad no interconectada es de proporción menor, en algunos casos no puede ser ignorada si se desea hacer una descripción completa y realista del medio.

Para hacer la medición de porosidad, usando algunas de las técnicas mencionadas, se debe suponer que los poros interconectados del medio están completamente vacíos (no contiene ningún fluido) o que la eliminación del fluido (si lo tuviese) se realizó sin deteriorar la estructura de los poros. Esto es posible, en la mayoría de los casos, si el medio es cohesivo. Sin embargo, hacer la medición en medios no cohesivos supone un reto mayor, pues estos medios sólo adquieren su estructura y sus propiedades en presencia de agua. Para hacer la medición en estos casos, es necesario considerar qué “tipo” de agua contiene y es necesario hacer un análisis termogravimétrico, el cuál consiste en la medición de pérdida de peso de una muestra en presencia de calor. Por tanto las propiedades de estos medios dependerá de su historia de deshidratación al cual fue sometido.

Además de la medición de la porosidad, la visualización de los poros es importante para la completa descripción del medio. Aunque se han definido varios tipos de poros, la tarea de visualización de éstos puede ser muy difícil. Existen varias técnicas de visualización para los diferentes casos y algunas de éstas suelen ser destructivas ya que modifican la estructura básica del material, esto impide ver a detalle la forma original del poro.

Como ejemplo para visualizar los poros en medios cohesivos, es suficiente saturar los poros con un líquido que se solidificará. Esto por lo general se hace con una resina sintética (como el polímero *epoxy*) la cual es inyectada en vacío por un determinado tiempo y a una determinada temperatura. Una vez hecho esto, los poros pueden ser analizados (o visualizados) mediante un microscopio de electrones o mediante el molde de redes de poros que se obtiene al destruir el mineral, con ácido clorhídrico y fluorhídrico, para dejar sólo la resina sintética. Una ventaja de usar microscopio de electrones, es que permite obtener imágenes en alta definición (resolución) y después de ser procesado con computadoras y programas especializados pueden ser objeto de estudio o descripción a través de *morfología matemática*. La morfología matemática es una rama de las matemáticas que se encarga del análisis matemático y probabilístico de las formas. Está técnica fue desarrollada a partir del trabajo teórico de Matheron (1967) y descrito exhaustivamente por Serra (1982).

La estructura del medio poroso que se observa en un área pequeña es solamente algo particular y es la culminación de un proceso mucho más general. Entonces, se puede formular este proceso a través de probabilidades. La distribución de los poros se puede analizar usando figuras simples como referencia, por ejemplo, puntos, segmentos de recta, círculos, etc., y haciendo preguntas tales como: ¿es posible que un segmento de longitud h o un círculo de

radio R esté completamente contenido en el conjunto de poros? Es posible dar una respuesta a esta pregunta en términos de probabilidad, en este caso, con la función denominada de *covarianza* ($C_{\mathbf{u}}$). Si A es el conjunto de poros de un medio con porosidad ϕ (donde A^C , el complemento, es el sólido), entonces $C_{\mathbf{u}}(h)$ es el término de covarianza, en la dirección \mathbf{u} , y una interpretación posible es: la probabilidad que el segmento de longitud h pertenezca al conjunto A cuando el segmento es desplazado de forma paralela al vector unitario \mathbf{u} .

Si cada variable es estacionaria (no depende del tiempo), entonces se muestra que:

$$C_{\mathbf{u}}(h) = \text{prob}\{M_{\mathbf{x}} \in A \text{ y } M_{\mathbf{x}+h\mathbf{u}} \in A\}$$

donde \mathbf{x} es el vector de posición del punto $M_{\mathbf{x}}$. Entonces (Bourbie et al., 1987),

- $C_{\mathbf{u}}(0) = \phi$ y es independiente de \mathbf{u} , dado que en este caso \mathbf{x} y $\mathbf{x} + h\mathbf{u}$ son idénticos y la porosidad ϕ es claramente la probabilidad que \mathbf{x} pertenezca al conjunto de poros.
- Si h es lo “suficientemente” grande, se puede suponer que \mathbf{x} y $\mathbf{y} = \mathbf{x} + h\mathbf{u}$ son independientes y tiene una asíntota igual ϕ^2 .

El valor de h para el cual $C_{\mathbf{u}}(h)$ prácticamente alcanza su valor asintótico ϕ^2 , en la dirección \mathbf{u} , se denomina *rango*. Cuando $C_{\mathbf{u}}(h)$ y el rango son independientes de \mathbf{u} , entonces el medio es *estadísticamente isótropo*. El rango se usa para caracterizar la zona de influencia del fenómeno (independencia de \mathbf{x} e \mathbf{y}) y entender la estructura del medio poroso; y, la forma de la gráfica de $C_{\mathbf{u}}$ indica la organización del medio.

Otro concepto que está relacionado con la estructura de los poros es el *factor de resistencia de formación* (F), también se le conoce como *factor de formación eléctrica* (Masson et al., 2006).

Factor de formación eléctrica

Se define como el cociente de la resistencia eléctrica R_0 de la muestra porosa saturada con una solución ionizada y la resistencia de compresión R_w de la misma solución ionizada ocupando el mismo espacio de la muestra porosa, i.e.,

$$F = \frac{R_0}{R_w}$$

donde $F > 1$.

El factor de resistencia de formación mide la influencia de la estructura porosa en la resistencia de la muestra.

La *superficie específica* (\mathcal{S}_0) de un material poroso se define como el área de la superficie intersticial de los vacíos y/o poros por unidad de masa (\mathcal{S}_m) o por unidad de compresión de volumen (\mathcal{S}_v) del material poroso. La superficie específica es una medida de la capacidad de absorción de diferentes materiales y juega un papel importante cuando se desea determinar la efectividad de la catálisis. También está relacionada con la conductividad del fluido o permeabilidad del medio poroso.

2. Fluido en medios porosos

Dado que se desea estudiar un fluido en reposo, su interacción con el sólido que lo contiene y la influencia en la propagación de ondas, conviene dar una definición del término fluido.

Fluido

Un *fluido* es una sustancia que se deforma continuamente al ser sometido a un esfuerzo cortante sin importar que tan pequeño sea éste.

Las magnitudes que se mencionarán, serán de gran utilidad al estudiar y/o estimar la permeabilidad. De las propiedades petrofísicas la permeabilidad es el parámetro más sensible cambio de escalas. Por ejemplo, si se mide la permeabilidad a través de cierta formación de rocas en una escala de metros o hectómetros, se observa que las discontinuidades (fallas, fracturas, grietas, etc.) pueden determinar el comportamiento de la formación y por tanto esta medición “in situ” es virtualmente independiente del tipo de roca. En algunas aplicaciones (por ejemplo, ingeniería de depósitos) este valor podría ser de gran utilidad, sin embargo, si se desea analizar el comportamiento petrofísico en un medio poroso es necesario determinar la permeabilidad natural del medio. La permeabilidad natural se mide en muestras cuya escala es de centímetros y está libre de discontinuidades. Permeabilidad es el término usado para la conductividad de un medio poroso con respecto a la filtración de un fluido newtoniano. El concepto de permeabilidad usado en este sentido general es de utilidad limitada, debido a que el valor la misma muestra porosa puede variar con las propiedades de filtración del fluido y el mecanismo de flujo. Es más útil y científico separar el parámetro que mide la contribución del medio poroso a la conductividad y que sea independiente de las propiedades del fluido y del mecanismo de flujo. Un parámetro con estas características se le conoce como permeabilidad específica (κ), la cual simplemente se denominará permeabilidad, a menos que se especifique lo contrario, y su valor está determinado únicamente por la estructura de los poros.

Aunque se han enunciado las características del concepto de permeabilidad aun falta dar la definición explícita.

Permeabilidad

La razón de flujo por unidad de área es proporcional a la caída de presión y al parámetro que caracteriza el medio poroso, este parámetro se le denomina *permeabilidad*.

La permeabilidad se debe tratar como área y por tanto su unidad debe estar en m^2 , la unidad de medición tradicional es el darcy (D) ($1 \text{ darcy} = 0.986923 \mu m^2$). Sin embargo, esta unidad tradicional de permeabilidad no es la unidad que mejor se adapta con las magnitudes observadas en la naturaleza y por lo cual es más conveniente y común usar el milidarcy (mD) ($1 \text{ mD} \approx 10^{-15} m^2$) en la medición.

La viscosidad es un concepto que está íntimamente ligado al fluido y en medios porosos se relaciona con el fenómeno de atenuación.

Viscosidad

El coeficiente de *viscosidad* (η) es la fuerza requerida por unidad de área para mantener el gradiente de velocidad unitario o bien, es la fuerza requerida por unidad de área para mantener una diferencia unitaria de velocidad entre dos planos paralelos en el líquido a una distancia de unidad (Hatschek, 1928).

El coeficiente de viscosidad se exprese, usualmente, en dinas, centímetros y segundos. El valor $\eta = 1$ es denominado poise (1 poise = 1 P = 1 dina \times s \times cm⁻² = 1 g \times (s \times cm)⁻¹), cuyo nombre homenajea al fisiólogo francés Jean Léonard Marie Poiseuille (1799-1869), y su centésima parte se le denomina centipoise (cP). Por ejemplo, el coeficiente de viscosidad del agua a una temperatura de 20 grados, es aproximadamente 1 cP.

El primer parámetro que está correlacionado con la permeabilidad κ es la porosidad ϕ , que se denomina *relación κ - ϕ* (permeabilidad-porosidad). La permeabilidad está principalmente condicionado por el tamaño de los poros y luego por la relativa abundancia de éstos. En la práctica, es necesario proceder en dos pasos para entender la relación κ - ϕ de un medio poroso dado: primero se identifican los diferentes radios de acceso del medio y luego se relaciona la permeabilidad con la fracción de porosidad que corresponde al radio de acceso mayor. Una vez que este análisis se ha completado, generalmente es más fácil explicar la relación κ - ϕ apoyándose de un modelo de la geometría del poro, como el *modelo intergranular*, que es el más estudiado y usado. El modelo intergranular muestra una relación κ - ϕ bastante bien conocido de forma experimental, al menos en granos de forma casi esférica y de tamaño constante.

En tanto, si el medio es un poco más complicado, por ejemplo una red de capilares “tortuosos”, se obtiene una expresión del mismo tipo (Carman, 1961):

$$\kappa = B\phi^3 \frac{d^2}{T_\phi} \quad (2.1)$$

Donde d es el diámetro del grano, T_ϕ es la tortuosidad de las líneas de corriente y B es una constante para el medio dado. Es conveniente dar una definición de tortuosidad, aunque esta definición puede variar entre autores.

Tortuosidad

La *tortuosidad* (T_ϕ) de un modelo capilar cuantifica, en promedio, la extensión de las líneas de corriente que unen los dos extremos del modelo (l_d) a través de los poros en relación a la longitud real del modelo l_m , es decir, $T_\phi = l_d/l_m \geq 1$. Aunque existe una dependencia respecto al parámetro ϕ , algunas veces sólo se escribirá T (Bourbie et al., 1987).

De la fórmula (2.1) es claro que la permeabilidad no sólo depende de la porosidad ϕ sino también depende del tamaño de los poros y granos (radio del capilar cilíndrico R y diámetro de los granos d). Un análisis de correlación revela la dependencia entre los parámetros ϕ y d (R), y también es posible determinar umbrales para estos valores (Bourbie et al., 1987).

3. Problemas de escalas en medios porosos

Entre los parámetros macroscópicos más importantes están la porosidad, permeabilidad, área de la superficie específica, factor de resistencia de formación, y estos pueden estar influenciados, en menor o mayor medida, por la estructura del poro.

La aplicación de leyes macroscópicas de la mecánica a medios porosos implica que estos medios sean continuos, en otras palabras los valores físicos tales como porosidad, permeabilidad, saturación, etc., se deben definir en cada punto. De hecho, la discontinuidad resulta ser una característica del medio poroso porque, a escala microscópica, un punto está en el sólido o en un poro (si la materia se limita a la variable porosidad). La originalidad de considerar el medio poroso reside en el hecho que las dimensiones de los volúmenes elementales, necesarios para tomar en cuenta el efecto de la discontinuidad, pueden variar sustancialmente para cada medio de acuerdo con el parámetro analizado. Por tanto, se requiere definir un volumen mínimo de homogeneización.

Para simplificar la explicación, se considera el caso bidimensional de un modelo intergranular formado con granos de diámetro d . En forma aleatoria se colocan en el medio círculos concéntricos, con áreas crecientes, para medir el cambio de porosidad como función del diámetro de los círculos. Por ejemplo, si los centros están dentro de un poro, la porosidad inicial es 1. El valor promedio de la porosidad del medio, por lo general, se alcanza con círculos con diámetros entre $2d$ y $3d$. En este sentido, el mínimo valor del área para homogeneizar la variable de porosidad se puede calcular estadísticamente. La figura 2.1, muestra un bosquejo de la situación aquí presentada a modo de ejemplo.

En la sección anterior se define el rango de la función covarianza. El rango, puede tener la siguiente interpretación: distancia para la cual dos puntos del espacio ya no muestran, estadísticamente, una relación entre cada uno. Esto ofrece otra forma de determinar el volumen mínimo de homogeneización para la variable porosidad. El rango tiene orden de magnitud de uno a dos diámetros de los granos en un modelo intergranular, si se supone una distribución bien ordenada del tamaño de los granos. Sin embargo, cuando la estructura del poro se vuelve más complejo (como en el caso de ciertas rocas calizas), el volumen mínimo a considerar puede ser bastante grande en comparación al tamaño promedio del grano. Usando la misma técnica (círculos concéntricos) se puede analizar la *fase dispersa*, que en forma de burbujas, representa una baja saturación y se intenta determinar el volumen mínimo de homogeneización. Por lo tanto, para este mismo medio simple puede aparecer una variación brusca en las dimensiones del volumen mínimo. Esta misma observación es válida para los otros parámetros.

En cuanto a la permeabilidad, la cuantificación es mucho más difícil pues no es posible hacer la simplificación al caso bidimensional. Es intuitivamente claro que el volumen requerido para definir permeabilidad, en la mayoría de los casos, es más grande que el necesario

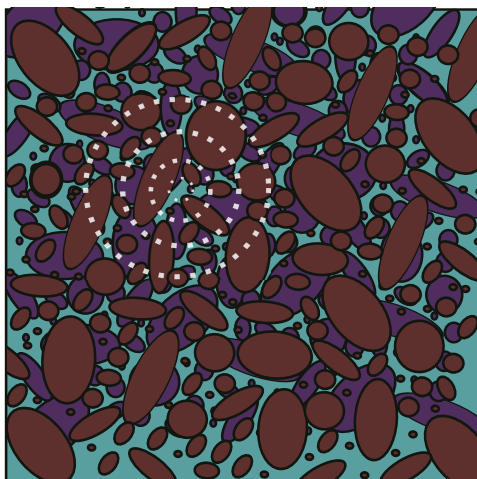


Figura 2.1: Ejemplo de un modelo intergranular simplificado. El sólido queda representado por la parte más oscura y el espacio de los poros, o simplemente poros, por la parte de color claro.

para la porosidad. Como consecuencia, cuando una ley de comportamiento macroscópico es válida en un medio se debe tener en cuenta las diferencias entre los volúmenes mínimos de homogeneización. Si la muestra es mucho más grande en comparación con el volumen mínimo de homogeneización del parámetro analizado, entonces los experimentos mecánicos serán únicamente macroscópicamente significantes. En experimentos acústicos, la longitud de onda debe ser comparado con el volumen mínimo de homogeneización del medio, o de forma más precisa, con el mayor de los volúmenes mínimos de los parámetros involucrados (porosidad, saturación, permeabilidad, etc):

- Si la longitud de onda es significativamente mayor que el volumen de homogeneización, la vibración efectiva se comporta como lo haría en un medio homogéneo “macroscópico”. La vibración no es sensible a las discontinuidades microscópicas del medio poroso.
- Si la longitud de onda y el volumen de homogeneización tienen el mismo orden de magnitud, ocurren efectos de difracción alterando radicalmente el comportamiento. El principal volumen de homogeneización (el cual ha dejado de ser el más importante), debe ser dividido en celdas más pequeñas (que deben ser, por si mismas, homogéneas), por ejemplo, a un orden de tamaño comparable al tamaño del grano, y estas nuevas celdas serán usadas como base del análisis.
- Si la longitud de onda es mucho menor, se presenta de nuevo el problema inicial, antes de realizar una homogeneización: el medio poroso deja de existir por sí mismo y el análisis se debe continuar basado en otra escala menor. El medio a analizar en este caso consiste de granos y poros individuales.

Estos comportamientos, que son en cierto sentido, contrastantes con la escala del medio y la longitud de onda no generan dificultades adicionales siempre que el volumen de homogeneización no cambie durante el experimento.

Si el medio es estadísticamente homogéneo, el significado de sistema macroscópico es relativamente sencillo. Desafortunadamente, los medios porosos son a menudo macroscópicamente heterogéneos, debido a la variabilidad de la morfología del poro, en lugar de homogéneos. Este hecho hace necesario ajustar la definición de sistema macroscópico. La figura 2.2 muestra las diferentes escalas.

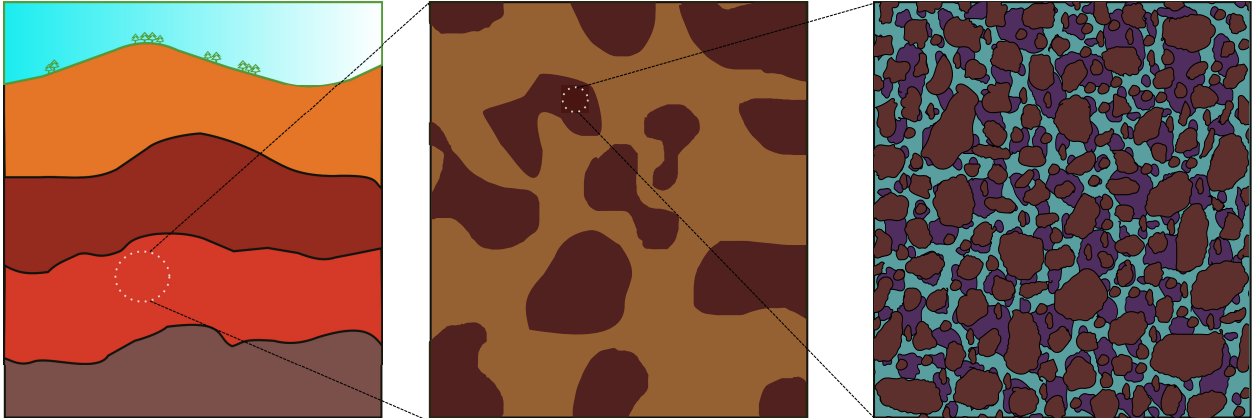


Figura 2.2: Ejemplos de escalas que pueden ser un factor a considerar cuando se realiza un análisis o se mide un parámetro; están ordenadas de mayor a menor tamaño y de izquierda a derecha: macroscópica, mesoscópica, microscópica.

Un medio poroso macroscópico puede ser definido a través de una variación suave de la permeabilidad (porosidad o algún otro parámetro) como función del volumen muestra. Esta función se puede obtener mediante interpolación y la medición directa del parámetro en el medio. Para tomar las mediciones de las muestras, que luego se interpolan, se procede como se explica a continuación: se toma una muestra bastante grande y se mide la permeabilidad (porosidad); una vez tomada la medición, se divide la muestra en dos partes iguales y se descarta una de las partes (en forma aleatoria). En la parte restante se mide la permeabilidad, se divide la muestra en dos partes iguales y se descarta una de las dos partes. Se continúa el proceso de tomar mediciones y dividir las muestras restantes hasta que el volumen de la muestra restante sea comparable con el volumen mínimo de homogeneización. Las muestras al ser pequeñas sólo contienen un número pequeño de poros y por tanto las mediciones fluctúan. Estas muestras, a esta escala, se les denomina *submacroscópicas* (Dullien, 2012).

Un medio homogéneo es necesariamente macroscópico, e inversamente, un medio submacroscópico es siempre heterogéneo. En otras palabras, sus propiedades fluctúan dependiendo del tamaño de la muestra, porque estas muestras no contienen una distribución estadísticamente representativa de los poros.

Una definición operacional de medio homogéneo se hace a través del requerimiento siguiente: todas las muestras macroscópicas de una escala que es comparable con la escala del medio, que está bajo observación, tiene la misma permeabilidad, porosidad, etc., la cual es una condición necesaria de homogeneidad. Teóricamente hablando, es posible que muestras macroscópicas tengan, sobre cierto rango de escalas, diferentes propiedades y por tanto sobre ese rango de escalas el medio sea heterogéneo, por otro lado, en una muestra macroscópica,

que se considera en una escala mayor, puede ocurrir que a este nivel de escala las muestras tengan las mismas propiedades, y por lo cual sobre esas escalas grandes, el medio sea homogéneo.

Es importante enfatizar que algunas propiedades, como la permeabilidad, reflejan en mayor proporción los efectos de la morfología heterogénea, lo que quizá otros parámetros como la porosidad no lo reflejen de forma directa.

Propagación de ondas elásticas en un medio poroso saturado

*El verdadero signo de la inteligencia
no es conocimiento,
sino la imaginación.*

Albert Einstein.

La teoría de propagación de ondas elásticas en un medio poroso se describió con un par de ecuaciones diferenciales acopladas alrededor de 1950 por el belga-americano Maurice Anthony Biot (1905 – 1985). El trabajo de Biot (1956a) extiende la teoría desarrollada a principios de 1940 sobre las propiedades efectivas y de consolidación sobre medios porosos e incluye el estudio de los efectos inerciales para la descripción mecánica y predicción de tres diferentes modos de onda. En el caso de un medio elástico se tienen dos modos bien conocidos la onda P (onda compresional) y la onda S (onda de cortante); además de estos modos, en el medio poroelástico existe un tercer modo conocido como la onda P -lenta (onda de Biot). Los nombres que se usan comúnmente en la literatura para referirse a estas dos ondas compresionales son: onda tipo I u onda P -rápida y onda tipo II u onda P -lenta. Básicamente, la onda P -rápida ocurre cuando el movimiento del sólido y del líquido se encuentran en fase, en tanto que la onda P -lenta resulta del movimiento fuera de fase entre los medios.

El trabajo que presenta Biot lo divide en dos casos: bajas y altas frecuencias. Cuando la frecuencia es baja, la onda lenta es difusiva dado que los efectos de viscosidad del fluido domina sobre los efectos inerciales. En frecuencias altas los efectos inerciales son predominantes y la onda lenta se activa, aunque bajo condiciones realistas (baja permeabilidad, alto contenido de arcilla, etc) este modo también es difusivo.

Estos resultados motivaron una amplia investigación sobre la propagación de ondas elásticas en medios porosos basadas en la teoría Biot. Carcione et al. (2010) realizan un resumen bastante completo de trabajos relacionados con propagación de ondas en medios porosos. Bourbie et al. (1987) y Carcione (2014) hacen un análisis moderno y completo del trabajo de Biot (1956a, 1956b) y complementan el análisis con los resultados principales recientes.

Se analizará el modelo de Biot para un medio poroso, saturado con un sólo fluido. Aunque no es el objeto de estudio de este trabajo, existen extensiones del trabajo de Biot realizados por Santos et al. (1990a, 1990b) donde el medio poroso es saturado por dos fluidos viscosos

comprimibles e inmiscibles¹.

La primera sección de este capítulo enuncia las principales suposiciones de la teoría de Biot y la notación básica que se usará (Bourbie et al., 1987). Las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones de movimiento quedan descritas en las dos secciones siguientes (Carcione (2014), Bourbie et al. (1987) y Wenzlau (2009)). Es importante señalar que las ecuaciones que se presentan en este capítulo sólo corresponden a un rango bajo de frecuencias. Este capítulo termina con algunas consideraciones importantes sobre las ecuaciones poroelásticas: existencia de la onda P -lenta, rigidez de las ecuaciones diferenciales, mecanismo de atenuación que actúan sobre las ondas compresionales y condición de estabilidad física (Carcione & Quiroga-Goode (1995), Carcione et al. (2010), Masson et al. (2006)).

1. Suposiciones de la teoría de Biot

Existen dos formas de analizar la propagación de ondas acústicas en un medio poroso totalmente saturado,

1. La primera aproximación se basa en el proceso de homogeneización, la cual ayuda a cambiar leyes microscópicas a leyes macroscópicas. El término microscópico aplica para leyes que gobiernan escalas comparables a la porosidad, en tanto, el término macroscópico se relaciona directamente con escalas que pueden hacer a un medio heterogéneo y esta escala es representativa del mecanismo a estudiar. Esta no es la idea principal que se seguirá, sin embargo, es importante explicar la idea intuitiva. Esencialmente hay dos formas de hacer la homogeneización:
 - Basado en promedios. Se resuelve el problema a nivel microscópico, en este caso, en una celda elemental que contiene una heterogeneidad aislada, i.e., un canal completamente saturado de fluido. A partir de esta solución se infiere la solución promedio en la celda para la cantidad analizada (esfuerzos, deformaciones, energías o velocidad de fluido) como función del valor macroscópico impuesto en la frontera de la celda (esfuerzos, deformaciones o velocidades). El medio heterogéneo real es reemplazado por el medio homogéneo ficticio y la respuesta del nuevo medio como resultado de una fuerza impuesta, es el valor promedio, previamente calculado en la celda. Este método es bastante efectivo cuando la concentración de heterogeneidades es baja o regular, para los cuales los procesos de interacción celda a celda es ignorada. Esta idea es explorada en Biot (1956b).
 - Repetición periódica. La segunda idea se basa en suponer que la estructura heterogénea microscópica se repite periódicamente, lo cual impone periodicidad en las soluciones. Si el período espacial se hace tender a cero respecto a la escala macroscópica (conocido como el *método asintótico del parámetro pequeño*, Bensoussan et al. (1980)) se obtiene una fórmula cerrada de las leyes macroscópicas. Este método ofrece la ventaja del rigor matemático, la sistematización del proceso y no tiene las limitaciones debido a la concentración de heterogeneidades.

¹ Propiedad que tienen algunos fluidos que evita que se mezclen

La suposición de periodicidad puede parecer restrictiva, sin embargo, esta técnica ha resistido experimentos hechos en medios seleccionados al azar (Suquet, 1982).

El inconveniente que se presenta es que sólo proporciona las fórmulas cerradas de leyes macroscópicas, a diferencia del método basado en promedios que puede proporcionar, dentro de sus límites de aplicabilidad, estimaciones analíticas para geometrías con heterogeneidades simples en escala microscópicas.

2. La segunda aproximación, consiste deliberadamente en ignorar el nivel microscópico y suponer que los principios básicos de la mecánica de medios continuos (en particular, existencia de potenciales) pueden ser apropiados para medir valores macroscópicos. Este es el enfoque que usó Biot en su análisis (Biot 1956a, 1962) y aunque parece ser bastante intuitivo, muchos resultados coinciden con el método anterior.

A pesar de tener una apariencia heurística, el análisis que se presenta a continuación estudia los medios porosos a través de la segunda aproximación, la cual tiene suposiciones más realistas. Las principales suposiciones de la teoría de Biot son:

1. La longitud de arco es mayor en comparación de las dimensiones del volumen macroscópico elemental. Este volumen tiene propiedades bien definidas, tales como porosidad, permeabilidad y el módulo de elasticidad, los cuales son representativos del medio; los efectos de dispersión no se consideran. Estas hipótesis, que se satisfacen en la mayoría de la aplicaciones geofísicas, se requieren cuando se hace una descripción del proceso analizado con herramientas de la mecánica de continuos. Por tanto, la longitud de onda es mayor en comparación con las dimensiones de los canales elementales donde el fluido microscópico ocurre.

La distribución de esfuerzos en el fluido es casi hidrostático, aunque la viscosidad juega un papel más importante en el flujo (Mandel, 1950).

2. Desplazamientos pequeños en las fases sólido y fluido. Esto indica que existen transformaciones infinitesimales entre el estado de referencia y el estado actual de deformación. Los desplazamientos, deformaciones y velocidades de las partículas se consideran pequeños. Una consecuencia de esta suposición es que las formulación Euleriana y Lagrangiana coinciden hasta el primer orden. Las ecuaciones constitutivas, disipación de fuerzas y los momentos cinéticos son lineales. La suposición de desplazamientos pequeños se satisface totalmente, porque en estudios sísmicos con muestras de laboratorio se han observado que tienen deformaciones menores a 10^{-6} .

Por tanto, si u_i es la i -ésima componente del promedio macroscópico del desplazamiento del sólido, los componentes del tensor macroscópico de deformación pueden escribirse como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

3. La fase líquida es continua. Por tanto la estructura o esqueleto o matriz (rocosa) consiste en la fase sólida y de poros interconectados. Sólo se considera la porosidad de

los canales (poros) donde el flujo ocurre. Esta porosidad se supone que es uniforme e isótropo y lo denotamos por ϕ y el medio se supone totalmente saturado. Se desprecia la porosidad no interconectada. La figura 3.1 muestra un medio poroso totalmente saturado

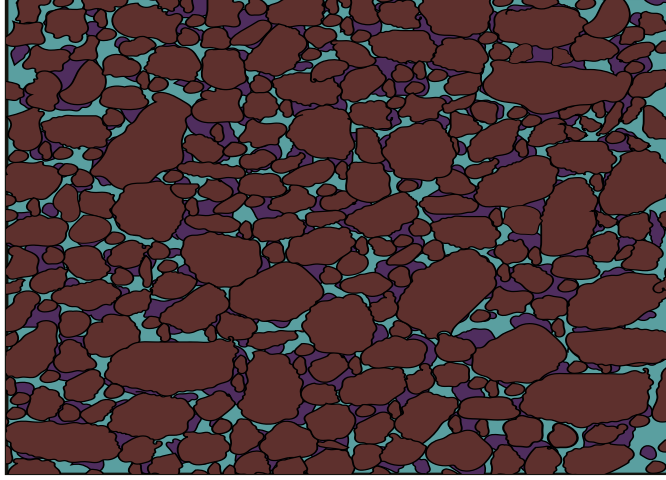


Figura 3.1: La parte de color oscuro es la matriz (rocosa) o esqueleto y la parte de color claro el fluido. El sólido es el material del cual está constituido la matriz rocosa.

Sea \mathbf{U} el promedio de desplazamientos de la fase líquida (continua) contenido en el elemento macroscópico. El desplazamiento relativo (al sólido) del fluido se define como:

$$\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u}). \quad (3.2)$$

La razón de flujo macroscópico elemental dQ a través del área dS con vector normal \mathbf{n} por unidad de tiempo es

$$\begin{aligned} dQ &= \dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \dot{\mathbf{w}} &= \phi(\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\dot{\mathbf{w}}$ es el *vector velocidad de filtración*. Para cualquier volumen macroscópico Ω con frontera S se tiene que

$$\int_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{w} d\Omega.$$

El *aumento o variación local del fluido contenido* ζ , está dado por

$$\zeta = -\text{div } \mathbf{w}. \quad (3.4)$$

4. La matriz se supone elástica e isótropo (o estadísticamente isótropo), aunque se da por hecho que la teoría puede extenderse, inclusive, al caso anisótropo. La anisotropía se debe en parte a la alineación de los poros o rupturas (cracks). Por tanto, todos los mecanismos originados de la viscosidad relacionados con la estructura (debido a la presencia de fluido en los poros no interconectados) no se consideran (Biot, 1962).

5. Ausencia de cualquier acoplamiento, en particular, acoplamiento termomecánico, es decir, las condiciones son isotermales.

La formulación matemática presentada en este trabajo, sigue de cerca la formulación moderna y el desarrollo de Carcione (2014), Bourbie et al. (1987) y Wenzlau (2009) .

2. Ecuaciones constitutivas

Las leyes constitutivas de medios poroelásticos o simplemente relaciones constitutivas poroelásticas, relaciona el campo de esfuerzos totales σ_{ij} y la *presión poral* o *presión del fluido* p , con el estado de deformación del medio poroso. Los dos campos de deformaciones independientes son ε_{ij} , ζ y están definidas mediante las ecuaciones (3.1) y (3.4). Con ayuda de estas variables de deformación, las relaciones constitutivas poroelásticas, del caso lineal, se escriben en forma general como (Carcione, 2014).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^u \varepsilon_{kl} - \alpha_{ij} M \zeta, \quad (3.5)$$

$$p = -\alpha_{ij} M \varepsilon_{ij} + M \zeta, \quad (3.6)$$

donde C_{ijkl}^u es el tensor de elasticidad del medio no drenado (saturado), α_{ij} es el tensor de coeficientes del esfuerzo efectivo y M es el *módulo del espacio poral* (presión ejercida sobre el fluido para aumentar la cantidad de fluido contenido en una unidad en la deformación macroscópica isovolumétrica, Bourbie et al. (1987)) o *módulo de acoplamiento*.

Como el medio es isótropo, C_{ijkl}^u puede expresarse usando los parámetros de Lamé λ_c , μ y el tensor α_{ij} se reduce a un escalar α , entonces

$$C_{ijkl}^u = \lambda_c \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.7)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (3.8)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker (tensor unitario). El escalar α recibe el nombre de *coeficiente poroelástico de esfuerzo efectivo* o *constante de Biot & Willis* (1957). En algunos textos la constante λ_c suele escribirse como λ_u .

Las relaciones constitutivas isotrópicas se obtienen sustituyendo (3.7) y (3.8) en las igualdades (3.5) y (3.6),

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda_c \varepsilon_{ii} \delta_{ij} - \alpha M \zeta \delta_{ij}, \quad (3.9)$$

$$p = -\alpha M \varepsilon_{ii} + M \zeta. \quad (3.10)$$

Con el objetivo ilustrar algunas relaciones entre los parámetros, se introducen algunos estados de deformación y seis módulos poroelásticos fundamentales. Las primeras dos son: deformación de cortante pura y deformación de dilatación pura; mismas que bajo condición de saturación (sin drenar) del medio, i.e., $\zeta \equiv 0$, lleva a obtener expresiones para el módulo de cortante saturado (G_{sat}) y el módulo de compresión saturado (K_u). Usando el ángulo de deformación $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ donde $i \neq j$, los módulos se definen como:

$$G_{\text{sat}} \equiv \frac{\sigma_{ij}}{\gamma_{ij}} \Big|_{\zeta=0, \varepsilon_{ii}=0} = \frac{2\mu \varepsilon_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} = \mu, \quad (3.11)$$

$$K_{\text{sat}} \equiv \frac{\sigma_{ii}}{3\varepsilon_{ii}} \Big|_{\zeta=0} = \frac{(3\lambda_u + 2\mu)\varepsilon_{ii}}{3\varepsilon_{ii}} = \lambda_c + \frac{2}{3}\mu. \quad (3.12)$$

Las mismas dos condiciones se pueden aplicar a un medio drenado (no saturado), i.e., $p \equiv 0$. En el caso de cortante pura, i.e., $\varepsilon_{ii} = 0$ y $p = 0$, la ecuación (3.6) implica $\zeta = 0$. El módulo de cortante drenado o seco (G_{dry}) tiene la expresión:

$$G_{\text{dry}} \equiv \frac{\sigma_{ij}}{\gamma_{ij}} \Big|_{p=0, \varepsilon_{ii}=0} = \frac{2\mu\varepsilon_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} = \mu. \quad (3.13)$$

En el caso de dilatación pura, i.e., sólo $p = 0$, la ecuación (3.6) lleva a $\zeta = \alpha\varepsilon_{ii}$ y sustituyendo en (3.5) se puede calcular el módulo de compresión drenado o seco (K_{dry}) como

$$K_d \equiv \frac{\sigma_{ii}}{3\varepsilon_{ii}} \Big|_{p=0} = \frac{(3\lambda_u + 2\mu - \alpha^2 M)\varepsilon_{ii}}{3\varepsilon_{ii}} = \lambda_c + \frac{2}{3}\mu - \alpha^2 M. \quad (3.14)$$

Nota. Algunos textos usan la notación K_d y K_u (K_G) en lugar K_{dry} y K_{sat} , respectivamente. Algo similar ocurre con los módulos restantes, i.e., G_{sat} y G_{dry} pueden ser sustituidos por G_d y G_u , respectivamente.

Comparando el resultado de la ecuación (3.11) con (3.13) y la ecuación (3.12) con (3.14), se obtiene:

$$G_{\text{sat}} = G_{\text{dry}} \equiv G, \quad (3.15)$$

$$K_{\text{sat}} = K_{\text{dry}} + \alpha^2 M. \quad (3.16)$$

Aquí hay dos observaciones importantes: a) la ecuación (3.15) indica que el módulo de cortante no es afectado por la presencia de fluido en los poros; b) la ecuación (3.16) muestra que el módulo de compresión saturado, se calcula fácilmente como la suma del módulo de compresión drenado y $\alpha^2 M$. La ecuación (3.16) es la famosa identidad de Gassmann (Gassmann, 1951). Estas cantidades se determinan a través de tres experimentos ideales, bajo condiciones estáticas (Biot & Willis, 1957). Los tres experimentos se listan a continuación:

- Prueba deformación de cortante al material seco.
- Prueba de compresibilidad con envoltura/cubierta al medio saturado: el material (saturado) se encierra con una envoltura delgada impermeable y flexible y luego se sujeta a una presión hidrostática exterior. La presión del fluido dentro de la envoltura permanece constante, porque el interior de la envoltura es expuesta a la atmósfera a través de un tubo (figura 3.2).
- Prueba de compresibilidad sin envoltura/cubierta al medio saturado: la muestra es sumergida en el flujo de saturación al que se le aplica la presión. La presión actúa sobre la parte sólida y la parte del fluido en la muestra (figura 3.2).

Los parámetros α y M se relacionan con el módulo de compresión del sólido granular (K_s) y el módulo de compresión del fluido del poro K_f ,

$$\alpha = 1 - \frac{K_f}{K_s}, \quad (3.17)$$

$$M = \frac{\alpha - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f}. \quad (3.18)$$

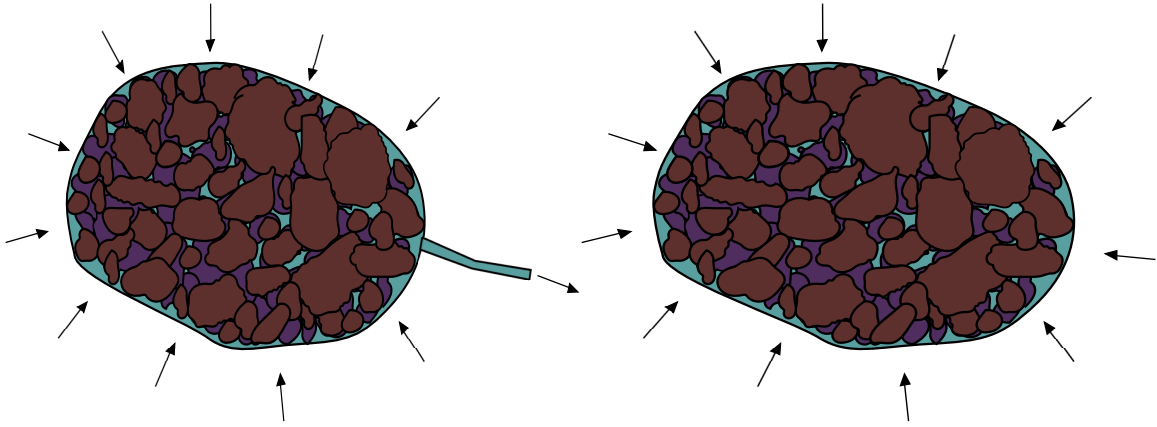


Figura 3.2: Configuración de las pruebas de compresibilidad con envoltura (imagen izquierda) y sin envoltura (imagen derecha).

Además de estas relaciones entre los parámetros, se deben cumplir las siguientes restricciones (Biot, 1962):

$$\mu > 0, \quad M > 0, \quad \lambda_c + \frac{2}{3}\mu - \alpha^2 M > 0. \quad (3.19)$$

Los esfuerzos totales se descomponen en dos partes: esfuerzo efectivo y esfuerzo hidrostático. El esfuerzo efectivo, $\sigma_{ij}^{(m)}$, actúa sobre la matriz (roca seca) y el esfuerzo hidrostático, $\sigma^{(f)}$, actúa sobre el fluido, entonces

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma^{(f)}\delta_{ij}. \quad (3.20)$$

El esfuerzo hidrostático se relaciona con la presión poral p , con la siguiente fórmula:

$$\sigma^{(f)} = -\phi p. \quad (3.21)$$

3. Ecuaciones de movimiento

La sección inicial de este capítulo describe cada una de las suposiciones donde la teoría lineal de propagación de ondas poroelásticas de Biot es válida. Aquí un resumen de la lista:

- En las ecuaciones sólo se consideran los poros conectados y los poros no conectados no se tratarán;
- el medio poroso es estadísticamente isótropo, i.e., la porosidad y permeabilidad tiene el mismo valor en todas las direcciones;
- la longitud de onda es mayor en comparación a la escala microscópica del poro;
- las deformaciones son pequeñas, para asegurar el comportamiento lineal del material elástico.

Sea f un campo escalar, si se denota la derivada parcial $\partial f_l / \partial x_k$ por $f_{l,k}$, entonces, omitiendo los términos fuentes, las ecuaciones de Biot para un medio poroso isótropo saturado de un fluido están dados por (Carcione, 2014):

$$\rho_{11} \partial_{tt}^2 u_i + \rho_{12} \partial_{tt}^2 U_i + \phi^2 \frac{\eta}{\kappa} (\dot{u} - \dot{U}) = \sigma_{ij,j}^{(m)}, \quad (3.22)$$

$$\rho_{12} \partial_{tt}^2 u_i + \rho_{22} \partial_{tt}^2 U_i - \phi^2 \frac{\eta}{\kappa} (\dot{u} - \dot{U}) = -\phi p_{,i}, \quad (3.23)$$

donde los coeficientes están definidos por

$$\begin{aligned} \rho_{11} + \rho_{12} &= (1 - \phi) \rho_s, \\ \rho_{12} + \rho_{22} &= \phi \rho_f. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sumando las ecuaciones (3.22), (3.23) y usando la descomposición del esfuerzo total (3.20) y (3.21) se obtiene

$$(\rho_{11} + \rho_{12}) \partial_{tt}^2 u_i + (\rho_{12} + \rho_{22}) \partial_{tt}^2 U_i = \sigma_{ij,j}. \quad (3.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.3), (3.24) en (3.25) se obtiene la formulación en frecuencias bajas para las ecuaciones de momento del medio poroso

$$\rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i = \sigma_{ij,j}, \quad (3.26)$$

$$\rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i = -p_{,i} - b \dot{w}_i. \quad (3.27)$$

En el lado derecho aparecen los términos inerciales junto a otros parámetros. La densidad total (ρ), puede ser determinado a partir de la densidad del sólido granular ρ_s y de la densidad del fluido del poro ρ_f , usando la siguiente relación:

$$\rho = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s. \quad (3.28)$$

Al valor m se le conoce como *densidad efectiva del fluido* y al valor b se le denomina *coeficiente de fricción hidráulica* (también llamado *coeficiente de movilidad*) y están definidos, respectivamente, por las relaciones:

$$m = \rho_f \frac{T}{\phi}, \quad (3.29)$$

$$b = \frac{\eta}{\kappa}. \quad (3.30)$$

Este valor de m no tiene el mismo significado cuando se usa como super-índice, en tal caso denota a la matriz (esqueleto, marco) sólida del medio.

Las ecuaciones (3.26) y (3.27) se pueden reescribir en forma general como sigue:

$$\rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i = \sigma_{ij,j}, \quad (3.31)$$

$$\rho_f \ddot{u}_i + Y * \dot{w}_i = -p_{,i}. \quad (3.32)$$

En el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales está la divergencia del campo de esfuerzo total σ_{ij} y el gradiente de la presión poral p .

El *operador viscodinámico* (Y) es una función del operador diferencial ∂_t , y en el dominio de la frecuencia, es una cantidad compleja que depende de la frecuencia. Biot evaluó el flujo oscilatorio circular como un modelo para el caso de un sólido poroso y con la ayuda de las funciones de Bessel encontró una expresión para el operador viscodinámico. En Jhonson et al. (1987) los autores usan el concepto de permeabilidad dinámica $\kappa(\omega)$ para introducir la dependencia de la frecuencia en el operador,

$$\hat{Y} \equiv \frac{\eta}{\kappa(\omega)} = \frac{\eta}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{4i\omega}{\omega_B n} \right)^{1/2} + \frac{i\omega}{\omega_B} \right]. \quad (3.33)$$

Aquí, η es la viscosidad “dinámica” del fluido del poro, κ es el dc límite de permeabilidad de la matriz porosa (permeabilidad hidráulica usual), ω_B es la transición crítica de la frecuencia (conocida como frecuencia de relajación) y n es un parámetro adimensional que está relacionado con los canales del poro.

La dependencia de la frecuencia en $\kappa(\omega)$ resulta de la aparición de capas en la frontera viscosa de los poros en frecuencias lo suficientemente altas. El grosor de las capas de la frontera viscosa decrece cuando la frecuencia se incrementa (Masson et al., 2006).

La fórmula para κ es válida para todas las frecuencias ω . En frecuencias bajas, el perfil de flujo de cada poro es controlado por la viscosidad y tiene un comportamiento localmente “parabólico” (laminar). A altas frecuencias, los efectos inerciales comienzan a dominar las fuerzas de cortante, dando como resultado un perfil de flujo ideal, excepto en una capa límite viscosa fina cerca de la interfaz fluido/sólido donde las fuerzas de cortante deben dominar porque el movimiento relativo debe disminuir a cero en la superficie granular. En resumen, la frecuencia ω_B juega un papel importante en la caracterización del régimen mecánico para sólidos porosos homogéneos, dado que frecuencias menores a ω_B el fluido tiene un comportamiento laminar y es del tipo Poiseuille. Sin embargo, para frecuencias que son mayores a ω_B ocurren desviaciones del fluido laminar y por tanto para caracterizar el comportamiento y su correspondiente respuesta mecánica del compuesto poroso se requieren parámetros adicionales.

La frecuencia crítica se calcula de acuerdo a la fórmula

$$\omega_B \equiv \frac{\eta\phi}{\rho_f T \kappa} = \frac{\eta}{\rho_f F \kappa}, \quad (3.34)$$

donde T es la *tortuosidad* del espacio poroso, un número adimensional mayor o igual a 1, $F = T/\phi$ se le conoce como *factor de formación eléctrica*. Ahora, sustituyendo (3.34) en (3.33) y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ (Wenzlau, 2009), entonces

$$\hat{Y} = \frac{\rho_f T}{\phi} \omega i + \frac{\eta}{\kappa} = m\omega i + b. \quad (3.35)$$

La forma simple del operador Y dado en (3.35) se le conoce como aproximación clásica de frecuencias bajas (Biot, 1956a). La expresión consiste de la parte inercial $m\omega i$ y el término viscoso b , que será responsable de la fricción interna entre el fluido del poro, y la matriz sólida.

Sustituyendo la ecuación (3.35) en la ecuación de momentos (3.32) se obtiene la formulación en bajas frecuencias para las ecuaciones de momento del medio poroso, dados en las ecuaciones (3.26) y (3.27).

Un sistema acoplado de ecuaciones de onda lineales para los desplazamientos u_i y w_i , se obtienen por sustitución de las ecuaciones (3.9) y (3.10) en las ecuaciones de momento (3.26) y (3.27) obteniendo

$$\rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i = (\lambda_c + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \alpha M w_{j,ji} \quad (3.36)$$

$$\rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i = \alpha M u_{j,ji} + M w_{j,ji} - b \dot{w}_i \quad (3.37)$$

Las derivadas temporales de los desplazamientos en (3.36) y (3.37) se pueden reescribir en términos de los esfuerzos (3.9) y la presión poral (3.10), (3.4)

$$r^2 \ddot{u}_i = m \sigma_{ij,j} + \rho_f b \dot{w}_i + \rho_f p_{,i}, \quad (3.38)$$

$$r^2 \ddot{w}_i = -\rho_f \sigma_{ij,j} - \rho b \dot{w}_i - \rho p_{,i}, \quad (3.39)$$

donde

$$r^2 = m\rho - \rho_f^2. \quad (3.40)$$

Finalmente, para la discretización se considerará la formulación velocidad-esfuerzo de las ecuaciones de Biot para medios poroelásticos

$$r^2 \dot{v}_i = m \sigma_{ij,j} + \rho_f b V_i + \rho_f p_{,i}, \quad (3.41)$$

$$r^2 \dot{V}_i = -\rho_f \sigma_{ij,j} - \rho b V_i - \rho p_{,i}, \quad (3.42)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) + \delta_{ij} (\lambda_u v_{k,k} + \alpha M V_{k,k}), \quad (3.43)$$

$$\dot{p} = -\alpha M v_{k,k} - M V_{k,k}, \quad (3.44)$$

donde $v_i = \dot{u}_i$, $V_i = \dot{w}_i$ y se usa el convenio de suma de Einstein. Notar que las ecuaciones (3.41)-(3.44) es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales *hiperbólicas* en tiempo para v , V , σ y p . Se denota por v_i = componente de velocidad del sólido, V_i = componente de velocidad del fluido (relativo al sólido), σ_{ij} son esfuerzos normales ($i = x, z$), p es la presión poral.

4. Existencia de la onda P -lenta

Para justificar la existencia de la onda P -lenta y para simplificar la explicación se adoptará la siguiente notación: sea f un campo escalar y \mathbf{F} un campo vectorial, entonces ∇f denota el gradiente de f , $\nabla^2 f$ es el Laplaciano de f , $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es la divergencia de \mathbf{F} y $\nabla \times \mathbf{F}$ es el rotacional de \mathbf{F} . Entonces las ecuaciones (3.36) y (3.36), pueden reescribirse en forma vectorial en términos de operadores diferenciales (Bourbie et al., 1987):

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}} = (\lambda_c + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}),$$

$$\rho_f \ddot{\mathbf{u}} + m \ddot{\mathbf{w}} = \alpha M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) - b \dot{\mathbf{w}},$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{w} son vectores cuyas componentes son u_i y w_i , respectivamente. Además,

Rotacional del rotacional de un campo vectorial

Sea F un campo vectorial de clase C^2 , entonces

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (3.45)$$

Sustituyendo la identidad del rotacional (3.45) en la ecuación vectorial anterior:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}} = (\lambda_c + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (3.46)$$

$$\rho_f \ddot{\mathbf{u}} + m \ddot{\mathbf{w}} = \alpha M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) - b \dot{\mathbf{w}}. \quad (3.47)$$

El lado derecho del sistema contiene términos donde aparece el operador divergencia y el operador rotacional, esto sugiere una manera de abordar el estudio del sistema de ecuaciones diferenciales. Una idea para abordar el análisis es usar el *teorema de Helmholtz* (también conocido como el *teorema fundamental del cálculo vectorial*), famoso en física y en matemáticas, en particular en el área de cálculo vectorial.

Teorema de descomposición de Helmholtz

Sea \mathbf{F} un campo vectorial en \mathbb{R}^3 de clase C^2 tal que \mathbf{F} decae a cero más rápido que $1/r$ cuando $r \rightarrow \infty$ entonces

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad (3.48)$$

donde Φ es un campo escalar y Ψ un campo vectorial, además,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

y ∇' es el gradiente respecto a r' .

El *teorema de descomposición de Helmholtz* se puede parafrasear como: cualquier campo vectorial puede ser descompuesto como la suma de un campo vectorial irrotacional y un campo vectorial solenoidal. Entonces la parte irrotacional del campo vectorial se anulará con el rotacional, en tanto que la parte solenoidal se anulará con los términos que contiene el operador divergencia.

En un primer paso, se examinan las ecuaciones cuando $b = 0$. Además, debido a la naturaleza de ser un medio isótropo es posible considerar, sin pérdida de generalidad, una onda plana armónica que se propaga a través del medio en la dirección x tal que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.49)$$

donde k es el número de onda, ω es la frecuencia circular, y $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0$ son vectores constantes. Bajo la suposición de suponer a la onda plana considerada irrotacional, el término que contiene el operador rotacional se anula. Sustituyendo (3.49) en las ecuaciones (3.46) y (3.47) se obtiene

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\Phi_1 + \rho_f\omega^2\Phi_2 &= (\lambda_c + 2\mu)k^2\Phi_1 + \alpha Mk^2\Phi_2, \\ \rho_f\omega^2\Phi_1 + m\omega^2\Phi_2 &= \alpha Mk^2\Phi_1 + Mk^2\Phi_2.\end{aligned}\quad (3.50)$$

Reescribiendo el sistema de ecuaciones (3.50) en forma matricial

$$\mathbf{H}\Phi = \frac{1}{v_{fase}^2}\mathbf{R}\Phi, \quad (3.51)$$

donde

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k}, \quad (3.52)$$

es la *velocidad de fase*. Las matrices \mathbf{H} y \mathbf{R} se definen como

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & m \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & \alpha M \\ \alpha M & M \end{pmatrix}.$$

Para determinar la velocidad de fase es necesario resolver un problema de valores propios equivalente a la ecuación (3.51). Como los parámetros cumplen (3.19), entonces

$$\det(\mathbf{R}) = M(\lambda_c + 2\mu/3 - \alpha^2 M) + M(4\mu/3) > 0. \quad (3.53)$$

Esto implica que la matriz \mathbf{R} es no singular y por tanto el problema de valores propios para determinar la velocidad de fase es:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\Phi = \frac{1}{v_{fase}^2}\Phi, \quad (3.54)$$

El polinomio característico, de segundo grado, asociado a (3.54) es (ver Anexo A):

$$\left(\frac{1}{v_{fase}^2}\right)^2 - \text{tr}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})\left(\frac{1}{v_{fase}^2}\right) + \det(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}) = 0.$$

Cuyas soluciones están dadas por

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v_{fase}^2}\right)_\pm &= \frac{\text{tr}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}) \pm \sqrt{\text{tr}^2(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}) - 4\det(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})}}{2} \\ &= \frac{\text{tr}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}) \pm \sqrt{\text{tr}^2(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}) - 4\det(\mathbf{H})/\det(\mathbf{R})}}{2},\end{aligned}$$

Como se cumple (3.53) y si se supone $\det(\mathbf{H}) = \rho m - \rho_f^2 = r^2 > 0$, entonces ambas soluciones $1/v_{fase}$ (lentitud) no se anulan. Por tanto, se tienen dos valores para la velocidad

de fase y estas velocidades corresponden a la onda P -lenta y P -rápida. Estos resultados fueron confirmados experimentalmente en laboratorio en el trabajo hecho por Plona (1980).

Para el análisis de la onda S , suponer que la onda considerada (3.49) es solenoidal (isovolumétrica) y $\mathbf{u}_0 = (0, 0, u_{30})^T$. Bajo estas hipótesis los términos que contienen el operador divergencia se anulan y se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\Phi_1 + \rho_f\omega^2\Phi_2 &= -\mu k^2\Phi_1, \\ \rho_f\omega^2\Phi_1 + m\omega^2\Phi_2 &= 0.\end{aligned}$$

Como $\omega \neq 0$, y $k \neq 0$, entonces una forma equivalente es:

$$\begin{aligned}\rho v_{fase}^2\Phi_1 + \rho_f v_{fase}^2\Phi_2 &= -\mu\Phi_1, \\ \rho_f\omega^2\Phi_1 + m\omega^2\Phi_2 &= 0,\end{aligned}\tag{3.55}$$

donde v_{fase} se define de forma similar a (3.52).

A partir del sistema de ecuaciones (3.55) se resuelve para v_{fase}^2 y entonces

$$v_{fase}^2 = -\frac{m}{r^2}\mu,\tag{3.56}$$

$$\Phi_2 = -\frac{\rho_f}{m}\Phi_1.\tag{3.57}$$

El fluido no responde a fuerzas cortantes, por tanto la influencia del fluido sobre la onda cortante sólo se observa a través de los efectos inerciales. La ecuación (3.57) indica que la variación del fluido no está en fase con el movimiento total. La fórmula (3.56) es la velocidad de la onda S .

Estas velocidades y comportamientos son válidos para medios isótropos, pero los resultados pueden ser extendidos a medios anisótropos como sigue: si una onda compresional existe en el caso puramente elástico se extiende a lo largo de las direcciones principales de anisotropía; si son dos ondas compresionales, una lenta y una estándar, se debe analizar con la teoría de de Biot. Desde el punto de vista cualitativo las ondas cortantes son alteradas como en el caso isótropo.

Es común llamar a las ondas compresionales, la onda P -lenta y la onda P -rápida, como ondas de tipo I y tipo II, respectivamente. La onda P -rápida se comporta de forma similar a su homóloga en el caso puramente elástico y por ello es común referirse a ella simplemente como la onda P . La onda P -lenta es específica del medio poroelástico y, usualmente atenuado por las rocas porosas reales.

5. Algunas consideraciones

Un sistema es abierto si el fluido puede fluir hacia afuera del material cuando es presionado; mientras que un sistema es cerrado cuando el fluido no puede fluir al exterior al ser presionado (figura 3.2). El material se considera seco cuando el material no contiene fluido y el material es saturado cuando todos los poros están totalmente llenos. Para el propósito de este trabajo,

un sistema abierto se corresponde con el material seco y un sistema cerrado con el material saturado.

Un buen conjunto de parámetros para describir la propagación de onda en un medio poroso (material de Biot) es (Gerstoft, 2002):

- Fluido: ρ_f , K_f , κ y η .
- Sólido: μ , λ_c , ρ , K_s y K_{dry} .
- Interacción fluido-sólido: ϕ y T .

A partir de las ecuaciones poroelásticas es posible obtener las ecuaciones poroacústicas, ecuaciones elásticas y ecuaciones acústicas en un fluido (Gerstoft (2002), Özdenvar & McMechan (1997), Hassanzadeh (1991)):

- Poroacústico: Definir $\mu = 0$.
- Elástico: Definir $\phi = 0$, $\rho_f = 0$ y $\alpha = 0$.
- Propagación de una onda acústica en fluido: Definir $\phi = 1$, $\mu = 0$, $\alpha = 1$, $K_{\text{dry}} = 0$, $T = 1$, $\rho = \rho_f = m$. Sin embargo esto lleva a una indeterminación y para evitarlo, en la práctica, se selecciona $\rho = 1.01\rho_f$.

No obstante, para las simulaciones numéricas se utilizan las correspondientes ecuaciones de cada caso sin usar esta reducción con el objetivo de reducir o eliminar cálculos innecesarios.

En las siguientes subsecciones se discutirá sobre dos características importantes: el mecanismo de atenuación que presenta el medio poroelástico y la rigidez en las soluciones de las ecuaciones. El mecanismo de atenuación es un fenómeno que presentan las tres ondas y genera diferentes variaciones en las velocidades.

5.1. Mecanismo de atenuación

Una de las características mas importantes de las ecuaciones poroelásticas es el mecanismo de atenuación. Este mecanismo de atenuación es una representación más realista de un medio poroso porque refleja la pérdida de energía de las ondas al viajar a través de los poros y un fluido viscoso.

En esta parte del análisis se debe suponer $b \neq 0$. Por tanto, sustituyendo la ecuación (3.49) en las ecuaciones (3.46) y (3.47) y suponiendo que la onda plana es irrotacional, se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\Phi_1 + \rho_f\omega^2\Phi_2 &= (\lambda_c + 2\mu)k^2\Phi_1 + \alpha Mk^2\Phi_2, \\ \rho_f\omega^2\Phi_1 + m\omega^2\Phi_2 &= \alpha Mk^2\Phi_1 + Mk^2\Phi_2 + i\omega b\Phi_2.\end{aligned}$$

Adicionalmente, es posible suponer $\mathbf{u}_0 = (u_{10}, 0, 0)^T$ y $\mathbf{w}_0 = (w_{10}, 0, 0)^T$, por tanto la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned}\rho\omega^2 u_{10} + \rho_f\omega^2 w_{10} &= (\lambda_c + 2\mu)k^2 u_{10} + \alpha Mk^2 w_{10}, \\ \rho_f\omega^2 u_{10} + m\omega^2 w_{10} &= \alpha Mk^2 u_{10} + Mk^2 w_{10} + i\omega b w_{10}.\end{aligned}\tag{3.58}$$

En forma matricial

$$\hat{\mathbf{H}}\Phi_0 = 0, \quad (3.59)$$

donde

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 - (\lambda_c + 2\mu)k^2 & \rho_f\omega^2 - \alpha Mk^2 \\ \rho_f\omega^2 - \alpha Mk^2 & m\omega^2 - Mk^2 - i\omega b \end{bmatrix}, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} u_{10} \\ w_{10} \end{bmatrix}.$$

La matriz $\hat{\mathbf{H}}$ posee como componentes números reales y complejos, por lo cual, las soluciones no triviales del sistema son complejas. La ecuación (3.59) tiene una solución diferente a la trivial si la matriz $\hat{\mathbf{H}}$ es singular ($\det(\hat{\mathbf{H}}) \neq 0$). Esto lleva a una ecuación que relaciona la frecuencia angular ω y el número de onda k y tal ecuación lleva a dos soluciones para k , digamos k_{p_1} y k_{p_2} , correspondiente a las ondas P (tipo I y tipo II) las son complejas. El efecto de atenuación se debe a la parte imaginaria de las soluciones k_{p_1} y k_{p_2} , i.e., si

$$k_{p_i} = \Re(k_{p_i}) + i\Im(k_{p_i}),$$

donde $\Re(z)$ y $\Im(z)$ son la parte real e imaginaria de z , respectivamente.

Sustituyendo las soluciones kp_i en la ecuación (3.49), se obtiene una expresión equivalente

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_{10} \\ w_{10} \end{bmatrix} e^{i(k_{p_i}x - \omega t)} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ w_{10} \end{bmatrix} e^{i((\Re(k_{p_i}) + i\Im(k_{p_i}))x - \omega t)} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ w_{10} \end{bmatrix} e^{i(\Re(k_{p_i})x - \omega t)} e^{-\Im(k_{p_i})x}$$

Como la onda se propaga en la dirección x , la atenuación se presenta cuando la onda se aleja de la fuente en la dirección x , i.e., en tanto más se aleje la onda de la fuente, mayor es la atenuación sobre su amplitud. El factor de atenuación es $e^{-\Im(k_{p_i})x}$, este valor es el factor de amplitud de la onda. En tanto que la velocidad de la onda compresional es

$$v_{p_i} = \frac{\omega}{\Re(k_{p_i})}.$$

Un análisis similar se puede hacer para la onda de corte.

5.2. Rigidez de las ecuaciones de Biot

Carcione & Quiroga-Goode (1995) muestran que las ecuaciones de Biot poseen soluciones rígidas y fueron los primeros en simular el modo estático o difusivo de la onda P -lenta de Biot en bajas frecuencias y compararlo con la solución analítica. Por simplicidad y claridad, los autores consideran un modelo que sólo incluye las ondas compresionales para su análisis, es decir, el caso poroacústico. Aunque la onda de cortante es importante, dado que hay modos de cortante que se propagan de forma lenta cuando el llenado del poro es sólido, las ecuaciones poroacústicas son representativas de la física del medio poroso (Carcione & Seriani, 2001). La formulación velocidad-presión (el negativo del esfuerzo promedio de σ_{ii} se considera como la presión de confinamiento) 2D, se puede escribir en forma compacta $\dot{v} = Ev$, donde v es el campo vectorial y E es la matriz de propagación.

Se supone que el material posee propiedades constantes y que una onda plana se propaga por el medio, con el objetivo de analizar los valores propios en el dominio de la frecuencia. Este dominio se considera entre los números de onda $k = 0$ y la frecuencia de Nyquist $k = \pi/\Delta x$, donde Δx es el espaciamiento en el dominio discreto en el análisis de Fourier. Bajo estas suposiciones se obtiene lo siguiente:

- Los valores propios vienen en pares conjugados complejos.
- Si la viscosidad del fluido es cero y $k = \pi/\Delta x$, ambos valores propios son imaginarios puros. Esto describe modos de propagación sin disipación.
- Para un fluido viscoso, todos los valores propios poseen parte real negativa y por tanto las ondas son atenuadas, en particular la onda P -lenta, como se mostró en la sección anterior.
- El valor propio más grande de la matriz de propagación corresponde a la onda P -lenta, cuando $k = 0$:

$$\lambda = -\frac{\eta}{\kappa} \left(\frac{\rho}{r^2} \right)$$

La presencia de este valor propio con norma grande junto a valores propios con normas pequeños indica que el problema es rígido. Además, para que el medio sea físicamente estable debe satisfacer $r^2 > 0$, y si esto no se cumple entonces existe al menos un modo que crece exponencialmente.

Cuando se calcula la solución numérica de un problema cuya solución es rígida, se debe usar un tamaño de paso pequeño para evitar que variaciones numéricas pequeñas produzcan errores que rápidamente se acumulen.

5.3. Condición de estabilidad física

El cálculo completo de la condición de estabilidad física para las ecuaciones poroelásticas en baja frecuencia (poros libres de fronteras viscosas) lo realizó por primera vez Masson et al. (2006). También presentaron una condición necesaria para la estabilidad física y esta condición exige que al menos un término de aceleración inercial este presente en la Ley de Darcy. Esta condición se enunció como:

$$(1 + \Phi)F - \frac{\rho_f}{\rho} > 0, \quad \Phi = \frac{\omega_J}{2a}, \quad F = \frac{T}{\phi}. \quad (3.60)$$

En esta ecuación a , Φ y ω_J corresponden a la notación del artículo recién citado y F es el factor de formación eléctrico. Comprado con el caso resuelto por Carcione & Quiroga-Goode (1995) y Wenzlau & Müller (2009) la condición (3.60) equivale a $T/\phi - \rho_f/\rho > 0$ (ignorando Φ) y esta ecuación se reduce a $m\rho - \rho^2 = r^2 > 0$. Generalmente, esta condición se cumple en la mayoría de las rocas.

Métodos Numéricos

*It is the mark of an instructed mind
to rest assured with that degree of precision
that the nature of the subject admits,
and not to seek exactness
when only an approximation
of the truth is possible.*

Aristotle

Los métodos numéricos son una gran herramienta para estudiar problemas donde no es posible hallar una solución analítica pero que se requiere de una solución aproximada. En los últimos años se ha prestado especial interés al análisis numérico en general, por las bondades y resultados asombrosos que se obtienen. Aunque existe una gran variedad de métodos numéricos, este trabajo usa una variante de la herramienta denominada diferencias finitas. Esta herramienta es posiblemente la más usada por su versatilidad y los buenos resultados en problemas clásicos. En concreto, este trabajo desarrollará e implementará el método de *diferencias finitas implícitas óptimas*, propuesto por Liu (2014). Esta clase de diferencias finitas han mostrado ser una técnica poderosa, sencilla y, además, consume pocos recursos computacionales.

En este capítulo se explica a detalle las técnicas numéricas que se usan en los capítulos siguientes para hacer simulación numérica. En la primera sección se plantea la noción de diferencias finitas implícitas. En la subsección 1 se inicia con un ejemplo que ilustra la idea, en un caso concreto, de diferencias finitas implícitas en la variable espacial. En la subsección 2 se describe, en general, el método de diferencias finitas implícitas (ISFD) y en la subsección 3 el de diferencias finitas implícitas óptimas (OISFD). Ambas técnicas se aplican sobre mallas alternadas. Al final de cada subsección se muestra un ejemplo donde se implementa el esquema presentado. La sección 2 muestra un ejemplo donde se verifica la precisión de cada método.

1. Diferencias finitas implícitas

Existe una gran variedad de métodos de diferencias finitas. La diversidad y sencillez es el principal atractivo de estos métodos (Leveque, 2007). Los métodos de diferencias pueden ser *explícitos* o *implícitos*. Los más famosos son los métodos explícitos por tener un bajo consumo de recursos computacionales a diferencia de los implícitos que suelen ser más costosos.

Los esquemas implícitos están asociados con la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales, lo cual representa un consumo extra de recursos.

Un ejemplo clásico de fórmula de diferencias finitas que corresponde a un método explícito, es el de diferencias centrales:

$$\delta_x f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (4.1)$$

donde f es una función real de variable real, x es un punto del dominio de f y Δx es un *incremento (tamaño de paso)*. Algunas veces se refieren a esta fórmula como *operador de diferencias finitas centrales* de primer orden. Si f es derivable en x , entonces $\delta_x f(x) \rightarrow f'(x)$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Una fórmula clásica de diferencias finitas que corresponde a un esquema implícito, para aproximar una derivada parcial, es el de Crank-Nicolson:

$$\hat{\delta}_x f(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x + \Delta x, t + \Delta t) - f(x - \Delta x, t + \Delta t)}{2\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \right], \quad (4.2)$$

donde f es una función real de dos variables, (x, t) es un punto en el dominio de f y $\Delta x, \Delta t$ son incrementos (tamaños de paso) espacial y temporal, respectivamente. Si f es derivable en (x, t) , entonces $\hat{\delta}_x f(x, t) \rightarrow \partial f(x, t)/\partial x$ cuando $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$.

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) serán de utilidad en las secciones siguientes. Aunque estos ejemplos ilustran perfectamente a los métodos explícitos e implícitos hay una diferencia que es importante remarcar justo ahora. Es frecuente que los métodos implícitos (como en nuestro ejemplo) estén relacionados con los problemas donde hay una segunda variable (por lo general, la variable temporal), sin embargo, en este trabajo consideraremos implícito en la variable temporal y en la variable espacial.

Para obtener los coeficientes de los operadores de diferencias finitas implícitas (en mallas alternadas), se sigue de cerca los artículos de Liu & Sen (2009a), Liu & Sen (2009b) y Liu (2014). Además, se incluyen todos los detalles de los cálculos del pesos, esto complementa el trabajo que los autores presentaron.

1.1. Diferencias finitas implícitas para la segunda derivada

En esta sección, primero se muestra cómo se obtiene un operador de diferencias finitas para la segunda derivada (de segundo orden). La discusión de este ejemplo permite ver de dónde proviene la motivación en la selección del operador de diferencias finitas implícitas de cualquier orden. A modo de ejemplo, en esta sección se presentan técnicas donde se determinan los coeficientes del operador y serán ligeramente modificadas cuando se usen en las siguientes secciones.

Se define el operador de diferencias finitas centrales de segundo orden de una función f , en el punto x , como

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} f = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}, \quad (4.3)$$

donde $h \approx 0$. No es difícil demostrar que si la función f es derivable entonces se sigue que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\delta x^2} f. \quad (4.4)$$

Si se desea hacer un análisis del operador de diferencias (4.3), se usa el *análisis clásico de von Neumann* (Leveque, 2007) o *análisis de Fourier* (o *teoría de la onda plana*, y en las secciones siguientes se mostrará lo poderosa que es esta herramienta). En concreto, es posible suponer que la función f tiene la forma siguiente:

$$f(x) = f_0 e^{ikx}, \quad (4.5)$$

donde f_0 es un valor constante, $i = \sqrt{-1}$ número imaginario y k representa el número de onda.

Sustituyendo la ecuación (4.5) en la ecuación (4.3), y con la ayuda de las identidades $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$, $\cos(2\theta) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\theta)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta x^2} f &= \frac{f_0 e^{ik(x+h)} - 2f_0 e^{ikx} + f_0 e^{ik(x-h)}}{h^2} = f_0 e^{ikx} \left(\frac{e^{ikh} + e^{-ikh} - 2}{h^2} \right) = f \frac{2 \cos(kh) - 2}{h^2} \\ &= \frac{-4 \operatorname{sen}^2(kh/2)}{h^2} f. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Derivando directamente la función f ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 f. \quad (4.7)$$

Como $\delta^2 f / \delta x^2$ aproxima a $\partial^2 f / \partial x^2$, y de acuerdo a (4.4), bajo el enfoque de esquemas explícitos se debe cumplir que $-4 \operatorname{sen}^2(kh) / h^2 \rightarrow -k^2$ cuando $h \rightarrow 0$. Esto indica que la aproximación es tan buena como lo es la aproximación de la función coeficiente de f , del lado derecho de (4.6), a la función constante $-k^2$, en algún intervalo de h . Si el objetivo es mejorar la aproximación, una buena idea es agregar un término de diferencias finitas de mayor orden, de precisión, al operador que se utiliza en la aproximación de $\partial^2 f / \partial x^2$. Por tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f - bh^2 \frac{\delta^4}{\delta x^4} p,$$

donde $\delta^4 p / \delta x^4 = \delta^2(\partial^2 p / \partial x^2) / \delta x^2$. El problema se reduce a seleccionar una constante \hat{b} tal que la aproximación sea lo “mejor” posible.

La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \hat{b} h^2 \frac{\delta^4}{\delta x^4} f &\approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \hat{b} h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) &\approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f. \end{aligned}$$

Simplificando a notación de operadores,

$$\left(1 + \hat{b} h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f. \quad (4.8)$$

Al igual que al operador (4.3), es posible realizar el análisis von Neumann a la ecuación (4.8). Así, se puede suponer f como en (4.5) y combinado con las ecuaciones (4.6) y (4.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(1 + bh^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f, \\ -k^2 \left(1 + \hat{b}h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2}\right) f &\approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f, \\ -k^2 \left(1 + \hat{b}h^2 \left(\frac{-4 \operatorname{sen}^2(kh/2)}{h^2}\right)\right) f &\approx \left(\frac{-4 \operatorname{sen}^2(kh/2)}{h^2}\right) f, \\ -(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(kh/2))k^2 f &= \left(\frac{-4 \operatorname{sen}^2(kh/2)}{h^2}\right) f. \end{aligned}$$

Como es válido para cualquier f de la forma (4.5), entonces

$$(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(kh/2))k^2 = \left(\frac{4 \operatorname{sen}^2(kh/2)}{h^2}\right).$$

Haciendo el cambio de variable $\beta = kh/2$, se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2(\beta) \approx \beta^2(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)). \quad (4.9)$$

O de forma equivalente,

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)}{1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)} \approx \beta^2. \quad (4.10)$$

Es importante enfatizar que esta aproximación depende de la selección de \hat{b} . Se puede determinar algunos valores de \hat{b} , usando diferentes enfoques. Aquí se mostrarán, a modo de ejemplo, tres enfoques diferentes.

La primera opción, la forma directa, es obtener un valor de \hat{b} , es usar el desarrollo en series de Taylor. Sustituyendo la expansión en series de Taylor para la función *seno* en ambos lados de la ecuación (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \beta^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)^2 &\approx \beta^2 \left[1 - 4\hat{b} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \beta^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)^2\right], \\ \beta^2 + \frac{\beta^6}{36} + \dots - \frac{\beta^4}{3} + \dots &\approx \beta^2 \left(1 - 4\hat{b} \left[\beta^2 + \frac{\beta^6}{36} + \dots - \frac{\beta^4}{3} + \dots\right]\right), \\ &\approx \beta^2 - 4b\beta^4 - \frac{4\hat{b}\beta^8}{36} - \dots + \frac{4b\beta^6}{3} + \dots \end{aligned}$$

Comparando, término a término, los coeficientes de las series en ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene $\hat{b} = 1/12$.

Una segunda forma de determinar un valor de \hat{b} , es usar la relación del número de onda y la frecuencia de Nyquist (frecuencia máxima), es decir, $kh = \pi$. Por tanto, $\beta = kh/2 = \pi/2$ y sustituyendo este valor en la ecuación (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 &\approx \frac{\pi^2}{4}(1 - 4\hat{b}), \\ \hat{b} &\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \approx \frac{1}{6.726}. \end{aligned}$$

Una tercera forma de obtener \hat{b} , es integrar la ecuación (4.9) sobre el intervalo $[0, \pi/2]$. Por tanto,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(\beta)d\beta = \int_0^{\pi/2} \beta^2(1 - 4\hat{b}\text{sen}^2(\beta))d\beta. \quad (4.11)$$

Del cálculo de una variable,

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(\beta)d\beta &= \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\text{sen}(2\beta) + C. \\ \int \beta \text{sen}^2(\beta)d\beta &= \frac{1}{6}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta^2 \text{sen}(2\beta) - \frac{1}{4}\beta \cos(2\beta) + \frac{1}{8}\text{sen}(2\beta) + C. \end{aligned}$$

Si estas integrales se sustituyen en la ecuación (4.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(\beta)d\beta &= \int_0^{\pi/2} \beta^2 d\beta - 4\hat{b} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(\beta)d\beta \\ &= \left[\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\text{sen}(2\beta) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left[\frac{\beta^3}{3} \right]_0^{\pi/2} - 4\hat{b} \left[\frac{1}{6}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta^2 \text{sen}(2\beta) - \frac{1}{4}\beta \cos(2\beta) + \frac{1}{8}\text{sen}(2\beta) \right]_0^{\pi/2}. \end{aligned}$$

Evaluando y simplificando la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi^3}{24} - 4\hat{b} \left[\frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \right], \\ 1 &= \frac{\pi^2}{6} - \hat{b} \left[\frac{\pi^2}{3} + 2 \right], \\ 6 &= \pi^2 - \hat{b} [2\pi^2 + 12]. \end{aligned}$$

Finalmente, basta despejar \hat{b} en la ecuación anterior para obtener el tercer valor.

$$\hat{b} = \frac{\pi^2 - 6}{2\pi^2 + 12} \approx \frac{1}{8.202}.$$

En conclusión, tres diferentes aproximaciones llevan a tres diferentes valores de \hat{b} . Es posible determinar mas valores, diferentes de cero, de \hat{b} con técnicas que aseguren que el

valor encontrado de \hat{b} es un valor cercano al “óptimo”. Por ejemplo, Claerbout (1985) sugiere que un valor que aproxima en un mejor rango es $\hat{b} = 1/6$.

¿Cómo determinar cuál de estos valores de \hat{b} es la mejor selección? Una forma de responder esta pregunta es notar que la selección del valor de \hat{b} está sujeto a (4.10), y por tanto, si se desea analizar la precisión de cada fórmula entonces se debe comparar las funciones,

$$g(\beta) = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta)}{1 - 4\hat{b}\text{sen}^2(\beta)}}, \quad (4.12)$$

y $id(\beta) = \beta$.

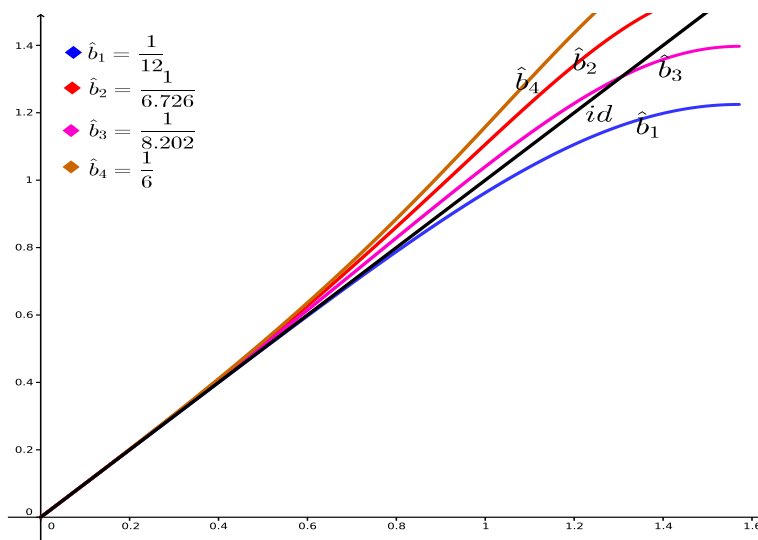


Figura 4.1: La figura muestra la comparación de la gráfica de la función g , para diferentes valores de \hat{b} , y la gráfica de la función id .

En la figura 4.1, la gráfica sólo considera valores positivos de β y menores a $\pi/2$, esto debido a que la función g es par y se debe cumplir la condición $kh = \pi$ (frecuencia de Nyquist). Se puede observar que de los cuatro valores seleccionados de \hat{b} , la mejor aproximación a la función id se obtiene cuando β está entre 0 y 0.7 y $\hat{b} = 1/12$. Esto indica que la primera selección de \hat{b} , que se obtiene de la expansión en series de Taylor, permite alcanzar un alto orden de precisión en un rango pequeño de β .

Una pregunta que queda por responder es: ¿los esquemas de diferencias finitas, que corresponden a cada valor de \hat{b} , son explícitos o implícitos? Para responder esto, sea $q = \partial^2 f / \partial x^2$, entonces la ecuación (4.8) se transforma en:

$$q + \hat{b}h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2} q \approx \frac{\delta^2}{\delta x^2} f. \quad (4.13)$$

Aplicando la fórmula de diferencias (4.3), en el punto x , a cada uno de los términos de la ecuación (4.13) se obtiene:

$$\hat{b}q(x+h) + (1 - 2\hat{b})q(x) + \hat{b}q(x-h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Si $\hat{b} = 0$, el esquema analizado es explícito, pero si $\hat{b} \neq 0$ el esquema es implícito. En particular, los tres valores de \hat{b} obtenidos con las tres diferentes técnicas corresponden a esquemas implícitos.

1.2. Diferencias finitas implícitas en una malla alternada

Para determinar un operador de diferencias finitas que aproxime la derivada en una malla alternada, se adoptará la idea que se explicó en el ejemplo de la sección anterior. La ecuación (4.3) permite calcular una buena aproximación de la segunda derivada, pero se puede obtener una mejor aproximación usando la ecuación (4.8) para algún un valor correcto de \hat{b} .

Motivado por esta idea, se propone la siguiente fórmula en operadores de diferencias finitas que mejorará la aproximación de la primera derivada:

$$\left(1 + \hat{b}h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x} f \approx \frac{\delta}{\delta x} f, \quad (4.14)$$

donde $\delta^2 p / \delta x^2$ se define como en (4.3) y

$$\frac{\delta}{\delta x} f = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f(x + nh - 0.5h) - f(x - nh + 0.5h)], \quad (4.15)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ pequeño, N un entero positivo y $C_{N,n}$, \hat{b} coeficientes aún por determinar. Es importante enfatizar que está fórmula ya incluye los índices de una malla alternada. La longitud del operador (4.15) es $2N$, i.e., requiere de $2N$ puntos de evaluación. Los coeficientes $C_{N,n}$ dependen de la longitud del operador y por ello lleva el subíndice N , i.e., dos valores diferentes de N no necesariamente llevan a los mismos coeficientes.

Para determinar los valores de los coeficientes $C_{N,n}$, se usará la teoría clásica de la onda plana, justo como en el caso de la segunda derivada de la sección anterior. Sustituyendo (4.5), $\beta = kh/2$, y la ecuación (4.6) en (4.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(1 + \hat{b}h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x} f &\approx \frac{\delta}{\delta x} f, \\ ik \left(1 + \hat{b}h^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2}\right) f &\approx \frac{\delta}{\delta x} f, \\ ik \left(1 + \hat{b}h^2 \left(\frac{-4 \operatorname{sen}^2(kh/2)}{h^2}\right)\right) f &\approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f_0 e^{ik(x+nh-0.5h)} - f_0 e^{ik(x-nh+0.5h)}], \\ ik \left(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(kh/2)\right) f &\approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [e^{i(2n-1)hk/2} - e^{i(-2n+1)kh/2}] f_0 e^{ikx}, \\ ik \left(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)\right) f &\approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [e^{i(2n-1)\beta} - e^{i(-2n+1)\beta}] f, \\ ik \left(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)\right) f &\approx \left(\frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [e^{i(2n-1)\beta} - e^{i(-2n+1)\beta}]\right) f. \end{aligned}$$

Como se cumple para toda función f , definido como en (4.5), entonces

$$\left(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)\right) ik \approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [e^{i(2n-1)\beta} - e^{i(-2n+1)\beta}].$$

La ecuación anterior se puede simplificar usando la identidad de Euler, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \left(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)\right) ik &\approx \frac{2i}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((2n-1)\beta), \\ \left(1 - 4\hat{b} \operatorname{sen}^2(\beta)\right) \beta &\approx \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((2n-1)\beta), \\ \left(1 - 4\hat{b} \left(\frac{1 - \cos(2\beta)}{2}\right)\right) \beta &\approx \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((2n-1)\beta), \\ (1 - 2\hat{b} + 2\hat{b} \cos(2\beta)) \beta &\approx \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((2n-1)\beta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sustituyendo en (4.16) la expansión en series de Taylor de las funciones *coseno* y *seno*, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(1 - 2\hat{b} + 2\hat{b} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(2\beta)^{2j}}{(2j)!}\right)\right) \beta &\approx \sum_{n=1}^N C_{N,n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} ((2n-1)\beta)^{2j-1}}{(2j-1)!}\right), \\ \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2^{2j+1}}{(2j)!} \hat{b} \beta^{2j}\right)\right) \beta &\approx \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j-1} C_{N,n} \beta^{2j-1}\right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Comparando los primeros $N + 1$ coeficientes, término a término, de las dos series en la ecuación (4.17) respecto a potencias de β , se concluye que

$$\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j-1} C_{N,n} = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ \frac{(-1)^{j-1} 2^{2(j-1)+1}}{(2(j-1))!} \hat{b} & j = 2, 3, \dots, N+1, \end{cases} \quad (4.18)$$

Los valores desconocidos del sistema de ecuaciones, determinado por la ecuación (4.18), son precisamente los coeficientes $C_{N,n}$ y \hat{b} . La ecuación (4.18) se puede reescribir en forma más sencilla como:

$$\sum_{n=1}^N (2n-1) C_{N,n} + 0 * \hat{b} = 1, \quad j = 1 \quad (4.19)$$

$$\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j-1} C_{N,n} - \frac{(-1)^{j-1} 2^{2j-1}}{(2j-2)!} \hat{b} = 0 \quad j = 2, 3, \dots, N+1. \quad (4.20)$$

Multiplicando por $(-1)^{j-1}(2j-1)$ ambos lados de cada una de las ecuaciones en (4.20), se obtiene una forma compacta de estas ecuaciones. La forma matricial de las ecuaciones (4.19)-(4.20) está dada por:

$$\begin{bmatrix} 1^0 & 3^0 & \dots & (2N-1)^0 & 0 \\ 1^2 & 3^2 & \dots & (2N-1)^2 & -(2 \times 1 + 1)2^{2 \times 1 + 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1^{2N} & 3^{2N} & \dots & (2N-1)^{2N} & -(2 \times N + 1)2^{2 \times N + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1C_{N,1} \\ 3C_{N,2} \\ \vdots \\ (2N-1)C_{N,N} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Entonces, si se quiere determinar los valores de $C_{N,n}$ y de \hat{b} correspondientes a una fórmula central de $2N$ puntos, basta resolver el sistema (4.21). Estos coeficientes determinan, para cada N y x , el operador de diferencias finitas implícitas (4.14) sobre una malla alternada (u operador ISFD).

El error absoluto, del esquema implícito, se obtiene a partir de (4.17) y del hecho que $\beta = hk/2$,

$$\begin{aligned} e_j &= \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} (-1)^j \frac{2^{2j+1}}{(2j)!} \hat{b} \beta^{2j+1} \frac{2}{h} - \sum_{j=N+2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j-1} C_{N,n} \beta^{2j-1} \right) \frac{2}{h} \right| \\ &= \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} (-1)^j \frac{2^{2j+1}}{(2j)!} \hat{b} \beta^{2j+1} \frac{2}{h} - \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j+1} C_{N,n} \beta^{2j+1} \right) \frac{2}{h} \right| \\ &= \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \left((-1)^j \frac{2^{2j+1}}{(2j)!} \hat{b} - \left(\frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j+1} C_{N,n} \right) \right) \beta^{2j+1} \frac{2}{h} \right| \\ &= \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \left((-1)^j \frac{2^{2j+1}}{(2j)!} \hat{b} - \left(\frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \sum_{n=1}^N (2n-1)^{2j+1} C_{N,n} \right) \right) \frac{k^{2j+1} h^{2j+1} 2}{2^{2j+1} h} \right| \\ &= \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j+1}}{(2j)!} \left(2\hat{b} - \left(\frac{1}{(2j+1)} \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^{2j+1} C_{N,n}}{2^{2j}} \right) \right) h^{2j} \right|. \end{aligned}$$

En la expresión anterior, la menor potencia de h es $2j = 2(N+1) = 2N+2$, por tanto el esquema de diferencias finitas implícitas de $2N$ puntos es de orden de exactitud de $2N+2$.

La siguiente tabla muestra los coeficientes que se obtienen al resolver el sistema (4.21) considerando diferentes valores de N .

Una vez que se obtienen los pesos, el siguiente paso es analizar si los coeficientes generan buenas aproximaciones, i.e., analizar si la selección de \hat{b} y los coeficientes $C_{N,n}$ mejora la aproximación inicial se debe definir, a partir de (4.16), la siguiente función:

$$f_{ISFD}(\beta) = \frac{\sum_{n=1}^N \text{sen}[(2n-1)\beta]}{1 - 2\hat{b} + 2\hat{b} \cos(2\beta)} = \frac{\sum_{n=1}^N \text{sen}[(2n-1)\beta]}{1 - 4\hat{b} \sin^2(\beta)}, \quad (4.22)$$

y la función $id(\beta) = \beta$.

Tabla 4.1: Coeficientes del operador de diferencias finitas implícitas correspondientes a diferentes órdenes de precisión. La notación b_N indica que el valor depende de la selección de N .

Coeficiente	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
$C_{N,1}$	1	63/80	343/517	917/1562	1247/2327	368/737
$C_{N,2}$		17/240	241/2101	147/1031	123/761	177/1009
$C_{N,3}$			-61/40320	-47/15154	-190/42307	-53/9362
$C_{N,4}$				7/70013	42/166027	18/42379
$C_{N,5}$					-7/719265	-1/34013
$C_{N,6}$						1/858108
\hat{b}_N	1/24	9/80	25/168	49/288	81/440	121/624

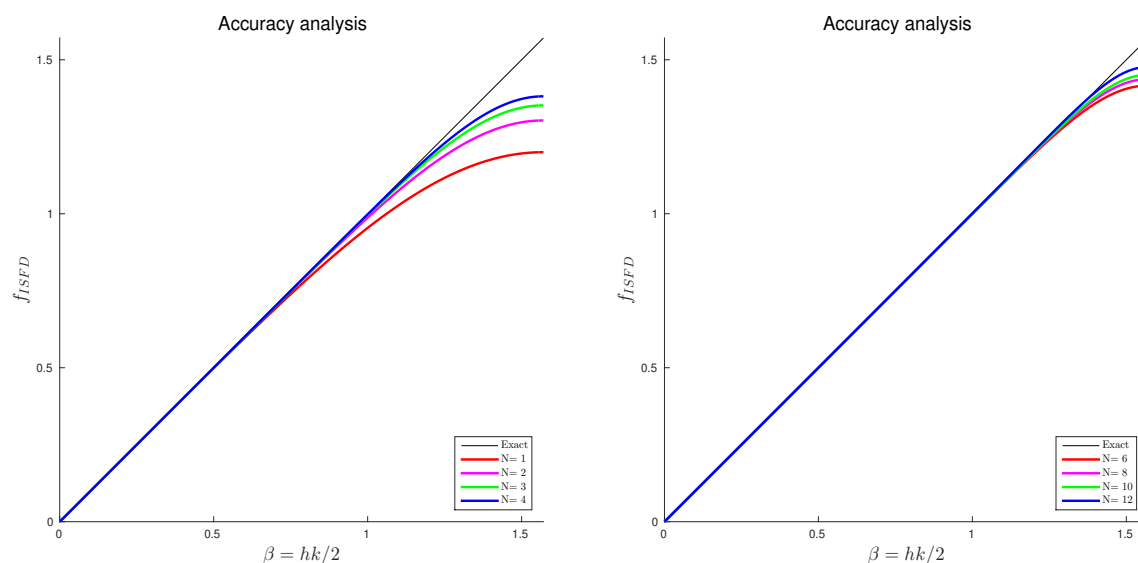


Figura 4.2: Gráfica de las funciones id (exacta) y f_{ISFD} con diferentes valores de N . La gráfica de la izquierda muestra las aproximaciones con valores pequeños de N , en tanto que en el lado derecho se muestran aproximaciones con N mayores. El caso $N = 1$, parece ser, por mucho, el que ofrece menor precisión.

Como se puede ver en la figura 4.2, la precisión del esquema implícito aumenta cuando aumenta la longitud del operador, i.e., cuando la cantidad de puntos donde se evalúa la fórmula de diferencias (4.15) aumenta. Esto tiene sentido, pues la el orden de exactitud también depende la longitud del operador. Es importante mencionar que tampoco es buena idea aumentar indefinidamente la longitud del operador porque esto trae ruido numérico a las aproximaciones (Suo-Liang & Liu, 2013).

Sólo falta explicar cómo se usa el esquema de diferencias finitas implícitas para aproximar

la derivada de una función f . Sea $q = \partial f / \partial x$, usando esta identidad y la ecuación (4.14), se obtiene

$$(1 + bh^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2})q \approx \frac{\delta}{\delta x} f.$$

Se sustituyen las ecuaciones (4.3) y (4.15) en la ecuación anterior, y se obtiene:

$$\hat{b}q(x+h) + (1 - 2\hat{b})q(x) + \hat{b}q(x-h) \approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f(x+nh-0.5h) - f(x-nh+0.5h)].$$

Esta última ecuación es equivalente a

$$q(x+h) + \hat{a}q(x) + q(x-h) \approx r(x), \quad (4.23)$$

donde $\hat{a} = 1/\hat{b} - 2$ y

$$r(x) = \frac{1}{\hat{b}h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f(x+nh-0.5h) - f(x-nh+0.5h)].$$

Es importante enfatizar que la fórmula (4.23) requiere de al menos $2N$ puntos de evaluación. Esta observación es importante al momento de aplicar la fórmula cerca de los extremos de la malla numérica.

Sean $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^L$ y $\{x_j\}_{j=0}^{L+1}$ dos colecciones de puntos y supóngase conocida colección $\{f_{j+1/2}\}_{j=0}^L = \{f(x_{j+1/2})\}_{j=0}^L$, en tanto la colección $\{q_j\}_{j=0}^{L+1} = \{f'(x_j)\}_{j=0}^{L+1}$ es aún desconocida. Sea N entero positivo fijo, y debido a que la fórmula de diferencias finitas implícitas requiere de $2N$ puntos, la fórmula (4.23) será aplicable sólo a los puntos $x_N, x_{N+1}, \dots, x_{L-N}, x_{L-N+1}$, entonces

$$q_{j+1} + \hat{a}_N q_j + q_{j-1} = r_j, \quad (j = N, N+1, \dots, L-N+1), \quad (4.24)$$

donde $\hat{a}_N = \frac{1}{\hat{b}_N} - 2$ y

$$r_j = \frac{1}{\hat{b}_N h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f_{j+n-1/2} - f_{j-n+1/2}],$$

y $C_{N,n}, \hat{b}_N$ son los coeficientes de la fórmula de orden de exactitud $2N+2$ dados en la Tabla 4.1.

La colección restante $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_{L-N+2}, \dots, x_{L+1}$, no admite que se aplique la fórmula central de $2N$ puntos, a menos que la colección original $\{f_{j+1/2}\}_{j=0}^L$, sea periódica y por tanto, sólo en ese caso es posible aplicar la fórmula de diferencias (4.23). Si la colección original no es periódica, la colección de puntos $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_{L-N+2}, \dots, x_{L+1}$ sólo admite fórmulas de diferencias finitas centrales de $2N_0$ puntos ($N_0 < N$). Este valor N_0 se ajustará de acuerdo a la cantidad de puntos disponibles, i.e., mientras más cercanos estén los puntos a un extremo más pequeño será N_0 . En concreto, las fórmulas de diferencias finitas centrales

que se aplican a cada uno de los puntos de la colección $\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ (o a la colección $\{x_L, x_{L-1}, \dots, x_{L-N+2}\}$) son de orden de exactitud $4, 6, \dots, 2N$, respectivamente.

$$q_{j+1} + \hat{a}_j q_j + q_{j-1} = r_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N-1), \quad (4.25)$$

donde $\hat{a}_j = \frac{1}{\hat{b}_j} - 2$ y

$$r_j = \frac{1}{\hat{b}_j h} \sum_{n=1}^j C_{j,n} [f_{j+n-1/2} - f_{j-n+1/2}],$$

y

$$q_{j+1} + \hat{a}_{L+1-j} q_j + q_{j-1} = r_j, \quad (j = L-N+2, L-N+3, \dots, L), \quad (4.26)$$

donde $\hat{a}_{L+1-j} = \frac{1}{\hat{b}_{L+1-j}} - 2$ y

$$r_j = \frac{1}{\hat{b}_{L+1-j} h} \sum_{n=1}^{L+1-j} C_{L+1-j,n} [f_{j+n-1/2} - f_{j-n+1/2}],$$

y $C_{j,n}$, $C_{L+1-j,n}$, \hat{b}_j y \hat{b}_{L+1-j} son coeficientes de la fórmula de diferencias finitas implícitas de orden de exactitud $2j+2$ (Tabla 4.1).

Finalmente, cuando se determina una ecuación para q_0 y q_{L+1} (correspondiente a los puntos x_0 y x_{L+1}) se debe suponer que en ambos casos se tiene una variación lineal, i.e.,

$$\hat{a}_0 q_0 + q_1 = r_0, \quad q_L + \hat{a}_0 q_{L+1} = r_{L+1}, \quad (4.27)$$

donde $\hat{a}_0 = \hat{a}_1 + 1$ y

$$r_0 = \frac{C_{1,1}}{\hat{b}_1 h} (f_{3/2} - f_{1/2}), \quad r_{L+1} = \frac{C_{1,1}}{\hat{b}_1 h} (f_{L+1/2} - f_{L-1/2}),$$

y $C_{1,1}$, \hat{b}_1 son coeficientes de la fórmula de diferencias finitas implícitas de orden de exactitud 4.

Las ecuaciones (4.24)-(4.27) se pueden resumir como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 q_0 + q_1 &= r_0, & r_0 &= d_{1,1} (f_{3/2} - f_{1/2}), \\ q_{j+1} + \hat{a}_{N(j)} q_j + q_{j-1} &= r_j, & r_j &= \sum_{n=1}^{N(j)} D_{N(j),n} [f_{j+n-1/2} - f_{j-n+1/2}] \quad j = 1, 2, \dots, L \\ q_L + \hat{a}_0 q_{L+1} &= r_{L+1}, & r_{L+1} &= d_{1,1} (f_{L+1/2} - f_{L-1/2}), \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde $D_{s,n} = C_{s,n}/(\hat{b}_s h)$, $\hat{a}_s = 1/\hat{b}_s - 2$ y $N(j)$ está definido sobre los índices j como:

$$N(j) = \begin{cases} j & j = 1, \dots, N-1, \\ N & j = N, \dots, L-N+1, \\ L+1-j & j = L-N+2, \dots, L-1. \end{cases} \quad (4.29)$$

4.1. Así, los coeficientes que se requieren son:

$$D_{s,n} = \frac{C_{s,n}}{\hat{b}_s h}, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\hat{a}_s = \frac{1}{\hat{b}_s} - 2, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5$$

Por tanto, los elementos de la diagonal de la matriz del sistema (4.30) son $\hat{a}_0 = 23$, $\hat{a}_1 = 22$, $\hat{a}_2 = 6.8889$, $\hat{a}_3 = 4.7200$, $\hat{a}_4 = 3.8776$ y $\hat{a}_5 = 3.4321$.

Los cálculos para determinar los valores de los r_j se hacen usando los valores $D_{s,n}$ y sus fórmulas correspondientes en las ecuaciones (4.24)-(4.27).

Resolviendo el sistema resultante (4.30) con el algoritmo de Thomas, se obtiene la derivada aproximada de la función f .

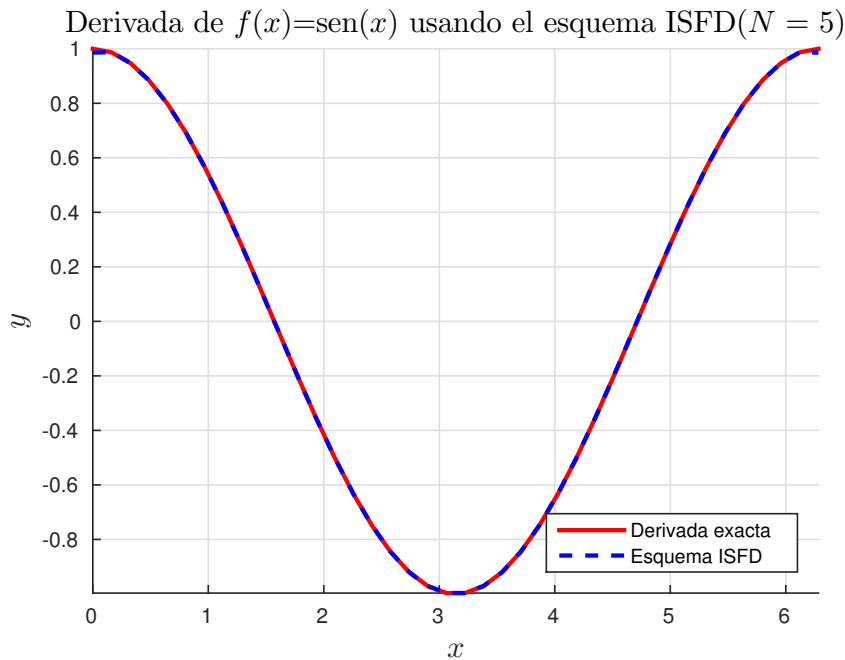


Figura 4.4: Gráfica de la función derivada $f'(x) = \cos(x)$ y la gráfica de la derivada aproximada usando el esquema de diferencias finitas implícitas en un malla alternada con orden de exactitud 12 y $L = 40$.

Como la derivada exacta de la función f es $f'(x) = \cos(x)$, se puede realizar la comparación entre f' y la aproximación numérica, ver la figura 4.4. Una forma de comparar f' y la aproximación es mediante los errores absolutos. La figura 4.5 muestra que los errores mayores están en los valores extremos. Estos resultados eran de esperarse ya que la formulación del esquema ISFD asume una hipótesis de variación lineal en los extremos.

Una de las grandes ventajas del esquema ISFD es la posibilidad de precalcular partes de del sistema (4.30). Debido a esto, cuando se requieren calcular repetidamente un conjunto

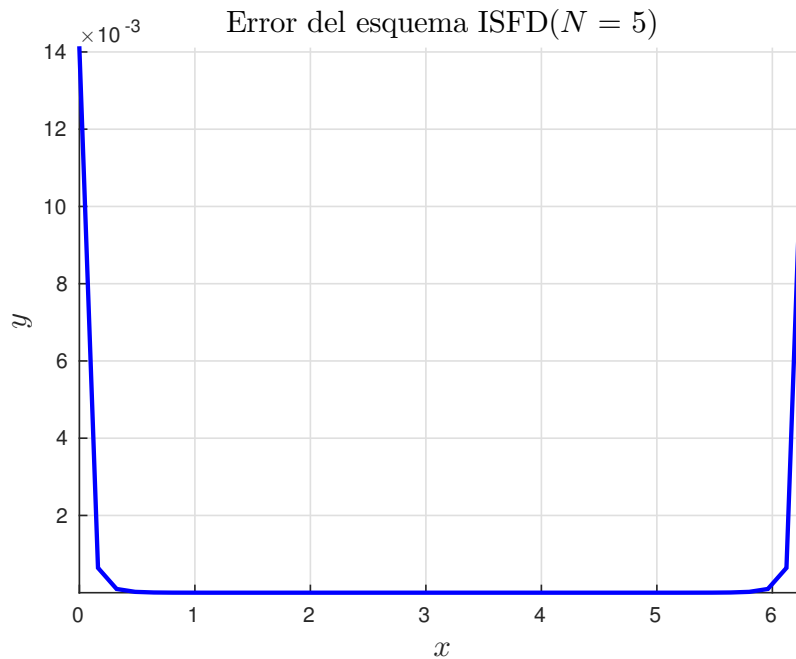


Figura 4.5: Gráfica de los errores absolutos entre la derivada f' y la derivada aproximada sobre los nodos $\{x_j\}_{j=0}^L$ y $L = 40$.

de derivadas, basta con calcular una sola vez la matriz en el sistema (4.30) y calcular el lado derecho para resolver el sistema en cada iteración. Aunque en cada iteración se resuelve un sistema lineal, este es tridiagonal y por tanto hallar la solución del sistema sólo requiere una cantidad razonable de recursos.

1.3. Diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alternada

En la sección anterior se discutió sobre un esquema para calcular derivadas de cualquier orden y de cualquier precisión con la ventaja de ser un esquema implícito, esto es, no requiere de una condición de estabilidad sobre el tamaño de paso en la variable espacial. Sin embargo si se desea determinar una derivada con orden de precisión de $2N + 2$ se requieren de $2N$ puntos de evaluación en el operador de diferencias finitas. Esto significa muchas evaluaciones cuando se calcula el lado derecho en (4.30) y hace que los cálculos se numéricamente costosos. En esta sección se seguirá la idea planteada en Liu (2014) para determinar un esquema de diferencias finitas implícitas en una malla alternada (OISFD, *optimal implicit staggered grid finite difference*). El esquema OISFD, en comparación con el esquema ISFD, tiene la ventaja de acotar el error máximo global $\delta > 0$ y usa un menor número de evaluaciones en el operador de diferencias finitas evitando dispersión numérica y/o errores de redondeo.

Los coeficientes óptimos del operador del esquema OISFD se determinan como en Liu (2014), pero se agregan todos los detalles que en este trabajo no aparecen. Lo primero es proponer la fórmula de diferencias finitas que servirá en la construcción del esquema. De

acuerdo al análisis de la sección anterior se sugiere la siguiente fórmula:

$$q(x-h) + eq(x) + q(x+h) \approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f(x+nh-0.5h) - f(x-nh+0.5h)], \quad (4.31)$$

donde $q = \partial p / \partial x$ y e , $C_{N,n}$ son constantes aún por determinar.

Las ecuaciones (4.23) y (4.31) son diferentes pues los valores \hat{a} y e que ahí aparecen significados diferentes.

Se desea determinar los valores de los coeficientes, y por tanto, se realizará un análisis de la onda plana a la ecuación (4.31). Sustituyendo (4.5) y $\gamma = kh$, entonces

$$\begin{aligned} f_0 i k e^{ik(x-h)} + e f_0 i k e^{ikx} + f_0 i k e^{ik(x+h)} &\approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f_0 e^{ik(x+nh-0.5h)} - f_0 e^{ik(x-nh+0.5h)}], \\ f_0 i k e^{ikx} (e^{-ikh} + e + e^{ikh}) &\approx \frac{f_0 e^{ikx}}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [e^{i(n-0.5)kh} - e^{i(-n+0.5)kh}], \\ i k h (e + 2 \cos(kh)) &\approx \sum_{n=1}^N C_{N,n} [2i \operatorname{sen}((n-0.5)kh)], \\ (e + 2 \cos(\gamma)) \gamma &\approx 2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((n-0.5)\gamma), \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde γ está entre 0 y π , debido a que kh es igual a π (frecuencia de Nyquist).

Además, se desea que la ecuación (4.32) sea válida para valores de γ cercanos a cero, i.e., números de onda cercanos a cero (Zhou & Zhang, 2011), entonces se debe cumplir la siguiente restricción:

$$\frac{2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((n-0.5)\gamma)}{e + 2 \cos(\gamma)} \rightarrow \gamma, \quad \text{cuando } \gamma \rightarrow 0, \quad (4.33)$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((n-0.5)\gamma)}{\gamma} \rightarrow e + 2 \cos(\gamma), \quad \text{cuando } \gamma \rightarrow 0,$$

Es decir, es necesario que se cumpla el límite siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \operatorname{sen}((n-0.5)\gamma)}{\gamma} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} (e + 2 \cos(\gamma)), \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} 2 \sum_{n=1}^N \left((n-0.5) C_{N,n} \frac{\operatorname{sen}((n-0.5)\gamma)}{(n-0.5)\gamma} \right) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} (e + 2 \cos(\gamma)), \\ 2 \sum_{n=1}^N (n-0.5) C_{N,n} &= e + 2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e = \sum_{n=1}^N (2n-1)C_{N,n} - 2. \quad (4.34)$$

La ecuación (4.34) se obtuvo usando la identidad del *seno cardinal*:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Es posible eliminar e de la ecuación (4.32) y dejar una ecuación que sólo depende de los coeficientes $C_{N,n}$. Sustituyendo la ecuación (4.34) en la ecuación (4.32) y después de simplificar se llega a

$$\sum_{n=1}^N C_{N,n} [\text{sen}((n-0.5)\gamma) - (n-0.5)]\gamma \approx (\cos(\gamma) - 1)\gamma.$$

Sean $\varphi_n(\gamma) = \text{sen}((n-0.5)\gamma) - (n-0.5)$ y $\hat{f}(\gamma) = (\cos(\gamma) - 1)\gamma$, entonces

$$\sum_{n=1}^N C_{N,n} \varphi_n(\gamma) \approx \hat{f}(\gamma).$$

Para obtener los coeficientes del esquema de diferencias finitas implícitas óptimas, se debe minimizar el error cuadrático sobre el intervalo $[0, l]$, donde $0 < l < \pi$ y la función a minimizar es

$$E_C(C_{N,1}, \dots, C_{N,N}) = \int_0^l \left(\sum_{n=1}^N C_{N,n} \varphi_n(\gamma) - \hat{f}(\gamma) \right)^2 d\gamma. \quad (4.35)$$

Las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ son linealmente independientes, por tanto, no se puede prescindir de uno de los coeficientes $C_{N,n}$, i.e, se deben determinar los N coeficientes.

Como se cumple:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^N C_{N,n} \varphi_n(\gamma) - \hat{f}(\gamma) \right)^2 &= \sum_{n=1}^N C_{N,n}^2 \varphi_n^2(\gamma) + \hat{f}^2(\gamma) - 2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \varphi_n(\gamma) \hat{f}(\gamma) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq j < n \leq N} C_{N,j} C_{N,n} \varphi_j(\gamma) \varphi_n(\gamma). \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (4.35) se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} E_C(C_{N,1}, \dots, C_{N,N}) &= \sum_{n=1}^N C_{N,n}^2 \int_0^l \varphi_n^2(\gamma) d\gamma + \int_0^l \hat{f}^2(\gamma) d\gamma - 2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \int_0^l \varphi_n(\gamma) \hat{f}(\gamma) d\gamma \\ &+ 2 \sum_{1 \leq j < n \leq N} C_{N,j} C_{N,n} \int_0^l \varphi_j(\gamma) \varphi_n(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Los puntos críticos de la función E_C se obtienen cuando $\partial E_C / \partial C_{N,s} = 0$, donde $s = 1, \dots, N$.

Es decir, cuando

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial E_C}{\partial C_{M,s}} &= 2C_{N,s} \int_0^l \varphi_s^2(\gamma) d\gamma - 2 \int_0^l \varphi_s(\gamma) \hat{f}(\gamma) d\gamma + 2 \sum_{j < s} C_{N,j} \int_0^l \varphi_j(\gamma) \varphi_s(\gamma) d\gamma \\ &= 2 \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \int_0^l \varphi_j(\gamma) \varphi_s(\gamma) d\gamma - \int_0^l \varphi_s(\gamma) \hat{f}(\gamma) d\gamma \right), \quad s = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Minimizar la función (4.35) equivale a resolver el sistema (Liu, 2014)

$$\sum_{j=1}^N C_{N,j} \int_0^l \varphi_j(\gamma) \varphi_s(\gamma) d\gamma = \int_0^l \varphi_s(\gamma) \hat{f}(\gamma) d\gamma, \quad s = 1, \dots, N. \quad (4.37)$$

Los coeficientes que se determinan a partir de (4.37), dependen de la selección de l . Así, determinar una l óptima, implica analizar la precisión del esquema que proviene del conjunto de coeficientes. Si la precisión no es la deseada se cambia el valor de l y se calculan nuevos coeficientes. Para realizar el análisis de la precisión del operador OISFD, Liu (2014) introduce el error máximo $\varepsilon_{\text{máx}}$ y la raíz cuadrada del error cuadrático medio ε_{rms} (*rms*, root mean squared error), que se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l \varepsilon^2(\gamma) d\gamma}, \\ \varepsilon_{\text{máx}} &= \max_{\gamma \in [0, l]} |\varepsilon(\gamma)|, \end{aligned}$$

donde

$$\varepsilon(\gamma) = \frac{2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \text{sen}((n-0.5)\gamma)}{(e + 2 \cos(\gamma))\gamma} - 1.$$

Si $\varepsilon(\gamma) \approx 0$, entonces se obtiene una buena aproximación dado que se cumple la ecuación (4.32). Analizando la función f_{OISFD} se puede ver gráficamente que se obtienen buenas aproximaciones, y esta función se define a partir de la ecuación (4.32):

$$f_{OISFD}(\gamma) = \frac{2 \sum_{n=1}^N C_{N,n} \text{sen}[(n-0.5)\gamma]}{e + 2 \cos(2\gamma)}. \quad (4.38)$$

La Tabla 4.2 muestra los valores óptimos de l , cuando se fijan valores de N y para un error máximo $\delta = 10^{-8}$. Estos valores se calculan a partir de las ecuaciones que se describieron arriba. Liu (2014) sólo calcula pesos correspondientes a un error máximo $\delta = 10^{-5}$.

Usando estos valores de l se calculan los correspondientes coeficientes del operador de diferencias finitas.

Hay una relación entre los valores de l , N y el error máximo δ (Liu, 2014). Si el valor de N es fijo, y el valor de δ aumenta entonces el valor de l aumenta. Si el valor de l es fijo,

Tabla 4.2: Coeficientes del esquema OISFD obtenidos por mínimos cuadrados para el error máximo $\delta = 10^{-8}$. La notación e_N indica que el valor depende de la selección de N .

Coeficiente	$N = 2$ $l = 0.355$	$N = 3$ $l = 0.36$	$N = 4$ $l = 0.635$	$N = 5$ $l = 1.015$	$N = 6$ $l = 1.4$
$C_{N,1}$	6.9372	3.33129	10.8893	7.32539	2.14156
$C_{N,2}$	0.631965	0.833973	0.331133	0.535209	0.940679
$C_{N,3}$		-0.0147895	0.0453235	0.0337424	-0.036325
$C_{N,4}$			-0.00436026	-0.00718151	0.00359687
$C_{N,5}$				0.000644263	-0.000361425
$C_{N,6}$					0.000022915
e_N	6.8331	3.75926	10.0788	7.05526	2.80415
Coeficiente	$N = 7$ $l = 1.82$	$N = 8$ $l = 1.929$	$N = 9$ $l = 2.125$	$N = 10$ $l = 2.25$	$N = 11$ $l = 2.32$
$C_{N,1}$	1.92397	1.7592	1.60884	1.51313	1.45053
$C_{N,2}$	0.960673	0.976307	0.991026	1.00066	1.00709
$C_{N,3}$	-0.0411853	-0.0452619	-0.0493578	-0.0582597	-0.054166
$C_{N,4}$	0.00492562	0.00618416	0.00758794	0.00865485	0.00943807
$C_{N,5}$	-0.000685312	-0.00105967	-0.00154735	-0.00196969	-0.00230692
$C_{N,6}$	0.0000819503	0.000177164	0.000333066	0.000494926	0.000639914
$C_{N,7}$	-5.89877*E ⁻⁶	-0.0000239862	-0.0000661921	-0.000122719	-0.000181928
$C_{N,8}$		1.92299*E ⁻⁶	0.0000105336	0.0000273778	0.000049343
$C_{N,9}$			-1.00561*E ⁻⁶	-4.86814*E ⁻⁶	-0.0000118655
$C_{N,10}$				5.24297*E ⁻⁷	2.26797*E ⁻⁶
$C_{N,11}$					-2.64386*E ⁻⁷
e_N	2.6292	2.49723	2.37727	2.30116	2.25151

y el valor de δ disminuye entonces el valor de N aumenta. Por tanto, el procedimiento de determinar l es el siguiente: se fija un valor máximo de δ , por ejemplo $\eta = 10^{-8}$, y luego se fija un valor de N . Se selecciona un valor l_0 inicial y se calculan los coeficientes $C_{N,n}$ tal que $\varepsilon_{\text{máx}} < \delta$. Dado un valor fijo de N y δ , el valor óptimo será el máximo l_0 tal que $\varepsilon_{\text{máx}} < \delta$.

La selección del valor máximo de l_0 está motivado por la necesidad de obtener el mayor rango posible para el número de onda k . Sin embargo, mientras menor sea el valor de δ , menor es el rango del número de onda donde se tiene una buena aproximación, como se muestra en la figura 4.6.

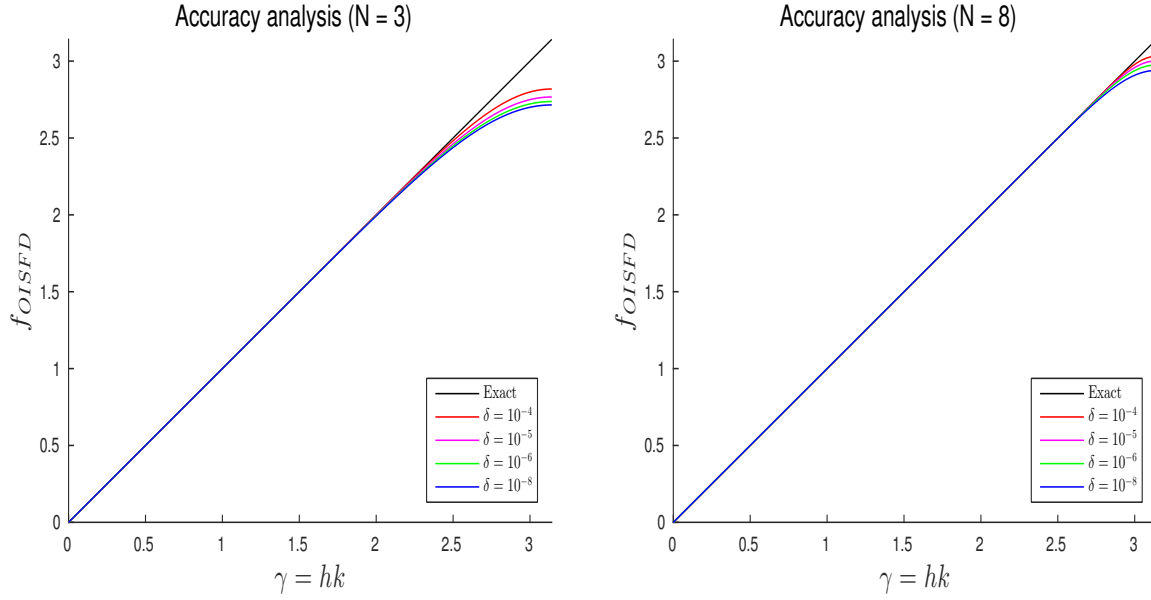


Figura 4.6: Gráfica de las funciones id (exacta) y f_{OISFD} para diferentes valores de δ . La gráfica de la izquierda muestra las aproximaciones con $N = 3$, en tanto que en el lado derecho se muestran aproximaciones $N = 8$. En ambos casos, cuando δ disminuye el intervalo donde hay buena precisión también disminuye.

Una vez determinados los pesos, el siguiente paso es obtener un esquema numérico OISFD. Primero se supone que la colección $\{f_{j+1/2}\}_{j=0}^L = \{f(x_{j+1/2})\}_{j=0}^L$ es conocida, en tanto que la colección $\{q_j\}_{j=0}^L = \{p'(x_j)\}_{j=0}^{L+1}$ es desconocida. Cuando se desea determinar los valores de la derivadas (colección desconocida) es de mucha ayuda cambiar la notación de la aproximación dada por (4.31). Usando esta notación se obtiene la siguiente aproximación con diferencias finitas,

$$q_{j-1} + e_N q_j + q_{j+1} \approx \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N C_{N,n} [f_{j+n-1/2} - f_{j-n+1/2}], \quad (4.39)$$

donde $C_{N,n}$, e_N son los pesos óptimos correspondientes al error absoluto máximo δ .

Dado N fijo, la fórmula aplicada a q_j , requiere de N puntos de la colección $\{f_{j+1/2}\}_{j=0}^L$ antes del índice j y otros N puntos de la misma colección después del índice, por tanto la fórmula (4.39) es aplicable sólo cuando $j = N, \dots, L - N + 2$. Las fórmulas de diferencias finitas centrales que se aplica a cada uno de los nodos de la colección $\{q_2, \dots, q_{N-1}, q_{L-N+2}, \dots, q_{L-1}\}$ requieren operadores que se evalúan en $4, 6, \dots, 2N$ nodos, por lo cuál su aplicación sólo depende de la mayor cantidad de nodos disponibles. Por tanto, la aplicación explícita a la colección completa queda dado por las ecuaciones siguientes:

$$q_{j-1} + e_{N(j)} q_j + q_{j+1} = r_j \quad j = 2, \dots, L - 1,$$

Así, calcular las derivadas $\{q_j\}$ es equivalente calcular la solución del sistema (4.42).

El siguiente ejemplo ayudará a entender cómo se utiliza el esquema de diferencias finitas implícitas en un dominio acotado.

Ejemplo 2. Considerar la función y suposiciones del ejemplo 1. Se desea calcular $\{q_j = f'(x_j)\}_{j=0}^L$ usando diferencias finitas implícitas óptimas en mallas alternadas con $N = 5$ y $\eta = 10^{-8}$. Para hacer esto se supone que sólo se conoce los valores de la colección $\{f(x_{j+1/2})\}_{j=0}^{L-1}$. Por otro lado, en este caso concreto, $h = \Delta x$, y $N = 5$. Esto indica que en el cálculo de las derivadas sólo se utilizarán las primeras cinco columnas de la Tabla 4.2. Así, los coeficientes que se requieren son

$$D_{s,j} = \frac{C_{s,j}}{h}, \quad s = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$e_s = \sum_{j=1}^s (2j-1)C_{s,j} - 2 \quad s = 2, 3, 4, 5, 6$$

Por tanto, los elementos de la diagonal de la matriz del sistema lineal (4.42) son $e_2 = 6.64037$, $e_3 = 4.33098$, $e_4 = 3.35529$, $e_5 = 2.8656$ y $e_6 = 2.60444$.

Los cálculos para determinar los valores de los r_j se hacen usando los valores $D_{s,n}$ y sus fórmulas correspondientes en (4.40).

Resolviendo el sistema resultante (4.42) con el algoritmo de Thomas, se obtiene la derivada aproximada de la función f .

Debido que la derivada exacta de la función f es $f'(x) = \cos(x)$, se puede realizar la comparación entre f' y la aproximación numérica, ver la figura (4.8).

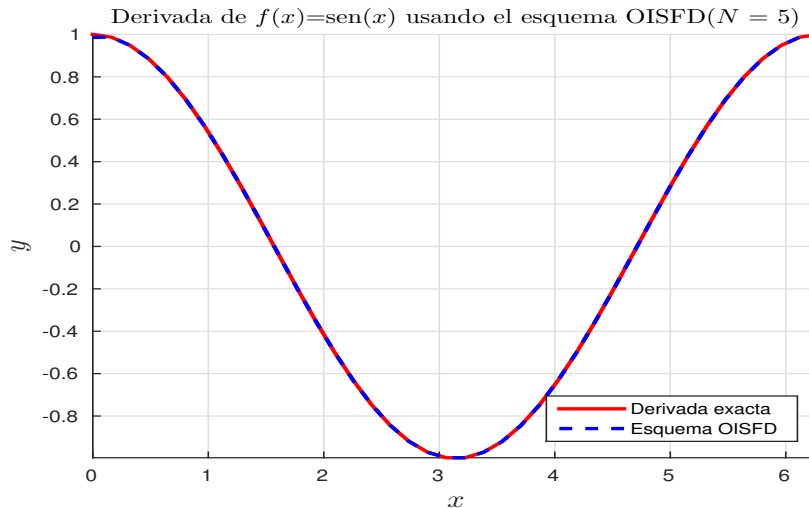


Figura 4.8: Gráfica de la derivada exacta $f'(x) = \cos(x)$ y la gráfica de la derivada aproximada usando el esquema de diferencias finitas implícitas óptimas en un malla alternada con $N = 5$ y $L = 40$.



Figura 4.9: Gráfica de los errores absolutos entre la derivada exacta f' y la derivada aproximada sobre los nodos $\{x_j\}_{j=0}^L$, con $L = 40$.

La figura (4.9) muestra que los errores mayores están en los valores extremos. Estos resultados eran de esperarse ya que para la formulación del esquema OISFD se asume una hipótesis de variación lineal en los extremos.

2. Discusión

El siguiente ejemplo tiene como objetivo comparar aproximaciones que se obtienen de los esquemas ISFD y OISFD. Se bosquejarán los errores en cada caso y se corroborará que las aproximaciones del esquema OISFD está acotado por el error máximo δ .

Ejemplo 3. Considerar la función f , definida como $f(x) = \cos(\pi x/5)$ y $x \in [0, 50]$. Sea $\Delta x = 50/L$, definir las sucesiones $x_j = j\Delta x$, $j = 0, \dots, L$, $x_{j+1/2} = \Delta x/2 + j\Delta x$, $j = 0, \dots, L-1$. Se desea calcular $\{q_j = f'(x_j)\}_{j=0}^L$ usando los esquemas implícitos y analizar los resultados. Para hacer una comparación más precisa, se usará el hecho que la función es periódica y que se conocen los valores en los nodos $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^L$.

En este caso concreto $h = \Delta x$, y las aproximaciones se calcularán usando dos diferentes cantidades de nodos $L = 50$ y $L = 500$ (es decir, $h = 1$ y $h = 0.1$). La fórmula de diferencias del esquema ISFD usa $N = 10$ y el esquema OISFD el valor $N = 3$. Las aproximaciones numéricas se comparan con la derivada exacta f' , definida por $f'(x) = -\frac{\pi}{5} \sin(\pi x/5)$, sobre la malla alternada $\{x_j\}$.

Para el primer valor de L el tamaño de paso $h = 1$ es considerablemente grande, sin embargo, la figura 4.10 muestra que la aproximación es bastante buena en ambos esquemas numéricos. Una comparación directa con las gráficas de la derivada y sus aproximaciones no permite observar cuál aproximación es mejor. Si se quiere observar a detalle cuál de los dos esquemas ofrece una mejor aproximación, se debe realizar la gráfica de los errores absolutos.

La figura 4.11 muestra que los errores de ambos esquemas son menores a $\delta = 10^{-8}$ y que el esquema OISFD es ligeramente mejor que el esquema ISFD. Es importante notar que el esquema OISFD sólo requiere evaluar 6 nodos en tanto que el esquema ISFD requiere 20 nodos de evaluación, esta es una de las ventajas del esquema óptimo.

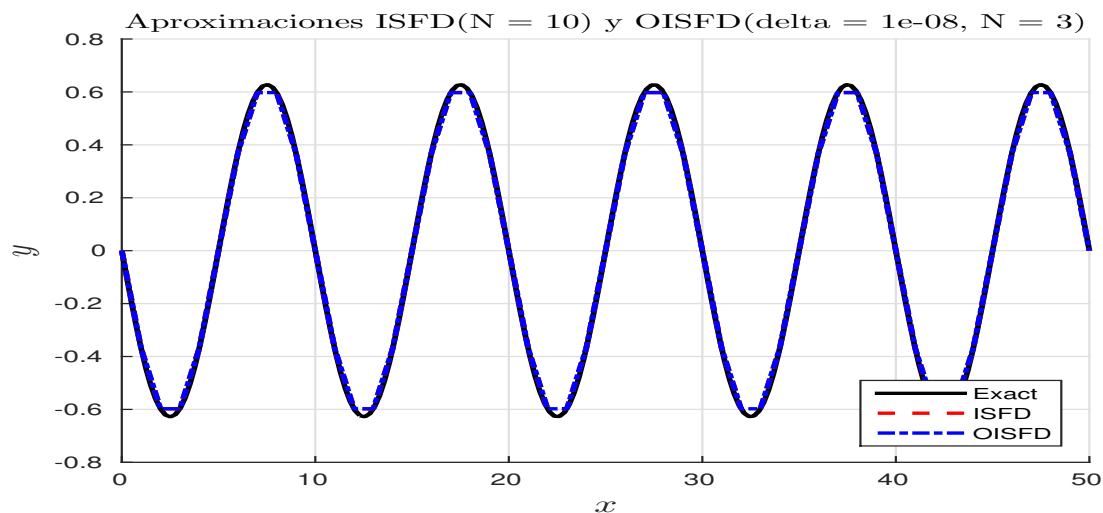


Figura 4.10: Comparación entre la función derivada f' y las aproximaciones numéricas. Ambos esquemas proporcionan resultados aceptables aún cuando $h = 1$.

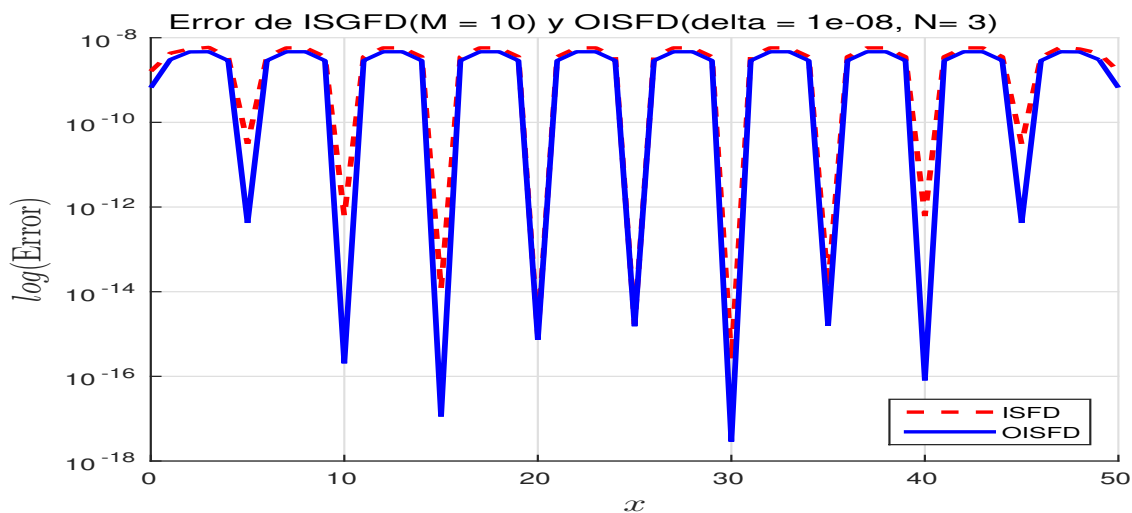


Figura 4.11: Gráfica de los errores absolutos de los esquemas implícitos comparados con la derivada exacta f' . Se puede observar que ambas gráficas están acotadas por la constante $\delta = 10^{-8}$.

El segundo valor de L lleva a un tamaño de paso menor $h = 0.1$ y el resultado es una mejor aproximación que a simple vista recupera la derivada exacta, como se aprecia en la

figura 4.12. Sin embargo, si se hace la gráfica de los errores absolutos se puede observar dos cosas: (a) el esquema OISFD, aún con un menor número de puntos de evaluación, ofrece una mejor aproximación respecto al esquema ISFD que tiene el triple de puntos de evaluación; y (b) los errores absolutos del esquema OSIFD disminuyen, cuando h es disminuye.

Los errores absolutos del esquema OISFD son mucho menores a δ , aún cuando los coeficientes usados en el operador de diferencias $C_{N,n}$ corresponden al error δ , esto no se debe considerar como una regla, ya que en algunos casos aparece este fenómeno y en otros no. Además depende de la regularidad de la función.

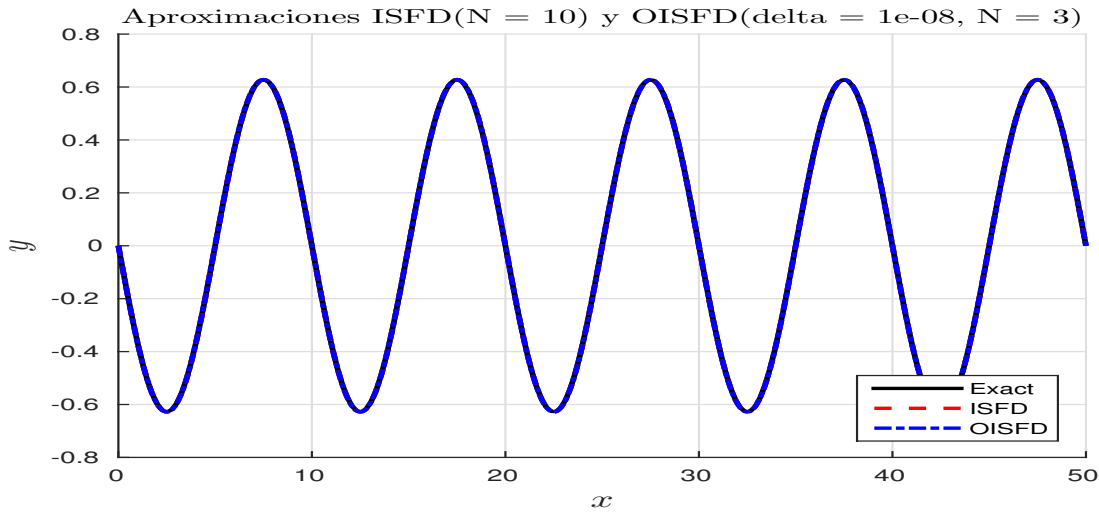


Figura 4.12: Comparación entre la función derivada f' y las aproximaciones numéricas. La gráficas son prácticamente iguales y no se puede apreciar una diferencia entre el valor exacto y la aproximación, aún cuando $h = 0.1$.

Finalmente, la figuras 4.14 y 4.15 muestran gráficas de errores absolutos para diferentes valores de δ , donde $N = 3$ en el esquema OISFD y $N = 10$ en el esquema ISFD.

En la figura 4.12, que corresponde al tamaño de paso $h = 1$, se puede observar que el esquema ISFD ofrece mejores resultados que el esquema óptimo con $\delta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$. De acuerdo con la discusión previa en este ejemplo, donde se observó que los errores de cada esquema disminuyen al aumentar L (disminuir h), se puede pensar que los errores del esquema OISFD con $\delta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ serían menores a los errores del esquema ISGFD cuando h disminuye. Sin embargo, aunque hay una mejora en la aproximación no es suficiente para mejorar la aproximación debida al esquema ISFD, ver figura 4.15. En esta figura, el esquema ISFD es de alta precisión debido a que $N = 10$.

Notar que los coeficientes sólo están sujetos a ofrecer un error máximo menor a una δ dada y h pequeño. Es decir, si h disminuye (o tiene valores pequeños) los errores absolutos sólo se mantienen estrictamente por debajo del error δ .

En el anterior ejemplo, se observaron dos cosas:

- Ambos métodos ofrecen excelentes aproximaciones y corresponden a sus cotas de error;

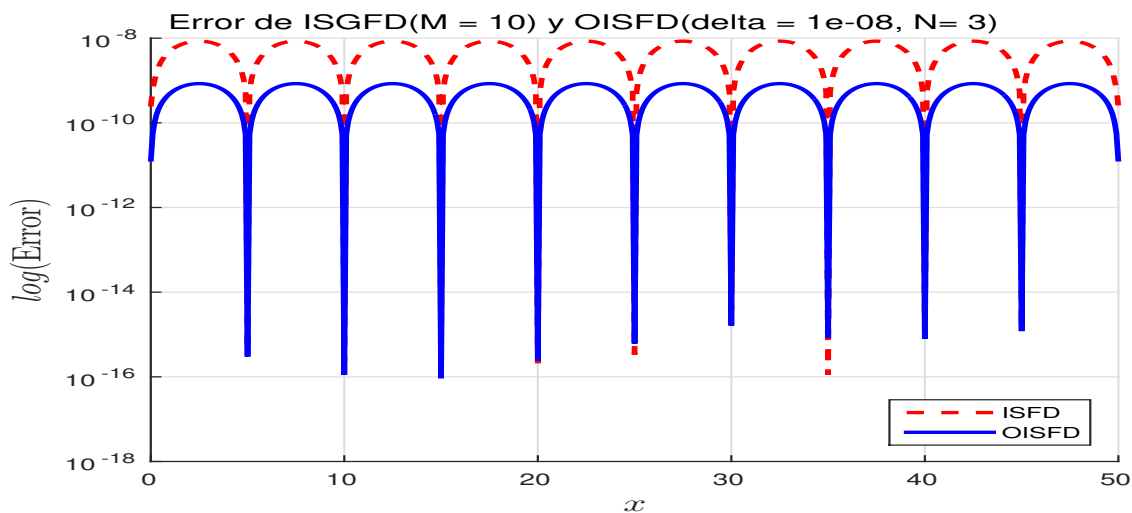


Figura 4.13: Gráfica de los errores absolutos de los esquemas implícitos comparados con la derivada exacta f' . Aunque ambas gráficas están acotadas por la constante $\delta = 10^{-8}$ el esquema OISGFD ofrece la mejor aproximación.

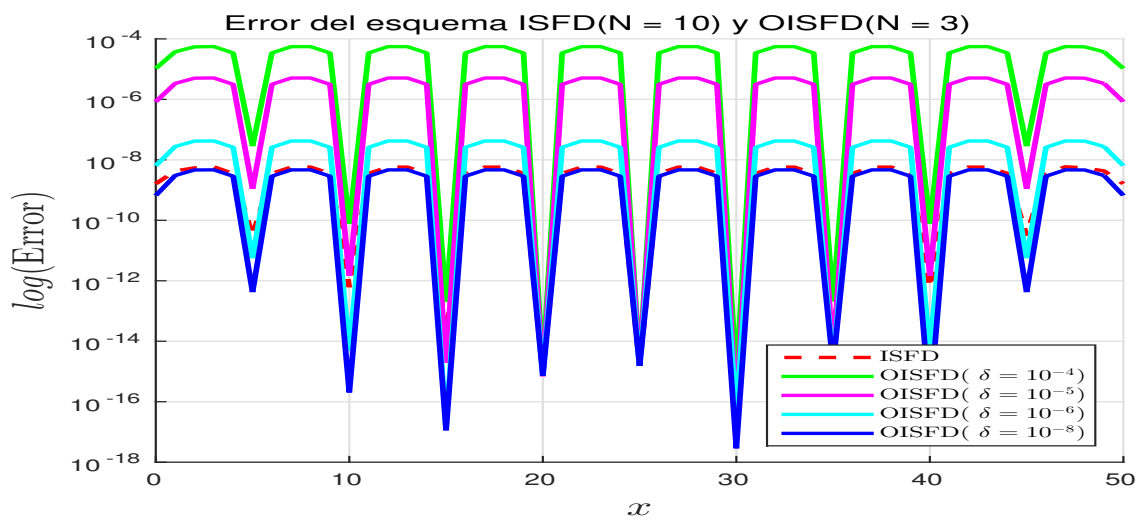


Figura 4.14: Gráfica de los errores absolutos del esquema OSIFD para $\delta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-8}$ y $N = 3$, y del esquema ISFD para $N = 10$. En ambos casos el tamaño de paso espacial es $h = 1$ (es decir, corresponde a $L = 50$).

- el esquema OISFD ofrece buenas aproximaciones, inclusive en algunos casos mejor, comparado con el esquema ISFD. Notar que en el ejemplo las condiciones para ambos esquemas son idénticas.

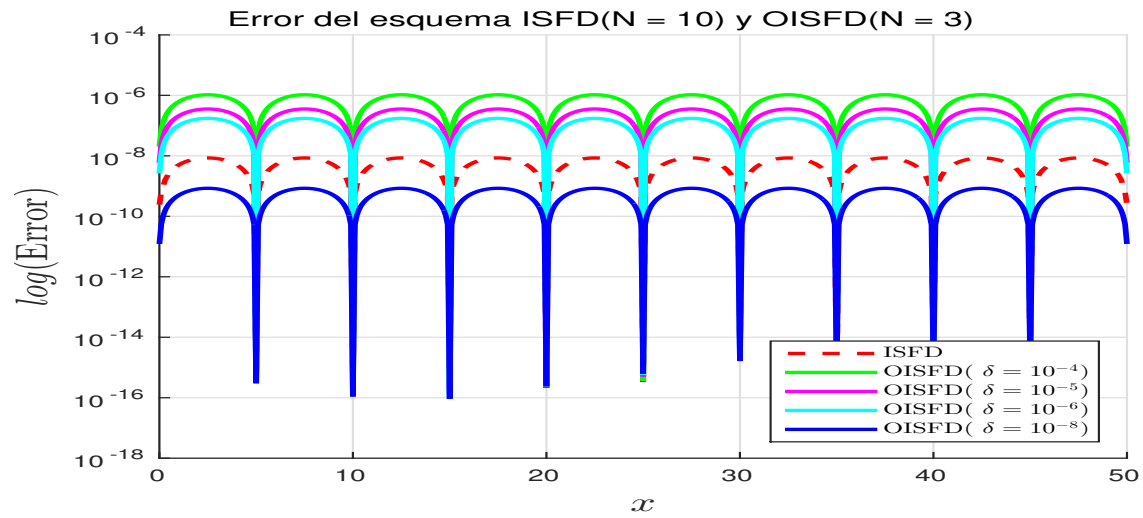


Figura 4.15: Gráfica de los errores absolutos para los esquemas ISFD y OISFD cuando el tamaño de paso de $h = 0.1$ (es decir, cuando $L = 500$). Se puede observar que para cada valor de $\delta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-8}$, se cumple que la correspondiente gráfica está acotada por su respectiva δ .

Implementación Numérica

*I do not fear computers.
I fear the lack of them.*

Isaac Asimov

En el capítulo anterior se mostraron dos métodos para calcular derivadas numéricas de cualquier orden precisión de una función de variable real (real valuada) sobre una malla alternada. Los métodos de diferencias finitas en mallas alternadas son preferidas sobre las tradicionales porque ofrecen mayor precisión, mayor estabilidad y menor dispersión numérica (Madariaga (1976), Virieux (1986, 1986), Graves (1996) y Liu & Sen (2009b)).

Los operadores de diferencias finitas centrales contienen un oscilaciones espurias en los lóbulos laterales (extremos laterales finales del operador) y por tanto presenta un efecto “no local” alrededor del punto de diferenciación. Los operadores de mallas alternadas contienen substancialmente menos oscilaciones alrededor del punto y por tanto presenta un efecto “local” deseado. Operadores centrales para derivadas de primer orden son menos precisos que los correspondientes operadores en mallas alternadas (Fornberg (1990), Kneib & Kerner (1993)). Al interactuar el efecto no local, de los operadores de diferencias finitas centrales, y las propiedades del material heterogéneo con la onda que se propaga en el medio puede crear oscilaciones no causales (espurias) y podrían ser visibles sobre un rango dinámico amplio. Esto hace imposible satisfacer correctamente condiciones de frontera en los bordes. Estos problemas asociados con los operadores de diferencias centrales pueden ser eliminados o minimizados usando operadores de diferencias centrales de mallas alternadas que poseen un efecto local en el espacio (Karrenbach, 1995).

En este capítulo se muestra como aplicar los métodos de diferencias finitas implícitas a las ecuaciones poroelásticas y se muestra explícitamente la discretización sobre la malla alternada.

En la sección 1, se muestra la aplicación de los esquemas numéricos explicados a detalle en el capítulo anterior. En la sección siguiente se discute sobre la condición inicial y las condiciones de frontera y en la sección final se describe la aplicación de la fuente.

1. Formulación numérica

Para hacer la discretización es conveniente escribir el conjunto de ecuaciones (3.41)-(3.44) en forma explícita en el caso 2D (Carcione, 2014):

$$\begin{aligned}
r^2 \dot{v}_x &= m \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \rho_f b V_x + \rho_f \frac{\partial p}{\partial x}, \\
r^2 \dot{v}_z &= m \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho_f b V_z + \rho_f \frac{\partial p}{\partial z}, \\
r^2 \dot{V}_x &= -\rho_f \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) - \rho b V_x - \rho \frac{\partial p}{\partial x}, \\
r^2 \dot{V}_z &= -\rho_f \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \rho b V_z - \rho \frac{\partial p}{\partial z}, \\
\dot{\sigma}_{xx} &= (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda_c \frac{\partial v_z}{\partial z} + \alpha M \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\
\dot{\sigma}_{zz} &= (\lambda_c + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda_c \frac{\partial v_x}{\partial x} + \alpha M \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\
\dot{\sigma}_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\
\dot{p} &= -\alpha M \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - M \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

donde, el parámetro de Lamé de la matriz saturada λ_c , el coeficiente de poroelasticidad de esfuerzo efectivo α , el modulo de acoplamiento M , la densidad total ρ , la densidad efectiva m y el coeficiente de movilidad b se definen como en (3.14), (3.17), (3.18), (3.28), (3.29) y (3.30), respectivamente.

1.1. Notación

La discretización en la variable espacial de las ecuaciones de Biot (5.1) usa una malla alternada como se muestra en la figura 5.1:

Al usar mallas alternadas se supone que algunos de los campos de propagación y propiedades del medio pueden ser considerados en posiciones intermedias de la malla simple (convencional). Dado que la malla es alternada y los materiales sólo están definidos en los puntos con índices enteros, es necesario determinar los valores de estos parámetros sobre los restantes puntos. Cuando se calculan los componentes de las velocidades, es necesario determinar los valores de ρ , ρ_f , m y b sobre los puntos cuyo índice es fraccionario sólo en la dirección de la componente.

Por tanto, para la componente horizontal de la velocidad (v_x o V_x) se requieren promedios,

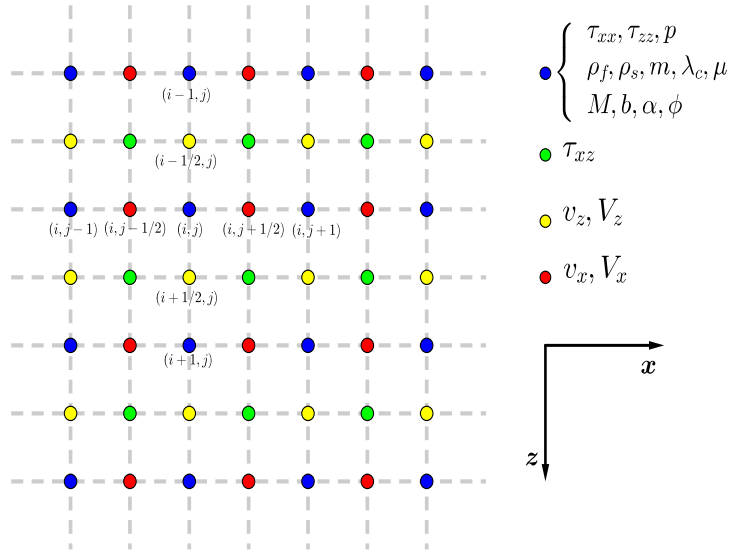


Figura 5.1: Malla alternada que se usa en la discretización de las ecuaciones poroelásticas. Los parámetros que definen las propiedades petrofísicas del medio sólo están definidos sobre los puntos con coordenadas enteras.

en este caso promedios armónicos (Sheen et al., 2006),

$$\begin{aligned}
 \underline{\rho}_{s,i,j+1/2} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{s i,j}} + \frac{1}{\rho_{s i,j+1}} \right) \right]^{-1} \quad \text{similar con } \rho_f, \\
 \underline{m}_{i,j+1/2} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_{i,j}} + \frac{1}{m_{i,j+1}} \right) \right]^{-1}, \\
 \underline{b}_{i,j+1/2} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_{i,j}} + \frac{1}{b_{i,j+1}} \right) \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Y en la componente vertical (v_z o V_z) se necesita,

$$\begin{aligned}
 \underline{\rho}_{s,i+1/2,j} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{s i,j}} + \frac{1}{\rho_{s i+1,j}} \right) \right]^{-1} \quad \text{similar con } \rho_f, \\
 \underline{m}_{i+1/2,j} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_{i,j}} + \frac{1}{m_{i+1,j}} \right) \right]^{-1}, \\
 \underline{b}_{i+1/2,j} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_{i,j}} + \frac{1}{b_{i+1,j}} \right) \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Finalmente, calcular τ_{xz} requiere el valor de μ sobre los puntos de la malla cuyos índices son de la forma $(i+1/2, j+1/2)$ y en este caso el promedio armónico se calcula como sigue:

$$\underline{\mu}_{i+1/2,j+1/2} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_{i,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j+1}} + \frac{1}{\mu_{i+1,j}} + \frac{1}{\mu_{i+1,j+1}} \right) \right]^{-1}. \tag{5.4}$$

No es necesario calcular los promedios armónicos de los parámetros λ_c , α y M , porque estos sólo se requieren en puntos de la malla con índices enteros. Se selecciona la media armónica en lugar de la media aritmética para aumentar la continuidad local de las variables respecto a la discontinuidad local del parámetro (Masson et al., 2006).

1.2. Diferencias implícitas: variable espacial

En este caso, se adopta la siguiente notación:

$$\begin{aligned} v_i^{n+1/2} &= v_i(\mathbf{x}, t_{n+1/2}), \\ V_i^{n+1/2} &= V_i(\mathbf{x}, t_{n+1/2}), \\ \tau_{ij}^n &= \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t_n), \\ p^n &= p(\mathbf{x}, t_n), \end{aligned} \tag{5.5}$$

con $t_n = n\Delta t$ y $i, j \in \{x, z\}$. Es importante enfatizar que los sub-índices y super-índices en los campos se relacionan con las variables espaciales y temporal, respectivamente.

Se aplica la diferenciación numérica implícita óptima, que se describió en el capítulo anterior, con ligeros cambios para adaptarse a una malla alternada 2D. Se sigue el trabajo de Itza et al. (2016).

Las aproximaciones a las derivadas parciales en la variable espacial en el punto \mathbf{x} y dirección x_j son denotados por $\Delta_j f$, es decir, $\partial f / \partial x_j|_{\mathbf{x}} \approx \Delta_j f$. Además, la aproximación $\Delta_j f$ se calcula usando el esquema de diferencias finitas implícitas óptimas. La variable temporal se discretiza usando el esquema de diferencias finitas centrales (4.1).

La discretización en forma compacta del sistema (5.1) queda como sigue:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^{n-1/2} + A\Delta_j\tau_{ij}^n + B\Delta_i p^n + C(V_i^{n+1/2} + V_i^{n-1/2}), \tag{5.6}$$

$$DV_i^{n+1/2} = V_i^{n-1/2} + EV_i^{n-1/2} + F\Delta_j\tau_{ij}^n + G\Delta_i p^n, \tag{5.7}$$

$$\tau_{ij}^{n+1/2} = \tau_{ij}^{n-1/2} + H(\Delta_i v_j^n + \Delta_j v_i^n) + (I\Delta_i v_i^n + J\Delta_i V_i^n) \delta_{ij}, \tag{5.8}$$

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} - J\Delta_i v_i^n + K\Delta_i V_i^n, \tag{5.9}$$

donde los coeficientes en las ecuaciones (5.6)-(5.9) están dados por:

$$\begin{aligned}
A &= (\underline{m}\Delta t)/\underline{r}^2, \\
B &= (\underline{\rho}_f \Delta t)/\underline{r}^2, \\
C &= (\underline{\rho}_f \underline{b}\Delta t)/(2\underline{r}^2), \\
D &= 1 + \underline{\rho}\underline{b}\Delta t/(2\underline{r}^2), \\
E &= -\underline{\rho}\underline{b}\Delta t/(2\underline{r}^2), \\
F &= -\underline{\rho}_f \Delta t/\underline{r}^2, \\
G &= \underline{\rho}\Delta t/\underline{r}^2, \\
H &= \underline{\mu}\Delta t, \\
I &= \lambda_c \Delta t, \\
J &= \alpha M \Delta t, \\
K &= -M \Delta t,
\end{aligned}$$

y \underline{m} , $\underline{\rho}_f$, \underline{b} , $\underline{\rho}$, $\underline{\mu}$ se definen según corresponda con las ecuaciones (5.2), (5.3), (5.4). Además, \underline{r}^2 se define como en (3.40) pero usando los valores promedios que correspondan. En la ecuación (5.7) no se tiene del todo despejado a la velocidad V_j , porque en este formato es posible aplicar, si fuese necesario, una técnica predictor-corrector de algún orden al sistema.

En el capítulo anterior, se explicó como determinar aproximaciones a las derivadas en una variable y esto es suficiente para determinar las aproximaciones a las derivadas parciales en la variable temporal $\Delta_j f$. Esto es posible porque las ecuaciones poroelásticas (5.1) no contienen términos con derivadas parciales mixtas.

En este trabajo, el dominio es una malla rectangular y por tanto si se desea aplicar la técnica del capítulo anterior es necesario explicar como se extiende la técnica aplicada en un dominio 1D a un dominio 2D. Se procede como a continuación se explica. Primero, las aproximaciones de las derivadas parciales $\Delta_i v_j$, $\Delta_i V_i$, $\Delta_j \tau_{ij}$, $\Delta_j \tau_{ij}$, $\Delta_i p$ son matrices y esto se debe al dominio 2D. Así, en cada paso temporal, se calculan las matrices de derivadas parciales en una dirección y luego las restantes matrices que representan las derivadas parciales de la otra dirección. No tiene importancia si se inicia con la dirección horizontal o la vertical, lo importante es calcular sólo las correspondientes a una dirección y luego las restantes (la otra dirección). Con el fin de fijar ideas, y a modo de ejemplo, supóngase que se inicia con la dirección horizontal. A cada fila se le aplica la fórmula de diferencias finitas (4.28) o (4.39), y en este caso cada fila representa la colección $\{f_{j+1/2}\}_{j=0}^L$. Una vez que se determinan todas las aproximaciones a las derivadas parciales (matrices) en la dirección horizontal, se inicia el cálculo de las aproximaciones a las derivadas parciales de la dirección vertical. Cuando quedan determinadas todas las derivadas parciales (matrices de aproximaciones) se sustituyen en las ecuaciones (5.6)-(5.9). Esto concluye una iteración. Continuar con las iteraciones implica realizar de forma recursiva el procedimiento previo.

Este esquema parece ser bastante lento por la cantidad de operaciones (en cada fila o columna de cada matriz se resuelve un sistema tridiagonal), sin embargo, esto no es así porque se pueden preprocesar secciones del esquema y los sistemas se resuelven de forma rápida con el algoritmo de Thomas (Liu, 2014).

En el siguiente capítulo se analiza la estabilidad del método.

1.3. Diferencias implícitas: variable temporal

La discretización de las ecuaciones poroelásticas, usando diferencias finitas implícitas, en la variable espacial, fue bastante directo pues la formulación y parte de la implementación resulta una aplicación del caso 1D (una ventaja de esta técnica, es el pre-procesamiento). Sin embargo, la discretización de estas ecuaciones usando la técnica LOD implícita en la variable temporal requiere de una manipulación algebraica directa. Una forma de hacer más sencilla la lectura es realizar, en esta sección, sólo el caso 1D (el caso 2D se puede consultar en el Anexo B). Las ecuaciones poroelásticas (3.41)-(3.44) se pueden reescribir en el caso 1D como (Masson et al., 2006):

$$r^2 \dot{v}_x = m \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \rho_f b V_x + \rho_f \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.10)$$

$$r^2 \dot{V}_x = -\rho_f \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \rho b V_x - \rho \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.11)$$

$$\dot{\sigma}_{xx} = \lambda_c \frac{\partial v_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad (5.12)$$

$$\dot{p} = -\alpha M \frac{\partial v_x}{\partial x} - M \frac{\partial V_x}{\partial x}. \quad (5.13)$$

Las expresiones algebraicas que resultan de aplicar las fórmulas de diferencias finitas, quedan en forma compacta si se adopta la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^n &= v_x(x_j, t_n), \\ \mathcal{V}_j^n &= V_x(x_j, t_n), \\ \mathcal{T}_j^n &= \sigma_{xx}(x_j, t_n), \\ \mathbf{p}_j^n &= p(x_j, t_n). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como la malla es alternada, es importante conocer los índices donde se discretiza. Así, realizar la discretización a cada ecuación diferencial implica aplicar la fórmula de diferencias finitas centrales a la variable del temporal (4.1) y el esquema de Crank-Nicolson a la variable espacial (4.2).

La discretización de la ecuación (5.10) en el punto $(j + 1/2, N)$ queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2} - \chi_{j+1/2} \mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2} - \varphi_{j+1/2} (\mathcal{T}_{j+1}^{N+1/2} - \mathcal{T}_j^{N+1/2}) - \xi_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^{N+1/2} - \mathbf{p}_j^{N+1/2}) = \\ \mathcal{U}_{j+1/2}^{N-1/2} + \chi_{j+1/2} \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} + \varphi_{j+1/2} (\mathcal{T}_{j+1}^N - \mathcal{T}_j^N) + \xi_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N), \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde $\chi_{j+1/2} = \frac{\rho_f b \Delta t}{r^2}$, $\xi_{j+1/2} = \frac{\rho_f \Delta t}{2r^2 \Delta x}$ y $\varphi_{j+1/2} = \frac{m \Delta t}{2r^2 \Delta x}$.

La discretización de la ecuación (5.11) en el punto $(j + 1/2, N)$ queda como sigue:

$$\begin{aligned} (1 + \theta_{j+1/2}) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2} + \xi_{j+1/2} (\mathcal{T}_{j+1}^{N+1/2} - \mathcal{T}_j^{N+1/2}) + \omega_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^{N+1/2} - \mathbf{p}_j^{N+1/2}) = \\ (1 - \theta_{j+1/2}) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} - \xi_{j+1/2} (\mathcal{T}_{j+1}^N - \mathcal{T}_j^N) - \omega_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N), \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $\theta_{j+1/2} = \frac{\rho b \Delta t}{\bar{r}^2}$, $\xi_{j+1/2} = \frac{\rho_f \Delta t}{2\bar{r}^2 \Delta x}$ y $\omega_{j+1/2} = \frac{\rho \Delta t}{2\bar{r}^2 \Delta x}$.

La ecuación (5.12) se discretiza en el punto (j, N) como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_j^{N+1/2} - \delta_j (\mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{j-1/2}^{N+1/2}) - \eta_j (\mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{j-1/2}^{N+1/2}) = \\ \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2} + \delta_j (\mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{U}_{j-1/2}^N) + \eta_j (\mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{V}_{j-1/2}^N), \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde $\delta_j = \frac{\lambda_c \Delta t}{2\Delta x}$ y $\eta_j = \frac{\alpha M \Delta t}{2\Delta x}$.

Finalmente, La discretización de la ecuación (5.13) en el punto (j, N) es:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_j^{N+1/2} + \eta_j (\mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{j-1/2}^{N+1/2}) + \phi_j (\mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{j-1/2}^{N+1/2}) = \\ \mathbf{p}_j^{N-1/2} - \eta_j (\mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{U}_{j-1/2}^N) - \phi_j (\mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{V}_{j-1/2}^N), \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde $\eta_j = \frac{\alpha M \Delta t}{2\Delta x}$ y $\phi_j = \frac{M \Delta t}{2\Delta x}$.

Los valores \underline{m} , $\underline{\rho}_f$, \underline{b} , $\underline{\rho}$, $\underline{\mu}$ se definen según corresponda con las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4) y \bar{r}^2 se define como en (3.40) pero esta vez usando los valores promedios que correspondan.

Se desea resolver las ecuaciones en diferencias para los campos de velocidades y esto lleva realizar algunas sustituciones. Se consideran la ecuaciones (5.17), (5.18) y se modifican los índices sumando 1 a la componente “espacial”, obteniendo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N+1/2} - \delta_{j+1} (\mathcal{U}_{j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2}) - \eta_{j+1} (\mathcal{V}_{j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2}) = \\ \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} + \delta_{j+1} (\mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{U}_{j+1/2}^N) + \eta_{j+1} (\mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{V}_{j+1/2}^N), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{j+1}^{N+1/2} + \eta_{j+1} (\mathcal{U}_{j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2}) + \phi_{j+1} (\mathcal{V}_{j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2}) = \\ \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \eta_{j+1} (\mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{U}_{j+1/2}^N) - \phi_{j+1} (\mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{V}_{j+1/2}^N). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Se despeja \mathbf{p} y $\boldsymbol{\tau}$ en el tiempo $N + 1/2$ en las ecuaciones (5.17), (5.19), (5.18), (5.20) y luego se sustituye en las ecuaciones (5.15), (5.16). Después de un poco de aritmética se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^{N+1/2} + (1 + \mathcal{B}_m) \mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2} + \mathcal{C}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^{N+1/2} + \mathcal{D}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^{N+1/2} + (\mathcal{E}_m - \chi_{j+1/2}) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2} \\ + \mathcal{F}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^{N+1/2} = -\mathcal{A}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{B}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{C}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^N - \mathcal{D}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{E}_m \mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{F}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^N \\ + \chi_{j+1/2} \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} + \mathcal{U}_{j+1/2}^{N-1/2} + \varphi_{j+1/2} (\boldsymbol{\tau}_{j+1}^N - \boldsymbol{\tau}_j^N + \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} - \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2}) + \\ \xi_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N + \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \mathbf{p}_j^{N-1/2}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_m &= -\varphi_{j+1/2}\delta_j + \xi_{j+1/2}\eta_j, \\
\mathcal{B}_m &= \varphi_{j+1/2}(\delta_{j+1} + \delta_j) - \xi_{j+1/2}(\eta_{j+1} + \eta_j), \\
\mathcal{C}_m &= -\varphi_{j+1/2}\delta_{j+1} + \xi_{j+1/2}\eta_{j+1}, \\
\mathcal{D}_m &= -\varphi_{j+1/2}\eta_j + \xi_{j+1/2}\phi_j, \\
\mathcal{E}_m &= (\eta_{j+1} + \eta_j)\varphi_{j+1/2} - \xi_{j+1/2}(\phi_{j+1} + \phi_j), \\
\mathcal{F}_m &= -\varphi_{j+1/2}\eta_{j+1} + \xi_{j+1/2}\phi_{j+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^{N+1/2} + \mathcal{P}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^{N+1/2} + \mathcal{Q}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^{N+1/2} + \mathcal{R}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^{N+1/2} + (1 + \theta_{j+1/2} + \mathcal{S}_m) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N+1/2} \\
&+ \mathcal{T}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^{N+1/2} = -\mathcal{O}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{P}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{Q}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^N - \mathcal{R}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{S}_m \mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{T}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^N \\
&+ (1 - \theta_{j+1/2}) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} - \xi_{j+1/2} (\boldsymbol{\tau}_{j+1}^N - \boldsymbol{\tau}_j^N + \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} - \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2}) \\
&- \omega_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N + \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \mathbf{p}_j^{N-1/2}), \tag{5.22}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_m &= \xi_{j+1/2}\delta_j - \omega_{j+1/2}\eta_j, \\
\mathcal{P}_m &= -\xi_{j+1/2}(\delta_{j+1} + \delta_j) + \omega_{j+1/2}(\eta_{j+1} + \eta_j), \\
\mathcal{Q}_m &= \xi_{j+1/2}\delta_{j+1} - \omega_{j+1/2}\eta_{j+1}, \\
\mathcal{R}_m &= \xi_{j+1/2}\eta_j - \omega_{j+1/2}\phi_j, \\
\mathcal{S}_m &= -\xi_{j+1/2}(\eta_{j+1} + \eta_j) + \omega_{j+1/2}(\phi_{j+1} + \phi_j), \\
\mathcal{T}_m &= \xi_{j+1/2}\eta_{j+1} - \omega_{j+1/2}\phi_{j+1}.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones en diferencias de las velocidades (5.21) y (5.22) determinan un sistema de ecuaciones tridiagonal por bloques de la forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ H_1 \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_2 & 1 + \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_{n-1} & 1 + \mathcal{B}_{n-1} & \mathcal{C}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{A}_n & 1 + \mathcal{B}_n \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 - \chi_{3/2} & \mathcal{F}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_2 & \mathcal{E}_2 - \chi_{5/2} & \mathcal{F}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{D}_{n-1} & \mathcal{E}_{n-1} - \chi_{n-1/2} & \mathcal{F}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{D}_n & \mathcal{E}_n - \chi_{n+1/2} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{Q}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{O}_2 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{Q}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{O}_{n-1} & \mathcal{P}_{n-1} & \mathcal{Q}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{O}_n & \mathcal{P}_n \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 + \theta_{3/2} + \mathcal{S}_1 & \mathcal{T}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{R}_2 & 1 + \theta_{5/2} + \mathcal{S}_2 & \mathcal{T}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{R}_{n-1} & 1 + \theta_{n-1/2} + \mathcal{S}_{n-1} & \mathcal{T}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{R}_n & 1 + \theta_{n+1/2} + \mathcal{S}_n \end{bmatrix},$$

y

$$X = (\mathcal{U}_{1/2}^{N+1/2}, \mathcal{U}_{3/2}^{N+1/2}, \dots, \mathcal{U}_{n+1/2}^{N+1/2})^T,$$

$$Y = (\mathcal{V}_{1/2}^{N+1/2}, \mathcal{V}_{3/2}^{N+1/2}, \dots, \mathcal{V}_{n+1/2}^{N+1/2})^T,$$

$$G_1 = (g_{1/2}, g_{3/2}, \dots, g_{n+1/2})^T,$$

$$H_1 = (h_{1/2}, h_{3/2}, \dots, h_{n+1/2})^T,$$

con

$$\begin{aligned} g_{j+1/2} = & -\mathcal{A}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{B}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{C}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^N - \\ & \mathcal{D}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{E}_m \mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{F}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^N + \\ & \chi_{j+1/2} \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} + \mathcal{U}_{j+1/2}^{N-1/2} + \varphi_{j+1/2} (\boldsymbol{\tau}_{j+1}^N - \boldsymbol{\tau}_j^N + \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} - \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2}) + \\ & \xi_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N + \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \mathbf{p}_j^{N-1/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{j+1/2} = & -\mathcal{O}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{P}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{Q}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^N - \\ & \mathcal{R}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{S}_m \mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{T}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^N + \\ & (1 - \theta_{j+1/2}) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} - \xi_{j+1/2} (\boldsymbol{\tau}_{j+1}^N - \boldsymbol{\tau}_j^N + \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} - \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2}) - \\ & \omega_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N + \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \mathbf{p}_j^{N-1/2}). \end{aligned}$$

Si se desea determinar el valor de las velocidades se debe resolver el sistema (5.23). La solución del sistema lineal se obtiene usando la técnica conocida como descomposición de Schur (ver Anexo A). Una vez que se obtiene los valores de v_x y V_x , se determinan los valores de $\boldsymbol{\tau}_{xx}$ y \mathbf{p} con las ecuaciones (5.17) y (5.20). Esto se repite en cada paso de tiempo.

En el caso 2D, antes de realizar la discretización directa, se propone separar el sistema (5.1) en dos nuevos sistemas. Cada uno de estos nuevos sistemas depende solamente de la derivada espacial en una dirección y cumplen la propiedad siguiente: si se suman estos dos sistemas se obtiene el sistema original. Una vez hecho la separación de los sistemas, se realiza la discretización como en el caso 1D. Si embargo, a diferencia del caso 1D, aquí se deben realizar dos medios pasos de tiempo en lugar de uno sólo y en cada medio paso de tiempo se resuelve cada uno de los dos nuevos sistemas, esto es conocido como el método LOD (Leveque (2007)).

La división del paso del tiempo no sólo evita trabajar todas las ecuaciones (completas), sino que evita trabajar con sistemas pentadiagonales correspondiente a la discretización tradicional. En cambio, se obtienen dos sistemas de ecuaciones tridiagonales, esto implica un menor costo en el tiempo de ejecución (ver Anexo B).

2. Condición inicial y condición de frontera

Especificando las condiciones iniciales junto con las condiciones en la frontera quedan completamente determinada la solución de las ecuaciones poroelásticas. El dominio computacional es una malla rectangular, así que las condiciones se deben imponer en los cuatro bordes.

Las condiciones iniciales de las ecuaciones poroelásticas se consideran igual a cero, i.e., la condición inicial supone todos los campos en el tiempo inicial están en equilibrio. Las condiciones de frontera que se usan comúnmente son del tipo fijo, libre, periódico o absorbente (esta última, propiamente, no es una condición de frontera). Estas condiciones son del tipo Dirichlet. Cada tipo de condición sirve para simular algún fenómeno físico, por ejemplo, la de tipo absorbente se utiliza en la simulación de propagación de ondas en un dominio no acotado (Clayton & Enquist (1977), Higdon (1992)).

El tema de fronteras absorbentes es aún un área de investigación intensa y relevante. Diferentes tipos de fronteras absorbentes, más sofisticadas, pueden ser adaptadas al esquema que se propone, sin embargo, no es el objetivo de este trabajo. Por mencionar las más conocidas, PML-perfectly matched layer (Berenger (1994), Chew & Liu (1996), Zeng & Liu. (2001), Sheen et al. (2006)), CPML-convolutional perfectly matched layer (Martin et al., 2008) y las fronteras absorbentes híbridas propuestas por (Liu & Sen, 2010).

Los ejemplos y la aplicación del modelado numérico requiere propagación de ondas en un medio “infinito”, por tanto, se usará la frontera absorbente que imite este efecto, i.e., se requiere que las ondas se propaguen y que no se reflejen al llegar la frontera del dominio finito.

En este trabajo se usa la frontera absorbente con una atenuación exponencial que propone Cerjan et al. (1985). Esta “esponja” absorbente o capa absorbente consiste de n_b filas y columnas de puntos malla más cercanos a la frontera, ver figura 5.2. El factor que se utiliza

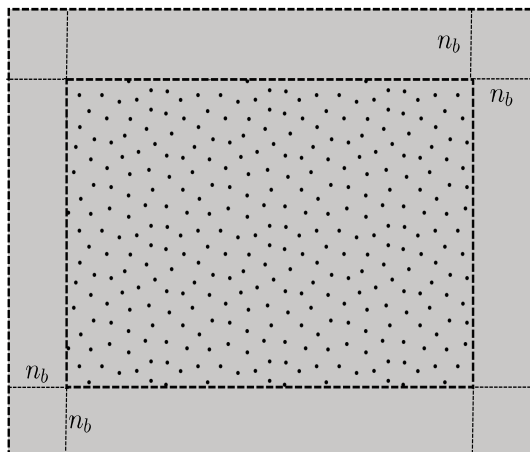


Figura 5.2: Configuración de la malla alternada y la frontera absorbente. El interior del dominio numérico es la región con puntos y la capa absorbente es la región sin puntos. La capa absorbente consta de n_b filas o columnas en cada lado.

para atenuar las amplitudes de todos los campos y sus derivadas es de la forma $e^{j\beta_b}$, $j = 1, \dots, n_b$. Así, si se quiere construir una capa absorbente se debe especificar los valores de la pareja (β_b, n_b) . Una buena selección de estos valores son las parejas $(\beta_b, n_b) = (0.015, 20)$ y $(\beta_b, n_b) = (0.0145, 24)$.

Se sabe que este tipo de esponja absorbente ofrece buenos resultados cuando los frentes de onda son envolventes. Esta esponja actúa como una impedancia de contraste (resistencia a la propagación de ondas) y puede mostrar reflexiones espurias. Estos casos a menudo se presentan cuando se trabaja en un rango de frecuencias bajas y se concentran, por lo general, en las esquinas. Si se desea mejorar la atenuación en estos casos se sugiere disminuir el valor de β_b y aumentar el valor de n_b (aumentar la impedancia de contraste). Por tanto, si se desea tener una frontera absorbente balanceada, i.e., tener valores correctos de estos parámetros es necesario controlar la atenuación de las amplitudes de las ondas que arriban y evitar que el exceso de contraste genere reflexiones espurias. No siempre es fácil encontrar estos parámetros.

Como los campos y sus derivadas son atenuadas en cada paso de tiempo, seleccionar los valores óptimos de los parámetros del factor de atenuación también depende del tamaño de paso de tiempo. Si el tamaño de paso de tiempo decrece la onda se quedará en más iteraciones en la capa absorbente y por tanto será más veces atenuada con el mismo valor de β_b . Así, si se desea obtener el mismo efecto en la atenuación en diferentes tamaños de paso es importante controlar el valor de β_b . Por ejemplo, si $\Delta t * N_{iter} = \hat{\Delta} t * \hat{N}_{iter}$ con $\Delta t > \hat{\Delta} t$, se debe cumplir que $N_{iter} < \hat{N}_{iter}$. Esto indica que la onda correspondiente al paso $\hat{\Delta} t$ se quedará en más iteraciones en la capa absorbente que la onda correspondiente al paso Δt . Por tanto, en el caso del paso de tiempo menor será más veces atenuada en comparación con el paso de mayor tamaño. Es decir, si se desea tener el mismo efecto en la atenuación es necesario considerar valores diferentes de β_b .

3. Implementación de la fuente

Las funciones que se considerarán como fuente en este trabajo son:

$$S_1(t) = e^{-2[tf_c-1.5]^2} \cos(2\pi[tf_c - 1.5]), \quad (5.24)$$

$$S_2(t) = (t - t_0)e^{-[\pi f_c(t-t_0)]^2}, \quad (5.25)$$

donde f_c es la frecuencia *dominante* o *central* y $t_0 > 0$ es el retardo temporal.

La energía de la fuente se particiona linealmente entre la fase sólida y fase líquida (Zhu & McMechan, 1991), esto es

$$\begin{aligned} W_f &= \phi, \\ W_s &= 1 - \phi, \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde W_f es el peso correspondiente al movimiento del fluido, W_s para el movimiento del sólido.

La aplicación de la fuente es considerada de entre tres casos posibles (Carcione & Quiroga-Goode, 1995),

- Fuente compresional: aquí se supone que la energía de la fuente es particionada en ambas fases. En este caso, los pesos se seleccionan como en (5.26).
- Fuente sólida: se selecciona $W_f = 0$ y $W_s = 1$.
- Inyección de volumen al fluido: se selecciona $W_f = \phi$ y $W_s = 0$.

En este trabajo la forma de aplicar la fuente es la siguiente: la parte proporcional de la fuente ($W_s S_i$) se suma a los esfuerzos normales principales del sólido y la restante parte proporcional de la fuente ($W_f S_i$) se le suma a la presión del fluido (presión poral).

4. Discusión

Las implementaciones numéricas presentadas en la sección 1, son implícitas: una implícita en la variable espacial y la otra en la variable temporal. Cuando el esquema es implícito en la variable espacial el cálculo es simple y la aplicación es directa. Como se verá mas adelante este esquema mejora la región de estabilidad y seleccionando el tamaño de paso espacial correcto no es dispersivo. Sin embargo, aún tiene el problema de ser explícito en la variable temporal, i.e., es condicionalmente estable. En tanto, el la otra discretización es incondicionalmente estable sin embargo el esquema tiene la desventaja de ser más lento y bastante mas complicado desarrollar e implementar.

Análisis de estabilidad y dispersión

*There are three kinds of lies:
lies, damned lies, and statistics.*

Mark Twain

En los capítulos previos se ha discutido sobre métodos numéricos para aproximar una solución numérica de las ecuaciones poroelásticas. Antes de aplicar los esquemas en la simulación de ejemplos prácticos es importante analizar condiciones para las cuales se puede hallar una solución. Como se desea simular propagación de ondas, la resolución de la longitud de onda juega un papel importante en el contexto de precisión. Por tanto, si no se toman las suficientes muestras de la longitud de onda los efectos de dispersión numérica deterioran la solución lo cual es equivalente a distorsión en procesamiento de señales. El modelado correcto de la onda P -lenta es importante pues este modo influye en la atenuación de los modos restantes. Este modo de onda depende del rango de la frecuencia; en un rango bajo de frecuencias es dominado por el efecto inercial y en un rango alto de frecuencias es difusivo; en cualquier caso el tamaño de la escala es importante.

La dispersión numérica y las condiciones de estabilidad se derivan de un análisis del tipo von Neumann. El análisis de dispersión y estabilidad del esquema de diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alterna sigue el análisis hecho por Levander (1988), Masson et al. (2006) O'Brien (2010) y Zhao et al. (2014).

En la sección 1 se deriva una fórmula analítica que sirve como cota para el paso de tiempo y es el equivalente a la condición de Courant clásico de estabilidad numérica. En la sección 2 se discute sobre la dispersión numérica de los esquemas FD implícitos.

1. Estabilidad

Para tener unas expresiones algebraicas simples y analíticamente tratables en el análisis de estabilidad se considera una perturbación longitudinal plana que se propaga en la dirección x a través de un material homogéneo (se supone que las velocidades v_z , V_z , y los esfuerzos normales σ_{zz} , σ_{xz} , y por tanto sus derivadas respecto a z , son todas cero). La estabilidad analizada en el caso 1D se puede generalizar a los casos 2D y 3D. Así, después de

la discretización de (5.1) en el caso 1D se obtiene:

$$r^2 D_{tt} u_x = m D_x \tau_{xx} + \rho_f b \langle D_t w_x \rangle + \rho_f D_x p, \quad (6.1)$$

$$r^2 D_{tt} w_x = -\rho_f D_x \tau_{xx} - \rho b \langle D_t w_x \rangle - \rho D_x p, \quad (6.2)$$

$$D_t \tau_{xx} = (\lambda_c + 2\mu) D_x D_t u_x + \alpha M D_x D_t w_x, \quad (6.3)$$

$$D_t p = -\alpha M D_x D_t u_x - M D_x D_t w_x. \quad (6.4)$$

Las velocidades se relacionan con los desplazamientos a través de las identidades

$$v_x = D_t u_x, \quad (6.5)$$

$$V_x = D_t w_x, \quad (6.6)$$

donde D_t , $D_{tt} = D_t D_t$ y D_x son operadores de diferencias finitas y el operador $\langle \bullet \rangle$ está definido por

$$\langle V_i^n \rangle = (V_i^{n+1/2} + V_i^{n-1/2})/2. \quad (6.7)$$

Dejando a un lado las ecuaciones (6.3), (6.4), y usando la definición de función de energía de deformación en un medio poroso, dado en Biot (1962), se obtiene:

$$D_x \tau_{xx} = (\lambda_c + 2\mu) D_{xx} u_x + \alpha M D_{xx} w_x, \quad (6.8)$$

$$D_x p = -\alpha M D_{xx} u_x - M D_{xx} w_x. \quad (6.9)$$

Si $r^2 \neq 0$, se pueden combinar las ecuaciones (6.1) y (6.2) para cancelar el término $D_x p$, y entonces

$$\rho_f D_{tt} u_x + \rho_f D_{tt} w_x = D_x \tau_{xx}.$$

Sustituyendo la ecuación (6.8) en la expresión anterior, se obtiene la siguiente identidad:

$$(\lambda_c + 2\mu) D_{xx} u_x - \rho D_{tt} u_x + \alpha M D_{xx} w_x - \rho_f D_{tt} w_x = 0. \quad (6.10)$$

Análogamente, se pueden combinar las ecuaciones (6.1) y (6.2) para cancelar el término $D_x \tau_{xx}$, de donde se obtiene:

$$\rho_f D_{tt} u_x + m D_{tt} w_x = b \langle D_t w_x \rangle + D_x p.$$

Sustituyendo la ecuación (6.9) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\alpha M D_{xx} u_x - \rho_f D_{tt} u_x + M D_{xx} w_x - b \langle D_t w_x \rangle - m D_{tt} w_x = 0. \quad (6.11)$$

Las ecuaciones (6.10) y (6.11) se pueden reescribir en notación matricial como sigue:

$$\Lambda u = 0, \quad (6.12)$$

donde el operador matriz de 2×2 está dado por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\lambda_c + 2\mu) D_{xx} - \rho D_{tt} & \alpha M D_{xx} - \rho_f D_{tt} \\ \alpha M D_{xx} - \rho_f D_{tt} & M D_{xx} - b D_t \langle \bullet \rangle - m D_{tt} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

y $u = [u_x, w_x]^T$, $D_{xx} = D_x D_x$. Una forma directa de obtener la ecuación (6.12) es mediante las ecuaciones vectoriales (3.46) y (3.47).

El análisis de estabilidad de tipo von Neumann, supone que la solución independiente de onda plana tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} u_x(x_1, x_2) \\ w_x(x_1, x_2) \end{bmatrix} = g^n e^{iks\Delta x} \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

donde k es el número de onda espacial y $g = g(k)$ es el factor de amplificación que puede ser real o compleja.

En este contexto, el esquema numérico es estable si la siguiente desigualdad se cumple para todo k :

$$\|g\| \leq 1. \quad (6.15)$$

Si se aplican los operadores de diferencias finitas sobre la solución (6.14), se obtiene una expresión en la variable g a partir de (6.12) bajo la condición $\det(\Lambda) = 0$. Las derivadas temporales en diferencias finitas de segundo orden están dadas por:

$$D_t \langle g^n e^{iks\Delta x} \rangle = \left(\frac{g^1 - g^{-1}}{2\Delta t} \right) g^n e^{iks\Delta x}, \quad (6.16)$$

$$D_{tt} g^n e^{iks\Delta x} = \left(\frac{g^1 - 2 + g^{-1}}{\Delta t^2} \right) g^n e^{iks\Delta x}. \quad (6.17)$$

Por otro lado, aplicando el $2N$ operador espacial de diferencias finitas implícitas a la onda plana (6.14), se obtiene (ver Anexo C):

$$D_{xx} g^n e^{iks\Delta x} = -\frac{4}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N g^n e^{iks\Delta x}, \quad (6.18)$$

donde la función periódica $\phi_{k\Delta x}^N$ está dado por

$$\phi_{k\Delta x}^N = \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin((j-1/2)k\Delta x)}{a + 2\cos(k\Delta x)} \right)^2, \quad (6.19)$$

y los coeficientes o pesos $C_{N,j}$ se toman de la Tabla 4.2. Se les agrega los subíndices N a los coeficientes FD para enfatizar que los valores dependen de la longitud del operador de diferencias. Cuando se calcula el determinante de (6.13) se produce el siguiente polinomio de grado cuatro en la variable g (ver Anexo C):

$$\det(\Lambda) = a_5 g^4 + a_4 g^3 + a_3 g^2 + a_2 g + a_1, \quad (6.20)$$

donde los coeficientes a_j dependen de las propiedades del material, tamaño del paso temporal y espacial, y de la función periódica $\phi_{k\Delta x}^N$ (que depende del número de onda). Los coeficientes

del polinomio (6.20) se definen como:

$$a_1 = \hat{f}_1 - \Delta t \hat{f}_4, \quad (6.21)$$

$$a_2 = -4\hat{f}_1 + 4\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2 + 2\Delta t \hat{f}_4 - 4\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_5, \quad (6.22)$$

$$a_3 = 6\hat{f}_1 - 8\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2 + 16\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} (\phi_{k\Delta x}^N)^2 \hat{f}_3, \quad (6.23)$$

$$a_4 = -4\hat{f}_1 + 4\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2 - 2\Delta t \hat{f}_4 + 4\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_5, \quad (6.24)$$

$$a_5 = \hat{f}_1 + \Delta t \hat{f}_4. \quad (6.25)$$

Los valores de f_i asociados con los coeficientes a_i 's, $i = 1, \dots, 5$, dependen sólo de las propiedades del material y están definidos por:

$$\hat{f}_1 = m\rho - \rho_f^2, \quad (6.26)$$

$$\hat{f}_2 = m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M - 2\alpha M \rho_f, \quad (6.27)$$

$$\hat{f}_3 = M(\lambda_c + 2\mu - \alpha^2 M), \quad (6.28)$$

$$\hat{f}_4 = \rho b/2, \quad (6.29)$$

$$\hat{f}_5 = b(\lambda_c + 2\mu)/2. \quad (6.30)$$

El polinomio de grado cuatro definido en la ecuación (6.20) se puede resolver en su forma cerrada usando radicales mediante la fórmula clásica de Ferrari (Milovanović et al. (1994) (p. 9-14) y el cual se basa en los trabajos de Ungar (1982, 1990)). Para iniciar el análisis de estabilidad del esquema numérico, se realiza la gráfica de las cuatro raíces complejas $\{r_1(k), r_2(k), r_3(k), r_4(k)\}$ donde el número de onda k varía sobre un intervalo lo suficientemente grande. La selección de la longitud del intervalo del número de onda no es un problema, esto debido a que la función (6.19) es periódica. Si se cumple la condición de estabilidad en (6.15) entonces cada raíz del polinomio de grado cuatro debe tener norma menor o igual a 1. Por tanto, la condición de estabilidad puede ser escrito en términos de estas raíces como sigue:

$$\|r_i(k)\| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \text{para todo } k. \quad (6.31)$$

Las raíces están en pares conjugados y la raíz negativa de mayor valor absoluto corresponde a la onda P -lenta cuando $k = 0$ (Carcione & Quiroga-Goode, 1995). Las raíces $\{r_1, r_2\}$ están asociadas con la onda P -rápida (u onda compresional normal) adelantada y retardada, en tanto que las raíces $\{r_3, r_4\}$ están relacionadas con la onda P -lenta (o difusión de la presión del fluido) adelantada y retardada. En las figuras **6.1** y **6.2** el intervalo del número de onda y el valor de Δx son fijos. Las propiedades del material que se usaron al generar estas figuras fueron tomadas de la tercera columna de la Tabla **6.1**. La figura **6.1** muestra la gráfica de las cuatro raíces complejas, donde se consideró $\Delta t = 0.0008\text{s}$ y la figura **6.2** también muestra las cuatro raíces complejas pero con $\Delta t = 0.00108\text{s}$. Cuando Δt es pequeña el esquema es estable, pero cuando el valor de Δt aumenta, el esquema se vuelve inestable. En resumen, estas figuras muestran que la inestabilidad se hace presente cuando el valor de Δt aumenta, i.e., si se incrementa el valor de Δt existe al menos una raíz (de las cuatro) que

Tabla 6.1: Propiedades físicas del modelo contacto-gas.

	Estrato saturado de gas	Estrato saturado de agua	Estrato saturado de agua (arena ligeramente consolidada)
ρ_s (kg/m ³)	1.885×10^3	2.155×10^3	2650×10^3
ρ_f (kg/m ³)	0.1×10^3	1.0×10^3	1.0×10^3
m (kg/m ³)	0.333×10^3	3.333×10^3	6.0×10^3
λ_c (GPa)	0.530	6.767	6.6591
μ (GPa)	1.855	1.855	0.455
M (GPa)	7.323×10^{-2}	6.963	6.566
b (Pa s/m ²)	1.5×10^7	1.0×10^9	1.0×10^9
α	0.951	0.951	0.9828
ϕ	0.3	0.3	0.3

no satisface la condición de estabilidad (6.31). Este análisis cualitativo no es suficiente si se desea determinar el valor límite de Δt .

El siguiente paso consiste en investigar una condición analítica que garantice que las cuatro raíces pertenezcan al interior del círculo unitario para todos los posibles valores del número de onda. Las raíces del polinomio de grado cuatro (6.20) están fuera del círculo unitario cuando $b = 0$ ($\eta/\kappa = 0$), además son reales y negativos (Masson et al., 2006). Por tanto, si se sustituye $g = -1$ en la ecuación (6.20), se obtiene un polinomio cuadrático en la variable $(\Delta t/\Delta x)^2 \phi_{k\Delta x}^N$ (ver Anexo C):

$$\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \phi_{k\Delta x}^N \right]^2 \hat{f}_3 - \left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \phi_{k\Delta x}^N \right] \hat{f}_2 + \hat{f}_1 = 0. \quad (6.32)$$

Las soluciones exactas de la ecuación (6.32) están dados por:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \phi_{k\Delta x}^N = \frac{\hat{f}_2 \pm \sqrt{\hat{f}_2^2 - 4\hat{f}_3\hat{f}_1}}{2\hat{f}_3}. \quad (6.33)$$

Con ayuda de la ecuación (6.33), se establecen condiciones que aseguran una cota superior más restrictiva para Δt . Entonces, si se quiere determinar esta cota especial se debe seleccionar la solución que corresponde al signo menos en la ecuación (6.33) por ser el menor valor. Esta única condición no asegura la correcta selección de la cota, por tanto para lograr este objetivo es necesario determinar el valor máximo de la función $\phi_{k\Delta x}^N$, cuando k varía. Es importante mencionar que el lado derecho de la ecuación (6.19) alcanza su valor máximo en $hk = \pi$ (ver Anexo C), así

$$S_\phi^2 = \max \{ \phi_{k\Delta x}^N \} = \left(\sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j+1} C_{N,j}}{e-2} \right)^2. \quad (6.34)$$

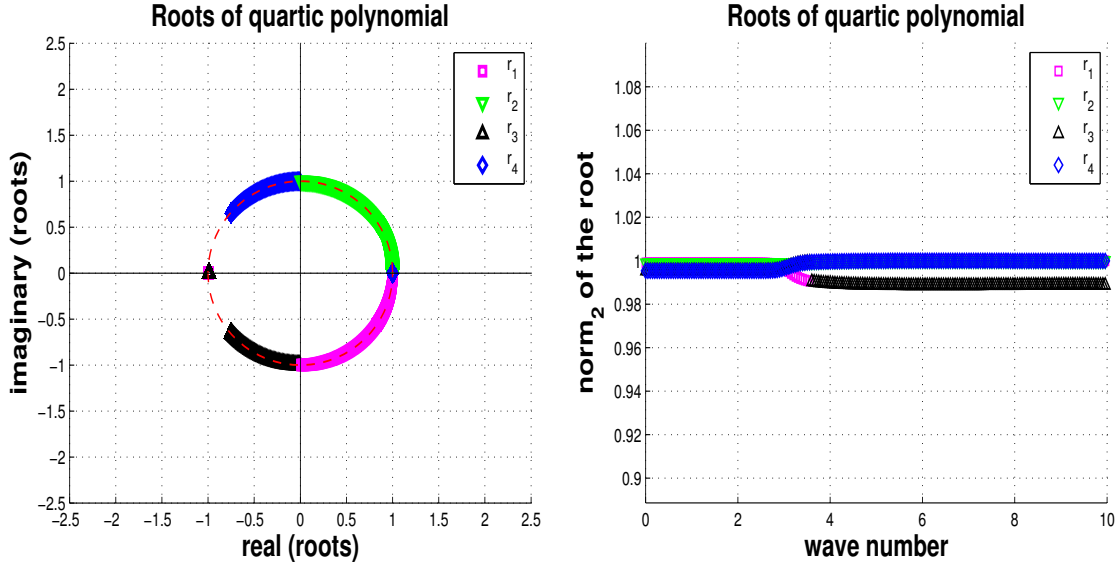


Figura 6.1: Gráfica de las cuatro raíces dado un intervalo, lo suficientemente grande, del número de onda y valores pequeños de Δt . Se puede observar que todas las raíces pertenecen al círculo unitario. La norma euclidiana de las cuatro raíces se muestran en la figura del lado derecho. Las raíces muestran un buen comportamiento debido a que pertenecen al círculo unitario.

Por tanto, si se desea que el esquema numérico sea estable cuando se selecciona un valor de Δx , la cota más restrictiva para Δt está dada por:

$$\Delta t \leq \Delta x \sqrt{\frac{\hat{f}_2 - \sqrt{\hat{f}_2^2 - 4\hat{f}_1\hat{f}_3}}{2\hat{f}_3 S_\phi^2}}. \quad (6.35)$$

El análisis que se hizo al deducir la condición (6.35) no depende del conjunto de valores $C_{N,j}$, así es posible seleccionar otro conjunto de coeficientes asociado con una precisión mayor y la cota aún sería válida. Más aún, la cota es válida si se considera el esquema de diferencias finitas explícitas ($e = 0$). Con un análisis similar es posible hallar una cota de Δt pero con los coeficientes $C_{N,j}$ del esquema ISFD dados en la Tabla 4.1.

Si $\hat{f}_1 = 0$, el lado derecho de la ecuación (6.35) es cero y por tanto no existe un valor finito de Δt con el cual el esquema numérico es estable. Por tanto este valor crítico debe cumplir $m\rho = \rho_f^2$ y junto a la definición del parámetro m (3.29) se obtiene:

$$\frac{T}{\phi} = \frac{\rho_f}{\rho}. \quad (6.36)$$

Por tanto, para todos los valores $T/\phi \leq \rho_f/\rho$ el esquema numérico es incondicionalmente inestable. El cociente T/ϕ siempre es mayor a 1 (Bourbie et al., 1987). El problema de inestabilidad en (6.36) no representa problema en la mayoría de la aplicaciones geofísicas

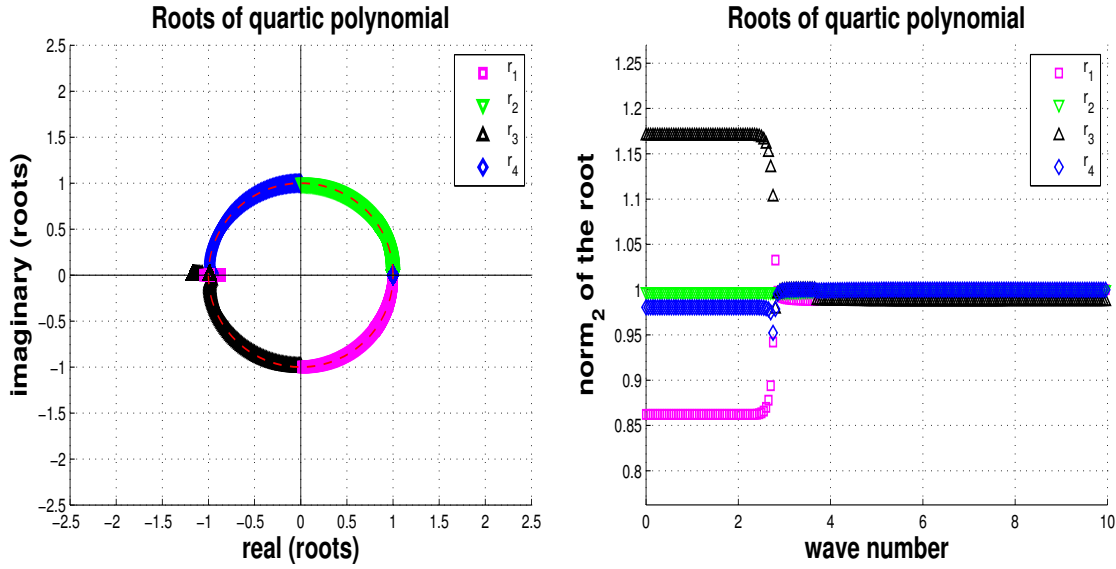


Figura 6.2: Gráfica de las cuatro raíces dado un intervalo, lo suficientemente grande, del número de onda y un valor de Δt mayor que en la figura 6.1. Observar que las raíces r_1 y r_2 , correspondientes a la onda P -rápida y P -lenta, respectivamente, no pertenecen al círculo unitario para algunos valores de k . La gráfica del lado derecho muestra el mal comportamiento de las raíces.

(física de las rocas). El parámetro de tortuosidad depende de la geometría del medio poroso; algunos autores lo relacionan con el concepto de factor de formación $F(\phi)$, con la ecuación $T = F(\phi)\phi$ (Bourbie et al., 1987).

Por otro lado, si se realiza un análisis asintótico sobre el término T/ϕ se obtiene la condición de Courant clásica. Más aún, si T/ϕ tiende a infinito entonces el término m también tiende a infinito y f_2^2/f_1^2 se aproxima a $(\lambda_c + 2\mu)^2/\rho^2$. Así, la condición (6.35) en este caso es (ver Anexo C):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_\phi V_p}, \quad (6.37)$$

donde $V_p = \sqrt{(\lambda_c + 2\mu)/\rho}$.

La figura 6.3 se construye usando propiedades del material seleccionados de la Tabla 6.1, además k pertenece a un intervalo fijo y Δx se toma como fijo. La gráfica del lado derecho muestra una comparación entre dos tipos de curvas obtenidas a partir de (6.35) y cada una de estas curvas sirve como una frontera que divide la región en dos partes: estable e inestable. Las curvas de líneas sólidas (continuas) se obtienen sustituyendo el factor (6.34) en (6.35), en tanto, la línea punteada se obtiene sustituyendo el factor

$$\bar{S}_\phi^2 = \max \{ \phi_{k\Delta x}^N \} = \left(\sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_{N,j} \right)^2, \quad (6.38)$$

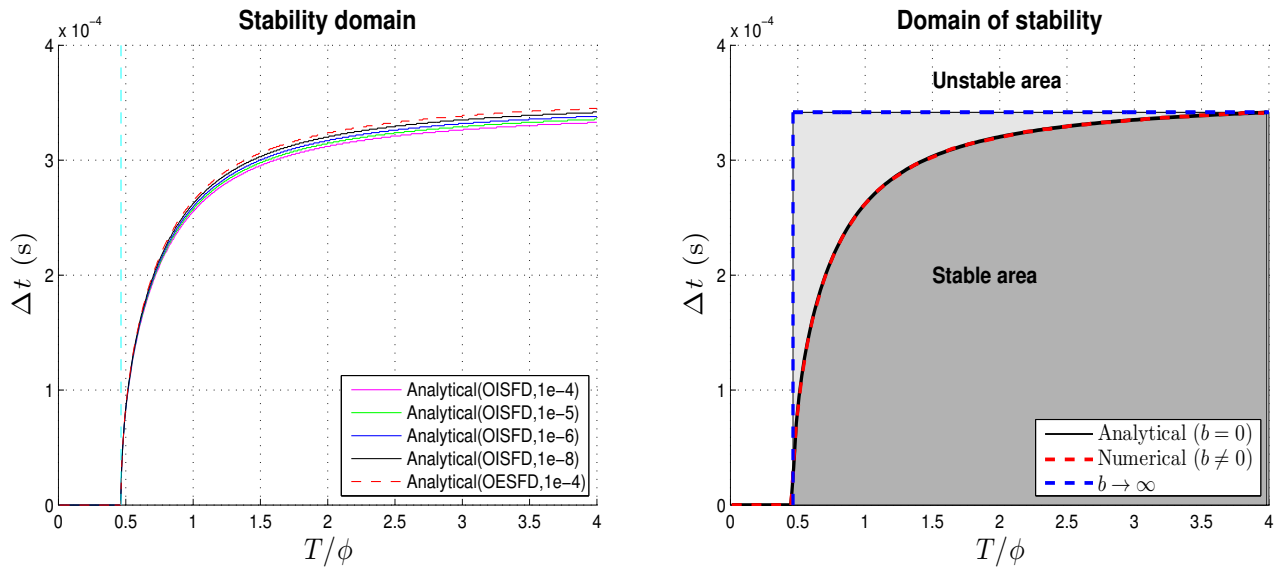


Figura 6.3: Las curvas separan los dominios de estabilidad e inestabilidad. Se bosqueja Δt como función de T/ϕ . La gráfica izquierda muestra la comparación entre curvas que usan coeficientes del esquema OISFD y el esquema OESFD en (6.34) y (6.38), respectivamente. La gráfica del lado derecho muestra la comparación entre la curva dada por (6.35) y la curva obtenida de simulaciones numéricas cuando $b > 0$.

en la ecuación (6.35). Los coeficientes $C_{N,j}$ provienen del esquema de diferencias finitas explícitas óptimas (OESFD) en una malla alternada (Liu, 2014).

En la gráfica del lado izquierdo se puede observar que, dado un error global, el método explícito ofrece un área de estabilidad ligeramente mayor en comparación con el método implícito. Sin embargo, si se usa un conjunto de valores que corresponden a un error global menor en (6.34), la región de estabilidad del esquema implícito aumenta. Para las simulaciones numéricas se selecciona el método implícito, en lugar del explícito, porque este esquema minimiza la dispersión numérica.

La gráfica de línea continua en el lado derecho de la figura 6.3 es una curva que proviene de la condición restrictiva (6.35), la cual corresponde a $b = 0$ (fluido ideal). La curva con línea punteada corresponde a simulaciones numéricas y a la condición $b > 0$. Las propiedades del material provienen de la tercera columna de la Tabla 6.1. La región de estabilidad que ofrece el esquema OISFD es mayor que el esquema que se discute en Masson et al. (2006) (pag. 7. fig 7) para el caso de un esquema explícito. A partir de experimentos numéricos en 2D y como analogía al caso puramente elástico, se verifica que dividiendo el lado derecho de la ecuación (6.35) por $\sqrt{2}$ se obtiene la cota apropiada en 2D.

2. Dispersión

La naturaleza dispersiva de las ondas se puede examinar considerando la velocidad de fase normalizada como función de la frecuencia o, de forma equivalente, como una función G_λ (el número de puntos malla por longitud de onda, λ). Si se desea analizar las propiedades de dispersión, se supone que el medio es uniforme e infinito el cual soporta una solución que es una onda plana armónica como en (6.14) pero ahora usando $g^n(\omega)e^{-iks\Delta x}$, donde $g^n(\omega) = e^{i\omega n\Delta t}$ y ω es la frecuencia angular. Para encontrar una relación de dispersión es necesario determinar una relación entre ω y k . La velocidad de fase numérica está definida por $v_{FD} = C_{P_0} = \omega/k$.

Si se considera el fluido del poro no viscoso ideal ($b = 0$), se puede determinar una relación de dispersión después de aplicar el operador matriz (6.13) a la onda plana armónica, obteniendo (ver Anexo C):

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sqrt{\frac{\hat{f}_2 \pm \sqrt{\hat{f}_2^2 - 4\hat{f}_1\hat{f}_3}}{2\hat{f}_1}} \phi_{k\Delta x}^N, \quad (6.39)$$

donde \hat{f}_1 , \hat{f}_2 , \hat{f}_3 y $\phi_{k\Delta x}^N$ se definieron en las ecuaciones (6.26)-(6.28) y (6.19), respectivamente. La relación de dispersión de la onda P -rápida se obtiene seleccionando el signo positivo en el radical de (6.39), mientras que el signo negativo lleva a una relación de dispersión de la onda P -lenta. Usando $k = 2\pi/\lambda$ y a partir de (6.39) se obtiene una expresión de la velocidad de fase (real) en la malla (Moczo, 1998), ver Anexo C:

$$C_{P_0} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\pi P_0 G_\lambda} \arcsin\left(P_0 \sqrt{\left(\frac{f_2 \pm \sqrt{f_2^2 - 4f_1 f_3}}{2f_1}\right) \phi_{2\pi G_\lambda}^N}\right), \quad (6.40)$$

donde $P_0 = \Delta/\Delta x$ y $G_\lambda = \Delta x/\lambda$.

La figura 6.4 muestra la dispersión de las ondas P -lenta y P -rápida correspondientes a la tercera columna de la Tabla 6.1. Al realizar la gráfica de las curvas se usaron diferentes valores de Δt , que corresponden al 20 %, 50 %, 70 % and 99 % del tiempo límite de estabilidad Δt_s . En los experimentos numéricos se usa el valor de $N = 4$. De la figura 6.4, es evidente que se requiere de $\Delta x/\lambda < 0.1$ para obtener gran precisión (menos del 1 % de dispersión) en el modelo poroelástico. La velocidad de fase normalizada siempre es menor a 1. Este no es el caso en esquemas de diferencias finitas implícitas (variable espacial) donde C_{P_0}/C_0 puede ser mayor a uno (Bamberger et al., 1980), lo cual significa que la onda P numérica se propaga más rápido que la verdadera onda P .

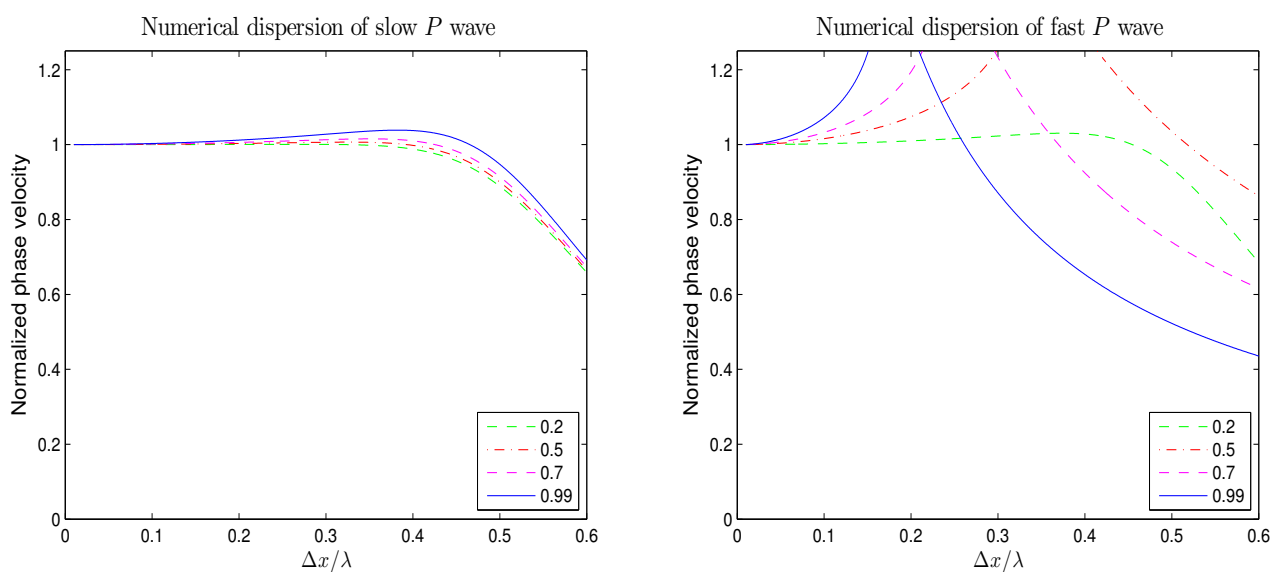


Figura 6.4: Curvas de dispersión de las ondas P -lenta y P -rápida correspondientes a cuatro diferentes tamaños de paso $\Delta t = 0.2\Delta t_s$, $\Delta t = 0.5\Delta t_s$, $\Delta t = 0.7\Delta t_s$ y $\Delta t = 0.99\Delta t_s$, donde Δt_s es el tiempo límite de estabilidad.

Aplicaciones

*The greatest mathematicians,
as, Archimedes, Newton, and Gauss,
always united theory and applications in equal measure.*

Felix Klein.

Existen varias formulaciones matemáticas para simular propagación de ondas en una gran variedad de medios con diferentes propiedades físicas. Sin embargo, todas estas herramientas sólo son, hasta cierto grado, simplificaciones del mundo real. Como consecuencia, podría no ser necesariamente bueno medir efectos (o su relativa importancia) de los parámetros físicos a través de la simulación de un modelo matemático (formulación). No obstante, la simulación numérica juega un papel importante en propagación de ondas, por ser una herramienta de menor costo en comparación a los experimentos físicos o toma de muestras de campo.

Además se espera obtener una respuesta sísmica bien definida en cierto rango de frecuencias, y dependiendo del modelo, los experimentos numéricos son capaces de mostrar ciertas características del medio.

En este trabajo se ilustran las diferencias entre los modelos elástico, poroacústico y poroelástico a través del cálculo y comparación de los sismogramas sintéticos en un modelo complejo. Esto contribuye a profundizar el entendimiento de la física de las rocas a través de la simulación numérica como una herramienta complementaria al trabajo de recolección de datos sísmicos.

En este capítulo se mostrarán simulaciones numéricas correspondientes a dos tipos de aplicaciones: ejemplos clásicos de la teoría propagación de ondas en medios porosos y un ejemplo con datos reales.

En la primera sección se validan los modelos numéricos, implementados para las ecuaciones poroelásticas, comparando los resultados con soluciones de referencia. Luego se muestran ejemplos clásicos y de referencia en la literatura. Finalmente, se muestran los experimentos con datos reales tomados del tercer pozo del Rancho Waggoner, Texas, USA.

1. Validación numérica

Antes de realizar los ejemplos clásicos de propagación de ondas, se verifican los resultados numéricos, comparando las velocidades del sólido y del fluido con las soluciones transitorias

de referencia en un medio poroso homogéneo dado en Dai et al. (1995) y Carcione & Quiroga-Goode (1996).

En este primer experimento se usan las propiedades del estrato saturado de gas, dado en la Tabla 6.1. También se supone un medio homogéneo, y acústico y, el fluido en el poro es considerado como un fluido no viscoso ideal (i.e., $b = 0$). Esta suposición adicional se hace para activar el mecanismo de Biot y permitir la presencia de la onda P -lenta. La dimensión de la malla numérica es $N_x = N_z = 600$. Se coloca una fuente explosiva, de tipo compresional, en el centro del dominio numérico, i.e., en las coordenadas $x_0 = y_0 = 300$. La función fuente en el esquema IOSFD está dado por (5.24) con frecuencia dominante de 45Hz y la fuente en el esquema LOD es (5.24) con frecuencia dominante de 15Hz. La selección de diferentes frecuencias obedece al hecho de que el esquema implícito LOD presenta oscilaciones espurias cuando la frecuencia dominante de la fuente es alta. Las oscilaciones espurias se deben a la implementación de la fórmula de Crank-Nicolson en el esquema LOD (Duffy, 2013). Una forma de mejorar las aproximaciones y aumentar el rango de frecuencias, donde del esquema LOD produce buenos resultados, es usar la fórmula de Crank-Nicolson como un promedio de derivadas de orden mayor sin aumentar nodos en la parte temporal futura.

En ambos casos, la fuente explosiva se particiona entre las dos fases usando los pesos (5.26). El receptor, correspondiente al esquema OISFD, se localiza a 48m de la fuente y los tamaños de paso espacial son $\Delta x = \Delta z = 0.8\text{m}$ y el paso de tiempo es $\Delta t = 0.1\text{ms}$. En el caso del esquema LOD, el receptor se localiza a 90m de la fuente y los tamaños de paso espacial son $\Delta x = \Delta z = 0.3\text{m}$ y el paso de tiempo es $\Delta t = 0.1\text{ms}$.

Las figuras 7.1 y 7.2 muestran que la simulaciones numéricas ofrecen una buena aproximación a la solución analítica.

2. Ejemplos clásicos

Como primer ejemplo, se simula la propagación de ondas en un medio poroso denominado modelo de contacto gas-agua dado en Dutta & Odé (1983). Este modelo supone que la matriz rocosa en ambos estratos es el mismo. El estrato superior es arena saturada con gas mientras que el estrato inferior es arena saturada con agua y los valores de los parámetros están dados por las dos primeras columnas de la Tabla 6.1. La fuente está localizada en el estrato (superior) saturado con gas. La dimensión de la malla (dominio computacional) es $N_x = N_z = 600$. En este ejemplo, se consideran dos escalas y como función fuente la derivada de una función Gaussiana definida en (5.25), con frecuencias dominantes de 45Hz y 45kHz, una frecuencia en cada escala. Por tanto, de acuerdo a la frecuencia emitida por la fuente se selecciona un espaciamiento diferente, según se discutió en la sección dispersión numérica. Los espaciamientos de la malla son 0.8m y 0.8mm, y como se desea satisfacer la condición de Courant (6.35), se seleccionan pasos de tiempo de 0.1ms y 0.1 μs , respectivamente.

El estrato superior tiene una profundidad de 204.8m en el primer caso y de 20.48cm en el segundo caso. Como la simulación se realiza sobre un medio no acotado, se usa una frontera absorbente en el dominio rectangular y la capa (esponja) tiene un espesor de 24 puntos de malla. Esta esponja absorbente se aplica para evitar y/o reducir las reflexiones de la frontera al interior del medio.

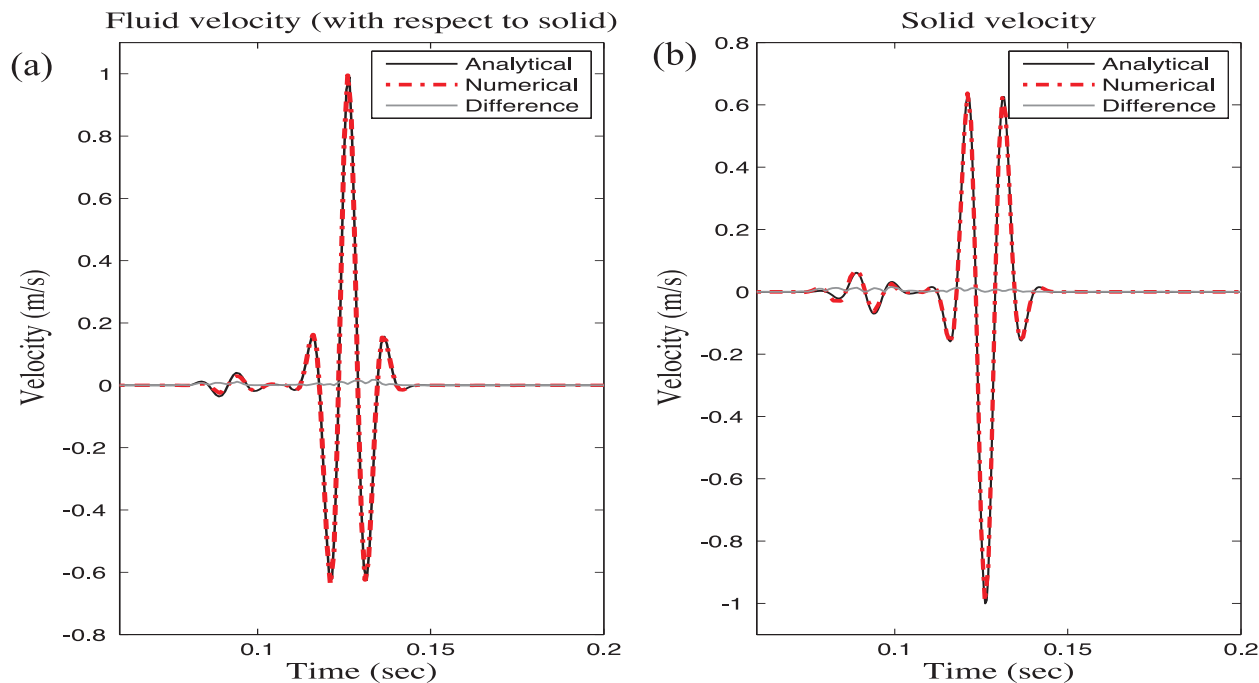


Figura 7.1: Los sismogramas sintéticos de las velocidades se simularon en un medio poroso 2D sin fricción, usando el método de diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alternada (OISFD) cuyo operador de diferencias es de longitud 8 y $\Delta x = \Delta z = 0.8\text{m}$ como espaciado de la malla. Se compara la solución transitoria con sismogramas sintéticos que corresponden a: a) la velocidad relativa del fluido (con respecto al sólido) y b) velocidad relativa del sólido.

La figura 7.3 muestra capturas de pantalla de la componente vertical de la velocidad del sólido y la velocidad del fluido (con respecto al sólido) en los tiempos $t = 0.225\text{s}$ and $t = 0.255\text{ ms.}$, respectivamente. En frecuencias bajas (capturas 7.3 (a)-(b)) la onda P -lenta es altamente difusiva y se desvanece a causa de la viscosidad del fluido y sólo se puede ver en su modo estático en la posición de la fuente. Sin embargo, en un rango de frecuencias altas la onda P -lenta se propaga a través del medio (capturas 7.3 (c)-(d)) de acuerdo a la teoría de Biot. Estos resultados concuerdan con los resultados dados en el artículo de Sheen et al. (2006).

Este ejemplo, claramente ilustra la existencia de los tres modos y también sus interacciones con la interfase.

3. Obtención de sismogramas sintéticos: Rancho Waggoner

Los sismogramas sintéticos en un depósito poroso heterogéneo pueden ser calculados usando el esquema de diferencias finitas implícitas óptimas en una malla alternada, esto significa, que se usarán las ecuaciones (5.6)-(5.9) para resolver numéricamente el conjunto de ecuaciones

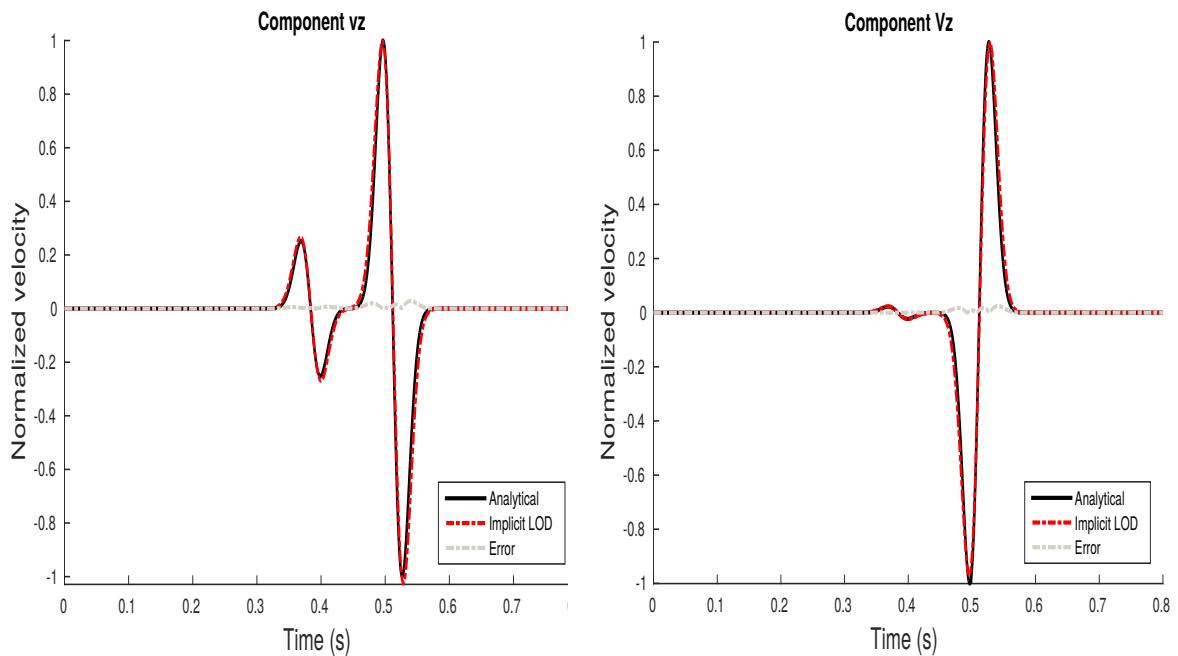


Figura 7.2: Los sismogramas sintéticos de las velocidades se simularon en un medio poroso 2D sin fricción, usando el método LOD en una malla alternada con $\Delta x = \Delta z = 0.3\text{m}$ como espaciamiento de la malla. Se compara la solución transitoria con sismogramas sintéticos que corresponden a a) la velocidad relativa del fluido (con respecto al sólido) y b) velocidad relativa del sólido.

ciones (5.1). Las propiedades físicas que corresponden al modelo del Rancho Waggoner se ilustran en la figura 7.4 y se obtienen mediante el método SOM (self organized map).

El método SOM es un algoritmo de redes neuronales que está basado en un aprendizaje competitivo y no supervisado y fue propuesto originalmente por Kohonen (1981, 1982). Aplica principalmente en visualización y clasificación de datos y constituye una técnica poderosa de minería de datos. Algunas aplicaciones geofísicas son: identificación y clasificación de rocas (Roy et al. (2013), Roy and Marfut (2012), Stankiewicz et al. (2010) y Konaté et al. (2015)) y tomografía sísmica (Klose (2006), Bauer et al. (2008) y Tselentis et al. (2011)).

Los parámetros poroelásticos que corresponden a este medio provienen del trabajo de Parra et al. (2015). Estos datos se obtuvieron directamente del pozo y están dados en la Tabla 7.1. Esta información constituye los datos (parámetros) de entrada en la técnica de modelado numérico.

Se consideran los valores de la velocidad y densidad del aceite como $V_p = 1459\text{m/s}$ y $\rho_f = 827.7\text{kg/m}^3$, según se discute en Higuti et al. (2001).

El resultado de la clasificación vía SOM, es una matriz de dimensión 501×116 (= número de muestras en el tiempo \times número de trazas) la cual corresponde a la dimensión de la sección sísmica. La distancia física entre dos trazas consecutivas es de 70ft. Esta matriz contiene tres diferentes etiquetas (números) que representan las tres “facies”: arena (sands), esquistos (shale) y calizas (limestone). Por tanto, la clasificación que fue hecha en una escala

Tabla 7.1: Parámetros para el modelo poroelástico del Rancho Waggoner.

	Estratos 1 y 3 (1600-2445 ft) \cup (2460-2600 ft) Saturado con salmuera			Estrato 2 (2445-2460 ft) Saturado con aceite			Unidad
	Caliza	Esquisto	Arena	Caliza	Esquisto	Arena	
V_p	5200	3309	3695	5427	3585	3700	m/s
V_s	2700	1653	2068	2789	1777	2040	m/s
K_f	2.25	2.25	2.25	1.8566	1.8566	1.8566	GPa
K_s	62	25	35	62	28	35	GPa
K_{dry}	45.746	17.422	15.461	43.452	21.261	16.482	GPa
ρ_s	2690	2540	2340	2700	2540	2380	kg/m ³
ρ_f	1000	1000	1000	872.2	872.2	872.2	kg/m ³
ϕ	0.18	0.17	0.2	0.012	0.15	0.16	-
η	1	1	1	1.729	1.729	1.729	cP
κ	1	0.01	200	1	0.01	200	mD
T	2	2	2	2	2	2	-

$$1\text{cP}=10^{-3} \text{ Pa s}; 1\text{mD}=10^{-15} \text{ m}^2$$

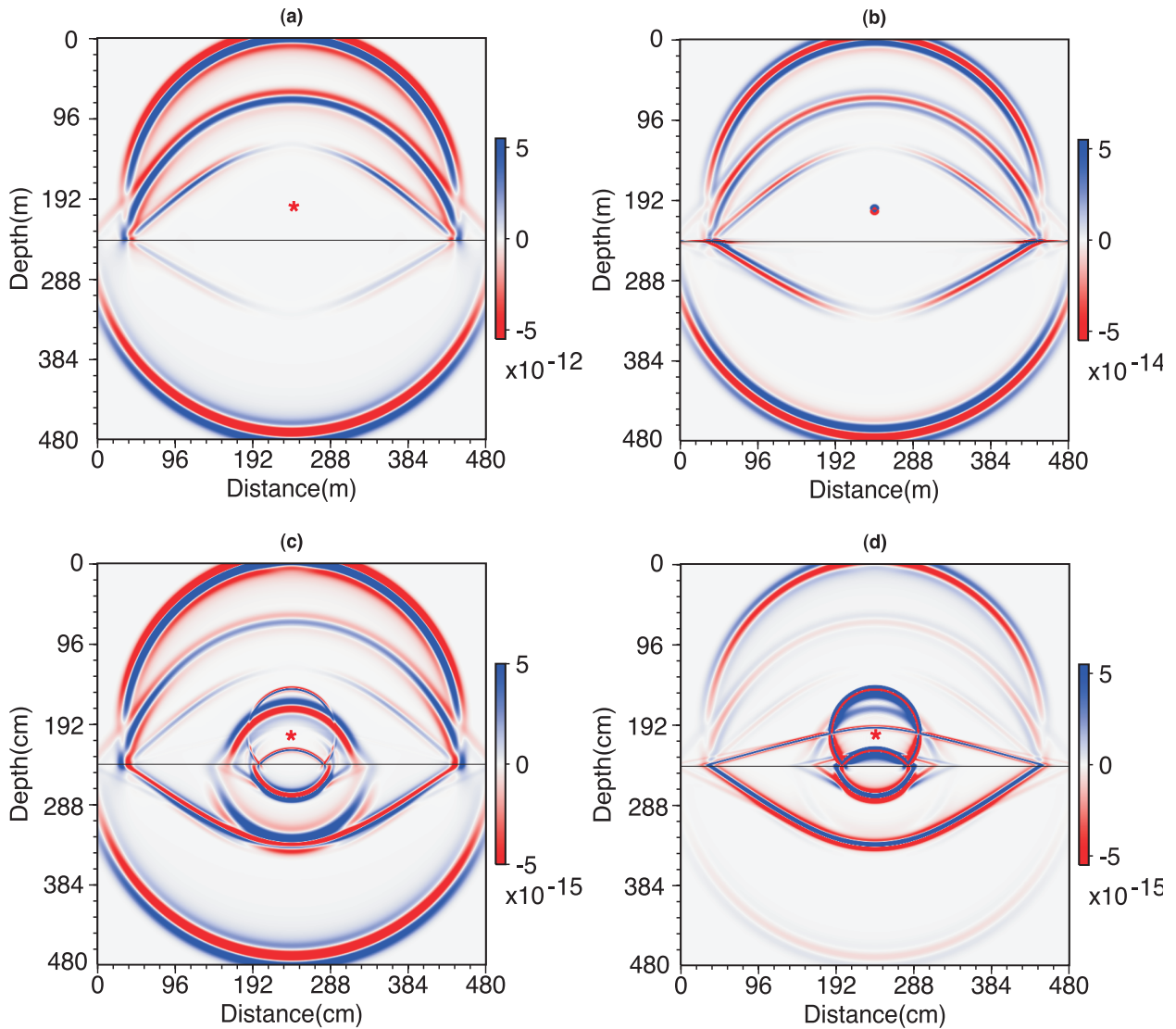


Figura 7.3: Capturas de pantalla de la componente vertical del modelo de contacto gas-agua: (a) y (c) velocidad del sólido; (b) y (d) velocidad relativa (con respecto al sólido) del fluido.

sísmica se debe ajustar con el dominio numérico. De las 501 muestras de tiempo (filas de etiquetas) sólo se consideran, en este análisis, 156 muestras que corresponden a un intervalo de profundidad de [1600.6, 2600.3] ft. En este modelo se consideran tres estratos: los estratos superior e inferior los cuales están saturados con salmuera (agua salada) y el estrato que queda entre estos dos el cual está saturado con aceite. El estrato saturado con aceite está en el intervalo de profundidad [2445, 2460] ft. La figura 7.5 muestra un esquema del medio complejo con los tres estratos. Los valores del lado izquierdo y la parte de arriba muestran las dimensiones reales del medio (medido en pies) y la ubicación del estrato idealizado. El lado derecho y la parte inferior muestra las dimensiones en la matriz (dominio discreto).

El área que se requiere modelar en este problema es de mayor longitud en la dirección x (su-

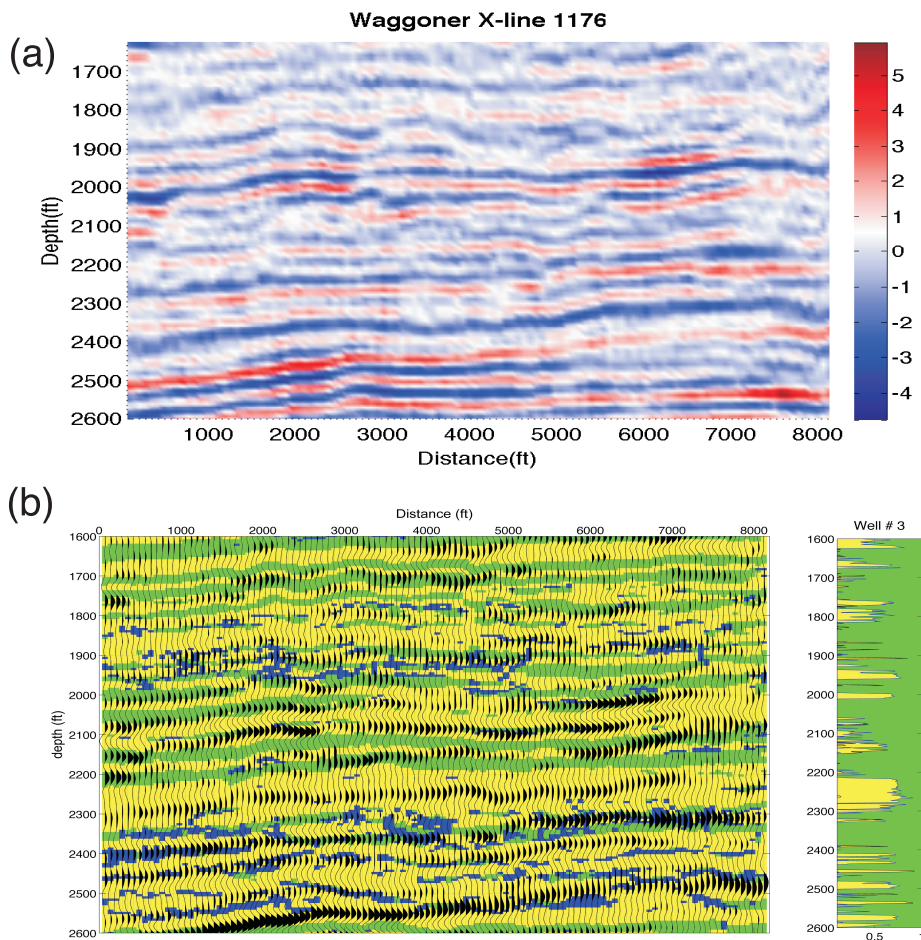


Figura 7.4: (a) Sección sísmica de la línea de cruce 1176 del Rancho Waggoner. (b) Tres etiquetas sísmicas para la línea sísmica Waggoner: arenas (amarillo), esquistos (verde) y calizas (azul) obtenidas de la clasificación SOM. Además, se bosquejan las etiquetas que fueron calculadas directamente de los datos de la sección del pozo.

perficie) en comparación con la dirección z (profundidad). Por tanto, para hacer manejables el espaciamiento entre puntos malla y mantener estabilidad numérica del esquema OISFD, se define la dimensión de la malla numérica (malla alternada) como $N_x=1624$, $N_z=312$ con $\Delta x = 4.5\text{ft}$ y $\Delta z = 3.2\text{ft}$.

Dado que la matriz de etiquetas, ha sido reducida y proviene de la clasificación SOM, tiene una dimensión de 156×116 , lo cual requiere una malla numérica de mayor dimensión y es necesario hacer un ajuste. En consecuencia, en la dirección x (superficie) cada columna se repite 14 veces (con sus respectivas etiquetas) con el fin de obtener 1624 nodos (observar que $116 * 14 = 1624$). Para cubrir el área total de las estaciones es necesario un tamaño de paso, respecto a esa dirección, de $8000\text{ft}/1624$, i.e., se necesita $\Delta x = 4.5\text{ft}$. Las propiedades físicas en estos nodos se otorgan de acuerdo a la etiqueta que le fue asignada por la clasificación SOM en cada traza (columna).

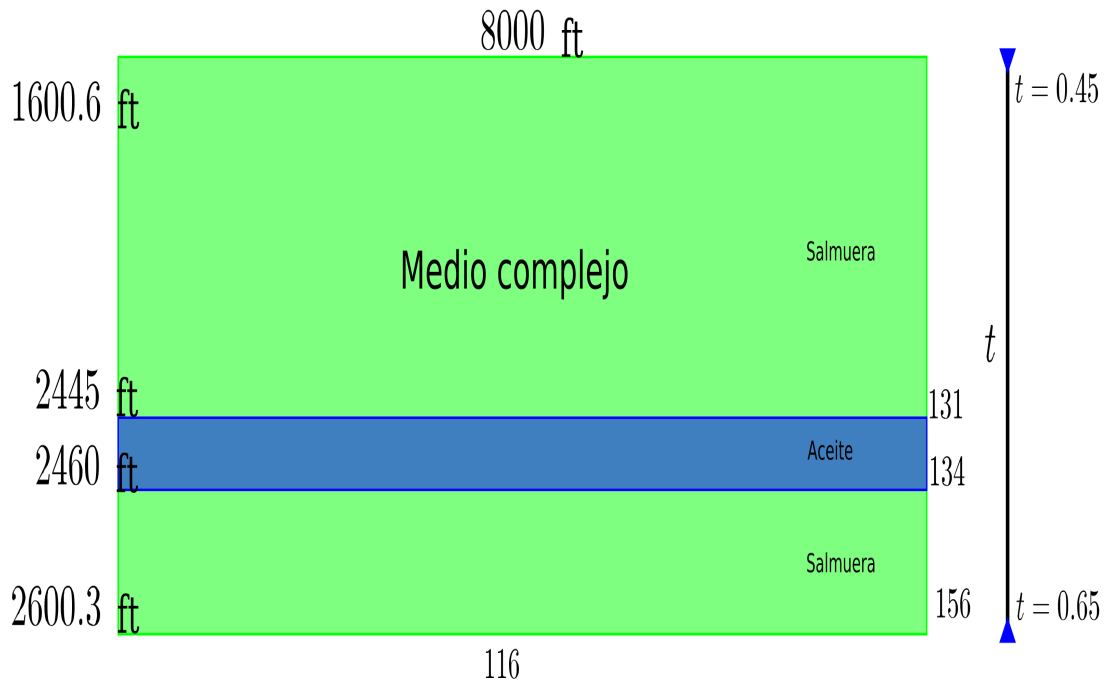


Figura 7.5: Bosquejo del medio poroelástico y la ubicación espacial de los estratos.

En la dirección z (profundidad) se realiza un procedimiento similar. Se requiere modelar una distancia de 1000ft y se tienen 156 etiquetas correspondientes a la profundidad. De acuerdo al valor N_z , se necesita un tamaño de paso $\Delta z=3.2\text{ft}$ para cubrir la distancia. Es evidente que las filas (etiqueta) no son suficientes si se desea cubrir toda la profundidad y esto lleva a duplicar cada fila y en consecuencia se obtienen 312 (observar que $156*2=312$) nodos. Con estos valores de Δx y Δz se puede garantizar la estabilidad numérica y dispersión numérica mínima. Todos los experimentos numéricos utilizan un paso de tiempo de $\Delta t=0.00001\text{s}$. Con esta configuración se tiene en promedio 30 estratos (por traza) con un mínimo de 20 estratos y un máximo de 39. Estas trazas se definen de acuerdo a las etiquetas que le corresponden de la clasificación SOM y son de diferentes anchos, ver figura 7.6.

Como primer experimento, se usa una función fuente del tipo Ricker (5.24) y frecuencia dominante $f_c = 110\text{Hz}$. La figura 7.7 muestra la traza sísmica y su espectro de frecuencias. Se puede observar que el máximo de frecuencias ronda en los 130Hz. Así que la frecuencia dominante de la fuente que se utiliza para excitar el sistema pertenece al rango de los datos reales.

La fuente explosiva, como en los ejemplos clásicos, está localizado en el centro del dominio numérico, i.e., en términos de puntos de la malla los cuales son $x_0 = 156$ y $z_0 = 812$.

En la figura 7.8 se muestran capturas de pantalla de la presión poral que ilustran la propagación de ondas en un medio heterogéneo del rancho Waggoner obtenidos con el esquema OISFD en el tiempo (a) $t = 0.24\text{s}$, (b) $t = 0.24\text{s}$ y (c) $t = 0.24\text{s}$. Para tener un efecto realista se incluye como fondo la sección sísmica con las etiquetas de los tres materiales sólidos de

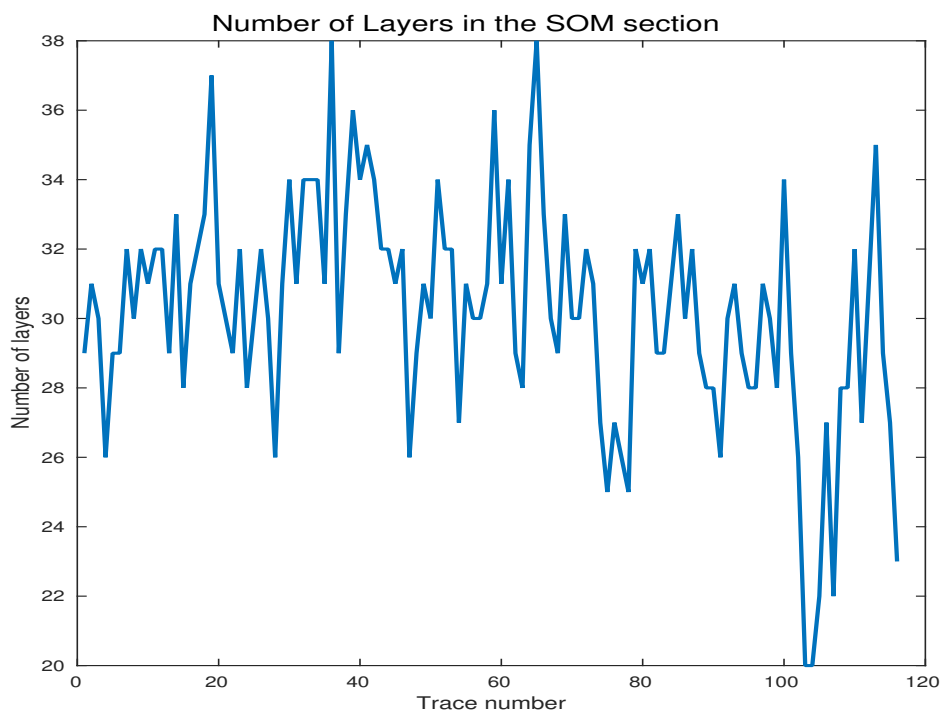


Figura 7.6: La gráfica muestra el número de estratos de cada traza de la región a modelar. Cada cambio en el material de una traza se considera un estrato nuevo.

acuerdo con la figura (b) 7.4.

Como segundo experimento, se simula una fuente más realista: una onda plana incidente, normal a la superficie, se transmite desde la superficie y llega a la profundidad de 1600ft. El efecto de onda plana se logra aplicando una hilera de fuentes en la parte superior del dominio numérico. En los sismogramas sintéticos resultantes se elimina el efecto inicial de la onda plana (este efecto se debe a las fuentes aplicadas a la profundidad de 1600ft), porque en realidad no existe una fuente a esta profundidad. Por tanto, sólo se conserva la respuesta sísmica sin el efecto de la onda plana incidente (fuente). Cada elemento de la hilera de fuentes que se usa en este experimento, se define como (5.24) y la frecuencia dominante (central) es de $f_c = 110\text{Hz}$. Al igual que en el caso anterior se usan los datos de la Tabla 7.1 como datos de entrada del esquema numérico y se calculan los sismogramas (trazas) sintéticos; las señales grabadas por los receptores son las componentes verticales de las velocidades en el sólido y en el fluido (respecto al sólido).

La figura 7.9 ilustra la traza sintética completa que proviene de la simulación numérica del esquema OISFD para cada uno de los modelos elástico, poroacústico y poroelástico. Las líneas verticales punteadas en color negro limitan la ventana de tiempo que se muestra en la figura 7.10, la cual corresponde al área de principal interés, debido a que incluye la arena productiva del tipo Milliham. El efecto de la fuente se puede observar claramente al inicio del sismograma. Como era de esperarse los sismogramas correspondientes a los casos poroelástico y poroacústico son más atenuados que el sismograma que corresponde al caso

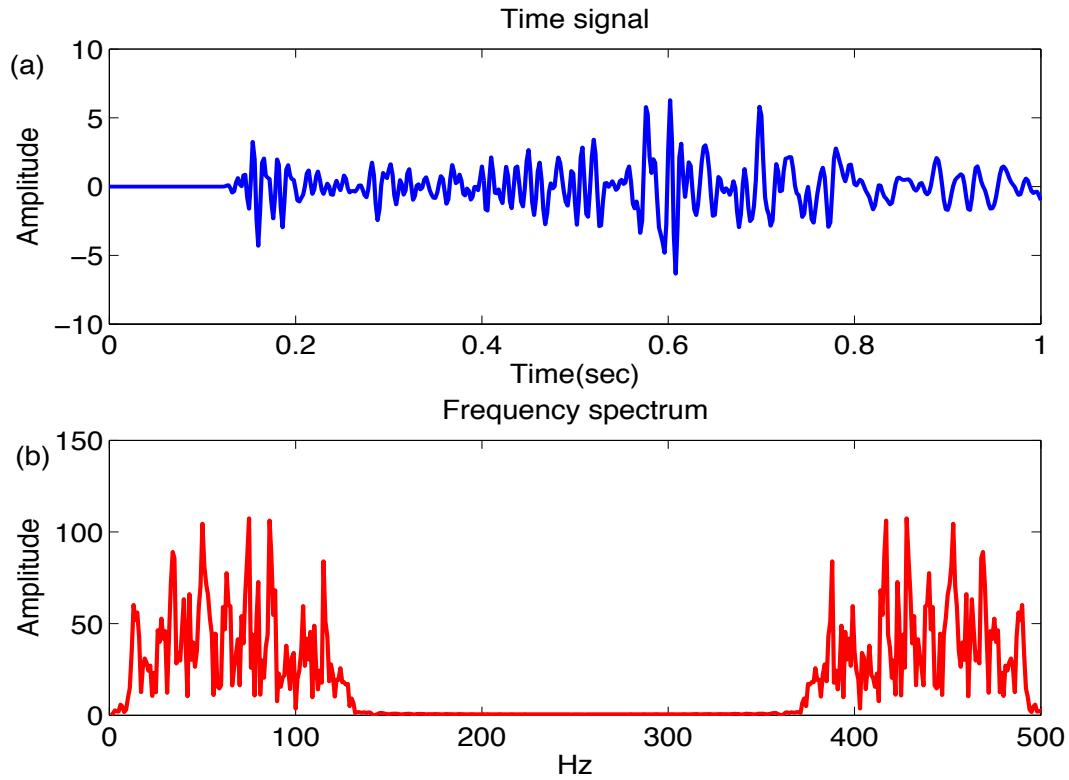


Figura 7.7: (a) Traza sísmica real que corresponde a pozo perforado y su (b) espectro de frecuencias.

elástico.

Las trazas sintéticas del sólido se comparan con las trazas reales observadas en el pozo, que sirven de referencia. En la figura 7.10 se comparan la traza observada (real) con las trazas sintéticas que provienen de los modelos poroelástico, poroacústico y elástico (sismograma negro, azul, morado y rojo, respectivamente).

El medio está parcialmente saturado de hidrocarburos y salmuera y en consecuencia las ondas crean una deformación en el medio poroso. La viscosidad se pierde durante la inducción del fluido llevando a una pérdida irreversible de energía y el resultado es en una onda atenuada Parra et al. (2015). Además, se puede observar que los modelos poroelástico y poroacústico producen trazas de comportamientos (tendencias) similares. Estos resultados concuerdan con Özdenvar & McMechan (1997), los cuales también sugieren en este artículo, usar el modelo más completo para obtener sismogramas con la escala correcta.

Aunque no se espera que la combinación del esquema OISFD y la clasificación SOM reproduzca de manera precisa los datos reales, los datos sintéticos capturan las tendencias principales (reflexiones, incluso múltiples, por la naturaleza de capas del modelo) de las trazas reales. De la figura 7.10 se observa que el modelo poroelástico produce mejores aproximaciones en comparación con los modelos poroacústico y elástico. Es importante enfatizar que las escalas de las trazas se normalizaron para realizar la comparación.

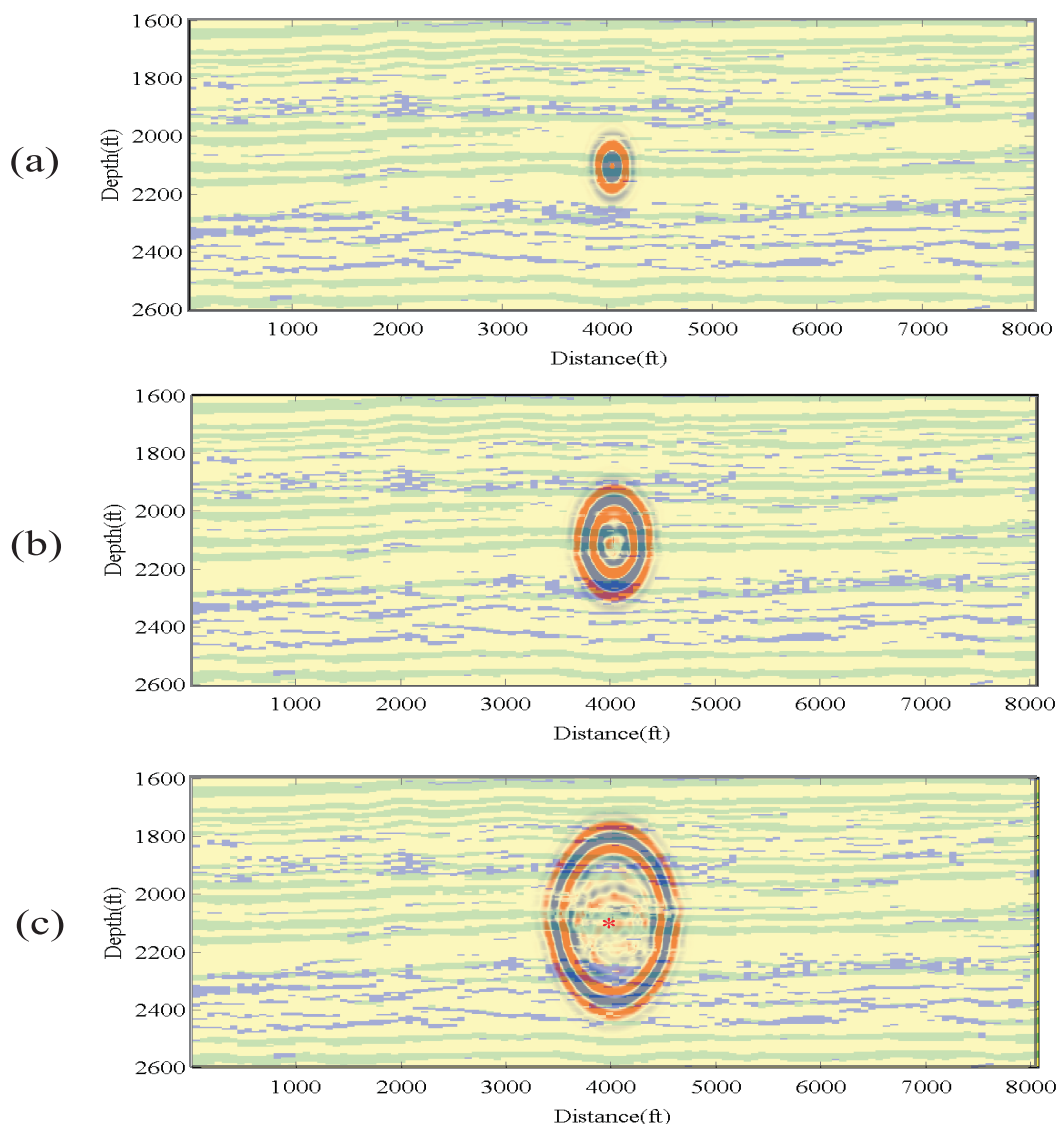


Figura 7.8: Capturas de pantallas de la presión poral usando el esquema OISFD y las propiedades del material del modelo poroso heterogéneo en los tiempos (a) $t = 0.24s$ (b) $t = 0.24s$ (c) $t = 0.24s$. Las capturas tienen como fondo la litografía del medio.

4. Conclusiones

Se proponen dos esquemas implícitos sobre mallas alternadas y ambos esquemas reproducen correctamente la solución analítica, en particular, la onda P -lenta en un medio poroso homogéneo e isotrópico. Es decir, los esquemas propuestos tienen la habilidad de reproducir los modos de onda cuando el mecanismo de Biot es activado. Se simuló la propagación de ondas en un medio poroso con dos estratos y se obtuvieron buenos resultados en comparación con trabajos previos citados en la literatura.

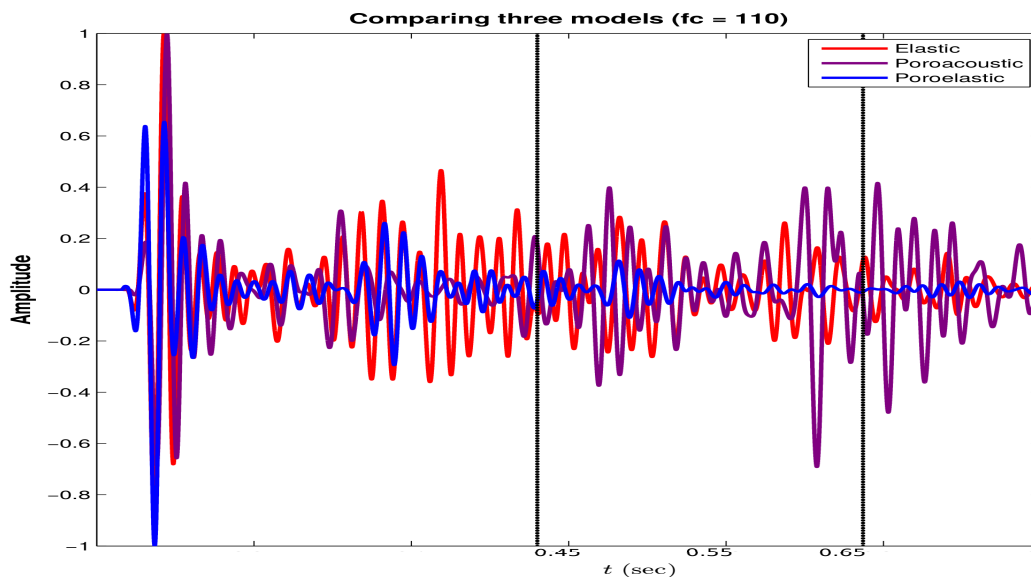


Figura 7.9: Componente vertical del desplazamiento del sólido (traza sintética v_z) de los modelos elástico, poroacústico y poroelástico. Las líneas negras delimitan la ventana de tiempo que se muestra en la figura 7.10 y corresponden al intervalo de profundidad [1600.6 , 2600.3] ft. Al inicio de las trazas sintéticas se observan mayores amplitudes que corresponden al efecto de la fuente.

Debido al uso de frecuencias altas el método seleccionado fue el correspondiente al de diferencias finitas implícitas óptimas y en ese caso la discretización en la variable temporal fue explícita. Los esquemas FD implícitos óptimos usan pesos que corresponden a la exactitud 10^{-8} . En el ejemplo más realista, donde los datos fueron obtenidos del rancho Waggoner, el esquema FD logró capturar trazas sísmicas sintéticas semejantes a los sismogramas reales tomadas en el sitio. La simulación también deja observar que las ecuaciones elásticas, poroacústicas y poroelásticas producen sismogramas sintéticos diferentes. Las ecuaciones poroacústicas y poroelásticas mantienen semejanzas en sus trazas, tienen un comportamiento similar en cuanto a las oscilaciones, sin embargo las ecuaciones poroelásticas son un modelo más completo e incluye un mecanismo de atenuación debido a los cambios de fase y que no presenta el caso poroacústico. Es decir, el modelo poroelástico mostró mejor aproximación al traza sintética.

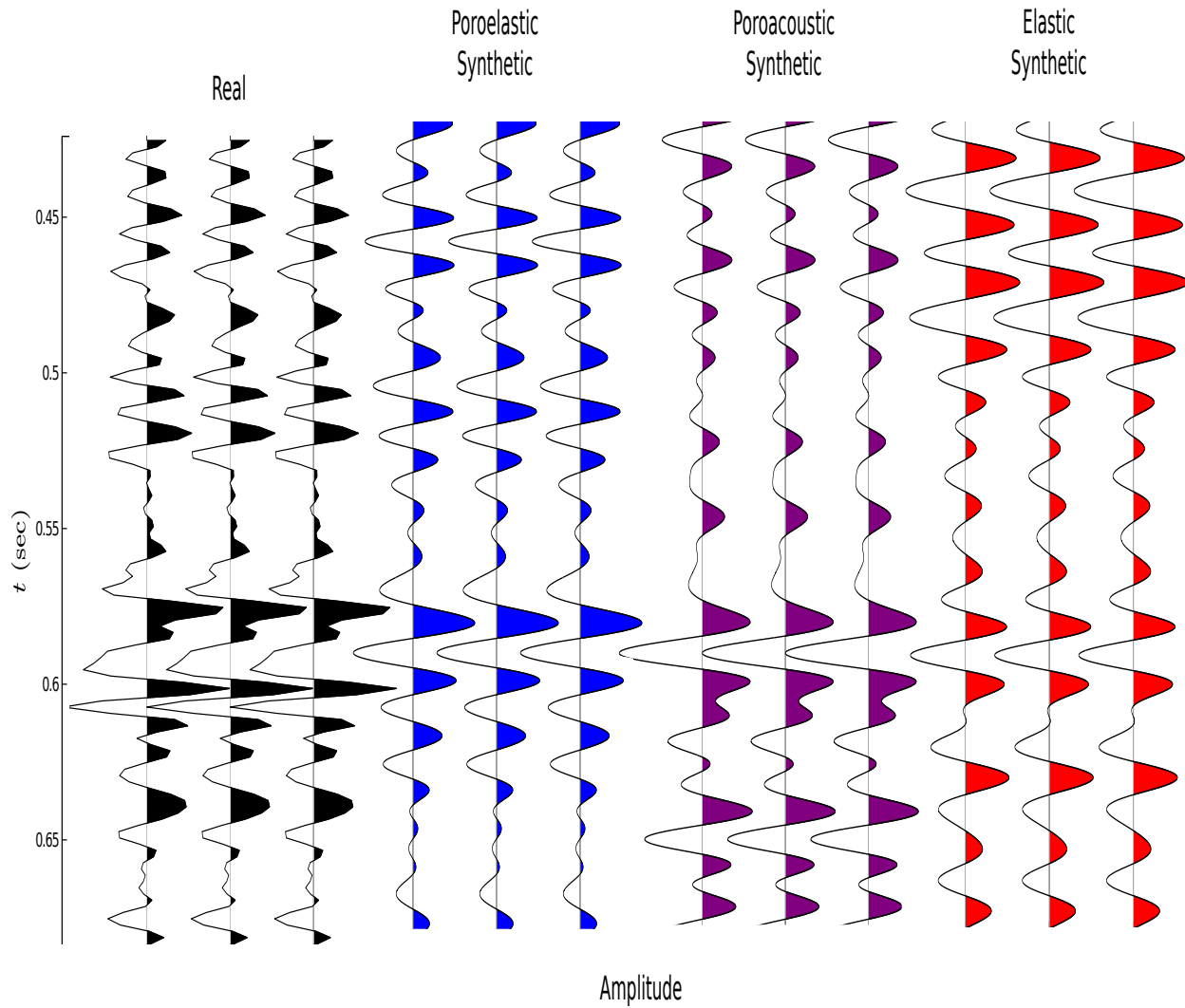


Figura 7.10: Comparación entre el sismograma real y los sismogramas sintéticos. Todos los sismogramas están normalizados con el objetivo de hacer una comparación visual en la sección de interés.

Conclusiones y trabajo futuro

1. Conclusiones finales

Se desarrolló la formulación velocidad-esfuerzo del modelo poroelástico para frecuencias bajas. Se incluyeron la notación y definiciones de los parámetros y constantes que son requeridos con el objetivo del correcto desarrollo y explicación de las ecuaciones poroelásticas.

Los esquemas numéricos de diferencias finitas implícitas se explican a detalle y se implementaron para determinar, a modo de ejemplo, derivadas de funciones de una variable. Se verifica que cuando la frontera no afecta la discretización, el orden de exactitud de los esquemas se alcanza. Como parte del estudio riguroso de los esquemas numéricos propuestos se realizó el análisis de estabilidad y dispersión numérica y se usa el análisis de von Neumann. El análisis de estabilidad, analítico/numérico, muestra que los esquemas implícitos en la variable espacial tienen la ventaja de ofrecer una mejor región de estabilidad en comparación con los esquemas FD explícitos. El análisis de dispersión sugiere que si se desea tener una buena aproximación es necesario un muestreo de por lo menos diez nodos por longitud de arco y esto se usa cuando se determina la resolución del problema. En la simulación numérica de los ejemplos finales se utilizó el esquema de diferencias finitas implícitas óptimas, debido a que este esquema es bastante preciso aún en frecuencias altas. Otras ventajas de los esquemas óptimos es que requieren menos nodos de evaluación, mantienen la precisión y reducen la dispersión numérica.

La siguiente lista resume los puntos principales de este trabajo:

- Se propusieron esquemas numéricos basados en diferencias finitas implícitas para la discretización del sistema de ecuaciones poroelásticas.
- Se analizó la estabilidad numérica del esquema en diferencias finitas implícitas (IFD). El análisis para determinar la condición de Courant también es válido para esquemas implícitos óptimos (OIFD) o explícitos (EFD).
- Se mejoró la región de estabilidad respecto a esquemas explícitos.
- Se analiza la dispersión numérica del esquema IFD. El análisis para determinar la fórmula de dispersión es válido para esquemas implícitos óptimos (OIFD) o explícitos (EFD).
- Los esquemas IFD implementados pueden ser del tipo “óptimos” o no y se hacen sobre una malla alternada. La ventaja de los esquemas óptimos es que requieren menos nodos de evaluación y mantienen la precisión.
- Se implementan los esquemas propuestos para modelar datos reales.

- Se logran capturar trazas sísmicas sintéticas semejantes a los sismogramas reales tomadas en el sitio.

2. Trabajo futuro

En la discusión de este trabajo se presentó una herramienta versátil y poderosa para la simulación numérica de propagación de ondas. Además se explotaron esas bondades al momento de implementarse en la solución de un problema real. Sin embargo es posible trabajar en mejoras con la idea de resolver interrogantes que quizá por el momento están abiertas.

- Agregar una frontera absorbente mas eficaz, por ejemplo Perfect Matched Layer (PML), y evitar las pequeñas oscilaciones que se genera cuando la fuente esta cercana a las fronteras. Estudiar el caso cuando el lado superior del dominio numérico representa una superficie libre.
- Realizar la migración natural al dominio 3D. Esto para tener una descripción más completa del modelo.
- Realizar una paralelización usando tarjetas de procesamiento gráfico (GPU).
- Mejorar el orden de precisión temporal a través de los métodos Runge-Kutta o Predictor-Corrector.

Anexo: Álgebra lineal

Polinomio característico de una matriz \mathbf{A}

Sea desea resolver el problema de valores y vectores propios

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} = x\mathbf{Y}, \quad (\text{A.1})$$

donde x es un real, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2)^T$ es un vector y \mathbf{A} es una matriz de 2×2 , definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Resolver el problema de valores y vectores propios definido por (A.1) equivale determinar x e \mathbf{Y} , tales que satisfacen

$$(\mathbf{A} - x\mathbf{I})\mathbf{Y} = 0,$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 2×2 .

Resolver la última ecuación, equivale determinar x e \mathbf{Y} , tal que la matriz $\mathbf{A} - x\mathbf{I}$ es singular, i.e., determinar las raíces que satisfacen la *ecuación característica*

$$\det[\mathbf{A} - x\mathbf{I}] = 0, \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo (A.2) en (A.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} \\ &= (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \\ &= x^2 - \text{tr}(\mathbf{A})x + \det(\mathbf{A}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde $\text{tr}(\mathbf{A}) = a + d$ y $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$, son la traza y el determinante, respectivamente, usuales de la matriz \mathbf{A} .

Las soluciones del polinomio característico (A.4) son:

$$x_{\pm} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\text{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A})}}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Los vectores propios \mathbf{Y} , se determinan usando (A.5).

Complemento de Schur: solución de sistemas lineales por bloques

Algunos métodos numéricos se reducen a analizar sistemas de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times m} \\ C_{m \times n} & D_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n \times 1} \\ \mathbf{y}_{m \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{n \times 1} \\ \mathbf{q}_{m \times 1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

donde A , B , C , D son matrices reales y \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{p} , \mathbf{q} son vectores reales, i.e., las componentes de las matrices y vectores, se suponen reales. Se define la matriz \mathcal{M} como:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Si A es no singular, entonces el complemento de Schur de \mathcal{M} respecto a A es:

$$\mathcal{M}/A =: D - CA^{-1}B.$$

En este caso, eliminando \mathbf{x} en (A.6) y resolviendo para \mathbf{y} se obtiene:

$$\mathbf{y} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(\mathbf{q} - CA^{-1}\mathbf{p}) = (\mathcal{M}/A)^{-1}(\mathbf{q} - CA^{-1}\mathbf{p}). \quad (\text{A.7})$$

Si D es no singular, entonces el complemento de Schur de \mathcal{M} respecto a D es:

$$\mathcal{M}/D =: A - BD^{-1}C.$$

En este caso, eliminando \mathbf{y} en (A.6) y resolviendo para \mathbf{x} se obtiene:

$$\mathbf{x} = (A - BD^{-1}C)^{-1}(\mathbf{p} - BD^{-1}\mathbf{q}) = (\mathcal{M}/D)^{-1}(\mathbf{p} - BD^{-1}\mathbf{q}). \quad (\text{A.8})$$

Cuando A y D son no singulares la solución del sistema (A.6) está dado por (A.7) y (A.8).

Anexo: Diferencias finitas y el método LOD

Diferencias finitas implícitas y el método LOD

Dado que se implementará el método local de 1-dimensión (LOD por sus siglas en inglés), el sistema de ecuaciones (5.1) se dividirá en dos medios pasos, que al discretizar son medios pasos de tiempo, y quedan como sigue:

Primer medio paso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r^2\dot{v}_x &= m\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{2}\rho_f bV_x + \rho_f\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{1}{2}r^2\dot{v}_z &= m\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{2}\rho_f bV_z, \\ \frac{1}{2}r^2\dot{V}_x &= -\rho_f\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{2}\rho bV_x - \rho\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{1}{2}r^2\dot{V}_z &= -\rho_f\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{2}\rho bV_z, \\ \frac{1}{2}\dot{\tau}_{xx} &= (\lambda_c + 2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \alpha M\frac{\partial V_x}{\partial x}, \\ \frac{1}{2}\dot{\tau}_{zz} &= \lambda_c\frac{\partial v_x}{\partial x} + \alpha M\frac{\partial V_x}{\partial x}, \\ \frac{1}{2}\dot{\tau}_{xz} &= \mu\frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \frac{1}{2}\dot{p} &= -\alpha M\frac{\partial v_x}{\partial x} - M\frac{\partial V_x}{\partial x}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Segundo medio paso:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}r^2\dot{v}_x &= m\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + \frac{1}{2}\rho_f bV_x, \\
\frac{1}{2}r^2\dot{v}_z &= m\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{2}\rho_f bV_z + \rho_f\frac{\partial p}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}r^2\dot{V}_x &= -\rho_f\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{2}\rho bV_x, \\
\frac{1}{2}r^2\dot{V}_z &= -\rho_f\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{2}\rho bV_z - \rho\frac{\partial p}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\dot{\tau}_{xx} &= \lambda_c\frac{\partial v_z}{\partial z} + \alpha M\frac{\partial V_z}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\dot{\tau}_{zz} &= (\lambda_c + 2\mu)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \alpha M\frac{\partial V_z}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\dot{\tau}_{xz} &= \mu\frac{\partial v_x}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\dot{p} &= -\alpha M\frac{\partial v_z}{\partial z} - M\frac{\partial V_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Una posible simplificación algebraica de la discretización, requiere adoptar una notación similar a (5.14), entonces $\mathcal{U}_{i,j}^n = v_x(z_i, x_j, t_n)$, $\mathcal{V}_{i,j}^n = V_x(z_i, x_j, t_n)$, $\mathcal{W}_{i,j}^n = v_z(z_i, x_j, t_n)$, $\mathcal{Z}_{i,j}^n = V_z(z_i, x_j, t_n)$, $\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{ab,n} = \tau_{ab}(z_i, x_j, t_n)$, y $\mathbf{p}_{i,j}^n = p(z_i, x_j, t_n)$, donde $t_n = n\Delta t$, $x_j = j\Delta x$, $z_i = i\Delta z$ y $a, b \in \{x, z\}$. Y la notación auxiliar de los sub-índices y super-índices son:

$$l + \frac{3}{2} \rightarrow l \oplus 1, \quad l + \frac{1}{2} \rightarrow l \oplus, \quad l - \frac{1}{2} \rightarrow l \ominus.$$

Para obtener un esquema implícito en los dos medios pasos de tiempo, se usa diferencias finitas centrales en la variable temporal (4.1) y el esquema de Crank-Nicolson en la variable espacial (4.2).

Se realiza la discretización de las ecuaciones que contienen las velocidades, esfuerzos normales y la presión en cada medio paso de tiempo. Como ejemplo, sólo discretiza el primer medio paso de tiempo y el segundo medio paso de tiempo sigue una lógica similar (sólo se debe tener cuidado con los índices). El conjunto de ecuaciones (B.1) produce el siguiente conjunto de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \chi_{i,j+1/2}\mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \varphi_{i,j+1/2}(\boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N+1/2} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{xx,N+1/2}) - \xi_{i,j+1/2}(\mathbf{p}_{i,j+1}^{N+1/2} - \mathbf{p}_{i,j}^{N+1/2}) = \\
\mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N-1/2} + \chi_{i,j+1/2}\mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N-1/2} + \varphi_{i,j+1/2}(\boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{xx,N}) + \xi_{i,j+1/2}(\mathbf{p}_{i,j+1}^N - \mathbf{p}_{i,j}^N),
\end{aligned} \tag{B.3}$$

donde $\chi_{i,j+1/2} = \frac{\rho_f b \Delta t}{r^2}$, $\varphi_{i,j+1/2} = \frac{m \Delta t}{r^2 \Delta x}$ y $\xi_{i,j+1/2} = \frac{\rho_f \Delta t}{r^2 \Delta x}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N+1/2} - \chi_{i+1/2,j}\mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N+1/2} - \varphi_{i+1/2,j}(\boldsymbol{\tau}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N+1/2} - \boldsymbol{\tau}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N+1/2}) = \\
\mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N-1/2} + \chi_{i+1/2,j}\mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N-1/2} + \varphi_{i+1/2,j}(\boldsymbol{\tau}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N} - \boldsymbol{\tau}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N}),
\end{aligned} \tag{B.4}$$

donde $\chi_{i+1/2,j} = \frac{\rho_f \underline{b} \Delta t}{r^2}$ y $\varphi_{i+1/2,j} = \frac{\underline{m} \Delta t}{r^2 \Delta x}$.

$$\begin{aligned} & (1 + \theta_{i,j+1/2}) \mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2} + \xi_{i,j+1/2} (\mathcal{T}_{i,j+1}^{xx,N+1/2} - \mathcal{T}_{i,j}^{xx,N+1/2}) + \omega_{i,j+1/2} (\mathbf{p}_{i,j+1}^{N+1/2} - \mathbf{p}_{i,j}^{N+1/2}) = \\ & (1 - \theta_{i,j+1/2}) \mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N-1/2} - \xi_{i,j+1/2} (\mathcal{T}_{i,j+1}^{xx,N} - \mathcal{T}_{i,j}^{xx,N}) - \omega_{i,j+1/2} (\mathbf{p}_{i,j+1}^N - \mathbf{p}_{i,j}^N), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde $\theta_{i,j+1/2} = \frac{\rho \underline{b} \Delta t}{r^2}$, $\xi_{i,j+1/2} = \frac{\rho_f \Delta t}{r^2 \Delta x}$ y $\omega_{i,j+1/2} = \frac{\rho \Delta t}{r^2 \Delta x}$.

$$\begin{aligned} & (1 + \theta_{i+1/2,j}) \mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N+1/2} + \xi_{i+1/2,j} (\mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N+1/2} - \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N+1/2}) = \\ & (1 - \theta_{i+1/2,j}) \mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N-1/2} - \xi_{i+1/2,j} (\mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N} - \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N}), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde $\theta_{i+1/2,j} = \frac{\rho \underline{b} \Delta t}{r^2}$ y $\xi_{i+1/2,j} = \frac{\rho_f \Delta t}{r^2 \Delta x}$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{i,j}^{xx,N+1/2} - \delta_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{i,j-1/2}^{N+1/2}) - \eta_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{i,j-1/2}^{N+1/2}) = \\ & \mathcal{T}_{i,j}^{xx,N-1/2} + \delta_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j+1/2}^N - \mathcal{U}_{i,j-1/2}^N) + \eta_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j+1/2}^N - \mathcal{V}_{i,j-1/2}^N), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde $\delta_{i,j} = \frac{(\lambda_c + 2\mu) \Delta t}{\Delta x}$ y $\eta_{i,j} = \frac{\alpha M \Delta t}{\Delta x}$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{i,j}^{zz,N+1/2} - \sigma_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{i,j-1/2}^{N+1/2}) - \eta_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{i,j-1/2}^{N+1/2}) = \\ & \mathcal{T}_{i,j}^{zz,N-1/2} + \sigma_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j+1/2}^N - \mathcal{U}_{i,j-1/2}^N) + \eta_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j+1/2}^N - \mathcal{V}_{i,j-1/2}^N), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde $\sigma_{i,j} = \frac{\lambda_c \Delta t}{\Delta x}$ y $\eta_{i,j} = \frac{\alpha M \Delta t}{\Delta x}$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N+1/2} - \gamma_{i+1/2,j+1/2} (\mathcal{W}_{i+1/2,j+1}^{N+1/2} - \mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N+1/2}) = \\ & \mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N-1/2} + \gamma_{i+1/2,j+1/2} (\mathcal{W}_{i+1/2,j+1}^N - \mathcal{W}_{i+1/2,j}^N), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde $\gamma_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\mu \Delta t}{\Delta x}$.

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_{i,j}^{N+1/2} + \eta_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{i,j-1/2}^{N+1/2}) + \phi_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{i,j-1/2}^{N+1/2}) = \\ & \mathbf{p}_{i,j}^{N-1/2} - \eta_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j+1/2}^N - \mathcal{U}_{i,j-1/2}^N) - \phi_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j+1/2}^N - \mathcal{V}_{i,j-1/2}^N), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde $\eta_{i,j} = \frac{\alpha M \Delta t}{\Delta x}$ y $\phi_{i,j} = \frac{M \Delta t}{\Delta x}$.

Los parámetros \underline{m} , ρ_f , \underline{b} , ρ , $\underline{\mu}$ se definen según corresponda con las ecuaciones (5.2), (5.3), (5.4). Además, r^2 se define como en (3.40) pero usando los valores promedios de los parámetros.

Se desea resolver las ecuaciones de diferencias para los campos de velocidades y esto lleva realizar algunas sustituciones. Se modifican los índices de las ecuaciones (B.7) y (B.10) sumando 1 a la componente “espacial”, obteniendo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N+1/2} - \delta_{i,j+1}(\mathcal{U}_{i,j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N+1/2}) - \eta_{i,j+1}(\mathcal{V}_{i,j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2}) = \\ \boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N-1/2} + \delta_{i,j+1}(\mathcal{U}_{i,j+3/2}^N - \mathcal{U}_{i,j+1/2}^N) + \eta_{i,j+1}(\mathcal{V}_{i,j+3/2}^N - \mathcal{V}_{i,j+1/2}^N), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{i,j+1}^{N+1/2} + \eta_{i,j+1}(\mathcal{U}_{i,j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{U}_{i,j+1/2}^{N+1/2}) + \phi_{i,j+1}(\mathcal{V}_{i,j+3/2}^{N+1/2} - \mathcal{V}_{i,j+1/2}^{N+1/2}) = \\ \mathbf{p}_{i,j}^{N-1/2} - \eta_{i,j+1}(\mathcal{U}_{i,j+3/2}^N - \mathcal{U}_{i,j+1/2}^N) - \phi_{i,j+1}(\mathcal{V}_{i,j+3/2}^N - \mathcal{V}_{i,j+1/2}^N). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Se despeja \mathbf{p} y $\boldsymbol{\tau}$ en el tiempo $N + 1/2$ de las ecuaciones (B.7), (B.11), (B.10), (B.12) y se sustituyen en las ecuaciones (B.3), (B.5). Después de despejar las velocidades \mathcal{U} , \mathcal{V} en el tiempo $N + 1/2$ y un poco de álgebra se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \mathcal{U}_{i,j\oplus 1}^{N\oplus} + (1 + \mathcal{B}_1) \mathcal{U}_{i,j\oplus}^{N\oplus} + \mathcal{C}_1 \mathcal{U}_{i,j\ominus}^{N\oplus} + \mathcal{D}_1 \mathcal{V}_{i,j\oplus 1}^{N\oplus} + (\mathcal{E}_1 - \chi_{i,j\oplus}) \mathcal{V}_{i,j\oplus}^{N\oplus} + \mathcal{F}_1 \mathcal{V}_{i,j\ominus}^{N\oplus} \\ = -\mathcal{A}_1 \mathcal{U}_{i,j\oplus 1}^N - \mathcal{B}_1 \mathcal{U}_{i,j\oplus}^N - \mathcal{C}_1 \mathcal{U}_{i,j\ominus}^N - \mathcal{D}_1 \mathcal{V}_{i,j\oplus 1}^N - \mathcal{E}_1 \mathcal{V}_{i,j\oplus}^N - \mathcal{F}_1 \mathcal{V}_{i,j\ominus}^N + \mathcal{U}_{i,j\oplus}^{N\ominus} \\ + \chi_{i,j\oplus} \mathcal{V}_{i,j\oplus}^{N\ominus} + \varphi_{i,j\oplus} (\boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{xx,N} + \boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N\ominus} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{xx,N\ominus}) \\ + \xi_{i,j\oplus} (\mathbf{p}_{i,j+1}^N - \mathbf{p}_{i,j}^N + \mathbf{p}_{i,j+1}^{N\ominus} - \mathbf{p}_{i,j}^{N\ominus}), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 \mathcal{U}_{i,j\oplus 1}^{N\oplus} + \mathcal{B}_2 \mathcal{U}_{i,j\oplus}^{N\oplus} + \mathcal{C}_2 \mathcal{U}_{i,j\ominus}^{N\oplus} + \mathcal{D}_2 \mathcal{V}_{i,j\oplus 1}^{N\oplus} + (1 + \theta_{i,j\oplus} + \mathcal{E}_2) \mathcal{V}_{i,j\oplus}^{N\oplus} + \mathcal{F}_2 \mathcal{V}_{i,j\ominus}^{N\oplus} \\ = -\mathcal{A}_2 \mathcal{U}_{i,j\oplus 1}^N - \mathcal{B}_2 \mathcal{U}_{i,j\oplus}^N - \mathcal{C}_2 \mathcal{U}_{i,j\ominus}^N - \mathcal{D}_2 \mathcal{V}_{i,j\oplus 1}^N - \mathcal{E}_2 \mathcal{V}_{i,j\oplus}^N - \mathcal{F}_2 \mathcal{V}_{i,j\ominus}^N \\ + (1 - \theta_{i,j\oplus}) \mathcal{V}_{i,j\oplus}^{N\ominus} - \xi_{i,j\oplus} (\boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{xx,N} + \boldsymbol{\tau}_{i,j+1}^{xx,N\ominus} - \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{xx,N\ominus}) \\ - \omega_{i,j\oplus} (\mathbf{p}_{i,j+1}^N - \mathbf{p}_{i,j}^N + \mathbf{p}_{i,j+1}^{N\ominus} - \mathbf{p}_{i,j}^{N\ominus}), \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\varphi, \delta, \xi, \eta) &= -\varphi_{i,j\oplus} \delta_{i,j+1} + \xi_{i,j\oplus} \eta_{i,j+1}, \\ \mathcal{B}_1(\varphi, \delta, \xi, \eta) &= \varphi_{i,j\oplus} (\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j}) - \xi_{i,j\oplus} (\eta_{i,j+1} + \eta_{i,j}), \\ \mathcal{C}_1(\varphi, \delta, \xi, \eta) &= -\varphi_{i,j\oplus} \delta_{i,j} + \xi_{i,j\oplus} \eta_{i,j}, \\ \mathcal{D}_1(\varphi, \eta, \xi, \phi) &= -\varphi_{i,j\oplus} \eta_{i,j+1} + \xi_{i,j\oplus} \phi_{i,j+1}, \\ \mathcal{E}_1(\varphi, \eta, \xi, \phi) &= \varphi_{i,j\oplus} (\eta_{i,j+1} + \eta_{i,j}) - \xi_{i,j\oplus} (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}), \\ \mathcal{F}_1(\varphi, \eta, \xi, \phi) &= -\varphi_{i,j\oplus} \eta_{i,j} + \xi_{i,j\oplus} \phi_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\xi, \delta, \omega, \eta) &= \xi_{i,j\oplus} \delta_{i,j+1} - \omega_{i,j\oplus} \eta_{i,j+1}, \\ \mathcal{B}_2(\xi, \delta, \omega, \eta) &= -\xi_{i,j\oplus} (\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j}) + \omega_{i,j\oplus} (\eta_{i,j+1} + \eta_{i,j}), \\ \mathcal{C}_2(\xi, \delta, \omega, \eta) &= \xi_{i,j\oplus} \delta_{i,j} - \omega_{i,j\oplus} \eta_{i,j}, \\ \mathcal{D}_2(\xi, \eta, \omega, \phi) &= \xi_{i,j\oplus} \eta_{i,j+1} - \omega_{i,j\oplus} \phi_{i,j+1}, \\ \mathcal{E}_2(\xi, \eta, \phi, \theta) &= -\xi_{i,j\oplus} (\eta_{i,j+1} + \eta_{i,j}) + \omega_{i,j\oplus} (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}), \\ \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \omega, \phi) &= \xi_{i,j\oplus} \eta_{i,j} - \omega_{i,j\oplus} \phi_{i,j}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (B.13) y (B.14) definen un sistema lineal tridiagonal por bloques para las velocidades \mathcal{U} y \mathcal{V} .

El resto de las velocidades generan un sistema de ecuaciones lineales y se determinan como sigue: En la ecuación (B.9) le restamos 1 en la coordenada “espacial”, obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N+1/2} - \gamma_{i+1/2,j-1/2}(\mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N+1/2} - \mathcal{W}_{i+1/2,j-1}^{N+1/2}) = \\ \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N-1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2}(\mathcal{W}_{i+1/2,j}^N - \mathcal{W}_{i+1/2,j-1}^N). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Luego, se despeja \mathcal{T}_{xz} en el tiempo $N + 1/2$ de las ecuaciones (B.9)), (B.15) y se sustituye en las ecuaciones (B.4), (B.6). Después de despejar las velocidades \mathcal{W} , \mathcal{Z} en el tiempo $N + 1/2$ y un poco de álgebra se obtiene:

$$\begin{aligned} -\gamma_{i+1/2,j+1/2}\varphi_{i+1/2,j}\mathcal{W}_{i+1/2,j+1}^{N+1/2} + (1 + \varphi_{i+1/2,j}(\gamma_{i+1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2}))\mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N+1/2} \\ -\gamma_{i+1/2,j-1/2}\varphi_{i+1/2,j}\mathcal{W}_{i+1/2,j-1}^{N+1/2} - \chi_{i+1/2,j}\mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N+1/2} = \gamma_{i+1/2,j+1/2}\varphi_{i+1/2,j}\mathcal{W}_{i+1/2,j+1}^N \\ + (-\varphi_{i+1/2,j}(\gamma_{i+1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2}))\mathcal{W}_{i+1/2,j}^N + \gamma_{i+1/2,j-1/2}\varphi_{i+1/2,j}\mathcal{W}_{i+1/2,j-1}^N \\ + \mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N-1/2} + \chi_{i+1/2,j}\mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N-1/2} + \varphi_{i+1/2,j}(\mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N} - \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N}) \\ + \varphi_{i+1/2,j}(\mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N-1/2} - \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N-1/2}), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} (1 + \theta_{i+1/2,j})\mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N+1/2} + \xi_{i+1/2,j}\gamma_{i+1/2,j+1/2}\mathcal{W}_{i+1/2,j+1}^{N+1/2} - \xi_{i+1/2,j}(\gamma_{i+1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2}) \\ \mathcal{W}_{i+1/2,j}^{N+1/2} + \xi_{i+1/2,j}\gamma_{i+1/2,j-1/2}\mathcal{W}_{i+1/2,j-1}^{N+1/2} = (1 - \theta_{i+1/2,j})\mathcal{Z}_{i+1/2,j}^{N-1/2} \\ - \xi_{i+1/2,j}\gamma_{i+1/2,j+1/2}\mathcal{W}_{i+1/2,j+1}^N + \xi_{i+1/2,j}(\gamma_{i+1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2})\mathcal{W}_{i+1/2,j}^N \\ - \xi_{i+1/2,j}\gamma_{i+1/2,j-1/2}\mathcal{W}_{i+1/2,j-1}^N - \xi_{i+1/2,j}(\mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N} - \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N}) \\ - \xi_{i+1/2,j}(\mathcal{T}_{i+1/2,j+1/2}^{xz,N-1/2} - \mathcal{T}_{i+1/2,j-1/2}^{xz,N-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Finalmente, se despeja \mathcal{Z} en el tiempo $N + 1/2$ de la ecuación (B.17) y se sustituye en la ecuación (B.16). Después de despejar \mathcal{W} en el tiempo $N + 1/2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3\mathcal{W}_{i\oplus,j+1}^{N\oplus} + (1 + \mathcal{B}_3)\mathcal{W}_{i\oplus,j}^{N\oplus} + \mathcal{C}_3\mathcal{W}_{i\oplus,j-1}^{N\oplus} = -\mathcal{A}_3\mathcal{W}_{i\oplus,j+1}^N - \mathcal{B}_3\mathcal{W}_{i\oplus,j}^N - \mathcal{C}_3\mathcal{W}_{i\oplus,j-1}^N + \mathcal{W}_{i\oplus,j}^{N\ominus} \\ + \mathcal{D}_3\mathcal{Z}_{i\oplus,j}^{N\ominus} + \mathcal{E}_3(\mathcal{T}_{i\oplus,j\oplus}^{xz,N} - \mathcal{T}_{i\oplus,j\ominus}^{xz,N} + \mathcal{T}_{i\oplus,j\oplus}^{xz,N\ominus} - \mathcal{T}_{i\oplus,j\ominus}^{xz,N\ominus}), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi, \gamma) &= -\gamma_{i\oplus,j\oplus}\mathcal{E}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi), \\ \mathcal{B}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi, \gamma) &= (\gamma_{i\oplus,j\oplus} + \gamma_{i\oplus,j\ominus})\mathcal{E}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi), \\ \mathcal{C}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi, \gamma) &= -\gamma_{i\oplus,j\ominus}\mathcal{E}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi), \\ \mathcal{D}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi) &= \frac{2\chi_{i\oplus,j}}{1 + \theta_{i\oplus,j}}, \\ \mathcal{E}_3(\xi, \chi, \theta, \varphi) &= \varphi_{i\oplus,j} - \frac{\xi_{i\oplus,j}\chi_{i\oplus,j}}{1 + \theta_{i\oplus,j}}. \end{aligned}$$

Es importante enfatizar que el sistema anterior es tridiagonal.

El conjunto de ecuaciones de diferencias (B.7), (B.8), (B.9), (B.10), (B.13), (B.14), (B.17) y (B.18) es el esquema completo que sirve para determinar velocidades, esfuerzos y presión en cada medio paso de tiempo. Estos valores se determinaran como se explica a continuación:

1. Las ecuaciones (B.13) y (B.14) determinan un sistema lineal tridiagonal por bloque definido

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 \\ H_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

donde

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_2 & 1 + \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_{n-1} & 1 + \mathcal{B}_{n-1} & \mathcal{C}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{A}_n & 1 + \mathcal{B}_n \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 - \chi_{3/2} & \mathcal{F}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_2 & \mathcal{E}_2 - \chi_{5/2} & \mathcal{F}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{D}_{n-1} & \mathcal{E}_{n-1} - \chi_{n-1/2} & \mathcal{F}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{D}_n & \mathcal{E}_n - \chi_{n+1/2} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{Q}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{O}_2 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{Q}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{O}_{n-1} & \mathcal{P}_{n-1} & \mathcal{Q}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{O}_n & \mathcal{P}_n \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 + \theta_{3/2} + \mathcal{S}_1 & \mathcal{T}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{R}_2 & 1 + \theta_{5/2} + \mathcal{S}_2 & \mathcal{T}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{R}_{n-1} & 1 + \theta_{n-1/2} + \mathcal{S}_{n-1} & \mathcal{T}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{R}_n & 1 + \theta_{n+1/2} + \mathcal{S}_n \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} X &= (\mathcal{U}_{1/2}^{N+1/2}, \mathcal{U}_{3/2}^{N+1/2}, \dots, \mathcal{U}_{n+1/2}^{N+1/2})^T, \\ Y &= (\mathcal{V}_{1/2}^{N+1/2}, \mathcal{V}_{3/2}^{N+1/2}, \dots, \mathcal{V}_{n+1/2}^{N+1/2})^T, \\ G_2 &= (g_{1/2}, g_{3/2}, \dots, g_{n+1/2})^T, \\ H_2 &= (h_{1/2}, h_{3/2}, \dots, h_{n+1/2})^T, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} g_{j+1/2} &= -\mathcal{A}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{B}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{C}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^N - \\ &\quad \mathcal{D}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{E}_m \mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{F}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^N + \\ &\quad \chi_{j+1/2} \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} + \mathcal{U}_{j+1/2}^{N-1/2} + \varphi_{j+1/2} (\boldsymbol{\tau}_{j+1}^N - \boldsymbol{\tau}_j^N + \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} - \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2}) + \\ &\quad \xi_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N + \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \mathbf{p}_j^{N-1/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_m &= -\mathcal{O}_m \mathcal{U}_{j+3/2}^N - \mathcal{P}_m \mathcal{U}_{j+1/2}^N - \mathcal{Q}_m \mathcal{U}_{j-1/2}^N - \\ &\quad \mathcal{R}_m \mathcal{V}_{j+3/2}^N - \mathcal{S}_m \mathcal{V}_{j+1/2}^N - \mathcal{T}_m \mathcal{V}_{j-1/2}^N + \\ &\quad (1 - \theta_{j+1/2}) \mathcal{V}_{j+1/2}^{N-1/2} - \xi_{j+1/2} (\boldsymbol{\tau}_{j+1}^N - \boldsymbol{\tau}_j^N + \boldsymbol{\tau}_{j+1}^{N-1/2} - \boldsymbol{\tau}_j^{N-1/2}) - \\ &\quad \omega_{j+1/2} (\mathbf{p}_{j+1}^N - \mathbf{p}_j^N + \mathbf{p}_{j+1}^{N-1/2} - \mathbf{p}_j^{N-1/2}). \end{aligned}$$

Dado que el sistema por bloques (B.19) puede ser bastante grande, resolver de forma directa (es decir, calcular la inversa de a matriz por bloque) puede tener un costo numérico bastante alto. Debido a que cada bloque del sistema es tridiagonal se puede sacar ventaja de esta estructura al usar la descomposición de Schur (ver Anexo A). La solución de este sistema son las velocidades \mathcal{U} y \mathcal{V} .

2. El sistema (B.18) es tridiagonal y por tanto se puede usar el algoritmo de Thomas para determinar su solución. La solución de este sistema es \mathcal{W} y se utiliza para determinar \mathcal{Z} a partir de la ecuación (B.17).
3. Con los velocidades calculadas se determinan los esfuerzos normales y la presión poral usando las ecuaciones (B.7), (B.8), (B.9) y (B.10).

Estos pasos completan los cálculos del primer medio paso de tiempo. La discretización del segundo conjunto de ecuaciones (B.2) se hace de forma similar, sin embargo, se debe prestar especial interés en los índices. Una vez que se determinan velocidades, esfuerzos y presión poral del segundo medio paso de tiempo, se suman con los resultados del primer medio paso tiempo. Esto concluye una paso completo de la iteración en el tiempo. Para continuar las iteraciones, se repiten los cálculos de los dos medios pasos de tiempo en forma recursiva.

Anexo: Cálculos complementarios al capítulo 6

Operadores de diferencias finitas y análisis von Neumann

En esta sección se verifica la ecuación (6.18) a partir de (6.14) y del esquema de diferencias finitas implícitas.

Como $D_{xx}(g^n e^{iks\Delta x}) = g^n D_{xx}(e^{iks\Delta x})$, entonces basta revisar $D_{xx}(e^{iks\Delta x})$. Por tanto:

$$\begin{aligned} D_{xx}(e^{iks\Delta x}) &= D_x(D_x e^{iks\Delta x}) \\ &= D_x \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^N C_{N,j} \left[\frac{e^{ik(s\Delta x + (j-1/2)\Delta x)} - e^{ik(s\Delta x - (j-1/2)\Delta x)}}{e + 2 \cos(k\Delta x)} \right] \right) \\ &= D_x \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^N C_{N,j} \left[\frac{e^{ik(j-1/2)\Delta x} - e^{-ik(j-1/2)\Delta x}}{a + 2 \cos(k\Delta x)} \right] e^{iks\Delta x} \right) \\ &= D_x \left(\frac{2i}{\Delta x} \sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin((j-1/2)k\Delta x)}{e + 2 \cos(k\Delta x)} e^{iks\Delta x} \right) \\ &= \left(\frac{2i}{\Delta x} \sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin((j-1/2)k\Delta x)}{e + 2 \cos(k\Delta x)} \right) D_x e^{iks\Delta x} \\ &= \left(\frac{2i}{\Delta x} \sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin((j-1/2)k\Delta x)}{e + 2 \cos(k\Delta x)} \right)^2 e^{iks\Delta x} \\ &= -\frac{4}{\Delta x^2} \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin((j-1/2)k\Delta x)}{e + 2 \cos(k\Delta x)} \right)^2 e^{iks\Delta x}. \end{aligned}$$

La última expresión es la igualdad buscada.

Máximo de la función periódica

En esta sección, se justifica porque la función (6.19) toma su valor máximo cuando $k\Delta x = \pi$ y se explica el por qué es acotada por (6.34).

De la Tabla (4.2), se puede concluir que $e > 2$. Por otro lado, $|2 \cos(k\Delta x)| \leq 2$, para todo k y $\Delta x > 0$. Esto permite concluir que $|2 \cos(k\Delta x)| < a$. No es difícil mostrar la validez de

las siguientes desigualdades:

$$0 < e + 2 \cos(k\Delta x) \quad \text{para toda } k \text{ y } \Delta x. \quad (\text{C.1})$$

$$e - 2 < e + 2 \cos(k\Delta x) \quad \text{para toda } k \text{ y } \Delta x. \quad (\text{C.2})$$

Dado que la desigualdad (C.1) es válida, se concluye que el denominador de la función (6.19) no se anula, i.e., la función está bien definida. El máximo de la función $\phi_{k\Delta x}^N$ se determinará con técnicas de cálculo diferencial. Para esto se calculará la primera y segunda derivada de esta función. Con el fin de simplificar la notación, sea $\Psi(k) = \phi_{k\Delta x}^N$. A partir de,

$$\Psi(k) = \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin[(j-1/2)kh]}{e + 2 \cos(kh)} \right)^2 \quad (\text{C.3})$$

donde $h = \Delta x$.

Es claro que,

$$\begin{aligned} \Psi'(k) &= 2 \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin[(j-1/2)kh]}{e + 2 \cos(kh)} \right) * \\ &\quad \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{(j-1/2)h \cos[(j-1/2)kh](e + 2 \cos(kh)) + 2h \sin(kh) \sin[(j-1/2)kh]}{(e + 2 \cos(kh))^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

La ecuación (C.4) se anula cuando $kh = \pi$. En realidad la ecuación (C.4) se anula cuando $kh = \pm l\pi, \pm 2l\pi$, sin embargo, se selecciona el primer valor debido a la naturaleza de los coeficientes del operador en diferencias $C_{N,j}$.

$$\Psi''(k) = 2x^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{\sin[(j-1/2)kh]}{e + 2 \cos(kh)} \right) y, \quad (\text{C.5})$$

donde

$$x = \sum_{j=1}^N C_{N,j} \frac{(j-1/2)h \cos[(j-1/2)kh](e + 2 \cos(kh)) + 2h \sin(kh) \sin[(j-1/2)kh]}{(e + 2 \cos(kh))^2}.$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^N C_{N,j} \{ \{ -(j-1/2)^2 h^2 \sin[(j-1/2)kh](e + 2 \cos(kh)) \\ &\quad - 2(j-1/2)h^2 \sin(kh) \cos[(j-1/2)kh] + 2h^2 \cos(kh) \sin((j-1/2)kh) \\ &\quad + 2(j-1/2)h^2 \sin(kh) \cos[(j-1/2)kh] \} (e + 2 \cos(kh))^2 \\ &\quad + 4h \{ (j-1/2)h \cos[(j-1/2)kh](e + 2 \cos(kh)) \\ &\quad + 2h \sin(kh) \sin[(j-1/2)kh] \} \sin(kh)(e + 2 \cos(kh)) \} / (e + 2 \cos(kh))^4 \end{aligned}$$

Si se sustituye, $kh = \pi$ en la ecuación (C.5), se obtiene:

$$\Psi''(\pi/h) = -2h^2 \left(\sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j+1}}{e-2} C_{N,j} \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{(j-1/2)(e-2)+2}{(e-2)^3} (-1)^{j+1} C_{N,j} \right) < 0. \quad (\text{C.6})$$

La ecuación (C.6) indica que la función (C.3) posee un máximo cuando $kh = \pi$ y no depende de la selección de los pesos (coeficientes) $C_{N,j}$.

Polinomio de cuarto grado

En esta sección, se calcula el polinomio de grado cuatro (6.20). Se aplica la matriz de operadores (6.13) sobre la solución propuesta (6.14) y usando las ecuaciones (6.16), (6.17) y (6.18), se obtiene la siguiente matriz en la variable g :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - \rho \left(\frac{g-2+g^{-1}}{\Delta t^2} \right) & \alpha M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - \rho_f \left(\frac{g-2+g^{-1}}{\Delta t^2} \right) \\ \alpha M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - \rho_f \left(\frac{g-2+g^{-1}}{\Delta t^2} \right) & M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - b \left(\frac{g-g^{-1}}{2\Delta t} \right) - m \left(\frac{g-2+g^{-1}}{\Delta t^2} \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Se puede omitir el término $g^n e^{iks\Delta x}$ porque es diferente de cero y por tanto puede ser cancelado. El determinante de (C.7) es:

$$\det(\Lambda) = \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{21}\Lambda_{12}. \quad (\text{C.8})$$

Se calcula $\det(\Lambda)$, mediante la determinación de cada uno de los términos de lado derecho de la ecuación (C.8), así para el primer término,

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}\Lambda_{22} &= \left[(\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - \rho \left(\frac{g-2+g^{-1}}{\Delta t^2} \right) \right] \\ &\quad \left[M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - b \left(\frac{g-g^{-1}}{2\Delta t} \right) - m \left(\frac{g-2+g^{-1}}{\Delta t^2} \right) \right] \\ &= \frac{16M(\lambda_c + 2\mu)}{\Delta x^2} (\phi_{k\Delta x}^N)^2 + \frac{2b(\lambda_c + 2\mu)\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2 \Delta t} (g - g^{-1}) \\ &\quad + \frac{4m(\lambda_c + 2\mu)\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2 \Delta t^2} (g - 2 + g^{-1}) + \frac{4\rho M \phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2 \Delta t^2} (g - 2 + g^{-1}) \\ &\quad + \frac{\rho b}{2\Delta t^3} (g^2 - 2g + 2g^{-1} - g^{-2}) + \frac{\rho m}{\Delta t^4} (g^2 - 4g - 4g^{s-1} + g^{-2} + 6). \end{aligned}$$

Agrupando respecto a potencias de g , entonces

$$\begin{aligned}
\Delta t^4 g^2 \Lambda_{11} \Lambda_{22} &= \left[\rho m + \frac{\rho b \Delta t}{2} \right] g^4 \\
&+ \left[2b(\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N \right. \\
&\quad \left. + 4(m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M) \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N - \rho b \Delta t - 4\rho m \right] g^3 \\
&+ \left[16M(\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} \right) (\phi_{k\Delta x}^N)^2 \right. \\
&\quad \left. - 8(m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M) \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N + 6\rho m \right] g^2 \\
&+ \left[-2b(\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N \right. \\
&\quad \left. + 4(m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M) \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N + \rho b \Delta t - 4\rho m \right] g \\
&+ \left[\rho m - \frac{\rho b \Delta t}{2} \right]. \tag{C.9}
\end{aligned}$$

Para el segundo término,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{21} \Lambda_{12} &= \left[\alpha M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - \rho_f \left(\frac{g - 2 + g^{-1}}{\Delta t^2} \right) \right]^2 \\
&= \frac{16\alpha^2 M^2}{\Delta x^2} (\phi_{k\Delta x}^N)^2 + \frac{8\alpha M \rho_f \phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2 \Delta t^2} (g - 2 + g^{-1}) + \frac{\rho_f^2}{\Delta t^4} (g^2 - 4g - 4g^{-1} + g^{-2} + 6).
\end{aligned}$$

Agrupando en potencias de g ,

$$\begin{aligned}
\Delta t^4 g^2 \Lambda_{21} \Lambda_{12} &= [\rho_f^2] g^4 + \left[8\alpha M \rho_f \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N - 4\rho_f^2 \right] g^3 \\
&+ \left[16\alpha^2 M^2 \left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} \right) (\phi_{k\Delta x}^N)^2 - 16\alpha M \rho_f \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N + 6\rho_f^2 \right] g^2 \\
&+ \left[8\alpha M \rho_f \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N - 4\rho_f^2 \right] g + [\rho_f^2]. \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Después de multiplicar la ecuación (C.8) por $\Delta t^4 g^2$ y sustituir las ecuaciones (C.9) y

(C.10), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Delta t^4 g^2 \det(\Lambda) &= \left[(\rho m - \rho_f^2) + \frac{\rho b \Delta t}{2} \right] g^4 + \left[-4(\rho m - \rho_f^2) + 4 \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N (m(\lambda_c + 2\mu) \right. \\
&\quad \left. + \rho M - 2\alpha M \rho_f) - \rho b \Delta t 2b(\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N \right] g^3 \\
&\quad + \left[6(\rho m - \rho_f^2) - 8 \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N (m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M - 2\alpha M \rho_f) \right. \\
&\quad \left. + 16 \left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} \right) (\phi_{k\Delta x}^N)^2 (M(\lambda_c + 2\mu - \alpha^2 M)) \right] g^2 \\
&\quad + \left[-4(\rho m - \rho_f^2) + 4 \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N (m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M - 2\alpha M \rho_f) \right. \\
&\quad \left. + \rho b \Delta t - 2b(\lambda_c + 2\mu) \left(\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} \right) \phi_{k\Delta x}^N \right] g \\
&\quad + \left[(\rho m - \rho_f^2) - \frac{\rho b \Delta t}{2} \right]. \tag{C.11}
\end{aligned}$$

Notar que las dos ecuaciones: $\det(\Lambda) = 0$ y $\Delta t^4 g^2 \det(\Lambda) = 0$ tienen las mismas raíces. Para obtener el polinomio de grado cuatro (6.20), basta definir los coeficientes en (C.11) como en (6.26)-(6.30) y (6.21)-(6.25).

Polinomio cuadrático

En esta sección, se calcula el polinomio cuadrático (6.32). Como $b = 0$ entonces a partir de las ecuaciones (6.29) y (6.30) se obtiene $\hat{f}_4 = \hat{f}_5 = 0$. Por tanto, los coeficientes (6.21)-(6.25) se simplifican, y

$$\begin{aligned}
a_1 &= \hat{f}_1, \\
a_2 &= -4\hat{f}_1 + 4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2, \\
a_3 &= 6\hat{f}_1 - 8 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2 + 16 \frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} (\phi_{k\Delta x}^N)^2 \hat{f}_3, \\
a_4 &= -4\hat{f}_1 + 4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2, \\
a_5 &= \hat{f}_1,
\end{aligned}$$

Sustituyendo $g = -1$ y los nuevos valores de las a_i en la ecuación (6.20) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\det(\Lambda) &= a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 \\
&= \hat{f}_1 - (-4\hat{f}_1 + 4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2) + 6\hat{f}_1 - 8 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2 + 16 \frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} (\phi_{k\Delta x}^N)^2 \hat{f}_3 \\
&\quad - (-4\hat{f}_1 + 4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2) + \hat{f}_1 \\
&= 16\hat{f}_1 - 16 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \phi_{k\Delta x}^N \hat{f}_2 + 16 \frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} (\phi_{k\Delta x}^N)^2 \hat{f}_3.
\end{aligned}$$

Reordenando los términos de la ecuación anterior e igualando a cero se obtiene la ecuación (6.32).

Análisis asintótico

En esta sección, se explica a detalle cómo se usa el análisis asintótico para obtener la ecuación (6.37). Primero, se puede manipular el término en los radicales del lado derecho de la ecuación (6.35) como sigue:

$$\frac{f_2 - \sqrt{f_2^2 - 4f_1f_3}}{2f_3S_\phi^2} = \frac{4f_1f_3}{2f_3S_\phi^2} \frac{1}{f_2 + \sqrt{f_2^2 - 4f_1f_3}} = \frac{2}{S_\phi^2 \left(\frac{f_2}{f_1} + \sqrt{\frac{f_2^2}{f_1^2} - \frac{4f_3}{f_1}} \right)}. \quad (\text{C.12})$$

De las ecuaciones (6.26) y (6.27) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M - 2\alpha M \rho_f}{m\rho - \rho_f^2} = \frac{(\lambda_c + 2\mu) + \frac{\rho M}{m} - \frac{2\alpha M \rho_f}{m}}{\rho - \frac{\rho_f^2}{m}}. \quad (\text{C.13})$$

Por otro lado, de la ecuación (3.29), si T/ϕ tiende a infinito, implica que $m \rightarrow \infty$ y de acuerdo con las ecuaciones (6.26)-(6.27), se concluye que $f_1, f_2 \rightarrow \infty$.

Por tanto, si T/ϕ tiende a infinito la ecuación (C.13) se transforma en

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_c + 2\mu}{\rho} = V_p^2. \quad (\text{C.14})$$

Sustituyendo la ecuación (C.14) en (C.12) y considerando que f_1 tiende a infinito, se tiene que:

$$\frac{f_2 - \sqrt{f_2^2 - 4f_1f_3}}{2f_3S_\phi^2} = \frac{2}{S_\phi^2 (V_p^2 + V_p^2)} = \frac{1}{S_\phi^2 V_p^2}. \quad (\text{C.15})$$

Si se combinan las ecuaciones (C.15) y (6.35) se obtiene (6.37).

Relación de dispersión

En esta sección, se calcula la ecuación de dispersión relacionada con las ecuaciones de Biot y el esquema numérico propuesto. Haciendo $b = 0$ y aplicando el operador de diferencias finitas en la matriz (6.13) a la onda plana armónica $g^n(\omega)e^{-iks\Delta x} = e^{i\omega n\Delta t}e^{-iks\Delta x}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_0) = & \left\{ (\lambda_c + 2\mu) - \rho \left(\frac{-4 \sin^2(\omega\Delta t/2)}{\Delta t^2} \right) \right\} \left\{ \left(M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - m \left(\frac{-4 \sin^2(\omega\Delta t/2)}{\Delta t^2} \right) \right) \right\} \\ & - \left\{ \alpha M \left(\frac{-4\phi_{k\Delta x}^N}{\Delta x^2} \right) - \rho_f \left(\frac{-4 \sin^2(\omega\Delta t/2)}{\Delta t^2} \right) \right\}^2, \end{aligned}$$

donde $\phi_{k\Delta x}^N$ es definido en (6.19). Se puede omitir el término $g^n(\omega)e^{iks\Delta x}$ porque es diferente de cero y por tanto puede ser cancelado. Notar que la ecuación $\det(\Lambda_0) = 0$ es cuadrática en $\sin^2(\omega\Delta t/2)$ y tiene las mismas raíces que la ecuación $\Delta t^4 \det(\Lambda_0) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
0 &= (\rho m - \rho_f^2) (-4 \sin^2(\omega\Delta t/2))^2 \\
&- (m(\lambda_c + 2\mu) + \rho M - 2\alpha M \rho_f) (-4 \sin^2(\omega\Delta t/2)) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (-4\phi_{k\Delta x}^N) \\
&+ M(\lambda_c + 2\mu - \alpha^2 M) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^4 (-4\phi_{k\Delta x}^N)^2.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

La sustitución de las igualdades (6.26), (6.27) y (6.28) en la ecuación (C.16) lleva a la igualdad:

$$f_1 (\sin^2(\omega\Delta t/2))^2 - f_2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \phi_{k\Delta x}^N (\sin^2(\omega\Delta t/2)) + f_3 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^4 (\phi_{k\Delta x}^N)^2 = 0. \tag{C.17}$$

Resolviendo y simplificando la ecuación (C.17) se obtiene (6.39). Otra forma de obtener la igualdad (6.39) es usar de forma directa los operadores de diferencias finitas antes de aplicarlo a la onda plana armónica como se hace en el caso elástico (Levander, 1988).

Para analizar la dispersión numérica asociada con el esquema de diferencias finitas, es necesario calcular la velocidad de fase. Denotar por $P_0 = \Delta t/\Delta x$, $G_\lambda = \Delta x/\lambda$ (número de puntos malla por longitud de onda) y como $k = 2\pi/\lambda$, entonces

$$k\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi G_\lambda.$$

La velocidad de fase C_{P_0} está dado por:

$$C_{P_0} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \Delta t \Delta x}{k \Delta t \Delta x} = \frac{(\omega \Delta t)}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) (k \Delta x)} = \frac{(\omega \Delta t)}{2\pi P_0 G_\lambda}. \tag{C.18}$$

Combinando las ecuaciones (C.18) y (6.39) se obtiene (C.18). Así, la velocidad de fase normalizada C_{P_0}/C_0 varía junto con P_0 y G_λ . La velocidad C_0 es el caso particular de C_{P_0} cuando $G_\lambda \rightarrow 0$.

Bibliografía

- Alford, R. M., Kelly, K. R., & Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, **39**(6), 834-842.
- Bamberger, A., Chavent, G., & Lailly, P. (1980). Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire. INRIA.
- Bauer, K., Part, R. G., Haberland, C., Weber, M., 2008. Neural network analysis of cross-hole tomographic images: The seismic signature of gas hydrate bearing sediments in the Mackenzie Delta (NW Canada). *Geophys. Res. Lett.* 35, 1-6.
- Bensoussan, A. (1978). A., Lions, JL and Papanicolaou, G. Asymptotic analysis for periodic structures, 5.
- Berenger Jean-Pierre, 1994. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *J. Comp. Phys.*, **114**, 185-200.
- Berryman, J. G., 1980. Confirmation of Biot's theory, *Appl. Phys. Lett.*, **37**, 382-384.
- Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *The Journal of the acoustical Society of america*, **28**(2), 168-178.
- Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *the Journal of the Acoustical Society of America*, **28**(2), 179-191.
- Biot, M. A. & Willis, 1957. The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.*, **24**, 594-601.
- Biot, M. A. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of applied physics*, **33**(4), 1482-1498.
- Bourbie, T., Coussy, O., & Zinszner, B. (1987). *Acoustics of porous media*. United States: Gulf Publishing Company, Houston, TX.
- Carcione, J., 2014. *Wave Field in Real Media. Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, Elsevier, Netherlands, 3rd Edition.
- Carcione, J. M. & Helle, H., 1999. Numerical solution of poroviscoelastic wave equation on a staggered grid, *J. Comput. Phys.*, **154**, 520-527.

- Carcione, J. M., & Quiroga-Goode, G. (1995). Some aspects of the physics and numerical modeling of Biot compressional waves. *Journal of Computational Acoustics*, **3**(04), 261-280.
- Carcione, J. M., & Quiroga-Goode, G. (1996). Full frequency-range transient solution for compressional waves in a fluid-saturated viscoacoustic porous medium1. *Geophysical prospecting*, **44**(1), 99-129.
- Carcione, J. M., Morency, C., & Santos, J. E., 2010. Computational poroelasticity -A review, *Geo-physics*, **75**(5), 75A229-75A243.
- Carcione, J. M., and G. Seriani, 2001, Wave simulation in frozen porous media: *Journal of Computational Physics*, **170**, 676–695.
- Carman, P. C. (1961). *L'écoulement des gaz à travers les milieux poreux*. Institut national des sciences et techniques nucléaires.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., & Reshef, M. (1985). A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, **50**(4), 705-708.
- Claerbout, J.F., 1985. The craft of wave-field extrapolation, in *Imaging the Earth's Interior*, pp. 260-265, Blackwell Scientific Publications, Oxford.
- Clayton, R, and Enquist, B (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **67**(6), 1.
- Chew, W.C., Liu, Q.H., 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, **4**, 72–79.
- Chu, C., and P. L. Stoffa, 2012, Implicit finite-difference simulations of seismic wave propagation: *Geophysics*, **7**, T57–T67.
- Dai, N., Vafidis, A., & Kanasewich, E. R. (1995). Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress, finite-difference method. *Geophysics*, **60**(2), 327-340.
- de la Puente, J., Dumbser, M., Käser, M., & Igel, H., 2008. Discontinuous Galerkin methods for wave propagation in poroelastic media, *geophysics*, *Geophysics*, **73**, T77-T97.
- Duffy, D. J. (2013). *Financial instrument pricing using C++*. John Wiley & Sons.
- Dullien, F. A. (2012). *Porous media: fluid transport and pore structure*. Academic press.
- Dupuy, B., Barros, L. D., Garambois, S., & Virieux, J., 2011. Wave propagation in heterogeneous porous media formulated in the frequency-space domain using a discontinuous Galerkin method, *Geophysics*, **76**(4), N13-N28.
- Dutta N. and H. Odé, "Seismic reflections from a gas-water contact" *Geophysics* **48**, 148-162 (1983).

- Emerman, S., Schmidt, W., & Stephen, R. A., 1982. An implicit finite-difference formulation of the elastic wave equation, *Geophysics*, **47**(11), 1521-1526.
- Fornberg, B. (1990). High-order finite differences and the pseudospectral method on staggered grids. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **27**(4), 904-918.
- Gassmann, F. (1951). Über die Elastizität poröser Medien. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, **96**,1-23.
- Gerstoft, Peter. 2002, CABRILLO 1.0: Acoustic, elastic and poroelastic finite difference modelling. *Scripts Institution of Oceanography U.C. San Diego*, url=<http://scrippsscholars.ucsd.edu/pgerstoft/pages/cabrillo>.
- Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **86**(4), 1091-1106.
- Karrenbach, M. (1995). Elastic tensor wave fields (Doctoral dissertation, Stanford University).
- Hassanzadeh, S. (1991). Acoustic modeling in fluid-saturated porous media. *Geophysics*, **56**(4), 424-435.
- Hatschek, E. (1928). The viscosity of liquids. Van Nostrand.
- Higdon, R. L. (1992). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media. *Journal of Computational Physics*, **101**(2), 386-418.
- Higuti, R. T., Furukawa, C. M., Adamowski, J. C., 2001. Characterization of lubricating oil using ultrasound. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, **23**(4), 453-461, paper No 306.
- Itzá, R., Iturrarán-Viveros, U., & Parra, J. O. (2016). Optimal implicit 2D finite differences to model wave propagation in poroelastic media. *Geophysical Journal International*, **206**(2), 1111-1125.
- Klose, C., 2006. Self-organizing maps for geoscientific data analysis: geological interpretation of multidimensional geophysical data. *Computer & Geosciences*, **10**, 265-277.
- Kneib, G., & Kerner, C. (1993). Accurate and efficient seismic modeling in random media. *Geophysics*, **58**(4), 576-588.
- Kohonen, T., 1981. Automatic formation of topological maps of patterns in a self-organizing system. Helsinki, Finland.
- Kohonen, T., 1982. Self-organized formation of topological correct feature maps. *Biological Cybernetics*, **43**, 59-69.

- Konaté, A. A., Pan, H., Fang, S., Asim, S., Ziggah, Y. Y., Deng, C., Khan, N., 2015. Capability of self-organizing map neural network in geophysical log data classification: Case study from the CCSD-MH. *Journal of Applied Geophysics*, **118**, 37-46.
- Kosloff, D., R., Reynam Pestana and Tal-Ezer, H., 2008. Numerical solution of the constant density acoustic wave equation by implicit spatial derivative operators. in *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 2058-2062, Tulsa Oklahoma USA.
- Krzkalla, F. & Müller, T. M., 2007. High contrast finite differences modeling in heterogeneous poroelastic media, in *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 2030-2034, Tulsa Oklahoma USA.
- Johnson, D. L., Koplik, J., and Dashen, R. (1987). Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, **176**,379–402.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, **53**(11), 1425-1436.
- Leveque, R. J., 2007, *Finite Difference Methods and Partial Differential Equations*: SIAM.
- Liu, Y., & Sen, M. K. (2009). A practical implicit finite-difference method: examples from seismic modeling. *Journal of Geophysics and Engineering*, **6**(3), 231.
- Liu, Y., & Sen, M. K. (2009). An implicit staggered-grid finite-difference method for seismic modelling. *Geophysical Journal International*, **179**(1), 459-474.
- Liu, Y. (2014). Optimal staggered-grid finite-difference schemes based on least-squares for wave equation modelling. *Geophysical Journal International*, **197**, 1033-1047.
- Liu, Y., & Sen, M. K. (2010). A hybrid scheme for absorbing edge reflections in numerical modeling of wave propagation. *Geophysics*, **75**(2), A1-A6.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**(3), 639-666.
- Mandel, J. (1950). Essai sur la mécanique des pseudosolides. In *Annales des Ponts et Chaussées*.
- Martin, R., Komatitsch D., and Ezziani Abdelaâziz 2008. An unsplit convolutional Perfectly Matched Layer improved at grazing incidence for seismic wave propagation in poroelastic media , *Geophysics*, **73**(4), T51-T61.
- Masson, Y. J., Pride, S. R., & Nihei, K. T. (2006). Finite difference modeling of Biot's poroelastic equations at seismic frequencies. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **111**(B10).
- Masson, Y. J. & Pride, S., 2007. Poroelastic finite difference modeling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity, *Journal of Geophysical Research*, **112**, 1-16.

- Masson, Y. J. & Pride, S., 2010. Finite-difference modeling of Biot's poroelastic equations across all frequencies, *Geophysics*, **75**(2), N33-N41.
- Matheron, G. (1967). *Éléments pour une théorie des milieux poreux*.
- Mavko, G., Mukerji, T., & Dvorkin, J. (2009). *The rock physics handbook: Tools for seismic analysis of porous media*. Cambridge university press.
- Milovanović, G. V., Mitrinović, D. S., & Rassias, T. M., 1994. *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ.
- Moczo, P. (1998). *Introduction to Modeling Seismic Wave Propagation by the Finite-Difference Methods*. Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University.
- Morency, C. & Tromp, J., 2008. Spectral-element simulations of wave propagation in porous media, *Geophys. J. Int.*, **175**, 301-345.
- Mufti, I. R., 1984. Seismic modeling in the implicit mode, *Geophys. Prosp.*, **33**, 619-656.
- O'Brien, G. S. (2010). 3D rotated and standard staggered finite-difference solutions to Biot's poroelastic wave equations: Stability condition and dispersion analysis. *Geophysics*, **75**(4), T111-T119.
- Özdenvar, T. & McMechan, G., 1997. Algorithms for staggered-grid computations for poroelastic, elastic, acoustic, and scalar wave equations, *Geophys. Prosp.*, **45**, 403-420.
- Parra, J. O., Iturrarán-Viveros, U., Parra, J. S., Xu, P.-C., 2015. Attenuation and velocity estimation using rock physics and neural network methods for calibrating reflection seismograms. *Interpretation* **3**(1), SA121-SA133.
- Plona, T. J., 1980. Observation of a second bulk compressional wave in porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.*, **36**(4), 259-261.
- Qin, J., 2009, The new alternating direction implicit difference methods for the wave equations: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **230**, 213-223.
- Qin, J., 2010, The new alternating direction implicit difference methods for solving three-dimensional parabolic equations: *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 890-897.
- Ristow, D. & Ruhl, T., 1997. 3-D implicit finite-difference migration by multiway splitting, *Geophysics*, **62**, 554-567.
- Roy, A., Dowdell, B. L., Marfut, K. J., 2013. Characterizing a Mississippian tripolitic chert reservoir using 3D unsupervised and supervised multiattribute seismic facies analysis: An example from Osage County, Oklahoma. *Interpretation* 2013, 109-124.
- Roy, A., Marfut, K. J., 2012. Characterizing Mississippian tripolitic chert reservoir using unsupervised seismic facies analysis and well logs: an example from Osage County, Oklahoma. In: *SEG Expanded Abstracts*. Tulsa Oklahoma USA, pp. 1-5.

- Santos, J. E., & E. J. Oreña, 1986, Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media, Part II: The Galerkin procedures: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **20**, 129-139.
- Santos, J. E., J. Douglas Jr., M. E. Morley, and O. M. Lovera, 1988b, Finite element methods for a model for full waveform acoustic logging: Institute for Mathematics and Applications Journal of Numerical Analysis, **8**, 415-433.
- Santos, J. E., J. M. Corbero, and J. Douglas Jr., 1990a, Static and dynamic behavior of a porous solid saturated by a two-phase fluid: Journal of the Acoustical Society of America, **87**, 1428-1438.
- Santos, J. E., J. Douglas Jr., J. M. Corbero, and O. M. Lovera, 1990b, A model for wave propagation in a porous medium saturated by a two-phase fluid: Journal of the Acoustical Society of America, **87**, 1439-1448.
- Serra, J. (1982). Image analysis and mathematical morphology, v. 1. Academic press.
- Sheen, D. H., Tuncay, K., Baag, C. E., & Ortoleva, P. J. (2006). Parallel implementation of a velocity-stress staggered-grid finite-difference method for 2D poroelastic wave propagation. Computers & Geosciences, **32**(8), 1182-1191.
- Stankiewicz, J., Bauer, K., Ryberg, T., 2010. Lithology classification from seismic tomography: Additional constraints from surface waves. Journal of African Earth Sciences, **58**, 547-552.
- Suquet, P. (1982). Plasticite et homogenisation (Doctoral dissertation, Université Pierre et Marie Curie).
- Suo-Liang, C. & Liu, Y., 2013. A truncated implicit high-order finite-difference scheme combined with boundary conditions, Applied Geophysics, **10**(5), 53-62.
- Thomas, J. W., 1941, Numerical Partial Differential Equations. Finite Difference Methods: Springer Verlag.
- Tselentis, G.-A., Martakis, N., Paraskevopoulos, P., Lois, A., 2011. High-resolution passive seismic tomography for 3D velocity, Poisson's ratio ν , and P-wave quality Q_P in the Delvina hydrocarbon field, southern Albania. Geophysics, **76**(2), B89-B112.
- Ungar, A. A., 1982. A unified method for solving quadratic, cubic and quartic equations, Abstracts of the American Mathematical Society, **3**, 290.
- Ungar, A. A., 1990. A unified approach for solving quadratic, cubic and quartic equations by radicals, Computers and Mathematics with Applications, **19**(12), 33-39.
- Virieux, J. (1984). SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. Geophysics, **49**(11), 1933-1942.

- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, **51**(4), 889-901.
- Wenzlau, F. & Müller, T. M., 2009. Finite-difference modeling of wave propagation and diffusion in poroelastic media, *Geophysics*, **74**, T55-T66.
- Wenzlau, F. (2009). Poroelastic Modelling of Wavefields in Heterogeneous Media (Doctoral dissertation, Karlsruhe, Univ., Diss., 2009).
- Zeng, Y.Q., Liu, Q.H., 2001. A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **109**, 2571–2580.
- Zhang, H. & Zhang, Y., 2007. Implicit splitting finite difference scheme for multidimensional wave simulation, in *SEG Expanded Abstracts*, pp. 1-4, Tulsa Oklahoma USA.
- Zhang, W., L. Tong, and E. T. Chung, 2012, Efficient simulation of wave propagation with implicit finite difference schemes: *Numer. Math. Meth. Appl.*, **5**, 205-228.
- Zhao, H., Gao, J., & Chen, Z., 2014. Stability and numerical dispersion analysis of finite-difference method for the diffusive-viscous wave equation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B*. Volume 5, Number 1-2, Pages 66-78.
- Zhu, X., & McMechan, G. A. (1991). Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoirs using Biot theory. *Geophysics*, **56**(3), 328-339.
- Zhou, H. & Zhang, G., 2011. Prefactored optimized compact finite-difference schemes for second spatial derivatives, *Geophysics*, **76**, WB87-WB95.