



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado en Ciencia e Ingeniería
de la Computación

"Búsqueda de orientaciones óptimas
para objetos geométricos"

T E S I S

que para optar por el grado de
Doctor en Ciencias (Computación)

P R E S E N T A

Carlos Alegría Galicia

Tutor principal

Dr. Jorge Urrutia Galicia

Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Cotutor

Dr. Carlos Seara Ojea

Departamento de Matemáticas
Universitat Politècnica de Catalunya

Ciudad de México, Diciembre del 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

私のボニタのために

君は私の人生で今まで愛してきた唯一の人

Mathematical reasoning may be regarded rather schematically as the exercise of a combination of two facilities, which we may call **intuition and ingenuity**.

Alan Turing

Don't get set into one form, adapt it and build your own, and let it grow, be like water. **Empty your mind, be formless, shapeless — like water.**

Now you put water in a cup, it becomes the cup; You put water into a bottle it becomes the bottle; You put it in a teapot it becomes the teapot. Now water can flow or it can crash.

Be water, my friend.

Bruce Lee

I've always lived cheaply. I live like a student, basically. And I like that, because it means that **money is not telling me what to do.**

I can do what I think is important for me to do. It freed me to do what seemed worth doing.

Richard Stallman

Esta tesis es el resultado de cuatro años de trabajo y a la vez representa la culminación de más de quince años de pertenecer a la comunidad universitaria. Además de describir los resultados de mis estudios, estas páginas son la bitácora que detalla el proceso de crecimiento académico y personal que ha sido mi doctorado. Como si fueran notas al margen, al estudiar cada párrafo, cada demostración y cada figura, siempre recordaré los lugares, las sensaciones y a las personas que me acompañaron (por voluntad o circunstancia) durante el camino sinuoso y bifurcado que recorrí durante estos años.

Conocí y colaboré con investigadores y estudiantes de diferentes partes del mundo. Aprendí de mí mismo y de mis colegas. Cometí muchos errores (algunos bastante graves). Depecioné a personas que amo. Fui golpeado, incluso por las personas que menos imaginaba. Lamí mis heridas y seguí trabajando. Acerté algunas veces y tuve pocas — pero valiosas — victorias. Me casé y formé mi propia familia. Conviví con mis vecinos como nunca lo hice cuando era (más) joven. Demandé y fui demandado. Participé como nunca y fui recompensado. Perdí algunos amigos, descubrí otros, y reencontré viejas amistades. Mi familia padeció mis horas de desvelo, mis ausencias y mis fracasos. También festejó mis logros como suyos.

Al final, me parece, que todo ha valido la pena. Lo mejor está por venir.

Carlos Alegría Galicia
Ciudad de México, Diciembre del 2018

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a todas las personas que hicieron posible que terminara este trabajo. Muchas gracias a todos. Quiero dedicar un espacio especial para agradecer:

A la Universidad Nacional Autónoma de México por el privilegio de ser parte de su historia.

A mis profesores, compañeros y las instituciones en la universidad en las que viví como estudiante, profesor e investigador, por ser una parte fundamental en mi formación académica.

A mi familia por ser parte de mí, de mi historia, y por hacerme sentir amado, valorado y necesario. En especial a mis papás y a mi hermana por su apoyo y amor incondicional. También a mis suegros y a mi cuñada por su apoyo para mí, Karina, y mis canhijos.

A mis vecinos por todo su apoyo. Miriam, Sarita, Abraham y doña Carmen, muchas gracias por habernos adoptado en su familia. Karina y Gus, Alma y Mau, han sido un apoyo moral fundamental durante estos años. A Berna, Male, Leti, Carlos Puente y Alfredo les agradezco también por su apoyo y amabilidad. A todos les agradezco especialmente por haber apoyado a mi bonita durante mis ausencias.

Al Dr. Jorge Urrutia por haberme aceptado como su alumno y por abrir mi mente (algunas veces a poligonazos). Le agradezco también por enseñarme cómo ser profesional, comprometido y lo vasto e interesante que es el mundo de la investigación académica.

Al Dr. Carlos Seara por su apoyo, su hospitalidad y su paciencia. Sin tu disciplina (sin prisa, pero sin pausa) seguramente no hubiera podido terminar mi tesis a tiempo.

Al Dr. Carlos Velarde por formar parte de mi comité tutorial y a mi comité de sinodales por el tiempo que dedicaron para evaluar mi trabajo.

Al Dr. David Orden y al Dr. Leonidas Palios por la oportunidad de colaborar con ellos. En particular al Dr. Orden por haberme presentado la geometría con orientaciones restringidas. Es sin duda un área que seguiré estudiando durante el resto de mi carrera académica.

A la Dra. Marta Cabo, la Dra. Julia Bennell y al Dr. Antonio Martínez Sykora. Gracias por permitirme colaborar con ustedes y haberme presentado el área de optimización combinatoria. Nunca imaginé que la investigación aplicada (¡y en geometría!) fuera tan amplia, interesante y con tantos retos por vencer.

A Roncio, Catana, Chepo, Israel y Nestaly. Gracias por la oportunidad de conocerlos y colaborar con ustedes.

Al Grupo de Investigación en Geometría Discreta Computacional y Combinatoria de la Universitat Politècnica de Catalunya, por recibirme durante mis estancias de investigación. Especialmente a Mercè, Rodrigo y Vera por su hospitalidad y amabilidad.

A la Universitat Autònoma de Barcelona, al Centre de Recerca Matemàtica, a los organizadores y a todos los asistentes del Programa Intensivo de Investigación en Geometría Discreta, Combinatoria y Computacional. Fue una de las experiencias personales y académicas más enriquecedoras que he vivido.

Al Dr. Javier Gómez Castellanos y al personal administrativo del Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación de la UNAM. Lulú, Cecilia y Amalia, gracias por ayudarme a sobrevivir los trámites y burocracias que acompañan al doctorado.

Al personal administrativo del Departamento de Matemáticas de la UPC y del Col·legi Major Penyafort-Montserrat por su apoyo y amabilidad. Especialmente el personal de la cocina del Penyafort, donde en ocasiones me sentí hasta consentido (¡la comida!, qué recuerdos ...).

Al CONACyT, al Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación y el Instituto de Matemáticas de la UNAM, al Programa Horizon 2020 para la Investigación e Innovación de la Unión Europea, al Programa de Becas de la Real Sociedad del Reino Unido y a la Universidad de Alcalá por su apoyo económico.

A Canek Peláez, Javier Cano, Leonardo Martínez y Luis Felipe Barba por permitirme usar sus tesis como consulta e inspiración para encaminar este trabajo. Especialmente a Canek y a Leonardo por haberme ayudado a mexicanizar algunos tecnicismos.

Finalmente, el lugar más especial lo ocupa sin duda mi esposa. Mi bonita hermosa, te debo todo lo que soy y lo que quiero ser. Me has enseñado lo que puedo lograr y me has dado el valor y el apoyo para intentarlo. Me siento afortunado y agradecido por tenerte en mi vida. En gran medida, esta tesis es el resultado de que estés a mi lado.

Índice general

Abstract	XIII
Resumen	XIV
1. Introducción	1
1.1. ¿Qué es la geometría computacional?	2
1.1.1. La caja de herramientas	2
1.2. Búsqueda de orientaciones óptimas	3
1.2.1. Convexidad con orientaciones restringidas	4
1.2.2. Ubicación de polígonos	7
1.2.3. Iluminación de Brocard	8
1.3. Contribuciones	11
1.3.1. Organización de la tesis	11
1.3.2. Publicaciones	13
1.3.3. Software	14
1.3.4. Otras publicaciones	15
2. Orientaciones Restringidas	17
2.1. Convexidad y convexidad ortogonal	18
2.2. El cierre convexo rectilíneo	21
2.3. Convexidad con orientaciones restringidas	25
2.4. Cierre convexo con orientaciones restringidas	26
2.5. Problemas computacionales	29
2.6. Comentarios finales	34
3. Cierre \mathcal{O}-convexo no orientado	36
3.1. Introducción	37
3.1.1. Resultados	38
3.1.2. Notación, convenciones y definiciones auxiliares	39
3.2. Cálculo del cierre \mathcal{O} -convexo	40

3.2.1.	Cálculo de vértices	40
3.2.2.	Calculando las escaleras entre vértices	41
3.3.	Cálculo del cierre \mathcal{O} -convexo no-orientado	44
3.3.1.	Frontera de $\mathcal{OH}_\theta(P)$	44
3.3.2.	Área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$	45
3.4.	Secuencia de eventos de traslape	46
3.4.1.	La cadena de arcos	47
3.4.2.	El número de intersecciones entre eslabones es $O(n)$	47
3.4.3.	Secuencia de eventos de traslape	52
3.4.4.	Recorrido de la secuencia de eventos de traslape	56
3.5.	Orientación de área mínima	56
3.6.	Conclusiones	61
4.	Cierre \mathcal{O}_β-convexo	63
4.1.	Introducción	64
4.2.	El cierre \mathcal{O}_β -convexo de P	66
4.2.1.	Preliminares	66
4.2.2.	El barrido angular	67
4.3.	Aplicaciones en optimización	73
4.3.1.	Optimización del área.	73
4.3.2.	Optimización del perímetro.	80
4.3.3.	El problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado	86
4.4.	Conclusiones	88
5.	Captura de puntos con un polígono	90
5.1.	Introducción	91
5.2.	Máxima cobertura con centro fijo	92
5.2.1.	Reducción a 3SUM-hard	92
5.2.2.	Un algoritmo que toma tiempo $O(nm \log(nm))$	93
5.2.3.	Un algoritmo sensible a la salida	95
5.3.	Máxima cobertura con centro restringido	97
5.3.1.	Subdividiendo las aristas del polígono	98
5.3.2.	El algoritmo	108
5.3.3.	Complejidades de tiempo y espacio	109
5.3.4.	El parámetro w como una función de x	111
5.4.	Máxima cobertura en 3D	115
5.5.	Conclusiones	117

6. Iluminación de Brocard	118
6.1. Introducción	119
6.2. Polígonos de Brocard	120
6.3. Polígonos convexos	125
6.4. Polígonos simples	130
6.5. Cotas del ángulo de Brocard	133
6.6. Conclusiones	133
7. Conclusiones y trabajo futuro	135
Bibliografía	137

Índice de figuras

1.1. Rectángulo de área mínima.	3
1.2. Nociones no tradicionales de convexidad.	5
1.3. Cierres convexos con orientaciones restringidas.	5
1.4. El cierre \mathcal{O} -convexo es dependiente de la orientación.	6
1.5. El problema de los reflectores.	9
1.6. Iluminación de Brocard.	10
1.7. Propiedades de Brocard.	10
1.8. Aplicaciones para dibujar cierres \mathcal{O} -convexos.	15
1.9. IPElet para dibujar el cierre convexo rectilíneo.	15
1.10. IPElet para dibujar el diagrama de Voronoi en la métrica L_∞	16
2.1. Regiones orto-convexas.	19
2.2. El cierre convexo.	19
2.3. Los cierres r-convexo, cr-convexo, y mr-convexo.	20
2.4. Los cierres orto-convexo fuerte y convexo-separado.	20
2.5. El cierre convexo rectilíneo.	21
2.6. Los maximales de un conjunto de puntos.	22
2.7. Caracterización de un punto maximal.	23
2.8. Regiones \mathcal{O} -convexas.	26
2.9. Refinamiento de familias de regiones \mathcal{O} -convexas.	27
2.10. Un conjunto de \mathcal{O} -semitplanos.	27
2.11. El cierre \mathcal{O} -convexo.	28
2.12. Diferentes nociones de \mathcal{O} -semitplano.	28
2.13. Siempre existe un \mathcal{O} -conjunto tal que $\mathcal{OH}(P) = \mathcal{CH}(P)$	30
2.14. El problema dinámico del cierre convexo.	32
2.15. Las escaleras del cierre convexo rectilíneo.	33
2.16. Resultados conocidos sobre el cálculo del cierre convexo.	34
3.1. Ejemplos de cierres convexos rectilíneos.	37

3.2. El cierre \mathcal{O} -convexo.	38
3.3. El cierre \mathcal{O} -convexo no-orientado.	39
3.4. Calculo del cierre \mathcal{O} -convexo.	41
3.5. Cuñas extremales opuestas.	42
3.6. Intervalos de escape.	43
3.7. Área del cierre \mathcal{O} -convexo.	46
3.8. La cadena de arcos.	48
3.9. Ilustración del Lema 3.3.	49
3.10. Ilustración del Lema 3.4.	50
3.11. Ilustración del Teorema 3.4 (a).	51
3.12. Ilustración del Teorema 3.4 (b).	52
3.13. La cadena de arcos coloreada.	53
3.14. Eslabones que se cortan admiten cuadrantes que se traslapan.	54
3.15. El área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$	57
3.16. El área del polígono $\mathcal{P}(\theta)$	58
3.17. El área de las regiones triangulares.	59
4.1. El cierre \mathcal{O}_β -convexo.	64
4.2. Problemas de optimización	65
4.3. Las \mathcal{O}_β -escaleras.	66
4.4. La configuración inicial incremental.	68
4.5. La configuración inicial decreciente.	68
4.6. Eventos de inserción y de borrado.	70
4.7. Ilustración del Lema 4.2.	70
4.8. Regiones de traslape.	71
4.9. El área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$	74
4.10. Actualización del área del polígono $\mathcal{P}(\theta)$	75
4.11. Actualizando la suma de las áreas de los triángulos $\Delta_i(\theta)$	75
4.12. Creación y desaparición de regiones de traslape.	76
4.13. Ilustración del Lema 4.4.	77
4.14. Ilustración del Lema 4.5 (a).	77
4.15. Ilustración del Lema 4.5 (b).	78
4.16. Los vértices de un triángulo $\Delta_i(\theta)$	79
4.17. Las antenas de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$	82
4.18. Ilustración del Lema 4.7.	84
4.19. Ilustración del Lema 4.8 (a).	85
4.20. Ilustración del Lema 4.8 (b).	85
4.21. El problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado.	89
5.1. Un polígono con $O(mn)$ eventos de entrada y salida.	92

5.2. Ilustración del Teorema 5.1.	93
5.3. Eventos de entrada y de salida.	94
5.4. Barriendo la tabla de eventos de entrada y de salida.	94
5.5. Partiendo una arista de P	96
5.6. Ilustración del Lema 5.1.	99
5.7. Subdividiendo las aristas de P (a).	102
5.8. Subdividiendo las aristas de P (b).	104
5.9. Ilustración del Teorema 5.4 (a).	107
5.10. Ilustración del Teorema 5.4 (b).	108
5.11. Parametrizando el espacio de búsqueda (a).	112
5.12. Parametrizando el espacio de búsqueda (b).	114
6.1. El problema de la iluminación de Brocard.	120
6.2. Iluminación de Brocard en triángulos.	121
6.3. Los círculos adjuntos de un triángulo.	121
6.4. Iluminación de Brocard en polígonos convexos.	122
6.5. Un hexágono que no tiene punto de Brocard antihorario.	123
6.6. Caracterización de polígonos de Brocard.	123
6.7. Evento de apagado de un α -reflector alineado con una arista (a).126	
6.8. Evento de apagado de un α -reflector alineado con una arista (b).126	
6.9. Evento de apagado de un α -reflector alineado con una arista (c).127	
6.10. Evento de apagado de un α -reflector alineado con una arista (d).128	
6.11. Iluminación de Brocard en rectángulos.	129
6.12. Iluminación de Brocard en polígonos simples.	130
6.13. Una solución al problema de Brocard con tres reflectores.	131
6.14. Complejidad de la unión de los polígonos de α -visibilidad.	134

Abstract

In this thesis we describe efficient algorithms to solve optimization problems related to geometric objects under rotation. Broadly speaking, in this class of problems we look for the orientations of the geometric object under study that maximize a given optimization criteria.

We first study geometric problems with restricted orientations. Restricted-orientation convexity is a non-traditional notion of convexity that restricts convex sets to those whose intersection with lines parallel to a set \mathcal{O} of lines is either empty or connected. We describe efficient algorithms to find the orientation of the lines of \mathcal{O} that minimize the area of the restricted-orientation convex hull of a finite set of points in the plane.

We next study polygon placement problems. Given a simple polygon P , these problems consist in finding a function τ such that $\tau(P)$ satisfies some geometric constraint. We solve the problem of rotating a simple polygon to contain the maximum number of elements from a given point set, while we restrict the rotation center to lie on a line or a polygonal chain. We also solve an extension to 3D where we rotate a polyhedron to contain the maximum number of elements from a given set of points in the space.

We finally study illumination problems of simple polygons. We place floodlights on the vertices of a simple polygon and, while one of the rays of each floodlight remains fixed, the second ray rotates around its vertex modifying the aperture angle of each floodlight. The Brocard Illumination Problem consists in finding the smallest rotation angle such that the polygon is completely illuminated. We describe algorithms to solve this problem for different classes of polygons. When the given polygon is a triangle, solving the Brocard illumination problem is equivalent to finding the Brocard point of the triangle.

Resumen

En esta tesis describimos algoritmos eficientes para resolver problemas de optimización relacionados con objetos geométricos bajo rotación. A grandes rasgos, en estos problemas buscamos las orientaciones del objeto geométrico bajo estudio que maximizan algún criterio de optimización.

Primero estudiamos problemas geométricos con orientaciones restringidas. La convexidad con orientaciones restringidas es una noción no tradicional de convexidad, que restringe los conjuntos convexos a aquellos cuya intersección con rectas paralelas a un conjunto \mathcal{O} de rectas es vacía o conexa. Describimos algoritmos eficientes para encontrar la orientación de las rectas de \mathcal{O} que minimiza el área del cierre convexo con orientaciones restringidas de un conjunto finito de puntos en el plano.

Después estudiamos problemas de colocación de polígonos. Dado un polígono simple P , estos problemas consisten en encontrar una función τ tal que $\tau(P)$ satisface alguna restricción geométrica. Resolvemos el problema de rotar un polígono simple hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos. Consideramos variantes en las que el centro de rotación debe encontrarse sobre una recta o una poligonal, y una extensión en 3D en la que rotamos un poliedro hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos en el espacio.

Finalmente estudiamos problemas de iluminación de polígonos. Colocamos reflectores en los vértices de un polígono y, mientras uno de los rayos de cada reflector se mantiene fijo, el segundo rayo rota alrededor de su vértice modificando la apertura de cada reflector. El Problema de Iluminación de Brocard consiste en encontrar el valor mínimo del ángulo de rotación tal que el polígono es iluminado completamente. Describimos algoritmos para resolver este problema en diferentes clases de polígonos. Cuando el polígono dado es un triángulo, resolver el problema de iluminación de Brocard equivale a encontrar el punto de Brocard del triángulo.

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es presentar resultados en Geometría Computacional. Específicamente, nos enfocamos en el diseño de algoritmos eficientes para resolver problemas de optimización relacionados con objetos geométricos bajo rotación. A grandes rasgos, en estos problemas buscamos las orientaciones del objeto geométrico bajo estudio que maximizan algún criterio de optimización. La motivación principal para estudiar esta clase de problemas surge de la facilidad con la que pueden ser planteados: en una buena cantidad de problemas de Geometría Computacional, sólo hace falta considerar rotaciones del plano o de los objetos geométricos bajo estudio para obtener problemas no triviales que resultan muy interesantes.

En este capítulo hacemos un breve recorrido por el contexto histórico y el estado del arte de los problemas que estudiamos en esta tesis. Listamos también las contribuciones y describimos brevemente el contenido de cada uno de los capítulos de este trabajo.

1.1. ¿Qué es la geometría computacional?

La Geometría Computacional surgió durante la década de los setenta como consecuencia natural de la evolución de las Ciencias de la Computación, y específicamente del Análisis y Diseño de Algoritmos. Algunos investigadores consideran que nació con la tesis doctoral de Shamos [108] en 1978. Otros señalan el trabajo de Forrest [64] publicado una década antes. Aquellos que gustan de la historia de las matemáticas podrán argumentar que en realidad, nació en las grandes culturas que desarrollaron los primeros esbozos de la geometría aplicada: la Maya, la Griega y la Egipcia.

A grandes rasgos, la Geometría Computacional estudia objetos geométricos que residen en un espacio dado y las interacciones entre ellos. Más específicamente, la Geometría Computacional se compone de tres ingredientes: el modelado geométrico, el análisis de complejidad y el diseño de algoritmos y estructuras de datos. Los géometras computacionales atacamos un problema desmenuzándolo en un conjunto discreto de objetos geométricos. Estudiando estos objetos, determinamos la complejidad computacional del problema en el modelo de cómputo de nuestra conveniencia. La estocada final viene acompañada de estructuras de datos y algoritmos —idealmente exactos— asintóticamente eficientes.

1.1.1. La caja de herramientas

Las referencias obligadas en Geometría Computacional son los libros de Preparata y Shamos [102], de Berg et al. [52] y los manuales de Sack y Urrutia [106] y de Goodman, O'Rourke y Tóth [70]. Recomiendo también el libro de Devadoss y O'Rourke [53].

Es importante tener a la mano material de consulta sobre geometría discreta, análisis y diseño de algoritmos y complejidad computacional. Una recopilación de resultados clásicos en geometría discreta se encuentra en los libros de Brass, Moser y Pach [36] y Matoušek [90]. En análisis y diseño de algoritmos no deben faltar los libros de Cormen et al. [49] y Knuth [83]. Una excelente recopilación de conceptos básicos de complejidad computacional puede encontrarse en el libro de Kozen [85].

Finalmente, un par de lecturas interesantes de finales de los noventa son los artículos de Chazelle et al. [44] y Tamassia et al. [111]. En estas publicaciones se discute el impacto de la geometría computacional y se describen oportunidades de investigación en áreas afines.

1.2. Búsqueda de orientaciones óptimas

En esta tesis nos enfocamos en el diseño de algoritmos eficientes para resolver problemas de optimización relacionados con objetos geométricos bajo rotación. La mejor manera de entender el espíritu de esta clase de problemas es mediante un ejemplo. Con propósitos ilustrativos consideremos el problema de calcular el rectángulo de área mínima que contiene un conjunto de puntos en el plano. Este problema es bien conocido y fue uno de los primeros en ser estudiados en la geometría computacional [66]. A pesar de su simplicidad, ha resistido el paso de los años motivando el estudio de extensiones y variantes [25, 51, 88], y se mantiene vigente con aplicaciones prácticas en áreas como manufactura de piezas en impresoras 3D [20] y generación de gráficas por computadora [35].

Consideremos primero el problema de encontrar el rectángulo isotético de área mínima que contiene un conjunto de puntos dado. Este problema tiene una solución única y puede resolverse trivialmente en tiempo lineal encontrando los cuatro puntos del conjunto con las abscisas y la ordenadas más pequeñas y más grandes, como se muestra en la Figura 1.1(a). Cuando consideramos rectángulos con orientaciones arbitrarias el problema se transforma en un problema de optimización: buscamos ahora la orientación de los ejes coordenados en los que el rectángulo isotético que contiene al conjunto de puntos tiene área mínima. Ver la Figura 1.1(b).

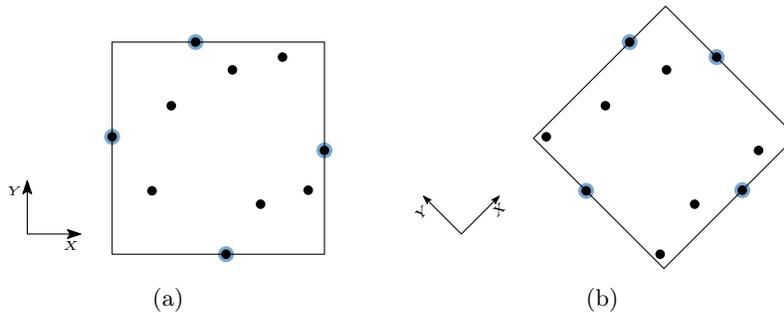


Figura 1.1: El rectángulo de área mínima que contiene a un conjunto de puntos.

Al considerar todas las orientaciones de los ejes coordenados, preguntas que originalmente eran triviales ahora nos exigen herramientas teóricas más sofisticadas: ¿cuál es la complejidad en tiempo del problema?, ¿existe un algoritmo óptimo en tiempo para resolverlo?, ¿existen conjuntos de puntos con más de una orientación óptima?, ¿la complejidad del problema es la misma si consideramos el perímetro en lugar del área del rectángulo?, ¿qué

podemos decir si consideramos una caja “no orientada” de volumen mínimo que contiene un conjunto de puntos en el espacio?. Con excepción de la última pregunta (para la cual recomendamos al lector las referencias [25, 97]), el misterio detrás de estas preguntas puede aclararse leyendo alguna de las referencias estándar que mencionamos anteriormente.

Los problemas que tratamos en esta tesis resultan de analizar problemas conocidos al rotar los ejes coordenados o los objetos geométricos bajo estudio. Como veremos más adelante, en algunos casos (como en los problemas relacionados con el cierre convexo con orientaciones restringidas) abrimos las puertas a una gran cantidad de problemas que resultan de reformular problemas clásicos, mientras que en otros casos (como en la iluminación de Brocard) encontramos conexiones entre problemas clásicos de geometría computacional con problemas que fueron formulados hace más de cien años.

1.2.1. Convexidad con orientaciones restringidas

El estudio de conjuntos convexos es una rama de gran importancia en las matemáticas que ha permitido relacionar áreas tan diversas como la geometría, el álgebra lineal, la topología, la estadística, el análisis funcional y la teoría de números [62, 73, 82]. A lo largo del tiempo, no sólo se han explorado las propiedades matemáticas de los conjuntos convexos, sino también una gran cantidad de problemas computacionales relacionados. Los algoritmos resultantes han sido aplicados en análisis de elementos finitos, reconocimiento de patrones, programación lineal y análisis combinatorio de poliedros [57, 72, 102], por mencionar algunos.

Las nociones no tradicionales de convexidad extienden definiciones y propiedades de los conjuntos convexos. Una región en el plano es convexa si, y sólo si, para cualquier par de puntos en su interior, la región contiene el segmento que los conecta. La *convexidad con k -puntos* [37, 117] por ejemplo, extiende esta definición al considerar regiones en las que, para cualesquiera k puntos en su interior, la región contiene al menos uno de los segmentos de recta que definen. Por otra parte, en la *convexidad con k -eslabones* [89], un polígono es convexo con k -eslabones si, y sólo si, para cualquier par de puntos en su interior, el camino geodésico que los conecta tiene a lo más k eslabones. Ver Figura 1.2.

Una región en el plano es convexa si, y sólo si, su intersección con cualquier recta resulta en a lo más una componente conexa. La *convexidad ortogonal* [93, 95] restringe los conjuntos convexos a aquellos (que llamamos *orto-convexos*) cuya intersección con cualquier recta horizontal o vertical resulta en a lo más una componente conexa. El *cierre convexo rectilíneo* [99]

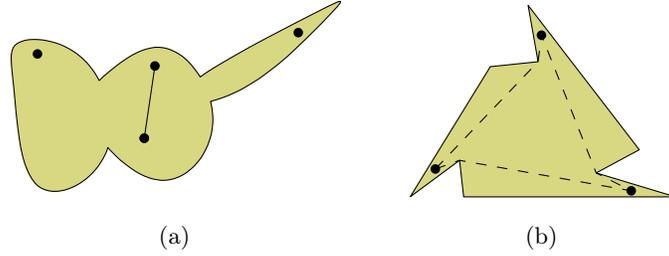


Figura 1.2: Nociones no tradicionales de convexidad. (a) Una región convexa con 4-puntos. (b) Un polígono convexo con 2-eslabones.

(la versión orto-convexa del cierre convexo tradicional) ha sido utilizado para reconstruir poliedros [33], en problemas de iluminación, localización de servicios y optimización geométrica [1, 54, 110] y en aplicaciones prácticas como reconocimiento de formas y diseño de circuitos VLSI [56, 115].

La *convexidad con orientaciones restringidas* [63, 65, 103] es una generalización de la convexidad ortogonal y a la vez una restricción de la convexidad tradicional: Dado un conjunto \mathcal{O} de rectas, decimos que una región es \mathcal{O} -convexa si, y sólo si, su intersección con cualquier recta paralela a una recta de \mathcal{O} resulta en a lo más una componente conexa. Esta noción de convexidad surge del interés en la *geometría con orientaciones restringidas* [103], donde se estudian objetos geométricos en espacios euclidianos que cumplen restricciones relacionadas con un conjunto fijo de rectas. El estudio de objetos con orientaciones restringidas inició con el trabajo de Güting [76] a principios de los años ochenta, como una generalización del estudio de polígonos ortogonales. Ver Figura 1.3.

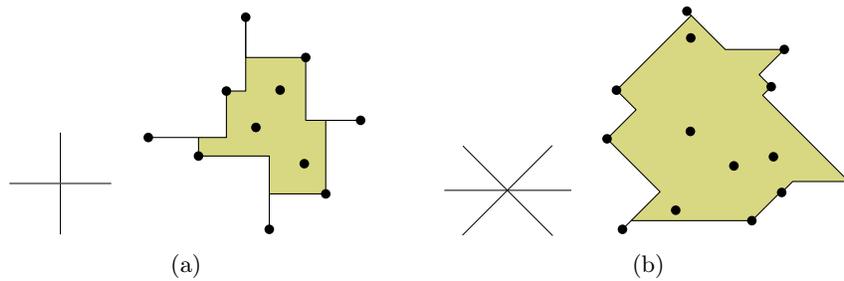


Figura 1.3: Cierres convexos con orientaciones restringidas. El conjunto \mathcal{O} de rectas se muestra a la izquierda de cada cierre. (a) Cierre convexo rectilíneo. (b) Cierre \mathcal{O} -convexo.

Estudiamos el problema clásico de calcular el cierre convexo de un con-

junto finito de puntos en el plano, en el contexto de la convexidad con orientaciones restringidas. Este problema ya ha sido estudiado [63], aunque no tan extensamente como el cierre convexo tradicional. Nuestro trabajo se diferencia de resultados anteriores en que derivamos del cálculo del cierre \mathcal{O} -convexo una serie de problemas de optimización. Nos basamos en la observación crucial de que, a diferencia del cierre convexo tradicional, el cierre \mathcal{O} -convexo es *dependiente de la orientación*. Más específicamente, denotemos con \mathcal{O}_θ al conjunto que resulta de rotar \mathcal{O} por un ángulo θ . Con excepción de un conjunto finito de ángulos (aquellos que son múltiplos de π por ejemplo), los cierres \mathcal{O}_θ -convexos de un mismo conjunto de puntos en valores diferentes de θ no son congruentes entre sí. Ver Figura 1.4.

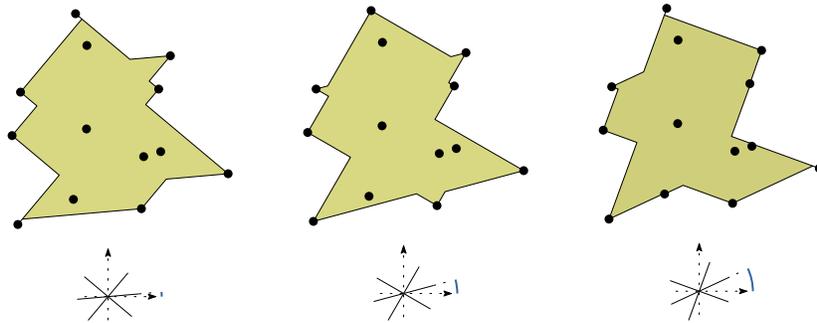


Figura 1.4: Los cambios en el cierre \mathcal{O}_θ -convexo mientras incrementamos θ . En el inferior de cada figura se muestran los ejes coordenados (con líneas punteadas), el conjunto \mathcal{O}_θ de rectas (con líneas sólidas), y el ángulo entre los ejes coordenados y \mathcal{O}_θ (el arco azul).

En general, todos los objetos geométricos con orientaciones restringidas son dependientes de la orientación, lo que permite formular una clase de problemas “no orientados” de optimización: encontrar las orientaciones del conjunto de rectas tal que alguna propiedad del objeto geométrico bajo estudio es óptima bajo algún criterio de optimización. En la literatura existen varios ejemplos de este tipo de problemas. Dado un conjunto bicoloreado de puntos en el plano, en [109] se estudia el problema de encontrar una orientación del plano en la que existe un polígono ortogonal isotético con forma de L que separa los puntos rojos de los azules. Los polígonos en forma de L también son estudiados en [22], aunque en esta ocasión los autores buscan la orientación del plano en la que el polígono encierra un conjunto de puntos dado y tiene área mínima. En [54] los autores encuentran la orientación del plano en la que una poligonal ortogonal isotética y alternante con dos codos tiene un ajuste óptimo respecto de un conjunto de puntos dado. Como último ejemplo,

en [98] los autores consideran una versión con orientaciones restringidas de visibilidad, y describen un algoritmo para calcular el valor de θ tal que, en el modelo de visibilidad restringido a \mathcal{O}_θ , el núcleo de visibilidad de un polígono simple tiene área mínima.

En esta tesis estudiamos el problema de buscar los valores de θ en los cuales alguna característica del cierre \mathcal{O}_θ -convexo es óptima. Aunque sólo consideramos el área y el perímetro del cierre \mathcal{O}_θ -convexo, las técnicas que utilizamos pueden extenderse sin dificultad para optimizar el número de componentes conexas, o el número de puntos en su interior y/o sobre su frontera, por mencionar otras características.

1.2.2. Ubicación de polígonos

Dado un polígono simple P en el plano, el *Problema de la Ubicación de Polígonos* consiste en encontrar una función τ , comúnmente formada por la composición de una rotación y una translación, tal que $\tau(P)$ satisface algunas restricciones geométricas. La función $\tau(P)$ es conocida como una *ubicación* de P . Entre otras aplicaciones, los problemas de ubicación de polígonos se han utilizado para modelar la localización global de robots móviles, y para resolver problemas de reconocimiento de patrones y de tolerancia geométrica; ver las referencias en [24].

En la literatura, la versión más antigua de un problema de ubicación de polígonos fue estudiada a principios de los ochenta por Chazelle [43]: Dados dos polígonos P y Q , encontrar una ubicación de P que contiene a Q , si es que existe. Una recopilación de diferentes tipos de problemas de ubicación de polígonos puede encontrarse en [24, Sección 1.4]. En esta tesis estudiamos el problema de ubicación que consiste en rotar un polígono simple hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos dado. Consideramos variaciones de este problema en las que restringimos el centro de rotación, de forma que se encuentre en un punto o en una poligonal. Este tipo de problemas surgen en localización de robots utilizando una cámara que rota [77] y pueden ser aplicados en control de calidad de objetos fabricados alrededor de un eje [119].

A pesar de que han sido estudiados problemas que consideran únicamente translaciones [3, 23], sorprendentemente no hay resultados previos donde τ sea sólo una rotación. Por otra parte, los resultados donde τ es una composición de una rotación, una translación, e incluso un escalamiento [24], no pueden ser adaptados para resolver los problemas de rotación que consideramos en esta tesis. Esta limitación se debe a que reducen el espacio de búsqueda al considerar únicamente ubicaciones donde un número constante de puntos a

capturar se encuentran en la frontera de P (ver por ejemplo las referencias [55] y [24] para encontrar algoritmos basados, respectivamente, en ubicaciones restringidas a uno y dos puntos). Si queremos adaptar τ para que esté formada sólo por rotaciones, no es posible restringir el centro de rotación.

1.2.3. Iluminación de Brocard

Los problemas de iluminación son de los más antiguos y más estudiados en geometría computacional. Después de empaparse un poco del tema es fácil entender por qué estos problemas atraen la atención de geómetras computacionales e investigadores en áreas afines. En primer lugar, para entenderlos no se requieren más que algunos conocimientos elementales de geometría. En segundo lugar, las soluciones más famosas son simples, elegantes y fáciles de seguir. La cereza en el pastel es la gran cantidad de aplicaciones prácticas que derivan de los resultados combinatorios y computacionales de esta clase de problemas. Comúnmente, estas aplicaciones pueden encontrarse en áreas relacionadas con generación de gráficas por computadora [47], visión por computadora [61] y robótica [87].

Uno de los problemas clásicos de iluminación fue propuesto por Erns Strauss en los años cincuenta, y fue publicado por primera vez a finales de los sesenta por Klee [81]. Imaginemos que vivimos en una casa de una planta. Si cubrimos con espejos las paredes, el techo y el piso, ¿es cierto que sólo es necesario un foco para iluminar toda la casa? La respuesta a esta pregunta es no, y fue demostrada por Tokarsky [112] algunas décadas después.

En la interpretación geométrica tradicional de este problema, la casa se representa con un polígono simple en el plano, y el foco con un punto en el interior del polígono. La iluminación es una simplificación básica del fenómeno físico real. Dados dos puntos p y q en el interior de una región R en el plano, decimos que p ilumina a q si el segmento que conecta p con q está completamente contenido en R . El foco se considera como una fuente de luz omnidireccional, de forma que emite rayos de luz en todas direcciones. Los rayos de luz se reflejan en los espejos con un modelo de reflexión especular, donde el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Una clase de problemas íntimamente relacionados con los de iluminación, son los problemas de visibilidad. En 1973, Victor Klee propuso el primer problema de esta clase. Imaginemos una galería de arte llena de obras valuadas en varios millones de pesos. En el interior de la galería hay un grupo de guardias para evitar robos o que los asistentes maltraten las obras. El *Problema de la Galería de Arte* consiste en determinar el mínimo número de guardias que son suficientes para vigilar el interior de la galería. El primer resultado

para este problema se debe a Chvátal [46], quien demostró el ahora famoso *Teorema de la Galería de Arte*: En una galería de arte con n paredes, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilarla.

En la literatura podemos encontrar una gran cantidad de variantes de problemas de iluminación. Estas variantes surgen de imponer restricciones en la forma del polígono, y de experimentar con diferentes modelos de iluminación y fuentes de luz. Por mencionar algunos ejemplos, podemos considerar polígonos ortogonales, fuentes de luz que se mueven o modelos de iluminación con orientaciones restringidas. Para el lector interesado, una nutrida recopilación de datos históricos, variantes, algoritmos y aplicaciones, pueden encontrarse en el compendio de Urrutia [116], y en los libros de O'Rourke [96], Ghosh [69] y de Fink y Wood [63].

Estamos interesados en variantes de iluminación donde las fuentes de luz son reflectores. Un reflector es una fuente de luz que ilumina el interior de una región angular. La motivación detrás de esta variante puede encontrarse en la vida cotidiana. En una galería, los guardias no pueden ver en todas direcciones al mismo tiempo y normalmente, las cámaras de vigilancia tienen un rango de visión limitado. Este también es el caso de los reflectores en un teatro, que iluminan el escenario en un área restringida por un cono.

El primer problema de iluminación con reflectores fue estudiado por Bose et al. [34]. Imaginemos que somos tramoyistas en un teatro. Contamos con un conjunto de reflectores con apertura fija que pueden ser colocados en posiciones predeterminadas de la tramoya. El *Problema de los Reflectores* consiste en elegir, lo más rápido posible, la posición y orientación de cada reflector de forma que el escenario esté completamente iluminado. Si contamos con n reflectores tales que la suma de sus ángulos de apertura no es mayor a π , el problema puede resolverse en tiempo $O(n \log n)$.

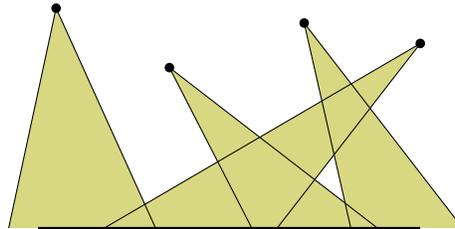


Figura 1.5: Un conjunto de cuatro reflectores iluminando un escenario.

En esta tesis proponemos un problema de iluminación de polígonos con un tipo especial de reflectores. Consideremos un triángulo Δ con vértices A ,

B y C . Sea ℓ un rayo que parte de A y pasa por B , y r un segundo rayo que parte de A con una dirección arbitraria. Un *reflector alineado con la arista \overline{AB}* es un reflector colocado en A que ilumina la región barrida por ℓ cuando es rotado alrededor de A en sentido horario hasta que coincida con r . Dados tres reflectores alineados con las aristas de \triangle , todos con ángulo de apertura α , buscamos el valor más pequeño de α tal que los reflectores iluminan todo el interior de \triangle . Ver Figura 1.6.

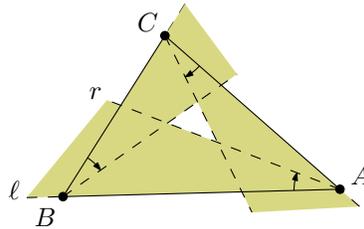


Figura 1.6: Reflectores alineados con las aristas de un triángulo.

En 1875, Henri Brocard propuso el problema de investigar la existencia de un punto Q en el interior de un triángulo con vértices A , B , y C , tal que $\angle QAB = \angle QCB = \angle QBA = \omega$. Poco después fueron publicadas diferentes soluciones a este problema, y hasta la fecha han sido desarrollados una gran cantidad de resultados geométricos relacionados. El punto Q y el ángulo ω son conocidos en la actualidad como el *punto* y el *ángulo de Brocard*, ver Figura 1.7(a). Los fundamentos geométricos de las propiedades de Brocard pueden encontrarse en cualquier libro de texto de geometría moderna. Recomendamos también las referencias [31, 75, 92], donde se pueden encontrar datos históricos e investigaciones relacionadas.

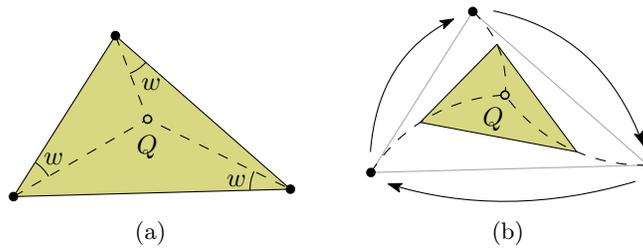


Figura 1.7: Propiedades de Brocard. (a) El punto y el ángulo de Brocard. (b) Persecución cíclica. Las curvas de persecución se muestran con líneas discontinuas.

Sorpresivamente, el ángulo que resuelve nuestro problema de iluminación

es el ángulo de Brocard. En este ángulo, los rayos que no están alineados con las aristas de \triangle se intersecan en el punto de Brocard. En esta tesis estudiamos una generalización de este problema de iluminación donde consideramos polígonos simples en general. Hasta donde sabemos, esta es la primera vez que se estudian las propiedades de Brocard de polígonos simples y en un contexto computacional.

Para finalizar, no queremos dejar de mencionar una relación interesante entre nuestro problema de iluminación, las propiedades de Brocard y el problema que describimos a continuación. Imaginemos que tres perritos, Coqueta, Canito y Croqueta, están jugando en el jardín. Los tres se están persiguiendo uno al otro: Coqueta a Canito, Canito a Croqueta y Croqueta a Coqueta. El *Problema de la Persecución Cíclica* consiste en determinar la curva que describen los perritos mientras están corriendo. Este problema ha sido planteado a lo largo de los años independientemente (intercambiando los perritos por arañas, ratones, partículas, etc.), ha sido estudiado también en dimensiones superiores [105] y se han utilizado variantes para coordinar sistemas de agentes inteligentes [68] y para rastrear objetos en movimiento [50]. En la literatura, la publicación más antigua data de 1877 [Nouvelles Correspondance Mathématique 3 (1877), págs. 175–280]¹, cuando Henri Brocard presentó la primer solución: las curvas que describen los perritos son espirales logarítmicas que se intersecan en un mismo punto. El punto de intersección es precisamente el punto de Brocard del triángulo que tiene como vértices las posiciones iniciales de los perritos. Ver Figura 1.7(b).

1.3. Contribuciones

1.3.1. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 damos un breve recorrido por los conceptos de convexidad, convexidad ortogonal y convexidad con orientaciones restringidas. El objetivo de este capítulo es describir resultados conocidos en la literatura, mientras enfatizamos los aspectos de la convexidad tradicional que fueron extendidos hacia la convexidad ortogonal, y posteriormente, hacia la convexidad con orientaciones restringidas.

En el Capítulo 3 estudiamos el *cierre \mathcal{O} -convexo no orientado* de un conjunto finito de puntos en el plano. Sea P un conjunto de n puntos en el plano, \mathcal{O} un conjunto de $k \leq n$ rectas que pasan por el origen, y \mathcal{O}_θ el conjunto que resulta de rotar \mathcal{O} por un ángulo θ . Describimos un algoritmo

¹Esta cita fue tomada del artículo de Bernhart [31].

que en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ mantiene el cierre \mathcal{O}_θ -convexo de P mientras variamos θ desde 0 hasta 2π . Cuando el valor de k es constante las complejidades en tiempo y espacio son óptimas. Con base en este algoritmo, calculamos en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ el valor de θ tal que el cierre \mathcal{O}_θ -convexo de P tiene área mínima. Con este resultado mejoramos el algoritmo presentado por Bae et al. [22], que resuelve en tiempo $O(n^2)$ el caso particular en el que \mathcal{O} está formado por $k = 2$ rectas ortogonales. Finalmente, cuando $\theta = 0$ nuestro algoritmo calcula el cierre \mathcal{O} -convexo de P en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$, mejorando el algoritmo de tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ presentado por Rawlins [103].

En el Capítulo 4 estudiamos el cierre \mathcal{O}_β -convexo de un conjunto finito de puntos en el plano, el caso particular del cierre \mathcal{O} -convexo donde \mathcal{O} contiene dos rectas que se cortan en el origen y forman un ángulo β . Dado un conjunto P de n puntos en el plano, describimos un algoritmo que en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$ mantiene el cierre \mathcal{O}_β -convexo de P mientras incrementamos β desde 0 hasta π . Con base en este algoritmo y con la misma complejidad en tiempo y espacio, calculamos los valores de β para los cuales el área y el perímetro del cierre \mathcal{O}_β -convexo de P son máximos, y los valores de β en los cuales una poligonal alternante no orientada con dos codos y ángulo interior β ajusta mejor los puntos de P .

En el Capítulo 5 estudiamos el problema de rotar un polígono simple hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos. Resolvemos variantes de este problema en las que el centro de rotación debe encontrarse en un punto, en un segmento de recta, en una recta y en una cadena poligonal. Estudiamos también una extensión en 3D de este problema, en la que rotamos un poliedro alrededor de un punto dado hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos en el espacio. En la Tabla 1.1 mostramos las complejidades en tiempo y espacio de los algoritmos que resuelven estos problemas.

Finalmente, en el Capítulo 6 estudiamos el problema de Iluminación de Brocard. Un α -reflector es una fuente de luz que ilumina una cuña del plano acotada por dos rayos ℓ y r que parten de un punto x , de forma que r se obtiene al rotar ℓ alrededor de x en sentido horario por un ángulo α . Decimos que ℓ , r y x son respectivamente, el rayo izquierdo, el rayo derecho y el ápice del α -reflector. Sea P un polígono con vértices v_0, \dots, v_{n-1} etiquetados en sentido horario alrededor de su frontera. Decimos que un α -reflector f_i está *alineado con una arista* de P , si su ápice se encuentra sobre v_i y su rayo izquierdo pasa por v_{i+1} . El problema de la Iluminación de Brocard consiste en encontrar el ángulo α más pequeño tal que el conjunto $\{f_0, \dots, f_{n-1}\}$ de α -reflectores alineados con las aristas de P iluminan el interior de P .

Variante	Tiempo	Espacio
punto fijo	$O(nm \log(nm))$ $O((n+k) \log n + m \log m)$	$O(nm)$ $O(n+m+k)$
segmento / recta	$O(n^2 m^2 \log(nm))$	$O(n^2 m^2)$
poligonal	$O(sn^2 m^2 \log(nm))$	$O(n^2 m^2)$
3D	$O(n^2 m^2 \log(nm))$	$O(n^2 m^2)$

Tabla 1.1: Resultados sobre captura de puntos. Los parámetros n , m y s denotan respectivamente, el número de puntos, el número de vértices del polígono o caras del poliedro de captura y el número de eslabones de la poligonal de restricción.

Describimos algoritmos para resolver el problema en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ cuando el polígono es convexo, y en tiempo $O(n^3 \log^2 n)$ y espacio $O(n^3)$ cuando el polígono es simple.

1.3.2. Publicaciones

La mayoría de los resultados que describimos en esta tesis están disponibles en las siguientes publicaciones:

1. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Rectilinear and \mathcal{O} -convex hull with minimum area”. *ArXiv e-prints* (2017). Submitted. arXiv: 1710.10888 [cs.CG]
2. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the \mathcal{O}_β -hull of a planar point set”. *Computational Geometry* 68 (2018), págs. 277-291
3. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Leonidas Palios, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Capturing points with a rotating polygon (and a 3D extension)”. *Theory of Computing Systems* (2018). In Press. DOI: 10.1007/s00224-018-9885-y

También presentamos resultados preliminares en las siguientes conferencias:

4. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the \mathcal{O} -hull of planar point sets”. *30th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2014)*. 2014
5. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Optimizing an oriented convex hull with two directions”. *31th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2015)*. 2015

6. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “The \mathcal{O}_β -hull of a planar point set and some applications”. *XVI Spanish Meeting on Computational Geometry (EGC 2015)*. 2015
7. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Leonidas Palios, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Covering points with rotating polygons”. *32th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2016)*. 2016
8. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Illuminating polygons by edge-aligned floodlights of uniform angle (Brocard illumination)”. *33th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2017)*. 2017
9. Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the Rectilinear Convex Hull of a planar point set and its generalizations”. *XXXI Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones*. 2017

1.3.3. Software

Para facilitar el estudio de los problemas que tratamos en esta tesis, desarrollamos los programas que mencionamos a continuación.

Desarrollamos dos aplicaciones de escritorio: una para dibujar el Cierre Convexo Rectilíneo y la otra para dibujar el Cierre \mathcal{O}_β -convexo de un conjunto de puntos en el plano. En ambas aplicaciones, la orientación de los ejes coordenados se puede cambiar y los puntos se pueden agregar, eliminar y mover mientras los cierres son actualizado automáticamente. En la Figura 1.8 se muestran capturas de pantalla y en la siguiente referencia se encuentran más detalles sobre las aplicaciones.

10. Carlos Alegría-Galicia. *Dynamic Rectilinear Convex Hull Simulator*. 2018. DOI: [10.5281/zenodo.1344455](https://doi.org/10.5281/zenodo.1344455)

También desarrollamos un conjunto de scripts para el editor gráfico IPE [45] que dibujan el Cierre Convexo Rectilíneo de un conjunto de puntos en cualquier orientación de los ejes coordenados. En la Figura 1.9 se muestra una captura de pantalla y en la siguiente referencia se encuentran más detalles sobre los scripts.

11. Carlos Alegría-Galicia. *A set of Ipelets to compute the \mathcal{O} -convex hull of a set of points in the plane for different orientations of the coordinate axis*. 2018. DOI: [10.5281/zenodo.1344570](https://doi.org/10.5281/zenodo.1344570)

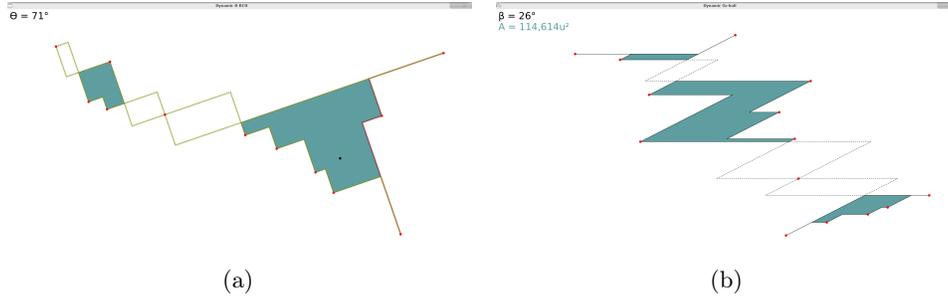


Figura 1.8: Aplicaciones para dibujar (a) el cierre convexo rectilíneo y (b) el cierre \mathcal{O}_β -convexo.

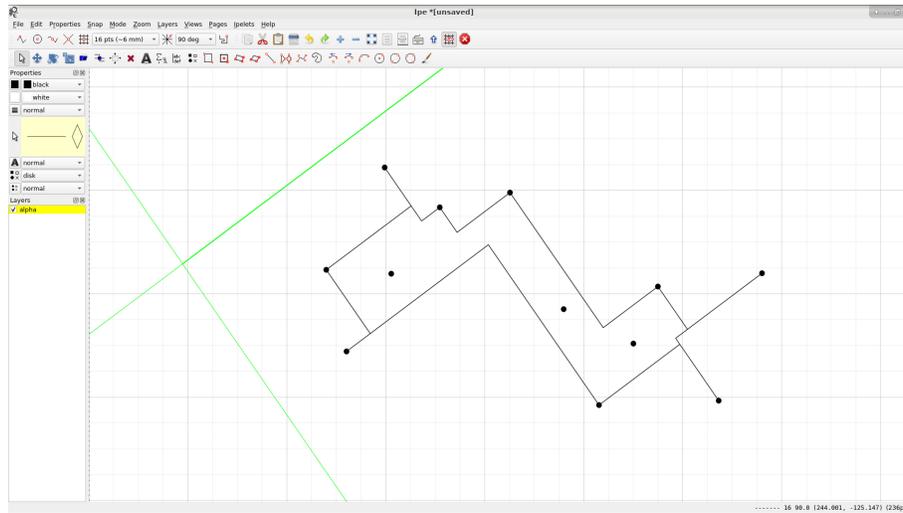


Figura 1.9: IPElet para dibujar el cierre convexo rectilíneo. Los ejes coordenados se muestran en verde.

1.3.4. Otras publicaciones

Las siguientes publicaciones no fueron incluidas en esta tesis, aunque fueron desarrolladas paralelamente.

12. Israel Aldana-Galván, Carlos Alegría-Galicia, José Luis Álvarez-Rebollar, Nestaly Marin-Nevárez, Erick Solís-Villarreal, Jorge Urrutia y Carlos Velarde. “Finding minimum witness sets in orthogonal polygons”. *30th Canadian Conference on Discrete and Computational Geometry (CCCG 2018)*. 2018

13. Carlos Alegria Galicia, Julia A. Bennell, Marta Cabo Nodar y Antonio Martínez Sykora. “Heurísticas para resolver un problema de la mochila sobre un bin rectangular”. *VII Congreso de la Sociedad Mexicana de Investigación de Operaciones (CSMIO 2018)*. 2018
14. Marta Cabo, Julia A. Bennell, Antonio Martínez Sykora y Carlos Alegría. “Beam Search for the 2D-Single Knapsack Problem”. *29th European Conference on Operational Research (EURO 2018)*. 2018
15. Marta Cabo, Julia A. Bennell, Antonio Martínez Sykora y Carlos Alegría. “Beam Search for the 2D-Single Knapsack Problem”. *15th ESICUP Meeting*. 2018

Finalmente, desarrollamos un script de IPE para calcular el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos en la métrica L_∞ . El script permite cambiar la orientación de los ejes coordenados. En la Figura 1.10 se muestra una captura de pantalla y más detalles se encuentran en la siguiente referencia.

16. Carlos Alegría-Galicia. *An Ipelet to compute the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation of a set of points in the plane on the infinity metric*. 2018. DOI: [10.5281/zenodo.1344483](https://doi.org/10.5281/zenodo.1344483)

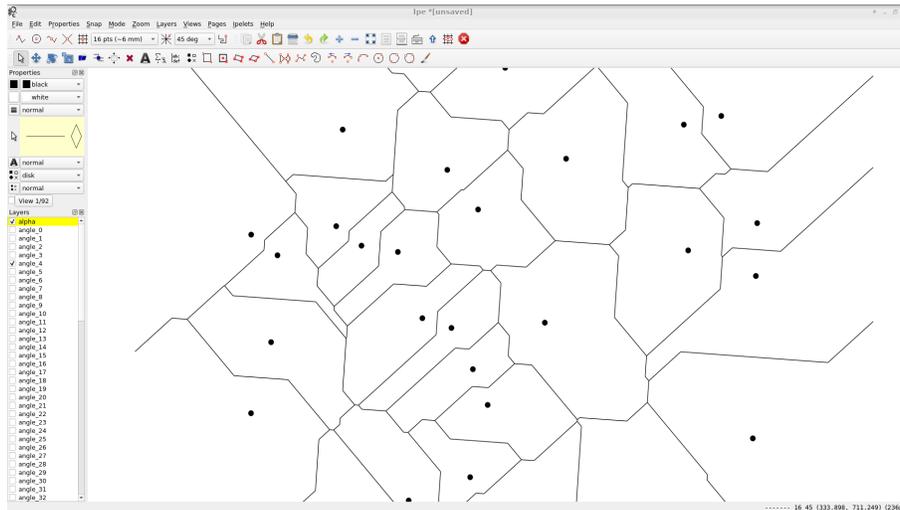


Figura 1.10: IPElet para dibujar el diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos en la métrica L_∞ .

Capítulo 2

Orientaciones restringidas.

En este capítulo damos un breve recorrido por los conceptos de convexidad, convexidad ortogonal, y convexidad con orientaciones restringidas. Nuestro objetivo es describir resultados conocidos en la literatura, mientras enfatizamos los aspectos de la convexidad tradicional que fueron extendidos hacia la convexidad ortogonal, y posteriormente, hacia la convexidad con orientaciones restringidas.

Las propiedades de las regiones convexas que describimos son bien conocidas y han sido estudiadas extensamente. Recomendamos al lector interesado el libro de Gruber y Wills [74]. Mencionamos también resultados básicos relacionados con el cierre convexo de un conjunto finito de puntos en el plano. Estos resultados pueden encontrarse en cualquier libro de geometría computacional. Recomendamos en particular las referencias estándar que mencionamos en el Capítulo 1.

La mayoría de los conceptos y resultados que describimos sobre las convexidades ortogonal y con orientaciones restringidas pueden encontrarse en los libros de Preparata y Shamos [102] y de Fink y Wood [63]. Describimos también observaciones propias que descubrimos al estudiar estos conceptos y los problemas que tratamos en capítulos posteriores.

2.1. Convexidad y convexidad ortogonal

Decimos que una región es *convexa* si, y sólo si, su intersección con cualquier recta es vacía, un punto o un segmento de recta. De esta definición podemos deducir las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS REGIONES CONVEXAS.

- I. La intersección de regiones convexas es una región convexa.
 - II. Una región convexa es simplemente conexa (no tiene hoyos).
 - III. Cualquier rotación de una región convexa es una región convexa.
-

La *convexidad ortogonal*¹ es una restricción de la convexidad tradicional que considera únicamente rectas paralelas a los ejes coordenados. Una región en el plano es *orto-convexa* si, y sólo si, su intersección con cualquier recta horizontal o vertical es vacía, un punto, o un segmento de recta. De esta definición podemos deducir las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS REGIONES ORTO-CONVEXAS.

- I. La intersección de regiones orto-convexas es una región orto-convexa.
 - II. Toda región conexa que es orto-convexa es simplemente conexa (no tiene hoyos).
 - III. Una región disconexa es orto-convexa si, y sólo si, todas sus componentes conexas son orto-convexas y ninguna recta horizontal o vertical corta dos de sus componentes conexas.
 - IV. Toda región convexa es orto-convexa.
-

En la Figura 2.1 mostramos algunas regiones orto-convexas. De las propiedades anteriores podemos observar algunas similitudes y diferencias básicas con las regiones convexas. Al igual que en la convexidad tradicional, la familia de todas las regiones orto-convexas es cerrada bajo la intersección de conjuntos. En contraste, las rotaciones no preservan la convexidad ortogonal y las regiones orto-convexas pueden ser disconexas.

¹La convexidad ortogonal también es conocida como *orto-convexidad* o *convexidad x - y* .

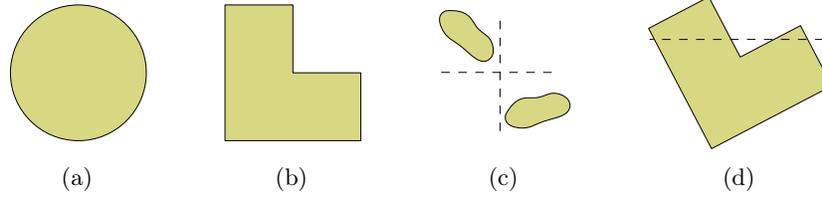


Figura 2.1: Las regiones (a)-(c) son orto-convexas, mientras que la región (d) no es orto-convexa. Notemos que la región (a) es convexa, la región (c) es disconexa, y la región (d) es una rotación de la región (b).

En adelante, sea P un conjunto de n puntos en el plano. El *cierre convexo* de P , que denotamos con $\mathcal{CH}(P)$, es la intersección de las regiones convexas que contienen a P . En la literatura podemos encontrar también las siguientes definiciones equivalentes.

CIERRE CONVEXO.

El cierre convexo de P es la región definida por:

- I. La intersección de las regiones convexas que contienen a P .
 - II. La región convexa más pequeña que contiene a P .
 - III. La intersección de los semiplanos cerrados que contienen a P .
-

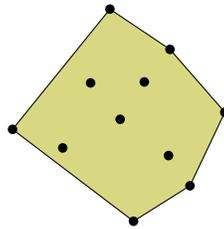


Figura 2.2: El cierre convexo de P .

El *cierre convexo rectilíneo*² es la contraparte orto-convexa del cierre convexo tradicional. En la literatura existen varias definiciones de cierre orto-convexo que no son equivalentes entre sí. Tres de las más relevantes se deben

²Este nombre es el más utilizado en la literatura, aunque también es conocido como *cierre convexo ortogonal*, *cierre orto-convexo*, o *cierre convexo x-y*.

a Ottmann, Soisalon-Soininen y Wood [99], y son versiones orto-convexas de las definiciones anteriores de cierre convexo. El cierre *r-convexo* de P es la intersección de las regiones orto-convexas que contienen a P . El cierre *cr-convexo* de P es la región conexa y orto-convexa más pequeña que contiene a P . Un *semiplano ortogonal* es la unión de dos semiplanos cerrados: uno con una recta de soporte horizontal y el otro con una recta de soporte vertical. El cierre *mr-convexo* de P es la intersección de los semiplanos ortogonales que contienen a P .

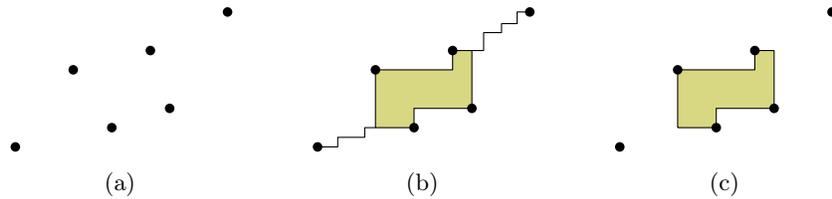


Figura 2.3: Los cierres (a) *r-convexo* — que en este caso es igual al conjunto de puntos —, (b) *cr-convexo* y (c) *mr-convexo*.

Podemos encontrar en la literatura dos definiciones más de cierre orto-convexo. La primera se debe a Rawlins [103] y está basada en una versión restringida de visibilidad³. La segunda fue presentada por Matoušek y Plecháč [91] y está basada en una versión funcional de convexidad ortogonal. Omitimos detalles sobre estas definiciones. El lector interesado puede consultar las referencias [91, 103] y el libro de Fink y Wood [63].

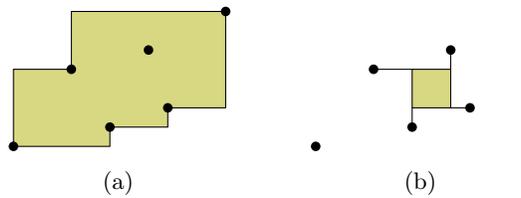


Figura 2.4: Otras definiciones de cierre orto-convexo. (a) El cierre *orto-convexo fuerte* de Rawlins [103]. (b) El *cierre convexo-separado* de Matoušek y Plecháč [91].

Una *poligonal ortogonal* es una secuencia de segmentos de recta que son paralelos a los ejes coordenados y no se cortan salvo en sus extremos. Los puntos de intersección son los *vértices* de la poligonal. Un *polígono ortogonal*

³Recordemos que dada una región R en el plano y dos puntos $p, q \in R$, decimos que q es *visible* desde p , si el segmento \overline{pq} está completamente contenido en R .

es un polígono que tiene como frontera una poligonal ortogonal cerrada. A menos que digamos lo contrario, asumimos que todos los polígonos ortogonales son simplemente conexos (no tienen hoyos).

Notemos en las Figuras 2.3 y 2.4 que, como cualquier región orto-convexa, los cierres orto-convexos pueden ser desconexos. Cada componente conexa es un polígono ortogonal y orto-convexo (que puede ser incluso un punto, como en las figuras 2.3(c) y 2.4(b)) con cero o más aristas “degeneradas”, que son poligonales ortogonales y orto-convexas que conectan al polígono con puntos extremales. Estas propiedades son independientes de la definición particular del cierre orto-convexo y son consecuencia de tratar con conjuntos finitos de puntos. El cierre orto-convexo de conjuntos infinitos de puntos en el plano y en dimensiones superiores se estudia en el libro de Fink y Wood [63].

2.2. El cierre convexo rectilíneo

De entre las definiciones anteriores, estamos interesados en estudiar el cierre mr-convexo. Más adelante, describimos una generalización que usamos para definir problemas computacionales sobre convexidad con orientaciones restringidas. La definición del cierre mr-convexo está basada en observaciones de Preparata y Shamos [102] sobre los maximales de un conjunto de puntos bajo dominación vectorial. Detallamos a continuación estas observaciones así como algunos resultados computacionales relacionados.

Definición 2.1 (Ottmann, Soisalon-Soininen y Wood [99]). El *cierre convexo rectilíneo* de P , que denotamos con $\mathcal{RH}(P)$, es la intersección de los semiplanos ortogonales que contienen a P .

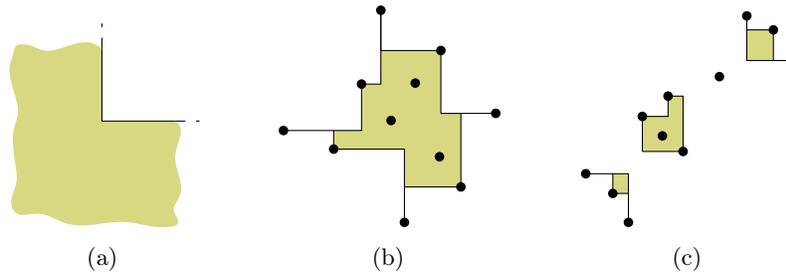


Figura 2.5: El cierre convexo rectilíneo. (a) Un semiplano ortogonal. (a) Un cierre convexo rectilíneo conexo. (b) Un cierre convexo rectilíneo con cuatro componentes conexas. Una de las componentes es un punto.

Dados dos puntos en el plano $p = (a, b)$ y $q = (c, d)$, decimos que p domina a q ($p > q$) si, y sólo si, $a \geq c$ y $b \geq d$. Llamamos a “ $>$ ” la *relación de dominación vectorial* entre p y q . Ya que pueden existir parejas de puntos que no se dominan entre sí, la relación de dominación vectorial es un orden parcial en los elementos de P . Decimos que un punto $p \in P$ es un *maximal* de P , si ningún $q \in P$ diferente de p es tal que $q > p$. Para cualquier conjunto de puntos en el plano podemos definir tantas relaciones de dominación como cuadrantes del sistema coordenado, una por cada combinación de las relaciones de comparación “ \leq ” y “ \geq ”.

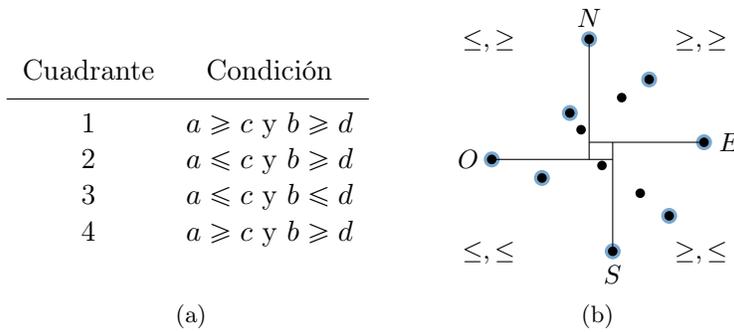


Figura 2.6: (a) Las relaciones de dominación y (b) los maximales de P .

En la Figura 2.6(b) se muestran los cuatro conjuntos de maximales de P resaltados en azul. Los conjuntos están separados por los cuadrantes definidos por los puntos extremales superior (N), inferior (S), derecho (E) e izquierdo (O). A menos que digamos lo contrario, al mencionar el conjunto de maximales de P nos referimos a la unión de los conjuntos de maximales con respecto de los cuatro cuadrantes del sistema coordenado.

Una *cuña ortogonal*⁴ es el complemento de un semiplano ortogonal, es decir, es la intersección de dos semiplanos abiertos: uno con una recta de soporte horizontal y el otro con una recta de soporte vertical. El *ápice* de una cuña y de un semiplano ortogonales es el punto de intersección entre las rectas de soporte de los semiplanos que los forman.

Observación 2.1. *Un punto de P es maximal si, y sólo si, es el ápice de al menos un semiplano ortogonal que contiene a P . Complementariamente, un punto de P es maximal si, y sólo si, es el ápice de una cuña ortogonal que no contiene puntos de P en su interior. Ver Figuras 2.7(a) y 2.7(b).*

⁴En el Capítulo 3 nos referimos también a las cuñas ortogonales como *cuadrantes*.

Un *vértice* de $\mathcal{RH}(P)$ es un punto $p \in P$ que no se encuentra en el interior de $\mathcal{RH}(P \setminus \{p\})$.

Observación 2.2. *Todo maximal de P es un vértice de $\mathcal{RH}(P)$. Ver Figura 2.7(c).*

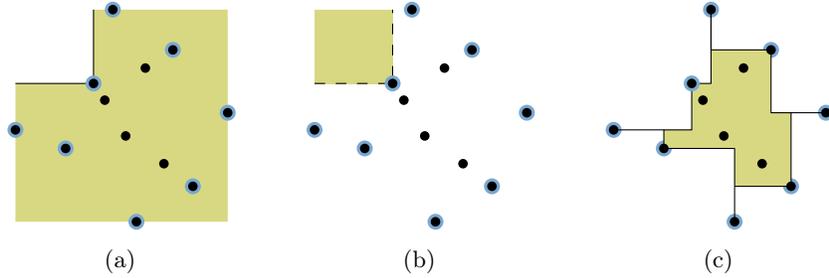


Figura 2.7: Un maximal de P es (a) el ápice de un semiplano ortogonal que contiene a P , (b) el ápice de una cuña ortogonal que no contiene puntos de P , y (c) un vértice de $\mathcal{RH}(P)$.

De las Observaciones 2.1 y 2.2 se deducen las siguientes propiedades.

Proposición 2.1 (Propiedades del cierre convexo rectilíneo).

- I. *Un punto x en el plano se encuentra en el interior de $\mathcal{RH}(P)$ si, y sólo si, todas las cuñas ortogonales que tienen a x como ápice contienen al menos un punto de P en su interior.*
- II. *Sea $\mathcal{V}(P)$ el conjunto de vértices de $\mathcal{RH}(P)$. El cierre convexo rectilíneo de P es igual al cierre convexo rectilíneo de $\mathcal{V}(P)$.*
- III. *Todo vértice de $\mathcal{CH}(P)$ también es un vértice de $\mathcal{RH}(P)$.*
- IV. *El cierre convexo rectilíneo de P es un subconjunto del cierre convexo de P .*
- V. *El cierre convexo rectilíneo de P es la intersección de todas las regiones cerradas orto-convexas y conexas que contienen a P .*
- VI. *Sea \mathcal{W} el conjunto de todas las cuñas ortogonales que no contienen ningún punto de P en su interior. El cierre convexo rectilíneo de P es el conjunto*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{w \in \mathcal{W}} w.$$

Demostración.

- I.II. Consecuencia directa de las Observaciones 2.1 y 2.2.
- III. Todo vértice de $\mathcal{CH}(P)$ es un maximal de P [102, Teorema 4.7]. Por la Observación 2.2, todo maximal de P es un vértice de $\mathcal{RH}(P)$.
- IV. Una generalización de esta propiedad fue demostrada por Fink y Wood [63]. Podemos generalizar también los argumentos de Preparata y Shamos [102, Teorema 4.7] como mostramos a continuación.
Supongamos por contradicción que hay un punto $x \in \mathcal{RH}(P)$ que no pertenece a $\mathcal{CH}(P)$. Si imaginamos que x se encuentra en el origen del sistema coordenado, por el punto I. hay al menos un punto de P en cada cuadrante. Denotemos con P' al conjunto de estos puntos. Claramente, $x \in \mathcal{CH}(P')$ y $\mathcal{CH}(P') \subseteq \mathcal{CH}(P)$. Por lo tanto x se encuentra en el interior de $\mathcal{CH}(P)$, en contradicción con nuestra hipótesis.
- V. Una generalización de esta propiedad fue demostrada por Alegría-Galicia et al. [14]. Utilizamos un argumento diferente a continuación.
Por la Definición 2.1 sabemos que $\mathcal{RH}(P)$ es la intersección de los semiplanos ortogonales que contienen a P . La propiedad es consecuencia de que el conjunto de los semiplanos ortogonales se encuentra contenido en el conjunto de las regiones cerradas orto-convexas y conexas.
- VI. Esta definición de cierre convexo rectilíneo es la versión complementaria de la Definición 2.1. Fue presentada por Bae et al. [22]. \square

La Observación 2.1 y los dos primeros puntos de la Proposición 2.1 son extensiones directas de las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DEL CIERRE CONVEXO.

- I. Un punto $p \in P$ es un vértice de $\mathcal{CH}(P)$ si, y sólo si, existe al menos un semiplano cuya recta de soporte pasa por p y contiene a P .
 - II. Un punto $x \in \mathbb{R}^2$ se encuentra en el interior de $\mathcal{CH}(P)$ si, y sólo si, todos los semiplanos cuya recta de soporte pasa por x contienen al menos un punto de P en su interior.
 - III. Sea $V(P)$ el conjunto de vértices de $\mathcal{CH}(P)$. El cierre convexo de P es igual al cierre convexo de $V(P)$.
-

2.3. Convexidad con orientaciones restringidas

En la convexidad tradicional definimos las regiones convexas como aquellas cuya intersección con cualquier recta es conexa. La convexidad ortogonal restringe esta definición considerando únicamente rectas paralelas a los ejes coordenados. En la *convexidad con orientaciones restringidas* extendemos la convexidad ortogonal al considerar rectas paralelas a un conjunto de rectas con orientaciones arbitrarias.

Un *conjunto de orientaciones* es un conjunto (posiblemente infinito) de rectas que pasan por el origen. Decimos que un conjunto \mathcal{O} de orientaciones es un *\mathcal{O} -conjunto*, y que una recta paralela a un elemento de \mathcal{O} es una *\mathcal{O} -recta*.

Definición 2.2 (Rawlins y Wood [104]). Una región en el plano es *\mathcal{O} -convexa* si, y sólo si, su intersección con cualquier \mathcal{O} -recta es vacía, un punto, o un segmento de recta.

PROPIEDADES DE LAS REGIONES \mathcal{O} -CONVEXAS (Fink y Wood [63]).

- I. La intersección de regiones \mathcal{O} -convexas es una región \mathcal{O} -convexa.
 - II. Dado un \mathcal{O} -conjunto con al menos un elemento, todo conjunto conexo que es \mathcal{O} -convexo es simplemente conexo (no tiene hoyos).
 - III. Una región disconexa es \mathcal{O} -convexa si, y sólo si, todas sus componentes conexas son \mathcal{O} -convexas y ninguna \mathcal{O} -recta corta a dos componentes conexas.
 - IV. Toda región convexa es \mathcal{O} -convexa.
 - V. Sean \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 dos conjuntos de orientaciones tales que $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$. Toda región \mathcal{O}_2 -convexa también es \mathcal{O}_1 -convexa.
-

Las propiedades I. a la IV. son generalizaciones de las propiedades que describimos en la Sección 2.1. Al igual que las regiones convexas y ortoconvexas, para un \mathcal{O} -conjunto dado la familia de todas las regiones \mathcal{O} -convexas es cerrada bajo la intersección de conjuntos. Por otra parte y al igual que la convexidad ortogonal, la \mathcal{O} -convexidad difiere de la convexidad tradicional en que las rotaciones no preservan la \mathcal{O} -convexidad y en que una región \mathcal{O} -convexa puede ser disconexa. Ver Figura 2.8.

La convexidad con orientaciones restringidas es a la vez una generalización de la convexidad ortogonal y una restricción de la convexidad tradicional. Mas

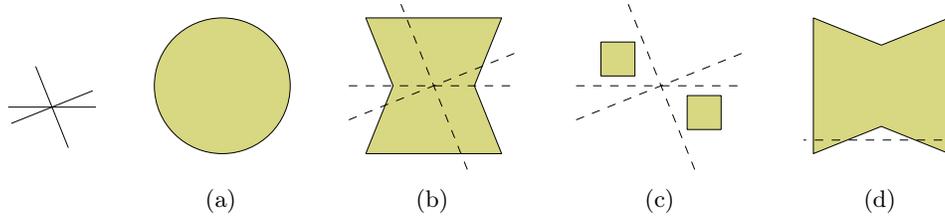


Figura 2.8: En la izquierda se muestra un \mathcal{O} -conjunto con tres rectas. En la derecha se muestran cuatro regiones y algunas \mathcal{O} -rectas indicadas con líneas discontinuas. Las regiones (a)-(c) son \mathcal{O} -convexas, mientras que la región (d) no es \mathcal{O} -convexa. Notemos que la región (a) es convexa, la región (c) es disconexa, y la región (d) es una rotación de la región (b).

aún, establece una conexión entre ambas nociones de convexidad: partiendo de un \mathcal{O} -conjunto con un par de rectas paralelas a los ejes coordenados y ortogonales entre sí (el caso de la convexidad ortogonal), podemos construir una familia infinita de \mathcal{O} -conjuntos agregando una recta a la vez hasta cubrir todas las orientaciones posibles (el caso de la convexidad tradicional). En este continuo cada \mathcal{O} -conjunto define a su vez una familia infinita de regiones \mathcal{O} -convexas que contiene a todas las familias anteriores. Formalizamos estas observaciones a continuación.

La *orientación de una recta* es el ángulo antihorario y menor que π que forma con el eje X . Un conjunto de orientaciones puede ser expresado como un conjunto de ángulos y/o intervalos angulares disjuntos que indican las orientaciones de las rectas que lo forman. En este contexto, las regiones convexas y orto-convexas son respectivamente, $\{[0, \pi)\}$ -convexas y $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ -convexas. Notemos que en el primer caso tenemos un conjunto de orientaciones formado por un número infinito de rectas con orientaciones en $[0, \pi)$, y en el segundo caso el conjunto de orientaciones está formado por dos rectas con orientaciones 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 2.1 (Rawlins [103]). *La familia de todas las regiones \mathcal{O} -convexas en el plano para todo \mathcal{O} -conjunto forma una retícula bajo refinamiento. La familia de regiones $\{[0, \pi)\}$ -convexas es el elemento supremo, y la familia de regiones $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ -convexas es el elemento ínfimo.*

2.4. Cierre convexo con orientaciones restringidas

En esta sección describimos generalizaciones con orientaciones restringidas de la Definición 2.1, y de las propiedades y observaciones que hicimos en

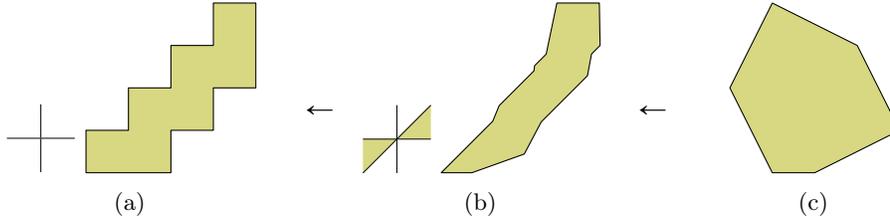


Figura 2.9: Relación entre familias de regiones \mathcal{O} -convexas. Las flechas indican la dirección del refinamiento. (a) Un conjunto $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ -convexo. (b) Un conjunto $\{[0, \frac{\pi}{4}], \frac{\pi}{2}\}$ -convexo. (c) Un conjunto $\{[0, \pi)\}$ -convexo.

la Sección 2.2 sobre el cierre convexo rectilíneo. Asumimos en adelante que todos los \mathcal{O} -conjuntos contienen un número finito de rectas. Referimos al lector interesado al libro de Fink y Wood [63], donde se estudian cierres convexos restringidos a conjuntos infinitos de orientaciones.

Para extender el cierre convexo rectilíneo generalizamos primero la noción de semiplano ortogonal. Sea k el número de rectas de un \mathcal{O} -conjunto, y $\ell_0, \dots, \ell_{k-1}$ las rectas que lo forman etiquetadas de manera que $i < j$ implique que la orientación de ℓ_i es más pequeña que la orientación de ℓ_j . El origen divide cada recta ℓ_i en dos rayos r_i y r_{i+k} , generando un conjunto de $2k$ rayos (consideramos que los subíndices se calculan módulo $2k$). Dados dos índices i y j , denotamos con $\Pi_{i,j}$ a la región cerrada recorrida por r_i mientras rotamos r_i en sentido antihorario hasta que coincida con r_j . Un \mathcal{O} -semiplano es una traslación de una región $\Pi_{i+k,i+1}$.

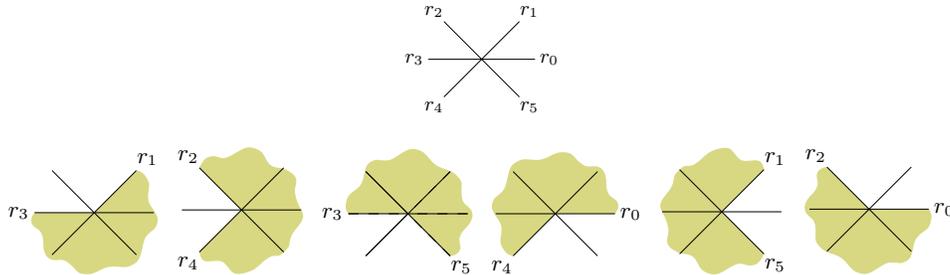


Figura 2.10: Arriba, los rayos de un \mathcal{O} -conjunto con $k = 3$ rectas. Abajo y de izquierda a derecha, los seis \mathcal{O} -semiplanos definidos por las regiones $W_{i+k,i+1}$ para $i = 0, \dots, 2k - 1$.

Definición 2.3. El *cierre \mathcal{O} -convexo* de P , que denotamos con $\mathcal{OH}(P)$, es la intersección de los \mathcal{O} -semiplanos que contienen a P .

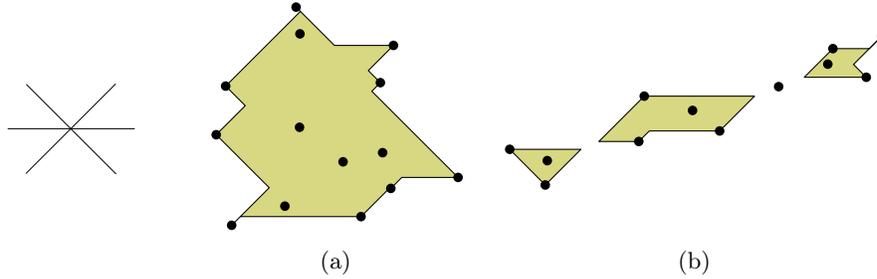


Figura 2.11: En la izquierda se muestra un \mathcal{O} -conjunto con $k = 3$ rectas. (a) Un cierre \mathcal{O} -convexo conexo. (b) Un cierre \mathcal{O} -convexo con cuatro componentes conexas. Una de las componentes es un punto.

En la literatura podemos encontrar dos nociones de \mathcal{O} -semiplano que son diferentes a la que utilizamos en la Definición 2.3. La primera fue propuesta por Rawlins [103] quien definió un \mathcal{O} -semiplano *escalera* (\mathcal{O} -stairhalfplane) como una de las regiones en las que una curva infinita y \mathcal{O} -convexa divide al plano. La segunda se debe a Fink y Wood [63], quienes definen un \mathcal{O} -semiplano como una región cerrada cuya intersección con una \mathcal{O} -recta es vacía, un punto, o un segmento de recta. La familia de todos los \mathcal{O} -semiplanos es un subconjunto propio de la familia de todos los \mathcal{O} -semiplanos escalera, quien a su vez es un subconjunto propio de la familia de todos los \mathcal{O} -semiplanos de Fink y Wood. Esta última afirmación fue demostrada en [63, Lema 5.8]. Ver Figura 2.12.

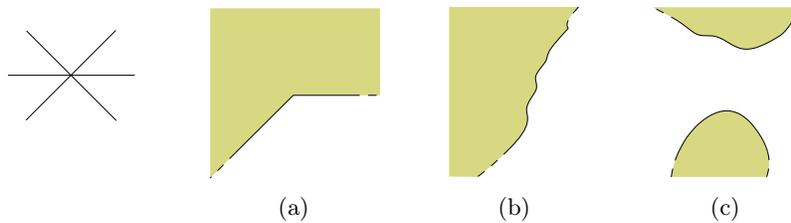


Figura 2.12: En la izquierda, \mathcal{O} -conjunto con $k = 3$ rectas. (a) Un \mathcal{O} -semiplano. (b) Un \mathcal{O} -semiplano escalera. (c) Un \mathcal{O} -semiplano de Fink y Wood. Por definición, estos semiplanos pueden ser disconexos.

Una *poligonal \mathcal{O} -restringida* es una secuencia de segmentos de recta que son paralelos a alguna \mathcal{O} -recta y que no se cortan salvo en sus extremos. Un *polígono \mathcal{O} -restringido* es un polígono que tiene como frontera una poligonal \mathcal{O} -restringida cerrada. El cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto de puntos puede ser disconexo. Cada componente conexa es un polígono \mathcal{O} -restringido y \mathcal{O} -

convexo con cero o más aristas “degeneradas”, que son segmentos de \mathcal{O} -rectas que conectan al polígono con puntos extremos. Al igual que el cierre convexo rectilíneo, estas propiedades son consecuencia de tratar con conjuntos finitos de puntos. Ver Figura 2.11.

Describimos a continuación generalizaciones de las propiedades del cierre convexo rectilíneo que mencionamos en la Proposición 2.1. Agregamos a estas propiedades la siguiente observación: para cualquier conjunto de puntos siempre existe un \mathcal{O} -conjunto con un número finito de rectas tal que el cierre \mathcal{O} -convexo es igual al cierre convexo tradicional.

PROPIEDADES DEL CIERRE \mathcal{O} -CONVEXO.

- I. Una \mathcal{O} -cuña es el complemento de un \mathcal{O} -semiplano. Un punto $x \in \mathbb{R}^2$ se encuentra en el interior de $\mathcal{OH}(P)$ si, y sólo si, todas las \mathcal{O} -cuñas que tienen a x como ápice contienen al menos un punto de P en su interior.
- II. Sea $\mathcal{V}(P)$ el conjunto de vértices de $\mathcal{OH}(P)$. El cierre \mathcal{O} -convexo de P es igual al cierre \mathcal{O} -convexo de $\mathcal{V}(P)$.
- III. Todo vértice de $\mathcal{CH}(P)$ también es un vértice de $\mathcal{OH}(P)$.
- IV. El cierre \mathcal{O} -convexo de P es un subconjunto de $\mathcal{CH}(P)$.
- V. El cierre \mathcal{O} -convexo de P es la intersección de las regiones cerradas \mathcal{O} -convexas y conexas que contienen a P .
- VI. Sea \mathcal{W} el conjunto de todas las \mathcal{O} -cuñas que no contienen ningún punto de P en su interior. El cierre \mathcal{O} -convexo de P es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{w \in \mathcal{W}} w.$$

- VII. Si las líneas de soporte de las aristas de $\mathcal{CH}(P)$ son \mathcal{O} -rectas, entonces $\mathcal{OH}(P) = \mathcal{CH}(P)$ [14]. Ver Figura 2.13.
-

2.5. Problemas computacionales

Finalizamos este capítulo describiendo algunos resultados algorítmicos conocidos relacionados con los cierres convexos tradicional, rectilíneo, y \mathcal{O} -

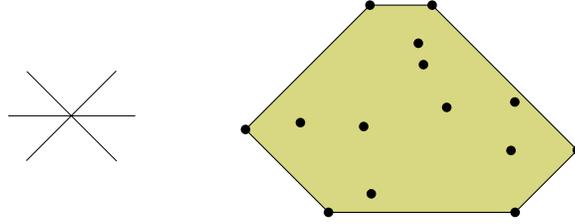


Figura 2.13: Siempre existe un \mathcal{O} -conjunto tal que $\mathcal{OH}(P) = \mathcal{CH}(P)$.

convexo de un conjunto de puntos.

Dado un conjunto P de n puntos en el plano, el problema de calcular el cierre convexo de P tiene una cota inferior bien conocida, que es válida en cualquier modelo de cómputo que permite multiplicaciones y donde ordenar n números reales requiere tiempo $\Omega(n \log n)$.

Lema 2.1. *Calcular el cierre convexo de un conjunto de n puntos en el plano requiere tiempo $\Omega(n \log n)$.*

Sin asumir nada sobre los puntos de P (como alguna distribución en particular o que sus coordenadas son enteras), los algoritmos conocidos más eficientes para calcular $\mathcal{CH}(P)$ consumen tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$. En particular, con el algoritmo de Graham [71] podemos calcular $\mathcal{CH}(P)$ utilizando únicamente comparaciones y operaciones aritméticas. Podemos reducir ligeramente la complejidad en tiempo utilizando algoritmos sensibles a la salida [42, 79], los cuales calculan $\mathcal{CH}(P)$ en tiempo $\Theta(n \log h)$ y espacio $O(n)$, donde $h \leq n$ es el número de vértices de $\mathcal{CH}(P)$. Esta complejidad es válida en el modelo de cómputo de árbol algebraico de decisión. En el peor de los casos (cuando los puntos de P se encuentran en posición convexa) la complejidad en tiempo es $O(n \log n)$.

Sorpresivamente, a pesar de que el cierre convexo rectilíneo es desconexo y cada una de sus componentes conexas tiene vértices que no son puntos de P , para calcular el cierre convexo rectilíneo de P requerimos la misma complejidad que para calcular el cierre convexo tradicional.

Lema 2.2 (Ottmann, Soisalon-Soininen y Wood [99]). *Calcular el cierre convexo rectilíneo de un conjunto de n puntos en el plano requiere tiempo $\Omega(n \log n)$.*

Por la Proposición 2.1, un vértice del cierre convexo también es un vértice del cierre convexo rectilíneo. Esta propiedad nos permite reducir en tiempo $O(n)$ el problema de calcular $\mathcal{RH}(P)$ al problema de calcular $\mathcal{CH}(P)$. El

Lema 2.2 se obtiene de combinar esta observación con el Lema 2.1. Por otra parte, el cierre convexo rectilíneo de P puede calcularse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Los algoritmos conocidos para calcular $\mathcal{RH}(P)$ utilizan únicamente comparaciones y operaciones aritméticas.

Teorema 2.2 (Ottmann, Soisalon-Soininen y Wood [99]). *Dado un conjunto P de n puntos en el plano, el cierre convexo rectilíneo de P puede calcularse en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

Al igual que en el caso convexo, podemos reducir la complejidad en tiempo si consideramos un algoritmo sensible a la salida. Este algoritmo no ha sido presentado explícitamente en la literatura, pero puede obtenerse extendiendo resultados existentes como describimos a continuación.

Los algoritmos conocidos para calcular $\mathcal{RH}(P)$ obtienen primero los maximales de P , para después construir la frontera de sus componentes conexas. Si $h \leq n$ es el número de maximales de P , en este proceso los algoritmos consumen tiempo $O(h)$. Utilizando el algoritmo sensible a la salida de Kirkpatrick y Seidel [80], podemos calcular los maximales de P en tiempo $\Theta(n \log h)$ y espacio $O(n)$. La complejidad es válida en el modelo de cómputo de árbol algebraico de decisión. En el peor de los casos (cuando todos los puntos de P son maximales), la complejidad en tiempo es $O(n \log n)$. Como consecuencia de este resultado (ver [80, Teoremas 2.1 y 4.1] para más detalles) obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Dado un conjunto P de n puntos en el plano, el cierre convexo rectilíneo de P puede calcularse en tiempo $\Theta(n \log h)$ y espacio $O(n)$, donde $h \leq n$ es el número de vértices de $\mathcal{RH}(P)$.*

La versión dinámica del problema de calcular $\mathcal{CH}(P)$ consiste en diseñar una estructura de datos para responder preguntas sobre $\mathcal{CH}(P)$ y mantener el cierre convexo mientras actualizamos P agregando y eliminando puntos. Dado un punto $x \in \mathbb{R}^2$, la estructura debe permitirnos determinar si x se encuentra en el interior de $\mathcal{CH}(P)$ y, en caso contrario, calcular las tangentes de $\mathcal{CH}(P)$ que pasan por x y encontrar los vértices de $\mathcal{CH}(P \cup \{x\})$ adyacentes a x . Por otra parte, dada una recta ℓ la estructura debe permitirnos encontrar, si existen, las aristas de $\mathcal{CH}(P)$ cortadas por ℓ . Ejemplos de estas preguntas se muestran en la Figura 2.15.

Es un problema abierto determinar si existe una estructura de datos que consuma tiempo $O(\log n)$ por cada actualización y cada pregunta. La estructura más eficiente se debe a Overmars y van Leeuwen [100], y resuelve el problema en tiempo $O(\log^2 n)$ por actualización y tiempo $O(\log n)$ por

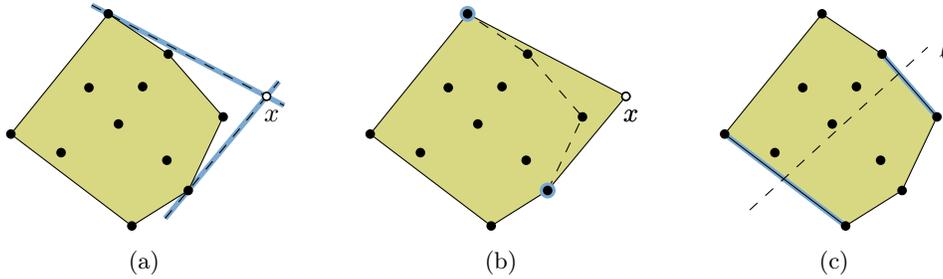


Figura 2.14: El problema dinámico del cierre convexo de un conjunto de puntos. (a) Las tangentes de $\mathcal{CH}(P)$ que pasan por x , (b) Los vértices de $\mathcal{CH}(P \cup \{x\})$ adyacentes a x y (c) Las aristas de $\mathcal{CH}(P)$ cortadas por ℓ .

pregunta. El mejor resultado parcial se debe a Brodal y Jacob [38]. Su estructura de datos mantiene el cierre convexo de P en tiempo amortizado de $O(\log n)$ por actualización y por pregunta. Estas complejidades son válidas en el modelo de cómputo de árbol algebraico de decisión.

En el caso orto-convexo podemos resolver una versión “semi-dinámica” con una estructura de datos que consume tiempo logarítmico por actualización, y sólo permite responder algunas preguntas. Dado un punto $x \in \mathbb{R}^2$, la estructura permite determinar si x se encuentra en el interior de $\mathcal{RH}(P)$ y, en caso contrario, permite obtener los vértices de $\mathcal{RH}(P \cup \{x\})$ adyacentes a x . Al igual que el algoritmo sensible a la salida, esta estructura no ha sido presentada explícitamente en la literatura pero puede obtenerse extendiendo resultados existentes como describimos a continuación.

Consideremos el conjunto de maximales de P calculados respecto del primer cuadrante del sistema coordenado. Se sabe que los maximales forman una estructura conocida como *escalera*: al recorrer el conjunto de maximales en orden creciente de sus abscisas, las ordenadas de los maximales decrecen monótonamente [102]. Los algoritmos conocidos para calcular $\mathcal{RH}(P)$ aprovechan esta observación y almacenan una escalera por cada cuadrante en un árbol balanceado de búsqueda. Al recorrer los árboles consecutivamente obtenemos los maximales de P ordenados por aparición al recorrer la frontera de $\mathcal{RH}(P)$. De esta secuencia podemos construir la frontera de las componentes conexas de $\mathcal{RH}(P)$ en tiempo lineal. Ver Figura 2.15.

Utilizando la estructura de datos de Kapoor [78] podemos mantener una escalera mientras verificamos si un punto $x \in \mathbb{R}^2$ es maximal, y actualizamos P agregando y eliminando puntos. Al determinar si un punto es maximal obtenemos inmediatamente sus puntos adyacentes en las escaleras. Ya que un punto puede pertenecer a lo más a dos escaleras simultáneamente, tenemos

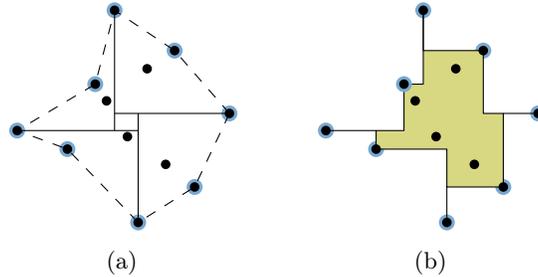


Figura 2.15: Las escaleras del cierre convexo rectilíneo. (a) Cuando recorremos los maximales en orden creciente de sus abscisas, las ordenadas decrecen monótonamente. (b) Las escaleras forman los vértices de $\mathcal{RH}(P)$.

que reportar a lo más cuatro vértices adyacentes. La estructura consume tiempo $O(\log n)$ por cada actualización y cada pregunta. Para reportar los maximales (y poder reconstruir $\mathcal{RH}(P)$) consume tiempo $O(n \log n + h)$, donde $h \leq n$ es el número de maximales de P . Invitamos al lector interesado en conocer más detalles a revisar el libro de Preparata y Shamos [102, Sección 4.1.3] y el artículo de Kapoor [78, Teoremas 2 y 3].

Corolario 2.2. *Existe una estructura de datos para resolver el problema dinámico del cálculo del cierre convexo rectilíneo de P que consume espacio $O(n)$ y tiempo $O(\log n)$ por cada actualización y cada pregunta. Esta estructura permite construir el cierre convexo rectilíneo de P en tiempo $O(n \log n + h)$, donde $h \leq n$ es el número de vértices de $\mathcal{RH}(P)$.*

El problema de calcular el cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto finito de puntos en el plano no ha sido estudiado tan extensamente como sus contrapartes tradicional y orto-convexa. En la literatura sólo se ha estudiado el problema básico de calcular el cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto de n puntos en el plano. Por el Lema 2.2 y el hecho de que la convexidad ortogonal es un caso particular de la \mathcal{O} -convexidad, este problema requiere tiempo $\Omega(n \log n)$. Los algoritmos conocidos que calculan el cierre \mathcal{O} -convexo no logran igualar esta cota inferior.

Teorema 2.3 (Fink y Wood [63]). *Dado un conjunto P de n puntos en el plano y un \mathcal{O} -conjunto formado por k rectas, el cierre \mathcal{O} -convexo de P puede calcularse en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$.*

En el Capítulo 3 describimos un algoritmo que calcula $\mathcal{OH}(P)$ en tiempo $O(n \log n)$. Este algoritmo es óptimo en tiempo. Hasta donde sabemos no existen resultados sobre algoritmos sensibles a la salida, o que resuelvan el

problema dinámico de calcular el cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto finito de puntos en el plano.

2.6. Comentarios finales

En este capítulo describimos los aspectos de la convexidad tradicional que fueron extendidos hacia la convexidad ortogonal y posteriormente, hacia la convexidad con orientaciones restringidas. Describimos también algunos resultados algorítmicos conocidos relacionados con los cierres convexo, ortoconvexo, y \mathcal{O} -convexo de un conjunto finito de puntos en el plano. En la Figura 2.16 mostramos un resumen de estos resultados.

Cierre	Estándar		Sensible a la salida	
	Cota	Algoritmo	Cota	Algoritmo
Tradicional	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$\Omega(n \log h)$	$O(n \log h)$
Convexo rectilíneo	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$\Omega(n \log h)$	$O(n \log h)$
\mathcal{O} -convexo	$\Omega(n \log n)$	$O(kn \log n)$	-	-

(a) Problemas estáticos (donde el conjunto de puntos se mantiene fijo).

Cierre	Estándar		Sensible a la salida	
	Cota	Algoritmo	Cota	Algoritmo
Tradicional	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$\Omega(n \log h)$	$O(n \log h)$
Convexo rectilíneo	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$\Omega(n \log h)$	$O(n \log h)$
\mathcal{O} -convexo	$\Omega(n \log n)$	$O(kn \log n)$	-	-

(b) Problemas dinámicos (donde se realizan actualizaciones en el conjunto de puntos). La columna “Construcción” indica la complejidad en tiempo que toma calcular el cierre convexo a partir de la estructura de datos particular.

Figura 2.16: Resultados conocidos sobre el cálculo del cierre convexo.

El objetivo de este capítulo es servir como introducción a los problemas computacionales relacionados con el cierre \mathcal{O} -convexo de conjuntos finitos de puntos en el plano que estudiaremos en los Capítulos 3 y 4. Además de mejorar el tiempo del algoritmo de Fink y Wood [63] para calcular el cierre \mathcal{O} -convexo, estudiaremos problemas de optimización que resultan de mantener el cierre \mathcal{O} -convexo mientras cambiamos las orientaciones de las

rectas del conjunto de orientaciones. Llamamos a este tipo de problemas los problemas “no orientados” del cálculo del cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto finito de puntos. En la Tabla 2.1 mostramos un resumen de estos resultados.

Cierre	Estándar		No orientados	
	Cota	Algoritmo	Cota	Algoritmo
Convexo rectilíneo	-	-	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$
\mathcal{O} -convexo	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$\Omega(n \log n)$	$O(kn \log n)$
\mathcal{O}_β -convexo	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$

Tabla 2.1: Nuevos resultados sobre el cálculo de cierres convexos. El parámetro k representa el número de rectas en el conjunto \mathcal{O} (asumimos que $k \leq n$). El conjunto de orientaciones \mathcal{O}_β contiene dos rectas que forman un ángulo β .

Capítulo 3

Cierre \mathcal{O} -convexo no orientado

Sean P un conjunto de n puntos en el plano y \mathcal{O} un conjunto de $k \leq n$ rectas que pasan por el origen del sistema coordenado. Las rectas forman un conjunto de $2k$ rayos que parten del origen. En orden circular alrededor del origen, cada par de rayos consecutivos acotan un sector angular. Asumimos que cada uno de los k sectores tienen apertura mayor o igual que $\frac{\pi}{2}$.

Denotemos con \mathcal{O}_θ al conjunto que resulta de rotar \mathcal{O} por un ángulo θ . En este capítulo describimos un algoritmo que en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ mantiene el cierre \mathcal{O}_θ -convexo de P mientras incrementamos θ desde 0 hasta 2π . Con base en este algoritmo, calculamos en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ el valor de θ en el cual el cierre \mathcal{O}_θ -convexo de P tiene área mínima. Cuando el valor de k es constante las complejidades en tiempo y espacio son óptimas. Con este resultado mejoramos el algoritmo presentado por Bae et al. [22] que resuelve en tiempo $O(n^2)$ el caso particular en el que \mathcal{O} está formado por $k = 2$ rectas ortogonales.

Finalmente, para cualquier valor fijo de θ nuestro algoritmo calcula el cierre \mathcal{O} -convexo de P en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$, mejorando el algoritmo de tiempo $O(kn \log n)$ presentado por Rawlins [103].

3.1. Introducción

Sea P un conjunto de n puntos en el plano en posición general (no hay tres puntos colineales en P). Un *cuadrante* es la intersección de dos semiplanos abiertos: uno con una recta de soporte horizontal y el otro con una recta de soporte vertical. Decimos que un cuadrante es *P -libre* si no contiene puntos de P en su interior. Sea \mathcal{Q} el conjunto de todos los cuadrantes P -libres. El *Cierre Convexo Rectilíneo* de P es el conjunto:

$$\mathcal{RH}(P) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} q.$$

Mostramos ejemplos de cierres convexos rectilíneos en la Figura 3.1.

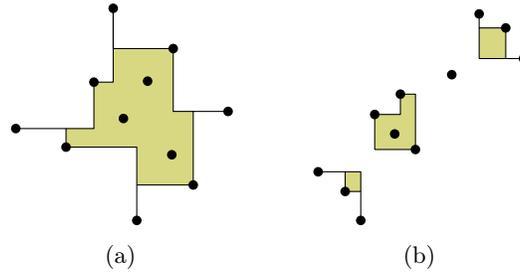


Figura 3.1: El cierre convexo rectilíneo de un conjunto de puntos. (a) Un cierre convexo rectilíneo conexo. (b) Un cierre convexo rectilíneo con cuatro componentes conexas.

El cierre convexo rectilíneo puede generalizarse al considerar, en lugar de sólo rectas verticales y horizontales, rectas paralelas a una de un conjunto finito de rectas. Sea \mathcal{O} un conjunto de $k \leq n$ rectas que pasan por el origen. La orientación de una recta es el ángulo antihorario y menor que π que forma con el eje X . Etiquetemos las rectas en \mathcal{O} con $\ell_0, \dots, \ell_{k-1}$ de forma que $i < j$ implique que la orientación de ℓ_i es menor que la orientación de ℓ_j . El origen divide a cada recta ℓ_i en dos rayos r_i y r_{i+k} , generando un conjunto de $2k$ rayos. Dados dos índices i y j , definimos la *cuña* $W_{i,j}$ como la región recorrida por r_i mientras rotamos r_i en sentido antihorario alrededor del origen hasta que coincida con r_j . Al trasladar $W_{i,j}$ obtenemos una región que llamamos W_i^j -*cuña*. Denotemos con \mathcal{W}^i la unión de todas las W_{i+1}^{i+k} -cuñas abiertas que son P -libres. El *Cierre \mathcal{O} -convexo* de P es el conjunto:

$$\mathcal{OH}(P) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=0}^{2k-1} \mathcal{W}^i.$$

Sea α_i el ángulo menor a π definido por dos rayos r_i y r_{i+1} . A lo largo de este capítulo asumimos que todo ángulo α_i es mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$. Esto implica que ninguna cuña $W_{i+1,i+k}$ tiene un ángulo de apertura menor que $\frac{\pi}{2}$ o, en otras palabras, que ninguna W_{i+1}^{i+k} -cuña es más pequeña que un cuadrante. Mostramos ejemplos del conjunto \mathcal{O} de rectas, las cuñas $W_{i,j}$, y el cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto de puntos en la Figura 3.2.

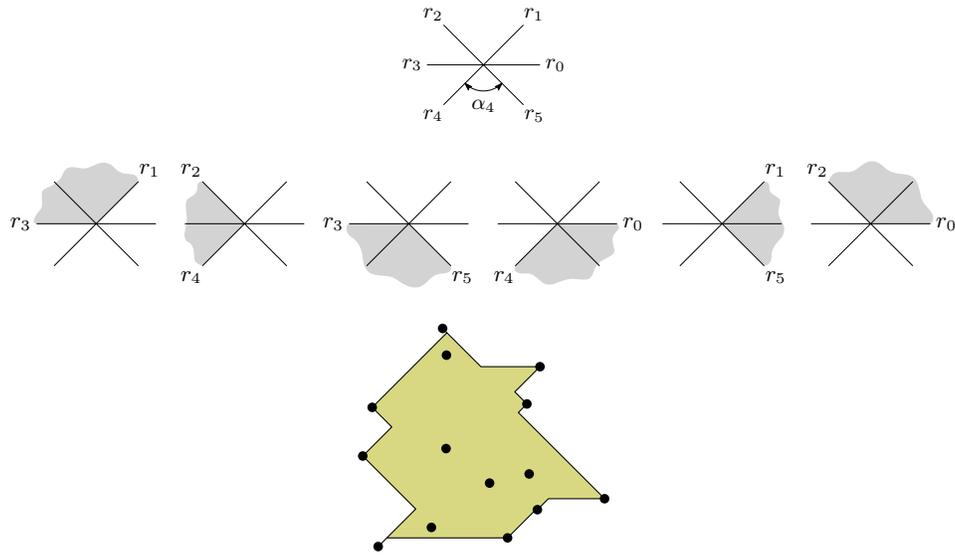


Figura 3.2: Arriba, los rayos de un conjunto \mathcal{O} con $k = 3$ rectas. En medio y de izquierda a derecha, las cuñas $W_{i+1,i+k}$ para $i = 0, \dots, 2k - 1$. Abajo, el cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto de puntos.

Sea \mathcal{O}_θ el conjunto de rectas obtenidas al rotar los elementos de \mathcal{O} por un ángulo θ al rededor del origen en sentido antihorario. El cierre \mathcal{O}_θ -convexo de P es diferente de $\mathcal{O}\mathcal{H}(P)$: Mientras rotamos \mathcal{O} las cuñas $W_{i,j}$ rotan también y los conjuntos \mathcal{W}^i cambian respectivamente. Denotamos el conjunto resultante de esta rotación con \mathcal{W}_θ^i . El cierre \mathcal{O}_θ -convexo se define como:

$$\mathcal{O}\mathcal{H}_\theta(P) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=0}^{2k-1} \mathcal{W}_\theta^i. \quad (3.1)$$

Mostramos un ejemplo del cierre \mathcal{O}_θ -convexo en la Figura 3.3.

3.1.1. Resultados

En este capítulo presentamos los siguientes resultados:

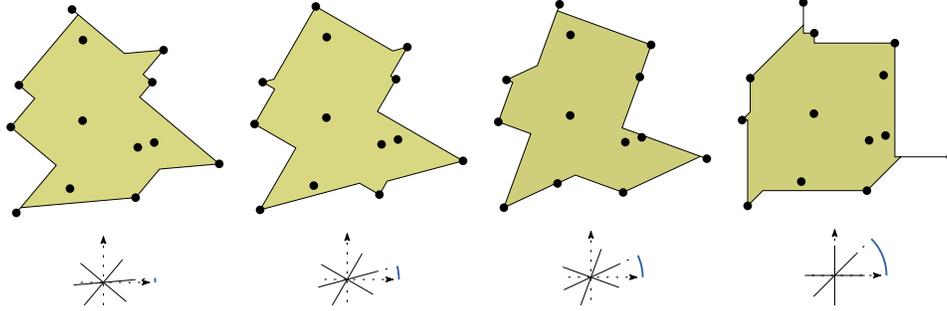


Figura 3.3: Los cambios en el cierre \mathcal{O}_θ -convexo al incrementar θ . En cada figura se muestran los ejes coordenados y la orientación de \mathcal{O}_θ .

1. Un algoritmo para calcular $\mathcal{OH}(P)$ en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Con este resultado mejoramos el algoritmo de tiempo $O(kn \log n)$ presentado por Rawlins [103].
2. Un algoritmo para calcular y mantener $\mathcal{OH}_\theta(P)$ mientras incrementamos θ desde 0 hasta 2π en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$.
3. Con base en el resultado anterior, describimos un algoritmo para calcular en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ el valor de θ en el cual $\mathcal{OH}_\theta(P)$ tiene área mínima. Este algoritmo puede extenderse fácilmente para encontrar el valor de θ que optimiza otras propiedades de $\mathcal{OH}_\theta(P)$, como el número de componentes conexas o el número de vértices.
4. Para el caso particular en el que \mathcal{O} está formado por dos rectas ortogonales, los problemas anteriores se traducen en calcular $\mathcal{RH}(P)$ en una orientación dada de los ejes coordenados y calcular la orientación de los ejes coordenados en la cual $\mathcal{RH}(P)$ tiene área mínima. Nuestro algoritmo resuelve estos problemas en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Con este resultado mejoramos el algoritmo de tiempo $O(n^2)$ presentado por Bae et al. [22].

3.1.2. Notación, convenciones y definiciones auxiliares

Dada una región R en el plano, denotamos con ∂R a la frontera de R . Denotamos con $\mathcal{CH}(P)$ al cierre convexo de P , con $V = \{p_1, \dots, p_h\}$ al conjunto de vértices de $\partial \mathcal{CH}(P)$ etiquetados en orden circular antihorario iniciando en un vértice arbitrario, y con $E = \{e_1, \dots, e_h\}$ al conjunto de aristas de $\partial \mathcal{CH}(P)$, donde $e_i = \overline{p_i p_{i+1}}$ y $e_h = \overline{p_h p_1}$.

Por simplicidad asumimos que las rectas de \mathcal{O} se encuentran ordenadas ascendentemente por orientación. Esta suposición no afecta la complejidad en tiempo o espacio de los algoritmos que describimos en este capítulo, ya que para ordenar las rectas necesitamos tiempo $O(k \log k)$ y espacio $O(k)$, $k \leq n$, en comparación con el tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$ que consumen nuestros algoritmos. Definimos el *sector* (r_i, r_{i+1}) de \mathcal{O} como la región angular convexa acotada por los rayos r_i y r_{i+1} . Finalmente, al referirnos a los rayos de \mathcal{O} , las cuñas $W_{i,j}$, las W_i^j -cuñas, y los conjuntos \mathcal{W}^i , asumimos que los índices están calculados módulo $2k$.

3.2. Cálculo del cierre \mathcal{O} -convexo

En esta sección describimos un algoritmo para calcular el cierre \mathcal{O} -convexo de un conjunto de n puntos en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

3.2.1. Cálculo de vértices

Para cada rayo r_i , consideremos la recta dirigida paralela a r_i que soporta $\mathcal{CH}(P)$ y deja P de su lado derecho. Sin pérdida de generalidad, supongamos que ninguna de estas rectas contiene una arista de $\delta\mathcal{CH}(P)$, por lo que toca $\mathcal{CH}(P)$ en un sólo punto. Denotemos con $p_{s_0}, \dots, p_{s_{2k-1}}$ a los puntos de contacto. En esta secuencia de puntos se encuentran los vértices de $\partial\mathcal{OH}(P)$ en orden de aparición al recorrer $\partial\mathcal{OH}(P)$ en sentido antihorario. Notemos que no es necesariamente cierto que p_{s_i} es diferente de $p_{s_{i+1}}$, por lo que el conjunto de puntos $p_{s_0}, \dots, p_{s_{2k-1}}$ no necesariamente es igual al conjunto de vértices de $\partial\mathcal{OH}(P)$. Ver la Figura 3.4.

Por la Ecuación (3.1) necesitamos calcular la frontera de \mathcal{W}^i , lo que requiere saber cuándo una cuña de \mathcal{W}^i interseca el interior de $\mathcal{CH}(P)$. Es fácil ver que esto sucede si, y sólo si, p_{s_i} es diferente de $p_{s_{i+1}}$. Por otra parte, cualquier cuña en \mathcal{W}^i que interseca el interior de $\mathcal{CH}(P)$ necesariamente lo hace cortando una arista de $\partial\mathcal{CH}(P)$. Los extremos p_j, p_{j+1} de esta arista cumplen que $s_i \leq j, j+1 < s_{i+1}$. Denotemos con $[s_i, s_{i+1}]$ al intervalo cerrado de índices de los vértices de $\partial\mathcal{CH}(P)$ que se encuentran entre s_i y s_{i+1} . Llamamos a este intervalo el *intervalo de apuñalamiento* de \mathcal{W}^i . En la Figura 3.4 se puede verificar la siguiente observación.

Observación 3.1. *Si s pertenece al intervalo de apuñalamiento $[s_i, s_{i+1}]$ de \mathcal{W}^i , entonces la orientación de la arista e_s de $\partial\mathcal{CH}(P)$ pertenece al sector (r_i, r_{i+1}) de \mathcal{O} .*

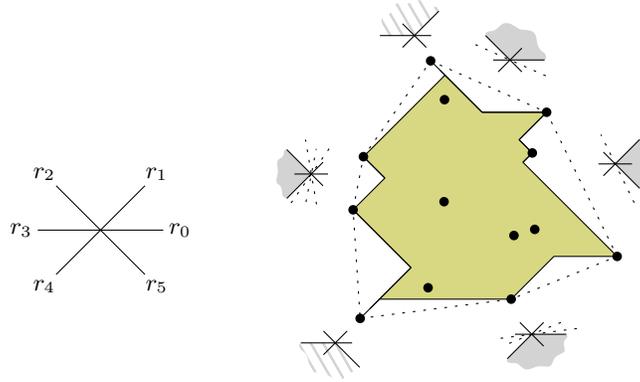


Figura 3.4: El cierre \mathcal{O} -convexo de P y las aristas de $\partial\mathcal{CH}(P)$ que son intersecadas por las cuñas en \mathcal{W}^i . Notemos que las cuñas de \mathcal{W}^0 y \mathcal{W}^2 , en líneas en lugar de con relleno sólido, no intersecan el interior de $\mathcal{CH}(P)$. Si suponemos que p_1 es el vértice de $\partial\mathcal{CH}(P)$ con ordenada más grande, en sentido antihorario los intervalos de apuñalamiento son $[1, 4]$, $[4, 6]$, $[6, 7]$, y $[7, 1]$.

Es fácil ver que podemos calcular los puntos $p_{s_0}, \dots, p_{s_{2k-1}}$ en tiempo $O(n \log n)$. Esto nos da los extremos del intervalo de apuñalamiento $[s_i, s_{i+1}]$. Sólo los intervalos que contienen más de un punto son necesarios. Calculamos a continuación la poligonal alternante que los conecta y que llamamos *escalera*.

3.2.2. Calculando las escaleras entre vértices

La escalera que conecta p_{s_i} con $p_{s_{i+1}}$ está contenida en la frontera de \mathcal{W}^i . El ángulo de apertura de las cuñas en \mathcal{W}^i es igual a $\Theta_i = \pi - \alpha_i \geq \frac{\pi}{2}$. La escalera es entonces una poligonal alternante con ángulo interior Θ_i . Al recorrer la escalera en sentido antihorario, la poligonal gira hacia la derecha en los ápices de las cuñas en \mathcal{W}^i que llamamos *extremales*, y gira a la izquierda en puntos de P que llamamos *puntos de soporte*. Ver la Figura 3.5.

Decimos que un par de cuñas extremales son *opuestas* si una de ellas pertenece a \mathcal{W}^i y la otra a \mathcal{W}^{i+k} . Como se puede observar en la Figura 3.5(b) si la intersección entre dos cuñas opuestas no es vacía, entonces $\mathcal{OH}(P)$ es disconexo. Cuando esto sucede decimos que las cuñas extremales se *traslapan*, y que la región de intersección es su *traslape*.

Lema 3.1. *Sólo cuñas opuestas se traslapan.*

Demostración. En todo par de \mathcal{W}_{i+1}^{i+k} -cuñas no opuestas, un par de los rayos que las acotan son paralelos entre sí. Ya que toda cuña extremal es soportada por al menos dos puntos en P , en un par de cuñas no opuestas que se cortan

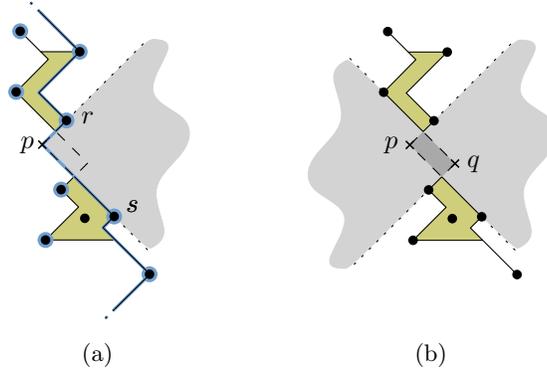


Figura 3.5: Cuñas extremales opuestas. (a) Una cuña extremal de \mathcal{W}^i con ápice p y puntos de soporte r y s . Los vértices de $\mathcal{OH}(P)$ y la frontera de \mathcal{W}^i están resaltados con azul. (b) Los puntos p y q son ápices de un par de cuñas extremales opuestas. El traslape de las cuñas está resaltado con gris obscuro.

hay una que inevitablemente no es P -libre, en contradicción con la definición de cierre \mathcal{O} -convexo. Ver de nuevo la Figura 3.2. \square

Para calcular la escalera, comenzamos calculando los puntos de soporte utilizando el algoritmo de Avis et al. [21]. Dado un ángulo $\Theta \geq \frac{\pi}{2}$, este algoritmo encuentra en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ las *cuñas maximales de Θ -escape*, que son cuñas que tienen un punto de P como ápice, apertura de al menos Θ , y son P -libres. En otras palabras, una cuña maximal de Θ -escape permite que un punto p “escape” en una orientación dentro de una región angular de tamaño al menos Θ sin chocar con otro punto de P . Los puntos de P que son ápices de cuñas maximales de Θ -escape son llamados *Θ -maximales*. Para cada cuña maximal de Θ -escape, el algoritmo proporciona los rayos que la acotan. Cuando $\Theta \geq \frac{\pi}{2}$ un punto de P es el ápice de a lo más tres cuñas maximales de Θ -escape.

Aplicamos el algoritmo de Avis et al. [21] al conjunto P con el ángulo $\Theta = \min\{\Theta_i : i = 1, \dots, 2k\} \geq \frac{\pi}{2}$. Esto nos da a lo más tres *intervalos de Θ -escape* para todo punto $p \in P$ y por lo tanto, un número lineal de intervalos angulares en total. Almacenamos estos intervalos en una lista circular en la que incluimos también las cuñas $W_{i+1, i+k}$. Ver la Figura 3.6.

Cuando una W_{i+1}^{i+k} -cuña está contenida en una cuña maximal de Θ -escape de un punto p , sabemos que p no sólo es Θ -maximal, sino que además es Θ_i -maximal y es un punto de soporte de una cuña extremal en \mathcal{W}^i . En la Figura 3.6(b) el intervalo de escape negro está contenido en la cuña $W_{2,4}$, ya que en la Figura 3.6(a) ninguna cuña en \mathcal{W}^2 puede escapar desde p .

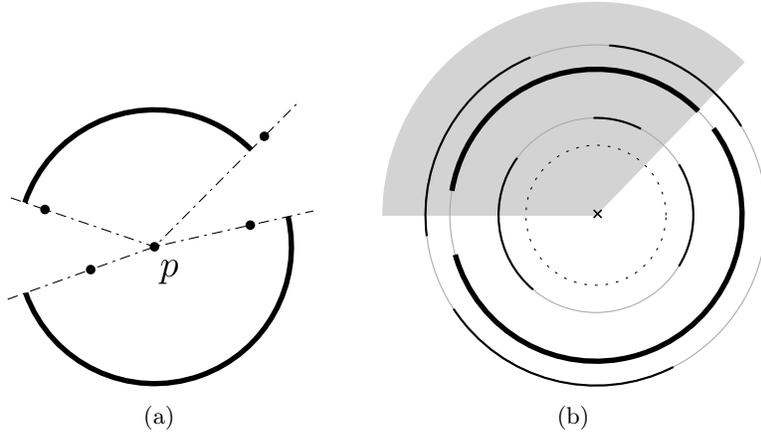


Figura 3.6: Intervalos de escape. (a) Los intervalos de $\frac{\pi}{2}$ -escape de un punto p . (b) Los intervalos de $\frac{\pi}{2}$ -escape en una lista circular. Los círculos claros corresponden a los puntos p_1, \dots, p_n . Sobre ellos se encuentran los intervalos de $\frac{\pi}{2}$ -escape. Los intervalos del punto p están resaltados. La cuña $W_{2,4}$ del conjunto \mathcal{O} de la Figura 3.2 se muestra en gris.

En tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ podemos ordenar los extremos de los intervalos de Θ -escape junto con las orientaciones de los rayos que acotan las cuñas $W_{i+1, i+k}$. Realizamos después un barrido circular de la lista, deteniéndonos en los rayos que acotan las cuñas $W_{i+1, i+k}$ para verificar si el punto p correspondiente soporta una escalera en la frontera de \mathcal{W}^i . Al finalizar el barrido tenemos el conjunto de vértices de $\mathcal{OH}(P)$. Para obtener la frontera de $\mathcal{OH}(P)$ utilizamos técnicas estándar [102] para calcular las escaleras en la frontera de \mathcal{W}^i a partir de sus puntos de soporte y posteriormente conectarlos en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

Luego de realizar los pasos anteriores hemos calculado $\mathcal{OH}(P)$ en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$. La complejidad en tiempo del algoritmo es óptima, ya que partiendo de $\mathcal{OH}(P)$ podemos calcular en tiempo lineal $\mathcal{CH}(\mathcal{OH}(P)) = \mathcal{CH}(P)$. Se sabe que el problema de calcular el cierre convexo de un conjunto de puntos en el plano tiene una cota inferior de tiempo $\Omega(n \log n)$ [102]. Obtenemos por lo tanto el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Dado un conjunto \mathcal{O} de k rectas tales que $\Theta_i \geq \frac{\pi}{2}$ para toda $0 \leq i < 2k$, podemos calcular $\mathcal{OH}(P)$ en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Estas complejidades son independientes del valor de k .*

El algoritmo de Avis et al. [21] es dependiente de Θ . Las complejidades mencionadas arriba son válidas para $\Theta \geq \frac{\pi}{2}$, y para $\Theta < \frac{\pi}{2}$ se incrementan

a tiempo $O(\frac{n}{\Theta} \log n)$ y espacio $O(n)$. Entonces, podemos construir una lista circular como describimos arriba para $\Theta = \min\{\Theta_i : i = 0, \dots, 2k - 1\}$, almacenando a lo más $\frac{2\pi}{\Theta}$ intervalos angulares circulares por cada $p \in P$, y utilizando por lo tanto $O(\frac{\pi n}{\Theta})$ espacio en total. El resultado anterior es extendido entonces a un conjunto \mathcal{O} en general de la siguiente manera.

Teorema 3.2. *Para un \mathcal{O} -conjunto cualquiera con k rectas, $\mathcal{OH}(P)$ puede calcularse en tiempo $O(\frac{n}{\Theta} \log n)$ y espacio $O(\frac{n}{\Theta})$. Estas complejidades son independientes del valor de k .*

3.3. Cálculo del cierre \mathcal{O} -convexo no-orientado

Recordemos que, mientras rotamos \mathcal{O} , las cuñas $W_{i,j}$ rotan también. Los conjuntos \mathcal{W}^i cambian generando los conjuntos \mathcal{W}_θ^i , y el cierre \mathcal{O}_θ -convexo de P es el conjunto:

$$\mathcal{OH}_\theta(P) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{2k} \mathcal{W}_\theta^i.$$

Referimos al lector nuevamente a la Figura 3.3.

Sea $\partial\mathcal{W}_\theta^i$ la frontera de \mathcal{W}_θ^i . De la misma forma que en la Sección 3.2.2, $\partial\mathcal{W}_\theta^i$ es una poligonal alternante, o escalera, con ángulo interior $\Theta_i = \pi - \alpha_i \geq \frac{\pi}{2}$ donde, en sentido antihorario alrededor de $\mathcal{OH}_\theta(P)$, gira a la derecha en los ápices de cuñas en \mathcal{W}_θ^i , que llamamos extremales, y gira a la izquierda en puntos de P , que son los puntos de soporte de esas cuñas extremales. Recordemos la Figura 3.5. El siguiente lema es una generalización directa del Lema 3.1 y será utilizado en la Sección 3.4.

Lema 3.2. *Sólo \mathcal{O}_θ -cuñas opuestas se traslapan. Si dos \mathcal{O}_θ -cuñas se traslapan, entonces el cierre \mathcal{O}_θ -convexo es desconexo.*

Mostramos ahora cómo mantener $\mathcal{OH}_\theta(P)$ para $\theta \in [0, 2\pi)$. Denotamos con $\mathcal{T}_\theta(P)$ al conjunto de traslapes en $\mathcal{OH}_\theta(P)$, y con $\mathcal{V}_\theta(P)$ el conjunto de vértices de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ en orden circular al recorrer secuencialmente $\partial\mathcal{W}_\theta^i$, $i = 1, \dots, 2k$, en sentido antihorario.

3.3.1. Frontera de $\mathcal{OH}_\theta(P)$

Al aplicar una rotación de θ al conjunto \mathcal{O} el cierre \mathcal{O} -convexo rotado de P cambia. En particular, los vértices de soporte de la escaleras $\partial\mathcal{W}_\theta^i$ pueden cambiar. Actualizaremos ahora esas escaleras en tiempo $O(\log n)$ por inserción o borrado de un punto. Para hacer esto, necesitamos mantener

las (a lo más) $2k$ escaleras en (a lo más) $2k$ árboles balanceados diferentes, uno por cada escalera. Notemos que algunas escaleras puede aparecer y/o desaparecer durante la rotación. Todas las operaciones de intersecciones y borrados pueden realizarse en tiempo $O(kn \log(kn)) = O(kn \log n)$.

Utilizando la lista circular que se muestra en la Figura 3.6, podemos rotar las cuñas (grises) W_{i+1}^{i+k} , deteniéndonos cuando uno de los rayos que acotan una de la cuñas toca un vértice en el círculo más interno; es decir, cuando entra o sale de un intervalo de escape (negro). Esto proporciona la información sobre si las cuñas apuñalantes caben o no dentro de los intervalos de escape y esto, como en la subsección 3.2.2, nos permite manejar la inserción o borrado de puntos en el conjunto $\mathcal{V}_\theta(P)$ de vértices de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ (es decir, los puntos sobre la escaleras). Ya que el número de intervalos de escape de un punto es a lo más tres y durante una rotación éstos pueden ocurrir en cualquiera de las $2k$ cuñas que corresponden a cuñas W_{i+1}^{i+k} rotadas, hay a lo más $O(kn)$ eventos. Entonces, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Para cualquier conjunto \mathcal{O} de k rectas, mantener la frontera de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ durante una rotación completa para $\theta \in [0, 2\pi)$ se puede hacer en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$.*

Corolario 3.1. *Para cualquier conjunto \mathcal{O} de k rectas, calcular el valor de θ para el cual la frontera de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ tiene el mínimo número de escalones, el mínimo número de escaleras, es conexo, o tiene el mínimo número de componentes conexas puede hacerse en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$.*

Notemos que cuando k es constante las complejidades en tiempo y espacio del resultado anterior son $\Theta(n \log n)$ y $O(n)$, respectivamente. Esto incluye el caso en que $\mathcal{OH}_\theta(P)$ es el cierre conexo rectilíneo de P .

3.3.2. Área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$

Para un valor fijo de θ , podemos calcular el área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ utilizando la siguiente expresión:

$$\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P)) = \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - \text{área}(\mathcal{P}(\theta) \setminus \mathcal{OH}_\theta(P)), \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{P}(\theta)$ denota el polígono que tiene los puntos en $\mathcal{V}_\theta(P)$ como vértices y una arista conectando dos vértices si son elementos consecutivos en $\mathcal{V}_\theta(P)$, ver la Figura 3.7. Calculamos el área de $\mathcal{P}(\theta) \setminus \mathcal{OH}_\theta(P)$ al descomponerlo en un número lineal de dos tipos de regiones: los triángulos definidos por cada par de elementos consecutivos en $\mathcal{V}_\theta(P)$, y los traslapes en $\mathcal{T}_\theta(P)$. Describimos más detalles en la Sección 3.5.

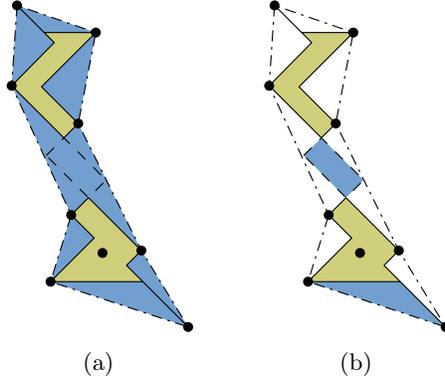


Figura 3.7: Calculando el área de $\mathcal{O}\mathcal{H}_\theta(P)$. Las líneas discontinuas indican la frontera de $\mathcal{P}(\theta)$. (a) La región $\mathcal{P}(\theta) \setminus \mathcal{O}\mathcal{H}_\theta(P)$. (b) Resaltada, una región triangular definida por dos elementos consecutivos en $\mathcal{V}_\theta(P)$, y una región de traslape.

Mientras incrementamos θ desde 0 hasta 2π , el conjunto $\mathcal{V}_\theta(P)$ cambia en los valores de θ donde un punto de P se convierte y deja de ser un vértice de $\mathcal{O}\mathcal{H}_\theta(P)$. Llamamos a estos ángulos eventos de *inserción* y de *borrado*. Análogamente, el conjunto $\mathcal{T}_\theta(P)$ cambia en eventos de *traslape* y *liberación*; es decir, los valores de θ donde un par de \mathcal{O} -cuñas extremales y opuestas comienzan y terminan de traslaparse, respectivamente.

Nuestro enfoque está basado en el cálculo eficiente de la secuencia de eventos de vértice y la secuencia de eventos de traslape generados por todos los puntos de P (notemos que hay configuraciones de puntos donde los eventos de traslape no coinciden con los eventos de vértice). Claramente, la secuencia de eventos de vértice generada por todos los puntos en P puede obtenerse fácilmente con las técnicas descritas en la subsección 3.3.1. Sin embargo, la secuencia de eventos de traslape generada por todos los puntos de P requiere un análisis más profundo, que será expuesto en la siguiente sección.

3.4. Secuencia de eventos de traslape

Como mencionamos anteriormente (ver el Lema 3.2) sólo un par de cuñas opuestas $\partial\mathcal{W}_\theta^i$ y $\partial\mathcal{W}_\theta^{i+k}$ se pueden traslapar (recordemos la Figura 3.5). Notemos que, para cualquier θ , sólo un par $\{i, i+k\}$ de escaleras opuestas se pueden cortar, y que cuando esto sucede $\mathcal{O}\mathcal{H}_\theta(P)$ es disconexo. La intersección $\mathcal{W}_\theta^i \cap \mathcal{W}_\theta^{i+k}$ puede estar compuesta de varios traslapos. Mostraremos a continuación cómo mantener $\mathcal{W}_\theta^i \cap \mathcal{W}_\theta^{i+k}$ mientras incrementamos θ .

El objetivo principal de esta sección es mantener la secuencia de eventos de traslape, de la cual podemos calcular los traslapes que aparecen en una rotación completa. En las siguientes subsecciones, mostramos que el número de eventos de traslape es a lo más $O(n)$. Después, describimos un algoritmo para calcularlos eficientemente.

Observación 3.2. *Por simplicidad estudiaremos únicamente el caso ortogonal; es decir, cuando \mathcal{O} está formado por una recta horizontal y una recta vertical.*

Como consecuencia de la observación, la cuñas W_2^3 , W_3^4 , W_4^1 , y W_1^2 son de hecho el segundo, tercero, cuarto, y primer cuadrantes del sistema coordenado. Las \mathcal{O} -cuñas extremales son θ -cuadrantes extremales.

3.4.1. La cadena de arcos

La cadena de arcos de P , que denotamos con $\mathcal{A}(P)$, es la curva compuesta por los puntos a en el plano que son ápices de un θ -cuadrante extremal w_a para alguna $\theta \in [0, 2\pi)$. Notemos que, si $a \notin P$, entonces w_a es soportada por dos puntos en P . Una *subcadena* asociada a una arista e_i de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ es la curva A_{e_i} compuesta de estos puntos a de forma que w_a corta e_i . Ver la Figura 3.8(a). La subcadena A_{e_i} es monótona con respecto de e_i , ya que está compuesta por arcos circulares que son monótonos ya que de otra forma w_a no podría cortar e_i , y dos arcos monótonos consecutivos cuyos θ -cuadrantes extremos cortan e_i sólo pueden formar una curva monótona. Finalmente, ya que la subcadena puede tener vértices que no pertenecen a P , llamamos *eslabón* al segmento de subcadena que se encuentra entre dos puntos de P . Ver la Figura 3.8(b).

Notemos que, si un par de cuñas opuestas generan un traslape, entonces sus ápices se encuentran sobre eslabones que se cortan (ver la Figura 3.8(a)). Entonces, para demostrar que el conjunto $\mathcal{T}_\theta(P)$ de traslapes puede mantenerse en tiempo y espacio $O(n)$, demostraremos primero que hay un número lineal de intersecciones entre eslabones.

3.4.2. El número de intersecciones entre eslabones es $O(n)$

Construiremos una gráfica cuyos vértices son los discos que tienen una arista de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ como diámetro. Las aristas de esta gráfica conectan dos discos cuyas subcadenas se cortan. El número de intersecciones es entonces el peso de cada arista. El número total de intersecciones es la suma de los

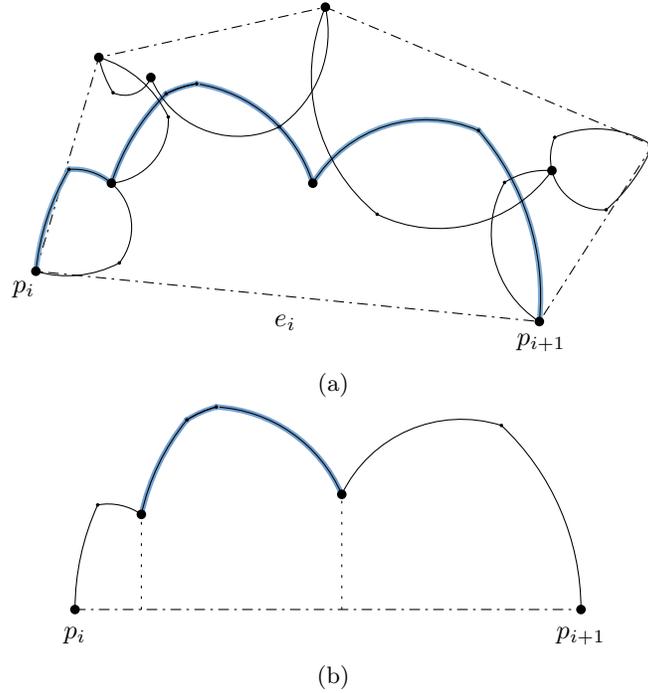


Figura 3.8: (a) La cadena de arcos de P . Resaltada en azul, la subcadena asociada a $e - i$. (b) Resaltado, un eslabón de la subcadena anterior.

pesos de todas las aristas. Demostraremos a continuación que esta suma es a lo más $O(n)$.

Cada punto $p \in P$ puede encontrarse en el interior de a lo más cuatro discos ya que p puede ser el ápice de a lo más tres cuñas P -libres w_a de tamaño $\frac{\pi}{2}$. Entonces, cada punto $p \in P$ puede encontrarse en la intersección de a lo más $\binom{3}{2} = 3$ pares de discos, contribuyendo entonces al peso de a lo más 3 aristas de la gráfica con pesos. Demostraremos que el peso de cada arista en la gráfica es lineal en el número de puntos de P contenidos en los discos (Teorema 3.4). Entonces, la suma de los pesos en la gráfica es lineal en el número total de puntos en P .

Presentamos primero algunos resultados auxiliares.

Lema 3.3. *Sean a, b, c tres puntos cualesquiera en un eslabón, etiquetados en orden de aparición al recorrer el eslabón de izquierda a derecha. El ángulo $\angle abc$ pertenece al intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi)$. En particular, cada eslabón con extremos $p, q \in P$ se encuentra contenido en el disco con diámetro \overline{pq} . Llamamos a este disco un disco de eslabón.*

Demostración. Sean p, q los extremos del eslabón y por lo tanto, puntos consecutivos de P en la cadena de arcos. Entonces, $b \notin P$ y w_b es un θ -cuadrante extremal. Que $\angle abc \geq \frac{\pi}{2}$ se sigue de que a y c no se encuentran en el interior de w_b . En caso contrario w_b no sería P -libre, ya sea porque a o c se encuentran en P o porque algún punto de P que soporta el θ -cuadrante maximal con ápices a, c se encuentran en el interior de w_b .

Que $\angle abc < \pi$ se sigue de que las proyecciones ortogonales de p y q sobre la arista de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ correspondiente se encuentran dentro de la intersección de la arista con w_b . Ver la Figura 3.9. \square

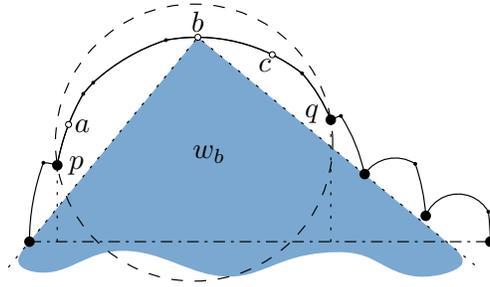


Figura 3.9: Ilustración del Lema 3.3.

Lema 3.4. *Consideremos los discos de eslabón en un par de subcadenas asociadas a un par de aristas en $\partial(\mathcal{CH}(P))$. El disco de eslabón D de diámetro más pequeño puede ser cortado por a lo más cinco eslabones de la otra subcadena A_e .*

Demostración. Sea R el corredor acotado por las rectas que proyectan ortogonalmente D sobre la arista e asociada con la subcadena A_e . Por monotonía, sólo la parte de la subcadena que se encuentra dentro de R puede cortar D , ver la Figura 3.10(a).

Si ningún arco de la subcadena A_e tiene extremos dentro de R , entonces a lo más un eslabón puede cortar D . En caso contrario, demostraremos que la subcadena A_e no tiene crestas en los puntos de P dentro de R : si hubiera una cresta $p \in R$, sean q, r sus vecinos, donde r es el punto más cercano a la arista e . El segmento obtenido de cortar la paralela a e que pasa por q con el corredor R determina un disco que no contiene la cresta p , ya que la longitud de \overline{pq} es igual que el diámetro de un disco de eslabón y, por lo tanto, tiene que ser mayor que el diámetro de D , que es igual al diámetro de R . Ver la

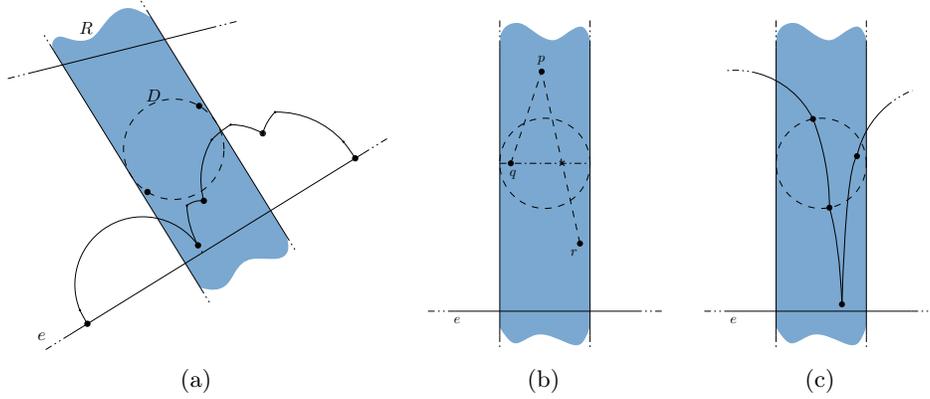


Figura 3.10: (a) Sólo la parte de la subcadena que se encuentra dentro de R puede cortar D . (b) No hay crestas en los puntos de P dentro de R . (c) A lo más 5 eslabones cortan D .

Figura 3.10(b). Entonces $\angle qpr < \frac{\pi}{2}$, lo que es una contradicción ya que w_p tiene que ser P -libre.

Ya que A_e no tiene crestas en puntos de P dentro de R , puede tener a lo más un valle dentro de R y, por lo tanto, a lo más cinco eslabones de A_e pueden cortar D . Ver Figura 3.10(c). \square

Lema 3.5. *Hay $O(n)$ pares de eslabones que se cortan en dos subcadenas asociadas a pares de aristas de $\partial(\mathcal{CH}(P))$.*

Demostración. Sea \mathcal{L} la lista de todos estos eslabones, ordenados ascendentemente por diámetro. Por el Lema 3.4, el primer eslabón en \mathcal{L} es cortado por a lo más cinco de los eslabones restantes en \mathcal{L} . Al eliminar este eslabón de \mathcal{L} , obtenemos que el siguiente eslabón en la lista también es cortado por a lo más un número constante de eslabones. Ya que hay un número lineal de arcos extremales y cada arco pertenece a un eslabón, hay también un número lineal de elementos en \mathcal{L} . Entonces, eliminando sucesivamente el eslabón de menor diámetro de \mathcal{L} , la suma total del número de pares que se cortan es $O(n)$. \square

Estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección, el Teorema 3.4, lo que implica que el peso de cada arista en la gráfica con pesos definida anteriormente es lineal en el número de puntos de P contenidos en los discos de subcadena correspondientes.

Teorema 3.4. *Hay $O(n)$ puntos de intersección entre los eslabones de dos subcadenas asociadas a un par de aristas de $\partial(\mathcal{CH}(P))$.*

Demostración. Por monotonía, sabemos que dos eslabones de la misma subcadena se pueden cortar sólo en uno de sus extremos. Por el Lema 3.5, sólo tenemos que demostrar que eslabones de subcadenas diferentes se cortan a lo más dos veces.

Supongamos que hay al menos tres puntos de intersección a, b, c entre dos eslabones de subcadenas asociadas a e_i y e_s . Sin pérdida de generalidad, asumimos que a, b, c están etiquetados en orden de aparición al recorrer de izquierda a derecha el eslabón asociado con e_s . Notemos que los puntos aparecen en el mismo orden al recorrer el eslabón asociado con e_s de izquierda a derecha, ya que en caso contrario al menos uno de ellos no puede pertenecer al eslabón, ya que formarían un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ (Figura 3.11(a)) o mayor que π (Figura 3.11(b)), contradiciendo el Lema 3.3.

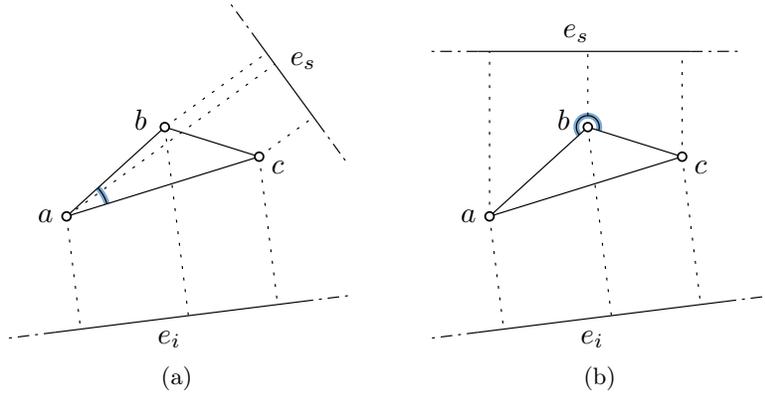


Figura 3.11: (a) $a \notin \ell_{s,t}$ ya que $\angle cab < \frac{\pi}{2}$, (b) $b \notin \ell_{s,t}$ ya que $\angle cba > \pi$.

Sean e_l y e_m respectivamente, las aristas de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ que son cortadas por los rayos de b que pasan por a y c . Al recorrer $\partial(\mathcal{CH}(P))$ en cualquier dirección, e_s se encuentra en medio de e_l y e_i , o e_i y e_m (ver la Figura 3.12(a)). Consideremos que e_s se encuentra en el primer caso (el argumento para el segundo caso es simétrico) y denotemos con ℓ la recta perpendicular a e_i que pasa por a . Ya que w_a es una cuña maximal acotada por rayos que cortan e_i , al igual que en la demostración del Lema 3.3, w_a no contiene ningún otro punto del eslabón asociado con e_i (ver la Figura 3.12(b)). Notemos que c y p_{s+1} se encuentran en lados opuestos de ℓ y no están contenidos en w_a y entonces, $\angle p_{s+1}ac \geq \frac{\pi}{2}$ y $\angle acp_{s+1} < \frac{\pi}{2}$. Ya que a, c, p_{s+1} aparecen de izquierda a derecha en el eslabón asociado a e_s , obtenemos del Lema 3.3 que c no puede pertenecer a A_s . \square

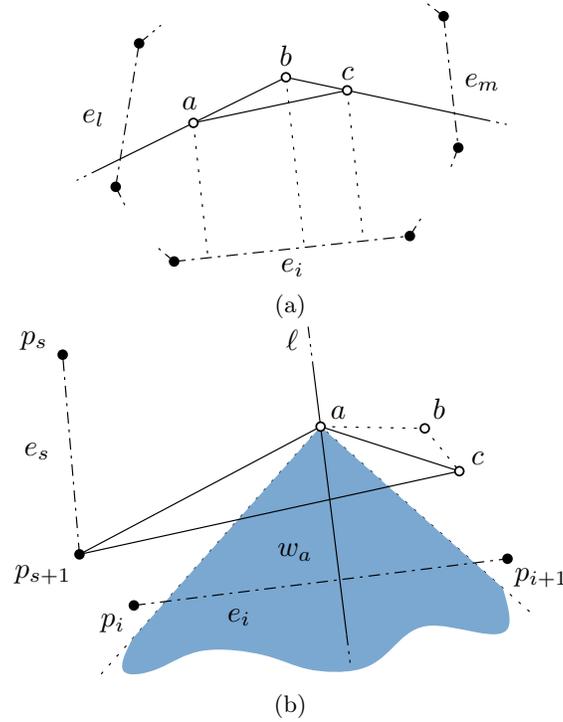


Figura 3.12: (a) Posiciones válidas de la cuña e_s . (b) c no está contenido en $A_s(P)$ ya que $\angle acp_{s+1} < \frac{\pi}{2}$.

3.4.3. Secuencia de eventos de traslape

A continuación describimos el algoritmo para calcular la secuencia de eventos de traslape.

ALGORITMO PARA LA SECUENCIA DE EVENTOS

1. Calcular la cadena de arcos de P .

Cada arco extremal debe ser especificado en términos de los puntos que soportan el θ -cuadrante extremal correspondiente, y también en términos del intervalo angular definido por esos puntos. Llamamos a este intervalo el *intervalo de trazado*. Los elementos de $\mathcal{A}(P)$ deben estar agrupados en eslabones. Para calcular la cadena de arcos de P , extendemos el algoritmo que describimos en la Sección 3.2:

- a) En cada evento de inserción, se generan a lo más dos arcos extremales y se interrumpe a lo más un arco extremal. Deben establecerse

apuntadores de los arcos extremales interrumpidos a los que acaban de generarse. Si un arco extremal es un punto de P , inicializamos un nuevo eslabón con el respectivo arco extremal.

- b) En cada evento de borrado, se genera a lo más un arco extremal, y se interrumpen a lo más dos arcos. Uno de los arcos interrumpidos siempre terminará en un punto de P , por lo que completamos un eslabón. Como hicimos anteriormente, debemos establecer apuntadores desde los eslabones interrumpidos hacia los eslabones recién creados.

2. Colorear arcos extremales.

Recorremos $\mathcal{A}(P)$ de forma que los vértices de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ son visitados en orden circular en sentido antihorario. Durante el recorrido, coloreamos los arcos extremales con rojo si pertenecen a una subcadena que corresponde a una arista en la cadena superior de $\partial(\mathcal{CH}(P))$, y con azul en caso contrario (ver la Figura 3.13). Notemos que de acuerdo con el valor de θ , un par de θ -cuadrantes extremales que cortan una arista de la cadena superior (respectivamente, la cadena inferior) de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ no son opuestos entre sí. Entonces, eslabones monocromáticos que se cortan no admiten θ -cuadrantes extremales que se traslapan.

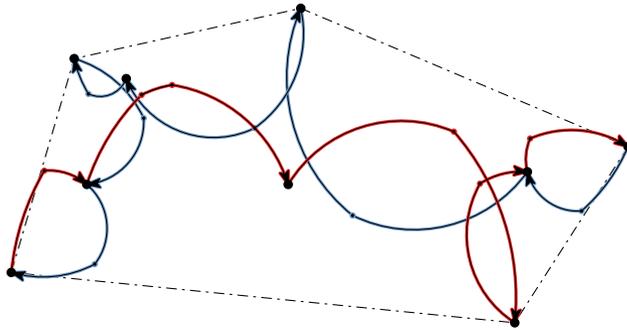


Figura 3.13: La cadena de arcos coloreada de P .

3. Identificar pares bicromáticos de eslabones que se cortan.

Notemos que el arco extremal más largo posible es un semicírculo y por lo tanto, podemos partir cualquier arco extremal en a lo más tres segmentos para obtener un conjunto de curvas monótonas respecto de una dirección arbitraria. Entonces, podemos transformar los arcos de $\mathcal{A}(P)$ en un conjunto $\mathcal{A}'(P)$ de curvas monótonas respecto de una

misma dirección, y utilizar el algoritmo de barrido de línea de Bentley et al. [29] en $\mathcal{A}'(P)$ para calcular los puntos de intersección entre arcos extremales. Discriminamos de estos puntos aquellos que pertenecen a pares de arcos bicromáticos. Debemos establecer apuntadores a los eslabones que contienen los arcos extremales involucrados, para que podamos obtener el conjunto de todas las parejas bicromáticas de eslabones en $\mathcal{A}(P)$ que se intersecan.

4. Calcular la secuencia de eventos de traslape.

Consideremos dos θ -cuadrantes extremales $Q_\theta(p, q)$ y $Q_\theta(r, s)$, y un par de arcos maximales $\widehat{ab} \in C(p, q)$ y $\widehat{cd} \in C(r, s)$ con sus intervalos de trazado correspondientes (α_a, α_b) y (α_c, α_d) , ver la Figura 3.14. Decimos que \widehat{ab} y \widehat{cd} admiten θ -cuadrantes que se traslapan, si $Q_\varphi(p, q)$ y $Q_\psi(r, s)$ se traslapan para algún $\varphi \in (\alpha_a, \alpha_b)$ y $\psi \in (\alpha_c, \alpha_d)$.

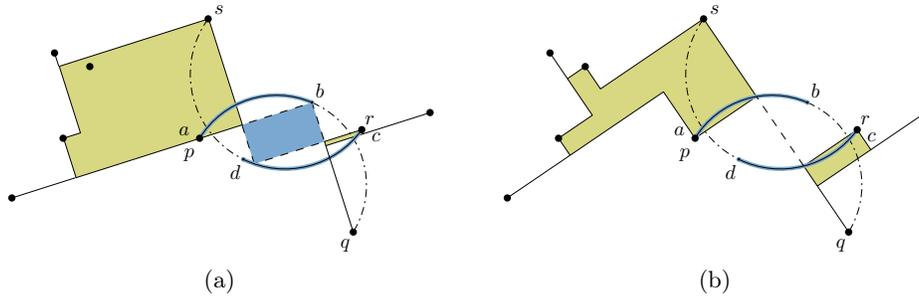


Figura 3.14: Los arcos \widehat{ab} y \widehat{cd} (resaltados) admiten θ -cuadrantes que se traslapan. En las figuras (a) y (b) se muestran respectivamente, los eventos de traslape y liberación correspondientes a la región de traslape.

Supongamos que \widehat{ab} y \widehat{cd} admiten θ -cuadrantes y, sin pérdida de generalidad, supongamos que p precede a q en $\mathcal{V}_\theta(P)$ para toda $\theta \in (\alpha_a, \alpha_b)$, y que r precede a s para toda $\theta \in (\alpha_c, \alpha_d)$. Es fácil ver que, ya que los θ -cuadrantes extremales $Q_\theta(p, q)$ y $Q_\theta(r, s)$ son opuestos, $(\alpha_a, \alpha_b) \cap (\alpha_c + \pi, \alpha_d + \pi)$ no es vacío y, durante este intervalo, el rayo de $Q_\theta(p, q)$ que pasa por p (respectivamente q) es paralelo al rayo de $Q_\theta(r, s)$ que pasa por r . De no ser así, $Q_\theta(p, q) \cap Q_\theta(r, s)$ no sería P -libre. Por la misma razón, los puntos p, r se encuentran en lados opuestos de $\ell_{q,s}$ y por lo tanto, los segmentos de recta \overline{pr} y \overline{qs} se cortan entre sí. Es fácil ver que el punto de intersección está contenido en la región de traslape entre $Q_\theta(p, q)$ y $Q_\theta(r, s)$. Tenemos entonces que $\overline{pr} \cap \overline{qs} \subset D(p, q) \cap D(r, s)$. Notemos que el intervalo angular de tamaño máximo donde $Q_\theta(p, q)$ y $Q_\theta(r, s)$ pueden traslaparse, que llamamos

intervalo máximo de traslape, está acotado por las orientaciones donde X_θ es paralelo a $\overline{p\bar{r}}$ y Y_θ es paralelo a $\overline{q\bar{s}}$.

Observación 3.3. *Los arcos \widehat{ab} y \widehat{cd} admiten θ -cuadrantes que se traslapan si, y sólo si, $Q_\theta(p, q)$ y $Q_\theta(r, s)$ definen un intervalo máximo de traslape (θ_1, θ_2) y*

$$(\theta_1, \theta_2) \cap (\alpha_a, \alpha_b) \cap (\alpha_c + \pi, \alpha_d + \pi) \neq \emptyset.$$

Sea $\langle \widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \dots, \widehat{a_k a_{k+1}} \rangle$ el conjunto de arcos extremales para toda $\theta \in [0, 2\pi)$, donde $k = O(n)$, etiquetados al recorrer $\mathcal{A}(P)$ de forma que los vértices de $\partial(\mathcal{CH}(P))$ son visitados en orden circular en sentido antihorario. Denotamos con $\widehat{\ell}_{u,v}$ la subsecuencia $\langle (a_u, a_{u+1}), \dots, (a_v, a_{v+1}) \rangle$ de arcos consecutivos en $\mathcal{A}(P)$ que forman un eslabón. Los intervalos extremales de los arcos en $\widehat{\ell}_{u,v}$ definen la secuencia $\langle \alpha_{a_u}, \dots, \alpha_{a_{v+1}} \rangle$ de ángulos crecientes.

Con base en la Observación 3.3, podemos calcular las regiones de traslape generadas por los arcos extremales que pertenecen a un par $\widehat{\ell}_{u,v}$ y $\widehat{\ell}_{s,t}$ de eslabones que se cortan con una extensión del algoritmo de unión de dos listas ordenadas sobre las listas $\langle \alpha_{a_u}, \dots, \alpha_{a_{v+1}} \rangle$ y $\langle \alpha_{a_s} + \pi, \dots, \alpha_{a_{t+1}} + \pi \rangle$, y sus secuencias correspondientes: la intersección entre un par de intervalos maximales no consecutivos en la lista resultante es vacío. Estos pares pueden ser ignorados ya que no cumplen con las condiciones de la Observación 3.3 y por lo tanto, a lo más un número lineal de parejas de arcos extremales en $\widehat{\ell}_{u,v}$ y $\widehat{\ell}_{s,t}$ admiten θ -cuadrantes que se traslapan.

Sean $\ell_{u,v}$ y $\ell_{s,t}$ dos eslabones que se cortan y contienen respectivamente $n_{u,v} = u - v + 1$ y $n_{s,t} = t - s + 1$ arcos extremales. A lo más $O(n_{u,v} + n_{s,t})$ parejas de arcos extremales admite θ -cuadrantes que se traslapan. Las regiones de traslape generadas por θ -cuadrantes extremales pueden ser calculadas utilizando tiempo y espacio $O(n_{u,v} + n_{s,t})$.

Por el Teorema 3.3 sabemos que el Paso 1 del algoritmo anterior consume tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$, ya que un número constante de operaciones adicionales son realizadas en cada evento mientras recorremos la secuencia de eventos de vértice utilizando el algoritmo que describimos en la Sección 3.2. El Paso 2 consume tiempo y espacio $O(n)$, ya que el número de arcos extremales en $\mathcal{A}(P)$ es lineal en el número de elementos de P . Para calcular $\mathcal{A}(P)$ recorreremos $\mathcal{A}(P)$ en tiempo lineal y, del Teorema 3.4, el algoritmo de barrido de Bentley y Ottmann [30] consume tiempo $O(n \log n)$ y espacio

$O(n)$. Finalmente, del Lema 3.5, el Teorema 3.4 y el hecho de que hay un número lineal de arcos extremales y cada arco pertenece a un sólo eslabón, el Paso 4 consume tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

Teorema 3.5. *La secuencia de eventos de traslape puede ser calculada en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

3.4.4. Recorrido de la secuencia de eventos de traslape

Almacenamos la secuencia de eventos de traslape como puntos en un círculo $[0, 2\pi)$, sobre el cual representamos las cuñas W_{i+1}^{i+k} en una forma similar a como lo hicimos en el círculo más interior en la Figura 3.6(b) (donde almacenamos los eventos de vértice).

Almacenamos también $\mathcal{T}_\theta(P)$ en una tabla hash utilizando tuplas con los puntos que soportan los θ -cuadrantes que se traslapan como entradas. Las tuplas contendrán los puntos de soporte en el orden que son encontrados al recorrer $\mathcal{V}_\theta(P)$. Por ejemplo, la región de traslape de la Figura 3.14(a) sería almacenada en $\mathcal{T}_\theta(P)$ usando como “llave” la tupla (p, q, r, s) .

Como en la Sección 3.3.1, rotamos las cuñas W_{i+1}^{i+k} simultáneamente alrededor del centro y nos detenemos cuando uno de sus rayos pasa sobre un evento de traslape en el círculo más interior, para actualizar $\mathcal{T}_\theta(P)$ según corresponda. Es fácil ver que, en cualquier valor fijo de θ hay $O(n)$ regiones de traslape en $\mathcal{OH}_\theta(P)$. Claramente, estas regiones pueden ser calculadas a partir de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ en tiempo lineal. Ya que hay $O(n)$ eventos de traslape, obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.6. *Usando la secuencia de eventos de traslape, el conjunto $\mathcal{T}_\theta(P)$ puede mantenerse mientras θ incrementa su valor en $[0, 2\pi)$ usando tiempo $O(n)$ y espacio $O(n)$.*

Observación 3.4. *Estos resultados pueden ser adaptados cuando \mathcal{O} está formado por k rectas sin sectores mayores que $\frac{\pi}{2}$. Entonces, la secuencia de eventos de traslape puede ser calculada en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$, y el conjunto $\mathcal{T}_\theta(P)$ puede mantenerse mientras θ se incrementa en $[0, 2\pi)$ usando tiempo $O(kn)$ y espacio $O(kn)$.*

3.5. Orientación de área mínima

En esta sección adaptamos las fórmulas de Bae et al. [22] para calcular el valor de θ que minimiza el área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Por simplicidad, asumimos que \mathcal{O} está compuesta por una recta horizontal y una recta vertical.

Sea (α, β) un intervalo angular en $[0, 2\pi)$ que no contiene eventos. Extendiendo la Ecuación (3.2) podemos expresar el área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ para cada $\theta \in (\alpha, \beta)$ como

$$\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P)) = \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - \sum_j \text{área}(\Delta_j(\theta)) + \sum_k \text{área}(\square_k(\theta)). \quad (3.3)$$

Recordemos que el término $\mathcal{P}(\theta)$ denota el polígono que tiene los puntos de $\mathcal{V}_\theta(P)$ como vértices, y una arista conectando dos vértices si son elementos consecutivos en $\mathcal{V}_\theta(P)$. El término $\Delta_j(\theta)$ denota la región triangular acotada por la recta que pasa por dos vértices $v_j, v_{j+1} \in \mathcal{V}_\theta(P)$, la recta paralela a X_θ que pasa por v_j , y la recta paralela a Y_θ que pasa por v_{j+1} . Finalmente, el término $\square_k(\theta)$ denota la k -ésima región de traslape en $\mathcal{T}_\theta(P)$. Ver la Figura 3.15.

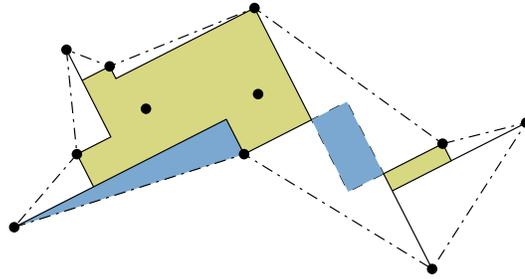


Figura 3.15: Calculando el área de $\mathcal{OH}_\theta(P)$. El polígono $\mathcal{P}(\theta)$ está acotado con líneas discontinuas. Un triángulo $\Delta_j(\theta)$ y una región de traslape $\square_k(\theta)$ están coloreadas con azul.

Mostramos ahora que para cualquier valor de θ podemos evaluar la Ecuación (3.3) en tiempo lineal y, mientras incrementamos θ desde 0 hasta 2π , un número constante de términos tienen que ser actualizados en cada evento, sin importar su tipo.

El polígono. En un valor arbitrario de θ el área de $\mathcal{P}(\theta)$ puede ser calculado a partir de $\mathcal{V}_\theta(P)$ en tiempo $O(n)$. El término $\text{área}(\mathcal{P}(\theta))$ cambia sólo en eventos de vértice. Estos eventos pueden ser procesados en tiempo constante: en un evento de inserción (respectivamente, de borrado), el área de un triángulo tiene que ser restado (respectivamente, sumado) al valor anterior de $\text{área}(\mathcal{P}(\theta))$. Ver la Figura 3.16.

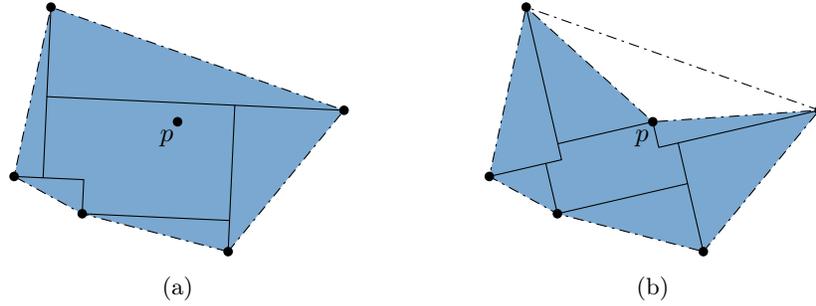


Figura 3.16: (a) El punto p está a punto de convertirse en un vértice. (b) Después del evento de inserción de p , el área del triángulo blanco necesita ser restado de $\text{área}(\mathcal{P}(\theta))$.

Las regiones triangulares. El área de $\Delta_j(\theta)$ puede ser expresada como

$$\text{área}(\Delta_j(\theta)) = b_j^2 \cdot \cos(c_j + (\theta - \alpha)) \cdot \text{sen}(c_j + (\theta - \alpha)), \quad (3.4)$$

donde b_j^2 y c_j son constantes que dependen de las coordenadas de los vértices que soportan el cuadrante que acota $\Delta_j(\theta)$. Simplificando la Ecuación (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{área}(\Delta_j(\theta)) &= \frac{1}{2} b_j^2 \cdot \text{sen} 2(c_j + (\theta - \alpha)) \\ &= \frac{1}{2} b_j^2 \cdot [\text{sen}(2c_j) \cdot \cos 2(\theta - \alpha) + \cos(2c_j) \cdot \text{sen} 2(\theta - \alpha)] \\ &= B_j \cdot \cos 2(\theta - \alpha) + C_j \cdot \text{sen} 2(\theta - \alpha), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $B_j = \frac{1}{2} b_j^2 \cdot \text{sen}(2c_j)$ y $C_j = \frac{1}{2} b_j^2 \cdot \cos(2c_j)$. Ya que la Ecuación (3.5) puede ser calculada en tiempo constante y hay $O(n)$ triángulos (porque hay el mismo número de elementos en $\mathcal{V}_\theta(P)$, recordemos la Sección 3.3.1), para cualquier valor fijo de θ el término $\sum_j \text{área}(\Delta_j(\theta))$ puede calcularse en tiempo $O(n)$. En un evento de inserción el término de un triángulo es eliminado de $\sum_j \text{área}(\Delta_j(\theta))$ y, como un vértice soporta a lo más dos θ -cuadrantes extremales, los términos de dos triángulos son agregados a $\sum_j \text{área}(\Delta_j(\theta))$. Lo contrario ocurre en eventos de borrado. El término $\sum_j \text{área}(\Delta_j(\theta))$ no es afectado por eventos de traslape. Ver la Figura 3.17.

Las regiones de traslape. El área de la k -ésima región de traslape puede expresarse como

$$\text{área}(\square_k(\theta)) = B_k + C_k \cos 2(\theta - \alpha) + D_k \text{sen} 2(\theta - \alpha), \quad (3.6)$$

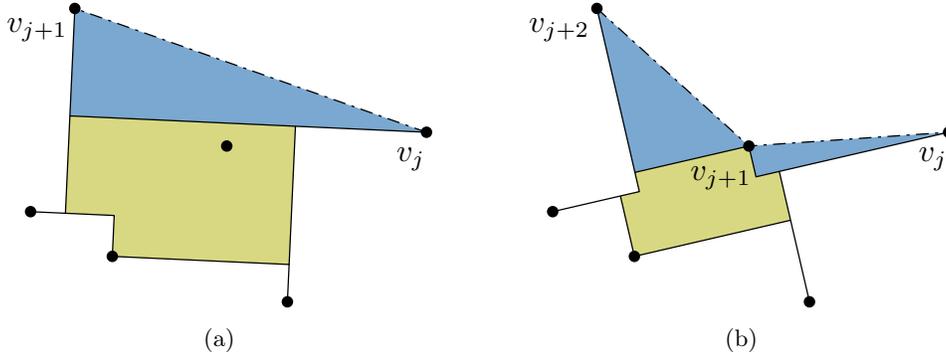


Figura 3.17: Actualizando el término $\sum_j \text{área}(\Delta_j(\theta))$. En un evento de inserción, (a) a lo más un triángulo puede ser eliminado y (b) a lo más dos triángulos deben ser agregados.

donde B_k , C_k , y D_k son constantes que dependen de las coordenadas de los vértices que soportan los θ -cuadrantes que se traslapan y que generan $\square_k(\theta)$. Podemos calcular la Ecuación (3.6) en tiempo constante y hay $O(n)$ regiones de traslape en $\mathcal{T}_\theta(P)$, de forma que, para cualquier valor fijo de θ , el término $\sum_k \text{área}(\square_k(\theta))$ puede calcularse en tiempo $O(n)$. En los eventos de traslape el término de una sola región de traslape es agregado o eliminado de $\sum_k \text{área}(\square_k(\theta))$. Ya que un vértice soporta a lo más dos θ -cuadrantes extremales, en un evento de vértice los términos de un número constante de regiones de traslape son agregados o eliminados.

Antes de describir el algoritmo de área mínima, necesitamos presentar las siguientes propiedades de $\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P))$. Antes que nada, del Lema 4 de Bae et al. [22] el valor de θ para el cual $\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P))$ es mínima en (α, β) no puede ser α o β . En segundo lugar, la Ecuación (3.3) tiene $O(n)$ términos para cualquier $\theta \in (\alpha, \beta)$ y por lo tanto, puede simplificarse para obtener

$$\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P)) = C + D \cos 2(\theta - \alpha) + E \sen 2(\theta - \alpha) \quad (3.7)$$

en tiempo $O(n)$. Los términos C , D y E son constantes que resultan de sumar las constantes en $\text{área}(\mathcal{P}(\theta))$ y en las Ecuaciones (3.5) y (3.6). Finalmente, ya que la Ecuación (3.7) tiene un número constante de puntos de inflexión en $[0, 2\pi)$, un número constante de operaciones son suficientes para obtener el valor de θ que minimiza $\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P))$ en (α, β) .

El algoritmo de búsqueda. Describimos a continuación el algoritmo para calcular la orientación de área mínima.

1. Secuencia de eventos.

Calculamos la secuencia de eventos de vértice como describimos en la Sección 3.3.1, y la secuencia de eventos de traslape como describimos en la Sección 3.4.3. Mezclamos ambas secuencias en una lista circular de ángulos $\{\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_1\}$, $m \in O(n)$, que podemos representar en una tabla circular como el círculo más interior de la Figura 3.6(b). Claramente, mientras incrementamos θ en $[0, 2\pi)$, las características relevantes de $\mathcal{OH}_\theta(P)$ no cambian durante cada intervalo (θ_i, θ_{i+1}) , y cada ángulo θ_i es un evento de inserción, borrado, traslape, o liberación.

2. Inicialización del barrido angular.

Colocamos las cuatro cuñas W_2^3 , W_3^4 , W_4^1 , y W_1^2 sobre la tabla circular como lo hicimos en las Secciones 3.3.1 y 3.4.3. Sin pérdida de generalidad, suponemos que el primer rayo (en sentido antihorario) de la cuña W_1^2 corta el intervalo angular (θ_m, θ_1) . Calculamos los conjuntos \mathcal{V}_{θ_1} y \mathcal{T}_{θ_1} para el valor actual de θ_1 como lo hicimos en la Sección 3.3.1, y expresamos $\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P))$ para $\theta \in [\theta_1, \theta_2)$ utilizando Ecuación (3.7). Calculamos las constantes en esta ecuación considerando la restricción $\theta \in [\theta_1, \theta_2)$. Finalmente, optimizamos la ecuación resultante para calcular el ángulo θ_{min} de área mínima.

3. Barrido angular.

Rotamos simultáneamente las cuatro cuñas W_2^3 , W_3^4 , W_4^1 , y W_1^2 , como lo hicimos en la Sección 3.4.3. Durante el barrido, actualiza $\mathcal{V}_\theta(P)$ y $\mathcal{T}_\theta(P)$ como explicamos en las Secciones 3.3.1 y 3.4.4. Adicionalmente, en cada evento:

- a) Actualizamos la Ecuación (3.7) agregando y eliminando términos como explicamos anteriormente.
- b) Optimizamos la versión actualizada de la Ecuación (3.7) para obtener el ángulo local de área mínima, y reemplazamos θ_{min} si mejoramos el valor de $\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P))$.

De los Teoremas 3.3 y 3.5, calcular las secuencias de eventos de vértice y de traslape nos toma tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Ya que las dos secuencias tienen $O(n)$ eventos, podemos mezclarlas en tiempo $O(n)$ para obtener la secuencia de eventos. Por lo tanto, el Paso 1 consume tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. En el Paso 2, $\mathcal{V}_\theta(P)$ puede calcularse en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$ [86] y $\mathcal{T}_\theta(P)$ puede calcularse fácilmente a partir de $\mathcal{V}_\theta(P)$ en tiempo lineal. Adicionalmente requerimos tiempo $O(n)$ para

obtener la Ecuación (3.7), y θ_{min} puede calcularse en tiempo constante. Esto nos da un total de tiempo $\Theta(n \log n)$ tiempo y espacio $O(n)$. Finalmente, de los Teoremas 3.3 y 3.6, respectivamente, mantener $\mathcal{V}_\theta(P)$ y $\mathcal{T}_\theta(P)$ nos toma $\Theta(n \log n)$ tiempo y espacio lineal por cada uno. Los Pasos 3a y 3b son repetidos $O(n)$ veces (una vez por evento en la secuencia) y, como describimos anteriormente, cada repetición nos toma tiempo constante. Entonces, para realizar el Paso 3 consumimos un total de tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Notemos que, luego de terminar el barrido de línea, consumiendo tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ adicionales podemos calcular tanto $\mathcal{OH}_\theta(P)$ como $\text{área}(\mathcal{OH}_\theta(P))$ para θ_{min} y obtener así el valor del área mínima. De este análisis obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *Sea \mathcal{O} compuesto por una recta horizontal y una recta vertical. Calcular $\mathcal{OH}_\theta(P)$ (es decir, el cierre convexo rectilíneo no orientado de P) de área mínima para toda $\theta \in [0, 2\pi)$ nos toma $\Theta(n \log n)$ tiempo y $O(n)$ espacio.*

Observación 3.5. *Los resultados anteriores pueden adaptarse también al caso en que \mathcal{O} está compuesto por k rectas sin un sector mayor que $\frac{\pi}{2}$. Entonces, calcular el cierre \mathcal{O} -convexo de P de área mínima para toda $\theta \in [0, 2\pi)$ nos toma $\Theta(kn \log n)$ tiempo y espacio $O(kn)$.*

3.6. Conclusiones

Hemos mostrado como calcular el cierre \mathcal{O} -convexo de P en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Mostramos también cómo calcular y mantener el cierre $\mathcal{OH}_\theta(P)$ rotado mientras incrementamos θ desde 0 hasta 2π en tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$, asumiendo que ningún par de rectas consecutivas en \mathcal{O} generan un ángulo mayor que $\frac{\pi}{2}$.

Resolvemos también el problema de calcular una orientación del plano para la cual el cierre convexo rectilíneo de P tiene área mínima en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$, mejorando así el algoritmo de tiempo $O(n^2)$ presentado por Bae et al. [22]. Notemos que, si hay más de una orientación óptima, una modificación trivial a nuestro algoritmo nos permite reportarlas todas con la misma complejidad en tiempo y espacio.

Sin mucho esfuerzo, podemos extender nuestro algoritmo para optimizar (minimizar y/o maximizar) otras propiedades de $\mathcal{OH}_\theta(P)$. Ejemplos de estas propiedades son el perímetro, el número de componentes conexas y el número de elementos de P en el interior o sobre la frontera de $\mathcal{OH}_\theta(P)$. Como extensiones interesantes de la familia de problemas de optimización de parámetros podemos considerar conjuntos de puntos dinámicos o en movimiento. Por

otra parte, no es difícil notar que en el espacio, el problema de mantener el cierre convexo rectilíneo en todas las orientaciones posibles del sistema coordenado, es por sí sólo un reto interesante y nada trivial.

Capítulo 4

Cierre \mathcal{O}_β -convexo

Estudiamos el cierre \mathcal{O}_β -convexo de un conjunto de puntos en el plano, una generalización del Cierre Convexo Rectilíneo donde los ejes coordenados forman un ángulo β . Dado un conjunto P de n puntos en el plano, mostramos cómo mantener el cierre \mathcal{O}_β -convexo de P en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$ mientras β es incrementada desde 0 hasta π . Con la misma complejidad, encontramos los valores de β que maximizan el área y el perímetro de cierre \mathcal{O}_β -convexo de P , y el valor de β para el cual una poligonal alternante no orientada con dos codos con ángulo interior β ajusta mejor los puntos de P .

4.1. Introducción

Sea \mathcal{O}_β un conjunto de dos rectas con pendientes 0 y $\tan(\beta)$, donde $0 < \beta < \pi$. Decimos que una región en el plano es \mathcal{O}_β -convexa, si su intersección con cualquier recta paralela a una de las rectas de \mathcal{O}_β es vacía o conexa. Un \mathcal{O}_β -cuadrante es la traslación de una de las regiones abiertas y \mathcal{O}_β -convexas que resultan de restarle al plano las rectas de \mathcal{O}_β . Llamamos a los cuadrantes generados por \mathcal{O}_β : *superior-derecho*, *superior-izquierdo*, *inferior-derecho*, e *inferior-izquierdo* de acuerdo con su posición respecto de las rectas de \mathcal{O}_β , ver la Figura 4.1(a). Sea P un conjunto de n puntos en el plano, y \mathcal{Q} el conjunto de todos los \mathcal{O}_β -cuadrantes que son P -libres; es decir, que no contienen elementos de P . El *cierre \mathcal{O}_β -convexo* de P es el conjunto

$$\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P) = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} q$$

de puntos en el plano en el interior de todos los superconjuntos conexos de P que son \mathcal{O}_β -convexos [14, 99]. Ver Figura 4.1(b).

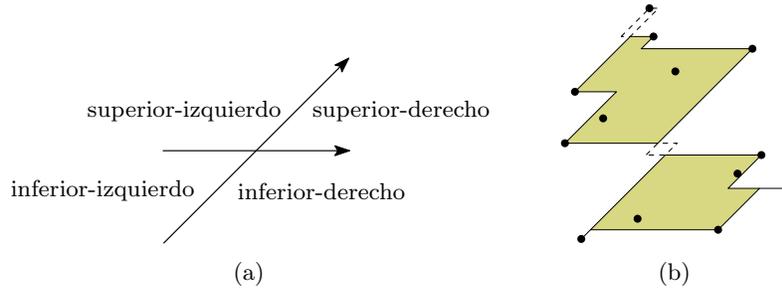


Figura 4.1: (a) Un conjunto \mathcal{O}_β , y los \mathcal{O}_β -cuadrantes superior-derecho, superior-izquierdo, inferior-derecho, e inferior-izquierdo. (b) El cierre \mathcal{O}_β -convexo de un conjunto de puntos.

El concepto de \mathcal{O}_β -convexidad surgió del estudio de *orientaciones restringidas* [76], donde los objetos geométricos cumplen con una propiedad (o un conjunto de propiedades) relacionadas con un conjunto fijo de rectas. Esta línea de investigación se ha explorado extensivamente al considerar polígonos con orientaciones restringidas [76], proximidad [118], visibilidad [107], y tanto restricciones como generalizaciones de la \mathcal{O}_β -convexidad. En el caso particular de la *convexidad ortogonal* [104] se considera que β tiene el valor fijo de $\frac{\pi}{2}$. En el caso más general de la \mathcal{O} -convexidad [103, 104], \mathcal{O}_β es reemplazado por un conjunto (posiblemente infinito) de rectas orientadas arbitrariamente. Otras nociones de convexidad con orientaciones restringidas son la *D-convexidad* [65]

y la \mathcal{O} -convexidad fuerte [103]. La primera está basada en una definición funcional (en lugar de teoría de conjuntos), mientras que la segunda (y a diferencia de la \mathcal{O}_β -convexidad) nos lleva a conjuntos que siempre son conexos. Una extensa recopilación de resultados en esta área puede encontrarse en el libro de Fink y Wood [63]. Resultados computacionales más recientes pueden encontrarse en [9, 14, 19, 101].

En este capítulo resolvemos el problema de mantener la estructura combinatoria del cierre \mathcal{O}_β -convexo de P mientras β es incrementada desde 0 hasta π , y aplicamos este resultado en los siguientes problemas de optimización: Siguiendo la línea de Bae et al. [22], encontramos los valores de β que maximizan el área y el perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. Extendemos además el resultado de Díaz-Báñez et al. [54] para ajustar una poligonal alternante no orientada con dos codos a un conjunto de puntos. Ver la Figura 4.2(c).

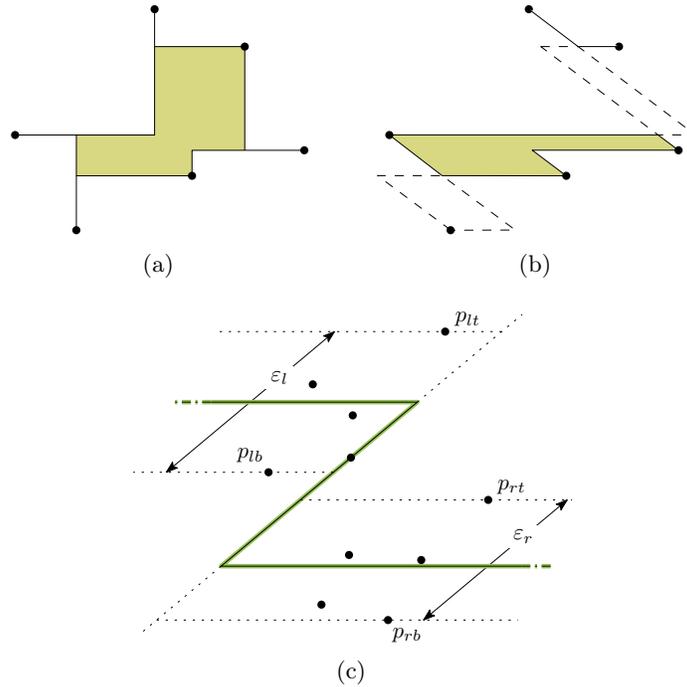


Figura 4.2: (a) $\mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}}\mathcal{H}(P)$. (b) $\mathcal{O}_{\beta_0}\mathcal{H}(P)$, donde $\beta_0 > \frac{\pi}{2}$. (c) Una poligonal no ortogonal con dos codos que ajusta un conjunto de puntos en el plano.

En todos los casos, nuestro enfoque general es realizar un barrido angular. Primero discretizamos el conjunto $\{\beta : \beta \in (0, \pi)\}$ en una secuencia creciente de ángulos $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{O(n)}\}$. Mientras β aumenta desde 0 hasta π , cada β_i corresponde a un ángulo donde hay un cambio en la estructura combinatoria

de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. Resolvemos entonces el problema particular para cualquier $\beta \in [\beta_1, \beta_2)$ en tiempo $O(n \log n)$, y mostramos como actualizar la solución local en tiempo logarítmico para cada uno de los intervalos siguientes $[\beta_i, \beta_{i+1})$. Todos nuestros algoritmos consumen tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

4.2. El cierre \mathcal{O}_β -convexo de P

En esta sección presentamos definiciones importantes para nuestros resultados. También mostramos cómo calcular $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ para un valor fijo de β , y cómo mantener su estructura combinatoria mientras incrementamos β desde 0 hasta π .

4.2.1. Preliminares

Por simplicidad, suponemos que en P no hay tres puntos colineales, ni dos puntos sobre una recta horizontal. Un vértice de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ es un punto de P que se encuentra sobre la frontera de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. Consideremos la región \mathcal{R} obtenida al restar del plano todos los \mathcal{O}_β -cuadrantes superiores-derechos libres de puntos de P . La \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha de P es la poligonal dirigida formada por el segmento de la frontera de \mathcal{R} que comienza en el vértice más a la derecha y termina en el vértice más arriba de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, con respecto del sistema coordenado definido por las rectas en \mathcal{O}_β . Definimos las \mathcal{O}_β -escaleras superior-izquierda, inferior-izquierda, e inferior-derecha de forma similar. Ver la Figura 4.3.

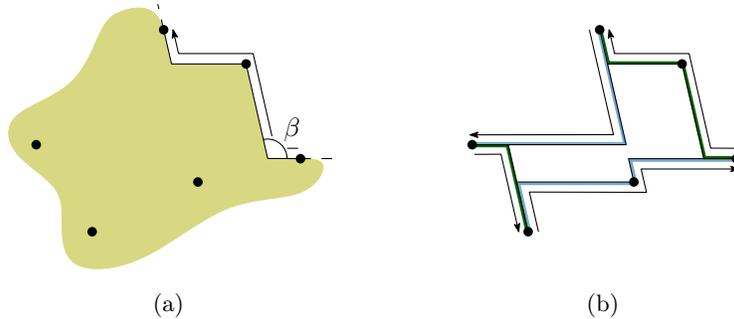


Figura 4.3: (a) Construcción de la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha. (b) Las cuatro \mathcal{O}_β -escaleras de P . Las escaleras del mismo color son opuestas entre sí. La flechas indican la dirección de las escaleras.

Observación 4.1. *Un punto de P es un vértice de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ si, y sólo si, es el ápice de al menos un \mathcal{O}_β -cuadrante P -libre. Recíprocamente, un punto en el plano se encuentra en el interior de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ si, y sólo si, todos los \mathcal{O}_β -cuadrantes con ápice en el punto contienen al menos un punto de P .*

Decimos que un \mathcal{O}_β -cuadrante es *maximal* si su frontera conecta dos elementos consecutivos de la secuencia de vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ en orden de aparición al recorrer una \mathcal{O}_β -escalera en su dirección correspondiente. Dos \mathcal{O}_β -cuadrantes son *opuestos* si, luego de trasladarlos de forma que sus ápices se encuentren en un mismo punto, sus rayos acotan ángulos opuestos. De forma similar, decimos que dos \mathcal{O}_β -escaleras son opuestas, si fueron construidas utilizando \mathcal{O}_β -cuadrantes opuestos. Es fácil ver que $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ es discontinuo si la intersección de dos \mathcal{O}_β -cuadrantes maximales opuestos no es vacía. En este caso decimos que los \mathcal{O}_β -cuadrantes se *traslapan*, y llamamos a su intersección una *región de traslape*. Ver las regiones acotadas por rayas discontinuas en las Figuras 4.1(b) y 4.2(b).

Observación 4.2. *Las parejas de \mathcal{O}_β -escaleras que no son opuestas no generan regiones de traslape. Además, sólo un par de \mathcal{O}_β -escaleras pueden cortarse en un mismo valor de β .*

Describimos $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ en términos de sus vértices y sus regiones de traslape. De la Observación 4.1, el conjunto de vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ es el conjunto de elementos maximales de P bajo dominación vectorial [21]. Entonces, los vértices pueden calcularse para un valor fijo de β en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$ [86, 102]. Notemos que las \mathcal{O}_β -escaleras son monótonas respecto de ambas rectas de \mathcal{O}_β (de no ser así no podrían acotar regiones \mathcal{O}_β -convexas), por lo que un par de ellas se cortan a lo más un número lineal de veces. Por la Observación 4.2, en un valor fijo de β hay a lo más un número lineal de regiones de traslape. Por lo tanto, si los vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ se ordenan a lo largo del eje x o del eje y , podemos calcular el conjunto de regiones de traslape en tiempo lineal. Tenemos entonces el siguiente teorema, donde la cota inferior de tiempo $\Omega(n \log n)$ viene del hecho de que $\mathcal{CH}(P) = \mathcal{CH}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P))$, de forma que podemos calcular $\mathcal{CH}(P)$ a partir de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ en tiempo $O(n)$.

Teorema 4.1. *Para un valor fijo de β , los conjuntos de vértices y regiones de traslape de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ pueden calcularse en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

4.2.2. El barrido angular

El cierre \mathcal{O}_β -convexo de P se muestra en la Figura 4.4 en la *configuración inicial incremental*, es decir, cuando β es igual a un ángulo $\beta_I = 0 + \varepsilon$ para

un valor de ε lo suficientemente pequeño. Notemos que cada punto en P es el ápice de un \mathcal{O}_β -cuadrante P -libre y por lo tanto, se encuentra contenido en al menos una \mathcal{O}_β -escalera: tanto la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha como la \mathcal{O}_β -escalera inferior-izquierda contienen a P , y las \mathcal{O}_β -escaleras superior-izquierda e inferior-derecha están formadas respectivamente, por los puntos de P que se encuentran más arriba y más abajo. También, las intersecciones entre las \mathcal{O}_β -escaleras superior-derecha e inferior-izquierda generan un número lineal de regiones de traslape.

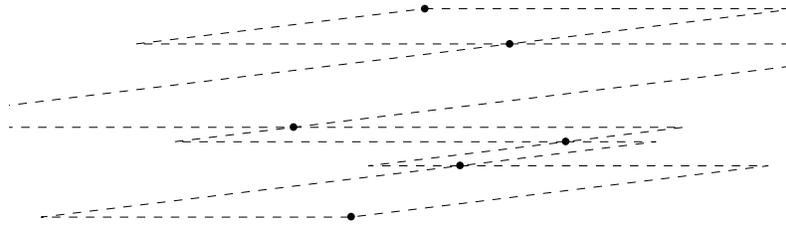


Figura 4.4: La configuración inicial incremental.

Al realizar un *barrido incremental* (en el cual β es incrementado desde 0 hasta π), la configuración inicial incremental gradualmente se transforma en la *configuración inicial decreciente*, donde β es igual a un valor $\beta_D = \pi - \varepsilon$ para un valor lo suficientemente pequeño de ε (ver la Figura 4.5). En esta configuración, las \mathcal{O}_β -escaleras superior-izquierda e inferior-derecha contienen P y generan un número lineal de regiones de traslape, y las \mathcal{O}_β -escaleras superior-derecha e inferior-izquierda contienen respectivamente, los puntos de P con la coordenada y más grande y más pequeña. Claramente, lo contrario también es cierto: desde la configuración inicial decreciente, un *barrido decreciente* (en el que β se decrementa desde π hasta 0) transformará gradualmente $\mathcal{O}_{\beta_D}\mathcal{H}(P)$ en $\mathcal{O}_{\beta_I}\mathcal{H}(P)$.

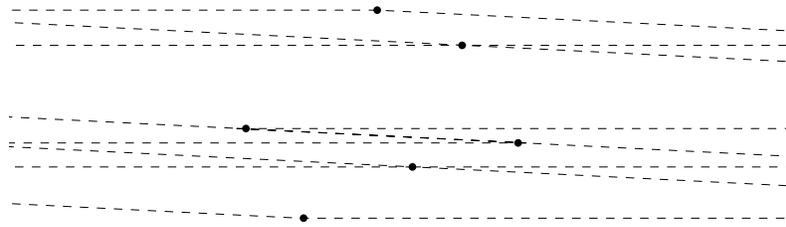


Figura 4.5: La configuración inicial decreciente.

Entre configuraciones iniciales, reconocemos cuatro tipos de eventos que modifican los conjuntos de vértices y regiones de traslape de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. Un

evento de *inserción* (*borrado*) ocurre cuando un vértice entra (sale) de una \mathcal{O}_β -escalera. En un evento de *traslape* (*liberación*), una región de traslape es creada (destruida).

Notemos que un vértice deja (entra a) la misma \mathcal{O}_β -escalera a lo más una vez, y entonces, hay en total un número lineal de eventos de inserción y de borrado. De la Observación 4.2, entre β_I y β_D siempre hay un intervalo $\phi = [\beta_1, \beta_2]$ tal que, para cualquier $\beta \in \phi$, el cierre \mathcal{O}_β -convexo de P no contiene regiones de traslape. Consideremos los intervalos angulares $\phi_I = [\beta_I, \beta_{N_1}]$ y $\phi_D = [\beta_{N_2}, \beta_D]$. Un barrido angular en ϕ_I resulta en un número lineal de eventos de liberación causados por la eliminación de todas las regiones de traslape que están presentes en la configuración inicial incremental. Ya que todo vértice soporta a lo más dos \mathcal{O}_β -cuadrantes maximales, un número lineal adicional de eventos de traslape son generados por los eventos de vértice y por lo tanto, el número de eventos de traslape en ϕ_I es $O(n)$. Utilizando el mismo argumento en ϕ_D , contamos un número lineal de estos eventos durante un barrido angular.

Lema 4.1. *Hay $O(n)$ eventos durante un barrido angular.*

Mostramos ahora cómo calcular la secuencia creciente de ángulos que indican los eventos de vértice y de traslape durante un barrido angular.

Eventos de inserción y de borrado. El conjunto de vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ en la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha tiene un orden total que, para cualquier valor de β , está dado por el orden de aparición de los vértices al recorrer la escalera en su dirección. En la configuración inicial, el orden está dado por la secuencia p_1, \dots, p_n de puntos de P etiquetados en orden vertical creciente.

Consideremos el conjunto $\alpha(P) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ donde por cada α_i , la pendiente de la recta que pasa por p_i y p_{i+1} es igual a $\tan(\alpha_i)$. En un barrido incremental, el primer punto que deja la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha es p_i : Para cada $\beta > \alpha_i$, un \mathcal{O}_β -cuadrante con ápice sobre p_i no es P -libre. Éste no es el caso para los puntos que corresponden a cualquier α_j tal que $\alpha_j > \alpha_i$ y $\alpha_j > \beta$. Ver la Figura 4.6.

Para calcular el siguiente valor de β donde un punto dejará la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha, eliminamos α_i de $\alpha(P)$, actualizamos α_{i-1} con el ángulo donde la pendiente de la recta que pasa por p_{i-1} y p_{i+1} es igual a $\tan(\alpha_{i-1})$, y calculamos el nuevo elemento más pequeño de $\alpha(P)$. Repitiendo recursivamente este procedimiento podemos obtener todos los eventos de borrado que corresponden a la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha.

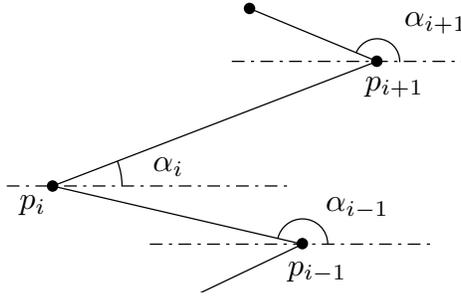


Figura 4.6: Eventos de inserción y borrado para la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha.

Lema 4.2. *Los eventos de inserción y de borrado pueden calcularse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

Demostración. Almacenamos los puntos de P en un árbol binario balanceado que permita hacer búsquedas utilizando las coordenadas en el eje y , y el conjunto $\alpha(P)$ en una pila de prioridad. Por el Lema 4.1, el algoritmo descrito anteriormente consume $O(n \log n)$ tiempo y $O(n)$ espacio para calcular los conjuntos de eventos de inserción y de borrado asociados con la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha. Considerando los ángulos que se muestran en la Figura 4.7, un algoritmo similar puede utilizarse para obtener los eventos correspondientes a las \mathcal{O}_β -escaleras restantes con la misma complejidad en tiempo y espacio. \square

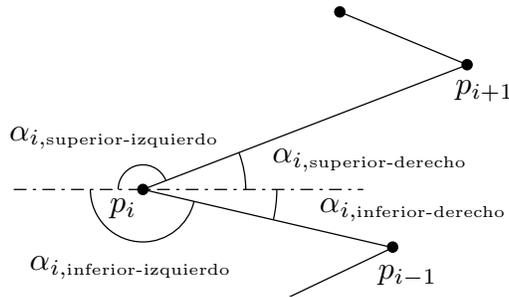


Figura 4.7: Ilustración del Lema 4.2.

Eventos de traslape y liberación. Sean Q_r y Q_l respectivamente, dos \mathcal{O}_β -cuadrantes maximales superior-derecho e inferior-izquierdo. Supongamos que Q_r está soportado por los vértices p_j, p_{j+1} y Q_l por los vértices p_k, p_{k+1} . También, asumamos que los puntos de soporte están etiquetados de acuerdo al orden total de sus escaleras correspondientes (ver la Figura 4.8).

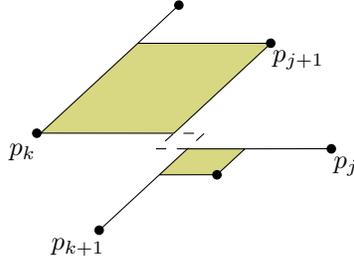


Figura 4.8: Una región de traslape (acotada con líneas discontinuas) generada por la intersección entre dos \mathcal{O}_β -cuadrantes maximales superior-derecho e inferior-izquierdo.

El *evento de traslape completo* de la región de traslape definida por Q_r y Q_l es el ángulo ω para el cual la pendiente de la recta que pasa por p_{j+1} y p_{k+1} es igual a $\tan(\omega)$. Si los puntos de soporte no dejan sus escaleras respectivas, este evento indica el valor de β donde la región de traslape deja de existir.

Sea $\omega(P)$ el conjunto de eventos de traslape de todas las regiones de traslape en la configuración inicial incremental, y $\alpha_d(P)$ el conjunto de todos los eventos de borrado que corresponden a los vértices de las \mathcal{O}_β -escaleras superior-derecha e inferior-izquierda. Sean ω_m y α_m los valores más pequeños en $\omega(P)$ y $\alpha_d(P)$, respectivamente. Al realizar un barrido incremental, para obtener el primer evento de liberación debemos tratar los siguientes casos:

1. El ángulo α_m corresponde a un punto de soporte, y $\alpha_m \leq \omega_m$. En este caso, α_m necesita ser procesado y $\omega(P)$ necesita ser actualizado. Al eliminar un punto de soporte, a lo más terminan dos regiones de traslape (dos eventos de liberación son agregados a $\omega(P)$), y a lo más se genera una nueva región de traslape (un evento de traslape y un evento de traslape completo son agregados a $\omega(P)$). Luego de actualizar, recalculamos $\omega(P)$ y ω_m y α_m , y el proceso se repite.
2. α_m no corresponde a un punto de soporte. En este caso, ω_m es el primer evento de liberación.

Para calcular el siguiente evento de liberación, debemos eliminar el evento de liberación actual de $\omega(P)$, y recalculamos ω_m como describimos anteriormente. Una repetición recursiva de estos pasos nos permite obtener todos los eventos de liberación generados por intersecciones entre las \mathcal{O}_β -escaleras superior-derecha e inferior-izquierda.

Lema 4.3. *Los eventos de traslape y liberación pueden calcularse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

Demostración. Supongamos que almacenamos los puntos de P en un árbol balanceado de búsqueda ordenados de acuerdo con su coordenada en el eje Y , y los conjuntos $\alpha_d(P)$ y $\omega(P)$ en listas de prioridad. Por el Lema 4.1, el algoritmo que describimos anteriormente consume tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ para calcular los conjuntos de eventos de traslape y liberación asociados con la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha e inferior-izquierda. Podemos usar un algoritmo similar para obtener los eventos asociados con las \mathcal{O}_β -escaleras superior-izquierda e inferior-derecha con las mismas complejidades en tiempo y espacio. \square

Mantenimiento de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. Considerando los resultados mencionados anteriormente, el mantenimiento de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ es directo:

1. Calculamos todos los eventos de vértice y de traslape, para almacenarlos en una lista ordenados por aparición durante un barrido incremental.
2. Calculamos $\mathcal{O}_{\beta_I}\mathcal{H}(P)$. Los órdenes totales de los vértices de las cuatro \mathcal{O}_β -escaleras deben almacenarse en árboles balanceados. El conjunto de regiones de traslape puede almacenarse en cualquier estructura de datos de acceso constante (como por ejemplo, una tabla hash).
3. Simulamos el barrido angular recorriendo la lista de eventos. En cada evento de inserción y borrado, actualizamos el conjunto de vértices que corresponda. En cada evento de traslape y liberación actualizamos el conjunto de regiones de traslape.

Por los Lemas 4.2 y 4.3, podemos calcular los conjuntos de eventos de vértice y traslape utilizando tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Ya que tenemos un número lineal de elementos en cada conjunto, podemos mezclarlos para formar un conjunto ordenado en tiempo $O(n \log n)$. Entonces, el Paso 1 se realiza en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

Usando el Teorema 4.1, nos toma tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ calcular $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ para cualquier valor fijo de β . Cada \mathcal{O}_β -escalera contiene a lo más n elementos y por lo tanto, para almacenar sus órdenes totales en árboles balanceados de búsqueda necesitamos tiempo $O(n \log n)$. Utilizando una tabla hash, podemos inicializar el conjunto de regiones de traslape en tiempo $O(n)$. Por lo tanto, el Paso 2 puede realizarse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

En cada evento de inserción y borrado, podemos actualizar el conjunto correspondiente de elementos \mathcal{O}_β -maximales en tiempo $O(\log n)$ por operación. Las actualizaciones en el conjunto de regiones de traslape se pueden realizar en tiempo constante, así que el Paso 3 puede realizarse en tiempo $O(n \log n)$. De este análisis obtenemos que podemos calcular y mantener $\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)$ durante un barrido angular en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$. Por el Teorema 4.1 la complejidad en tiempo es óptima.

Teorema 4.2. *Se puede calcular y mantener $\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)$ mientras β varía desde 0 hasta π en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

4.3. Aplicaciones en optimización

En esta sección extendemos los resultados de la Sección 4.2 para resolver problemas relacionados de optimización. Tratamos primero el problema de maximizar el área y el perímetro de $\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)$ (Secciones 4.3.1 y 4.3.2, respectivamente), y después el problema de ajustar una poligonal con dos codos a un conjunto de puntos (Sección 4.3.3).

4.3.1. Optimización del área.

En esta sección resolvemos el siguiente problema:

Problema del área máxima. Dado un conjunto P de n puntos en el plano, calcular el valor de β tal que el cierre \mathcal{O}_β -convexo de P tiene área máxima.

Sea $\{\beta_1, \dots, \beta_{O(n)}\}$ la secuencia de eventos de vértice y de traslape, ordenados por aparición durante un barrido incremental. Siguiendo la línea de Bae et al. [22] (ver la Figura 4.9), expresamos el área de $\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)$ para cualquier valor de $\beta \in [\beta_i, \beta_{i+1})$ como

$$\text{área}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)) = \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - \sum_i \text{área}(\Delta_i(\theta)) + \sum_j \text{área}(\square_j(\beta)), \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{P}(\beta)$ denota el polígono simple que tiene los mismos vértices que $\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)$ y una arista conectando dos vértices si son elementos consecutivos en una \mathcal{O}_β -escalera. El término $\Delta_i(\beta)$ es el i -ésimo triángulo definido por dos vértices consecutivos en una \mathcal{O}_β -escalera, y $\square_j(\beta)$ es la j -ésima región de traslape definida por la intersección de dos \mathcal{O}_β -escaleras opuestas.

Nuestro enfoque general es mantener los términos de la Ecuación (4.1) durante un barrido angular completo. Primero calculamos el valor óptimo

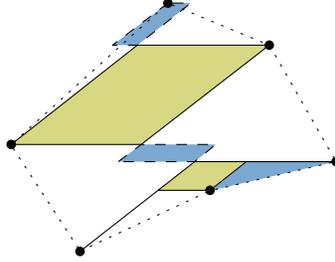


Figura 4.9: El área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. El polígono $\mathcal{P}(\theta)$ está acotado por las líneas punteadas. Un triángulo $\Delta_i(\theta)$ y dos paralelogramos $\square_j(\beta)$ se muestran en color azul.

de β en el intervalo $[\beta_1, \beta_2)$. Después recorremos la secuencia de eventos, actualizando los términos afectados en la Ecuación (4.1) en cada evento. Al mismo tiempo, calculamos el ángulo que localmente maximiza el área en el intervalo $[\beta_i, \beta_{i+1})$. En cada actualización, mantenemos el óptimo local sólo si el valor previo del área es mejorado.

El polígono $\mathcal{P}(\theta)$. Para cualquier valor fijo de β , el polígono puede ser construido a partir de los vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ en tiempo lineal. Una vez construido, nos toma una segunda pasada lineal calcular su área. Durante un intervalo entre eventos el área de $\mathcal{P}(\theta)$ no cambia. Ya que el polígono $\mathcal{P}(\theta)$ sólo depende de los vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, sólo es modificado en eventos de inserción y borrado. Cada evento puede ser procesado en tiempo constante: el área de un triángulo tiene que ser sumada (evento de borrado) o restada (evento de inserción) del valor previo del área de $\mathcal{P}(\theta)$. Ver la Figura 4.10.

Los triángulos $\Delta_i(\theta)$. Un triángulo es definido por un par de vértices consecutivos $\mathcal{P}(\theta)$. Si consideramos una \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha, el área de $\Delta_i(\theta)$ está acotada por una recta que pasa por p_i y p_{i+1} , una recta horizontal que pasa por p_i , y una recta con pendiente $\tan(\beta)$ que pasa por p_{i+1} . En este contexto, el área de $\Delta_i(\theta)$ está dada por

$$\begin{aligned} \text{área}(\Delta_i(\theta)) &= |(x_i - x_{i+1})(y_{i+1} - y_i) + (y_{i+1} - y_i)^2 \cot(\beta)| \\ &= |a_i \pm b_i \cot(\beta)|, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) son respectivamente las coordenadas de los puntos p_i y p_{i+1} y por lo tanto, a_i y b_i son constantes.

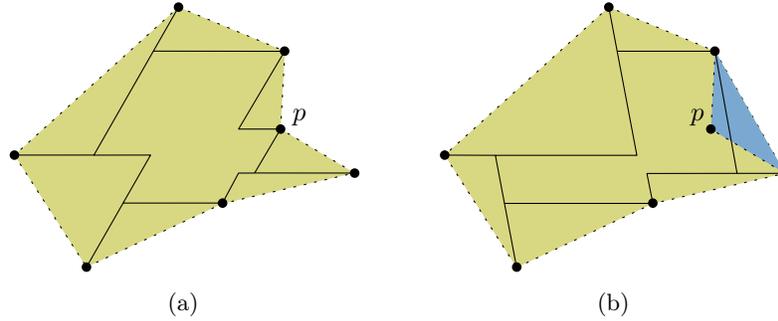


Figura 4.10: Actualización de $\text{área}(\mathcal{P}(\theta))$. (a) El vértice p dejará la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha en un barrido incremental. (b) El área de un triángulo tiene que ser sumada al área de $\mathcal{P}(\theta)$ después del evento de borrado, cuando p ya no es un vértice.

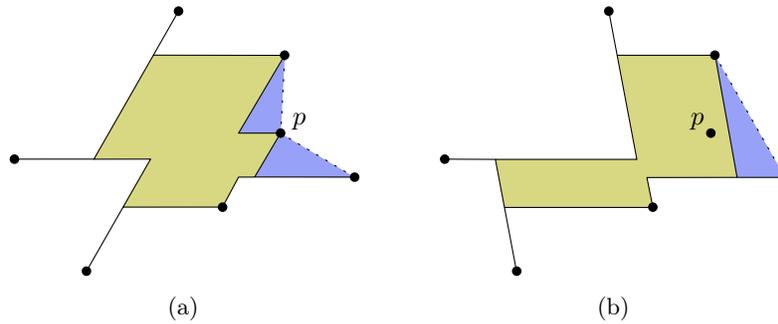


Figura 4.11: Actualizando el término $\sum_i \text{área}(\Delta_i(\theta))$. (a) El punto p dejará la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha durante un barrido incremental. (b) Cuando p ya no es un vértice, dos triángulos son borrados, y se crea un nuevo triángulo.

El término $\sum_i \text{área}(\Delta_i(\theta))$ está afectado por eventos de inserción y borrado y, en cada evento, necesita ser modificado un número constante de veces. Ya que cada vértice de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ soporta a lo más dos \mathcal{O}_β -cuadrantes maximales, en cada evento de borrado son eliminados dos triángulos y se agrega un triángulo. Lo contrario sucede en los eventos de inserción. Ver la Figura 4.11.

Las regiones de traslape $\square_j(\beta)$. Una región de traslape es definida por dos pares de vértices consecutivos de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ que pertenecen a \mathcal{O}_β -escaleras opuestas. Las regiones de traslape están acotadas por paralelogramos con lados paralelos a las rectas en \mathcal{O}_β . Si consideramos dos \mathcal{O}_β -escaleras, una superior-derecha y otra inferior-izquierda, que se cortan como se muestra en

la Figura 4.12, el área del paralelogramo está dada por

$$\begin{aligned} \text{área}(\sphericalangle_j(\beta)) &= |(x_{k+1} - x_{i+1})(y_k - y_i) + (y_{k+1} - y_{i+1})(y_k - y_i) \cot(\beta)| \\ &= |a_j \pm b_j \cot(\beta)|, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $p_i = (x_i, y_i)$, $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, $p_k = (x_k, y_k)$, y $p_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})$ son los vértices que soportan los \mathcal{O}_β -cuadrantes maximales que se traslapan y por lo tanto, a_i y b_i son constantes.

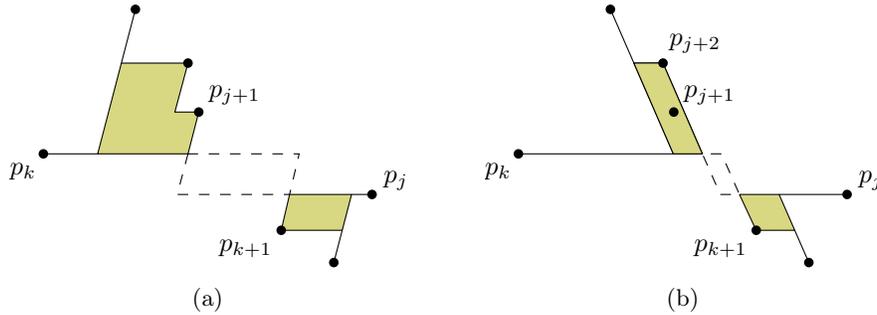


Figura 4.12: Una región de traslape es eliminada porque el vértice p_{j+1} deja la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha durante un barrido incremental.

El término $\sum_j \text{área}(\sphericalangle_j(\beta))$ está afectado por todos los tipos de eventos. Los eventos de traslape y liberación requieren que una sola región de traslape sea agregada o eliminada. En los eventos de inserción y borrado, a lo más se crean o se destruyen dos nuevas regiones de traslape.

Caracterización. Antes de describir nuestro algoritmo, en los siguientes lemas respondemos algunas preguntas básicas sobre el comportamiento de $\text{área}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P))$. Los Lemas 4.4 y 4.5 implican que no es posible restringir el número de ángulos candidatos que optimizan el área. Por otra parte, el Lema 4.6 nos dice que el ángulo de área máxima es de hecho un evento.

Lema 4.4. *Para toda $\beta_0 \in (0, \pi)$ hay un conjunto de puntos P tal que*

$$\max_{\beta} \text{área}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)) \neq \text{área}(\mathcal{O}_{\beta_0} \mathcal{H}(P)).$$

Demostración. Consideremos el sistema coordenado formado por \mathcal{O}_{β_0} . Coloquemos un punto sobre los semiejes y^+ , y^- , y x^+ , y un punto sobre el segundo cuadrante, como se muestra en la Figura 4.13(a). Notemos que $\text{área}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)) = 0$ para toda $\beta \leq \beta_0$ (Figura 4.13(b)), y existe al menos un ángulo $\beta_1 > \beta_0$ tal que $\text{área}(\mathcal{O}_{\beta_1} \mathcal{H}(P)) \neq 0$ (Figura 4.13(c)). Entonces, β_0 no puede ser el ángulo de área máxima. \square

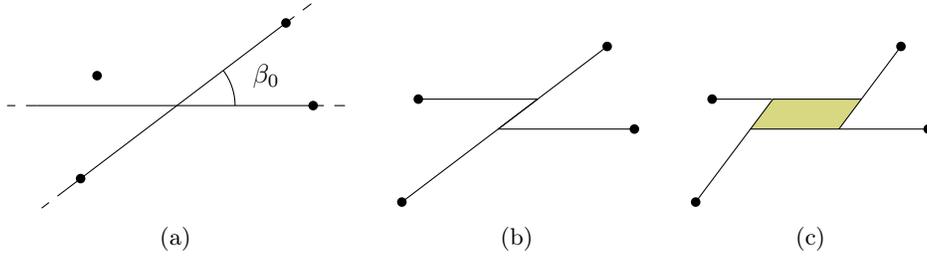


Figura 4.13: Ilustración del Lema 4.4. (a) El conjunto de puntos, (b) $\text{área}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)) = 0$ cuando $\beta \leq \beta_0$, (c) $\text{área}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)) \neq 0$ en algún $\beta > \beta_0$.

Lema 4.5. *Para cualquier $\beta_0, \beta_1 \in (0, \pi)$ existe un conjunto de puntos P tal que $\text{área}(\mathcal{O}_\beta(P))$ tiene máximos locales en β_0 y β_1 .*

Demostración. Sean ℓ_0 una recta con pendiente $\tan(\beta_0)$ y ℓ_1 una recta con pendiente $\tan(\beta_1)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\beta_0 < \beta_1$. Sean p_l, p_r, p_t , y p_c los puntos ubicados respectivamente, en las esquinas izquierda, derecha, superior, y en el interior del triángulo acotado por el eje x , ℓ_0 , y ℓ_1 . Ver la Figura 4.14.

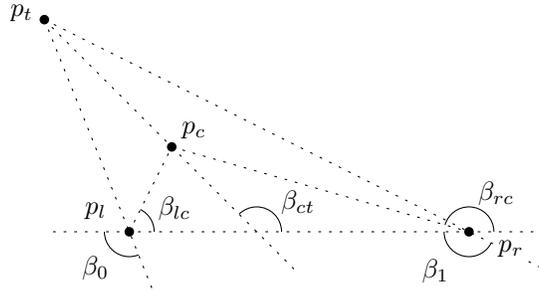


Figura 4.14: La configuración de puntos.

Consideremos los ángulos β_{lc} , β_{ct} , y β_{rc} que se muestran en la Figura 4.14. Notemos que $\beta_{lc} < \beta_0 < \beta_{ct} < \beta_1 < \beta_{rc}$. Utilizando un barrido desde la configuración inicial incremental el primer evento de liberación es β_{lc} . A partir de aquí, el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ es el área de un paralelogramo \square_{lc} de altura constante, así que la base de \square_{lc} y el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ aumentan o disminuyen simultáneamente mientras β cambia. Mientras β cambia desde β_{lc} hasta β_0 , la base de \square_{lc} aumenta hasta β_0 , donde hay un máximo local. Entonces, la base de \square_{lc} disminuye desde β_0 hasta β_{ct} , para aumentar de nuevo desde β_{ct} hasta β_1 . En β_1 hay un segundo máximo local, ya que la base de \square_{lc} comienza a disminuir de nuevo después de β_1 hasta el último

evento de traslape en β_{rc} , donde el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ es igual a cero. Ver la Figura 4.15. \square

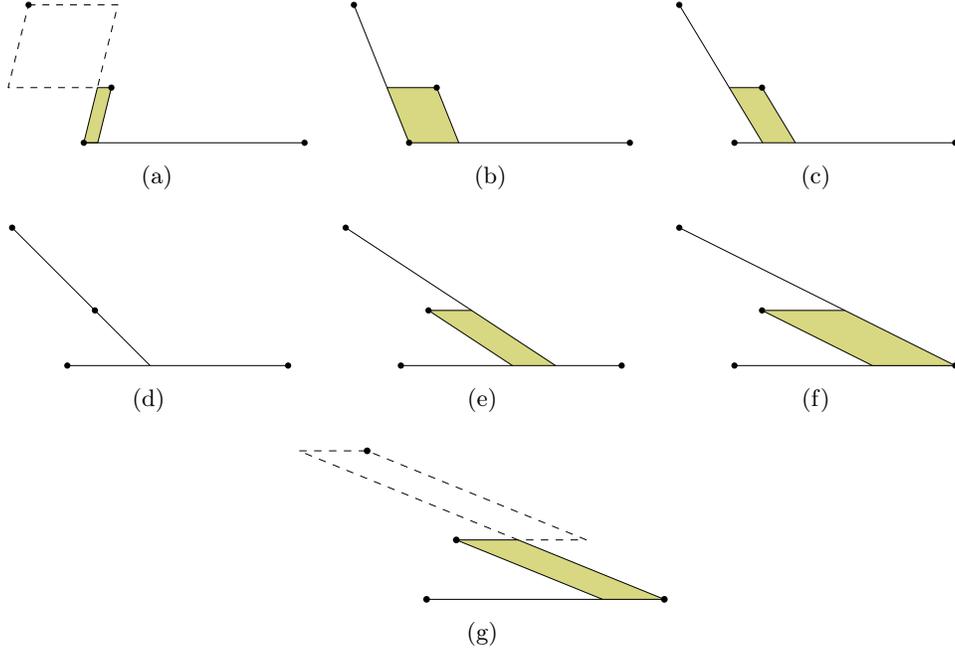


Figura 4.15: Barrido incremental en el conjunto de puntos de la Figura 4.14. (a) $\beta = \beta_0 - \epsilon$. (b) Hay un máximo local en $\beta = \beta_0$. (c) $\beta \in (\beta_0, \beta_{ct})$. (d) Hay un mínimo local en $\beta = \beta_{ct}$. (e) $\beta \in (\beta_{ct}, \beta_1)$. (f) Hay un segundo máximo local en $\beta = \beta_1$. (g) $\beta = \beta_1 + \epsilon$.

Lema 4.6. *El área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ alcanza su máximo en valores de β que pertenecen a la secuencia de eventos.*

Demostración. Consideremos el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ dada por la Ecuación (4.1). Por las Ecuaciones (4.2) y (4.3), el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)) &= \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - \sum_i \text{área}(\triangle_i(\theta)) + \sum_j \text{área}(\square_j(\beta)) \\ &= \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - \sum_i |a_i \pm b_i \cot(\beta)| + \sum_j |a_j \pm b_j \cot(\beta)|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Si consideramos las diferentes configuraciones que definen un triángulo (ver la Figura 4.16), podemos expresar $|a_i \pm b_i \cot(\beta)|$ como $a_i + b_i \cot(\beta)$ o bien $a_i - b_i \cot(\beta)$, según la configuración específica. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_i \text{área}(\Delta_i(\theta)) &= \sum_i |a_i \pm b_i \cot(\beta)| \\ &= \sum_{i_0} (a_{i_0} + b_{i_0} \cot(\beta)) + \sum_{i_1} (a_{i_1} - b_{i_1} \cot(\beta)) = a + b \cot(\beta). \end{aligned}$$

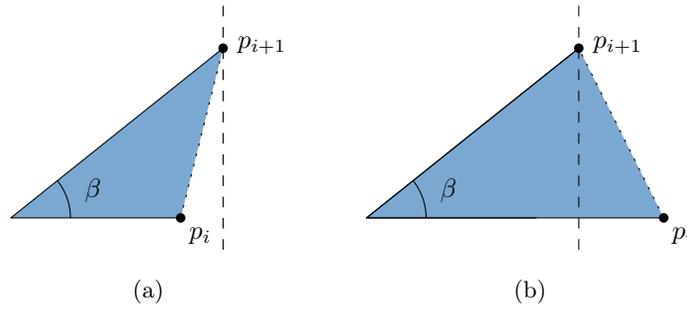


Figura 4.16: Posiciones relativas entre los vértices del triángulo $\Delta_i(\theta)$.

Podemos hacer un análisis de casos similar para las regiones de traslape, para obtener de la Ecuación (4.3) una expresión con la forma $c + d \cot(\beta)$. En un intervalo entre eventos P no cambia, y su área se mantiene constante. Entonces, en un intervalo $[\beta_i, \beta_{i+1})$ podemos reescribir:

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)) &= \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - \sum_i |a_j \pm b_j \cot(\beta)| + \sum_j |a_j \pm b_j \cot(\beta)| \\ &= \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) - (a + b \cot(\beta)) + (c + d \cot(\beta)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} &= \text{área}(\mathcal{P}(\theta)) + (c - a) + (d - b) \cot(\beta) \\ &= A + B \cot(\beta), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde A y B contienen la suma de todas las constantes de los términos en la Ecuación (4.5). Notemos que la Ecuación (4.6) es monótona en cualquier intervalo $[\beta_i, \beta_{i+1})$, ya que es monótona en $(0, \pi)$. Dependiendo de los valores particulares de A y B , $\text{área}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P))$ puede ser no-decreciente o no-creciente. Entonces, el máximo local es igual a β_i o a β_{i+1} . \square

El algoritmo de búsqueda. Describimos a continuación el algoritmo para calcular el ángulo que optimiza el área.

1. Recorremos la secuencia de eventos para identificar el primer evento de liberación β_d y el último evento de traslape β_c . Restringimos la secuencia de eventos para que inicie en β_d y termine en β_c , de forma que $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ tenga al menos una componente conexa en cada intervalo. Los eventos ignorados no tienen ningún efecto en el resultado final, ya que pertenecen a la configuración inicial (incremental o decreciente) donde $\text{área}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)) = 0$.
2. En el primer intervalo calculamos $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ y utilizamos la Ecuación (4.1) para calcular $\text{área}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P))$, manteniendo el ángulo β_m de área máxima.
3. Recorremos la secuencia de eventos. En cada evento:
 - a) Actualizamos el conjunto de vértices y de regiones de traslape de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$.
 - b) Procesamos cada evento actualizando la Ecuación (4.1) como explicamos anteriormente.
 - c) Calculamos el ángulo β_l que optimiza el área localmente. Reemplazamos el valor de β_m con β_l si $\text{área}(\mathcal{O}_{\beta_l}\mathcal{H}(P)) > \text{área}(\mathcal{O}_{\beta_m}\mathcal{H}(P))$.

Hay un número lineal de eventos en total, por lo que el Paso 1 toma tiempo $O(n)$. La Ecuación (4.1) contiene a lo más un número lineal de términos, ya que hay a lo más un número lineal de vértices y regiones de traslape. Entonces, por el Teorema 4.1 y las discusiones anteriores, el Paso 2 toma tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.

De la Sección 4.2.2, las actualizaciones en el Paso 3a consumen tiempo logarítmico. Cada evento resulta en un número constante de modificaciones a la Ecuación (4.1), como describimos anteriormente en esta sección. Por el Lema 4.6 podemos obtener el ángulo de área máxima en tiempo constante. Ya que hay un número lineal de eventos, el Paso 3 se realiza en tiempo $O(n \log n)$. De este análisis obtenemos el siguiente teorema, donde la cota inferior de tiempo se obtiene de mantener $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$.

Teorema 4.3. *Calcular el valor (o valores) de $\beta \in (0, \pi)$ tal que $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ tiene área máxima toma tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

4.3.2. Optimización del perímetro.

En esta sección resolvemos el siguiente problema:

Problema del perímetro máximo. Dado un conjunto P de n puntos en el plano, calcular el valor de β para el cual el cierre \mathcal{O}_β -convexo de P tiene perímetro máximo.

El perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ está dado por la fórmula siguiente:

$$\text{per}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)) = \sum_i \text{per}(\angle_i(\beta)) - \sum_j \text{per}(\square_j(\beta)) - \sum_k \text{per}(\setminus_k(\beta)), \quad (4.7)$$

donde $\angle_i(\beta)$ y $\square_j(\beta)$ denotan los escalones y los paralelogramos definidos por las escaleras respectivamente, y \setminus_k denota una de las (a lo más cuatro) antenas de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, es decir, el segmento de una \mathcal{O}_β -escalera que acota una región de área cero de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$. Ver la Figura 4.9.

El mismo enfoque y prácticamente los mismos argumentos que utilizamos para maximizar el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ pueden ser utilizados en este problema. Siguiendo las mismas ideas, primero analizamos el cálculo y mantenimiento de la Ecuación (4.7), y después presentamos adaptaciones de los Lemas 4.4 a 4.6 para finalizar con la descripción del algoritmo.

Los escalones $\angle_i(\beta)$. Consideremos una \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha (ver Figura 4.11), el perímetro de $\angle_i(\beta)$ está dado por la Ecuación (4.8), donde $p_i = (x_i, y_i)$ y $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ son los puntos que soportan el i -ésimo escalón. Los vértices en las escaleras tienen coordenadas en y no-decrecientes, por lo que a_i siempre es positiva. Los eventos se procesan de la misma forma en que procesamos los eventos en la sección anterior.

$$\begin{aligned} \text{per}(\angle_i(\beta)) &= |(y_{i+1} - y_i) \cot(\beta) + (y_{i+1} - y_i) \csc(\beta) + (x_i - x_{i+1})| \\ &= |a_i (\cot(\beta) + \csc(\beta)) \pm b_i|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Las regiones de traslape $\square_j(\beta)$. Si consideramos un par de \mathcal{O}_β -escaleras superior-derecha e inferior-izquierda como se muestra en la Figura 4.12, el perímetro de una región de traslape está dada por la Ecuación (4.9). Las constantes c_j y d_j son siempre positivas. Los eventos se procesan de la misma forma que al actualizar las regiones de traslape para optimizar el área de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$.

$$\begin{aligned} \text{per}(\square_j(\beta)) &= |2(y_{i+1} - y_{k+1}) \cot(\beta) + 2(y_k - y_i) \csc(\beta) - (x_{i+1} - x_{k+1})| \\ &= |c_j \cot(\beta) + d_j \csc(\beta) \pm e_j|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Las antenas $\setminus_k(\beta)$. Una antena es un “semiescalón” en el extremo de una \mathcal{O}_β -escalera. Al igual que los escalones y los triángulos, una antena está definida por dos puntos \mathcal{O}_β -maximales consecutivos. Si consideramos una \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha, el perímetro de una antena está dado por la Ecuación (4.10) si es el primer semiescalón de una escalera, y por la Ecuación (4.11) si es el último semiescalón (ver la Figura 4.17). En ambas ecuaciones consideramos que $p_i = (x_i, y_i)$ es el punto que soporta el semiescalón correspondiente. La constante f_k siempre es positiva.

$$\begin{aligned} \text{per}_f(\setminus_k) &= |(y_{i+1} - y_i) \cot(\beta) + (x_i - x_{i+1})| \\ &= |f_k \cot(\beta) \pm g_k|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{per}_l(\setminus_k) &= (y_{i+1} - y_i) \csc(\beta) \\ &= f_k \cot(\beta). \end{aligned} \quad (4.11)$$

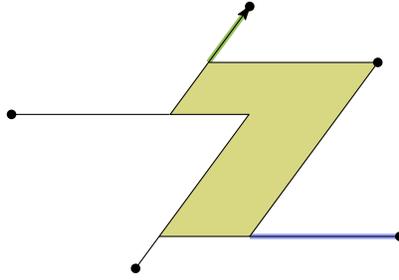


Figura 4.17: Dos antenas: una en el primer segmento horizontal y la otra en el último segmento no-horizontal de la \mathcal{O}_β -escalera superior-derecha.

Considerando el análisis por casos que hicimos en la sección anterior, podemos reescribir las Ecuaciones (4.8) a (4.11) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_i \text{per}(\angle_i(\beta)) &= \sum_i |a_i \cot(\beta) + a_i \csc(\beta) \pm b_i| \\ &= \sum_{i_0} a_{i_0} \cot(\beta) + a_{i_0} \csc(\beta) + b_{i_0} \\ &\quad + \sum_{i_1} a_{i_1} \cot(\beta) + a_{i_1} \csc(\beta) - b_{i_1} \\ &= a \cot(\beta) + a \csc(\beta) + b. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\sum_j \text{per}(\angle_j(\beta)) &= \sum_j |c_j \cot(\beta) + d_j \csc(\beta) \pm e_j| \\
&= \sum_{j_0} c_{j_0} \cot(\beta) + d_{j_0} \csc(\beta) + e_{j_0} \\
&\quad + \sum_{j_1} c_{j_1} \cot(\beta) + d_{j_1} \csc(\beta) - e_{j_1} \\
&= c \cot(\beta) + d \csc(\beta) + e.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\sum_k \text{per}_l(\setminus_k) &= |f_k \cot(\beta) \pm g_k| \\
&= \sum_{k_0} f_{k_0} \cot(\beta) + g_{k_0} + \sum_{k_1} f_{k_1} \cot(\beta) - g_{k_1} \\
&= f \cot(\beta) + g,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

y utilizar las Ecuaciones (4.12) a (4.14) para reescribir la Ecuación (4.7) como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{per}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)) &= \sum_i \text{per}(\angle_i(\beta)) - \sum_j \text{per}(\angle_j(\beta)) - \sum_k \text{per}(\setminus_k(\beta)) \\
&= (a + c + f) \cot(\beta) + (a + d) \csc(\beta) + (b + e + g) \\
&= A \cot(\beta) + B \csc(\beta) + C.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Notemos que todas las constantes de la Ecuación (4.15) que suman A y B son siempre positivas. Además, en un intervalo hay a lo más cuatro antenas, ya que cada una contiene los puntos de P con mayores y menores abscisas y ordenadas (ver la Figura 4.17). Por lo tanto, el número de términos con el que las antenas contribuyen a la Ecuación (4.7) es constante y, con excepción de C , no modifican los signos originales de los demás términos.

Por simplicidad, ignoraremos las antenas en la optimización de $\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P)$, utilizando una versión de la Ecuación (4.7) sin el término $\sum_k \text{per}(\setminus_k(\beta))$. Por la discusión anterior, ambas expresiones tienen máximos en los mismos valores de β .

Caracterización. A continuación resolvemos preguntas sobre el comportamiento de $\text{per}(\mathcal{O}_\beta \mathcal{H}(P))$ similares a las que resolvimos con los Lemas 4.4 a 4.6 en la Sección 4.3. Específicamente, mostramos que el ángulo de perímetro máximo es un evento (Lema 4.9) y, además de ésta, no parece posible establecer alguna otra restricción en los ángulos candidatos (Lemas 4.7 y 4.8).

Lema 4.7. *Para cualquier $\beta_0 \in (0, \pi)$, existe un conjunto de puntos tal que*

$$\max_{\beta} \text{per}(\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P)) \neq \text{per}(\mathcal{O}_{\beta_0} \mathcal{H}(P)).$$

Demostración. Consideremos el sistema coordenado formado por \mathcal{O}_{β_0} . Colocamos un punto en el origen, y un punto en el segundo y cuarto cuadrantes, como se muestra en la Figura 4.18(a). Ya que el conjunto de puntos es monótono respecto de los ejes coordenados, $\mathcal{O}_{\beta_0} \mathcal{H}(P) = P$. Por lo tanto, $\text{per}(\mathcal{O}_{\beta_0} \mathcal{H}(P))$ es igual a cero.

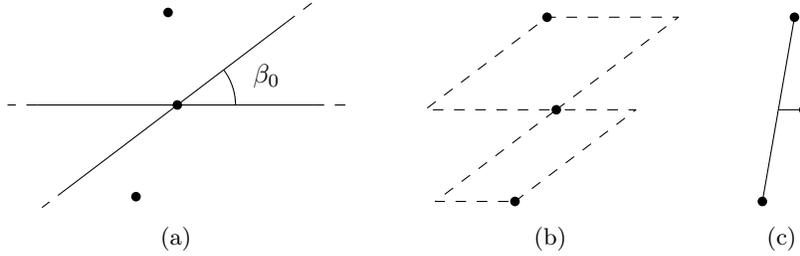


Figura 4.18: Ilustración del Lema 4.7. (a) El conjunto de puntos. (b) $\text{per}(\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P)) = 0$ para $\beta \leq \beta_0$. (c) $\text{per}(\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P)) \neq 0$ para algún $\beta > \beta_0$.

Notemos que $\text{per}(\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P)) = 0$ para cualquier $\beta \leq \beta_0$ (Figura 4.18(b)), y que existe al menos un $\beta_1 > \beta_0$ tal que $\text{per}(\mathcal{O}_{\beta_1} \mathcal{H}(P)) \neq 0$ (Figura 4.18(c)). Claramente, β_0 no es el ángulo de máximo perímetro. \square

Lema 4.8. *Para cualesquiera $\beta_0, \beta_1 \in (0, \pi)$, existe un conjunto de puntos P tal que $\text{área}(\mathcal{O}_{\beta}(P))$ tiene un máximo local en β_0 y β_1 .*

Demostración. Sea Δ_t un triángulo agudo acotado por el eje x , y dos rectas ℓ_{tl}, ℓ_{tr} con pendientes $\tan(\beta_{tl})$ y $\tan(\beta_{tr})$, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\beta_{tl} < \beta_{tr}$, y que el punto de intersección entre ℓ_{tl} y ℓ_{tr} se encuentra en el semiplano y^+ .

Consideremos el conjunto $P' = \{p_l, p_r, p_t\}$ de puntos ubicados respectivamente, en los vértices izquierdo, derecho, y superior de Δ_t . Notemos que, en cualquier posición inicial, el perímetro de $\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P')$ es constante e igual a la longitud de la base de Δ_t . Realizando un barrido incremental, desde β_{tl} hasta β_{tr} el perímetro está formado adicionalmente por el segmento de recta $\ell_{t,b}$ que conecta p_t y un punto p_b que recorre la base de Δ_t desde p_l hasta p_r . Durante este intervalo, tanto $\ell_{t,b}$ como el perímetro de $\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P')$ aumentan o disminuyen simultáneamente mientras β cambia. En estas condiciones, el perímetro de $\mathcal{O}_{\beta} \mathcal{H}(P')$ tiene un mínimo local en $\beta = \frac{\pi}{2}$ y por

lo tanto, un máximo local en β_{tl} ($\text{per}(\mathcal{O}_{\beta_{tl}}\mathcal{H}(P')) > \text{per}(\mathcal{O}_{\beta_{tl}-\varepsilon}\mathcal{H}(P'))$) y un segundo máximo local en β_{tr} ($\text{per}(\mathcal{O}_{\beta_{tr}}\mathcal{H}(P')) > \text{per}(\mathcal{O}_{\beta_{tr}+\varepsilon}\mathcal{H}(P'))$). Ver la Figura 4.19.

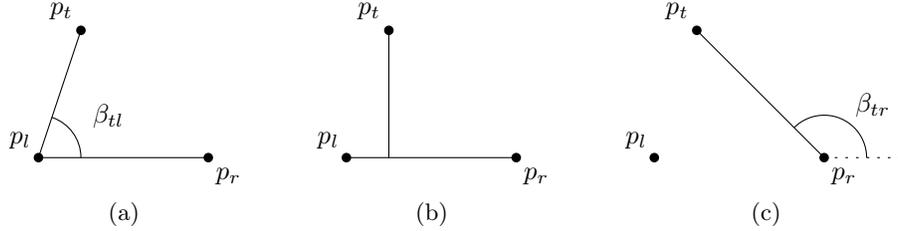


Figura 4.19: (a) y (c) Máximos locales en β_{tl} y β_{tr} . (b) Un mínimo local en $\frac{\pi}{2}$.

Sean Δ_b un segundo triángulo agudo acotado por el eje x , y un segundo par de rectas ℓ_{bl}, ℓ_{br} con pendientes $\tan(\beta_{bl})$ y $\tan(\beta_{br})$ que pasan por p_l y p_r , respectivamente. Los ángulos son tales que $\beta_{bl} > \beta_{br}$, y el punto de intersección p_b entre ℓ_{bl} y ℓ_{br} se encuentran en el semiplano Y^- . Notemos que, si agregamos p_b al conjunto P' , el argumento anterior es válido para Δ_t y Δ_b , de forma que el perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P')$ tiene ahora máximos locales en $\beta_{tl}, \beta_{tr}, \beta_{bl}$, y β_{br} . Ver la Figura 4.20.

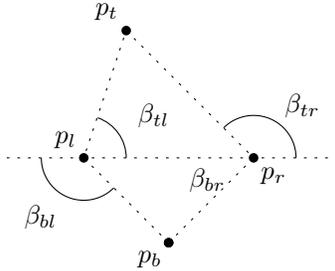


Figura 4.20: Los ángulos con máximos locales.

Dados los ángulos β_0 y β_1 , construimos el conjunto de puntos que describimos anteriormente. En esta construcción, $\beta_{tl} \leq \frac{\pi}{2} < \beta_{tr}$ y $\beta_{bl} > \frac{\pi}{2} \geq \beta_{br}$. Asignamos valores a los ángulos $\beta_{tl}, \beta_{tr}, \beta_{bl}, \beta_{br}$ de forma que dos de ellos sean iguales que β_0 y β_1 según corresponda con los casos $\{\beta_0, \beta_1\} < \frac{\pi}{2}$, $\{\beta_0, \beta_1\} > \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 \leq \frac{\pi}{2} < \beta_1$ y $\beta_0 > \frac{\pi}{2} \geq \beta_1$. El perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P')$ tendrá máximos locales en β_0 y β_1 . \square

Lema 4.9. *El perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ alcanza su máximo en valores de β que pertenecen a la secuencia de eventos.*

Demostración. Por la Ecuación (4.15) sabemos que el perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ está dado por la siguiente ecuación:

$$\text{per}(\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)) = A \cot(\beta) + B \csc(\beta) + C,$$

donde $A, B \geq 0$. Buscando puntos críticos en esta expresión, llegamos a

$$\cos(\beta) = -\frac{A}{B}, \quad (4.16)$$

donde $\beta \neq 0, \pi$. Al analizar las posibles raíces en la Ecuación (4.16), tenemos los siguientes casos:

1. $A > B$. No hay raíces en este caso, ya que $\frac{A}{B} > 1$. La función perímetro es monótona en un intervalo entre eventos.
2. $A = B$. De nuevo no hay raíces en este caso, ya que β no puede ser igual que 0 o π . La función perímetro es de nuevo monótona en un intervalo entre eventos.
3. $A < B$. Hay una raíz en $\beta = \cos^{-1}(-\frac{A}{B})$, ya que A y B son siempre positivos y diferentes de cero. En un intervalo entre eventos tenemos un punto de inflexión, así que hay dos máximos locales o dos mínimos locales, ambos ubicados en los extremos del intervalo. \square

El algoritmo de búsqueda. Buscaremos los ángulos que maximizan el perímetro de la misma forma en que buscamos los ángulos que maximizan el área. Primero calculamos la lista de eventos, después obtenemos el ángulo de máximo perímetro en el primer intervalo, y finalmente repetimos este proceso en los intervalos restantes. Mientras recorremos la lista de eventos, actualizamos el ángulo óptimo sólo si el valor previo del perímetro es mejorado. Un análisis de complejidad similar también es válido.

Teorema 4.4. *Calcular los valores de $\beta \in (0, \pi)$ para los cuales $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$ tiene perímetro máximo toma $O(n \log n)$ tiempo y $O(n)$ espacio.*

4.3.3. El problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado

Para $k \geq 1$, $\theta \in [0, \pi)$, y $\beta \in (0, \pi)$, una *cadena (k, β) -poligonal con orientación θ* , $\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)$, es una cadena con $2k - 1$ eslabones alternantes consecutivos con pendientes $\tan(\theta)$ y $\tan(\theta + \beta)$ tal que los eslabones de los extremos son rayos con pendiente $\tan(\theta)$. Denotemos con $\ell_{i,\beta}(\theta)$ la recta que pasa por

$p_i \in P$ con pendiente $\tan(\theta + \beta)$. La *distancia de ajuste* entre p_i y $\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)$ está dada por la expresión

$$d_f(p_i, \mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)) = \min_{p \in \ell_{i,\beta}(\theta) \cap \mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)} d(p_i, p),$$

donde $d(p_i, p)$ representa la distancia euclidiana entre p_i y p . La *tolerancia* de $\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)$ con respecto de P es la distancia máxima de ajuste entre $\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)$ y los elementos de P , es decir

$$\mu(\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta), P) = \max_{p_i \in P} d_f(p_i, \mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)).$$

El problema del (k, β) -ajuste para P con el criterio Min-Max consiste en encontrar una cadena poligonal $\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta)$ que minimiza la tolerancia $\mu(\mathcal{C}_{k,\beta}(\theta), P)$. Ver la Figura 4.21.

Teorema 4.5 (Díaz-Báñez et al. [54]). *El problema del $(2, \frac{\pi}{2})$ -ajuste puede resolverse en tiempo $\Theta(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

Consideramos el caso en el que θ tiene un valor constante, digamos 0, y queremos encontrar la cadena $\mathcal{C}_{2,\beta}(0) = \mathcal{C}_{2,\beta}$ que minimiza la tolerancia. Formalmente, resolvemos el siguiente problema.

Problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado. Dado un conjunto P de n puntos en el plano, calcular la cadena poligonal $\mathcal{C}_{2,\beta}$ tal que $\mu(\mathcal{C}_{2,\beta}, P)$ tiene valor mínimo.

Consideremos el algoritmo utilizado en [54] para obtener la cota de tiempo $O(n \log n)$ para el problema del $(2, \frac{\pi}{2})$ -ajuste que es usada para demostrar el Teorema 4.5. El cierre $\mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}}$ -convexo de P es utilizado como una herramienta para resolver el problema en tiempo $O(\log n)$ para un valor fijo de θ en un intervalo cerrado de orientaciones $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Se crea una secuencia de eventos de un número lineal de intervalos de orientaciones para mantener $\mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}}\mathcal{H}(P)$ mientras θ crece desde 0 hasta 2π .

Para resolver el problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado podemos seguir exactamente las mismas técnicas. Sugerimos al lector la referencia [54] para ver los cambios evidentes que deben hacerse para utilizar una estructura diferente. Más concretamente, la estructura $\mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}}\mathcal{H}(P)$ es reemplazada por $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, que también necesita mantener un número lineal de *eventos de intervalo* $[\beta_i, \beta_{i+1}]$, y donde el barrido angular se realiza en β . Entonces, podemos reescribir los Lemas 3 y 4 en [54] de la siguiente forma:

- (i) Dado un valor $\beta \in [\beta_i, \beta_{i+1}]$, la solución óptima del problema del $(2, \beta)$ -ajuste para β está definida por la recta $\ell_{i,\beta}$ con pendiente $\tan(\beta)$ que pasa por un punto p_i de P que nos da una bipartición de P .
- (ii) La solución óptima del problema del $(2, \beta)$ -ajuste para un intervalo de eventos $[\beta_i, \beta_{i+1}]$ ocurre en uno de los extremos del intervalo, es decir, en β_i o β_{i+1} , o en un valor $\beta_0 \in [\beta_i, \beta_{i+1}]$ cuando la tolerancia izquierda y derecha son iguales.

Usando las propiedades (i), (ii) y siguiendo el algoritmo de mantenimiento de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, el problema se resuelve como describimos a continuación:

ALGORITMO $(2, \beta)$ -AJUSTE NO ORIENTADO

1. Calcular el error de tolerancia óptimo en el primer intervalo entre eventos.
 2. Recorrer la secuencia de eventos, obteniendo el error óptimo de tolerancia en cada intervalo.
 3. Actualizar la solución anterior sólo cuando es mejorada.
-

El enfoque y argumentos utilizados en el Teorema 4.5 siguen siendo válidos en el caso del problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado (ver la Figura 4.21). Como consecuencia, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *El problema del $(2, \beta)$ -ajuste no orientado puede resolverse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

4.4. Conclusiones

Hemos presentado un algoritmo para mantener el cierre \mathcal{O}_β -convexo de un conjunto de puntos en el plano mientras β cambia desde 0 hasta π , y extendimos este resultado para resolver problemas relacionados de optimización. Consideramos los problema de maximizar el área y el perímetro de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, y consideramos una variación del problema del 2-ajuste estudiado en [54]. En nuestra versión, la curva de ajuste es una poligonal alternante con segmentos que forman un ángulo β .

Una extensión natural de este trabajo es reemplazar \mathcal{O}_β con un conjunto \mathcal{O} que contenga más de dos rectas. Podemos obtener diferentes variantes pueden

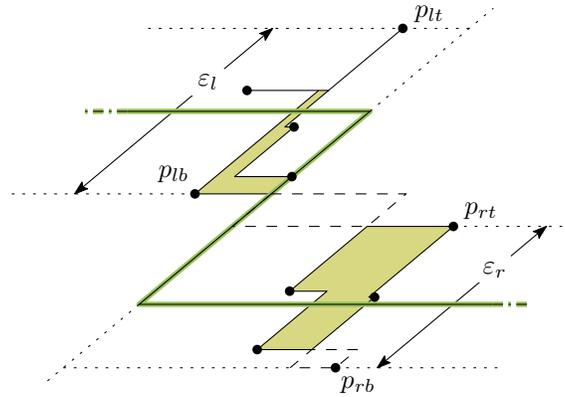


Figura 4.21: La cadena poligonal $\mathcal{C}_{2,\beta}$ y el cierre \mathcal{O}_β -convexo de P .

al restringir las orientaciones o el número de rectas en \mathcal{O} . En particular, la caracterización de las funciones de área y perímetro en cada variante parecen ser problemas interesantes y no triviales.

Al igual que el cierre convexo ortogonal, el cierre \mathcal{O}_β -convexo puede utilizarse como separador o una curva envolvente. Ya que siempre se encuentra contenido en el cierre convexo estándar (y por lo tanto, en otras curvas envolventes tradicionales), también es relevante para aplicaciones donde se requiere que el separador o la curva de contención tengan área mínima. Finalmente, notemos que podemos extender fácilmente los resultados de la Sección 4.2 para optimizar el número de vértices de $\mathcal{O}_\beta\mathcal{H}(P)$, manteniendo el número de vértices en cada intervalo entre eventos. Sin mucho esfuerzo, el enfoque y argumentos de Alegría-Galicia, Seara y Urrutia [19] pueden extenderse al caso de la \mathcal{O}_β -convexidad, y aplicarse a problemas relacionados con la contención entre cierres \mathcal{O}_β -convexos de puntos coloreados.

Capítulo 5

Captura de puntos con un polígono

En este capítulo estudiamos el problema de rotar un polígono simple hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos, ambos en el plano.

Consideramos variantes de este problema en las que el centro de rotación debe encontrarse en un punto dado, un segmento, una recta, o una cadena poligonal. Resolvemos también una extensión en 3D en la que rotamos un poliedro alrededor de un punto dado hasta que contenga el máximo número de elementos de un conjunto de puntos en el espacio.

5.1. Introducción

Sean P un polígono simple con m vértices, y S un conjunto de n puntos en posición general, ambos en el plano. En este capítulo estudiamos el problema de calcular el ángulo por el que debemos rotar P para que contenga el máximo número de puntos de S . Consideramos variantes de este problema en el plano y en el espacio. Llamamos a estas variantes la familia de problemas de *Máxima Cobertura bajo Rotación (MCR)*. Definimos a continuación los problemas de esta familia que resolveremos a lo largo de este capítulo:

Problema de Máxima Cobertura bajo Rotación con centro Fijo (MCR-F). Dado un punto r en el plano, calcular el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que, después de rotar P alrededor de r por θ en sentido horario, el número de puntos de S contenidos en P es el máximo¹.

Problema de Máxima Cobertura bajo Rotación con centro Restringido a un Segmento (MCR-RS). Dado un segmento de recta ℓ , encontrar un punto $r \in \ell$ y un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que, luego de rotar P alrededor de r por θ en sentido horario, el número de puntos de S contenidos en P es el máximo.

Adicionalmente, comenzamos el estudio de estos problemas en 3D con la siguiente versión del problema MCR-F:

Problema de Máxima Cobertura bajo Rotación en 3D con centro Fijo (MCR-F3D). Dado un punto r , un poliedro P y un conjunto de puntos S en \mathbb{R}^3 , calcular el azimut y la altitud $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$ que dan la dirección en la esfera unitaria tal que, luego de rotar P llevando el eje z hacia esa dirección, el número de puntos de S contenidos en P es el máximo.

Mostramos que el problema MCR-F es 3SUM-hard [67], es decir, que resolver este problema en tiempo $O(n^{2-O(1)})$ implica la existencia de un algoritmo con la misma complejidad para resolver el problema 3SUM². Después, presentamos dos algoritmos para resolver el problema MCR-F: el primero consume tiempo $O(nm \log(nm))$ y espacio $O(nm)$, y el segundo toma tiempo $O((n+k) \log n + m \log m)$ y espacio $O(n+m+k)$, donde $k = O(nm)$. Des-

¹Al resolver este problema, en lugar de girar P en sentido horario, giramos equivalentemente los puntos de S en sentido antihorario.

²Actualmente se conjetura que un algoritmo con esa complejidad no existe ni siquiera en tiempo esperado [84].

cribimos también un algoritmo para resolver el problema MCR-RS en tiempo $O(n^2m^2 \log(nm))$ y espacio $O(n^2m^2)$. Este algoritmo puede ser extendido fácilmente para resolver una variante del problema MCR-RS en la que r se encuentra sobre una recta. Finalmente, resolvemos el problema MCR-F3D en tiempo $O(n^2m^2 \log(nm))$ y espacio $O(n^2m^2)$ extendiendo las técnicas para resolver el problema MCR-F.

5.2. Máxima cobertura con centro fijo

En esta sección estudiamos el problema de máxima cobertura bajo rotación con centro fijo. Dado un punto r en el plano y un punto $p \in S$, sea $C_p(r)$ el círculo con centro r y radio $|\overline{rp}|$. Si rotamos S en sentido antihorario alrededor de r , $C_p(r)$ es la curva descrita por p durante una rotación de 2π de S alrededor de r . Los extremos de los arcos circulares que resultan de cortar P y $C_p(r)$ determinan los ángulos de rotación donde p entra (*evento de entrada*) y sale (*evento de salida*) de P . En el peor caso, el número de estos eventos por elemento de S es $O(m)$, como se muestra en la Figura 5.1. Si consideramos todos los puntos de S podemos tener a lo más $O(nm)$ eventos.

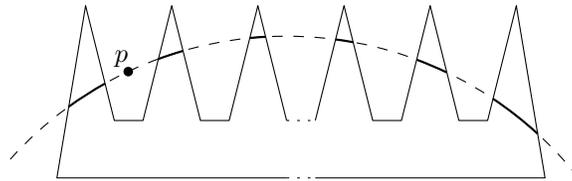


Figura 5.1: Un polígono con forma de peine puede generar $\Omega(m)$ eventos de entrada y salida por cada punto de S .

5.2.1. Reducción a 3SUM-hard

Ahora mostramos que el problema MCR-F es 3SUM-hard, por una reducción del problema *Contención entre Puntos y Segmentos*: Dado un conjunto A de n números reales y un conjunto B de $m = O(n)$ intervalos disjuntos por pares en el eje real, ¿existe un número real u tal que $A + u \subseteq B$? Se sabe que este problema es 3SUM-hard [26].

Teorema 5.1. *El problema MCR-F es 3SUM-hard.*

Demostración. Sea I un intervalo del eje real que contiene el conjunto A de puntos, y el conjunto B de intervalos que definen una instancia del problema

Contención entre Puntos y Segmentos. Podemos *envolver*³ I en un círculo C cuyo perímetro tiene longitud de al menos el doble de la longitud de I . Esto efectivamente mapea los puntos de A y los intervalos de B a un conjunto A' de puntos y un conjunto B' de intervalos en C . Ver la Figura 5.2.

Claramente, encontrar una traslación (si existe) de los elementos de A tal que $A + u \subseteq B$, es equivalente a encontrar una rotación del conjunto de puntos A' alrededor del centro de C tal que todos los elementos de A' son mapeados a puntos contenidos en los intervalos de B' . Para terminar la reducción construimos un polígono como se muestra en Figura 5.2. \square

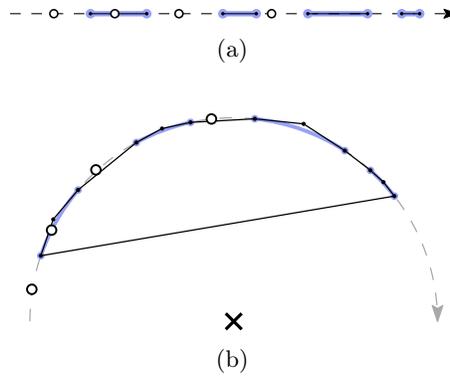


Figura 5.2: Envolviendo I de (a) el eje real hacia (b) un círculo C . Los intervalos que forman B y B' están resaltados con azul. Los elementos de A y A' están representados con puntos blancos. Los vértices adicionales que forman el polígono son los puntos de intersección entre las tangentes C que pasan por los extremos de cada intervalo de B' .

5.2.2. Un algoritmo que toma tiempo $O(nm \log(nm))$

A continuación presentamos un algoritmo de tiempo $O(nm \log(nm))$ para resolver el problema MCR-F (notemos que, por el Teorema 5.1 y la discusión del último párrafo de la Sección 5.1, esta complejidad no está lejos de ser óptima):

1. **Intersección entre P y los círculos de rotación.** Dado un punto fijo r , calcular la intersección entre $C_{p_j}(r)$ y P para todo $p_j \in S$. Cada uno de esos puntos determina un ángulo de rotación de p_j alrededor de

³Por *envolver* nos referimos a proyectar I en el círculo C , de forma que obtengamos un arco cuya longitud es la misma que la longitud de I .

r cuando p_j entra o sale de P , ver Figura 5.3. Estos ángulos determinan un conjunto de intervalos $\mathcal{I}_j = \{I_{j,1}, \dots, I_{j,m_j}\}$ cuyos extremos corresponden a los ángulos de rotación (con respecto del rayo que emana de r y pasa por p_j) en el que p_j entra o sale de P y, por lo tanto, especifica los ángulos de rotación en los cuales p_j se encuentra en el interior de P , ver de nuevo la Figura 5.3. Sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_n$. El conjunto de extremos de los intervalos en \mathcal{I} puede ser ordenado en tiempo $O(mn \log(mn))$.

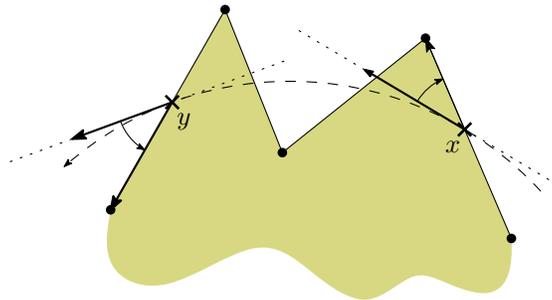


Figura 5.3: Un evento de entrada en x (giro a la derecha), y un evento de salida en y (giro a la izquierda).

2. **Calcular el ángulo de cobertura máxima.** Utilizando técnicas estándar, podemos realizar un barrido en el conjunto $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_n$ como se muestra en la Figura 5.4.

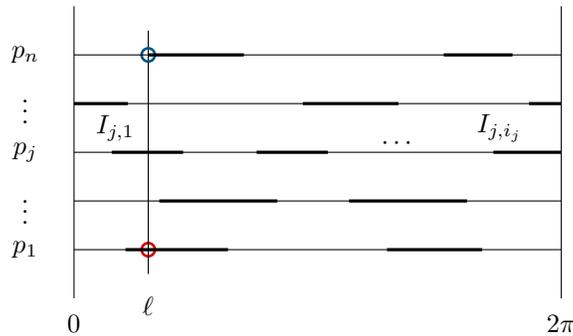


Figura 5.4: La secuencia de eventos y la línea de barrido en el ángulo θ . Resaltado con un círculo rojo, la intersección de la recta ℓ con el intervalo correspondiente a p_1 (donde p_1 se encuentra en el interior de P). Resaltado con un círculo azul, la intersección de la recta ℓ con uno de los extremos de un intervalo de p_n (un evento de entrada).

Durante el proceso de barrido, mantenemos el número de puntos de S que se encuentran dentro de P . Si ocurre un evento de entrada o de salida, este número es incrementado o decrementado por uno, respectivamente. Al final del proceso de barrido, reportamos los intervalos angulares donde el número es máximo.

Ya que la complejidad de nuestro algoritmo está dominada por el Paso 1, que toma tiempo $O(nm \log(nm))$, concluimos el siguiente resultado.

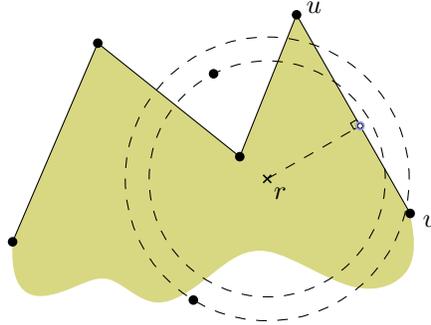
Teorema 5.2. *El problema MCR-F puede resolverse en tiempo $O(nm \log(nm))$ y espacio $O(nm)$.*

5.2.3. Un algoritmo sensible a la salida

Ahora mostramos que, al barrer el plano utilizando un círculo de barrido con centro en r cuyo diámetro crece continuamente, es posible calcular más eficientemente las intersecciones entre P y el conjunto de círculos de rotación. La idea es mantener una lista de las aristas que cortan el círculo de barrido, ordenadas por aparición a lo largo del círculo de barrido. Utilizando la misma técnica que se muestra en la Figura 5.3, las aristas se etiquetan según el tipo de evento que definen. Describimos el algoritmo a continuación.

1. **Normalización de P .** En los pasos siguientes suponemos que P no tiene aristas que intersecan algún círculo con centro r más de una vez. Podemos garantizar esta condición preprocesando P de la siguiente manera: Para toda arista $e = uv$ de P , sea p_e el punto de intersección entre la recta ℓ que contiene e y la recta perpendicular a ℓ que pasa por r . Si p_e pertenece al interior relativo de e , dividimos e en las aristas $\overline{up_e}$ y $\overline{p_e v}$. En el peor de los casos, dividimos cada arista de P en dos partes. Ver la Figura 5.5.
2. **Procesamiento de un vértice de P .** Ordenar primero los vértices de P y S de acuerdo con su distancia a r . Éste es el orden en el cual un círculo de barrido con centro en r que crece continuamente encontrará a los puntos.

Mientras el círculo de barrido crece, nos detenemos en cada vértice p_j de P . Cada vez que esto sucede, el número de intersecciones entre $C_{p_j}(r)$ y la frontera de P se incrementa o decrementa en dos. Podemos mantener y actualizar la lista ordenada de aristas cortadas por $C_{p_j}(r)$ utilizando un árbol rojinegro en tiempo logarítmico. Esto nos permite

Figura 5.5: Partiendo una arista de P .

calcular las intersecciones de $C_{p_j}(r)$ en tiempo proporcional al número de aristas. Es suficiente caminar a lo largo de la lista ordenada de aristas cortadas por el círculo de barrido. Cada vez que el círculo de barrido toca un elemento de S , el número y orden de las intersecciones entre el círculo de barrido y las aristas de P se mantiene sin cambios. Sin embargo, ya que los puntos de intersección cambian, debemos recalcularlos cada vez que tocamos un punto de P o de S .

3. **Cálculo de la secuencia de intervalos para cada elemento de S .** Ahora podemos calcular, con la misma complejidad, los intervalos en los cuales $C_{p_j}(r)$ cortan el interior de P . Notemos que estos intervalos no son elementos de \mathcal{I}_j , tienen que ser rotados de acuerdo con la posición de p_j respecto de r .
4. **Construir la secuencia de eventos.** Ya que por cada punto p_j de S calculamos la secuencia correspondiente de intervalos ordenados \mathcal{I}_j , mezclamos las (a lo más n) secuencias para formar la secuencia completa de eventos.

El proceso de normalización toma tiempo $O(m)$. Ordenar los elementos de S y los vértices de P por su distancia desde r toma tiempo $O(n \log n)$ y $O(m \log m)$, respectivamente. La lista ordenada de aristas que cortan el círculo de barrido puede mantenerse en un árbol rojinegro de tamaño $O(m)$, por lo que podemos procesar todos los vértices de P en tiempo $O(m \log m)$. Por otra parte, procesar todos los puntos de S nos toma tiempo $O(k)$, donde $k \in O(nm)$ denota el número total de eventos de entrada y salida. Finalmente, mezclar las $O(n)$ secuencias de intervalos ordenados de forma balanceada nos toma tiempo $O(k \log n)$. Barremos entonces la lista mezclada $\mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_n$ en tiempo $O(k)$ para obtener una solución a nuestro problema. La

complejidad total en tiempo es $O(n \log n + m \log m + k \log n)$. La complejidad total en espacio es $O(n + m + k)$. Concluimos el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *El problema MCR-F puede resolverse en tiempo $O((n + k) \log n + m \log m)$ y espacio $O(n + m + k)$, donde $k \in O(nm)$ denota el número total de eventos de entrada y salida.*

5.3. Máxima cobertura con centro restringido

En esta sección estudiamos el problema de máxima cobertura bajo rotación con centro restringido a un segmento. Nuestro enfoque para resolver este problema es caracterizar, para cada p de S , la intersección entre el polígono P y el círculo de rotación $C_p(r)$ mientras el centro r de $C_p(r)$ se mueve a lo largo del segmento $\ell = \overline{ab}$ desde a hasta b . Por simplicidad asumimos que a se encuentra en el origen $(0, 0)$ y b sobre en semieje positivo x^+ . Para cada arista $e = \overline{uv}$ de P , parametrizamos la intersección entre $C_p(r)$ y e utilizando una función $\omega = f(x)$, donde x es la coordenada en x de r (que va desde 0 hasta b) y ω es el ángulo antihorario que es barrido por el rayo \overrightarrow{rp} hasta que coincide con el rayo que parte de r y pasa por el punto actual de intersección q de $C_p(r)$ y e (asumimos por el momento que hay exactamente uno de estos puntos de intersección). Ver Figura 5.12.

Dejando los detalles para la Sección 5.3.4, obtenemos la siguiente expresión de ω como una función de x :

$$\omega = \arccos \left(\frac{\gamma(x) \pm \sqrt{\delta(x)}}{\epsilon(x)} \right), \quad (5.1)$$

donde $\gamma(x)$, $\delta(x)$, y $\epsilon(x)$ son polinomios de grados 2, 4, y 2, respectivamente. El movimiento de r a lo largo de ℓ entonces corresponde al conjunto de puntos (x, ω) para el cual p toca la frontera de P . Por cada punto $p \in S$, estos puntos forman $O(m)$ curvas que acotan una colección de regiones simples en el plano $x-\omega$; un punto (x, ω) en cada una de estas regiones corresponde a una rotación de p por un ángulo antihorario de tamaño ω con respecto del centro de rotación en $(x, 0)$, para el cual p se encuentra en el interior de P . Notemos que, para cada punto p , los interiores de estas regiones son disjuntas por pares, mientras que sus fronteras pueden cortarse a lo más una vez en un vértice común, ya que P es simple.

5.3.1. Subdividiendo las aristas del polígono

Mencionamos anteriormente que, por conveniencia, subdividimos las aristas del polígono P en sus puntos de intersección (si hay alguno) con el eje x ; así que, en adelante, asumimos que cada arista no tiene puntos en ambos lados del eje x . Dividimos nuevamente las aristas para simplificar el cálculo del ángulo ω en términos de las coordenadas en x del centro de rotación r mientras se mueve a lo largo del segmento \overline{ab} .

Marco teórico. Consideremos que estamos procesando el punto $p \in S$, y denotemos con $D_p(r)$ el disco cerrado acotado por $C_p(r)$, donde r es un punto en \overline{ab} . En la Figura 5.7, asumimos que p se encuentra arriba del eje x donde $a.x \leq p.x \leq b.x$ (figura superior) o $b.x < p.x$ (figura inferior). Los casos donde $p.x < a.x$ o p se encuentra debajo del eje x son simétricos. Los casos en los que p se encuentra sobre el eje x son similares (ver las Figuras 5.9 y 5.10). Además, el punto p' simétrico de p respecto del eje x claramente coincide con p si p se encuentra sobre el eje x . Finalmente, sea H_p^L (resp. H_p^R) el semiplano abierto del lado izquierdo (resp. derecho) de la línea perpendicular al eje x que pasa por p . Es útil observar las propiedades siguientes.

Lema 5.1. *Sea p un punto, y sean H_p^L , H_p^R , $C_p(r)$, y $D_p(r)$, para $r \in \overline{ab}$, como las definimos anteriormente.*

- (i) *Consideremos dos puntos cualesquiera $r, r' \in \overline{ab}$ con $r \neq r'$. Si el punto p se encuentra sobre el eje x , entonces los círculos $C_p(r)$ y $C_p(r')$ se cortan sólo en p . Si el punto p no se encuentra sobre el eje x , los círculos $C_p(r)$ y $C_p(r')$ se cortan en p y en la imagen simétrica p' de p respecto del eje x , y el segmento $\overline{pp'}$ pertenece a $D_p(r)$ y a $D_p(r')$.*
- (ii) \triangleright *Para cada punto s en el interior de $H_p^L \cap D_p(r)$, existe un único círculo con centro en el eje x que pasa por p y s y su centro se encuentra a la derecha de r ;*
 - \triangleright *para cada punto t en $H_p^L - D_p(r)$, hay un único círculo con centro en el eje x que pasa por p y t tal que su centro se encuentra a la izquierda de r .*

Simétricamente,

- \triangleright *para cada punto s' en el interior de $H_p^R \cap D_p(r)$, hay un único círculo con centro en el eje x que pasa por p y s' y su centro se encuentra a la izquierda de r ;*

▷ para cada punto t' en $H_p^R - D_p(r)$, hay un único círculo con centro en el eje x que pasa por p y t' tal que su centro se encuentra a la derecha de r .

Demostración.

- (i) Por la definición de los círculos $C_p(r)$ para toda $r \in \overline{ab}$, p pertenece a cada uno de estos círculos.

Después, supongamos que p se encuentra sobre el eje x y suponemos por contradicción que dos círculos $C_p(r)$ y $C_p(r')$ con $r \neq r'$ se cortan en un punto $p' \neq p$. Entonces, r y r' pertenecerían al bisector perpendicular del segmento $\overline{pp'}$; por lo tanto, el bisector perpendicular debe coincidir con el eje x . Entonces, ya que p se encuentra sobre el eje x , p' coincidiría con p , contradiciendo la suposición de que $p' \neq p$. Entonces, si p se encuentra sobre el eje x , cualesquiera dos círculos $C_p(r), C_p(r')$ con $r \neq r'$ se cortan sólo en p .

Supongamos ahora que p no se encuentra sobre el eje x . Entonces, ya que p' es el simétrico de p respecto del eje x , el eje x es el bisector perpendicular de el segmento $\overline{pp'}$. Entonces p' pertenece a todos los círculos con centro sobre el eje x que pasan por p . Que $\overline{pp'}$ pertenezca a cada uno de los discos $D_p(r)$, para todo $r \in \overline{ab}$, se sigue del hecho de que cada disco $D_p(r)$ es una región convexa que contiene a p y a p' .

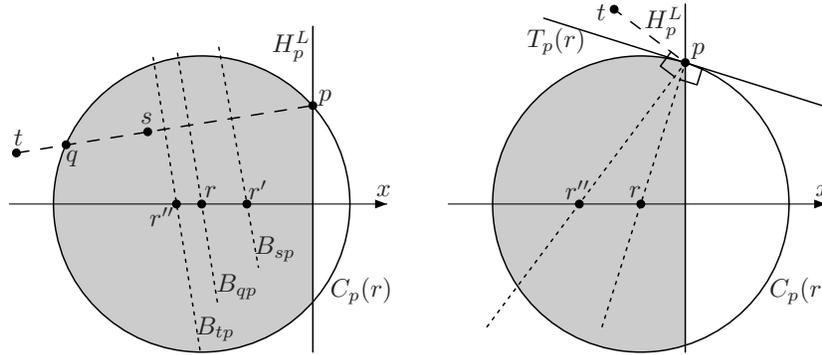


Figura 5.6: Ilustración del Lema 5.1. (Izquierda) Los bisectores perpendiculares B_{sp} , B_{qp} y B_{tp} cortan el eje x en los puntos r' , r y r'' , respectivamente. (Derecha) Las rectas que pasan por p que son perpendiculares a la tangente en p y a \overline{tp} cortan el eje x en los puntos r, r'' , respectivamente.

- (ii) Sea q el punto de intersección entre $C_p(r)$ y la recta L que pasa por p y s , ver la Figura 5.6(izquierda). La recta L está bien definida ya que $s \neq p$. De hecho, $s.x < p.x$ (ya que s pertenece a H_p^L), y entonces L no es perpendicular al eje x , lo que implica que el bisector perpendicular B_{qp} del segmento de recta \overline{qp} corta al eje x en un sólo punto; este punto de intersección es precisamente el centro r de $C_p(r)$. Ya que el bisector perpendicular del segmento \overline{sp} es paralelo a B_{qp} y se encuentra del lado derecho de B_{qp} (ya que s es un punto interior de \overline{qp}), corta el eje x en un mismo punto r' a la derecha de r ; r' es el centro del círculo con centro sobre el eje x que pasa por p y s .

Ahora, consideremos que $t \in H_p^L - D_p(r)$, y sea $T_p(r)$ el semiplano abierto que es tangente al círculo $C_p(r)$ en p y que contiene a r . Si $t \in T_p(r)$, entonces la recta L que pasa por p y t corta $C_p(r)$ en p y en otro punto q , y $q \in \overline{tp}$. Entonces, al igual que anteriormente, el bisector perpendicular B_{qp} de \overline{qp} corta al eje x en r , mientras que el bisector perpendicular de \overline{tp} es paralelo y se encuentra a la izquierda de B_{qp} (ya que q es un punto interior de \overline{tp}), y entonces corta al eje x en el punto r'' a la izquierda de r ; ver Figura 5.6(izquierda). Es importante observar que hasta el momento la demostración es válida sin importar si p se encuentra sobre el eje x o no.

A continuación consideremos el caso en que $t \notin T_p(r)$; este caso no es posible si p se encuentra sobre el eje x ya que entonces $T_p(r) = H_p^L$. La recta que pasa por p que es perpendicular a la tangente al círculo $C_p(r)$ en p corta en eje x en r . Ya que $t \notin T_p(r)$, la recta perpendicular a la recta que pasa por t y p no es paralela al eje x y entonces corta al eje x en un sólo punto r'' . De hecho, ya que el ángulo \widehat{tpr} del triángulo que tiene a t, p, r como vértices es más grande que $\pi/2$, r'' se encuentra a la izquierda de r ; ver la Figura 5.6(derecha).

Los resultados para puntos s' en el interior de $H_p^R \cap D_p(r)$ y $t' \in H_p^R - D_p(r)$ se obtienen de forma simétrica (de izquierda a derecha) al resultado que utilizamos par obtener los resultados para los puntos s en el interior de $H_p^L \cap D_p(r)$ y $t \in H_p^L - D_p(r)$, respectivamente.

□

El enunciado (ii) del Lema 5.1 implica directamente que la unión de todos los círculos $C_p(r)$ forma precisamente el cierre de la diferencia simétrica $D_p(a) \oplus D_p(b)$ de los discos $D_p(a)$ y $D_p(b)$ con centro en a y b , respectivamente

(ver Figura 5.7); notemos que cualquier punto en el interior de

$$\left((D_p(a) - D_p(b)) \cap H_p^L \right) \cup \left((D_p(b) - D_p(a)) \cap H_p^R \right)$$

se encuentra en el círculo $C_p(r)$ con r en el interior de \overline{ab} , a diferencia de cualquier otro punto. El Lema 5.1(ii) también implica el siguiente corolario.

Corolario 5.1.

(i) Para todo par $r, r' \in \overline{ab}$ tal que r se encuentre a la izquierda de r' :

$$\begin{aligned} \triangleright (C_p(r) \cap D_p(r')) \cap H_p^L &= \emptyset \quad \text{y} \quad D_p(r') \cap H_p^L \subset D_p(r) \cap H_p^L; \\ \triangleright (C_p(r') \cap D_p(r)) \cap H_p^R &= \emptyset \quad \text{y} \quad D_p(r) \cap H_p^R \subset D_p(r') \cap H_p^R. \end{aligned}$$

(ii) Supongamos que un segmento I corta el círculo $C_p(r)$, donde $r \in \overline{ab}$, en los puntos w_1, w_2 tales que el segmento $\overline{w_1 w_2}$ se encuentra completamente contenido en el cierre $(D_p(a) - D_p(b))$. Entonces, el segmento I es tangente a un círculo $C_p(r')$ para algún $r' \in \overline{ab}$ y el punto de tangencia pertenece a $\overline{w_1 w_2}$. Simétricamente, el mismo resultado es válido si el segmento $\overline{w_1 w_2}$ se encuentra completamente contenido en el cierre de $(D_p(b) - D_p(a))$.

Demostración.

(i) Demostramos las proposiciones para el semiplano H_p^L ; las demostraciones para H_p^R son simétricas de izquierda a derecha.

Ya que r se encuentra a la izquierda de r' , el Lema 5.1(ii) implica que $C_p(r') \cap H_p^L$ se encuentra en el interior de $D_p(r) \cap H_p^L$. Esto a su vez implica que (i) $(C_p(r) \cap H_p^L) \cap (D_p(r') \cap H_p^L) = \emptyset$, es decir, que $(C_p(r) \cap D_p(r')) \cap H_p^L = \emptyset$ y (ii) $(D_p(r') \cap H_p^L) \subset (D_p(r) \cap H_p^L)$ ya que $D_p(r')$ está acotado por $C_p(r')$. Ya que este disco es un conjunto convexo, tenemos una relación de contención propia entre conjuntos porque los puntos en $C_p(r) \cap H_p^L$ no pertenecen a $D_p(r') \cap H_p^L$.

(ii) Más adelante, demostraremos el enunciado para el caso en el que $\overline{w_1 w_2}$ se encuentra completamente contenido en el cierre de $(D_p(a) - D_p(b))$. La demostración para el caso en que $\overline{w_1 w_2} \in \text{cierre}(D_p(b) - D_p(a))$ es simétrico de izquierda a derecha.

Ya que $w_1 \neq w_2$ y $\overline{w_1 w_2} \in \text{cierre}(D_p(a) - D_p(b))$, entonces $r \neq b$. Sea $t \in \overline{ab}$ un punto infinitesimalmente a la derecha de r . Entonces, de acuerdo con el enunciado (i), $(C_p(r) \cap D_p(t)) \cap H_p^L = \emptyset$ y $(D_p(t) \cap H_p^L) \subset$

$(D_p(r) \cap H_p^L)$, que juntos implican que $(D_p(t) \cap I) \subset \overline{w_1 w_2}$; notemos que al menos uno de w_1, w_2 (que pertenecen a $C_p(r)$) pertenecen a H_p^L , ya que de otra forma $\overline{w_1 w_2}$ degenera en un punto contradiciendo el hecho de que $w_1 \neq w_2$, o $\overline{w_1 w_2} = \overline{pp'}$ con $p \neq p'$ contradiciendo el hecho de que $\overline{w_1 w_2}$ se encuentra completamente en el cierre de $(D_p(a) - D_p(b))$. Ya que el centro de rotación se mueve de forma continua a lo largo de \overline{ab} existe un punto $r' \in \overline{rb}$ tal que $D_p(r') \cap I$ es un punto, es decir, que el segmento I es tangente al círculo $C_p(r')$; además, ya que $D_p(r') \cap I \subset \overline{w_1 w_2}$, el punto de tangencia pertenece al segmento $\overline{w_1 w_2}$.

□

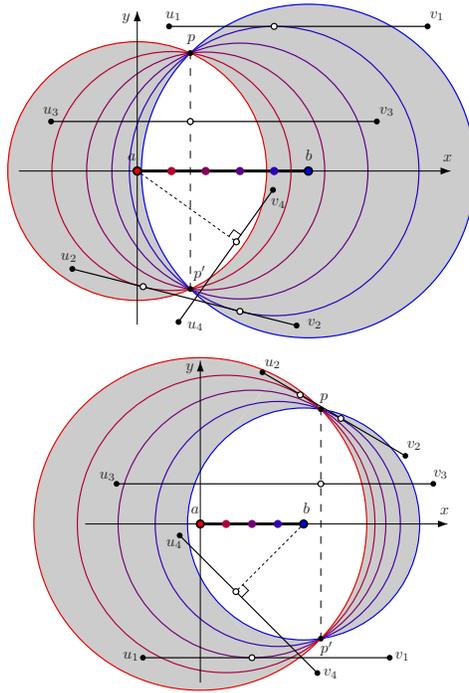


Figura 5.7: Subdividiendo las aristas del polígono de forma que cada subarista es cortada a lo más una vez por cada uno de los círculos $C_p(r)$ (los discos blancos denotan puntos de la subdivisión de la arista).

El procedimiento de subdivisión. Nuestro proceso de subdivisión de aristas mientras preprocesamos un punto $p \in S$ funciona en dos fases: en la Fase 1, nos aseguramos que cada círculo $C_p(r)$ corta cada subarista resultante en a lo más un punto; en la Fase 2, nos aseguramos que por cada subarista o bien $0 \leq \omega \leq \pi$ o bien $\pi \leq \omega \leq 2\pi$, lo que implica que el valor de ω está determinado de forma única por el valor de su coseno.

Fase 1: Si una arista \overline{uv} del polígono P no corta a $D_p(a) \cup D_p(b)$ o si al menos uno de sus extremos pertenece a $D_p(a) \cap D_p(b)$, entonces no necesitamos hacer nada, en caso contrario:

- Si \overline{uv} no corta el interior de $D_p(a) \cap D_p(b)$, entonces \overline{uv} es tangente a lo más a dos de los círculos $C_p(r)$ y lo subdividimos en esos puntos de tangencia; ver aristas $\overline{u_1v_1}$ y $\overline{u_2v_2}$ en la Figura 5.7.
- Si \overline{uv} corta el interior de $D_p(a) \cap D_p(b)$, entonces cruza $D_p(a) \cap D_p(b)$. Si \overline{uv} corta el segmento $\overline{pp'}$, entonces subdividimos \overline{uv} en su punto de intersección con $\overline{pp'}$ (ver arista $\overline{u_3v_3}$ en la Figura 5.7); si no, entonces los puntos de intersección entre \overline{uv} y la frontera de $D_p(a) \cap D_p(b)$ pertenecen a $C_p(a)$ o $C_p(b)$ (ver arista $\overline{u_4v_4}$ en la Figura 5.7), en este caso subdividimos \overline{uv} en su punto más cercano a a o b , respectivamente.

Es fácil ver que si la arista \overline{uv} interseca dos veces con un círculo $C_p(r)$, los dos puntos de intersección pertenecen a diferentes partes de la arista subdividida.

Una vez que ha terminado la Fase 1, aplicamos la Fase 2 en las subaristas resultantes. Sean a' y b' dos puntos tales que a y b son los extremos de los segmentos $\overline{pa'}$ y $\overline{pb'}$, respectivamente (ver la Figura 5.8); claramente, $a' \in C_p(a)$ y $b' \in C_p(b)$. Entonces, la Fase 2 se compone de los siguientes pasos.

Fase 2:

- Si una subarista interseca al segmento $\overline{a'b'}$, la subdividimos en el punto de intersección (en la Figura 5.8, ver la subarista $\overline{u_1v_1}$ y la subarista $\overline{u_2v_2}$ en la parte superior de la figura).
- Adicionalmente, si la subarista es tangente a dos círculos, la subdividimos en su punto de intersección con la recta que pasa por p y es perpendicular al eje x (ver subaristas $\overline{u_2v_2}$ en Figura 5.8).

Al tomar en cuenta que tanto la Fase 1 como la Fase 2 agregan a lo más dos puntos de subdivisión a una arista del polígono, concluimos que cada arista es subdividida en a lo más 5 subaristas.

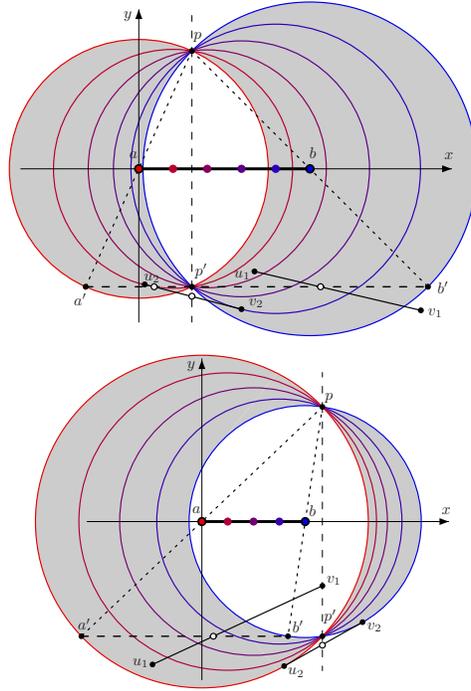


Figura 5.8: Subdividiendo por segunda vez las aristas de forma que el ángulo ω pertenece a $[0, \pi]$ o a $[\pi, 2\pi]$ (los discos blancos denotan puntos de subdivisión).

Finalmente, es importante notar que introducimos la subdivisión de aristas precisamente para preprocesar el punto actual $p \in S$; es decir, para el siguiente elemento de S , ignoramos los puntos de subdivisión que agregamos y comenzamos de nuevo con las aristas del polígono P (subdividido sólo por el eje x).

El proceso es correcto. En el Teorema 5.4 demostramos que el proceso de subdivisión es correcto. Necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 5.2. *Sea p un elemento de S y p' el simétrico de p con respecto del eje x .*

- (i) *Si el punto p es tal que $0 = a.x \leq p.x \leq b.x$, entonces p' pertenece al segmento $\overline{a'b'}$.*
- (ii) *Para cualquier punto $q \in \overline{a'b'}$ tal que $q \neq p'$, hay un punto $r \in \overline{ab}$ para el cual $C_p(r)$ tiene al segmento \overline{qp} como diámetro.*

Demostración.

- (i) Primero, asumamos que p se encuentra sobre el eje x . Entonces, $p' = p$. La suposición $a.x \leq p.x \leq b.x$ implica que $p \in \overline{ab}$, lo que implica que $\overline{ab} \subset \overline{a'b'}$; ver Figura 5.10. Entonces, $p \in \overline{a'b'}$, es decir, $p' = p \in \overline{a'b'}$. Consideremos ahora que p no se encuentra sobre el eje x . Sea c la proyección ortogonal de p sobre el eje x . Ya que $a.x \leq p.x \leq b.x$, tenemos que $c \in \overline{ab}$. La recta definida por p, c (notemos que $p \neq c$) es perpendicular al eje x . Sea d el punto de intersección de esta recta con la recta de soporte del segmento $\overline{a'b'}$. Ya que $c \in \overline{ab}$, concluimos que $d \in \overline{a'b'}$. Además, debido a esta construcción, el segmento $\overline{a'b'}$ es paralelo al eje x , y ya que $|\overline{pa}| = |\overline{aa'}|$, la semejanza de los triángulos con vértices p, a, c y p, a', d implica que $|\overline{pc}| = |\overline{cd}|$. Entonces, $p' = d$ y entonces $p' \in \overline{a'b'}$.
- (ii) Asumamos que p se encuentra sobre el eje x . Sea $q \in \overline{a'b'}$ con $q \neq p$, y supongamos sin pérdida de generalidad que q se encuentra a la izquierda de p (el caso en que q se encuentra a la derecha de p es simétrico). Entonces, el punto medio del segmento \overline{qp} está en el segmento \overline{ap} , y es además el centro del único círculo $C_p(r)$ que pasa por q . Por lo tanto, $C_p(r)$ tiene el segmento \overline{qp} como diámetro.

Supongamos ahora que p no se encuentra sobre el eje x . Considera cualquier punto $q \in \overline{a'b'}$ con $q \neq p'$. Sea z el punto de intersección entre el segmento de recta \overline{pq} con el eje x (z existe porque p y $\overline{a'b'}$, y por lo tanto p y q , se encuentran en lados opuestos del eje x). Notemos que $z \in \overline{ab}$ ya que $q \in \overline{a'b'}$. Entonces, por la semejanza de los triángulos $\triangle paz$ y $\triangle pa'q$ tenemos que $|\overline{pz}| = |\overline{zq}|$; es decir, el punto z es el punto medio del segmento \overline{pq} . Por lo tanto, z pertenece al bisector perpendicular de \overline{pq} y de hecho, es el único punto de intersección entre este bisector y el eje x . Notemos que, ya que $q \neq p'$, la recta que pasa por p y q (recordemos que $p \neq q$) no es perpendicular al eje x . Esto implica que el centro r de cualquier círculo $C_p(r)$ que pasa por q coincide con z , es decir, \overline{qp} es un diámetro de $C_p(r)$. \square

El Lema 5.2(ii) implica que para cualquier punto $q \neq p'$ que pertenece al segmento $\overline{a'b'}$, el ángulo correspondiente $\omega = \widehat{prq}$ es igual a π , donde $r \in \overline{ab}$ es el centro del círculo $C_p(r)$ que pasa por q .

Estamos listos para demostrar el Teorema 5.4 que establece que las fases de subdivisión 1 y 2 son correctas.

Teorema 5.4.

- (i) Al terminar la Fase 1, ninguna subarista resultante interseca algún círculo $C_p(r)$ para alguna $r \in \overline{ab}$ en más de un punto.
- (ii) Al terminar la Fase 2, para cualquier pareja de puntos q, q' (que se encuentran en los círculos $C_p(r)$ y $C_p(r')$, respectivamente) de cada subarista resultante, los ángulos antihorarios \widehat{prq} y $\widehat{pr'q'}$ o bien pertenecen ambos al intervalo $[0, \pi]$ o bien pertenecen ambos al intervalo $[\pi, 2\pi]$.

Demostración.

- (i) Supongamos por contradicción que existe una subarista \overline{cd} y un círculo $C_p(r)$ con $r \in \overline{ab}$ que se cortan en dos puntos w_1 y w_2 . El punto p y su simétrico p' subdividen el círculo $C_p(r)$ en dos arcos abiertos, $A_p^L = C_p(r) \cap H_p^L$ y $A_p^R = C_p(r) \cap H_p^R$. El primero se encuentra a la izquierda de la recta que pasa por p y es perpendicular al eje x , y el segundo se encuentra a la derecha de esta recta (notemos que si p se encuentra sobre el eje x , uno de estos arcos desaparece). Entonces, w_1, w_2 deben pertenecer al mismo arco; en caso contrario, p no se encontraría sobre el eje x y el segmento de recta $\overline{w_1w_2}$ cortaría al segmento de recta $\overline{pp'}$, y entonces la subarista \overline{cd} hubiera sido dividida en la Fase 1 en su punto de intersección con $\overline{pp'}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que w_1, w_2 pertenecen al arco A_p^L . Pero entonces, sin importar si el segmento $\overline{w_1w_2}$ corta el interior de $D_p(a) \cap D_p(b)$ tenemos una contradicción. En el primer caso, la subarista \overline{cd} hubiera sido dividida en la Fase 1 en la proyección ortogonal de b sobre \overline{cd} ; la proyección de b sobre \overline{cd} pertenece a $D_p(a) \cap D_p(b)$ y es por lo tanto un punto interior de $\overline{w_1w_2}$. En el segundo caso, la subarista \overline{cd} hubiera sido dividida en la Fase 1 en el punto de tangencia con un círculo $C_p(t)$ con $t \in \overline{ab}$; este punto de tangencia pertenece a $\overline{w_1w_2}$ como se muestra en el Corolario 5.1(ii). Por lo tanto, luego de la Fase 1, ninguna subarista resultante corta un círculo $C_p(r)$ para alguna $r \in \overline{ab}$ en más de un punto.
- (ii) Supongamos sin pérdida de generalidad que el punto p se encuentra arriba o sobre el eje x y que $p.x \geq a.x$; el caso en el que $p.x < a.x$ es simétrico de izquierda a derecha (los ángulos correspondientes son iguales a 2π menos los ángulos correspondientes cuando $p.x > b.x$), mientras que el caso en el que p se encuentra debajo del eje x es simétrico de arriba a abajo (en este caso los ángulos correspondientes son iguales a 2π menos los ángulos correspondientes cuando p se encuentra arriba del eje x).

Sea R_1 (resp. R_3) el subconjunto de puntos en el cierre de la diferencia $D_P(a) \setminus D_P(b)$ que se encuentran sobre o arriba (resp. sobre o abajo) $\overline{a'b'}$; simétricamente, sea R_2 (resp. R_4) el conjunto de puntos en el cierre de la diferencia $D_P(b) \setminus D_P(a)$ que se encuentran sobre o arriba (resp. sobre o abajo) $\overline{a'b'}$, ver las Figuras 5.9 y 5.10. Consideremos un punto w sobre un círculo $C_p(t)$ con $t \in \overline{ab}$. Ya que por el Lema 5.2(ii), para cualquier punto $q \in \overline{a'b'}$ el segmento \overline{qp} es un diámetro del círculo con centro sobre el eje x que pasa por p, q , si $w \in R_1$, el ángulo antihorario \widehat{ptw} se encuentra en $[0, \pi]$. De forma similar, si $w \in R_2$ entonces $\widehat{ptw} \in [\pi, 2\pi]$, si $w \in R_3$ entonces $\widehat{ptw} \in [\pi, 2\pi]$, y si $w \in R_4$ entonces $\widehat{ptw} \in [0, \pi]$. Ya que ninguna subarista resultante de la Fase 2 contiene puntos en más de una de las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 , el lema está demostrado. \square

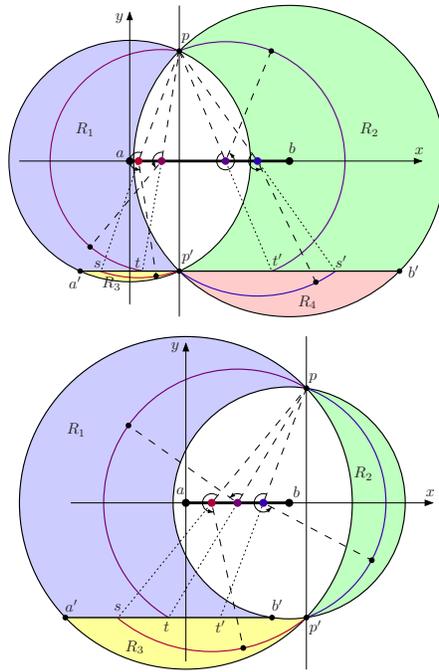


Figura 5.9: La partición del cierre de la diferencia simétrica $D_P(a) \oplus D_P(b)$ respecto del segmento $\overline{a'b'}$ y la recta definida por p, p' en las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 cuando el punto p no se encuentra en el eje x . Notemos que los segmentos \overline{ps} , $\overline{ps'}$, \overline{pt} y $\overline{pt'}$ son diámetros.

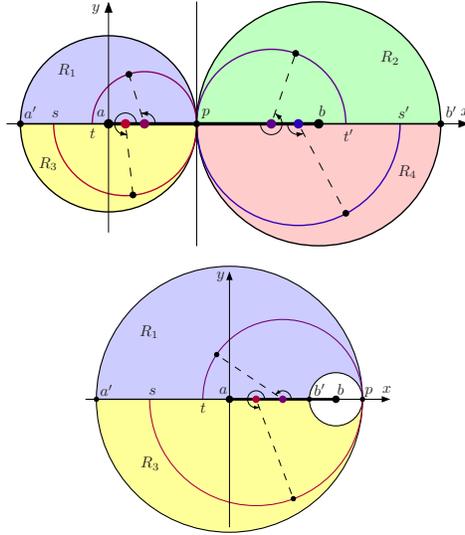


Figura 5.10: La partición del cierre de la diferencia simétrica $D_p(a) \oplus D_p(b)$ respecto del segmento $\overline{a'b'}$ y la recta que es perpendicular al eje x en p en las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 cuando el punto p se encuentra en el eje x . Notemos que los segmentos \overline{ps} , $\overline{ps'}$, \overline{pt} y $\overline{pt'}$ son diámetros.

5.3.2. El algoritmo

Estamos ahora listos para describir el algoritmo para resolver el problema MCR-RS. El lector podrá notar similitudes con el algoritmo para calcular la suma de Minkowski de un par de polígonos simples [2]:

1. **Subdividir las aristas del polígono P por el eje x .**
2. **Procesar cada punto $p \in S$.** Para cada punto p , subdividimos cada arista del polígono P (que resulta del paso previo) en subaristas (ver el proceso de división de aristas que describimos en la Sección 5.3.1). A continuación, para cada subarista calculamos la curva del ángulo ω con respecto de la coordenada x del centro de rotación mientras se mueve a lo largo de \overline{ab} (ver la Ecuación (5.1)). Finalmente, formamos las regiones acotadas por estas curvas.
3. **Construir y recorrer el arreglo de todas las regiones.** Utilizando técnicas estándar [58] construimos el arreglo de todas las regiones para todos los elementos de S . Después, recorreremos la gráfica dual del arreglo resultante para encontrar una subregión de máxima profundidad

(o de mínima profundidad, si estuviéramos interesados en la versión de minimización del problema MCR-RS). Cualquier punto en esta subregión determina una posición $(x, 0)$ de r y un ángulo de rotación ω que constituye una solución al problema.

5.3.3. Complejidades de tiempo y espacio

El Paso 1 claramente nos toma tiempo y espacio $O(m)$, y divide las aristas del polígono en a lo más $2m$ subaristas. La subdivisión al procesar un punto $p \in S$ en el Paso 2 nos toma tiempo y espacio $O(m)$, produciendo $O(m)$ subaristas: Para cada subarista \overline{uv} nos toma tiempo $O(1)$ decidir si sus extremos pertenecen a los discos $D_p(a)$ y $D_p(b)$, y para determinar si \overline{uv} interseca a los círculos $C_p(a)$ y $C_p(b)$, al segmento $\overline{pp'}$, o a la recta de soporte del segmento $\overline{pp'}$, así como para calcular los puntos de intersección.

Además, los centros de los círculos $C_p(r)$ para $r \in \overline{ab}$, a los cuales el segmento \overline{uv} es tangente son precisamente los puntos de intersección entre el segmento \overline{ab} y la parábola que es equidistante al punto p y a la recta que soporta el segmento \overline{uv} . Entonces, luego de procesar p obtenemos $O(m)$ curvas que acotan $O(m)$ regiones. Luego de procesar todos los puntos de S en el Paso 2 nos toma un total de tiempo $O(nm)$ y produce un total de $O(nm)$ regiones acotadas por $O(nm)$ curvas en el plano $x-\omega$. Usaremos la Ecuación (5.1) para demostrar el siguiente lema.

Lema 5.3. *Entre cualquier par de curvas $(\omega-x)$ definidas por la Ecuación (5.1) tienen a lo más 32 puntos de intersección.*

Demostración. La idea se basa en el hecho de que un polinomio de grado constante tiene un número constante de raíces. En nuestro caso, tenemos una raíz cuadrada que tiene que ser elevada al cuadrado para ser eliminada. Consideremos dos curvas $(\omega-x)$

$$\omega = \arccos \left(\frac{\gamma_1(x) \pm \sqrt{\delta_1(x)}}{\epsilon_1(x)} \right) \quad \text{y} \quad \omega = \arccos \left(\frac{\gamma_2(x) \pm \sqrt{\delta_2(x)}}{\epsilon_2(x)} \right).$$

Ya que un punto de intersección entre estas curvas pertenece a ambas curvas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \omega &= \arccos \left(\frac{\gamma_1(x) \pm \sqrt{\delta_1(x)}}{\epsilon_1(x)} \right) = \arccos \left(\frac{\gamma_2(x) \pm \sqrt{\delta_2(x)}}{\epsilon_2(x)} \right) \\ \implies \gamma_1(x) \epsilon_2(x) - \gamma_2(x) \epsilon_1(x) &= \pm \left(\epsilon_1(x) \sqrt{\delta_2(x)} - \epsilon_2(x) \sqrt{\delta_1(x)} \right) \quad (5.2) \end{aligned}$$

al elevar al cuadrado dos veces para eliminar las raíces cuadradas obtenemos

$$\begin{aligned}
 \left(\gamma_1(x)\epsilon_2(x) - \gamma_2(x)\epsilon_1(x)\right)^2 &= \left(\epsilon_1(x)\sqrt{\delta_2(x)} - \epsilon_2(x)\sqrt{\delta_1(x)}\right)^2 \\
 \implies \left(\gamma_1(x)\epsilon_2(x) - \gamma_2(x)\epsilon_1(x)\right)^2 - \epsilon_1^2(x)\delta_2(x) - \epsilon_2^2(x)\delta_1(x) \\
 &= -2\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)\sqrt{\delta_1(x)\delta_2(x)} \\
 \implies \left(\left(\gamma_1(x)\epsilon_2(x) - \gamma_2(x)\epsilon_1(x)\right)^2 - \epsilon_1^2(x)\delta_2(x) - \epsilon_2^2(x)\delta_1(x)\right)^2 \\
 &= 4\epsilon_1^2(x)\epsilon_2^2(x)\delta_1(x)\delta_2(x). \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

La última ecuación es un polinomio de grado a lo más 16 y por lo tanto, tiene a lo más 16 raíces reales en x . Es importante notar que el valor de x en cualquier par (ω, x) que satisface la Ecuación (5.2) satisface también el polinomio de la Ecuación (5.3), aunque lo contrario no es necesariamente cierto; es decir, no todas las raíces del polinomio satisface la Ecuación (5.2). Entonces, si sustituimos las raíces reales del polinomio de la Ecuación (5.3) en la Ecuación (5.1), obtenemos a lo más 32 puntos de intersección, debido al operador \pm . \square

Por lo tanto, el número total de puntos de intersección de todas las curvas es $O(n^2m^2)$. Utilizando técnicas estándar [58] podemos calcular el arreglo de todas estas regiones en tiempo $O(n^2m^2 \log(nm))$, para después recorrer la gráfica dual de este arreglo y encontrar la subregión de profundidad máxima. Cualquier punto en esta subregión determina una posición del centro de rotación r y un ángulo de rotación ω que constituye una posible solución del problema. La complejidad en espacio es $O(n^2m^2)$.

Teorema 5.5. *El problema MCR-RS se revuelve en tiempo $O(n^2m^2 \log(nm))$ y espacio $O(n^2m^2)$.*

Notemos que los métodos descritos también son válidos para resolver la variante en la que se busca minimizar el número de puntos de S contenidos en P . Por otra parte, el problema MCR-RS también puede resolverse en tiempo $O(n^2m^2 \log(nm))$ incluso cuando restringimos el centro de rotación de forma que se encuentre en una recta L : Calculamos el diagrama de Voronoi del conjunto $P \cup S$, y aplicamos el algoritmo que acabamos de describir al segmento de L que contiene los puntos de intersección entre L y las aristas del diagrama de Voronoi. Finalmente, si restringimos el centro de rotación de forma que se encuentre en uno de un conjunto de h segmentos de recta,

ya sea que formen una cadena poligonal o que no tengan ninguna relación entre sí, podemos obtener trivialmente la ubicación óptima de P en tiempo $O(hn^2m^2 \log(nm))$. En ambos casos, la complejidad en espacio es $O(n^2m^2)$.

5.3.4. El parámetro w como una función de x

Para simplificar el desarrollo matemático que resulta en la Ecuación (5.1), para cada punto s en el plano diferente del centro de rotación r , definimos un ángulo ϑ_s con respecto de r . Sean H_{\uparrow} el conjunto de puntos arriba del eje x o sobre el eje x y a la derecha de r , y H_{\downarrow} el conjunto de puntos debajo del eje x o sobre el eje x y a la izquierda de r . Claramente, los conjuntos H_{\uparrow} y H_{\downarrow} son una partición de $\mathbb{R}^2 - \{r\}$. Entonces,

- si $s \in H_{\uparrow}$, entonces ϑ_s es el ángulo barrido por el rayo derecho horizontal que parte de r mientras se mueve en sentido antihorario alrededor de r hasta que coincide con el rayo $\vec{r}\vec{s}$ (ver la Figura 5.11, izquierda);
- si $s \in H_{\downarrow}$, entonces ϑ_s es el ángulo barrido por el rayo horizontal izquierdo que parte de r mientras se mueve en sentido antihorario alrededor de r hasta que coincida con el rayo $\vec{r}\vec{s}$ (ver la Figura 5.11, derecha).

Notemos que para todos los puntos s en el eje x , $\vartheta_s = 0$. De la definición de ϑ_s , tenemos que en todos los casos

$$0 \leq \vartheta_s < \pi. \tag{5.4}$$

Consideramos que los ángulos antihorarios y horarios son, respectivamente, positivos y negativos, y por lo tanto

$$\cos \vartheta_s = \frac{s.x - r.x}{d(s,r)} \operatorname{sgn}(s.y), \quad \operatorname{sen} \vartheta_s = \frac{|s.y|}{d(s,r)} = \frac{s.y}{d(s,r)} \operatorname{sgn}(s.y) \tag{5.5}$$

donde $d(s,r)$ denota la distancia del punto s al centro de rotación r , y $p.x$ y $p.y$ son respectivamente las coordenadas en x y en y de un punto p , y $\operatorname{sgn}(s.y)$ es el signo de $s.y$.

Ahora, distinguimos dos casos principales:

- El punto p y el punto de intersección q entre el círculo $C_p(r)$ y la arista $e = \overline{uv}$ de P pertenecen ambos a H_{\uparrow} o H_{\downarrow} (ver la Figura 5.12(a)): si $\vartheta_p \leq \vartheta_q$ entonces

$$\omega = \vartheta_q - \vartheta_p \tag{5.6}$$

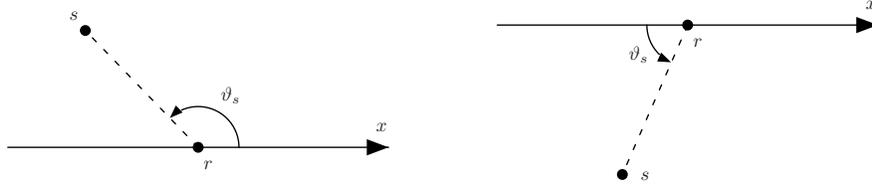


Figura 5.11: La definición del ángulo ϑ_s para cualquier punto $s \neq r$.

en caso contrario

$$\omega = (\pi - \vartheta_p) + \pi + \vartheta_q = 2\pi + \vartheta_q - \vartheta_p. \quad (5.7)$$

- El punto p y el punto de intersección q entre el círculo $C_p(r)$ y la arista $e = \overline{uv}$ de P no pertenecen ambos a H_{\uparrow} o H_{\downarrow} (ver la Figura 5.12(b)): en este caso,

$$\omega = (\pi - \vartheta_p) + \vartheta_q = \pi + \vartheta_q - \vartheta_p. \quad (5.8)$$

Es importante observar que la definición de H_{\uparrow} y H_{\downarrow} asegura que las ecuaciones (5.6) a (5.8) son válidas para todos los casos especiales en donde al menos uno de los puntos p y q se encuentra en el eje x , como se resume en la Tabla 5.1.

En todos los casos se cumple que:

$$\cos(\omega) = \cos(\vartheta_q - \vartheta_p) = \cos(\vartheta_q) \cos(\vartheta_p) + \operatorname{sen}(\vartheta_q) \operatorname{sen}(\vartheta_p)$$

lo que, debido a la Ecuación (5.5) y el hecho de que $d(q, r) = d(p, r)$, implica que:

$$\begin{aligned} \cos(\omega) &= \frac{(q.x - x)(p.x - x) + q.y p.y}{d^2(p, r)} \operatorname{sgn}(q.y) \operatorname{sgn}(p.y) \\ &= \frac{(q.x - x)(p.x - x) + q.y p.y}{(p.x - x)^2 + (p.y)^2} \operatorname{sgn}(q.y) \operatorname{sgn}(p.y) \\ &= \frac{x^2 - (q.x + p.x)x + q.x p.x + q.y p.y}{x^2 - 2p.x x + (p.x)^2 + (p.y)^2} \operatorname{sgn}(q.y) \operatorname{sgn}(p.y). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por conveniencia, subdividimos cada arista que corta el eje x en este punto de intersección de forma que el valor de $\operatorname{sgn}(q.y)$ se encuentra fijo en cada subarista sin importar donde se encuentre q .

Las coordenadas $q.x, q.y$ del punto de intersección q pueden expresarse en términos de x considerando que q pertenece a la recta que soporta la

		$p \in H_{\uparrow}$	
		p en el eje x $\vartheta_p = 0$	p arriba del eje x $0 < \vartheta_p < \pi$
$q \in H_{\uparrow}$	q en el eje x , $\vartheta_q = 0$	$\omega = 0$	$\omega = 2\pi - \vartheta_p$
	q arriba del eje x , $0 < \vartheta_q < \pi$	$\omega = \vartheta_q$	Ecuaciones (5.6) y (5.7)
$q \in H_{\downarrow}$	q en el eje x , $\vartheta_q = 0$	$\omega = \pi$	$\omega = \pi - \vartheta_p$
	q debajo del eje x , $0 < \vartheta_q < \pi$	$\omega = \pi + \vartheta_q$	Ecuación (5.8)

		$p \in H_{\downarrow}$	
		p en el eje x $\vartheta_p = 0$	p debajo del eje x $0 < \vartheta_p < \pi$
$q \in H_{\uparrow}$	q en el eje x , $\vartheta_q = 0$	$\omega = \pi$	$\omega = \pi - \vartheta_p$
	q arriba del eje x , $0 < \vartheta_q < \pi$	$\omega = \pi + \vartheta_q$	Ecuación (5.8)
$q \in H_{\downarrow}$	q en el eje x , $\vartheta_q = 0$	$\omega = 0$	$\omega = 2\pi - \vartheta_p$
	q debajo del eje x , $0 < \vartheta_q < \pi$	$\omega = \vartheta_q$	Ecuaciones (5.6) y (5.7)

Tabla 5.1: El valor del ángulo ω para las diferentes posiciones de los puntos de intersección p y q entre $C_p(r)$ y la arista \overline{uv} .

arista \overline{uv} y que r es equidistante a q y p . Lo primero implica que existe un número real λ donde $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que el vector \overline{uq} es λ veces el vector \overline{uv} , de lo que tenemos que

$$(q.x - u.x) = \lambda(v.x - u.x) \iff q.x = \lambda(v.x - u.x) + u.x \quad (5.10)$$

y

$$(q.y - u.y) = \lambda(v.y - u.y) \iff q.y = \lambda(v.y - u.y) + u.y, \quad (5.11)$$

mientras que lo segundo implica que

$$\begin{aligned} d^2(q, r) &= d^2(p, r) \\ \iff (q.x - x)^2 + (q.y)^2 &= (p.x - x)^2 + (p.y)^2 \\ \iff (q.x)^2 - 2xq.x + (q.y)^2 - (p.x)^2 + 2xp.x - (p.y)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sustituyendo $q.x, q.y$ de las ecuaciones (5.10) y (5.11) en la Ecuación (5.12)

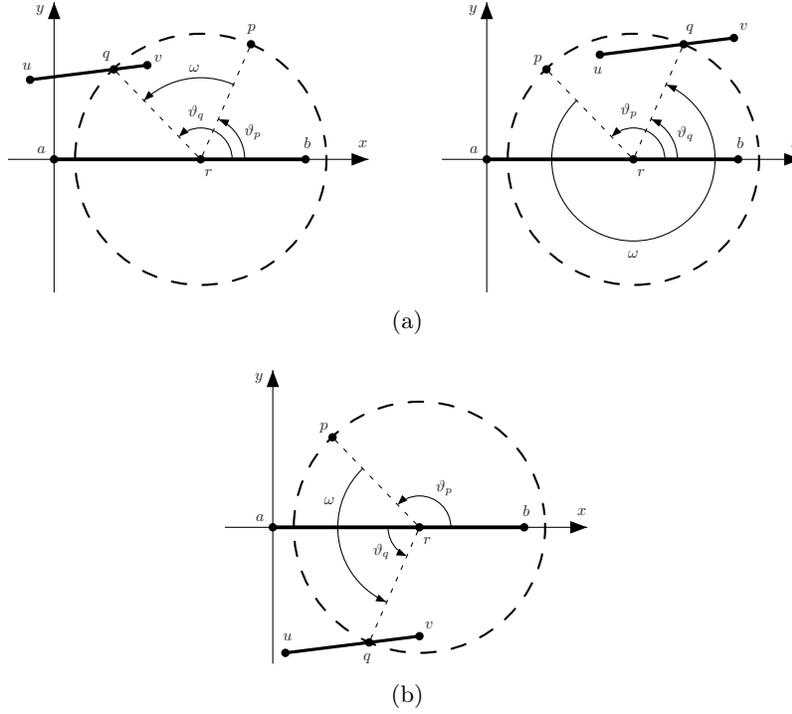


Figura 5.12: La intersección entre $C_p(r)$ y \overline{uv} expresada en función de la distancia recorrida por r mientras se mueve sobre ab . En las figuras se muestra un punto p y un punto de intersección q entre $C_p(r)$ y \overline{uv} que, con respecto del eje x , se encuentran (a) en el mismo semiplano y (b) en semiplanos opuestos.

obtenemos

$$\begin{aligned}
 & [\lambda(v.x - u.x) + u.x]^2 - 2x[\lambda(v.x - u.x) + u.x] \\
 & + [\lambda(v.y - u.y) + u.y]^2 - (p.x)^2 + 2xp.x - (p.y)^2 = 0 \\
 \iff & \lambda^2 [(v.x - u.x)^2 + (v.y - u.y)^2] \\
 & - 2\lambda[x(v.x - u.x) - u.x(v.x - u.x) - u.y(v.y - u.y)] \\
 & - 2x(u.x - p.x) + (u.x)^2 + (u.y)^2 - (p.x)^2 - (p.y)^2 = 0,
 \end{aligned}$$

que tiene a lo más 2 raíces para λ en términos de x de la forma

$$\lambda = \alpha(x) \pm \sqrt{\beta(x)}, \quad (5.13)$$

donde $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son polinomios de grado 1 y 2, respectivamente.

Entonces, al substituir $q.x$, $q.y$ y λ de las ecuaciones (5.10), (5.11) y (5.13) respectivamente, en la Ecuación (5.9), obtenemos:

$$\cos(\omega) = \frac{\gamma(x) \pm \sqrt{\delta(x)}}{\epsilon(x)} \implies \omega = \arccos\left(\frac{\gamma(x) \pm \sqrt{\delta(x)}}{\epsilon(x)}\right), \quad (5.14)$$

donde $\gamma(x)$, $\delta(x)$, y $\epsilon(x)$ son polinomios de grado 2, 4, y 2, respectivamente.

5.4. Máxima cobertura en 3D

En esta sección extendemos las técnicas anteriores al equivalente en 3D del problema MCR-F. Consideramos un conjunto S de n puntos en 3D, un centro de rotación r , y un poliedro simple (que no se corta consigo mismo) P de complejidad m , es decir, con m caras. Identificamos las rotaciones alrededor de r con puntos en una esfera con centro r . A continuación mostramos cómo extender el algoritmo que utilizamos para resolver el problema MCR Fijo:

1. **Regiones de inclusión.** Para cada $p_j \in S$, la intersección entre la esfera $C_{p_j}(r)$ con centro en r y radio $|\overline{rp_j}|$ y el poliedro P resulta en un conjunto de regiones sobre la frontera de la esfera. Estas regiones consisten de copias rotadas de p_j que se encuentran en el interior de P .
 - Sin importar si P es convexo o no, cada cara puede contribuir a estas regiones un número constante de veces. Por lo tanto, la complejidad total es $O(m)$. Notemos además que una región puede tener hoyos incluso cuando P es convexo.
 - Los lados de estas regiones sobre la esfera $C_{p_j}(r)$ son arcos circulares, ya que cada uno es la intersección entre una esfera y una cara del poliedro. Cada lado puede calcularse en tiempo constante, intersecando $C_{p_j}(r)$ con el plano que contiene la cara del poliedro.
 - Para calcular las $O(nm)$ regiones consumimos en total tiempo y espacio $O(nm)$.
2. **Regiones de inclusión normalizadas.** Sea R_{p_j} el conjunto de las regiones de inclusión de $p_j \in S$. Consideremos la esfera unitaria S^2 centrada en r y las regiones proyectadas en S^2 . Entonces, rotamos S^2 a lo largo de p_j y sus regiones de inclusión alrededor del eje z hasta que p_j se encuentre sobre el plano yz y después alrededor del eje x hasta que p_j coincida con el polo norte N . Denotemos esta rotación con τ_j .

3. **Profundidad de N .** Necesitamos calcular cuántas de las regiones que describimos anteriormente contienen el polo norte N (en su interior o en su frontera). Llamamos a esta cantidad la *profundidad* de N . Para calcular la profundidad, realizamos un algoritmo de localización de puntos en la subdivisión plana sobre la superficie de la esfera, es decir, revisamos si el punto N pertenece a cada una de las $O(nm)$ regiones con un costo de tiempo $O(\log m)$ por región. La complejidad total en tiempo es de $O(nm \log m)$.
4. **Proyección estereográfica.** Utilizamos una proyección estereográfica estándar desde el polo norte N hacia el plano tangente a la esfera en el polo sur antipodal. El hecho de que esta proyección es conforme implica que los círculos en la esfera son transformados en círculos en el plano [94]. Por lo tanto, las proyecciones de las regiones de inclusión $\tau_j(R_{p_j})$ tienen fronteras compuestas por arcos circulares. Debido a que dos lados cualesquiera (que son arcos de circunferencia) de las regiones se cortan a lo más dos veces, el arreglo \mathcal{A} de las regiones proyectadas puede calcularse en tiempo y espacio $O(n^2m^2)$, ya que el número total de puntos de intersección entre los arcos es de $O(n^2m^2)$. Para calcular un arco proyectado procedemos de la siguiente manera: Calculamos la proyección de los dos extremos y de un tercer punto del arco (la proyección del punto medio del arco por ejemplo). Con estos tres puntos proyectados calculamos el círculo que contiene el arco proyectado además del mismo arco proyectado.
5. **La región en \mathcal{A} de mayor profundidad.** Para realizar este cálculo trabajamos en la gráfica dual del arreglo \mathcal{A} , sabiendo que la cara exterior no acotada de \mathcal{A} es la cara que contenía el punto N , y por lo tanto conocemos su profundidad. Comenzando en esta cara, realizamos un recorrido de la gráfica dual, calculando la profundidad de cada región y manteniendo la región de máxima profundidad, en tiempo total de $O(n^2m^2)$.

Luego de calcular el punto de la región de máxima profundidad, calculamos su punto correspondiente en la esfera unitaria para conocer los dos parámetros θ, φ que resuelven el problema.

Teorema 5.6. *El problema MCR-F3D puede resolverse en tiempo $O(n^2m^2 \log(nm))$ y espacio $O(n^2m^2)$.*

5.5. Conclusiones

Estudiamos el problema de encontrar una rotación de un polígono simple de forma que cubra el máximo número de puntos de un conjunto de puntos dado. Describimos algoritmos que resuelven este problema cuando el centro de rotación está fijo, o se encuentra sobre un segmento, una recta, o una cadena poligonal. Sin mucho esfuerzo, nuestros algoritmos pueden ser aplicados también cuando el polígono tiene hoyos, y pueden ser modificados para resolver versiones de estos problemas donde buscamos minimizar el número de puntos que son cubiertos por el polígono.

Resolvimos también el problema de cobertura cuando el centro de rotación es un punto dado en el espacio. Dejamos como problema abierto el análogo en el espacio del problema MCR-RS, donde el centro de rotación debe encontrarse en un segmento de recta dado.

Capítulo 6

Iluminación de Brocard

Un α -reflector es una fuente de luz que ilumina una cuña del plano acotada por dos rayos ℓ y r que parten de un punto x , de forma que r se obtiene al rotar ℓ alrededor de x en sentido horario por un ángulo α . Decimos que ℓ, r y x son respectivamente, el rayo izquierdo, el rayo derecho, y el ápice del α -reflector.

Sea P un polígono simple con vértices v_0, \dots, v_{n-1} etiquetados en sentido horario alrededor de su frontera. Decimos que un α -reflector f_i está *alineado con una arista* de P , si su ápice se encuentra sobre v_i y su rayo izquierdo pasa por v_{i+1} . El problema de la Iluminación de Brocard consiste en encontrar el ángulo α más pequeño tal que el conjunto $\{f_0, \dots, f_{n-1}\}$ de α -reflectores alineados con las aristas de P iluminan el interior de P .

En este capítulo resolvemos el problema de la iluminación de Brocard en diferentes clases de polígonos. Describimos un algoritmo que resuelve el problema en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ cuando el polígono es convexo, y un algoritmo que consume tiempo $O(n^3 \log^2 n)$ y espacio $O(n^3)$ si el polígono es simple pero no necesariamente convexo. Cuando P es un triángulo, resolver este problema equivale a encontrar el punto de Brocard de P .

6.1. Introducción

Sean P un polígono simple y v_0, \dots, v_{n-1} los vértices de P etiquetados en sentido horario alrededor de la frontera de P ¹. Un *reflector* con ápice $x \in \mathbb{R}^2$ y ángulo de iluminación $\alpha \in [0, 2\pi)$ es una fuente de luz que proyecta luz desde x hacia el interior de una región angular de tamaño α . Un *reflector de vértice* sobre P es un reflector que tiene como ápice un vértice de P y que apunta hacia el interior de P . Un reflector de vértice de ángulo α está *alineado con una arista* si, para toda $\alpha \in [0, 2\pi)$, el reflector ilumina completamente una de las dos aristas adyacentes a su vértice. El reflector está orientado en sentido *horario* o *antihorario* si la arista iluminada es $\overline{v_i v_{i+1}}$ o $\overline{v_i v_{i-1}}$, respectivamente.

Un conjunto \mathcal{F} de n reflectores de vértices alineados con una arista están colocados en P en una *configuración de Brocard*, si sus ápices se encuentran sobre los vértices de P en una correspondencia uno-a-uno y todos los reflectores en \mathcal{F} tienen el mismo ángulo. La *asignación de orientaciones* de la configuración es un etiquetado binario de los elementos de \mathcal{F} que indican la orientación de cada reflector, y el *ángulo de iluminación* de la configuración es el ángulo de los reflectores en \mathcal{F} .

Problema de la Iluminación de Brocard. Encontrar una configuración de Brocard de ángulo mínimo para \mathcal{F} tal que P es iluminado por los reflectores en \mathcal{F} . Ver la Figura 6.1.

Como un primer paso para resolver el problema de la iluminación de Brocard, un problema interesante es caracterizar la asignación de orientaciones en las cuales se obtiene la configuración de Brocard de ángulo mínimo. Idealmente nos gustaría demostrar que, de las 2^n posibilidades, la asignación de ángulo óptimo contiene un único tipo de orientación (horaria o antihoraria), o puede ser fácilmente caracterizada (por ejemplo, que haya el mismo tipo de orientación en vértices convexos o cóncavos). Como veremos más adelante, incluso si consideramos asignaciones de orientaciones de un sólo tipo, podemos obtener variaciones no triviales de este problema al considerar que P pertenece a una familia específica de polígonos.

A menos que digamos lo contrario, durante este capítulo consideramos una asignación de orientaciones de un mismo tipo con una orientación en sentido horario.

¹Por conveniencia, durante este capítulo asumimos que todas las operaciones de los subíndices se realizan en aritmética módulo n . Asumimos también que P denota la región cerrada acotada por la poligonal cerrada definida por sus vértices.

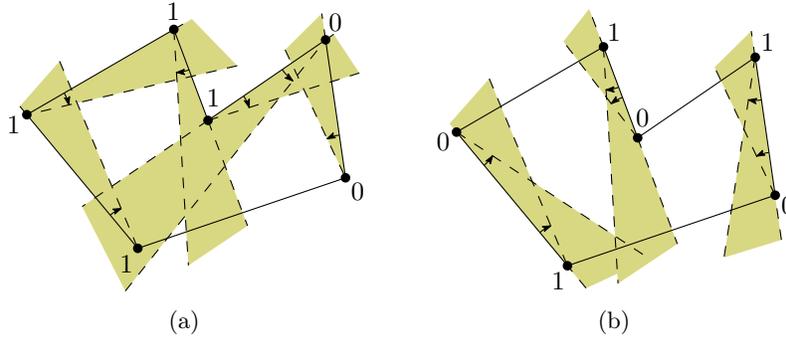


Figura 6.1: Un conjunto de reflectores en una configuración de Brocard sobre un polígono simple. Los reflectores están etiquetados con 1 o 0 si están orientados en sentido horario o antihorario, respectivamente. (a) Comenzando en el vértice de más a la izquierda y en orden circular horario, una configuración con la asignación 1, 1, 1, 0, 0, 1. (b) Una configuración con la asignación de orientaciones 0, 1, 0, 1, 0, 1 para el mismo polígono.

6.2. Polígonos de Brocard

Cuando P es un triángulo, la solución del Problema de Iluminación de Brocard (en ambas asignaciones de orientaciones de tipo único) está dada por la construcción de Brocard²: Denotemos con ℓ y r los rayos que acotan la región iluminada del reflector f que tiene ápice x y ángulo α . Los rayos son tales que, luego de rotar r por α alrededor de x , obtenemos ℓ . Decimos que ℓ y r son respectivamente, los rayos *izquierdo* y *derecho* de f . Al incrementar el ángulo de los reflectores sus rayos eventualmente se cortan en un mismo punto, iluminando por completo a P . Este punto es conocido como el *punto de Brocard* de P , y el ángulo óptimo de los reflectores es conocido como el *ángulo de Brocard* de P ³. Ver la Figura 6.2.

Sean θ_i y $\phi_i = \pi - \theta_i$ respectivamente, los ángulos interno y externo de P en v_i , y sea x_i el punto de intersección entre los rayos derechos de v_i y v_{i+1} . Notemos que $\angle v_i x_i v_{i+1} = \phi_{i+1}$ y por lo tanto, mientras incrementamos el ángulo de los reflectores, el punto x_i describe un arco de circunferencia que conecta v_i y v_{i+1} que es tangente a $\overline{v_{i+1}v_{i+2}}$ en v_{i+1} . Al extender este arco obtenemos un círculo c_i que es conocido como el *círculo adjunto* de P para los vértices v_i y v_{i+1} . Ver la Figura 6.3.

²En un trabajo relacionado se encontró que la construcción de Brocard también puede utilizarse para resolver un problema de iluminación similar [48].

³Una referencia clásica para la motivación y los resultados iniciales sobre la construcción de Brocard puede encontrarse en Bernhart [31]

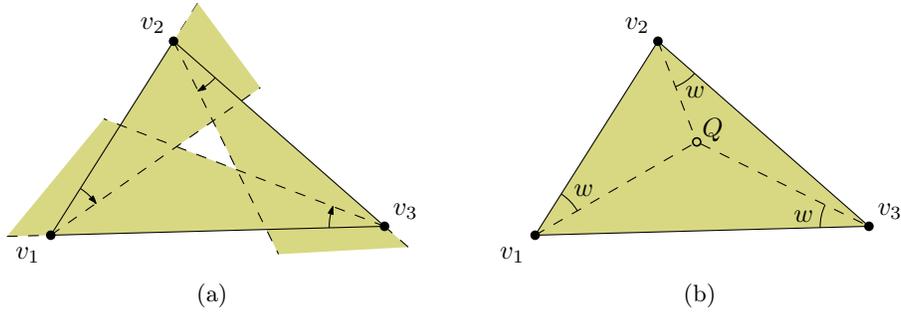


Figura 6.2: La configuración de Brocard en sentido horario. El ángulo de Brocard es etiquetado con w y el punto de Brocard con Q .

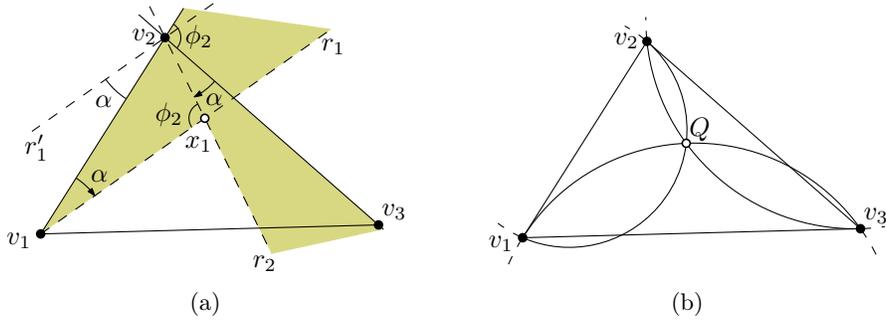


Figura 6.3: (a) La recta r'_1 (que es paralela a r_1) hace evidente que r_1 y r_2 serían paralelos a $\overline{v_1v_2}$ y $\overline{v_2v_3}$ respectivamente, si los rotamos en sentido antihorario por α alrededor de x_1 . En otras palabras, los ángulos formados por r_1 y r_2 son iguales a los ángulos formados por $\overline{v_1v_2}$ y $\overline{v_2v_3}$ y por lo tanto, $\angle v_1x_1v_2 = \phi_2$. (b) El grupo de círculos adjuntos en sentido horario y el punto de Brocard.

Describimos a continuación propiedades bien conocidas de la configuración de Brocard.

Lema 6.1 (Identidad de Brocard). *El ángulo de Brocard de un triángulo satisface la ecuación*

$$\cot w = \cot \theta_1 + \cot \theta_2 + \cot \theta_3.$$

Corolario 6.1. *El ángulo de Brocard de un triángulo siempre es menor o igual que $\frac{\pi}{6}$. La igualdad se alcanza cuando el triángulo es equilátero.*

Podemos obtener directamente una generalización de la construcción de Brocard a un polígono convexo de n lados. El punto de Brocard es un punto Q en el interior de P tal que $w = \angle Qv_i v_{i+1} = \angle Qv_{i+1} v_{i+2}$ para toda $0 \leq i < n$,

donde w es el ángulo de Brocard de P . El punto de intersección entre los rayos derechos de reflectores consecutivos se encuentra sobre el círculo adjunto que conecta v_i y v_{i+1} e igual que antes, el círculo es tangente al segmento $\overline{v_{i+1}v_{i+2}}$ en v_{i+1} . La construcción de Brocard de sentido antihorario se define análogamente.

Del grupo de círculos adjuntos podemos deducir que, a diferencia de los triángulos, la solución al problema de la iluminación de Brocard no siempre está dada por la construcción de Brocard. En un polígono de Brocard (un polígono convexo con al menos un punto de Brocard), el grupo de círculos adjuntos tienen un punto en común. Una familia de polígonos con esta propiedad son los polígonos regulares: en un polígono regular el punto de Brocard es su centro, y el ángulo de Brocard es igual a la mitad de su ángulo interno. En contraste, los círculos adjuntos de cualquier rectángulo no se cortan en un mismo punto. Ver la Figura 6.4.

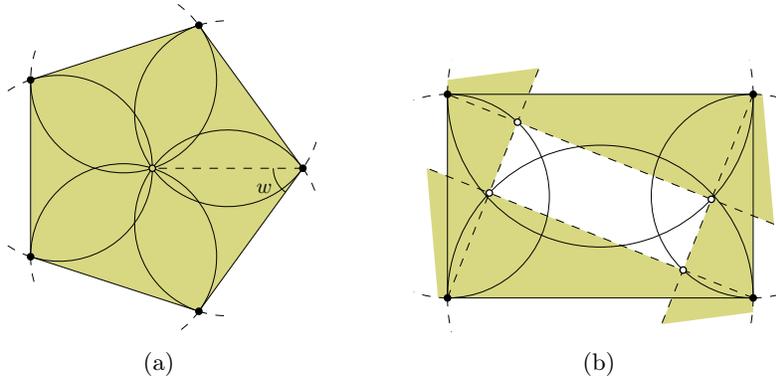


Figura 6.4: (a) La construcción de Brocard de un pentágono regular. (b) Un rectángulo no es un polígono de Brocard.

La existencia del punto de Brocard horario no implica la existencia del punto de Brocard antihorario. Consideremos por ejemplo el hexágono no regular presentado por Ben-Israel y Foldes [28] que es definido por los vértices $v_1 = (0, -1)$, $v_2 = (1, -1)$, $v_3 = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $v_4 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $v_5 = (1, \frac{1}{2})$, y un vértice v_6 en el punto intersección de la recta que pasa por v_5 con pendiente 1 y el círculo unitario con centro en $(0, 0)$. El ángulo de Brocard antihorario es igual a $\frac{\pi}{4}$ y el grupo de círculos adjuntos horarios no se cortan en un mismo punto. Ver la Figura 6.5.

Consideremos ahora el triángulo $\triangle v_i v_{i+1} Q$ (ver la Figura 6.6). Por la ley

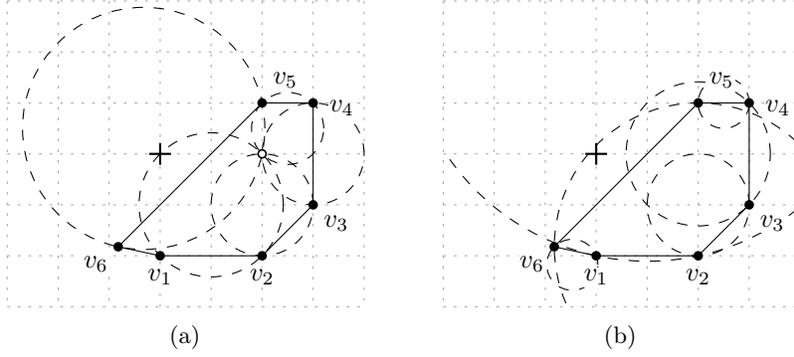


Figura 6.5: Un hexágono que no tiene punto de Brocard horario. (a) El grupo de círculos adjuntos antihorarios. (b) El grupo de círculos adjuntos horarios.

de los senos tenemos

$$\frac{a_i}{\text{sen}(w + \phi_{i+1})} = \frac{a_{i+1}}{\text{sen } w} = \frac{s_i}{\text{sen } \phi_{i+1}},$$

donde $a_i = \|\overline{Qv_i}\|$, $s_i = \|\overline{v_i v_{i+1}}\|$, y ϕ_i es el ángulo externo de P en v_i .

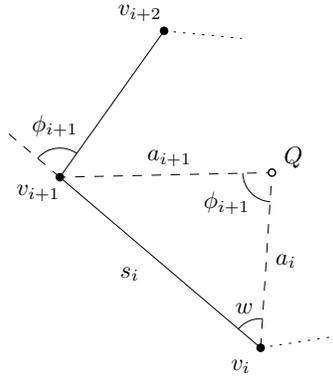


Figura 6.6

La división $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ es entonces igual a

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{\text{sen}(w + \phi_{i+1})}{\text{sen } w}$$

y entonces, el producto de todas las divisiones similares en P es igual a

$$\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_0} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \text{sen}(w + \phi_i)}{(\text{sen } w)^n} = 1,$$

y por lo tanto

$$\prod_{i=0}^{n-1} \operatorname{sen}(w + \phi_i) = (\operatorname{sen} w)^n$$

o equivalentemente

$$\prod_{i=0}^{n-1} (\cos \phi_i + \cot w \cdot \operatorname{sen} \phi_i) = 1. \quad (6.1)$$

Podemos considerar la Ecuación (6.1) como el análogo para polígonos convexos de la identidad de Brocard para triángulos⁴. La misma ecuación se obtiene si consideramos una asignación de un sólo tipo con una orientación en sentido antihorario. En el siguiente lema se muestra que la Ecuación (6.1) no sólo establece una condición necesaria, sino también suficiente para que un polígono convexo tenga un punto de Brocard.

Lema 6.2 (Bernhart [31]). *Sea $\Phi = \langle \phi_0, \dots, \phi_{n-1} \rangle$ una secuencia de ángulos tales que $0 < \phi_0, \dots, \phi_{n-1} < \pi$ y $\phi_0 + \dots + \phi_{n-1} = 2\pi$. Un polígono de Brocard siempre puede ser construido usando Φ como secuencia de ángulos externos con un ángulo de Brocard que satisface la ecuación*

$$\prod_{i=0}^{n-1} (\cos \phi_i + \cot w \cdot \operatorname{sen} \phi_i) = 1.$$

El ángulo de Brocard de un polígono con un punto de Brocard horario (resp. antihorario) está entonces determinado por sus ángulos externos. Además, es fácil ver que si P tiene ambos puntos de Brocard, entonces sus ángulos de Brocard correspondientes son iguales. Finalmente, ya que el orden de los ángulos no es relevante en la Ecuación (6.1), podemos crear $n!$ polígonos de Brocard con el mismo ángulo de Brocard a partir de un conjunto de n ángulos, donde cada uno corresponde a una permutación de los ángulos en el conjunto. La siguiente cota superior puede obtenerse de la secuencia de productos que nos lleva a la Ecuación (6.1)⁵.

Lema 6.3 (Besenyei [32]). *El ángulo de Brocard de un polígono convexo de n lados es menor o igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. La igualdad se alcanza cuando el polígono es regular.*

⁴Aunque tanto la Ecuación (6.1) como la identidad de Brocard relacionan los ángulos exteriores -o interiores- con el ángulo de Brocard de un polígono convexo, no parece posible (o al menos no directamente) obtener la identidad del Lema 6.1 a partir de la Ecuación (6.1) considerando que $n = 3$.

⁵El “producto circular” que resulta en la Ecuación (6.1) se obtiene de una generalización para polígonos del Teorema de Ceva. El caso en el que las cevianas no son concurrentes resulta en una generalización estudiada por Ben-Israel y Foldes [27]. De esta generalización, el Lema 6.3 y otras desigualdades relacionadas se obtienen como un caso particular donde las cevianas cumplen con la restricción de Brocard.

Un *polígono armónico* es un polígono cíclico con un punto p en su interior tal que, para cada arista del polígono, la longitud del segmento que conecta p con su proyección ortogonal sobre la arista es proporcional a la longitud de la arista⁶.

Lema 6.4 (Casey [41]). *La familia de polígonos con ambos puntos de Brocard (horario y antihorarios) es la familia de polígonos armónicos.*

6.3. Polígonos convexos

La existencia de una solución para el problema de la iluminación de Brocard no depende de que P sea un polígono de Brocard. Sean f_i el reflector en v_i , θ_s el ángulo interior más pequeño de P , y α el ángulo de la configuración de Brocard. Notemos que los reflectores en \mathcal{F} no cubren P cuando $\alpha = 0$, y P es iluminado completamente por f_s cuando $\alpha = \theta_s$. Por lo tanto, sin importar si P es un polígono de Brocard, por continuidad hay un ángulo w_p tal que P no está cubierto para cualquier $\alpha \in [0, w_p)$, y está completamente iluminado para todo $\alpha \geq w_p$. Decimos que w_p , el ángulo óptimo de la configuración de Brocard, es el *ángulo de pseudo-Brocard* de P .

Observación 6.1. *Todo polígono convexo tiene un ángulo de pseudo-Brocard horario y uno antihorario.*

Para toda $0 \leq \alpha < w_p$, la *región oscura* de P es el polígono convexo

$$P_d(\alpha) = P \setminus (P \cap (f_0 \cup \dots \cup f_{n-1}))$$

en el interior de P que todavía no es iluminado por los reflectores en \mathcal{F} , donde el ángulo de la configuración de Brocard es igual a α ⁷. Recordemos que x_i es el punto de intersección entre los rayos derechos de f_i y f_{i+1} , y c_i es el círculo adjunto que conecta v_i con v_{i+1} . Denotamos con a_i al segundo punto de intersección entre c_i y c_{i+1} , con α_i al ángulo $\angle a_i v_i v_{i+1}$, y con ℓ_i al ángulo que pasa por v_i y v_{i+1} . Ver la Figura 6.7.

Supongamos que α_0 es el ángulo más pequeño en $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$. Para cualquier $\alpha \in (0, \alpha_0)$, cada punto x_i cae en el círculo adjunto c_i y $P_d(\alpha)$ tiene los puntos x_0, \dots, x_{n-1} como vértices. Al incrementar α hacia α_0 el polígono

⁶Un extenso conjunto de propiedades y caracterizaciones de los polígonos armónicos puede encontrarse en el artículo de Casey [41].

⁷Los polígonos P y $P_d(\alpha)$ son semejantes si P es un polígono de Brocard, ya que los triángulos formados por el haz de rayos con origen en el punto de Brocard y que pasan por los vértices de P son semejantes a los triángulos formados análogamente con los vértices de $P_d(\alpha)$.

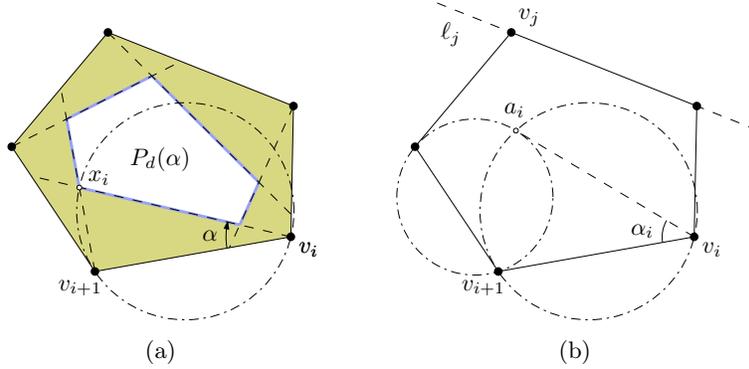


Figura 6.7: (a) La región oscura de P , el círculo adjunto c_i , y el punto de intersección x_i entre los rayos derechos f_i y f_{i+1} . (a) Los círculos adjuntos c_i y c_{i+1} , su segundo punto de intersección a_i , y la recta ℓ_j .

$P_d(\alpha)$ se encoge, ya que para toda $0 \leq i < n$ los puntos x_i y x_{i+1} se mueven sobre c_i y c_{i+1} respectivamente, acercándose a a_i (Figura 6.8(a)). Cuando $\alpha = \alpha_0$ tenemos que $x_0 = x_1 = a_0$; es decir, la arista $\overline{x_0x_1}$ degenera en un punto. Notemos que el rayo derecho de f_1 no participa en la frontera de $P_d(\alpha_0)$, por lo que f_1 puede ser “apagado” sin que cambie el área iluminada de P . Mientras incrementamos α desde 0 hasta θ_s , decimos que α_0 es un *evento de apagado*. Ver la Figura 6.8(b).

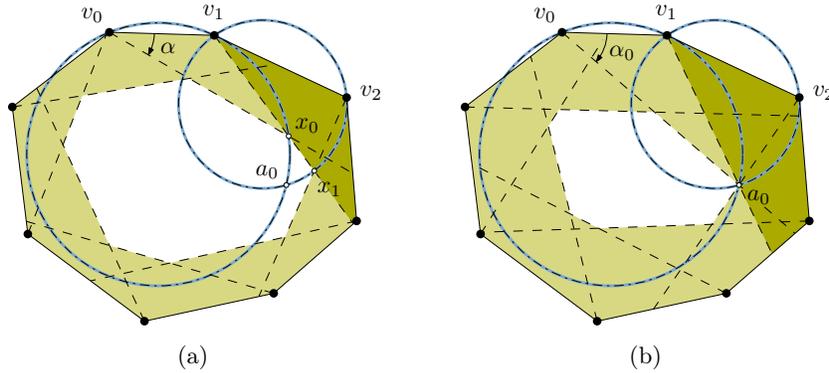


Figura 6.8: (a) La configuración para algún $\alpha \in (0, \alpha_0)$. El ángulo α_0 es el más pequeño en $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$. (b) Cuando $\alpha = \alpha_0$ tenemos que $a_0 = x_0 = x_1$. El rayo derecho de f_1 no participa en la frontera de $P_d(\alpha_0)$.

Sea ε un ángulo tal que el primer evento de apagado después de α_0 es mayor que $\alpha_0 + \varepsilon$. Los vértices de $P_d(\alpha_0 + \varepsilon)$ son $x_{(0,2)}, x_2, \dots, x_{n-1}$, donde

$x_{(0,2)}$ es el punto de intersección entre los rayos derechos de f_0 y f_2 . Los rayos derechos de f_0 y f_2 forman ángulos iguales a los formados por ℓ_0 y ℓ_2 y entonces, $x_{(0,2)}$ cae en el arco circular que conecta v_0 y v_2 con ángulo $\pi - \angle v_2 v_{(0,2)} v_0$, donde $v_{(0,2)}$ es el punto de intersección entre ℓ_0 y ℓ_2 . Decimos que el círculo $c_{(0,2)}$ que contiene este arco es el círculo adjunto de P para los vértices v_0 y v_2 . Notemos que $\angle v_2 v_{(0,2)} v_0 = \pi - \angle v_0 x_{(0,2)} v_2$ y entonces, los puntos $v_0, v_2, x_{(0,2)}$, y $v_{(0,2)}$ se encuentran sobre $c_{(0,2)}$. Ver la Figura 6.9.

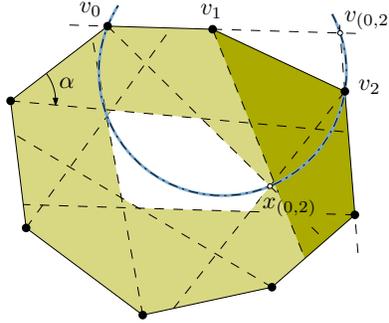


Figura 6.9: La configuración cuando $\alpha_0 + \varepsilon$ y el círculo adjunto $c_{(0,2)}$.

Si seguimos incrementando α , el siguiente evento de apagado está dado por el ángulo más pequeño en el conjunto $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ de ángulos calculados luego de reemplazar c_0 y c_1 por $c_{(0,2)}$ en el conjunto de círculos adjuntos de P . Es decir, calculamos α_0 utilizando ahora el segundo punto de intersección entre c_{n-1} y $c_{(0,2)}$, y α_{n-1} utilizando el punto de intersección entre $c_{(0,2)}$ y c_2 . Ver la Figura 6.10.

Claramente, lo siguiente es verdadero en cada evento de apagado: los vértices de $P_d(\alpha)$ se reducen en uno, tres elementos son eliminados de la secuencia de ángulos (uno de ellos es el evento de apagado actual), y dos nuevos elementos son agregados. Mientras incrementamos α hacia θ_s eventualmente llegaremos al valor de α donde los círculos adjuntos restantes se intersecan en un mismo punto [27], es decir, cuando α es la solución al problema de iluminación de Brocard. Este proceso naturalmente nos lleva al siguiente algoritmo para obtener el punto y el ángulo de pseudo-Brocard de un polígono convexo.

1. Calcular el conjunto $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$. Reetiquetar el conjunto para obtener la secuencia $\mathcal{A} = \alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}$ de ángulos en orden creciente.
2. Realizar los siguientes pasos hasta que el primer y último elementos en \mathcal{A} sean iguales (es decir, cuando todos los círculos adjuntos comparten un punto).

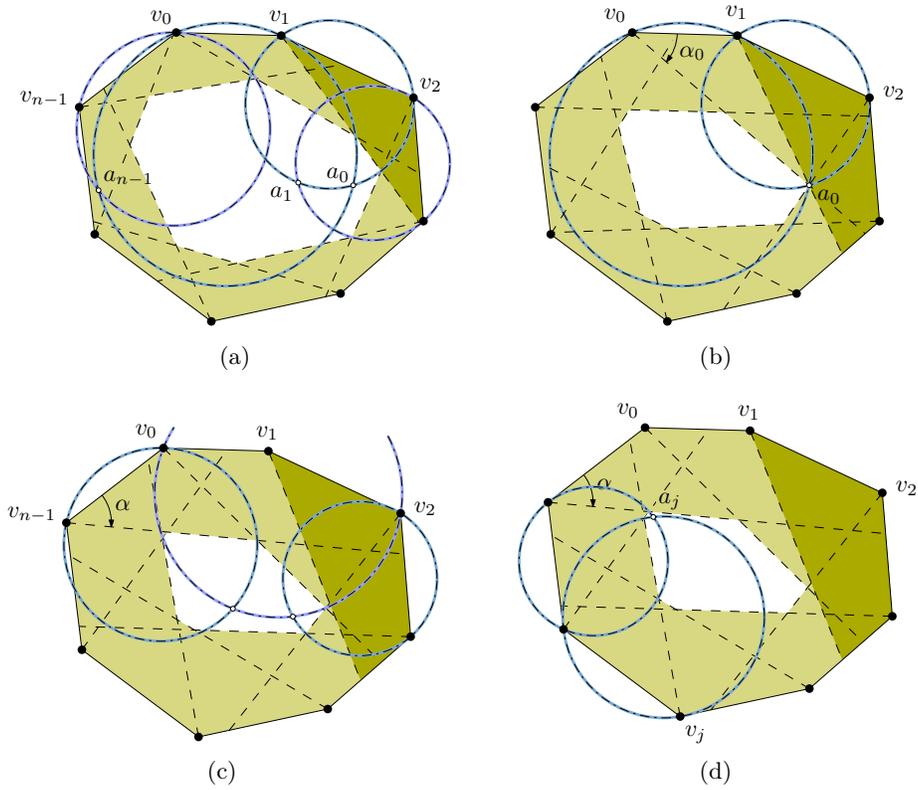


Figura 6.10: La configuración durante el cambio en el conjunto de círculos adjuntos en un evento de apagado. (a) Antes del evento de apagado. (b) En el evento de apagado. (c) Después del evento de apagado. Notemos los nuevos puntos de intersección inducidos por $c_{(0,2)}$. (d) El siguiente evento de apagado es α_j , donde $x_j = x_{j+1} = a_j$.

- a) Eliminar de \mathcal{A} el ángulo α_{i_0} (el más pequeño en la secuencia).
- b) Calcular el círculo $c_{(i_0, i_0+2)}$, y los puntos de intersección entre c_{i_0-1} y $c_{(i_0, i_0+2)}$, y entre $c_{(i_0, i_0+2)}$ y c_{i_0+2} .
- c) Eliminar de \mathcal{A} los ángulos α_{i_0-i} , α_{i_0} , y α_{i_0+1} . Agregar a \mathcal{A} los ángulos correspondientes a los puntos de intersección entre c_{i_0-1} , $c_{(i_0, i_0+2)}$, y c_{i_0+2} .

El Paso 1 nos toma $O(n \log n)$, ya que podemos calcular el conjunto $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ en tiempo $O(n)$. De la discusión previa, es claro que el Paso 2 se realiza a lo más $O(n)$ veces: \mathcal{A} comienza con n elementos, y en cada evento de apagado sus elementos se reducen en uno. Si almacenamos \mathcal{A} en

un árbol balanceado de búsqueda, los Pasos 2a y 2c (los más costosos del Paso 2) consumen tiempo $O(\log n)$, para un tiempo total de $O(n \log n)$. De este análisis obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.1. *El punto y el ángulo de pseudo Brocard de un polígono convexo puede calcularse en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$.*

Sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ el conjunto de reflectores de vértice en una configuración de Brocard sobre P cuyos rayos derechos se cortan en el punto de pseudo-Brocard cuando su ángulo de apertura es igual al ángulo de pseudo-Brocard. Notemos que sólo un número constante de reflectores en \mathcal{F}' son necesarios para iluminar P . En efecto, podemos cubrir el plano con dos semiplanos si sus líneas de soporte son paralelas entre sí, y tres semiplanos son suficientes si ningún par de ellos tienen líneas de soporte paralelas entre sí. Describimos estas propiedades en el siguiente lema, ya que nos permite comparar la iluminación de Brocard con tipos relacionados de iluminación [60, 116] que expresan su optimalidad en términos de la suma de la apertura de los ángulos de los reflectores que se requieren para iluminar un polígono.

Lema 6.5. *Utilizando la iluminación de Brocard, tres reflectores son siempre suficientes y a veces necesarios para iluminar un polígono convexo. Ver Figura 6.11.*

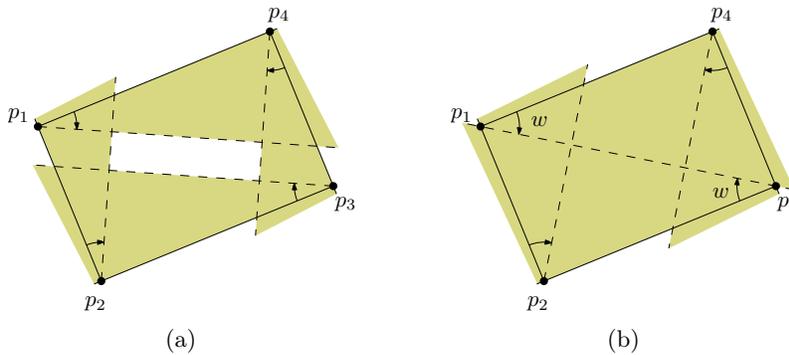


Figura 6.11: Cualquier rectángulo es iluminado por dos reflectores. La última región iluminada es un segmento. El punto de pseudo Brocard es cualquier punto de pseudo Brocard en este segmento. (a) El rectángulo no está completamente iluminado cuando $\alpha < w$. (b) El rectángulo está cubierto cuando $\alpha = w$.

Ya que el punto y el ángulo de pseudo-Brocard pueden obtenerse utilizando un número constante de reflectores, creemos que es posible obtenerlos en tiempo $O(n)$. Como trabajo futuro tenemos la caracterización de polígonos con un sólo ángulo de pseudo-Brocard.

6.4. Polígonos simples

En esta sección estudiamos el problema de la iluminación de Brocard en polígonos simples que no necesariamente son convexos. Comenzamos generalizando las observaciones que hicimos en la Sección 6.2 en el siguiente lema.

Lema 6.6. *El ángulo de iluminación de Brocard de P está determinado por tres rayos r_i , r_j y r_k que se intersectan en un punto interior de P (Figura 6.1(a)), o por dos rayos r_i y r_j que coinciden en un segmento $\overline{v_i v_j}$ (Figura 6.12(b)).*

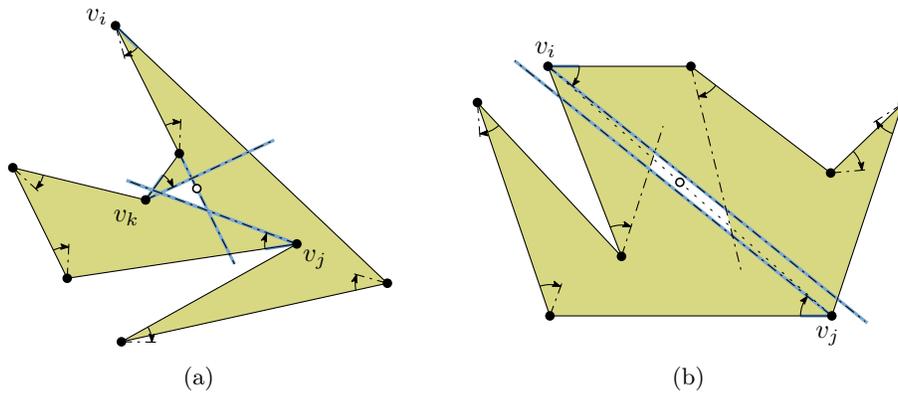


Figura 6.12: Iluminación de Brocard en polígonos simples. Las flechas indican la apertura de los reflectores. (a) Una solución al problema de Brocard dada por tres reflectores en los vértices v_i , v_j y v_k . Sus rayos derechos están por intersectarse en el punto de Brocard, indicado en blanco. (b) Una solución al problema de Brocard dada por dos reflectores en los vértices v_i y v_j con rayos paralelos entre sí. Sus rayos derechos están por coincidir en el segmento $\overline{v_i v_j}$. La última región iluminada es un segmento de recta, por lo que hay un número infinito de puntos de Brocard. Uno de ellos se indica en blanco.

Dados dos puntos p y q en el interior de P , decimos que p es visible desde q si el segmento que conecta p con q está completamente contenido en P . El polígono de visibilidad de un vértice v_i es el conjunto de puntos en el interior de P que son visibles desde v_i . Definimos el polígono de α -visibilidad de v_i como el polígono simple $P_i(\alpha)$ formado por los puntos en el interior de P que son visibles desde v_i a través de f_i . Basado en el Lema 6.6 realizamos una búsqueda binaria. Describimos a continuación el algoritmo.

1. **Ángulos candidatos.** Con base en las condiciones del Lema 6.6, calculamos el conjunto \mathcal{A} de $O(n^3)$ ángulos candidatos de iluminación de Brocard. Luego de calcular los ángulos candidatos, ordenamos los elementos de \mathcal{A} en orden creciente.

- a) Agregamos a \mathcal{A} los ángulos dados por los puntos de intersección $Q_{(i,j,k)}$ entre todas las tripletas de los círculos $c_{(i,j)}$, $c_{(j,k)}$ y $c_{(j,k)}$ tales que $Q_{(i,j,k)}$ se encuentra en el interior de P . Estos ángulos candidatos cubren el caso donde tres rayos coinciden en un punto y ninguno de ellos pasa por un segundo vértice de P , como se muestra en la Figura 6.13.

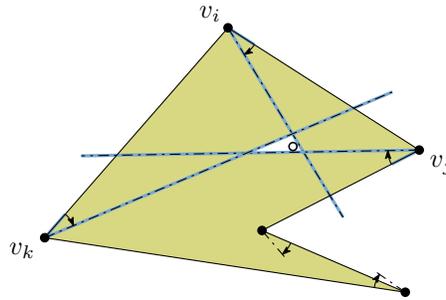


Figura 6.13: Una solución al problema de Brocard dada por tres reflectores en los vértices v_i , v_j y v_k . Sus rayos derechos están por intersectarse en el punto de Brocard (indicado en blanco) y ninguno de ellos pasa por otro vértice.

- b) Por cada par (v_i, v_j) tal que v_j es visible desde v_i y v_j es cóncavo, añadimos a \mathcal{A} el ángulo $\angle v_j v_i v_{i+1}$. Estos ángulos cubren el caso donde tres rayos r_i, r_j y r_k coinciden en un punto y al menos uno de ellos pasa por otro vértice de P . Ver Figura 6.12(a), donde r_i parte de v_i y pasa por un segundo vértice del polígono.
 - c) Por cada par (v_i, v_j) tal que v_j es visible desde v_i y $\overline{v_i v_{i+1}}$ es paralelo a $\overline{v_j v_{j+1}}$, añadimos a \mathcal{A} el ángulo $\angle v_j v_i v_{i+1}$. Estos ángulos candidatos cubren el caso donde dos rayos r_i, r_j coinciden en el segmento $\overline{v_i v_j}$. Ver la Figura 6.12(b).
2. **Procesar polígonos de visibilidad.** Calcular el polígono de visibilidad P_i de cada vértice v_i , y el conjunto \mathcal{S} de puntos de intersección de todos los segmentos de recta dentro de P inducidos por los polígonos P_0, \dots, P_{n-1} . Es fácil ver que hay $O(n)$ puntos de intersección para cada par (P_i, P_j) y por lo tanto, hay $O(n^3)$ elementos en \mathcal{S} . Para finalizar

este paso, agregamos los vértices de P a \mathcal{S} y ordenamos después los elementos de \mathcal{S} en orden creciente de acuerdo con su coordenada en x .

3. **Búsqueda binaria.** Realizamos una búsqueda binaria en los elementos de \mathcal{A} . En cada iteración, determinamos si los reflectores en $\mathcal{F}(\alpha)$ iluminan el interior de P para el valor actual de α y así decidir en cuál de las dos partes de \mathcal{A} realizar la búsqueda recursiva.

Para saber si $\mathcal{F}(\alpha)$ ilumina todo el interior de P , calculamos la unión de los polígonos $P_0(\alpha), \dots, P_{n-1}(\alpha)$ para el valor dado de α realizando un barrido de línea como sigue;

- a) Utilizamos los elementos del conjunto (ordenado) \mathcal{S} como eventos de parada.
- b) Mantenemos las intersecciones entre la línea de barrido, P , y el conjunto $P_0(\alpha), \dots, P_{n-1}(\alpha)$. Estas intersecciones forman un conjunto de intervalos en la línea de barrido, y representan el interior de P y el área iluminada por los reflectores en $\mathcal{F}(\alpha)$ para el valor actual de α . Notemos que los intervalos no son disjuntos entre sí y que varios intervalos pueden compartir un extremo.
- c) Ignoramos los eventos que corresponden a puntos que no pertenecen a un polígono de α -visibilidad para el valor actual de α , ya que no pertenecen a la unión de los polígonos $P_0(\alpha), \dots, P_{n-1}(\alpha)$.
- d) Basado en los intervalos sobre la línea de barrido, decidimos si el valor actual de α es suficiente para iluminar el interior de P .

Análisis del algoritmo. El Paso 1 nos toma tiempo $O(n^3 \log n)$ y espacio $O(n^3)$. En el Paso 1a usamos ray-shooting para saber si los segmentos $\overline{Q_{(i,j,k)}v_x}$, $x \in \{i, j, k\}$, se encuentran en el interior de P , gastando tiempo logarítmico por tripleta. En los Pasos 1b y 1c calculamos primero la gráfica de visibilidad de P en tiempo $O(n^2)$, para luego obtener el ángulo en tiempo constante por cada pareja de vértices que son adyacentes en la gráfica. Finalmente, cuando hemos agregado los $O(n^3)$ ángulos candidatos, ordenar los elementos de \mathcal{A} nos toma tiempo $O(n^3 \log n)$.

El Paso 2 consume tiempo $O(n^3 \log n)$ y espacio $O(n^3)$. La búsqueda binaria del Paso 3 es el paso más costoso del algoritmo: En cada una de las $O(\log n)$ iteraciones, realizamos un barrido de línea en un conjunto ordenado de $O(n^3)$ eventos de parada, y nos toma tiempo $O(\log n)$ procesar cada evento. Es decir, nos toma tiempo $O(n^3 \cdot \log n \cdot \log n) = O(n^3 \log^2 n)$ y espacio $O(n^3)$. De este análisis obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2. *El ángulo de iluminación de Brocard de un polígono simple puede calcularse en tiempo $O(n^3 \log^2 n)$ y espacio $O(n^3)$.*

Nuestro enfoque para resolver el problema de iluminación de Brocard para polígonos simples está basado en el cálculo eficiente de la unión del conjunto de polígonos de α -visibilidad para un valor dado de α . Ya que no necesitamos calcular la unión de estos polígonos (en contraste con decidir si la unión ilumina el interior de P), creemos que nuestra cota de tiempo $O(n^3 \log^2 n)$ puede ser mejorada, aunque no parece un problema fácil de resolver.

6.5. Cotas del ángulo de Brocard

En problemas de iluminación es común utilizar el número de lámparas necesarias para iluminar un polígono como medida de eficiencia. Cuando se estudian problemas de iluminación con reflectores, comúnmente se considera además el “poder total”, es decir, la suma de las aperturas de los reflectores que iluminan el polígono. Terminamos este capítulo con algunas reflexiones sobre el número de reflectores y el poder total requerido para resolver los problemas de iluminación de Brocard que estudiamos anteriormente.

En un polígono convexo es fácil obtener una cota de $\frac{\pi}{2}$ en el ángulo de iluminación de Brocard. Por lo tanto, tres reflectores son siempre suficientes para iluminar el polígono utilizando a lo más $\frac{3}{2}\pi$ de poder total. En un polígono de Brocard, de la cota $\alpha_b \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ obtenemos un poder total de a lo más $\pi(\frac{3}{2} - \frac{3}{n})$.

Se sabe que un polígono simple puede iluminarse utilizando π -reflectores de vértice [59]. Sin embargo, si los reflectores están alineados con una arista no es difícil demostrar que un ángulo de apertura de π no siempre es suficiente para iluminar el interior del polígono. Ya que un polígono simple que requiere un número lineal de reflectores alineados con una arista no es difícil de obtener, requerimos en este caso un poder total de $\Omega(\pi n)$.

6.6. Conclusiones

Hemos explorado una variante de la iluminación tradicional de polígonos con reflectores. En esta variante utilizamos un tipo especial de reflectores que llamamos “alineados con una arista”. Cuando resolvemos nuestro problema en un triángulo, la solución equivale a calcular el punto de Brocard del triángulo. Por lo tanto, nuestra variante puede ser considerada también como una generalización de las propiedades de Brocard en triángulos a polígonos simples no necesariamente convexos.

En los polígonos de Brocard, podemos resolver el problema de la iluminación de Brocard en tiempo lineal. La clase de polígonos de Brocard es la clase de polígonos armónicos. Como trabajo futuro tenemos la caracterización de polígonos con un sólo ángulo de pseudo-Brocard. En polígonos convexos el punto y el ángulo de pseudo-Brocard pueden obtenerse utilizando un número constante de reflectores. Por lo tanto, creemos que es posible calcularlos en tiempo $O(n)$. En polígonos simples, nuestro enfoque para resolver el problema de iluminación de Brocard está basado en el cálculo eficiente de la unión del conjunto de polígonos de α -visibilidad para un valor dado de α . Ya que no necesitamos calcular la unión de estos polígonos (en contraste con decidir si la unión ilumina el interior de P), creemos que nuestra cota de $O(n^3 \log^2 n)$ tiempo puede ser mejorada, aunque no parece un problema fácil de resolver. En particular, el ejemplo que mostramos en la Figura 6.14 puede reproducirse en otras clases de polígonos.

Con el objetivo de ajustar más la complejidad en tiempo entre los polígonos convexos y los simples, un camino que podemos explorar es estudiar el problema en otras clases de polígonos. Algunas posibles clases son los polígonos \mathcal{O} -convexos, o los polígonos angostos [113, 114]. Creemos que en el caso particular de los polígonos orto-convexos, la complejidad de la unión de los polígonos de α -visibilidad es $O(n^2)$.

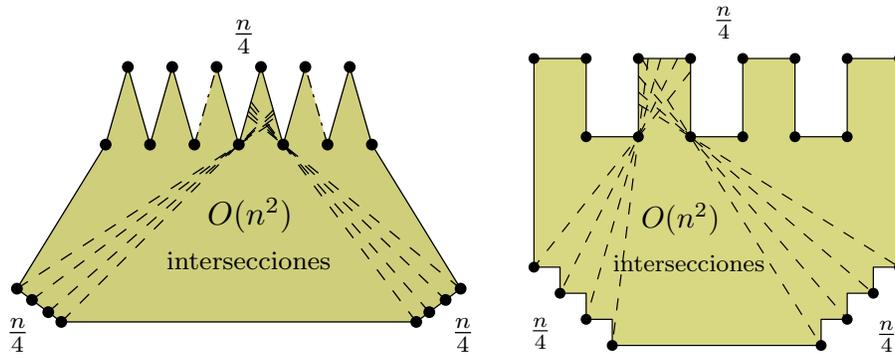


Figura 6.14: La unión de polígonos de α -visibilidad tiene complejidad $O(n^3)$.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

Convexidad con orientaciones restringidas. Un resultado en vías de ser publicado es la relación de contención entre cierres \mathcal{O} -convexos de conjuntos de puntos en el plano. Dados dos conjuntos disjuntos R y B de n puntos rojos y n puntos azules en el plano, calculamos los valores de θ para las cuales el cierre \mathcal{O}_θ -convexo de R no contiene puntos azules en su interior. Nuestro algoritmo toma tiempo $O(kn \log n)$ y espacio $O(kn)$. De forma similar a los problemas que estudiamos en capítulos anteriores, nuestro algoritmo es óptimo cuando k es una constante.

Otro problema que se encuentra en proceso es el de mantener el diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos en el plano en la métrica L_∞ . La intención de este trabajo es aplicar el algoritmo resultante a problemas relacionados, como el cálculo del cuadrado vacío más grande en todas las orientaciones del plano. Algunas extensiones interesantes son la utilización de otras figuras dependientes de la orientación como medida de proximidad. La opción más natural son los polígonos con orientaciones restringidas.

Dos direcciones que faltaron por explorar son extensiones en el espacio del cierre \mathcal{O} -convexo y extensiones de visibilidad e iluminación. En la primera línea estoy interesado en estudiar el problema de calcular y mantener el cierre convexo rectilíneo de un conjunto de puntos en el espacio cuando variamos el sistema coordenado. A pesar de contar con un número constante de elementos en el conjunto de orientaciones, el problema parece de por sí suficientemente complicado. En la segunda línea estoy interesado en trabajar en extensiones de los modelos actuales de visibilidad ortogonal. Comencé con algunos resultados explorando problemas de testigos y de guardias independientes. Mi intención es explorar versiones cromáticas o con nuevos modelos de visibilidad con orientaciones restringidas.

Captura de puntos. En este tema, la pregunta natural es saber si la complejidad en tiempo de nuestros algoritmos puede mejorarse. En particular, sería interesante saber si existe un algoritmo que en tiempo cuadrático resuelva el problema de rotar un polígono simple hasta que contenga el máximo número de puntos de un conjunto dado, cuando el centro de rotación se restringe a un punto.

Una variante interesante por explorar es el diseño de estructuras de datos que permitan hacer preguntas dinámicamente. En esta variante permitimos preprocesamiento en el polígono y el conjunto de puntos, de forma que podamos especificar una curva (o región) de restricción del centro de rotación. El objetivo es obtener lo más rápido posible el valor del ángulo de rotación que resuelve el problema.

Iluminación de Brocard. El trabajo en progreso más inmediato es determinar la complejidad del problema de iluminación de Brocard para polígonos convexos. Nuestra conjetura es que el problema puede resolverse en tiempo lineal, aunque no hemos podido obtener un algoritmo, o la demostración de una cota inferior superlineal. Con el objetivo de ajustar más la complejidad en tiempo entre los polígonos convexos y los simples, un camino que podemos explorar es estudiar el problema en otras clases de polígonos. Algunas posibles clases son los polígonos \mathcal{O} -convexos o los polígonos angostos. Creemos que en el caso particular de los polígonos orto-convexos, la complejidad de la unión de los polígonos de α -visibilidad es $O(n^2)$.

En el caso de polígonos simples, un problema interesante es determinar lo más eficientemente posible si la unión de un conjunto de reflectores cubre un polígono. En espíritu, este problema es una variante del problema de determinar si un conjunto de semiplanos tiene una intersección no vacía. Es sabido que este último problema puede resolverse en tiempo lineal.

Otro problema interesante es el de explorar extensiones de la iluminación de Brocard en el espacio. La primera dificultad es determinar (o investigar si tiene sentido) el equivalente del orden horario o antihorario de los reflectores.

Bibliografía

- [1] James Abello, Vladimir Estivill-Castro, Thomas Shermer y Jorge Urrutia. “Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlights”. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 08.01 (1998), págs. 25-38.
- [2] Pankaj K. Agarwal, Eyal Flato y Dan Halperin. “Polygon decomposition for efficient construction of Minkowski sums”. *Computational Geometry; Theory and Applications* 21.1-2 (2002), págs. 39-61.
- [3] Pankaj K. Agarwal, Torben Hagerup, Rahul Ray, Micha Sharir, Michiel Smid y Emo Welzl. “Translating a planar object to maximize point containment”. *Algorithms — ESA 2002*. Springer Berlin Heidelberg, 2002, págs. 42-53.
- [4] Israel Aldana-Galván, Carlos Alegría-Galicia, José Luis Álvarez-Rebollar, Nestaly Marin-Nevárez, Erick Solís-Villarreal, Jorge Urrutia y Carlos Velarde. “Finding minimum witness sets in orthogonal polygons”. *30th Canadian Conference on Discrete and Computational Geometry (CCCG 2018)*. 2018.
- [5] Carlos Alegría Galicia, Julia A. Bennell, Marta Cabo Nodar y Antonio Martínez Sykora. “Heurísticas para resolver un problema de la mochila sobre un bin rectangular”. *VII Congreso de la Sociedad Mexicana de Investigación de Operaciones (CSMIO 2018)*. 2018.
- [6] Carlos Alegría-Galicia. *A set of Ipelets to compute the \mathcal{O} -convex hull of a set of points in the plane for different orientations of the coordinate axis*. 2018. DOI: 10.5281/zenodo.1344570.
- [7] Carlos Alegría-Galicia. *An Ipelet to compute the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation of a set of points in the plane on the infinity metric*. 2018. DOI: 10.5281/zenodo.1344483.
- [8] Carlos Alegría-Galicia. *Dynamic Rectilinear Convex Hull Simulator*. 2018. DOI: 10.5281/zenodo.1344455.

- [9] Carlos Alegría-Galicia, Tzolkin Garduño, Areli Rosas-Navarrete, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Rectilinear convex hull with minimum area”. *Computational Geometry. EGC 2011*. Ed. por Alberto Márquez, Pedro Ramos y Jorge Urrutia. Vol. 7579. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2012, págs. 226-235.
- [10] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Leonidas Palios, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Capturing points with a rotating polygon (and a 3D extension)”. *Theory of Computing Systems* (2018). In Press. DOI: 10.1007/s00224-018-9885-y.
- [11] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Leonidas Palios, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Covering points with rotating polygons”. *32th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2016)*. 2016.
- [12] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Illuminating polygons by edge-aligned floodlights of uniform angle (Brocard illumination)”. *33th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2017)*. 2017.
- [13] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the \mathcal{O}_β -hull of a planar point set”. *Computational Geometry 68* (2018), págs. 277-291.
- [14] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the \mathcal{O} -hull of planar point sets”. *30th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2014)*. 2014.
- [15] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the Rectilinear Convex Hull of a planar point set and its generalizations”. *XXXI Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones*. 2017.
- [16] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Optimizing an oriented convex hull with two directions”. *31th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2015)*. 2015.
- [17] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Rectilinear and \mathcal{O} -convex hull with minimum area”. *ArXiv e-prints* (2017). Submitted. arXiv: 1710.10888 [cs.CG].
- [18] Carlos Alegría-Galicia, David Orden, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “The \mathcal{O}_β -hull of a planar point set and some applications”. *XVI Spanish Meeting on Computational Geometry (EGC 2015)*. 2015.

- [19] Carlos Alegría-Galicia, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “Computing containment relations between Rectilinear Convex Hulls”. *Mexican Conference on Discrete Mathematics and Computational Geometry, 60th birthday of Jorge Urrutia*. 2013.
- [20] Marco Attene. “Shapes In a Box: Disassembling 3D Objects for Efficient Packing and Fabrication”. *Computer Graphics Forum* 34.8 (2005), págs. 64-76.
- [21] David Avis, Bryan Beresford-Smith, Luc Devroye, Hossam Elgindy, Eric Guévremont, Ferran Hurtado y Binhai Zhu. “Unoriented Θ -maxima in the plane: Complexity and algorithms”. *SIAM J. Comput.* 28.1 (1998), págs. 278-296.
- [22] Sang Won Bae, Chunseok Lee, Hee-Kap Ahn, Sunghee Choi y Kyung-Yong Chwa. “Computing minimum-area rectilinear convex hull and L-shape”. *Computational Geometry: Theory and Applications* 42.9 (2009), págs. 903-912.
- [23] Gill Barequet, Matthew Dickerson y Petru Pau. “Translating a convex polygon to contain a maximum number of points”. *Computational Geometry: Theory and Applications* 8.4 (1997), págs. 167-179.
- [24] Gill Barequet y Alex Goryachev. “Offset polygon and annulus placement problems”. *Computational Geometry: Theory and Applications* 47.3, Part A (2014), págs. 407-434.
- [25] Gill Barequet y Sariel Har-Peled. “Efficiently Approximating the Minimum-Volume Bounding Box of a Point Set in Three Dimensions”. *Journal of Algorithms* 38.1 (2001), págs. 91-109.
- [26] Gill Barequet y Sariel Har-Peled. “Polygon containment and translation min-Hausdorff-distance between segment sets are 3SUM-hard”. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 11.4 (2001), págs. 465-474.
- [27] Adi Ben-Israel y Stephan Foldes. “Complementary Halfspaces And Trigonometric Ceva-Brocard Inequalities For Polygons”. *Mathematical Inequalities & Applications* 2 (1999), págs. 307-316.
- [28] Adi Ben-Israel y Stephan Foldes. “Stability of Brocard Points of Polygons”. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 30.2 (2000), págs. 411-434.

- [29] Jon L. Bentley, Hsiang-Tsung Kung, Mario Schkolnick y Clark D. Thompson. “On the average number of maxima in a set of vectors and applications”. *Journal of the Association for Computer Machinery* 25.4 (1978), págs. 536-543.
- [30] Jon L. Bentley y Thomas A. Ottmann. “Algorithms for reporting and counting geometric intersections”. *IEEE Transactions on Computers* C-28.9 (1979), págs. 643-647.
- [31] Arthur Bernhart. “Polygons of pursuit”. *Scripta Mathematica* 24.1 (1959), págs. 23-50.
- [32]  Besenyei. “The Brocard angle and a geometrical gem from Dmitriev and Dynkin”. *The American Mathematical Monthly* 122.5 (2015), págs. 495-499.
- [33] Therese Biedl y Burkay Gen. “Reconstructing orthogonal polyhedra from putative vertex sets”. *Computational Geometry: Theory and Applications* 44.8 (2011), págs. 409-417.
- [34] Prosenjit Bose, Leonidas Guibas, Anna Lubiw, Mark Overmars, Diane Souvaine y Jorge Urrutia. “The floodlight problem”. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 7.1 & 2 (1997), págs. 153-163.
- [35] Stefan Brabec, Thomas Annen y Hans-Peter Seidel. “Practical Shadow Mapping”. *Journal of Graphics Tools* 7.4 (2002), págs. 9-18.
- [36] Peter Brass, William Moser y Jnos Pach. *Research problems in discrete geometry*. Springer Science, 2005.
- [37] Marilyn Breen y DavidC. Kay. “General decomposition theorems for m -convex sets in the plane”. *Israel Journal of Mathematics* 24.3-4 (1976), págs. 217-233.
- [38] Gerth S. Brodal y Riko Jacob. “Dynamic planar convex hull”. *Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE, 2002, págs. 617-626.
- [39] Marta Cabo, Julia A. Bennell, Antonio Martínez Sykora y Carlos Alegría. “Beam Search for the 2D-Single Knapsack Problem”. *29th European Conference on Operational Research (EURO 2018)*. 2018.
- [40] Marta Cabo, Julia A. Bennell, Antonio Martínez Sykora y Carlos Alegría. “Beam Search for the 2D-Single Knapsack Problem”. *15th ESICUP Meeting*. 2018.

- [41] John Casey. *A sequel to the first six books of the elements of euclid*. Dublin University Press., 1888.
- [42] Timothy. M. Chan. “Optimal Output-Sensitive Convex Hull Algorithms in Two and Three Dimension”. *Discrete & Computational Geometry* 16.4 (1996), págs. 361-368.
- [43] Bernard Chazelle. “Advances in Computing Research”. Ed. por Franco P. Preparata. Vol. 1. JAI Press, 1983. Cap. The polygon containment problem, págs. 1-33.
- [44] Bernard Chazelle, Nina Amenta, Tetsuo Asano, Gill Barequet, Marshall Bern, Jean-Daniel Boissonnat, John Canny, Ken Clarkson, David Dobkin, Bruce Donald, Scot Drysdale, Herbert Edelsbrunner, David Eppstein, A. Robin Forrest, Steve Fortune, Ken Goldberg, Michael Goodrich, Leonidas J. Guibas, Pat Hanrahan, Chris M. Hoffmann, Dan Huttenlocher, Hiroshi Imai, David Kirkpatrick, D.T. Lee, Kurt Mehlhorn, Victor Milenkovic, Joe Mitchell, Mark Overmars, Richard Pollack, Raimund Seidel, Micha Sharir, Jack Snoeyink, Godfried Toussaint, Seth Teller, Herb Voelcker, Emo Welzl y Chee Yap. *Application Challenges to Computational Geometry: CG Impact Task Force Report*. Inf. téc. TR-521-96. Princeton University. 1996.
- [45] Otfried Cheong. *The Ipe extensible drawing editor*. 2016. URL: <http://ipe.otfried.org>.
- [46] Václav Chvátal. “A combinatorial theorem in plane geometry”. *Journal of Combinatorial Theory* B.18 (1975), págs. 39-41.
- [47] Michael F. Cohen y John R. Wallace. *Radiosity and realistic image syntheses*. Academic Press Professional, 1993.
- [48] Felipe Contreras, Jurek Czyzowicz, Nicolas Fraiji y Jorge Urrutia. “Illuminating triangles and quadrilaterals with vertex floodlights.” *10th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG’98)*. 1998.
- [49] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest y Clifford Stein. *Introduction to algorithms*. The MIT Press, 2009.
- [50] Sangeeta Daingade, Arpita Sinha, Aseem Vivek Borkar y Hemendra Arya. “A variant of cyclic pursuit for target tracking applications: theory and implementation”. *Autonomous Robots* 40.4 (2016), págs. 669-686.
- [51] Marc de Berg, Sergio Cabello, Otfried Cheong, David Eppstein y Christian Knauer. “Covering many points with a small-area box”. *ArXiv e-prints* (2016). arXiv: 1612.02149 [cs.CG].

- [52] Mark de Berg, Otfried Cheong, Mark van Kreveld y Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2008.
- [53] Satyan L. Devadoss y Joseph O'Rourke. *Discrete and Computational Geometry*. Princeton University Press, 2011.
- [54] José-Miguel Díaz-Báñez, Mario A. López, Mercè Mora, Carlos Seara e Inmaculada Ventura. "Fitting a two-joint orthogonal chain to a point set". *Computational Geometry* 44.3 (2011), págs. 135-147.
- [55] Matthew Dickerson y Daniel Scharstein. "Optimal placement of convex polygons to maximize point containment". *Computational Geometry: Theory and Applications* 11.1 (1998), págs. 1-16.
- [56] Mousumi Dutt, Arindam Biswas, Partha Bhowmick y Bhargab B. Bhattacharya. "On finding an orthogonal convex skull of a digital object". *International Journal of Imaging Systems and Technology* 21.1 (2011), págs. 14-27.
- [57] Herbert Edelsbrunner. *Algorithms in combinatorial geometry*. Ed. por Wilfried Brauer, Grzegorz Rozenberg y Arto Salomaa. Vol. 10. Monographs on Theoretical Computer Science (An EATCS series). Springer-Verlag, 1987.
- [58] Herbert Edelsbrunner y Leonidas J. Guibas. "Topologically sweeping an arrangement". *Journal of Computer and System Sciences* 38.1 (1989), págs. 165-194.
- [59] Vladimir Estivill-Castro, Joseph O'Rourke, Jorge Urrutia y Dianna Xu. "Illumination of polygons with vertex lights". *Information Processing Letters* 56 (1995), págs. 9-13.
- [60] Vladimir Estivill-Castro y Jorge Urrutia. "Two-floodlight illumination of convex polygons". *Algorithms and Data Structures*. Springer, 1995, págs. 62-73.
- [61] Olivier Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision*. The MIT Press, 1993.
- [62] Werner Fenchel. "Convexity and Its Applications". Ed. por Peter M. Gruber y Jörg M. Wills. Birkhäuser Verlag, 1988. Cap. Convexity through the ages, págs. 120-130.
- [63] Eugene Fink y Derick Wood. "Restricted-Orientation Convexity". *Monographs in Theoretical Computer Science*. Ed. por Wilfried Brauer, Grzegorz Rozenberg y Arto Salomaa. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

- [64] Archibald R. Forrest. “Curves and Surfaces for Computer Aided Design”. Tesis. University of Cambridge, 1968.
- [65] Vojtěch Franěk y Jiří Matoušek. “Computing D -convex hulls in the plane”. *Computational Geometry* 42.1 (2009), págs. 81-89.
- [66] H. Freeman y R. Shapira. “Determining the Minimum-area Encasing Rectangle for an Arbitrary Closed Curve”. *Commun. ACM* 18.7 (1975), págs. 409-413.
- [67] Anka Gajentaan y Mark H. Overmars. “On a class of $O(n^2)$ problems in computational geometry”. *Computational Geometry: Theory and Applications* 5.3 (1995), págs. 165-185.
- [68] Kevin S. Galloway y Biswadip Dey. “Collective motion under beacon-referenced cyclic pursuit”. *Automatica* 91 (2018), págs. 17-26.
- [69] Sumir Kubar Ghosh. *Visibility algorithms in the plane*. Cambridge University Press, 2007.
- [70] Jacob E. Goodman, Joseph O’Rourke y Csaba D. Tóth, eds. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Third. Discrete Mathematics and its Applications. CRC Press, 2018.
- [71] Ronald L. Graham. “An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set”. *Information Processing Letters* 1.4 (1972), págs. 132-133.
- [72] Peter Gritzmann y Victor Klee. “Handbook of Discrete and Computational Geometry”. Ed. por Jacob E. Goodman y Joseph O’Rourke. 2nd. CRC Press, 2004. Cap. Computational convexity, págs. 693-718.
- [73] Peter M. Gruber. “Handbook of Convex Geometry”. Ed. por Peter M. Gruber. Vol. A. Elsevier Science Publishers B.V., 1993. Cap. History of convexity, págs. 1-15.
- [74] Peter M. Gruber y Jörg M. Wills, eds. *Handbook of convex geometry*. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
- [75] Laura Guggenbuhl. “Henri Brocard and the geometry of the triangle”. *The Mathematical Gazette* 37 (1953), págs. 241-243.
- [76] Ralf Hartmut Güting. “Conquering contours: efficient algorithms for computational geometry”. Tesis. Fachbereich Informatik, Universität Dortmund, 1983.
- [77] Hiroshi Ishiguro, Masashi Yamamoto y Saburo Tsuji. “Omni-directional stereo”. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 14.2 (1992), págs. 257-262.

- [78] Sanjiv Kapoor. “Dynamic Maintenance of Maxima of 2-d Point Sets”. *SIAM J. Comput.* 29.6 (2000), págs. 1858-1877.
- [79] David G. Kirkpatrick. “The ultimate planar convex hull algorithm?”. *SIAM Journal on Computing* 15.1 (1986), págs. 287-299.
- [80] David G. Kirkpatrick y Raimund Seidel. “Output-size Sensitive Algorithms for Finding Maximal Vectors”. *First Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG’85)*. ACM, 1985, págs. 89-96.
- [81] Victor Klee. “Is Every Polygonal Region Illuminable from Some Point?”. *The American Mathematical Monthly* 76.2 (1969), pág. 180.
- [82] Victor Klee. “What is a convex set?”. *American Mathematical Monthly* 78 (1971), págs. 616-631.
- [83] Donald E. Knuth. *The art of computer programming*. Addison-Wesley, 1997.
- [84] Tsvi Kopelowitz, Seth Pettie y Ely Porat. “Higher lower bounds from the 3SUM conjecture”. *Twenty-seventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. Society for Industrial y Applied Mathematics. 2016, págs. 1272-1287.
- [85] Dexter C. Kozen. *Theory of computation*. Ed. por David Gries y Fred B. Schneider. Text in Computer Science. Springer-Verlag, 2006.
- [86] Hsiang-Tsung Kung, Fabrizio Luccio y Franco P. Preparata. “On finding the maxima of a set of vectors”. *Journal of the Association for Computer Machinery* 22.4 (1975), págs. 469-476.
- [87] Jean-Claude Latombe. *Robot motion planning*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [88] Maarten Löffler y Marc van Kreveld. “Largest bounding box, smallest diameter, and related problems on imprecise points”. *Computational Geometry* 43.4 (2010), págs. 419-433.
- [89] Anil Maheshwari, Jörg-Rüdiger Sack y Hristo N. Djidjev. “Handbook of Computational Geometry”. Ed. por Jörg-Rüdiger Sack y Jorge Urrutia. Elsevier, 2000. Cap. Link distance problems, págs. 519-558.
- [90] Jiří Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Vol. 212. Graduate text in mathematics. Springer-Verlag, 2002.
- [91] Jiří Matoušek y P. Plecháč. “On functional separately convex hulls”. *Discrete & Computational Geometry* 19.1 (1998), págs. 105-130.

- [92] Constantine Mihalescu. *The Geometry of Remarkable Elements: Points, Lines, and Circles*. Ed. por Titu Andreescu, Dorin Andrica, Paul Blaga y Dan Brânzei. The international series of monographs on Computer Science. XYZ Press, 2016.
- [93] Delfin Y. Montuno y Alain Fournier. *Finding XY Convex Hull of a Set of XY Polygons*. Inf. téc. Computer Systems Research Group, University of Toronto, 1982.
- [94] Tristan Needham. “Visual complex analysis”. Clarendon Press, Oxford, 1998. Cap. 6.II.3: A conformal map of the sphere, págs. 283-286.
- [95] Tina M. Nicholl, Der Tsai Lee, Yuh Zen Liao y Chak Kuen Wong. “On the X-Y convex hull of a set of X-Y polygons”. *BIT Numerical Mathematics* 23.4 (1983), págs. 456-471.
- [96] Joseph O’Rourke. *Art gallery theorems and algorithms*. Ed. por John E. Hopcroft, Gordon D. Plotkin, Jacob T. Schwartz, Dana S. Scott y Jean Vuillemin. The international series of monographs on Computer Science. Oxford University Press, 1987.
- [97] Joseph O’Rourke. “Finding minimal enclosing boxes”. *International Journal of Computer & Information Sciences* 14.3 (1985), págs. 183-199.
- [98] David Orden, Leonidas Palios, Carlos Seara y Paweł Żyliński. “Generalized kernels of polygons under rotation”. *34th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2018)*. 2018.
- [99] Thomas Ottmann, Eljas Soisalon-Soininen y Derick Wood. “On the definition and computation of rectilinear convex hulls”. *Information Sciences* 33.3 (1984), págs. 157-171.
- [100] Mark H. Overmars y Jan van Leeuwen. “Maintenance of configurations in the plane”. *Journal of Computer and System Sciences* 23.2 (1981), págs. 166-204.
- [101] Canek Peláez, Adriana Ramírez-Vigueras, Carlos Seara y Jorge Urrutia. “On the rectilinear convex layers of a planar set”. *Mexican Conference on Discrete Mathematics and Computational Geometry, 60th birthday of Jorge Urrutia*. 2013, págs. 195-202.
- [102] Franco P. Preparata y Michael I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [103] Gregory J. E. Rawlins. “Explogrations in restricted-orientation geometry”. Tesis. School of Computer Science, University of Waterloo, 1987.

- [104] Gregory J. E. Rawlins y Derick Wood. “Ortho-convexity and its generalizations”. *Computational Morphology*. Ed. por Godfried T. Toussaint. Vol. 6. Machine Intelligence and Pattern Recognition. North-Holland, 1988, págs. 137-152.
- [105] Thomas J. Richardson. “Non-mutual captures in cyclic pursuit”. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 31.1 – 4 (2001), págs. 127-146.
- [106] Jörg-Rüdiger Sack y Jorge Urrutia, eds. *Handbook of Computational Geometry*. Elsevier, 2000.
- [107] Sven Schuierer. “On generalized visibility”. Tesis. Institut für Informatik, Universität Freiburg, 1991.
- [108] Ian M. Shamos. “Computational Geometry”. Tesis. Yale University, 1978.
- [109] Farnaz Sheikhi, Ali Mohades, Mark de Berg y Mansoor Davoodi. “Separating bichromatic point sets by L -shapes”. *Computational Geometry* 48.9 (2015), págs. 673-687.
- [110] Wanbin Son, Seung-won Hwang y Hee-Kap Ahn. “MSSQ: Manhattan Spatial Skyline Queries”. *Information Systems* 40 (2014), págs. 67-83.
- [111] Roberto Tamassia, Pankaj K. Agarwal, Nancy Amato, Danny Z. Chen, David Dobkin, Robert L. Scot Drysdale, Steven Fortune, Michael T. Goodrich, John Hershberger, Joseph O’Rourke, Franco P. Preparata, Jörg-Rüdiger Sack, Subhash Suri, Ioannis G. Tollis, Jeffrey S. Vitter y Sue Whitesides. “Strategic Directions in Computational Geometry”. *ACM Computing Surveys* 28.4 (1996), págs. 591-606.
- [112] George W. Tokarsky. “Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point”. *The American Mathematical Monthly* 102.10 (1995), págs. 867-879.
- [113] Ana Paula Tomás. “Guarding the vertices of thin orthogonal polygons is NP-hard”. *XV Spanish Meeting on Computational Geometry (EGC 2013)*. 2013, págs. 19-22.
- [114] Ana Paula Tomás. “Guarding thin orthogonal polygons is hard”. *Fundamentals of Computation Theory – FCT 2013*. Ed. por Leszek Gasieniec y Frank Wolter. Vol. 8070. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, págs. 305-316.
- [115] Eduardo Uchoa, Marcus Poggi de Aragão y Celso C. Ribeiro. “Pre-processing steiner problems from VLSI layout”. *Networks* 40.1 (1999), págs. 38-50.

- [116] Jorge Urrutia. “Handbook of computational geometry”. Ed. por Jörg-Rüdiger Sack y Jorge Urrutia. Elsevier, 2000. Cap. Art Gallery and illumination problems, págs. 973-1027.
- [117] Frederick A. Valentine. “A three-point convexity property”. *Pacific Journal of Mathematics* 7.2 (1957), págs. 1227-1235.
- [118] Peter Widmayer, Ying-Fung Wu y Chak-Kuen Wong. “On some distance problems in fixed orientations”. *SIAM Journal on Computing* 16.4 (1987), págs. 728-746.
- [119] Chee K. Yap y Ee-Chien Chang. “Algorithms for Robot Motion Planning and Manipulation”. Ed. por J. P. Laumond y Mark Overmars. A.K. Peters, Wellesley, MA, 1997. Cap. Issues in the metrology of geometric tolerancing, págs. 393-400.