



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA  
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LA TEORÍA DE TORSIÓN COGENERADA POR LA  
CLASE DE LOS MÓDULOS PEQUEÑOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
OSCAR ALBERTO GARRIDO JIMÉNEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:  
DRA. BERTHA MARÍA TOMÉ ARREOLA  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO DE 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mis amigos Arturo Rodrigo y David.*

*A mis maestros, Bertha y Toño.*

*Y por supuesto, a mi hermosa familia,  
Zaida, Nadia, Gabriela, Oscar, Estela y Arturo,  
Muchas Gracias.*



# Introducción

Una técnica muy importante y valiosa para los que trabajan en teoría de anillos consiste en asociarle a un anillo  $R$  su categoría de  $R$ -módulos izquierdos,  $R\text{-Mod}$ , y a partir de ella obtener información acerca del anillo  $R$ .

Un método más avanzado consiste en asociar a la categoría  $R\text{-Mod}$  un marco (esto es, una retícula completa en donde tomar el ínfimo se distribuye sobre tomar supremos infinitos) de teorías de torsión en esta categoría y usar las propiedades de este marco y de las teorías de torsión para determinar propiedades de  $R\text{-Mod}$  y del anillo  $R$ .

En esta tesis estudiamos la teoría de torsión cogenerada por la clase de los módulos pequeños y algunas de sus propiedades, basados en el artículo “The Torsion Theory Cogenerated by M-Small Modules” de Y. Talebi y N. Vanaja.

La tesis consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo incluimos todos los resultados esenciales sobre módulos pequeños y módulos ampliamente suplementados, submódulos coesenciales y cocerrados y cocerraduras, que utilizamos en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo estudiamos las propiedades básicas de los módulos cosingulares y no-cosingulares. La clase de los módulos cosingulares es cerrada bajo submódulos, sumas directas y productos directos, en tanto que la clase de los módulos no-cosingulares es cerrada bajo imágenes homomorfas, sumas directas, extensiones, epimorfismos superfluos y submódulos cocerrados. En este capítulo probamos el Teorema de O. E. Villamayor y lo utilizamos para probar que todo  $R$ -módulo es no-cosingular si y sólo si  $R$  es un  $V$ -anillo.

En el tercer capítulo estudiamos la teoría de torsión cogenerada por la clase de los módulos pequeños y damos condiciones bajo las cuales esta teoría de torsión se escinde. Probamos que en caso de que todo  $R$ -módulo inyectivo sea ampliamente suplementado,  $\rho_S(M) = \overline{\mathcal{Z}}(\overline{\mathcal{Z}}(M))$ , donde  $\rho_S$  denota el

## II

radical asociado a esta teoría de torsión y  $\overline{\mathcal{Z}}(N)$  es la parte cosingular del  $R$ -módulo  $N$ .

Finalmente, en el cuarto capítulo caracterizamos a los módulos elevadores  $M$  por medio de  $\overline{\mathcal{Z}}(\overline{\mathcal{Z}}(M))$ . Para ello presentamos una serie de resultados preliminares sobre módulos elevadores que tomamos del artículo “On Lifting Modules” de D. Keskin.

# Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
2. Módulos cosingulares y no-cosingulares	11
3. Teoría de torsión	23
4. Módulos elevadores y $\overline{\mathbb{Z}^2}$	37
Bibliografía	46



# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo contiene los conceptos y resultados básicos que utilizaremos en los siguientes capítulos.

Sea  $R$  un anillo con uno. A lo largo de este trabajo todos los  $R$ -módulos considerados serán módulos unitarios izquierdos y denotaremos por  $R\text{-Mod}$  a la categoría de estos módulos.

### Módulos pequeños

Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $N \leq M$ . Recordemos que  $N$  es un submódulo superfluo de  $M$ , denotado por  $N \ll M$ , si para cada  $H \leq M$  tal que  $N + H = M$ , se tiene que  $H = M$ .  $N$  es un submódulo esencial de  $M$ , denotado por  $N \trianglelefteq M$ , si para cada  $K \leq M$  tal que  $N \cap K = 0$ , se tiene que  $K = 0$ .

**Definición 1.1** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Diremos que  $M$  es un módulo pequeño si  $M \ll E(M)$ , donde  $E(M)$  denota la cápsula inyectiva de  $M$ .

**Ejemplo 1.2** Consideremos  $R = \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  un número primo y los  $\mathbb{Z}$ -módulos  $\mathbb{Z}_{p^n}$  y  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ . Se tiene que  $E(\mathbb{Z}_{p^n}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$  y si  $\mathbb{Z}_{p^n} + H = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ , para algún  $H \leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ , entonces  $H = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ , ya que la retícula de submódulos  $\mathbb{Z}_p \leq \mathbb{Z}_{p^2} \leq \cdots \leq \mathbb{Z}_{p^n} \leq \mathbb{Z}_{p^{n+1}} \leq \cdots \leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$  es un conjunto linealmente ordenado. Por lo tanto,  $\mathbb{Z}_{p^n}$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo pequeño.

**Ejemplo 1.3** Consideremos  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$  como  $\mathbb{Z}$ -módulos. Recordemos que si  $X$  es un conjunto generador de  $\mathbb{Q}$ , entonces  $X \setminus F$ , con  $F \subseteq X$  finito, también es

un conjunto generador de  $\mathbb{Q}$ . Así, si  $H \leq \mathbb{Q}$  es tal que  $\mathbb{Z} + H = \mathbb{Q}$ , entonces  $\{1\} \cup H$  es un conjunto generador de  $\mathbb{Q}$ . Luego  $H$  es un conjunto generador de  $\mathbb{Q}$ , esto es,  $H = \mathbb{Q}$ . Y como  $\mathbb{Q} = E(\mathbb{Z})$ , se sigue que  $\mathbb{Z}$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo pequeño.

**Proposición 1.4** Para  $N \in R\text{-Mod}$  se tiene que  $N$  es un módulo pequeño si y sólo si existe  $M \in R\text{-Mod}$  tal que  $N \ll M$ .

**Demostración.**

Si  $N$  es un módulo pequeño, entonces  $N \ll E(N)$ , así que la necesidad se cumple. Ahora, sea  $M \in R\text{-Mod}$  tal que  $N \ll M$ . Como  $M \leq E(M)$ , tenemos que  $N \ll E(M)$ . Luego, por ser  $E(N)$  la cápsula inyectiva de  $N$  y  $E(M)$  un módulo inyectivo, tenemos que  $E(N) \leq E(M)$ . Más aún, existe  $H \leq E(M)$  tal que  $E(M) = E(N) \oplus H$ . Finalmente, si  $\pi : E(N) \oplus H \rightarrow E(N)$  es la proyección sobre  $E(N)$  asociada a la descomposición anterior, entonces  $N = \pi(N) \ll E(N)$ , pues  $N \ll E(M)$ . ■

**Proposición 1.5** Sean  $M, N \in R\text{-Mod}$  con  $M$  pequeño y  $f \in \text{Hom}(M, N)$  un epimorfismo. Entonces  $N$  es un módulo pequeño.

**Demostración.**

Sean  $\iota_M, \iota_N$  las inclusiones de  $M$  en  $E(M)$  y de  $N$  en  $E(N)$  respectivamente, donde  $E(M)$  y  $E(N)$  son las cápsulas inyectivas de  $M$  y  $N$  respectivamente. Como  $(\iota_N \circ f) \in \text{Hom}(M, E(N))$  e  $\iota_M$  es monomorfismo, entonces existe  $\alpha \in \text{Hom}(E(M), E(N))$  tal que  $\alpha \circ \iota_M = \iota_N \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\iota_M} & E(M) \\
 f \downarrow & & \nearrow \alpha \\
 N & & \\
 \iota_N \downarrow & & \\
 E(N) & & 
 \end{array}$$

Luego, como  $M \ll E(M)$ , se sigue que  $\alpha(M) \ll E(N)$  y por lo tanto  $N \ll E(N)$ . ■

## Módulos ampliamente suplementados

**Definición 1.6** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $N, L \leq M$ .

- (1) Diremos que  $N$  es un suplemento de  $L$  en  $M$  si  $N+L = M$  y  $N \cap L \ll N$ .
- (2) Si sucede que  $N+L = M$  y  $N \cap L \ll M$ , diremos que  $N$  es un suplemento débil de  $L$  en  $M$ .
- (3) Al módulo  $M$  lo llamaremos suplementado si cada uno de sus submódulos tiene un suplemento en él.
- (4) Lo llamaremos débilmente suplementado si cada uno de sus submódulos tiene un suplemento débil en él.
- (5) Finalmente, diremos que  $M$  es ampliamente suplementado si para cada pareja de submódulos  $N$  y  $L$  de  $M$  que cumplen que  $N + L = M$ , se tiene que  $N$  contiene un suplemento de  $L$  en  $M$ .

Observemos que si  $M$  es un  $R$ -módulo ampliamente suplementado, entonces es suplementado.

**Lema 1.7** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Si  $M$  es débilmente suplementado y  $N \leq M$ , entonces  $M/N$  es débilmente suplementado.

**Demostración.**

Sea  $H$  un submódulo de  $M$  tal que  $N \leq H$ . Probaremos que  $H/N$  tiene un suplemento débil en  $M/N$ . Como  $M$  es débilmente suplementado, existe un submódulo  $L$  de  $M$  tal que  $M = H + L$  y  $H \cap L \ll M$ . Por lo tanto,  $M/N = H/N + (L+N)/N$ . Ahora, como  $N \leq H$ , por la ley modular, tenemos que  $H \cap (L + N) = (H \cap L) + N$ , así que si  $\pi : M \rightarrow M/N$  es la proyección canónica, tenemos que

$$\pi(H \cap L) = ((H \cap L) + N)/N = (H \cap (L + N))/N \ll M/N.$$

Entonces  $(L + N)/N$  es un suplemento débil de  $H/N$  y por lo tanto  $M/N$  es débilmente suplementado. ■

**Lema 1.8** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Si  $M$  es ampliamente suplementado y  $N \leq M$ , entonces  $M/N$  es ampliamente suplementado.

**Demostración.**

Sean  $A, B \leq M$  tales que  $A/N + B/N = M/N$ . Entonces  $A + B = M$ , por lo que existe  $H \leq B$  tal que  $A + H = M$  y  $A \cap H \ll H$ . Es claro que  $A/N + (H + N)/N = M/N$ , así que solo resta mostrar que  $(H + N)/N \cap A/N \ll (H + N)/N$ . Para ello, consideremos la proyección natural  $\pi : H + N \rightarrow (H + N)/N$ . Se tiene que

$$\pi(A \cap H) = ((A \cap H) + N)/N = ((H + N) \cap A)/N = (H + N)/N \cap A/N.$$

Y como  $A \cap H \ll H$ , se sigue que  $(H + N)/N \cap A/N \ll (H + N)/N$ . ■

**Lema 1.9** Sea  $M \in R\text{-Mod}$  ampliamente suplementado y  $L \leq M$  un suplemento. Entonces  $L$  es ampliamente suplementado.

**Demostración.**

Sean  $A, B \leq L$  tales que  $L = A + B$ . Como  $L$  es un suplemento, existe  $H \leq M$  tal que  $M = L + H$  y  $L \cap H \ll L$ . Así  $M = A + B + H$ . Ahora, para  $A + H \leq M$  existe  $B' \leq B$  tal que  $B'$  es un suplemento de  $A + H$  en  $M$ , pues  $M$  es ampliamente suplementado. Entonces,  $M = (A + H) + B'$  y  $B' \cap (A + H) \ll B'$ , de donde  $A \cap B' \ll B'$ . Luego

$$L = M \cap L = ((A + H) + B') \cap L = ((A + H) \cap L) + B' = A + (H \cap L) + B'.$$

Pero  $L \cap H \ll L$ , así que  $L = A + B'$ . Tenemos entonces que  $L = A + B'$  y  $A \cap B' \ll B'$ , es decir,  $L$  es ampliamente suplementado. ■

## Submódulos coesenciales

Supongamos ahora que  $M \in R\text{-Mod}$  y que  $H \leq N \leq M$ , entonces es claro que  $H \trianglelefteq N$  si  $H/0 \trianglelefteq N/0$ . De manera dual, podemos dar la siguiente

**Definición 1.10** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H \leq N \leq M$ . Diremos que  $H$  es un submódulo coesencial de  $N$  en  $M$ , denotado por  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ , si  $N/H \ll M/H$ .

**Ejemplo 1.11** Sean  $p$  un primo e  $i < j$  números naturales. Consideremos los  $\mathbb{Z}$ -módulos  $\mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^j}$  y  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ . Como  $\mathbb{Z}_{p^{j-i}} \cong \mathbb{Z}_{p^j}/\mathbb{Z}_{p^i}$  y  $\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^i} \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ , por el Ejemplo 1.2,  $\mathbb{Z}_{p^i} \leq_{ce} \mathbb{Z}_{p^j}$  en  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ .

**Proposición 1.12** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H \leq N \leq M$ . Entonces  $H \leq_{ce} N$  en  $M$  si y sólo si para cada  $K \leq M$  que cumpla que  $M = N + K$  se tiene que  $M = H + K$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $H \leq_{ce} N$  en  $M$  y sea  $K \leq M$  tal que  $M = N + K$ . Entonces  $M/H = N/H + (H + K)/H$  y como  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ , se sigue que  $(H + K)/H = M/H$  y de aquí que  $H + K = M$ .

Ahora, supongamos que  $N/H + K/H = M/H$  para algún submódulo  $K$  de  $M$  tal que  $H \leq K$ . Entonces  $N + K = M$  y por la hipótesis,  $H + K = M$ . Así  $M/H = (H + K)/H = K/H$ , por lo que  $N/H \ll M/H$  y  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ . ■

**Lema 1.13** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H \leq N \leq M$ . Si  $N = H + K$  con  $K \ll M$ , entonces  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ .

**Demostración.**

Si  $H + K = N$  con  $K \ll M$ , entonces  $N/H = (H + K)/H = \pi(K) \ll M/H$ , donde  $\pi : M \rightarrow M/H$  es la proyección canónica. Luego  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ . ■

**Corolario 1.14** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Si  $M$  es un módulo pequeño, entonces todo submódulo es coesencial en él.

**Demostración.**

Sea  $N \leq M$ . Entonces  $M = N + M$ , con  $M \ll E(M)$ . Así que, por el Lema 1.13, tenemos que  $N \leq_{ce} M$ . ■

**Proposición 1.15** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H \leq N \leq M$ . Supongamos además que  $N$  tiene un suplemento débil en  $M$ . Entonces  $N = H + K$  con  $K \ll M$  si y sólo si  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ .

**Demostración.**

Por el Lema 1.13, si  $N = H + K$  con  $K \ll M$ , entonces  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ . Ahora, si  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ , sea  $L$  un suplemento débil de  $N$  en  $M$ . Entonces  $M = N + L$  y  $N \cap L \ll M$ . Como  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ , por la Proposición 1.12, tenemos que  $M = H + L$ . Por lo tanto  $N = N \cap (H + L) = H + (N \cap L)$  y  $N \cap L \ll M$ . ■

**Lema 1.16** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H, K, N \leq M$  tales que  $M = H + K$  y  $M = (H \cap K) + N$ . Entonces  $M = (H \cap N) + K = (K \cap N) + H$ .

**Demostración.**

Como  $K \cap H \leq K$ , por la ley modular, tenemos que  $K \cap (N + (K \cap H)) = (K \cap N) + (K \cap H)$ . Así que

$$(K \cap N) + H = (K \cap N) + (K \cap H) + H = K \cap (N + (K \cap H)) + H = K + H = M.$$

Similarmente se prueba que  $M = (H \cap N) + K$ . ■

**Lema 1.17** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H, K, N \leq M$  tales que  $M = K + H$  y  $K \leq_{ce} N$  en  $M$ . Entonces  $H \cap K \leq_{ce} H \cap N$  en  $M$ .

**Demostración.**

Sea  $X \leq M$  tal que  $H \cap K \leq X$  y supongamos que

$$M/(K \cap H) = (H \cap N)/(H \cap K) + X/(H \cap K).$$

Entonces  $M = N + H$  y  $M = (H \cap N) + X$ . Luego, por el Lema 1.16,  $M = (H \cap X) + N$ . Como  $K \leq_{ce} N$  en  $M$ , por la Proposición 1.12, se tiene que  $M = (H \cap X) + K$ . Ahora, notemos que  $M = (H \cap N) + X \subseteq H + X$ , es decir,  $M = H + X$  y como  $M = (H \cap X) + K$ , por el Lema 1.16,  $M = X + (K \cap H)$ . Se sigue que  $M = X$ , con lo que,  $H \cap K \leq_{ce} H \cap N$  en  $M$ . ■

## Submódulos cocerrados

**Definición 1.18** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $N \leq M$ . Diremos que  $N$  es cocerrado en  $M$ , denotado por  $N \leq_{cc} M$ , si no tiene submódulos coesenciales propios en  $M$ .

**Lema 1.19** Sean  $M$  un  $R$ -módulo y  $K \leq N$  submódulos de  $M$ . Si  $K$  es cocerrado en  $M$ , entonces  $K$  es cocerrado en  $N$ .

**Demostración.**

Sea  $X$  un submódulo coesencial de  $K$  en  $N$ , es decir,  $K/X \ll N/X$ . Se sigue que  $K/X \ll M/X$ , pero  $K$  es cocerrado en  $M$ , así que  $K = X$ . Por lo tanto  $K$  es cocerrado en  $N$ . ■

**Lema 1.20** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $N$  un submódulo cocerrado de  $M$ . Entonces, para todo submódulo  $K$  de  $N$  se tiene que  $N/K$  es un submódulo cocerrado de  $M/K$ .

**Demostración.**

Sean  $K$  y  $H$  submódulos de  $N$  tales que  $K \leq H$ . Entonces, por el segundo teorema de isomorfismo, se tiene que  $N/H \cong (N/K)/(H/K)$  y  $M/H \cong (M/K)/(H/K)$ . Así, si  $H/K$  fuera un submódulo coesencial de  $N/K$  en  $M/K$  se tendría que  $H$  sería un submódulo coesencial de  $N$  en  $M$ , lo cual no puede ocurrir pues  $N$  es cocerrado en  $M$ . Por lo tanto  $N/K$  es cocerrado en  $M/K$ . ■

**Lema 1.21** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H, N \leq M$ . Si  $N$  es un suplemento de  $H$  en  $M$ , entonces  $N$  es cocerrado en  $M$ .

**Demostración.**

Tenemos que  $M = N + H$  y  $N$  es mínimo con esta propiedad. Ahora, sea  $K \leq_{ce} N$  en  $M$ . Como  $M = N + H$ , entonces, por la Proposición 1.12,  $M = K + H$ , pero  $N$  es mínimo con esta propiedad, por lo que  $K = N$ . Así,  $N$  es cocerrado en  $M$ . ■

**Lema 1.22** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $N \leq_{cc} M$ . Si  $X$  es un submódulo de  $N$  tal que  $X \ll M$ , entonces  $X \ll N$ .

**Demostración.**

Sea  $H \leq N$  tal que  $N = X + H$ . Como  $N \leq_{cc} M$ , si demostramos que  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ , habremos terminado. Entonces, sea  $K \leq M$  tal que  $M/H = N/H + K/H$ . Se sigue que  $M = N + K = (X + H) + K = X + K$  y como  $X \ll M$ , entonces  $K = M$ . Luego  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ . ■

**Proposición 1.23** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  débilmente suplementado y  $N \leq M$ . Entonces  $N$  es un suplemento de algún submódulo de  $M$  si y sólo si  $N$  es cocerrado en  $M$ .

**Demostración.**

La necesidad se sigue del Lema 1.21.

Ahora, sea  $N$  cocerrado en  $M$ . Como  $M$  es débilmente suplementado, existe  $L \leq M$  tal que  $M = N + L$  y  $N \cap L \ll M$ . Por el Lema 1.22,  $N \cap L \ll N$ , es decir,  $N$  es un suplemento de  $L$  en  $M$ . ■

**Lema 1.24** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $K \leq N \leq M$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Si  $N/K$  es un suplemento en  $M/K$  y  $K$  es un suplemento en  $M$ , entonces  $N$  es un suplemento en  $M$ .
- (2) Si  $M$  es débilmente suplementado,  $N/K$  es cocerrado en  $M/K$  y  $K$  es cocerrado en  $M$ , entonces  $N$  es cocerrado en  $M$ .

**Demostración.**

- (1) Supongamos que  $N/K$  es un suplemento de  $N'/K$  en  $M/K$  y que  $K$  es un suplemento de  $K'$  en  $M$ . Entonces,  $M/K = N/K + N'/K$  con  $(N \cap N')/K \ll N/K$  y  $M = K + K'$  con  $K \cap K' \ll K$ . Como  $K \cap K' \ll K \leq N$ , se sigue que  $K \cap K' \ll N$ . Ahora, notemos que  $K \leq N \cap N'$ , por lo que  $M = K + K' \leq (N \cap N') + K'$ , es decir,  $M = (N \cap N') + K'$ . Luego, por el Lema 1.16,  $M = N + (N' \cap K')$  ya que  $M = N + N'$ .

Probaremos que  $N$  es un suplemento de  $N' \cap K'$  en  $M$ . Como  $K \leq N$ , por la ley modular, se tiene que  $N = K + (N \cap K')$  y como  $(N \cap N')/K \ll N/K$ , se sigue del Lema 1.17 que  $(N \cap N' \cap K')/(K \cap K') \ll N/(K \cap K')$ . Veamos ahora que  $(N \cap N' \cap K') \ll N$ . Para ello consideremos  $X \leq N$  tal que  $(N \cap N' \cap K') + X = N$ . Entonces

$$(N \cap N' \cap K')/(K \cap K') + (X + (K \cap K'))/(K \cap K') = N/(K \cap K')$$

y de aquí que  $(X + (K \cap K'))/(K \cap K') = N/(K \cap K')$ . Luego,  $X + (K \cap K') = N$ , pero  $K \cap K' \ll N$ , así que  $X = N$ . Por lo tanto  $(N \cap N' \cap K') \ll N$ , lo que prueba que  $N$  es un suplemento de  $N' \cap K'$  en  $M$ .

- (2) Por el Lema 1.7, se tiene que  $M/K$  también es débilmente suplementado. Ahora, como  $K$  es cocerrado en  $M$  y  $N/K$  es cocerrado en  $M/K$  se sigue, por la Proposición 1.23, que  $K$  y  $N/K$  son suplementos en  $M$  y en  $M/K$  respectivamente. Luego, por el inciso (1), se tiene que  $N$  es un suplemento en  $M$  y por el Lema 1.21,  $N$  es cocerrado en  $M$ .

■

## Cocerraduras

**Definición 1.25** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $K \leq N \leq M$ . Diremos que  $K$  es una cocerradura de  $N$  en  $M$  si  $K$  es un submódulo coesencial de  $N$  en  $M$  y  $K$  es un submódulo cocerrado en  $M$ .

**Teorema 1.26** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Si  $M$  es ampliamente suplementado, entonces todo submódulo  $N$  de  $M$  tiene una cocerradura en  $M$ .

**Demostración.**

Sea  $N \leq M$ . Como  $M$  es ampliamente suplementado, existe  $H \leq M$  tal que  $M = N + H$  y  $H$  es mínimo con esta propiedad. Más aún, existe  $K \leq N$  tal que  $M = K + H$  y  $K$  es mínimo con esta propiedad.

Afirmamos que  $K$  es una cocerradura de  $N$  en  $M$ .

Veamos primero que  $K \leq_{ce} N$  en  $M$ . Para ello consideremos un submódulo  $X$  de  $M$  tal que  $K \leq X$  y  $M/K = N/K + X/K$ . Entonces

$$\begin{aligned} M &= N + X = N + [X \cap M] = N + [X \cap (K + H)] \\ &= N + [K + (X \cap H)] = N + (X \cap H), \end{aligned}$$

pero  $H$  es mínimo con esta propiedad, así que  $X \cap H = H$  y de aquí que  $H \leq X$ . Luego,  $M = K + H \leq K + X \leq X$ , de donde  $M = X$  y  $N/K \ll M/K$ . Por lo tanto  $K \leq_{ce} N$  en  $M$ .

Ahora, veamos que  $K$  es cocerrado en  $M$ . Si  $X \leq_{ce} K$  en  $M$ , entonces como  $M = K + H$  se tiene, por la Proposición 1.12, que  $M = X + H$ , pero  $K$  es mínimo con esta propiedad, por lo que  $X = K$ . Concluimos entonces que  $K$  es una cocerradura de  $N$  en  $M$ . ■

**Ejemplo 1.27** Sea  $M$  un  $R$ -módulo semisimple. Entonces  $M$  es ampliamente suplementado, por lo que todo submódulo  $N$  de  $M$  tiene una cocerradura en  $M$ .

**Proposición 1.28** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H \leq N \leq M$ . Entonces  $H$  es una cocerradura de  $N$  en  $M$  si y sólo si  $H$  es un submódulo coesencial mínimo de  $N$  en  $M$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $H$  es una cocerradura de  $N$  en  $M$ . Entonces  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ . Probaremos que es mínimo con esta propiedad. Para ello sea  $X \leq H$  tal que  $X \leq_{ce} N$  en  $M$ . Como  $H/X \leq N/X \ll M/X$ , se sigue que  $H/X \ll M/X$ . Pero como  $H$  es cocerrado en  $M$ , no tiene submódulos coesenciales propios, así que  $H = X$ .

Por otro lado, sea  $H$  un submódulo coesencial mínimo de  $N$  en  $M$ . Demostraremos que  $H$  es cocerrado. Para ello consideremos  $X \leq_{ce} H$  en  $M$  y

supongamos que  $M/X = N/X + K/X$ , para algún submódulo  $K$  de  $M$  tal que  $X \leq K$ . Entonces  $M = N + K$  y como  $H \leq_{ce} N$  en  $M$ , por la Proposición 1.12,  $M = H + K$ . Ahora, como  $X \leq_{ce} H$  en  $M$ , entonces  $M = X + K = K$ . Se sigue que  $K/X = M/X$  y  $N/X \ll M/X$ , esto es,  $X \leq_{ce} N$  en  $M$ . Pero  $H$  es mínimo con esta propiedad, así que  $X = H$  y  $H$  es cocerrado en  $M$ . Por lo tanto  $H$  es una cocerradura de  $N$  en  $M$ . ■

**Teorema 1.29** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H, N \leq M$  tales que  $H$  es un suplemento débil de  $N$ . Entonces  $K \leq H$  es una cocerradura de  $H$  en  $M$  si y sólo si  $K$  es un suplemento de  $N$  en  $M$ .

**Demostración.**

Primero supongamos que  $K \leq H$  es un suplemento de  $N$  en  $M$ . Entonces, por el Lema 1.21,  $K$  es cocerrado en  $M$ . Ahora, como  $M = N + K$ , tenemos que  $H = K + (H \cap N)$ , con  $H \cap N \ll M$ , pues  $H$  es un suplemento débil de  $N$  en  $M$ . Luego, por la Proposición 1.15, tenemos que  $K \leq_{ce} H$  en  $M$ . Por lo tanto  $K$  es una cocerradura de  $H$  en  $M$ .

Ahora, sea  $K \leq H$  una cocerradura de  $H$  en  $M$ . Como  $K \leq_{ce} H$  en  $M$  y  $H + N = M$ , entonces  $K + N = M$ . Sólo resta probar que  $K \cap N \ll K$ . Para ello recordemos que  $H \cap N \ll M$ , pues  $H$  es un suplemento débil de  $N$ . Por lo tanto  $K \cap N \ll M$  y por el Lema 1.22,  $K \cap N \ll K$ . ■

## Capítulo 2

# Módulos cosingulares y no-cosingulares

En este capítulo estudiamos las propiedades de los módulos cosingulares y no-cosingulares. Concluimos caracterizando un  $V$ -anillo como aquél en el que todos los módulos sobre él son no-cosingulares.

Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Recordemos que  $M$  es singular si para cualquier  $m \in M$   $ann_i(m) \trianglelefteq R$ , donde  $ann_i(m)$  denota el anulador izquierdo de  $m$ . El submódulo singular de  $M$ , denotado por  $\mathcal{Z}(M)$ , se define como  $\mathcal{Z}(M) = Tr(\mathcal{U}, M)$ , donde  $\mathcal{U}$  denota la clase de todos los módulos singulares. Dualmente, definimos  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  como

$$\overline{\mathcal{Z}}(M) = Re(M, \mathcal{S}) = \cap \{Ker(g) \mid g \in Hom(M, L), L \in \mathcal{S}\},$$

donde  $\mathcal{S}$  denota la clase de todos los módulos pequeños. Podemos ahora dar la siguiente

**Definición 2.1** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Diremos que  $M$  es un módulo cosingular si  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = 0$  y que es no-cosingular si  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = M$ .

**Ejemplo 2.2** Si  $M$  es un  $R$ -módulo pequeño, entonces  $M$  es cosingular pues  $\overline{\mathcal{Z}}(M) \subseteq Ker(1_M) = 0$ . De los Ejemplos 1.2 y 1.3, tenemos que  $\mathbb{Z}_p^n$  y  $\mathbb{Z}$  son dos  $\mathbb{Z}$ -módulos cosingulares.

**Ejemplo 2.3** Si  $R$  es un anillo semisimple, entonces todo  $R$ -módulo es inyectivo. Por lo tanto el único  $R$ -módulo pequeño es el 0 y de aquí que todo  $R$ -módulo no cero sea no-cosingular.

**Proposición 2.4** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Entonces  $M$  es no-cosingular si y sólo si todo cociente no cero de  $M$  no es pequeño.

**Demostración.**

Sea  $M \in R\text{-Mod}$  no-cosingular, es decir,  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = M$  y sea  $N \lesssim M$ . Si  $M/N$  fuera un módulo pequeño, entonces  $\overline{\mathcal{Z}}(M) \subseteq \text{Ker}(\pi) = N$ , donde  $\pi : M \rightarrow M/N$  es la proyección canónica. Y de aquí que  $M = N$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo cociente no cero de  $M$  no es pequeño. Veamos ahora que  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = M$  si suponemos que todo cociente no cero de  $M$  no es pequeño. Sean  $g \in \text{Hom}(M, L)$  con  $L$  un módulo pequeño y  $K = \text{Ker}(g)$ . Si suponemos que  $K \lesssim M$ , entonces

$$M/K \cong \text{Im}(g) \leq L \ll E(L),$$

de donde  $\text{Im}(g) \ll E(L)$  y de allí que  $M/K$  es pequeño, lo que es una contradicción. Por lo tanto  $K = M$ . Como lo anterior sucede para cualquier módulo pequeño  $L$  y cualquier homomorfismo  $g : M \rightarrow L$ , concluimos que  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = M$ . ■

La siguiente proposición proporciona algunas propiedades del functor  $\overline{\mathcal{Z}}(-)$ .

**Proposición 2.5** Sean  $M, N, N_i \in R\text{-Mod}$  con  $i \in I$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Si  $N \leq M$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}(N) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(M)$  y  $\overline{\mathcal{Z}}(M/N) \supseteq (\overline{\mathcal{Z}}(M) + N)/N$ ;
- (2) Si  $f \in \text{Hom}(M, N)$ , entonces  $f(\overline{\mathcal{Z}}(M)) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(N)$ ;
- (3)  $\overline{\mathcal{Z}}(N/\overline{\mathcal{Z}}(N)) = 0$ ;
- (4)  $\overline{\mathcal{Z}}\left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ ;
- (5)  $\overline{\mathcal{Z}}\left(\prod_{i \in I} N_i\right) \subseteq \prod_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ ;
- (6)  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  es el submódulo más pequeño de  $M$  tal que  $M/\overline{\mathcal{Z}}(M)$  es cosingular.

**Demostración.**

- (1) Notemos que si  $h \in \text{Hom}(M, L)$  con  $L$  un módulo pequeño, entonces la restricción  $h|_N \in \text{Hom}(N, L)$ . Así que si  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(N)$ , entonces  $h(x) = h|_N(x) = 0$ , es decir,  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(M)$ . Por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}(N) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(M)$ . Ahora, si vale (2), entonces para la proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/N$ , tenemos que

$$(\overline{\mathcal{Z}}(M) + N)/N = \pi(\overline{\mathcal{Z}}(M)) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(M/N).$$

Veamos entonces que (2) es válida.

- (2) Sea  $y \in f(\overline{\mathcal{Z}}(M))$ , entonces  $y = f(x)$  con  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(M)$ . Ahora, sea  $h \in \text{Hom}(N, L)$  con  $L$  un módulo pequeño. Entonces  $(h \circ f)(x) = 0$ , pues  $(h \circ f) \in \text{Hom}(M, L)$  y  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(M)$ . Pero  $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$ , así que  $y \in \overline{\mathcal{Z}}(N)$ .
- (3) Sea  $x + \overline{\mathcal{Z}}(N) \in \overline{\mathcal{Z}}(N/\overline{\mathcal{Z}}(N))$  y supongamos que  $x \notin \overline{\mathcal{Z}}(N)$ . Entonces existen un módulo pequeño  $L$  y  $h \in \text{Hom}(N, L)$  tales que  $x \notin \text{Ker}(h)$ . Sea  $\pi : N \rightarrow N/\overline{\mathcal{Z}}(N)$  la proyección canónica. Como  $\text{Ker}(\pi) = \overline{\mathcal{Z}}(N) \subseteq \text{Ker}(h)$ , existe un homomorfismo  $h^* : N/\overline{\mathcal{Z}}(N) \rightarrow L$  tal que  $h = h^* \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\pi} & \frac{N}{\overline{\mathcal{Z}}(N)} \\ h \downarrow & \nearrow h^* & \\ L & & \end{array}$$

Luego,  $h(x) = h^*(x + \overline{\mathcal{Z}}(N)) = 0$ , lo que es una contradicción pues  $x \notin \text{Ker}(h)$ . Por lo tanto  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(N)$  y de aquí que  $\overline{\mathcal{Z}}(N/\overline{\mathcal{Z}}(N)) = 0$ .

- (4) Como  $N_j \subseteq \bigoplus_{i \in I} N_i$ , por (1), tenemos que  $\overline{\mathcal{Z}}(N_j) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(\bigoplus_{i \in I} N_i)$  y se sigue que

$$\bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(\bigoplus_{i \in I} N_i).$$

Ahora, supongamos que existe  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(\bigoplus_{i \in I} N_i) \setminus \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ . Como  $\overline{\mathcal{Z}}(\bigoplus_{i \in I} N_i) \leq \bigoplus_{i \in I} N_i$ , entonces  $x = \sum_{i \in F} x_i$ , con  $x_i \in N_i$  para cada  $i \in F$  y  $F \subseteq I$  finito. Como  $x \notin \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ , existe  $j \in F$  tal que  $x_j \notin \overline{\mathcal{Z}}(N_j)$ , esto es, existen un módulo pequeño  $L$  y  $h_j \in \text{Hom}(N_j, L)$  tales que  $x_j \notin \text{Ker}(h_j)$ . Ahora, si  $\pi_j$  denota la proyección sobre  $N_j$ , entonces  $h := h_j \circ \pi_j \in \text{Hom}(\bigoplus_{i \in I} N_i, L)$ , así que  $h(x) = 0$ . Pero por otro lado,

$h(x) = (h_j \circ \pi_j)(x) = h_j(x_j) \neq 0$ . Notemos que esta contradicción surgió de suponer que  $x \notin \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ , por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}(\bigoplus_{i \in I} N_i) \subseteq \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ . Así, podemos concluir que

$$\bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i) = \overline{\mathcal{Z}}(\bigoplus_{i \in I} N_i).$$

(5) Sean  $x = (x_i)_{i \in I} \in \overline{\mathcal{Z}}(\prod_{i \in I} N_i)$ ,  $j \in I$  fijo,  $L$  un módulo pequeño y  $h \in \text{Hom}(N_j, L)$ . Notemos que  $h \circ \pi_j \in \text{Hom}(\prod_{i \in I} N_i, L)$ , donde  $\pi_j$  denota la proyección sobre  $N_j$ , por lo que  $h(x_j) = (h \circ \pi_j)(x) = 0$ . Por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}(\prod_{i \in I} N_i) \subseteq \prod_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i)$ .

(6) Sea  $N \leq \overline{\mathcal{Z}}(M) \leq M$  tal que  $\overline{\mathcal{Z}}(M/N) = 0$ . Veamos que  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = N$ . Sea  $a \in \overline{\mathcal{Z}}(M) \setminus N$ , entonces  $a + N \notin \overline{\mathcal{Z}}(M/N)$ . Por lo tanto existen un módulo pequeño  $L$  y  $h \in \text{Hom}(M/N, L)$  tales que  $a + N \notin \text{Ker } h$ . Luego, si  $\pi : M \rightarrow M/N$  es la proyección canónica, entonces  $h \circ \pi \in \text{Hom}(M, L)$ , por lo que  $a \in \text{Ker}(h \circ \pi)$ , esto es,  $h(a + N) = 0$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}(M) \setminus N = \emptyset$ , es decir,  $N = \overline{\mathcal{Z}}(M)$ . ■

Como consecuencia de esta proposición tenemos el siguiente

**Corolario 2.6** La clase de todos los módulos cosingulares es cerrada bajo submódulos, sumas directas y productos directos.

**Proposición 2.7** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $S, N \leq M$  con  $S$  pequeño. Si  $M = N + S$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = \overline{\mathcal{Z}}(N)$ .

**Demostración.**

Mostraremos primero que  $\overline{\mathcal{Z}}(M) \subseteq N$ . Por el Corolario 1.14 sabemos que  $N \cap S \leq_{ce} S$  pues  $S$  es pequeño. Así que  $S/(N \cap S) \ll E(S)/(N \cap S)$ , de donde  $S/(N \cap S)$  es pequeño. Como  $S/(N \cap S) \cong M/N$ , se sigue que  $M/N$  es pequeño. Consideremos ahora la proyección canónica  $\pi \in \text{Hom}(M, M/N)$ . Entonces, si  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(M)$  se sigue que  $x \in \text{Ker}(\pi)$  y de aquí que  $x \in N$ .

Veamos ahora que  $\overline{\mathcal{Z}}(M) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(N)$ . Para ello sean  $h \in \text{Hom}(N, L)$  con  $L$  un módulo pequeño y  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(M)$ . Consideremos las inclusiones  $\iota_N \in \text{Hom}(N, M)$ ,  $\iota_L \in \text{Hom}(L, E(L))$ . Como  $\iota_N$  es un monomorfismo y  $E(L)$  es un módulo inyectivo, existe  $f \in \text{Hom}(M, E(L))$  tal que  $f \circ \iota_N = \iota_L \circ h$ .

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{\iota_N} & M \\
 \downarrow h & & \swarrow f \\
 L & & \\
 \downarrow \iota_L & & \\
 E(L) & & 
 \end{array}$$

Si demostramos que  $f(M)$  es superfluo en  $E(L)$  tendremos que para todo  $x \in \overline{\mathcal{Z}}(M) \subseteq N$ ,  $x \in \text{Ker}(f \circ \iota_N)$  y de aquí que  $x \in \text{Ker}(\iota_L \circ h)$ , es decir,  $x \in \text{Ker}(h)$ . Pero  $f(M) = f(N) + f(S)$  y como la suma de módulos superfluos es un módulo superfluo, basta mostrar que  $f(N)$  y  $f(S)$  son superfluos en  $E(L)$ .

Como  $f(N) \subseteq L$  y  $L \ll E(L)$ , entonces  $f(N) \ll E(L)$ . Por otro lado, si consideramos las inclusiones  $\iota_S \in \text{Hom}(S, E(S))$  y  $\iota'_S \in \text{Hom}(S, M)$ , tenemos que existe  $g \in \text{Hom}(E(S), E(L))$  tal que  $f \circ \iota'_S = g \circ \iota_S$ , pues  $\iota_S$  es un monomorfismo y  $E(L)$  un módulo inyectivo.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\iota_S} & E(S) \\
 \downarrow \iota'_S & & \swarrow g \\
 M & & \\
 \downarrow f & & \\
 E(L) & & 
 \end{array}$$

Ahora, como  $S \ll E(S)$ , se sigue que  $g(S) \ll E(L)$ , pero  $g(S) = f(S)$ , así que  $f(S) \ll E(L)$ . ■

Continuemos ahora con el siguiente

**Lema 2.8** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Si  $M$  es no-cosingular y  $N \leq M$  es pequeño, entonces  $N \ll M$ ;
- (2) Cualquier submódulo no-cosingular de  $M$  es cocerrado en  $M$ ;
- (3) Si  $M$  es no-cosingular y  $N \leq M$ , entonces  $N$  es cocerrado en  $M$  si y sólo si  $N$  es no-cosingular.

**Demostración.**

- (1) Sea
- $H \leq M$
- tal que
- $N + H = M$
- . Como
- $N \ll E(N)$
- , tenemos que

$$M/H = (N + H)/H \cong N/(N \cap H) \ll E(N)/(N \cap H),$$

y de aquí que  $M/H$  sea pequeño.

Ahora,  $\overline{\mathcal{Z}}(M/H) \supseteq (\overline{\mathcal{Z}}(M) + H)/H = M/H$ , así que  $\overline{\mathcal{Z}}(M/H) = M/H$  y como  $M/H$  es pequeño, entonces  $M = H$ . Luego  $N \ll M$ .

- (2) Sea
- $N \leq M$
- no-cosingular y
- $L \leq N$
- . Como
- $\overline{\mathcal{Z}}(N) = N$
- y la proyección canónica
- $\pi \in \text{Hom}(N, N/L)$
- , si
- $N/L$
- fuera pequeño, entonces
- $N \subseteq \text{Ker}(\pi) = L$
- , lo que es una contradicción. Así que
- $N/L$
- no es pequeño, por lo que no puede ser superfluo en ningún otro módulo; en particular,
- $N/L$
- no es superfluo en
- $M/L$
- . Por lo tanto,
- $N$
- no tiene submódulos coesenciales propios y se sigue que
- $N$
- es cocerrado en
- $M$
- .

- (3) Supongamos que
- $N$
- es cocerrado en
- $M$
- . Como
- $M$
- es no-cosingular, para cualquier
- $L \leq M$
- tenemos que

$$\overline{\mathcal{Z}}(M/L) \supseteq (\overline{\mathcal{Z}}(M) + L)/L = M/L,$$

de donde  $M/L$  es no-cosingular. Así, si para algún  $L \leq N$  el cociente  $N/L$  fuera pequeño entonces, por (1), tendríamos que  $N/L \ll M/L$ , pero por ser  $N$  cocerrado en  $M$ , tendríamos que  $L = N$ . Entonces hemos demostrado que ningún cociente no cero de  $N$  es pequeño, así que, por la Proposición 2.4, tenemos que  $\overline{\mathcal{Z}}(N) = N$ . Ahora, si suponemos que  $\overline{\mathcal{Z}}(N) = N$ , por (2),  $N$  es cocerrado en  $M$ .

■

Recordemos que un epimorfismo  $f : M \rightarrow N$  es superfluo si  $\text{Ker}(f) \ll M$ .

**Proposición 2.9** La clase de los módulos no-cosingulares es cerrada bajo imágenes homomorfas, sumas directas, extensiones, epimorfismos superfluos y submódulos cocerrados.

**Demostración.**

Sean  $M, N \in R\text{-Mod}$  con  $M$  no-cosingular y  $f \in \text{Hom}(M, N)$ . Por el inciso

(2) de la Proposición 2.5, tenemos que  $f(M) = f(\overline{\mathcal{Z}}(M)) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(f(M))$ , así que  $f(M)$  es no-cosingular.

Luego, del inciso (4) de la misma proposición, se sigue que

$$\overline{\mathcal{Z}}(\oplus_{i \in I} N_i) = \oplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(N_i) = \oplus_{i \in I} N_i$$

si  $\{N_i \mid i \in I\}$  es una familia de módulos no-cosingulares.

Del inciso (3) del Lema 2.8, se sigue que la clase de los módulos no-cosingulares es cerrada bajo submódulos cocerrados.

Ahora, sea  $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$  una sucesión exacta con  $L$  y  $N$  módulos no-cosingulares. Si  $H$  es un módulo pequeño y  $h \in \text{Hom}(M, H)$ , entonces  $h \circ f \in \text{Hom}(L, H)$  y por ser  $L$  no-cosingular tenemos que  $h \circ f = 0$ . Entonces, por la propiedad universal del conúcleo, existe  $h' \in \text{Hom}(N, H)$  tal que  $h' \circ g = h$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow h & \swarrow h' & \\ & & & & H & & \end{array}$$

Como  $N$  es no-cosingular, se sigue que  $h' = 0$  y de aquí que  $h = 0$ . Por lo tanto  $M$  es no-cosingular.

Finalmente, sea  $f : M \rightarrow N$  un epimorfismo superfluo en donde  $N$  es un módulo no-cosingular. Si  $M/H$  es un módulo pequeño para algún  $H \leq M$ , por la Proposición 1.5,  $N/f(H)$  es pequeño. Como  $N$  es no-cosingular, entonces  $f(H) = N$ . De lo anterior tenemos que  $M = H + \text{Ker}(f)$  y así  $H = M$ , pues  $\text{Ker}(f) \ll M$ . Luego  $M$  es no-cosingular. ■

**Corolario 2.10** Sea  $\{N_i\}_{i \in I}$  una familia de submódulos no-cosingulares de un  $R$ -módulo  $M$ . Entonces  $\sum N_i$  es no-cosingular.

### Demostración.

Consideremos el epimorfismo natural de  $\bigoplus N_i$  en  $\sum N_i$ . Por el inciso (4) de la Proposición 2.5, tenemos que  $\bigoplus N_i$  es no-cosingular, luego  $\sum N_i$  es no-cosingular por la Proposición 2.9. ■

**Proposición 2.11** Sea  $S \in R\text{-Mod}$  un módulo simple. Entonces  $S$  es pequeño o  $S$  es inyectivo.

**Demostración.**

Si  $S$  no es pequeño, entonces no es superfluo en  $E(S)$ , así que existe  $H \leq E(S)$  tal que  $S + H = E(S)$ . Notemos que no puede suceder que  $0 \neq S \cap H$ , pues esto implicaría que  $S \subseteq H$  ya que  $S$  es simple y se seguiría que  $H = E(S)$ . Entonces debe suceder que  $S \cap H = 0$ . Como  $S \trianglelefteq E(S)$ , tenemos que  $H = 0$  y de ahí que  $S = E(S)$ . Concluimos que si  $S$  no es pequeño, entonces es inyectivo. ■

**Proposición 2.12** Sea  $S \in R\text{-Mod}$  un módulo simple. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (1) Si  $S$  es inyectivo, entonces es no-cosingular;
- (2) Si  $S$  no es inyectivo, entonces  $E(S)$  no es cosingular.

**Demostración.**

- (1) Sea  $P \in R\text{-Mod}$  un módulo pequeño y  $f \in \text{Hom}(S, P)$ . Como  $S$  es simple entonces  $\text{Ker}(f)$  es el módulo 0 o bien  $S$ . Notemos que  $\text{Ker}(f) \neq 0$ , pues en caso contrario el módulo  $f(S)$ , isomorfo a  $S$ , cumpliría que  $f(S) \leq P \ll E(P)$  y por lo tanto  $S$  sería un módulo pequeño, contradiciendo la Proposición 2.11. Luego  $\text{Ker}(f) = S$ , de donde se sigue que  $S$  es no-cosingular.
- (2) Sea  $P \in R\text{-Mod}$  un módulo pequeño y  $f \in \text{Hom}(E(S), P)$ . Si  $\text{Ker}(f) = 0$ , el módulo  $f(E(S))$  es un módulo inyectivo por ser isomorfo a  $E(S)$ . Como  $f(E(S)) \leq P \leq E(P)$ , existe  $T \leq E(P)$  tal que  $f(E(S)) \oplus T = E(P)$ . De aquí que  $P + T = E(P)$ , pero esto contradice que  $P \ll E(P)$ . Por lo tanto  $\text{Ker}(f) \neq 0$ . Ahora, como  $S \trianglelefteq E(S)$ , se sigue que  $0 \neq S \cap \text{Ker}(f) \leq S$  y por ser  $S$  simple, se tiene que  $S \subseteq \text{Ker}(f)$ . Ya que lo anterior no depende de  $P$  ni de  $f$ , podemos concluir que  $0 \neq S \subseteq \overline{Z}(E(S))$ . ■

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente

**Corolario 2.13** Sea  $R$  un anillo artiniiano. Entonces todo módulo inyectivo no cero no es cosingular.

**Demostración.**

Sea  $Q \in R\text{-Mod}$  un módulo inyectivo, no cero. Como  $R$  es artiniiano, se tiene que existen módulos simples  $S_i$ , con  $i \in I$ , tales que

$$Q = \bigoplus_{i \in I} E(S_i).$$

Ahora, por el inciso (4) de la Proposición 2.5, tenemos que

$$\overline{\mathcal{Z}}(Q) = \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{Z}}(E(S_i)).$$

Por la Proposición 2.12, para cada  $i \in I$ , se tiene que  $\overline{\mathcal{Z}}(E(S_i)) \neq 0$ . Por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}(Q) \neq 0$ . ■

**Definición 2.14** Un  $R$ -módulo  $M$  se llama cosemisimple si para todo submódulo  $K$  de  $M$ ,  $\text{Rad}(M/K) = 0$ .

**Ejemplo 2.15** Todo módulo semisimple es cosemisimple.

**Teorema 2.16** (O. E. Villamayor) Para un anillo  $R$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) Todo  $R$ -módulo simple es inyectivo;
- (2) Todo  $R$ -módulo es cosemisimple.

**Demostración.**

Supongamos que todo  $R$ -módulo simple es inyectivo. Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $0 \neq x \in M$ . Luego, el conjunto  $\mathcal{A} = \{N \leq M \mid x \notin N\}$  es no vacío pues el módulo cero es un elemento de dicho conjunto, además cada cadena  $\mathcal{C}$  de elementos de  $\mathcal{A}$  tiene una cota superior en  $\mathcal{A}$ , a saber,  $\cup\{N \mid N \in \mathcal{C}\}$ . Así, por el lema de Zorn, existe  $N \leq M$  máximo entre los submódulos  $L$  de  $M$  tales que  $x \notin L$ . Ahora, si definimos al  $R$ -módulo  $K$  como sigue

$$K := \cap\{S \leq M \mid N \not\leq S\},$$

tenemos que  $x \in K$  y  $K/N$  es simple, por lo que es inyectivo. Así

$$M/N = K/N \bigoplus H/N,$$

para algún submódulo  $H$  de  $M$ . Como  $x \in K \setminus N$ , entonces  $x \notin H$  y dado que  $N \leq H$  se sigue que  $N = H$ . Por lo tanto  $M/N$  es simple y  $N$  es un submódulo máximo de  $M$ . Ahora, si  $Rad(M) \neq 0$ , entonces existe un elemento  $x \neq 0$  que pertenece a todos los submódulos máximos de  $M$ , pero hemos visto ya que esto no ocurre. Por lo tanto  $Rad(M) = 0$ .

Como lo anterior ocurre para cualquier  $R$ -módulo, en particular ocurre para cualquier cociente de un módulo, es decir,  $Rad(M/K) = 0$  para todo  $R$ -módulo  $M$  y cualquier  $K \leq M$ . Concluimos entonces que todo  $R$ -módulo es cosemisimple.

Supongamos ahora que todo  $R$ -módulo es cosemisimple y sea  $S$  un  $R$ -módulo simple. Utilizaremos el criterio de Baer para mostrar que  $S$  es inyectivo. Para ello consideremos un ideal izquierdo  $I$  de  $R$  y  $f \in Hom(I, S)$ . Notemos que si  $f = 0$ , la extensión buscada es la trivial. Así, supongamos que  $K := Ker(f) \neq I$ . Por hipótesis, tenemos que  $R$  es cosemisimple, así que  $Rad(R/K) = 0$ . Consideremos la proyección canónica  $\pi : R \rightarrow R/K$ . Por el teorema de la correspondencia existe un ideal izquierdo máximo  $J$  de  $R$  tal que  $K \leq J$ , más aún, podemos suponer que  $I \not\leq J$ , ya que en caso contrario  $K = I$ . Ahora, como  $I/K \cong S$ , entonces  $I/K$  es simple y de aquí que  $J \cap I = K$ . Tenemos entonces que

$$\frac{R}{J} = \frac{J+I}{J} \cong \frac{I}{J \cap I} \cong \frac{I}{K} \cong S.$$

Así, si  $\hat{f} = \alpha \circ \pi$ , donde  $\pi : R \rightarrow R/J$  es la proyección canónica y  $\alpha : R/J \rightarrow S$  es el isomorfismo anterior, entonces  $\hat{f} \in Hom(R, S)$  y es tal que  $\hat{f} \circ \iota = f$ , en donde  $\iota$  es la inclusión de  $I$  en  $R$ .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\iota} & R \\ f \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ S & & \end{array}$$

Por lo tanto  $S$  es inyectivo. ■

**Definición 2.17** Un anillo  $R$  que satisface las condiciones equivalentes del teorema anterior se llama  $V$ -anillo.

**Ejemplo 2.18** Sabemos que si  $R$  es un anillo semisimple, entonces todo  $R$ -módulo es inyectivo. Por lo tanto, todo anillo semisimple es un  $V$ -anillo.

**Teorema 2.19** Para un anillo conmutativo  $R$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $R$  es un  $V$ -anillo
- (2) Todo ideal de  $R$  es idempotente
- (3) Para cualesquiera ideales  $I, J$  de  $R$  se tiene que  $IJ = I \cap J$ .

**Demostración.**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Supongamos que existe un ideal  $I$  de  $R$  tal que  $I^2 \subsetneq I$ . Como  $R$  es un  $V$ -anillo, tenemos que  $\text{Rad}(R/I^2) = 0$ , así que existe  $J$  un ideal de  $R$  máximo con la propiedad de que  $I^2 \leq J$  pero  $I \not\leq J$ . Entonces  $R = J + I$ , de donde  $1 = j + i$  para algunos  $j \in J$  e  $i \in I$ . Se sigue que  $i = ij + i^2$  y de aquí que  $1 = j + i = j + (ij + i^2)$ , es decir,  $1 \in J$ , lo cual no puede ocurrir pues  $J \subsetneq R$ . Por lo tanto, todo ideal de  $R$  es idempotente.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sean  $I, J$  dos ideales de  $R$ . Es claro que  $IJ \leq I \cap J$ . Por otro lado, tenemos que  $I \cap J \leq I, J$ , de donde  $(I \cap J)^2 \leq IJ$ , pero por hipótesis  $(I \cap J)^2 = I \cap J$ , así que  $I \cap J \leq IJ$ . Por lo tanto  $IJ = I \cap J$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Sean  $I$  un ideal de  $R$ ,  $S$  un  $R$ -módulo simple y  $f \in \text{Hom}(I, S)$ . Mostraremos que  $f$  se puede extender a un morfismo de  $R$  a  $S$ . Sea  $K = \text{Ker}(f)$ , si  $K = I$  es claro que  $f$  se extiende de manera trivial a todo  $R$ . Supongamos que  $K \subsetneq I$ . Como  $S$  es simple,  $S \cong I/K$ , por lo que  $K$  es máximo en  $I$ . Ahora, sea  $T = \text{Ann}(S)$ , donde  $\text{Ann}(S)$  denota el anulador de  $S$ . Note que para todo  $s \in S \setminus \{0\}$ ,  $\text{Ann}(S) = \text{ann}(s)$ , pues  $S$  es simple, así que  $T = \text{ann}(s)$  para todo  $s \in S \setminus \{0\}$ . Luego  $f(TI) = TS = 0$ , por lo que  $TI \leq K$ . Ahora, por hipótesis,  $TI = T \cap I$ , así que  $T \cap I \leq K \subsetneq I$  y de aquí que  $I/K \leq I/(T \cap I)$ . Luego,

$$R/T = R/(\text{ann}(s)) \cong Rs = S \cong I/K \leq I/(T \cap I) \cong (T + I)/T,$$

de donde  $R = T + I$ . Así, si  $r = t + i \in R$ , definimos  $\tilde{f}(r) = f(i)$ . Tenemos que  $\tilde{f} \in \text{Hom}(R, S)$  y cumple que  $\tilde{f} \circ \iota = f$ , donde  $\iota \in \text{Hom}(I, R)$  es la inclusión canónica. Por lo tanto, todo  $R$ -módulo simple es inyectivo, así que por el Teorema 2.16,  $R$  es un  $V$ -anillo. ■

**Ejemplo 2.20** Si  $R$  es un anillo booleano, entonces es un  $V$ -anillo.

**Proposición 2.21** Todo  $R$ -módulo es no-cosingular si y sólo si  $R$  es un  $V$ -anillo.

**Demostración.**

Sean  $R$  un  $V$ -anillo y  $M \in R\text{-Mod}$ . Por el Teorema 2.16, se tiene que  $M$  es cosemisimple. Entonces si  $N \leq M$ ,  $\text{Rad}(M/N) = 0$ , por lo que existe  $L \leq M$  máximo tal que  $N \leq L$ . Luego  $M/L$  es simple y por lo tanto inyectivo. Así,  $M/L$  no es pequeño. Lo anterior implica, por la Proposición 1.5, que  $M/N$  no es pequeño. Finalmente, de la Proposición 2.4, se sigue que  $M$  es no-cosingular.

Ahora, supongamos que todo  $R$ -módulo es no-cosingular y sea  $S$  un  $R$ -módulo simple. Si  $S$  fuera pequeño, tendríamos que  $\overline{\mathcal{Z}}(S) \subseteq \text{Ker}(1_S) = 0$ , lo cual no puede ocurrir pues  $\overline{\mathcal{Z}}(S) = S$ . Por la Proposición 2.11,  $S$  es inyectivo. Como lo anterior vale para cualquier  $R$ -módulo simple, se tiene que  $R$  es un  $V$ -anillo. ■

# Capítulo 3

## La teoría de torsión cogenerada por la clase de los módulos pequeños

En este capítulo estudiamos la teoría de torsión cogenerada por la clase de los módulos pequeños y damos condiciones bajo las cuales esta teoría de torsión se escinde. Comenzamos recordando lo siguiente.

**Definición 3.1** Sea  $\mathcal{A}$  una clase no vacía de  $R$ -módulos, definimos

$$\mathcal{A}^0 = \{M \in R\text{-mod} \mid \text{Hom}(M, N) = 0, \forall N \in \mathcal{A}\}$$

y

$$\mathcal{A}^* = \{M \in R\text{-mod} \mid \text{Hom}(N, M) = 0, \forall N \in \mathcal{A}\}.$$

Una pareja  $\{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$  de clases no vacías de  $R$ -módulos se llama una **teoría de torsión** si  $\mathcal{T} = \mathcal{F}^0$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{T}^*$ . La pareja  $\{\mathcal{A}^{*0}, \mathcal{A}^*\}$  es una teoría de torsión que se llama **la teoría de torsión generada por  $\mathcal{A}$** . La pareja  $\{\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^{0*}\}$  es también una teoría de torsión que se llama **la teoría de torsión cogenerada por  $\mathcal{A}$** .

Consideremos la clase  $\mathcal{S}$  de todos los  $R$ -módulos pequeños. Denotamos por  $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$  a la teoría de torsión cogenerada por  $\mathcal{S}$ . Tenemos la siguiente

**Proposición 3.2** Para la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ , se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) La clase de torsión  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  es la clase de todos los  $R$ -módulos no-cosingulares.
- (2) La clase libre de torsión  $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$  es la clase de todos los  $R$ -módulos para los cuales cualquier submódulo no cero no es no-cosingular.

**Demostración.**

- (1) Para  $M \in R\text{-Mod}$ , se tiene que  $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  si y sólo si  $\text{Hom}(M, S) = 0$  para todo  $S \in \mathcal{S}$ , es decir, si y sólo si  $\text{Ker}(g) = M$  para todo  $g \in \text{Hom}(M, S)$  con  $S \in \mathcal{S}$  y lo anterior ocurre si y sólo si  $\bar{\mathcal{Z}}(M) = M$ .
- (2) Para  $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ , se tiene que  $\text{Hom}(C, M) = 0$  para cualquier  $R$ -módulo  $C$  no-cosingular. Así, si  $N$  es un submódulo no-cosingular de  $M$ , entonces la inclusión  $i$  de  $N$  en  $M$  cumple que  $i \in \text{Hom}(N, M) = 0$ . Por lo tanto  $N = 0$ . Ahora, sea  $M$  un  $R$ -módulo tal que cualquier submódulo no cero no es no-cosingular y sea  $C$  un  $R$ -módulo no-cosingular. Entonces, por la Proposición 2.9, para cualquier  $g \in \text{Hom}(C, M)$  se tiene que  $g(C)$  es un submódulo no-cosingular de  $M$ . Por lo tanto  $g(C) = 0$  para todo  $g \in \text{Hom}(C, M)$ , esto es,  $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ .

■

Recordemos también que dada una teoría de torsión  $\{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$ , podemos asociarle un radical  $\rho$  como sigue:

$$\rho(M) = \text{Tr}(\mathcal{T}, M) = \text{Re}(M, \mathcal{F}),$$

donde  $M$  es cualquier  $R$ -módulo.

**Proposición 3.3** Sea  $\rho_{\mathcal{S}}$  el radical asociado a la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ . Si  $M \in R\text{-Mod}$ , entonces  $\rho_{\mathcal{S}}(M)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $M$ .

**Demostración.**

Por el Corolario 2.10,  $\rho_{\mathcal{S}}(M) = \text{Tr}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, M)$  es un módulo no-cosingular. Más aún, si  $N \leq M$  es no-cosingular entonces

$$N = i(N) \leq \sum \{f(L) \mid f \in \text{Hom}(L, M) \text{ y } L \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}\} = \text{Tr}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, M) = \rho_{\mathcal{S}}(M).$$

■

**Definición 3.4** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Definimos  $\overline{\mathcal{Z}}^0(M) = M$ ,  $\overline{\mathcal{Z}}^1(M) = \overline{\mathcal{Z}}(M)$  y de manera inductiva, si  $\alpha$  no es un ordinal límite,  $\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M) := \overline{\mathcal{Z}}(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha-1}(M))$  y si  $\alpha$  es un ordinal límite,  $\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M) := \bigcap_{\beta < \alpha} \overline{\mathcal{Z}}^\beta(M)$ .

Notemos que la definición anterior induce una cadena descendente

$$M \supseteq \overline{\mathcal{Z}}(M) \supseteq \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \supseteq \dots$$

de submódulos de  $M$ .

Ahora, observemos que si  $L \leq M$  es un submódulo no-cosingular, entonces  $L \subseteq \overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)$  para todo ordinal  $\alpha$ . Como por la Proposición 3.3  $\rho_S(M)$  es no-cosingular, se sigue que

$$\rho_S(M) \subseteq \bigcap_{\alpha} \overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M).$$

Pero notemos que la cadena antes mencionada se estaciona para algún ordinal  $\beta$ , ya que en caso contrario tendríamos una cadena de submódulos indexada por ordinales en el conjunto  $M$ . Así que  $\bigcap_{\alpha} \overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M) = \overline{\mathcal{Z}}^\beta(M)$  para algún ordinal  $\beta$ . Luego, por la Proposición 3.3,  $\overline{\mathcal{Z}}^\beta(M) \subseteq \rho_S(M)$ . Por lo tanto

$$\rho_S(M) = \bigcap_{\alpha} \overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M).$$

**Lema 3.5** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $\alpha \geq 1$  un ordinal. Entonces  $L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)$  en  $M$  si y sólo si  $\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)/L$  es pequeño.

### **Demostración.**

La necesidad se sigue de la definición de submódulo coesencial.

Ahora, para la suficiencia, supongamos que  $M/L = \overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)/L + N/L$  para algún submódulo  $N$  de  $M$  que contenga  $L$  y que  $\pi \in \text{Hom}(M, M/N)$  es la proyección canónica. Entonces

$$M/N = (\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M) + N)/N \subseteq (\overline{\mathcal{Z}}(M) + N)/N = \pi(\overline{\mathcal{Z}}(M)) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}(M/N),$$

de donde  $M/N$  es no-cosingular. Sea  $\pi' \in \text{Hom}(M/L, M/N)$  la proyección canónica. Entonces  $\pi'(\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)/L) = M/N$ , de donde  $M/N$  es pequeño, pues  $\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)/L$  lo es. Tenemos entonces que  $M/N$  es no-cosingular y pequeño, por lo tanto  $M = N$ . Así,  $\overline{\mathcal{Z}}^\alpha(M)/L \ll M/L$ . ■

**Teorema 3.6** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $\alpha \geq 1$  un ordinal. Entonces

$$\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha+1}(M) = \bigcap \{L \mid L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M) \text{ en } M\}.$$

Además, la familia de todos los submódulos coesenciales de  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  en  $M$  es cerrada bajo intersecciones finitas.

**Demostración.**

Si  $L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  en  $M$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/L$  es pequeño y de ahí que  $\overline{\mathcal{Z}}(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/L) = 0$ . Ahora, por la Proposición 2.5 inciso (6),  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha+1}(M)$  es el submódulo más pequeño de  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  tal que

$$\overline{\mathcal{Z}}(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha+1}(M)) = 0.$$

Por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha+1}(M) \leq L$ . Como lo anterior sucede para cualquier submódulo coesencial  $L$  de  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  en  $M$ , se sigue que

$$\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha+1}(M) \leq \bigcap \{L \mid L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M) \text{ en } M\}.$$

Ahora, sea  $h \in \text{Hom}(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M), S)$  con  $S$  un módulo pequeño. Como  $h(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)) \leq S$  y  $S$  es pequeño, tenemos que  $h(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M))$  es pequeño. Pero

$$h(\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)) \cong \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/\text{Ker}(h).$$

Luego, por el Lema 3.5,  $\text{Ker}(h) \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  en  $M$ , de donde

$$\bigcap \{L \mid L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M) \text{ en } M\} \leq \text{Ker}(h)$$

y por lo tanto

$$\bigcap \{L \mid L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M) \text{ en } M\} \leq \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha+1}(M).$$

Finalmente, si  $L, N \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  en  $M$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/L$  y  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/N$  son módulos pequeños. Como la clase de los módulos pequeños es cerrada bajo sumas directas finitas, tenemos que  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/L \oplus \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/N$  es un módulo pequeño. Más aún,  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/(L \cap N)$  es isomorfo a un submódulo de  $\overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/L \oplus \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)/N$ , por lo que también es un módulo pequeño. Luego, por el Lema 3.5,  $L \cap N \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^{\alpha}(M)$  en  $M$ . ■

Como consecuencia de este teorema, tenemos el siguiente

**Corolario 3.7** Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Si  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  tiene una cocerradura en  $M$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es la única cocerradura de  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  y así, es el submódulo no-cosingular más grande de  $M$ .

**Demostración.**

Mostraremos primero la unicidad. Para ello, sean  $L$  y  $N$  dos cocerraduras de  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ . En particular,  $L$  y  $N$  son submódulos coesenciales de  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ , así que por el Teorema 3.6,  $L \cap N \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ . Luego  $L = N$ , pues  $L$  y  $N$  son cocerrados.

Entonces, sea  $L$  la cocerradura de  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ . Si  $H \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ , por la Proposición 1.28,  $L \leq H$  y así  $L \leq \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  por el Teorema 3.6. Por otro lado, como  $L \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$  tenemos, por el Teorema 3.6, que  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) \leq L$ . Luego,  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es la única cocerradura de  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ .

Ahora, si  $H \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  en  $M$ , como  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ , tenemos que  $H \leq_{ce} \overline{\mathcal{Z}}(M)$  en  $M$ . Se sigue del Teorema 3.6 que  $\overline{\mathcal{Z}}^3(M) = \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y así  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $M$ . ■

**Teorema 3.8** Sean  $M, N \in R\text{-Mod}$  con  $M$  ampliamente suplementado,  $L \leq M$  y  $f \in \text{Hom}(L, N)$  un epimorfismo. Entonces  $\overline{\mathcal{Z}}^2(L)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $L$  y  $f(\overline{\mathcal{Z}}^2(L)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$ .

**Demostración.**

Por el Teorema 1.26, podemos tomar una cocerradura  $H$  de  $L$  en  $M$ . Ahora, como  $M$  es ampliamente suplementado y  $H$  es cocerrado, por la Proposición 1.23, se tiene que  $H$  es un suplemento. Luego, por el Lema 1.9,  $H$  es ampliamente suplementado. Además, como  $H \leq_{ce} L$  en  $M$ , se sigue de la Proposición 1.15 que  $L = H + S$  con  $S$  un módulo pequeño. Entonces, por la Proposición 2.7,  $\overline{\mathcal{Z}}(L) = \overline{\mathcal{Z}}(H)$ . Ahora,  $\overline{\mathcal{Z}}(H) \leq H$  y  $H$  es ampliamente suplementado, por lo que  $\overline{\mathcal{Z}}(H)$  tiene una cocerradura en  $H$ . Por el Corolario 3.7,  $\overline{\mathcal{Z}}^2(H)$  es la única cocerradura de  $\overline{\mathcal{Z}}(H)$  en  $H$  y  $\overline{\mathcal{Z}}^2(H)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $H$ . Luego, como  $\overline{\mathcal{Z}}^2(L) = \overline{\mathcal{Z}}^2(H)$ , tenemos que  $\overline{\mathcal{Z}}^2(L)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $L$ .

Por otro lado, tenemos que  $N = f(L) = f(H) + f(S)$ , con  $f(S)$  un módulo pequeño y así

$$\overline{\mathcal{Z}}^2(N) = \overline{\mathcal{Z}}^2(f(L)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(f(H)) \leq f(H).$$

Dado lo anterior, podemos definir  $g = f|_{\overline{\mathcal{Z}}^2(N)}$ . Entonces  $g \in \text{Hom}(H, f(H))$  es un epimorfismo. Sea  $A = g^{-1}(\overline{\mathcal{Z}}^2(N))$  y  $K$  una cocerradura de  $A$  en  $H$ . Entonces  $A = K + P$ , con  $P$  un módulo pequeño. Por el Lema 1.8,  $f(H)$  es ampliamente suplementado, por lo que  $\overline{\mathcal{Z}}(f(H))$  tiene una cocerradura en  $f(H)$  que, por el Corolario 3.7, es  $\overline{\mathcal{Z}}^2(N)$  y éste es no-cosingular. Ahora,  $g(P) \leq \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$  y  $g(P)$  es pequeño, entonces por el inciso (1) del Lema 2.8,  $g(P) \ll \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$ . Luego, como

$$\overline{\mathcal{Z}}^2(N) = g(A) = g(K) + g(P),$$

tenemos que  $g(K) = \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$ . Notemos que  $K$  es suplemento en  $H$  pues  $H$  es ampliamente suplementado y  $K$  es cocerrado en  $H$ ; luego, por el Lema 1.9,  $K$  es ampliamente suplementado. Así,  $K \cap \text{Ker}(g)$  tiene un suplemento  $B$  en  $K$ , esto es,  $B + (K \cap \text{Ker}(g)) = K$  y  $B \cap \text{Ker}(g) = B \cap (K \cap \text{Ker}(g)) \ll B$ . Por otro lado,  $g(B) = g(K) = \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$  y así  $B/(\text{Ker}(g) \cap B) \cong \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$ , pues  $\text{Ker}(g) \cap B = \text{Ker}(g|_B)$ . Por lo tanto  $g|_B : B \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$  es un epimorfismo superfluo y como  $\overline{\mathcal{Z}}^2(N)$  es no-cosingular, tenemos que  $B$  es no-cosingular. Pero  $\overline{\mathcal{Z}}^2(H)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $H$ , por lo que  $B \leq \overline{\mathcal{Z}}^2(H)$ . Tenemos entonces que

$$\overline{\mathcal{Z}}^2(N) = g(B) \leq g(\overline{\mathcal{Z}}^2(H)) = f(\overline{\mathcal{Z}}^2(H)) = f(\overline{\mathcal{Z}}^2(L)).$$

■

**Corolario 3.9** Sean  $M, N \in R\text{-Mod}$  con  $M$  ampliamente suplementado,  $L$  un subfactor de  $M$  y  $f \in \text{Hom}(L, N)$  un epimorfismo. Entonces  $\overline{\mathcal{Z}}^2(L)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $L$  y  $f(\overline{\mathcal{Z}}^2(L)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$ .

Recordemos que un radical se llama cohereditario si la teoría de torsión asociada  $\{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$  es cohereditaria, es decir, si para cualquier epimorfismo  $f \in \text{Hom}(M, N)$ , sucede que  $f(\rho(M)) = \rho(N)$ .

**Teorema 3.10** Sea  $R$  un anillo tal que todo  $R$ -módulo inyectivo es ampliamente suplementado. Entonces

- (1)  $\rho_S(M) = \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  para todo  $M \in R\text{-Mod}$ ;
- (2)  $\mathcal{T}_S = \{M \in R\text{-Mod} \mid \overline{\mathcal{Z}}^2(M) = M\}$ ;

(3)  $\mathcal{F}_S = \{M \in R\text{-Mod} \mid \overline{\mathcal{Z}}^2(M) = 0\}$ ;

(4)  $\rho_S$  es cohereditario.

**Demostración.**

(1) Para  $M \in R\text{-Mod}$ , tenemos que  $M \leq E(M)$  y  $E(M)$  es ampliamente suplementado. Entonces, por el Teorema 3.8,  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $M$  y por la Proposición 3.3,

$$\rho_S(M) = \overline{\mathcal{Z}}^2(M).$$

(2) Por el inciso (1),  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) = M$  si y sólo si  $\rho_S(M) = M$ . Luego, por la Proposición 3.3, lo anterior ocurre si y sólo si  $M$  es no-cosingular. Finalmente, por la Proposición 3.2, tenemos que

$$\mathcal{T}_S = \{M \in R\text{-Mod} \mid \overline{\mathcal{Z}}^2(M) = M\}.$$

(3) Por el inciso (1),  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) = 0$  si y sólo si  $\rho_S(M) = 0$ . Por la Proposición 3.3, lo anterior ocurre si y sólo si  $0$  es el submódulo no-cosingular más grande de  $M$ , por lo que cualquier submódulo no cero de  $M$  no es no-cosingular. Así, por la Proposición 3.2,

$$\mathcal{F}_S = \{M \in R\text{-Mod} \mid \overline{\mathcal{Z}}^2(M) = 0\}.$$

(4) Sea  $f \in \text{Hom}(M, N)$  un epimorfismo. Por el inciso (1) y el Teorema 3.8,  $f(\rho_S(M)) = f(\overline{\mathcal{Z}}^2(M)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(N) = \rho_S(N)$ . Luego,  $\rho_S$  es cohereditario. ■

**Definición 3.11** Un  $R$ -módulo  $M$  se llama  $\Sigma$ -ampliamente suplementado si cualquier suma directa de copias de  $M$  es ampliamente suplementada.

**Proposición 3.12** Para un anillo  $R$ , se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Si  $R$  es  $\Sigma$ -ampliamente suplementado, entonces todo  $R$ -módulo es ampliamente suplementado.
- (2) Si  $E(R)$  es  $\Sigma$ -ampliamente suplementado, entonces todo  $R$ -módulo inyectivo es ampliamente suplementado.

**Demostración.**

- (1) Sabemos que para todo  $M \in R\text{-Mod}$  existen un conjunto  $I$  y un epimorfismo  $f \in \text{Hom}(R^{(I)}, M)$ . Se sigue del Lema 1.9 que  $M$  es ampliamente suplementado.
- (2) Sean  $M \in R\text{-Mod}$  un módulo inyectivo,  $I$  un conjunto y  $f \in \text{Hom}(R^{(I)}, M)$  un epimorfismo. Si  $\iota \in \text{Hom}(R^{(I)}, E(R)^{(I)})$  es la inclusión, entonces existe  $g \in \text{Hom}(E(R)^{(I)}, M)$  tal que  $f = g \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccc} R^{(I)} & \xrightarrow{\iota} & E(R)^{(I)} \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ M & & \end{array}$$

Luego, como  $f$  es un epimorfismo, tenemos que  $g$  también lo es. Así, por el Lema 1.9,  $M$  es ampliamente suplementado. ■

**Lema 3.13** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $H, K, N$  submódulos de  $M$  tales que  $K$  es un suplemento de  $N$  en  $M$  y  $H \ll M$ . Entonces  $K$  es un suplemento de  $N + H$ .

**Demostración.**

Claramente,  $K + N + H = M$ . Ahora, sea  $X \leq K$  tal que  $X + N + H = M$ . Como  $H \ll M$ , se tiene que  $X + N = M$  y de aquí que  $X = K$ . Por lo tanto,  $K$  es suplemento de  $N + H$  en  $M$ . ■

**Proposición 3.14** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $N \leq M$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) Existe un sumando directo  $K$  de  $M$  tal que  $K \leq N$  y  $N/K \ll M/K$ .
- (2) Existen un sumando directo  $K$  de  $M$  y un submódulo  $H$  de  $M$  tales que  $K \leq N$ ,  $N = K + H$  y  $H \ll M$ .
- (3)  $M$  se descompone como  $M = K \oplus K'$ , con  $K \leq N$  y  $K' \cap N \ll K'$ .

**Demostración.**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Supongamos que  $M = K \oplus K'$  para algún  $K' \leq M$  y que  $N/K \ll M/K$ . Entonces  $N = K \oplus (N \cap K')$  y  $M/K \cong K'$ . Luego, si  $\alpha : M/K \rightarrow K'$  es el isomorfismo anterior, se tiene que  $\alpha(N/K) = N \cap K'$  y como  $N/K \ll M/K$ , entonces  $N \cap K' \ll K'$ . Por lo tanto  $N \cap K' \ll M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Supongamos que  $M = K \oplus K'$  para algún  $K' \leq M$  y que  $N = K + H$  con  $H \ll M$ . Entonces  $K'$  es un suplemento de  $K$  en  $M$ . Luego, por el Lema 3.13,  $K'$  es un suplemento de  $N = K + H$  y de aquí que  $K' \cap N \ll K'$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Supongamos que  $M = K \oplus K'$  con  $K \leq N$  y  $K' \cap N \ll K'$ . Entonces  $N = K \oplus (N \cap K')$ . Por lo tanto  $M/K \cong K'$  y  $N/K \cong N \cap K'$ , pero por hipótesis  $K' \cap N \ll K'$ , así que  $N/K \ll M/K$ . ■

**Definición 3.15** Un  $R$ -módulo  $M$  se llama elevador si todo submódulo  $N$  de  $M$  satisface alguna de las afirmaciones equivalentes de la proposición anterior.

**Lema 3.16** Sea  $M$  un  $R$ -módulo elevador. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Cualquier submódulo cocerrado de  $M$  es un sumando directo.
- (2)  $M$  es ampliamente suplementado.

**Demostración.**

(1) Sea  $N$  un submódulo cocerrado de  $M$ . Como  $M$  es elevador, por la Proposición 3.14 (1), existe un sumando directo  $K$  de  $M$  tal que  $K \leq N$  y  $N/K \ll M/K$ . Como  $N$  es cocerrado en  $M$ ,  $K = N$ .

(2) Sean  $N$  y  $L$  submódulos de  $M$  tales que  $M = L + N$ . Exhibiremos un suplemento de  $L$  en  $M$  contenido en  $N$ .

Por la Proposición 3.14 (3), existen un sumando directo  $K$  de  $M$  y un submódulo  $H$  de  $M$  tales que  $K \leq N$ ,  $N = K \oplus H$  y  $H \ll M$ . Luego,  $M = L + N = L + K + H$  y como  $H \ll M$ , entonces  $M = L + K$ .

Ahora, aplicando la Proposición 3.14 (3) al submódulo  $L \cap K$ , tenemos que existen un sumando directo  $K_1$  de  $M$  y un submódulo  $H_1$  de  $M$  tales

que  $K_1 \leq L \cap K$ ,  $L \cap K = K_1 \oplus H_1$  y  $H_1 \ll M$ . Entonces  $K_1$  es un sumando directo de  $K$ , pues  $K_1$  es un sumando directo de  $M$  y  $K_1 \leq K$ . Afirmamos que  $H_1$  es superfluo en  $K$ . En efecto, si  $X$  es un submódulo de  $K$  tal que  $K = H_1 + X$ , entonces  $M = H_1 + X + T$ , donde  $T \leq M$  es tal que  $K \oplus T = M$ . Pero  $H_1 \ll M$ , así que  $M = X + T$  y de ahí que  $X = K$ .

Sea  $K_2 \leq M$  tal que  $K = K_1 \oplus K_2$ . Es claro que  $K_2$  es un suplemento de  $K_1$  en  $K$ , así que, por el Lema 3.13, tenemos que  $K_2$  es un suplemento de  $K_1 + H_1$  en  $K$ , pues  $H_1 \ll K$ . Así,  $M = L + K = L + K_1 + K_2 = L + K_1 + H_1 + K_2 = L + (L \cap K) + K_2 = L + K_2$  y  $L \cap K_2 = (L \cap K) \cap K_2 = (K_1 + H_1) \cap K_2 \ll K_2$ . Por lo tanto  $K_2$  es un suplemento de  $L$  en  $M$ . ■

La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [4].

**Teorema 3.17** Para un anillo  $R$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) Todo  $R$ -módulo inyectivo es elevador;
- (2)  $R$  es neteriano y todo  $R$ -módulo no pequeño contiene un submódulo inyectivo;
- (3) Todo  $R$ -módulo se puede expresar como la suma directa de un módulo inyectivo con un módulo pequeño.

Y el siguiente resultado en [9].

**Lema 3.18** Para un anillo  $R$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $R$  es perfecto;
- (2) Todo  $R$ -módulo es ampliamente suplementado.

Recordemos que una teoría de torsión  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  se escinde si cada  $R$ -módulo  $M$  se descompone como  $M = M_1 \oplus M_2$  con  $M_1 \in \mathcal{T}$  y  $M_2 \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 3.19** Sea  $R$  un anillo. Entonces la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$  se escinde en los siguientes casos:

- (1) Todo  $R$ -módulo inyectivo es elevador.
- (2)  $R$  es un  $V$ -anillo.
- (3)  $R$  es perfecto y no hay  $R$ -módulos simples inyectivos.
- (4) Todo  $R$ -módulo cosingular es proyectivo.

**Demostración.**

- (1) Por el Teorema 3.17, tenemos que todo  $R$ -módulo  $M$  se puede escribir como  $M = Q \oplus S$ , donde  $Q$  es un  $R$ -módulo inyectivo y  $S$  un  $R$ -módulo pequeño. También tenemos que  $R$  es neteriano, así que  $Q = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , donde los  $E_i$ ,  $i \in I$ , son submódulos inescindibles de  $Q$ . Consideremos ahora los siguientes conjuntos

$$I_1 := \{i \in I \mid E_i \text{ es no-cosingular}\} \text{ e } I_2 := I \setminus I_1.$$

Definimos  $N_1 := \bigoplus_{i \in I_1} E_i$  y  $N_2 := \bigoplus_{i \in I_2} E_i$ . Notemos que si  $i \in I_1$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}(E_i) = E_i$ . Ahora, si  $i \in I_2$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}(E_i) \not\leq E_i$ . Luego, por el Teorema 3.17,  $\overline{\mathcal{Z}}(E_i) = Q_i \oplus P_i$  con  $Q_i$  un módulo inyectivo y  $P_i$  un módulo pequeño. Tenemos entonces que  $Q_i$  es un submódulo inyectivo de  $E_i$  y por lo tanto un sumando directo de  $E_i$ . Pero  $E_i$  es inescindible, por lo que  $Q_i = 0$  y de aquí que  $\overline{\mathcal{Z}}(E_i) = P_i$ , es decir,  $\overline{\mathcal{Z}}(E_i)$  es un módulo pequeño, así que  $\overline{\mathcal{Z}}^2(E_i) = 0$ . Luego, por el Lema 3.16 y el Teorema 3.10,  $N_1 \in \mathcal{T}_S$  y  $N_2 \oplus S \in \mathcal{F}_S$ . Finalmente, como  $M = N_1 \oplus (N_2 \oplus S)$ , tenemos que la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$  se escinde.

- (2) Si  $R$  es un  $V$ -anillo, de la Proposición 2.21 tenemos que todo  $R$ -módulo es no-cosingular, así que, por la Proposición 3.2,  $\mathcal{T}_S = R\text{-Mod}$ . Luego, la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$  se escinde.
- (3) Como  $R$  es perfecto existen elementos idempotentes  $e_i \in R$  tales que  $\sum e_i = 1$  y  $R = \bigoplus_i Re_i$ . Más aún, cada  $Re_i$  es inescindible y  $Rad(Re_i)$  es un submódulo superfluo máximo de  $Re_i$ . Luego,  $Re_i/Rad(Re_i)$  es un  $R$ -módulo simple que, por hipótesis, no puede ser inyectivo. Así,  $Re_i/Rad(Re_i)$  es pequeño. Se sigue, del inciso (6) de la Proposición 2.4, que  $\overline{\mathcal{Z}}(Re_i) \leq Rad(Re_i)$ . Luego  $\overline{\mathcal{Z}}(Re_i) \ll Re_i$ , por lo que  $\overline{\mathcal{Z}}^2(Re_i) = 0$ . Por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}^2(R) = 0$ . Ahora, por el Lema 3.18, todo  $R$  módulo es ampliamente suplementado, en particular los  $R$ -módulos inyectivos. Luego,

como todo  $R$ -módulo  $M$  es imagen homomorfa de un  $R$ -módulo libre, del Teorema 3.10 se sigue que  $R\text{-Mod} = \mathcal{F}_S$ . Por lo tanto, la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$  se escinde.

- (4) Sea  $M \in R\text{-Mod}$ . Como  $\overline{\mathcal{Z}}(M/\overline{\mathcal{Z}}(M)) = 0$ , por la hipótesis,  $M/\overline{\mathcal{Z}}(M)$  es proyectivo. Por lo tanto existe  $\theta : M/\overline{\mathcal{Z}}(M) \rightarrow M$  tal que  $\pi \circ \theta = Id$ .

$$\begin{array}{ccc} & M/\overline{\mathcal{Z}}(M) & \\ & \swarrow \theta & \downarrow Id \\ M & \xrightarrow{\pi} & M/\overline{\mathcal{Z}}(M) \end{array}$$

Así que  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  es un sumando directo de  $M$ , esto es, existe  $T \leq M$  tal que  $M = \overline{\mathcal{Z}}(M) \oplus T$ . Observemos que  $T$  es cosingular pues  $T \cong M/\overline{\mathcal{Z}}(M)$ . Ahora, como  $\overline{\mathcal{Z}}(M)/\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es cosingular, por el razonamiento anterior, existe  $K \leq \overline{\mathcal{Z}}(M)$  tal que  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus K$  y  $K$  es cosingular. Así,  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus (K \oplus T)$  con  $K \oplus T$  cosingular. Pero  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  es el menor submódulo de  $M$  tal que  $M/\overline{\mathcal{Z}}(M)$  es cosingular y como  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) \leq \overline{\mathcal{Z}}(M)$ , entonces  $\overline{\mathcal{Z}}(M) = \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ . Por lo tanto  $M = \overline{\mathcal{Z}}(M) \oplus T$  con  $\overline{\mathcal{Z}}(M)$  no-cosingular y  $T$  cosingular. Luego, la teoría de torsión  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$  se escinde. ■

Como consecuencia de este teorema tenemos los siguientes corolarios.

**Corolario 3.20** Sea  $R$  un anillo tal que todo  $R$ -módulo inyectivo es ampliamente suplementado y todo  $R$ -módulo cosingular es proyectivo. Entonces la clase de los  $R$ -módulos cosingulares es cerrada bajo cocientes.

**Demostración.**

Sean  $L$  un  $R$ -módulo cosingular,  $H \leq L$  y  $\pi : L \rightarrow L/H$  la proyección canónica. Como  $L \leq E(L)$  que es ampliamente suplementado, por el Teorema 3.8,  $0 = \pi(\overline{\mathcal{Z}}^2(L)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(L/H)$ . Luego, como en la prueba del inciso (4) del Teorema 3.19, tenemos que  $\overline{\mathcal{Z}}^2(L/H) = \overline{\mathcal{Z}}(L/H)$ . Concluimos que  $L/H$  es cosingular. ■

**Corolario 3.21** Sea  $R$  un anillo tal que todo  $R$ -módulo inyectivo es ampliamente suplementado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) Todo  $R$ -módulo cosingular es proyectivo

- (2) Todo  $R$ -módulo es suma directa de un  $R$ -módulo no-cosingular con un  $R$ -módulo semisimple.

**Demostración.**

Sea  $M \in R\text{-Mod}$  y supongamos (1). Por la prueba del inciso (4) del Teorema 3.19, tenemos que  $M = N \oplus L$  con  $N$  no-cosingular y  $L$  cosingular. Probaremos que  $L$  es semisimple. Para ello consideremos  $H \leq L$ . Por el Corolario 3.20, la imagen homomorfa de un módulo cosingular es cosingular, así que  $L/H$  es cosingular y por hipótesis proyectivo. Entonces existe un morfismo  $f : L/H \rightarrow L$  tal que  $\pi \circ f = Id$ .

$$\begin{array}{ccc} & & L/H \\ & f \swarrow & \downarrow Id \\ L & \xrightarrow{\pi} & L/H \end{array}$$

Luego,  $H = Ker(\pi)$  es un sumando directo de  $L$ , por lo que podemos concluir que  $L$  es semisimple.

Ahora, sea  $M \in R\text{-Mod}$  cosingular y supongamos (2). Por hipótesis,  $M = N \oplus S$  con  $N$  no-cosingular y  $S$  semisimple. Entonces  $0 = \overline{\mathcal{Z}}(M) = N \oplus \overline{\mathcal{Z}}(S)$  y por lo tanto  $N = \overline{\mathcal{Z}}(S) = 0$ . Luego  $M = S$ , es decir,  $M$  es un módulo semisimple. Entonces basta probar que cualquier módulo cosingular simple es proyectivo.

Sea  $S$  un  $R$ -módulo cosingular simple y  $f : N \rightarrow S$  un epimorfismo. Por hipótesis,  $N = H \oplus K$ , donde  $H$  es no-cosingular y  $K$  es semisimple. Por el inciso (2) de la Proposición 2.5,  $f(H) = 0$ . Luego  $Ker(f) = Ker(f) \cap (H \oplus K) = (Ker(f) \cap H) \oplus (Ker(f) \cap K) = H \oplus (Ker(f) \cap K)$ . Como  $K$  es semisimple,  $Ker(f) \cap K$  es un sumando directo de  $K$ . Se sigue que  $Ker(f)$  es un sumando directo de  $N$ . Luego  $f$  se escinde, esto es,  $S$  es proyectivo. ■



# Capítulo 4

## Modulos elevadores y $\overline{\mathcal{Z}}^2$

En este capítulo presentamos algunos resultados sobre módulos elevadores encaminados a dar una caracterización de ellos por medio del funtor  $\overline{\mathcal{Z}}^2$ .

**Lema 4.1** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  un módulo elevador y  $L \leq M$  un sumando directo de  $M$ . Entonces  $L$  es un módulo elevador.

**Demostración.**

Sea  $N$  un submódulo de  $L$ . Como  $N$  es un submódulo de  $M$  y  $M$  es un módulo elevador, existen un sumando directo  $K$  de  $M$  y un submódulo  $H$  de  $M$  tales que  $K \leq N$ ,  $N = K + H$  y  $H \ll M$ . Entonces existe un submódulo  $J$  de  $M$  tal que  $M = K \oplus J$  y como  $K \leq N \leq L$ , se sigue que

$$L = L \cap M = L \cap (K \oplus J) = K \oplus (L \cap J).$$

Luego,  $K$  es un sumando directo de  $L$ . Probaremos ahora que  $H \ll M$ . Para ello sean  $T$  un submódulo de  $M$  tal que  $M = L \oplus T$  y  $X$  un submódulo de  $L$  tal que  $L = X + H$ . Entonces  $M = L \oplus T = X + H + T$ . Pero  $H \ll M$ , así que  $M = X \oplus T$  y de aquí que  $X = L$ . Concluimos que  $L$  es un módulo elevador. ■

**Proposición 4.2** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  débilmente suplementado y  $M_1, M_2 \leq M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$ . Supongamos que para todo submódulo cocerrado  $N$  de  $M$  tal que  $M = N + M_1$  o  $M = N + M_2$ , se tiene que  $N$  es un sumando directo de  $M$ . Sea  $K$  un submódulo cocerrado de  $M$  tal que cualquier submódulo de  $M/K$  tiene una cocerradura en  $M/K$ . Entonces  $K$  es un sumando directo de  $M$ .

**Demostración.**

Consideremos el submódulo  $(K + M_1)/K$  de  $M/K$ . Por hipótesis, existe una cocerradura  $N/K$  de  $(K + M_1)/K$  en  $M/K$ . Entonces  $N/K$  es cocerrado, así que, por el inciso (2) del Lema 1.24, se sigue que  $N$  es cocerrado en  $M$ . Además, tenemos que  $N/K$  es un submódulo coesencial de  $(K + M_1)/K$  en  $M/K$ , es decir,

$$\frac{K + M_1}{K} \Big/ \frac{N}{K} \ll \frac{M}{K} \Big/ \frac{N}{K}$$

y de aquí que  $(K + M_1)/N \ll M/N$ , es decir,  $N$  es un submódulo coesencial de  $K + M_1$  en  $M$ . Como  $M = (K + M_1) + M_2$ , por la Proposición 1.12,  $M = N + M_2$ . Entonces, por hipótesis, existe  $N' \leq M$  tal que  $M = N \oplus N'$ . Por lo tanto, tenemos que  $N \cap (K + N') = K + (N \cap N') = K$  y  $M = N + (K + N')$ . Así que  $M/K = N/K \oplus (K + N')/K$  y de aquí que  $(K + N')/K$  es un suplemento en  $M/K$ . Luego, por la Proposición 1.21,  $(K + N')/K$  es un submódulo cocerrado en  $M/K$  y, por el inciso (2) del Lema 1.24,  $K + N'$  es un submódulo cocerrado en  $M$ . Como  $N \leq K + M_1$ , entonces  $M = N + (K + N') \leq (K + M_1) + N' = (K + N') + M_1$ . Luego, por hipótesis,  $K + N'$  es un sumando directo de  $M$ . Así, existe un submódulo  $K'$  de  $M$  tal que  $M = (K + N') \oplus K'$ . Ahora, notemos que  $(K + N') \cap (N' + K') = N' + ((K + N') \cap K') = N'$  y de aquí que

$$N \cap N' = N \cap (K + N') \cap (N' + K') = (K + (N \cap N')) \cap (N' + K') = K \cap (N' + K'),$$

es decir,  $K \cap (N' + K') = 0$ . Y como  $M = (K + N') \oplus K'$ , se sigue que  $M = K \oplus (N' + K')$ , es decir,  $K$  es un sumando directo de  $M$ . ■

**Corolario 4.3** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  ampliamente suplementado y  $M_1, M_2 \leq M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$ . Supongamos que para todo submódulo cocerrado  $N$  de  $M$  tal que  $M = N + M_1$  o  $M = N + M_2$ , se tiene que  $N$  es un sumando directo de  $M$ . Entonces todo submódulo cocerrado de  $M$  es un sumando directo de  $M$ .

**Demostración.**

Sea  $K$  un submódulo cocerrado de  $M$ . Por el Lema 1.8,  $M/K$  es ampliamente suplementado y por el Teorema 1.26, todo submódulo de  $M/K$  tiene una cocerradura en  $M/K$ . Finalmente, por la Proposición 4.2, tenemos que  $K$  es un sumando directo de  $M$ . ■

**Teorema 4.4** Sean  $M$  un  $R$ -módulo ampliamente suplementado y  $M_1, M_2$  submódulos de  $M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $M$  es elevador.
- (2) Todo submódulo cocerrado  $K$  de  $M$  tal que  $M = K + M_1$  o  $M = K + M_2$  es un sumando directo de  $M$ .
- (3) Todo submódulo cocerrado  $K$  de  $M$  que sea un submódulo coesencial de  $K + M_1$  en  $M$  o de  $K + M_2$  en  $M$  o que cumpla que  $M = K + M_1 = K + M_2$  es un sumando directo de  $M$ .

**Demostración.**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Supongamos que  $M$  es un módulo elevador y sea  $K$  un submódulo cocerrado de  $M$  tal que  $M = K + M_1$  o  $M = K + M_2$ . Entonces, por el Lema 3.16,  $K$  es un sumando directo de  $M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sea  $N$  un submódulo de  $M$ . Como  $M$  es ampliamente suplementado, por el Teorema 1.26, existe una cocerradura  $K$  de  $N$  en  $M$ . Por lo tanto,  $K$  es un submódulo coesencial de  $N$  en  $M$  y cocerrado en  $M$ . Luego, por (2) y el Corolario 4.3,  $K$  es un sumando directo de  $M$ . Así, por la Proposición 3.14 (1),  $M$  es un módulo elevador.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sea  $K$  un submódulo cocerrado de  $M$ . Notemos que si  $K$  es coesencial en  $K + M_1$  en  $M$ , entonces, como  $(K + M_1)/K + (K + M_2)/K = M/K$ , tenemos que  $K + M_2 = M$ . Similarmente, si  $K$  es coesencial en  $K + M_2$  en  $M$ , entonces  $K + M_1 = M$ . En cualquier caso, por (2),  $K$  es un sumando directo de  $M$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Sea  $K$  un submódulo cocerrado de  $M$  tal que  $M = K + M_1$  o  $M = K + M_2$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $M = K + M_2$ . Como  $M$  es ampliamente suplementado, por el Lema 1.8,  $M/K$  es ampliamente suplementado. Luego, por el Teorema 1.26,  $(K + M_1)/K$  tiene una cocerradura  $N/K$  en  $M/K$ , es decir,  $N/K \leq_{ce} (K + M_1)/K$  en  $M/K$  y  $N/K \leq_{cc} M/K$ . Como  $K \leq N \leq K + M_1$ , tenemos que  $N + M_1 = K + M_1$  y por lo tanto  $(N + M_1)/N \ll M/N$ , es decir,  $N$  es un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$ . Ahora, como  $M$  es ampliamente suplementado,  $K$  es

cocerrado en  $M$  y  $N/K$  es cocerrado en  $M/K$ , por el Lema 1.24, se sigue que  $N$  es cocerrado en  $M$ . Tenemos entonces que  $N$  es coesencial en  $N + M_1$  en  $M$  y cocerrado en  $M$ , así que, por (3),  $N$  es un sumando directo de  $M$ , es decir, existe un submódulo  $N'$  de  $M$  tal que  $M = N \oplus N'$ . Entonces  $M = N + (K + N')$  y, por la ley modular,  $N \cap (K + N') = K$ . Se sigue que  $M/K = N/K \oplus (K + N')/K$ . Como  $(K + N')/K$  es un suplemento de  $N/K$ , por el Lema 1.21,  $(K + N')/K$  es cocerrado en  $M/K$ . Luego, por el Lema 1.24,  $K + N'$  es cocerrado en  $M$ . Ahora, notemos que  $M = N + N' + M_1 = (K + N') + M_1$  y que  $M = K + M_2 = (K + N') + M_2$ , así que, por (3),  $K + N'$  es un sumando directo de  $M$ . Luego, como  $K \cap N' \subseteq N \cap N' = \{0\}$ , tenemos que  $K + N' = K \oplus N'$  y así  $K$  es un sumando directo de  $M$ . ■

**Definición 4.5** Sean  $M, N \in R\text{-Mod}$ . Se dice que  $M$  es  $N$ -proyectivo pequeño si para todo submódulo  $H$  de  $N$  y todo homomorfismo  $g : M \rightarrow N/H$  tal que  $g(M) \ll N/H$  existe un homomorfismo  $f : M \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ f = g$ ,

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \swarrow f & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\pi} & N/H \end{array}$$

donde  $\pi : N \rightarrow N/H$  es la proyección canónica.

Observemos que si  $M$  es  $N$ -proyectivo, entonces es  $N$ -proyectivo pequeño.

**Lema 4.6** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $M_1, M_2 \leq M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño;
- (2) Para todo submódulo  $N$  de  $M$  que sea un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$ , existe un submódulo  $N'$  de  $N$  tal que  $M = N' \oplus M_2$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño y sea  $N \leq M$  un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$ . Entonces, por la Proposición 1.12,  $M = N + M_2$ . Ahora, consideremos el homomorfismo  $g : M_1 \rightarrow M/N$ ,  $m_1 \mapsto m_1 + N$  y el epimorfismo  $f : M_2 \rightarrow M/N$ ,  $m_2 \mapsto m_2 + N$ . Como  $g(M_1) = (N + M_1)/N$ ,

entonces  $g(M_1) \ll M/N$ . Luego, por hipótesis, existe un homomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $f \circ \varphi = g$ .

$$\begin{array}{ccc} & & M_1 \\ & \swarrow \varphi & \downarrow g \\ M_2 & \xrightarrow{f} & M/N \end{array}$$

Sea  $N' = \{m_1 - \varphi(m_1) \mid m_1 \in M_1\}$ . Como  $(f \circ \varphi)(m_1) = g(m_1)$ , para cada  $m_1 \in M_1$ , se sigue que  $m_1 - \varphi(m_1) \in N$ , esto es,  $N'$  es un submódulo de  $N$ . Ahora, ya que  $M = M_1 \oplus M_2$ , tenemos para cada  $m \in M$  que  $m = m_1 + m_2$ , con  $m_1 \in M_1$  y  $m_2 \in M_2$ . Por lo tanto,  $m = (m_1 - \varphi(m_1)) + (\varphi(m_1) + m_2)$  y de aquí que  $M = N' + M_2$ . Ahora, notemos que si  $x \in N' \cap M_2$ , entonces  $m_2 = x = m_1 - \varphi(m_1)$  para algún  $m_1 \in M_1$  y algún  $m_2 \in M_2$ , de donde  $m_1 = m_2 + \varphi(m_1) \in M_1 \cap M_2 = \{0\}$ . Así que  $M = N' \oplus M_2$ .

Supongamos ahora que para todo submódulo  $N$  de  $M$  que sea un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$  existe un submódulo  $N'$  de  $N$  tal que  $M = N' \oplus M_2$  y mostremos que  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño. Para ello sean  $H$  un submódulo de  $M_2$ ,  $f : M_1 \rightarrow M_2/H$  un homomorfismo tal que  $f(M_1) \ll M_2/H$  y  $\pi : M_2 \rightarrow M_2/H$  la proyección canónica. Ahora, definamos

$$N = \{m_1 + m_2 \in M_1 \oplus M_2 \mid f(m_1) = -\pi(m_2), m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

y notemos que si  $m \in H$ , entonces  $m = 0 + m$  y  $\pi(m) = H = f(0)$ , de aquí que  $H \leq N$ . Observemos además que si  $m \in M$ , entonces existen  $m_1 \in M_1$  y  $m_2 \in M_2$  tales que  $m = m_1 + m_2$ , pues  $M = M_1 \oplus M_2$ . Luego,  $f(m_1) \in M_2/H$  y como  $\pi$  es un epimorfismo existe  $m'_2 \in M_2$  tal que  $f(m_1) = -\pi(m'_2)$ . Entonces  $m = (m_1 + m'_2) + (m_2 - m'_2)$  con  $m_1 + m'_2 \in N$  y  $m_2 - m'_2 \in M_2$ , por lo que  $M = N + M_2$ .

Ahora, como  $f(M_1) \leq M_2/H$ , tenemos que  $f(M_1) = X/H$  para algún  $X \leq M_2$ . Consideremos el homomorfismo  $h : M_2/H \rightarrow M/N, m_2 + H \mapsto m_2 + N$ . Tenemos que  $h(X/H) = (X + N)/N$  y como  $f(M_1) = X/H \ll M_2/H$  entonces  $(X + N)/N \ll M/N$ . Luego  $(N + M_1)/N \ll M/N$ , pues  $(N + M_1)/N \leq (X + N)/N$ . Así, por hipótesis, existe un submódulo  $N'$  de  $N$  tal que  $M = N' \oplus M_2$ . Consideremos  $\pi' : N' \oplus M_2 \rightarrow M_2$  la proyección sobre  $M_2$  asociada a la descomposición anterior y sea  $\alpha = \pi'|_{M_1}$ . Entonces  $f = \pi \circ \alpha$ , de donde  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño. ■

**Lema 4.7** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $M_1, M_2 \leq M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo;
- (2) Para todo submódulo  $N$  de  $M$  tal que  $M = N + M_2$ , existe un submódulo  $N'$  de  $N$  tal que  $M = N' \oplus M_2$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo y sea  $N$  un submódulo de  $M$  tal que  $M = N + M_2$ . Consideremos los siguientes morfismos  $g : M_1 \rightarrow M/N$ ,  $m_1 \mapsto m_1 + N$ ; la proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/N$  y la inclusión  $\iota : M_2 \rightarrow M$ . Como  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo, tenemos que existe un homomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $\pi \circ \iota \circ f = g$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & M_1 \\
 & & & & \downarrow g \\
 & & f & \text{---} & \\
 & & \text{---} & & \\
 M_2 & \xleftarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\pi} & M/N
 \end{array}$$

Se sigue que  $m_1 + N = f(m_1) + N$  para cada  $m_1 \in M_1$ , por lo que  $(1 - f)(M_1) \leq N$ . Ahora, si  $m \in M$ , entonces existen  $m_1 \in M_1$  y  $m_2 \in M_2$  tales que  $m = m_1 + m_2 = (m_1 - f(m_1)) + (f(m_1) + m_2)$ , con lo que  $M = M_1 + M_2 \leq (1 - f)(M_1) + M_2$ . Veamos que la suma es directa. Para ello supongamos que para algún  $m_1 \in M_1$  y algún  $m_2 \in M_2$  tenemos que  $m_1 - f(m_1) = m_2$ , entonces  $m_1 = m_2 + f(m_1) \in M_1 \cap M_2 = \{0\}$ . Así,  $M = (1 - f)(M_1) \oplus M_2$  con  $(1 - f)(M_1) \leq N$ .

Ahora, supongamos (2) y mostremos que  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo. Para ello consideremos un  $R$ -módulo  $X$ , un homomorfismo  $g : M_1 \rightarrow X$  y un epimorfismo  $f : M_2 \rightarrow X$ . Definimos  $N \leq M$  como sigue

$$N = \{ m_2 - m_1 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2 \text{ y } f(m_2) = g(m_1) \}.$$

Notemos que si  $m \in M$ , existen  $m_1 \in M_1$  y  $m_2 \in M_2$  tales que  $m = m_1 + m_2$  y como  $f$  es un epimorfismo, existe  $m'_2 \in M_2$  tal que  $g(m_1) = f(m'_2)$ . Entonces  $m = (m_1 - m'_2) + (m'_2 + m_2)$ , de donde  $M = N + M_2$ . Luego, por (2), existe  $N' \leq N$  tal que  $M = N' \oplus M_2$ . Sean  $\rho : M \rightarrow M_2$  la proyección sobre  $M_2$  asociada a la descomposición anterior y  $\iota : M_1 \rightarrow M$  la inclusión. Como  $(1 - \rho)(M_1) \leq N' \leq N$ , entonces para todo  $m_1 \in M_1$  tenemos que  $m_1 - \rho(m_1) \in N$  y así  $g(m_1) = f(\rho(m_1))$ , es decir,  $g = f \circ \rho \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & M_1 \\
 & \nearrow \rho \circ \iota & \downarrow g \\
 M_2 & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

Por lo tanto  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo. ■

**Lema 4.8** Sean  $M \in R\text{-Mod}$  y  $M_1, M_2 \leq M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$  y  $M_2$  es un módulo elevador. Si  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño, entonces todo submódulo cocerrado  $N$  de  $M$  tal que  $N$  es un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$  es un sumando directo de  $M$ .

**Demostración.**

Sea  $N$  un submódulo cocerrado de  $M$  tal que  $N$  es un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$ . Por el Lema 4.6, existe un submódulo  $N'$  de  $N$  tal que  $M = N' \oplus M_2$ . Se sigue que  $M/N' \cong M_2$  y como  $M_2$  es un módulo elevador tenemos que  $M/N'$  es un módulo elevador. Luego, como  $N$  es cocerrado en  $M$ , por el Lema 1.20, tenemos que  $N/N'$  es un submódulo cocerrado de  $M/N'$  y, por el Lema 3.16, es un sumando directo de  $M/N'$ . Ahora, como  $N'$  es un sumando directo de  $M$  y un submódulo de  $N$ , se tiene que  $N'$  es un sumando directo de  $N$  y como  $N/N'$  es un sumando directo de  $M/N'$ , concluimos que  $N$  es un sumando directo de  $M$ . ■

**Teorema 4.9** Sean  $M$  un  $R$ -módulo ampliamente suplementado y  $M_1, M_2$  submódulos elevadores de  $M$  tales que  $M = M_1 \oplus M_2$ . Entonces  $M$  es elevador si alguna de las siguientes condiciones se cumple:

- (1)  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño y todo submódulo cocerrado  $N$  de  $M$  tal que  $M = N + M_1$  es un sumando directo de  $M$ ;
- (2)  $M_2$  es  $M_1$ -proyectivo y  $M_1$  es  $M_2$ -proyectivo pequeño.

**Demostración.**

Supongamos que se cumple (1) y sea  $N$  un submódulo cocerrado de  $M$  tal que es un submódulo coesencial de  $N + M_1$  en  $M$  o un submódulo coesencial de  $N + M_2$  en  $M$  o que cumple que  $M = N + M_1 = N + M_2$ . Si  $N$  es coesencial en  $N + M_1$ , entonces, por el Lema 4.8,  $N$  es un sumando directo de  $M$ . Supongamos ahora que  $N$  es coesencial en  $N + M_2$ . Como  $M = M_1 + N + M_2$ ,

por la Proposición 1.12,  $M = M_1 + N$ , así que, por (1),  $N$  es un sumando directo de  $M$ . Finalmente, si  $M = N + M_1 = N + M_2$ , por (1),  $N$  es un sumando directo de  $M$ . Se sigue entonces del Teorema 4.4 (3) que  $M$  es elevador.

Ahora, mostraremos que (2) implica (1). Para ello consideremos un submódulo cocerrado  $N$  de  $M$  tal que  $M = N + M_1$ . Como  $M_2$  es  $M_1$ -proyectivo, por el Lema 4.7, existe un submódulo  $N'$  de  $N$  tal que  $M = N' \oplus M_1$ . Se sigue que  $M/N' \cong M_1$ , por lo que  $M/N'$  es un módulo elevador. Luego, como  $N$  es cocerrado en  $M$ , por el Lema 1.20,  $N/N'$  es un submódulo cocerrado de  $M/N'$ . Del Lema 3.16 tenemos que  $N/N'$  es un sumando directo de  $M/N'$  y como  $N'$  es un sumando directo de  $N$ , concluimos que  $N$  es un sumando directo de  $M$ .

Así, hemos mostrado que (2) implica (1) y (1) implica que  $M$  es elevador, por lo que (2) implica que  $M$  es elevador. ■

**Teorema 4.10** Sea  $M$  un  $R$ -módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $M$  es elevador.
- (2)  $M$  es ampliamente suplementado y  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus N$ , donde  $N$  es  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ -proyectivo y  $N$  y  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  son módulos elevadores.

**Demostración.**

Supongamos que  $M$  es un módulo elevador. Por el Lema 3.16,  $M$  es ampliamente suplementado y todo submódulo cocerrado es un sumando directo. Luego, por el Teorema 1.26 y el Corolario 3.7,  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es cocerrado en  $M$  y es el submódulo no-cosingular más grande de  $M$ . Entonces  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es un sumando directo de  $M$ , es decir,  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus N$ , para algún submódulo  $N$  de  $M$  con  $\overline{\mathcal{Z}}^2(N) = 0$ . Por el Lema 4.1,  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y  $N$  son módulos elevadores.

Ahora, veamos que  $N$  es  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ -proyectivo. Para ello consideremos un submódulo  $X$  de  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ , un epimorfismo  $f : \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}^2(M)/X$  y un homomorfismo  $g : N \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}^2(M)/X$ . Definimos  $L \leq M$  como sigue

$$L = \{n + z \mid n \in N, z \in \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \text{ y } g(n) + f(z) = 0\}.$$

Como  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus N$ , si  $m \in M$  entonces  $m = n + z$ , para algunos  $n \in N$  y  $z \in \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ . Ahora,  $g(n) \in \overline{\mathcal{Z}}^2(M)/X$  y  $f$  es un epimorfismo, por lo que

existe  $z' \in \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  tal que  $g(n) + f(z') = 0$ . Luego,  $m = n + z' + (z - z')$ , es decir,  $m \in L + \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y de aquí que  $M = L + \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ . Notemos que si  $L$  es superfluo en  $M$ , entonces  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y el resultado se cumple. Así que podemos asumir que  $L$  no es superfluo en  $M$ . Ahora, como  $M$  es un módulo elevador, existe un sumando directo  $K$  de  $M$  tal que  $K \leq L$ ,  $M = K \oplus K'$  para algún  $K' \leq M$  y  $L/K \ll M/K$ . Luego, de la Proposición 1.12, tenemos que  $M = K + \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y de aquí que  $K'$  es imagen homomorfa de  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y por lo tanto es no-cosingular. Se sigue, del Teorema 3.8, que  $K' \subseteq \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) = K' \oplus (K \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M))$ . Como  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus N$  y  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) = K' \oplus (K \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M))$ , se sigue que  $K \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es un suplemento de  $K' + N$  en  $M$ . Luego, por el Lema 1.21,  $K \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es cocerrado en  $M$  y, por el Lema 1.19, es cocerrado en  $K$ . Notemos que según el Lema 4.1  $K$  es un módulo elevador, así que, por el Lema 3.16,  $K \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es un sumando directo de  $K$ . Luego, existe un submódulo  $T$  de  $K$  tal que  $K = T \oplus (K \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M))$ . Entonces,  $M = K \oplus K' = T \oplus \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ .

Sea  $\pi : M \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  la proyección sobre  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  asociada a la descomposición anterior. Definimos  $h = \pi|_N$  y afirmamos que  $f \circ h = g$ .

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \swarrow h & \downarrow g \\ \overline{\mathcal{Z}}^2(M) & \xrightarrow{f} & \overline{\mathcal{Z}}^2(M)/X \end{array}$$

En efecto, si  $n \in N$ , entonces  $n = z + t$  para algunos  $z \in \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y  $t \in T$ . Como  $T \leq K \leq L$  entonces  $t = n' + z'$  para algunos  $z' \in \overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y  $n' \in N$  tales que  $g(n') + f(z') = 0$ . Luego,  $n = z + (n' + z')$ , de donde  $n - n' = z + z' \in N \cap \overline{\mathcal{Z}}^2(M) = \{0\}$  y de aquí que  $n = n'$  y  $z = -z'$ . Así,  $(f \circ h)(n) = f(h(n)) = f(\pi(n)) = f(z) = f(-z') = g(n') = g(n)$ , es decir,  $f \circ h = g$ , lo que muestra que  $N$  es  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ -proyectivo.

Ahora, supongamos (2). Como  $M = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus N$  y es ampliamente suplementado, por el Corolario 3.7,  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es el mayor submódulo no cosingular de  $M$  y por lo tanto  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M) = \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \oplus \overline{\mathcal{Z}}^2(N)$ , de donde  $\overline{\mathcal{Z}}^2(N) = 0$ . Luego, por el Teorema 3.8, si  $\pi : N \rightarrow N/L$  es la proyección canónica, entonces  $0 = \pi(\overline{\mathcal{Z}}^2(N)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(N/L)$ . Por otro lado, por la Proposición 2.9, cada una de las imagenes homomorfas de  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es no cosingu-

lar. Luego, si  $L \leq N$  y  $g : \overline{\mathcal{Z}}^2(M) \rightarrow N/L$  es un homomorfismo, entonces  $g(\overline{\mathcal{Z}}^2(M)) = \overline{\mathcal{Z}}^2(g(\overline{\mathcal{Z}}^2(M))) \subseteq \overline{\mathcal{Z}}^2(N/L) = 0$ . Por lo tanto  $g = 0$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & \overline{\mathcal{Z}}^2(M) & \\
 & \swarrow 0 & \downarrow g \\
 N & \xrightarrow{\pi} & N/L
 \end{array}$$

Se sigue que  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  es un módulo  $N$ -proyectivo. También, por hipótesis,  $N$  es  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$ -proyectivo y  $\overline{\mathcal{Z}}^2(M)$  y  $N$  son elevadores, así que, por el Teorema 4.9 (2),  $M$  es elevador. ■

# Bibliografía

- [1] Anderson, F. & Fuller, K. Rings of Quotients, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.
- [2] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R. Lifting Modules, Supplements and Projectivity in Module Theory, Birkhäuser, 2006.
- [3] Kasch, F. Modules and Rings, Academic Press, London, 1982.
- [4] Jayaraman, M. & Vanaja, N. Harada Modules. Comm. Algebra. 2000, 28, 3703-3726.
- [5] Keskin, D. On Lifting Modules. Comm. Algebra 2000, 28, 3427-3440.
- [6] Michler, G. O. & Villamayor, O. E. On Rings whose Simple Modules are Injective, Journal of Algebra 25, 185-201 (1973).
- [7] Stenström, B. Rings of Quotients, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.
- [8] Talebi, Y. & Vanaja, N. The Torsion Theory Cogenerated by M-Small Modules. Comm. Algebra 2007, 30:3, 1449-1460.
- [9] Wisbauer, R. Foundations of Module and Ring Theory; Gordon and Breach, Reading, 1991.