



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DOS PROBLEMAS DE PARTICIONES  
MATRICIALES EN GRÁFICAS CORDALES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

JUAN CARLOS GARCÍA ALTAMIRANO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ  
CINVESTAV - IPN

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS  
IMATE - UNAM

DRA. EUGENIA O'REILLY REGUEIRO  
IMATE - UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO DE 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“Libres son quienes crean, no quienes copian,  
y libres son quienes piensan, no quienes obedecen.”*

- Eduardo Galeano

# Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
2. $M_1$ -partición	11
3. Dos familias infinitas de patrones	23
4. $M_\infty$ -partición	29
Conclusiones	45

# Introducción

Un patrón es una matriz  $M$  cuadrada simétrica de tamaño  $m$  sobre  $0, 1, *$ . Una  $M$ -partición de una gráfica  $G$  es una partición  $V_1, V_2, \dots, V_m$  de  $V(G)$  tal que dos vértices distintos en partes (posiblemente iguales)  $V_i$  y  $V_j$  son adyacentes si  $M(i, j) = 1$  y no adyacentes si  $M(i, j) = 0$ ; la entrada  $M(i, j) = *$  significa que no hay restricción. Ya que admitimos que  $i = j$ , un conjunto  $V_i$  es independiente si  $M(i, i) = 0$ , y un clan si  $M(i, i) = 1$ . Permitiremos que  $V_i = \emptyset$ , por ello no consideraremos las matrices donde  $M(i, i) = *$ . Decimos que una gráfica  $F$  es una *obstrucción mínima* de  $M$ , si  $F$  no admite una  $M$ -partición pero cada subgráfica inducida de  $F$  sí admite una  $M$ -partición.

Los problemas de particiones matriciales generalizan los problemas de coloración y homomorfismos, y aparecen a menudo en el estudio de gráficas perfectas. Los dos problemas principales que se pretende resolver cuando se trabaja con matrices de partición son: *el problema de caracterización* y *el problema de complejidad* [3]. Es difícil decidir, incluso para matrices pequeñas  $M$ , si el problema de  $M$ -partición es soluble en tiempo polinomial o es NP-completo (o posiblemente ninguno), y si las gráficas que admiten una  $M$ -partición pueden ser caracterizadas por un conjunto finito de obstrucciones mínimas [2]. Muchos problemas de  $M$ -partición que son NP-completos para gráficas en general, pueden llegar a ser resueltos en tiempo polinomial si son restringidos a gráficas cordales. Por ejemplo: el problema de 3-coloración es NP-completo para gráficas en general pero, en gráficas cordales, una  $k$ -coloración tiene como única obstrucción a  $K_{k+1}$ . Se ha probado que, para gráficas escindibles, cada problema de partición matricial tiene una cantidad finita de obstrucciones mínimas [4]. Sin embargo, incluso para gráficas cordales, no se conocen cuales matrices tienen un problema de  $M$ -partición soluble en tiempo polinomial, ni cuales matrices tienen una cantidad finita de obstrucciones mínimas [5]. De hecho, hay matrices de partición que tienen una infinidad

de obstrucciones mínimas de gráficas cordales. Además, existe problemas de  $M$ -particiones que permanecen NP-completos aún cuando nos restringimos a gráficas cordales [6].

En el contexto de gráficas cordales, Tomas Feder, Pavol Hell y Shekoofeh Nekooei Rizi, obtuvieron el siguiente resultado:

**Teorema** [2] *Si  $M$  es una matriz de tamaño  $m < 4$ , entonces  $M$  tiene una cantidad finita de obstrucciones mínimas, excepto para las siguientes dos matrices, las cuales tienen una cantidad infinita de obstrucciones mínimas.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En esta tesis tan compacta, nos dimos a la tarea de exponer explícitamente todas las obstrucciones mínimas (a pesar de ser infinitas) de  $M_1$  y  $M_\infty$ . Más aún, en el proceso, desarrollamos herramientas que permiten esbozar un algoritmo que mejora los resultados desarrollados con anterioridad.

El primer capítulo de este trabajo, los preliminares, es un compendio de definiciones y conceptos básicos necesarios para desenvolverse con facilidad en los siguientes capítulos. Alguien que domine las nociones básicas de teoría de gráficas, particiones matriciales y gráficas cordales, podría omitir dicho capítulo, ya que ahí no incluimos ningún resultado propio y bastaría con las definiciones brindadas al principio de esta introducción; sin embargo, es recomendable revisarlo para refrescar conceptos, estar al tanto de las convenciones propias de esta tesis y no tener que interrumpir su lectura continua al recurrir a dichos fundamentos.

En el segundo capítulo, analizamos la matriz  $M_1$ , vemos que las gráficas que son un conjunto independiente de vértices y las que son bipartitas (no necesariamente conexas) admiten una  $M_1$ -partición. En el caso general, para que una gráfica cordal  $G$  admita una  $M_1$ -partición, notamos que debe existir un vértice  $v_0$  tal que  $G - v_0$  sea una gráfica bipartita, de tal manera que una de sus partes sea totalmente adyacente a  $v_0$ . Caracterizaremos a la partición  $M_1$  a través de una familia (infinita) de obstrucciones mínimas. En el capítulo posterior, presentaremos dos familias infinitas de matrices, en las que a su vez, cada matriz de esas familias tiene una infinidad de obstrucciones mínimas. La segunda de esas familias muestra la relación que existe entre las matrices  $M_1$  y  $M_\infty$ . Y justo, en el último capítulo es donde abordamos el tema de  $M_\infty$ , de manera diferente pero con la misma intención que con  $M_1$ , esto es, encontramos la familia infinita de todas las obstrucciones mínimas de  $M_\infty$  que la caracterizan, sólo que en esta ocasión, el caso general, para que una

gráfica  $G$  admita una  $M_\infty$ -partición debe existir un clan  $A$  tal que  $G - A$  sea una gráfica bipartita de tal manera que una de esas partes sea totalmente adyacente al clan  $A$ .

Hicimos un gran esfuerzo para no exponer un cúmulo de casos y subcasos tediosos (como en nuestra demostración original), y brindar una versión más general de las estructuras subyacentes. Quizás, un lector curioso se cuestione: «¿de dónde habrán salido esas familias infinitas de obstrucciones mínimas?», ya que, como notará, no son tan intuitivas.

Sin más, esperamos sea de su agrado y completo entendimiento nuestro trabajo; resultado de una intensa investigación y un esfuerzo apasionante; con novedosos resultados que, de alguna manera, culminan la clasificación de todas las obstrucciones mínimas de los 56 patrones de tamaño 3 (10 con tres ceros en la diagonal, 10 con tres unos en la diagonal, 18 con dos ceros y un uno en la diagonal y 18 con dos unos y un cero en la diagonal), siendo éstos, los dos casos más interesantes.

# Capítulo 1

## Preliminares

Los siguientes conceptos de gráficas fueron obtenidos casi en su totalidad de [1] con algunas pequeñas adaptaciones convenientes a nuestros fines.

Una *gráfica simple*  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto de *vértices* y  $E(G)$  un conjunto de *aristas* que consiste de parejas no ordenadas de elementos de  $V(G)$ ; pedimos que los vértices de una arista sean diferentes y que  $E(G)$  no tenga aristas repetidas. Los vértices de una arista son llamados *extremos* de la arista. La cantidad de vértices y la cantidad de aristas en  $G$  son llamados *orden* y *tamaño* de  $G$ , respectivamente. Los extremos de una arista se dice que son *incidentes* con la arista y viceversa. Dos vértices incidentes con la misma arista decimos que son *adyacentes* y dos vértices que son adyacentes son *vecinos*. El conjunto de vecinos de un vértice  $v$ , en una gráfica  $G$ , es llamado *vecindad* de  $v$  (en  $G$ ) y se denota por  $N_G(v)$ . El *grado* de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$ , denotado por  $d_G(v)$ , es el número de aristas de  $G$  incidentes con  $v$ , es decir,  $d_G(v)$  es el número de vecinos de  $v$  en  $G$ . Un vértice de grado cero es llamado *vértice aislado*. Una gráfica  $H(V(H), E(H))$  es llamada *subgráfica* de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$ . Decimos que  $G$  *contiene* a  $H$  o  $H$  está *contenida* en  $G$  y lo denotamos  $H \subseteq G$ .

A lo largo de este trabajo,  $G$  denota una gráfica. Además, cuando no exista ambigüedad, omitiremos la letra  $G$  de la notación del conjunto de vértices y aristas; escribiremos solamente  $V$  y  $E$  en vez de  $V(G)$  y  $E(G)$ . En tal caso, denotaremos al número de vértices y al número de aristas de  $G$  por  $n$  y  $m$ , respectivamente. Una gráfica simple es *finita*, si su conjunto de vértices es finito. Consideraremos únicamente gráficas simples finitas, así que para nosotros el término “gráfica” siempre significará gráfica simple finita. A

una arista con extremos  $u$  y  $v$  la denotamos por  $uv$ . Una *gráfica completa* es una gráfica en la que cualesquiera dos vértices son adyacentes. A la gráfica completa con  $n$  vértices la denotamos por  $K_n$ . Un *conjunto independiente* en una gráfica, es un conjunto de vértices de los cuales no hay dos adyacentes. Un *clan* de una gráfica, es un conjunto de vértices mutuamente adyacentes dos a dos. Una gráfica es *bipartita* si su conjunto de vértices puede partirse en dos subconjuntos  $X$  y  $Y$  tal que cada arista tiene un extremo en  $X$  y un extremo en  $Y$ ; tal partición  $(X, Y)$  es llamada *bipartición* de la gráfica y  $X$  y  $Y$  son sus *partes*. Denotamos a la gráfica  $G$  con bipartición  $(X, Y)$  por  $G[X, Y]$ . Si en  $G[X, Y]$  cualquier vértice de  $X$  es adyacente a cualquier vértice de  $Y$ , entonces  $G$  es llamada *gráfica bipartita completa*. Una *estrella* es una gráfica bipartita completa  $G[X, Y]$  con  $|X| = 1$  o  $|Y| = 1$ . Un *apareamiento* en una gráfica, es conjunto de aristas que no comparten vértices. Un *apareamiento perfecto* es uno que cubre a todos los vértices de la gráfica. Una gráfica es *escindible* si su conjunto de vértices puede partirse en un conjunto independiente y en un clan. Una gráfica es  $(k, l)$ -gráfica si su conjunto de vértices puede partirse en  $k$  conjuntos independientes y en  $l$  clanes [7]; entonces, una gráfica escindible es una  $(1, 1)$ -gráfica. Una *trayectoria* es una gráfica cuyos vértices pueden ser arreglados en una sucesión lineal (sin repetir vértices) de tal manera que cada dos vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes. Igualmente, un *ciclo* de tres o más vértices es una gráfica cuyos vértices pueden ser arreglados en una sucesión cíclica (sin repetir vértices) de tal forma que cada dos vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes. La *longitud* de una trayectoria o un ciclo es el número de sus aristas. Un ciclo de longitud  $k$  es llamado un  $k$ -ciclo; el ciclo es par o impar de acuerdo a la paridad de  $k$ . Un 3-ciclo es comúnmente llamado *triángulo*. A un ciclo  $C$  formado por  $n$  vértices,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , lo denotamos por  $(v_1 v_2 \dots v_n)$ , donde  $v_i$  es adyacente de  $v_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq n - 1$  y  $v_n$  es adyacente a  $v_1$ . Una *cuerda* de un ciclo  $C$  en una gráfica  $G$ , es una arista en  $E(G) \setminus E(C)$  cuyos extremos son vértices no consecutivos de  $C$ . Una gráfica  $G$  es *cordal* si cualquier ciclo de tamaño mayor que tres tiene un cuerda.

A una trayectoria  $P$  formada por  $n$  vértices,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , la denotamos por  $v_1 v_2 \dots v_n$ , donde  $v_i$  es adyacente de  $v_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Nótese que una trayectoria de  $n$  vértices tiene longitud  $n - 1$ . Para cualquier entero positivo  $n$ , hay una única trayectoria con  $n$  vértices y un único ciclo con  $n$  vértices, a esas gráficas la denotamos por  $P_n$  y  $C_n$  respectivamente. Si  $v_1 = x$  y  $v_n = y$ , decimos que  $P$  *conecta* a  $x$  con  $y$  y nos referimos a  $P$  como una  $xy$ -trayectoria. Los vértices  $x$  y  $y$  son llamados *extremos de la trayectoria*,

$x$  es su *vértice inicial* y  $y$  su *vértice final*. En este texto denotamos a una  $xy$ -trayectoria por  $P_{xy}$ . La longitud de la trayectoria más corta entre  $x$  y  $y$  es llamada *distancia* entre  $x$  y  $y$ , es denotada por  $d_G(x, y)$ . Si no hay trayectoria que conecte a  $x$  y  $y$ , decimos que  $d_G(x, y) = \infty$ . La conectividad de pares de vértices en una gráfica  $G$  es una relación de equivalencia en  $V$ . Cada clase de equivalencia determinada por la relación de conectividad es llamada *componente conexa* o simplemente *componente* de  $G$ . Una gráfica es *conexa* si para cualquier partición de sus vértices en dos conjuntos no vacíos  $X$  y  $Y$ , existe una arista con un extremo en  $X$  y un extremo en  $Y$ ; de otra manera la gráfica es *inconexa*. Cualquier gráfica  $G$  puede ser expresada de manera única (salvo el orden) como una unión ajena de gráficas conexas, donde, las susodichas gráficas son las componentes conexas de  $G$ . Para nosotros, la *excentricidad* de un vértice  $v$  es la distancia más larga que se puede obtener entre  $v$  y los demás vértices de la componente conexa a la que pertenece; la excentricidad de  $v$  se puede pensar como la distancia entre  $v$  y el vértice, conectado con  $v$ , que está más distante a  $v$  en la gráfica.

Una gráfica *acíclica* es una que no contiene ciclos. Una gráfica conexa acíclica es llamada *árbol*. Una gráfica acíclica usualmente es llamada *bosque*. Un vértice de grado 1 en un árbol es llamado *hoja* del árbol.

Dos gráficas son *ajenas* si no tienen vértices en común. Si  $H_1, H_2 \subseteq G$  son subgráficas ajenas de  $G$ , en capítulos posteriores, diremos que  $H_1$  está *fuera* de  $H_2$  o viceversa. Dos gráficas  $G$  y  $H$  son *iguales*, escrito  $G = H$ , si  $V(G) = V(H)$  y  $E(G) = E(H)$ . Dos gráficas  $G$  y  $H$  son *isomorfas*, escrito,  $G \cong H$ , si existe una biyección  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ , tal que, para  $u, v \in V(G)$   $uv \in E(G)$  si y sólo si  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$ , tal función es llamada *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$ . Una *copia* de una gráfica  $F$  en  $G$ , es una subgráfica de  $G$  isomorfa a  $F$ . En estas circunstancias, abusamos un poco del lenguaje y decimos que  $F$  está *contenida* en  $G$  o que  $G$  *contiene* a  $F$ . En particular, para  $m > 0$ , denotamos por  $mK_n$  a  $m$  copias de la gráfica completa  $K_n$  ajenas entre sí.

Si  $v$  es un vértice de  $G$ , podemos obtener una gráfica con  $|V| - 1$  vértices eliminando a  $v$  de  $G$  y a todas las aristas que inciden en  $v$ , el resultado lo denotamos por  $G - v$ . Una gráfica obtenida a partir de la eliminación de vértices es llamada *subgráfica inducida*. Si  $X$  es el conjunto de vértices eliminados, a la subgráfica resultante es denotada por  $G - X$ . En este contexto, si  $Y = V \setminus X$  denotamos por  $G[Y]$  a la subgráfica resultante y nos referimos a ella como la subgráfica *inducida por*  $Y$ . Por ejemplo, la subgráfica inducida por un clan es una subgráfica completa. En vez de  $G[\{v_1, v_2, \dots, v_n\}]$  escribiremos

$G[v_1, v_2, \dots, v_n]$ .

Si  $\mathcal{F}$  es una familia de gráficas, decimos que  $G$  es *libre* de  $\mathcal{F}$  si no contiene copia alguna de  $F \in \mathcal{F}$  como subgráfica inducida.

Una  $k$ -*coloración* (por vértices) de una gráfica es una asignación de  $k$ -colores a sus vértices. La coloración es *propia* si no hay dos vértices adyacentes que se les asigne el mismo color. Una gráfica es  $k$ -*coloreable* si ésta tiene una  $k$ -coloración propia. En el caso de una 2-coloración propia, usualmente se le llama *bicoloración*. Cuando no especificamos la cantidad de colores, simplemente le llamamos *coloración*.

Un homomorfismo de una gráfica  $G$  en una gráfica  $H$  es una función  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , tal que  $f(u)f(v) \in E(H)$  para toda  $uv \in E(G)$ . Cuando  $H$  es la gráfica completa  $K_k$ , un homomorfismo de  $G$  en  $H$ , es simplemente una  $k$ -coloración propia de  $G$  (considerando que cada vértice de  $H$  representa un color diferente y debido a que a vértices adyacentes en  $G$ ,  $f$  les asigna vértices distintos en  $H$ ). Así, el concepto de homomorfismo es una generalización del concepto de coloración propia (de vértices).

Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  con conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Una *matriz de adyacencia* de  $G$ , es una matriz  $A$  de  $n \times n$ , donde  $A(i, j)$  es 1 si  $v_i$  y  $v_j$  son vecinos, y 0 si no lo son.

Sea  $M$  una matriz cuadrada simétrica de tamaño  $m$  sobre 0, 1, \*. Una  $M$ -*partición* de una gráfica  $G$  es una partición  $V_1, V_2, \dots, V_m$  de  $V(G)$  tal que dos vértices distintos en partes (posiblemente iguales)  $V_i$  y  $V_j$  son adyacentes si  $M(i, j) = 1$  y no adyacentes si  $M(i, j) = 0$ ; la entrada  $M(i, j) = *$  significa que no hay restricción. Ya que admitimos que  $i = j$ , un conjunto  $V_i$  es independiente si  $M(i, i) = 0$ , y un clan si  $M(i, i) = 1$ . Permitiremos que  $V_i = \emptyset$ , por ello no consideraremos las matrices donde  $M(i, i) = *$  (de lo contrario cualquier gráfica admitiría esa  $M$ -partición haciendo  $V(G) = V_i$  y las demás partes vacías) [3]. Sea  $H$  una gráfica, si de una matriz de adyacencia de  $H$  obtenemos la matriz  $M$ , que resulta de cambiar los 1's de la matriz de adyacencia por \*'s: entonces, una  $M$ -partición de una gráfica  $G$  es precisamente un homomorfismo de  $G$  en  $H$ , (debido a que cada vértice de  $H$  representa una parte en la  $M$ -partición y para cualquier gráfica  $G$  donde exista un homomorfismo de  $G$  en  $H$  admitirá la correspondiente  $M$ -partición, es decir, si dos vértices en  $G$  son adyacentes, el \* permite que las imágenes bajo el homomorfismo, se encuentren en las correspondientes partes en la  $M$ -partición). En particular, si  $M$  es una matriz de tamaño  $k$  con 0's en la diagonal y \*'s fuera de ella, entonces una  $M$ -partición es precisamente una  $k$ -coloración de  $G$ . Por ejemplo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A_1$  representa una 3-coloración,  $A_2$  representa una bipartición,  $A_3$  representa un problema de gráficas escindibles y  $A_4$  representa una bipartición completa.

Sea  $M$  un patrón, si una gráfica  $G$  no admite un  $M$ -partición, decimos que  $G$  es una *obstrucción* de  $M$  o una  *$M$ -obstrucción*. Decimos que una gráfica  $F$  es una *obstrucción mínima* de  $M$ , si  $F$  es una obstrucción de  $M$  pero cada subgráfica inducida de  $F$  sí admite una  $M$ -partición. Por ejemplo, es bien sabido que para la partición  $A_2$  (bipartición), previamente mencionada, los ciclos impares son todas sus obstrucciones mínimas. Cualquier ciclo (impar o no) en una gráfica cordal contiene como subgráfica inducida a un triángulo, entonces, en el caso de gráficas cordales, cualquier gráfica con algún ciclo como subgráfica, es una obstrucción de  $A_2$  y,  $A_2$  tiene como única obstrucción mínima al triángulo.

Si  $M$  tiene una cantidad finita de obstrucciones mínimas, entonces hay una caracterización de las gráficas que admiten una  $M$ -partición dada por un conjunto finito de subgráficas inducidas prohibidas, y por lo tanto, un algoritmo en tiempo polinomial para el problema de la  $M$ -partición.

Notemos que el problema de las  $(k, l)$ -gráficas es un caso particular de  $M$ -partición. El siguiente teorema nos será de utilidad en el capítulo 4.

**Teorema 1.** [7] *Una gráfica cordal es una  $(k, l)$ -gráfica si y sólo si no contiene como subgráfica inducida a  $(l + 1)K_{k+1}$*

Tomas Feder, Pavol Hell y Shekoofeh Nekooei Rizi, demostraron que si  $M$  es una matriz de tamaño  $m < 5$ , entonces el problema de  $M$ -partición es de tipo polinomial [2]. Recordamos el teorema mencionado en la introducción, para gráficas cordales:

**Teorema** *Si  $M$  es una matriz de tamaño  $m < 4$ , entonces  $M$  tiene una cantidad finita de obstrucciones mínimas, excepto para las matrices  $M_1$  y  $M_\infty$ , las cuales tienen un cantidad infinita de obstrucciones mínimas.*

Entonces, para casi todas las particiones  $M$  de tamaño  $m < 4$ , hay una caracterización de la  $M$ -partición dada por un conjunto finito de subgráficas inducidas prohibidas. Veamos que sucede con  $M_1$  y  $M_\infty$ .



# Capítulo 2

## $M_1$ -partición

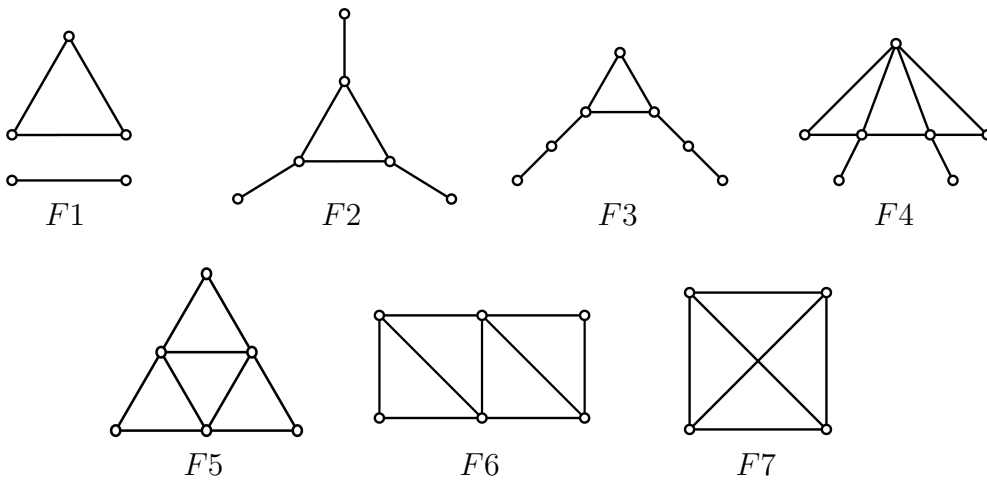
Esta sección está dedicada a obtener las obstrucciones mínimas, para gráficas cordales, de la partición representada por la matriz

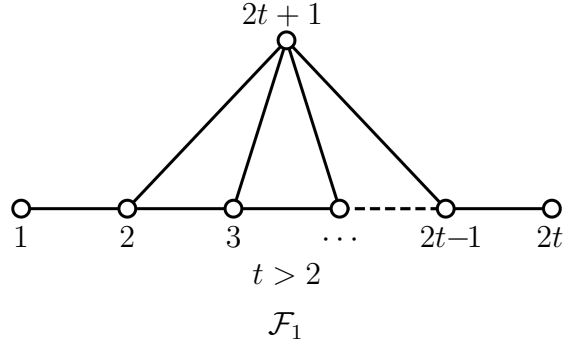
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si bien es sabido que dichas obstrucciones son infinitas [2], nosotros daremos la clasificación completa. A saber:

**Teorema 2.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces,  $G$  admite una  $M_1$ -partición si y sólo si  $G$  es libre de  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  y de cualquier gráfica de la familia infinita  $\mathcal{F}_1$ .*

Donde:



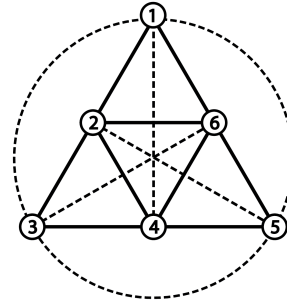


Previo a la demostración del teorema, será necesario obtener los siguientes resultados.

**Lema 1.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Si  $G$  tiene a  $F_5$  como subgráfica, entonces  $G$  tiene a  $F_5$  o  $F_7$  como subgráfica inducida.*

**Demostración.** Consideremos la subgráfica  $F_5$  con la nomenclatura de los vértices como se muestra en la Fig. 1, sin tomar en cuenta las aristas punteadas:

Si no existen más aristas, la misma subgráfica es una  $F_5$  subgráfica inducida. Si existe la arista  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$  o  $\{3, 6\}$ , tendríamos a  $F_7$  como subgráfica inducida. Ahora, si tenemos a  $\{1, 3\}$ , se forma el ciclo  $(1346)$  y por ser  $G$  cordal debe existir  $\{1, 4\}$  o  $\{3, 6\}$  lo que nos remite al caso anterior. Pasa algo semejante si existe la arista  $\{2, 5\}$  o  $\{3, 6\}$ .



**Fig.1.**

□

**Lema 2.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Si  $G$  tiene a  $F_6$  como subgráfica, entonces  $G$  tiene a  $F_6$  o  $F_7$  como subgráfica inducida.*

**Demostración.** Consideremos la subgráfica  $F_6$  con la numeración de los vértices como se muestra en la Fig. 2, sin tomar en cuenta las aristas punteadas:

Si no existen más aristas, la misma subgráfica es una  $F_6$  subgráfica inducida. Si existe la arista  $\{1, 6\}$ ,  $\{2, 4\}$  o  $\{3, 5\}$ , tendríamos a  $F_7$  como subgráfica (inducida). Si tenemos a  $\{1, 3\}$ , se forma el ciclo  $(1563)$  y por ser  $G$  cordal debe existir  $\{1, 6\}$  o  $\{3, 5\}$  lo que nos remite al caso anterior. Pasa algo similar si existe la arista  $\{4, 6\}$ . Y si existe  $\{3, 4\}$  entonces existe  $\{1, 3\}$  o  $\{2, 4\}$ .

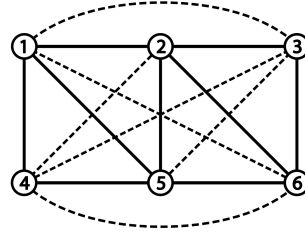


Fig.2.

□

Llamaremos  $F_0$  a la gráfica formada por  $2K_3$ .

**Lema 3.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Si  $G$  tiene a  $F_0$  como subgráfica, entonces  $G$  tiene a  $F_1$ ,  $F_6$  o  $F_7$  como subgráfica inducida.*

**Demostración.** Llamemos  $A$  y  $B$  a los triángulos que forman a  $F_0$ :

Si hay tres aristas o más entre el triángulo  $A$  y el triángulo  $B$  y las tres inciden en un vértice  $v_0$  (sin pérdida de generalidad  $v_0 \in V(A)$ ), se obtiene a  $F_7$  como subgráfica inducida de  $G$ , inducida por los vértices  $v_0$  y  $V(B)$  (ver Fig. 3).

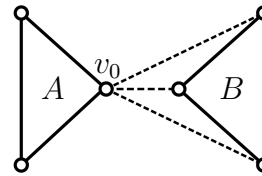


Fig.3.

Si no es el caso, hay dos aristas (de las tres o más) que forman un apareamiento, por lo tanto hay un ciclo de tamaño cuatro y por ser  $G$  cordal hay una tercera arista con la que se forma  $F_6$  como subgráfica (ver Fig. 4) y por el Lema 2 se tiene el resultado.

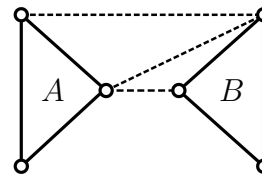


Fig.4.

Por último, si hay dos aristas o menos, no puede haber un apareamiento con esas probables aristas, entonces existe un vértice  $v_0$  que al quitarlo obtenemos a  $F_1$  como subgráfica inducida. □

El siguiente resultado nos fue mencionado por Sebastián González Hermosillo de la Maza; aparentemente no aparece demostrado en la literatura.

**Lema 4.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces, existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es una gráfica bipartita si y sólo si  $G$  no tiene como subgráficas a  $F_5$ ,  $F_7$  ni  $F_0$ .*

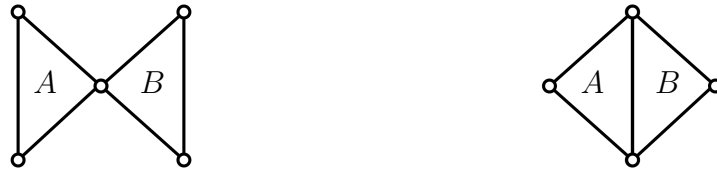
**Demostración.** La condición suficiente puede ser escrita como:

Si  $G$  es cordal y tiene como subgráficas a  $F_5$ ,  $F_7$  o  $F_0$ , entonces, no existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  sea una gráfica bipartita.

La demostración es inmediata, al identificar a cada uno de los vértices en la respectiva gráfica y notar que siempre hay un triángulo que no lo contiene.

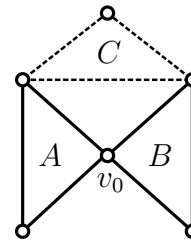
Para la necesidad, procederemos por contradicción. Supongamos que para cualquier vértice  $v_0 \in V$ ,  $G - v_0$  no es bipartita; de inmediato tenemos que  $G$  no puede ser bipartita y por ser cordal existen al menos dos triángulos como subgráficas de  $G$ . Debido a que  $G$  no tiene a  $F_0$  como subgráfica, tenemos que todas las subgráficas de  $G$  que son triángulos, comparten uno o dos vértices.

En principio tenemos dos casos: hay dos triángulos  $A$  y  $B$ , subgráficas de  $G$ , que comparten un vértice o que comparten dos vértices.



**Caso 1:**  $A$  y  $B$  comparten un vértice  $v_0$ , entonces al quitar a  $v_0$ ,  $G$  no debe ser bipartita, es decir, existe otro triángulo  $C$ , subgráfica de  $G$ , al que  $v_0$  no pertenece y comparte vértice(s) con  $A$  y con  $B$ .

En el caso de que  $C$  solamente comparta un vértice con  $A$  y un vértice con  $B$  (ver Fig. 5), sucedería que su otro vértice estaría fuera de  $A$  y de  $B$ , por lo que tendríamos a  $F_5$  como subgráfica de  $G$ , lo cual no puede pasar. Entonces este caso se desecha.



**Fig.5.**

Ahora bien, en el caso de que  $C$  comparta dos vértices con  $A$  y un vértice con  $B$  (ver Fig. 6), tendríamos a  $F_7$  como subgráfica de  $G$ , lo cual no puede pasar. Entonces este caso tampoco es posible.

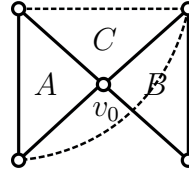


Fig. 6.

**Caso 2:**  $A$  y  $B$  comparten dos vértices  $v_1$  y  $v_2$ . Al quitar  $v_1$ ,  $G$  no debe ser bipartita, es decir, existe otro triángulo  $C$ , en  $G$ , al que  $v_1$  no pertenece, comparte dos vértices con  $A$  y dos vértices con  $B$  (de lo contrario estaríamos en el Caso 1). La única forma de que eso pase es que haya una arista extra entre  $A$  y  $B$  (ver Fig. 7), formando a  $F_7$  y contradiciendo nuestra hipótesis.

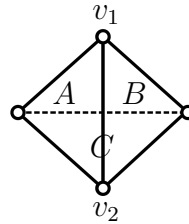
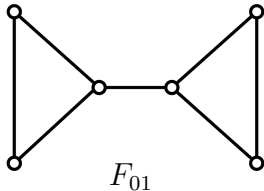
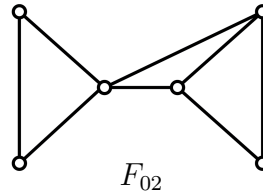


Fig. 7.

Por lo tanto, si  $G$  no tiene como subgráficas a  $F_5$ ,  $F_7$  y  $F_0$ , entonces existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es una gráfica bipartita. □

Hagamos un pequeño paréntesis para dar un resultado interesante, análogo al Lema 4 en el contexto de subgráficas inducidas, que nos será de utilidad más adelante. Para ello consideremos las siguientes dos gráficas (cordales).

 $F_{01}$  $F_{02}$ 

**Corolario 1.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces, existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es una gráfica bipartita si y sólo si  $G$  es libre de  $F_5$ ,  $F_6$ ,  $F_7$ ,  $F_0$ ,  $F_{01}$  y  $F_{02}$ .*

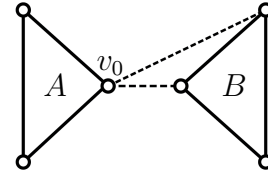
**Demostración.** La condición necesaria es inmediata. Es más sencillo notarlo si se considera la contrapositiva de la premisa y vemos que ninguna de las gráficas  $F_5, F_6, F_7, F_0, F_{01}$  y  $F_{02}$ , tiene un vértice que al quitarlo quede una gráfica bipartita.

Por otra parte, del Lema 1, tenemos que si  $G$  no tiene a  $F_5$  y  $F_7$  como subgráficas inducidas, entonces  $G$  no tiene a  $F_5$  como subgráfica.

Obviamente, si  $G$  no tiene a  $F_7$  como subgráfica inducida tampoco la tiene como subgráfica (por ser  $F_7$  una gráfica completa).

En los primeros dos casos de la demostración del Lema 3, llegamos a la conclusión: si  $G$  tiene como subgráfica a  $F_0$  y hay al menos tres aristas entre  $A$  y  $B$ , entonces tenemos como subgráfica inducida a  $F_6$  o  $F_7$ .

Y en el último caso, cuando hay dos aristas o menos, todas las posibles subgráficas que se puedan formar con esas aristas, serán inducidas (porque ya no hay más aristas), es decir,  $F_0, F_{01}$  y  $F_{02}$  (ver Fig.8), salvo isomorfismos.



**Fig.8.**

Por lo tanto, si  $G$  no tiene como subgráficas inducidas a  $F_5, F_6, F_7, F_0, F_{01}$  y  $F_{02}$ , entonces,  $G$  no tiene a  $F_5, F_7$  y  $F_0$  como subgráficas. Y por el Lema 4 existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es una gráfica bipartita.  $\square$

**Observación 1.** En el contexto del Lema 4, sea

$$\mathcal{B}_{-v} = \{v \in V : G - v \text{ es bipartita}\},$$

sucede que si  $v_0 \in \mathcal{B}_{-v}$ , entonces  $v_0$  pertenece a todas las subgráficas de  $G$  que forman un triángulo. Por ello,  $\mathcal{B}_{-v}$  tiene a lo más tres elementos.

**Observación 2.** Dada la relación que hay entre las partes de la  $M_1$ -partición, podemos inferir rápidamente la siguiente equivalencia:

Si  $v_0$  es un vértice aislado de  $G$ . Entonces,  $G$  admite una  $M_1$ -partición si y sólo si  $G - v_0$  admite una  $M_1$ -partición.

Lo anterior debido a que podemos adscribir al vértice aislado en el conjunto independiente que no es completamente adyacente a algún otro.

En este sentido, si  $G$  es una gráfica cordal no bipartita, al querer ver si admite una  $M_1$ -partición, sabiendo que no tiene a  $F_1$  como subgráfica inducida, podemos suponer que  $G$  es conexa.

Es claro que si  $F_1$  no es subgráfica inducida de  $G$ , entonces tampoco lo son  $F_0, F_{01}$  y  $F_{02}$ . De esta manera, utilizando nuestro Corolario 1, tenemos que:

**Lema 5.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces  $G$  es libre de  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  y de cualquier gráfica de la familia  $\mathcal{F}_1$  si y sólo si existe un vértice  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es bipartita y no contiene como subgráfica inducida a  $F_1, F_2, F_3, F_4$  ni a gráfica alguna de la familia infinita  $\mathcal{F}_1$ .*

Es así que, demostrar el Teorema 2 es equivalente a demostrar el siguiente.

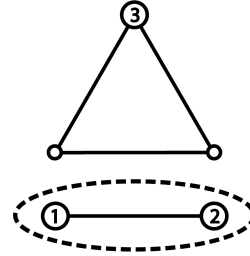
**Teorema 3.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces  $G$  admite una  $M_1$ -partición si y sólo si existe un vértice  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es bipartita y  $G$  es libre de  $F_1, F_2, F_3, F_4$  y de cualquier gráfica de la familia infinita  $\mathcal{F}_1$ .*

**Demostración.** Sea  $G$  una gráfica cordal que admite una  $M_1$ -partición. Si  $G$  es bipartita entonces, es claro que al quitar cualquier vértice de  $G$ ,  $G$  sigue siendo bipartita. Si  $G$  no es bipartita, sean  $V_1, V_2$  y  $V_3$  los tres conjuntos independientes de vértices en  $G$  correspondientes a la partición  $M_1$ , de tal manera que  $V_2$  y  $V_3$  son completamente adyacentes. Como  $G$  no es bipartita,  $V_1, V_2$  y  $V_3$  son conjuntos no vacíos. Si  $V_2$  y  $V_3$  tuvieran más de dos elementos cada uno, por ser completamente adyacentes, existiría un ciclo de tamaño cuatro y por ser  $G$  cordal debería haber una cuerda en  $V_2$  o en  $V_3$  lo que contradice que son conjuntos de vértices independientes. Por lo tanto  $V_2$  o  $V_3$  se compone de un único elemento, sin pérdida de generalidad digamos que  $V_3 = \{v_3\}$ . Entonces,  $G - v_3$  es una gráfica bipartita.

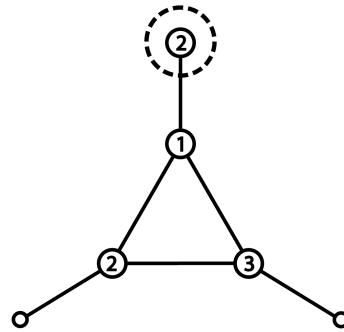
Para continuar con la condición necesaria, como queremos que  $G$  sea libre de  $F_1, F_2, F_3, F_4$  y de cualquier gráfica de la familia infinita  $\mathcal{F}_1$ ; basta con verificar que ninguna gráfica en cuestión admite una  $M_1$ -partición:

Con las mismas nociones de  $V_1, V_2$  y  $V_3$ , podemos asignar colores a los vértices de  $G$  de tal manera que si  $v \in V_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , a  $v$  le asignamos el color  $i$ , es decir, coloreamos a  $v$  del color  $i$ . Luego, el color 3 está representado por un único vértice y por la Observación 1 está en todos los triángulos.

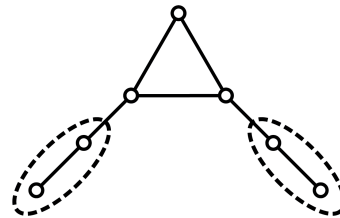
**Caso  $F_1$ :** El color 3 debe estar en el triángulo y la arista que está desconectada debe tener representados a los colores 1 y 2, pero el 2 no sería adyacente al color 3. Por lo que  $F_1$  no admite una  $M_1$ -partición.



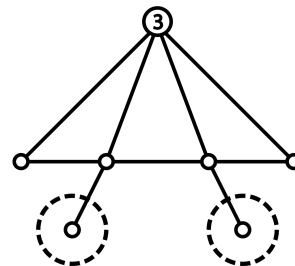
**Caso  $F_2$ :** Dado que en cada triángulo están representados los tres colores 1, 2 y 3, en  $F_2$  el vértice del triángulo que deberá estar coloreado del color 1 tiene un vecino extra fuera, el cual tendría que estar coloreado de 2, sin embargo éste no es adyacente al vértice de color 3.



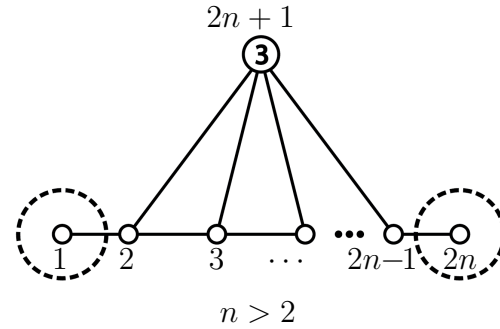
**Caso  $F_3$ :** El color 3 está dentro del triángulo y cada arista que está fuera tiene representados a ambos colores 1 y 2. Sin embargo, no hay manera, en  $F_3$ , de que los dos vértices coloreados del color 2, que están en dichas aristas, sean adyacentes al de color 3.



**Caso  $F_4$ :** En este caso hay un único vértice que al quitarlo  $F_4$  es bipartita, entonces está obligado a tener color 3, por lo que los dos vértices de grado uno deben tener color diferente, 1 y 2. No obstante, ninguno de ellos es adyacente al vértice de color 3.



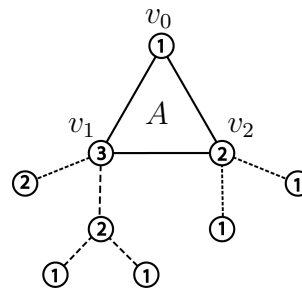
**Caso  $\mathcal{F}_1$ :** De la misma manera que en el caso anterior, sólo hay un vértice al que le podemos asignar el color 3 (en cada una de las gráficas de la familia  $\mathcal{F}_1$ ). Entonces, la trayectoria que nos queda al quitar dicho vértice, está obligada a que los colores 1 y 2 se vayan alternando. De esta manera, el vértice inicial y el vértice final deben tener diferente color asignado debido a la longitud  $2n$  de la trayectoria. Pero ni el vértice inicial ni el vértice final es adyacente al vértice de color 3.



Para la condición suficiente; Si  $G$  es bipartita admite una  $M_1$ -partición. Si  $G$  no es bipartita, por la Observación 2, podemos suponer que  $G$  es conexa. Por la Observación 1 tenemos tres casos como consecuencia de la cardinalidad de  $\mathcal{B}_{-v}$ . Ahora bien, definimos el excentricidad de un vértice  $v_0$  en  $G$  salvo  $A$  (o fuera de  $A$ ), donde  $A$  es subgráfica de  $G$ , como la excentricidad de  $v_0$  en  $G - A$ .

**Caso 1:** Existen tres vértices  $v_0, v_1, v_2 \in \mathcal{B}_{-v}$ , por la Observación 1 hay un único triángulo  $A$  en  $G$ . Entonces, por ser  $G$  cordal, las posibles trayectorias con vértice inicial  $v_0, v_1$  o  $v_2$  y vértice final en  $V(G - A)$ , son ajenas.

Como  $G$  no contiene a  $F_2$ , no puede suceder que los vértices tengan vecinos fuera de  $A$ . Supongamos  $v_1$  y  $v_2$  sí. Como  $G$  no contiene a  $F_3$ ,  $v_1$  y  $v_2$  no pueden tener excentricidad mayor que 1 (fuera de  $A$ ) al mismo tiempo. Supongamos que  $v_1$  sí. Como  $G$  no contiene a  $F_1$ ,  $v_1$  no puede tener excentricidad mayor que 2, lo que nos deja acotada a la gráfica (ver Fig. 9).



**Fig.9.**

Entonces coloreemos a  $v_0$  de color 1,  $v_1$  de color 3,  $v_2$  de color 2, a los vecinos de  $v_2$  (fuera de  $A$ ) los coloreamos de color 1, a los vecinos de  $v_1$  (fuera

de  $A$ ) a distancia 1 los coloreamos de color 2 y a los que están a distancia 2 de color 1.

**Caso 2:** Sólo hay dos vértices  $v_1, v_2 \in \mathcal{B}_{-v}$ . Si hubiera un único triángulo como subgráfica, sus tres vértices estarían en  $\mathcal{B}_{-v}$  y sería el Caso 1. Entonces hay al menos dos triángulos. Además,  $v_1$  y  $v_2$  están en todos los triángulos contenidos en  $G$  como subgráficas. Sea  $v_0$  un vértice de tal manera que  $v_0, v_1$  y  $v_2$  forman un triángulo  $A$  en  $G$ . Dado que hay otro triángulo diferente de  $A$  al que no pertenece  $v_0$  y como no puede existir  $F_1$  como subgráfica inducida, la excentricidad de  $v_0$  fuera de  $A$  es a lo más 1.

**Caso 2.1:** Existe  $v_0 \in V$  tal que  $A = (v_0v_1v_2) \in G$  y  $v_0$  tiene adyacencia fuera de  $A$ . Como  $G$  no contiene a  $F_2$ , ambos  $v_1$  y  $v_2$ , no pueden tener al mismo tiempo vecinos fuera de  $A$  ni fuera de ningún otro triángulo que formen. Supongamos que  $v_1$  sí. Como  $G$  no contiene a  $F_1$ , la excentricidad de  $v_1$  fuera de todos los triángulos en los que está es a lo más 2 (ver Fig. 10).

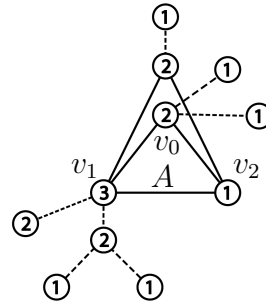


Fig.10.

Entonces coloreemos a  $v_1$  de color 3, a  $v_2$  de color 1, a todos los vértices que forman un triángulo con  $v_1$  y  $v_2$ , de color 2 y a todas sus adyacencias fuera de sus respectivos triángulos de color 1, a los vecinos de  $v_1$  (fuera de todo triángulo) a distancia 1, de color 2 y a los que están a distancia 2 de color 1.

**Caso 2.2:** Todo vértice que forme un triángulo con  $v_1$  y  $v_2$  no tiene más adyacencias. Como  $G$  no contiene a  $F_3$ ,  $v_1$  y  $v_2$  no pueden tener excentricidad mayor que 1 (fuera de los triángulos en los que están) al mismo tiempo. Supongamos que  $v_1$  sí. Y como  $G$  no contiene a  $F_1$ ,  $v_1$  no puede tener excentricidad mayor que 2 (ver Fig. 11).

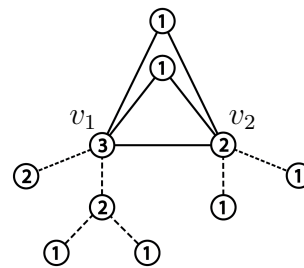


Fig.11.

Entonces coloreemos a  $v_1$  de color 3,  $v_2$  de color 2, a todos los vértices que forman un triángulo con  $v_1$  y  $v_2$ , de color 1, a los vecinos de  $v_2$  (fuera de

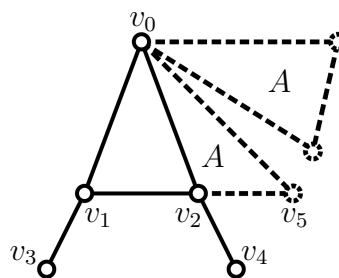
todo triángulo) los coloreamos de color 1, a los vecinos de  $v_1$  (fuera de todo triángulo) a distancia 1 los coloreamos de color 2 y a los que están a distancia 2 de color 1.

**Caso 3:** Hay un único vértice  $v_0 \in \mathcal{B}_{-v}$ . Por la misma razón del Caso 2, hay al menos dos triángulos. Supongamos que existe una trayectoria a partir de  $v_0$  de longitud 3,  $v_0v_1v_2v_3$ , donde la distancia de  $v_0$  a  $v_i$  es justamente  $i$ . Entonces  $v_2$  y  $v_3$  no pertenecen a triángulo alguno (por no ser adyacentes a  $v_0$ ) y por tanto no pertenecen a ciclo alguno. Como  $v_1$  no pertenece a  $\mathcal{B}_{-v}$ , entonces, en  $G - v_1$  debe haber un triángulo  $A$  el cual no tiene como vértices a  $v_2$  ni  $v_3$ , además, la arista  $v_2v_3$  no es adyacente al triángulo  $A$ , de otra manera,  $v_2$  o  $v_3$  pertenecerían a un ciclo, pues  $v_0$  es un vértice de  $A$ . Sin embargo, con  $A$  y la arista  $v_2v_3$ , hemos obtenido a  $F_1$ , lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto no existe tal trayectoria, es decir, la excentricidad de  $v_0$  es a lo más 2.

Sean  $L_i \subset V, i \in \{1, 2\}$ , tal que para todo  $v \in L_i$ , la distancia de  $v_0$  a  $v$  es  $i$ . En virtud de la definición anterior, tenemos que  $V = \{v_0\} \cup L_1 \cup L_2$ . El conjunto de vértices  $L_2$  es independiente, ya que si hay una arista entre los vértices de  $L_2$ , dicha arista estaría en un ciclo y sus respectivos vértices serían adyacentes a  $v_0$ . Entonces cada vértice en  $L_2$  solamente tiene vecinos en  $L_1$  y como no está en un ciclo, tiene grado 1. Además,  $G[L_1]$  es un bosque y cada una de sus componentes conexas es (propriadamente) 2-coloreable de manera única, salvo una permutación de colores.

Supongamos que existen dos vértices adyacentes  $v_1, v_2 \in L_1$  y dos vértices  $v_3, v_4 \in L_2$ , de tal manera que  $v_1$  es adyacente a  $v_3$  y  $v_2$  es adyacente a  $v_4$ .

Como  $v_1$  no está en  $\mathcal{B}_{-v}$ , debe haber un triángulo  $A$  en  $G$  que no contiene a  $v_1$ . Si los otros dos vértices de  $A$ , que no son  $v_0$ , son diferentes de  $v_2$ , por lo menos uno de ellos no es adyacente a  $v_2$ , entonces, ese vértice junto con  $v_0, v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  son los vértices de una subgráfica  $F_2$  inducida en  $G$ . Entonces, uno de los vértices de  $A$  tiene que ser  $v_2$ , llamémos  $v_5$  al otro (ver Fig. 12).



**Fig.12.**

Si repetimos el procedimiento anterior para  $v_2$ , debería existir otro triángulo  $B$  en  $G$  que no contiene a  $v_2$  y para evitar que se forme  $F_2$ ,  $B$  debería tener a

$v_1$  como vértice y otro, diferente de  $v_0$ , que llamaremos  $v_6$ . No obstante, como ya no pueden existir más aristas (de las que ya hay) entre  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  y  $v_6$ , la subgráfica formada por los vértices mencionados, es una subgráfica inducida igual a  $F_4$ .

Por lo tanto, si dos vértices  $v_1, v_2 \in L_1$  tienen vecinos en  $L_2$ , entonces  $v_1$  no puede ser adyacente a  $v_2$ . De hecho, si  $v_1, v_2 \in L_1$  tienen vecinos en  $L_2$ , como ningún elemento de  $\mathcal{F}_1$  puede ser subgráfica inducida en  $G$ , la distancia entre  $v_1$  y  $v_2$  es impar y mayor que 1. Esto quiere decir que en cada componente conexa de  $G[L_1]$ , los vértices con vecinos en  $L_2$ , están del mismo lado de la bipartición.

Por los argumentos anteriores, la siguiente  $M_1$ -partición es apropiada: a  $v_0$  lo coloreamos con el color 3, a los elementos de  $L_2$  les asignamos el color 1, a las componente conexas de  $G[L_1]$  con adyacencias en  $L_2$ , las bicoloramos propiamente con los colores 1 y 2, de tal forma que a los vértices con vecinos en  $L_2$ , les corresponda el color 2. Si alguna componente conexa de  $G[L_1]$  está desconectada de  $L_2$ , la bicoloramos propiamente de manera indistinta con los colores 1 y 2. Si hay vértices aislados en  $G[L_1]$  les asignamos el color 2. Con este último caso concluimos la demostración.

□

**Corolario 2.** *El conjunto de gráficas formado por  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  y la familia infinita  $\mathcal{F}_1$ , es el conjunto de todas las obstrucciones mínimas de la partición representada por la matriz  $M_1$  para gráficas cordales.*

# Capítulo 3

## Dos familias infinitas de patrones

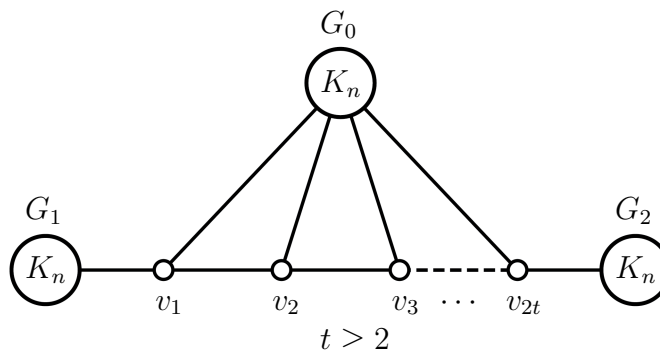
Para cada  $n \geq 1$ , sea  $M^n$  matriz cuadrada de tamaño  $(n+2)$ , tal que:

$$(M^n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i = n+1, j = n+2, \\ 1 & \text{si } i = n+2, j = n+1, \\ * & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad M^n = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * & * \\ * & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & * \\ * & \cdots & * & 0 & 1 \\ * & \cdots & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este sentido,  $M_1 = M^1$ .

Visto como una coloración, conforme incorporamos más colores, permitimos que más gráficas admitan una  $M^n$ -partición. De hecho, cualquier obstrucción mínima de  $M^n$  admite una  $M^p$ -partición para  $p > n$ . A pesar de ello, para cada  $n$  siempre podemos encontrar algunas obstrucciones mínimas relativamente obvias, por ejemplo: la gráfica completa  $K_{n+3}$  o la gráfica  $K_{n+1} \cup K_{n+2}$ . El siguiente ejemplo no es tan trivial, consta de una familia infinita de obstrucciones mínimas correspondientes a  $M^n$ , para cada  $n \geq 1$ .

**Ejemplo 1.** Sean  $n \geq 1$  y  $t \geq 2$ , consideremos a las cuatro gráficas, ajenas en vertices,  $G_0, G_1, G_2$  y  $P_t$ , donde  $G_0, G_1$  y  $G_2$  son copias de  $K_n$ , y  $P_t$  es una trayectoria con  $2t$  vértices, con extremos  $v_1$  y  $v_{2t}$ . Entonces para cada  $n$  y cada  $t$  consideremos a la gráfica  $F_{n,t}$  que está formada por  $G_0, G_1, G_2$  y  $P_t$ , donde  $G_0$  es completamente adyacente a  $P_t$ ,  $G_1$  es completamente adyacente a  $v_1$  y  $G_2$  es completamente adyacente a  $v_{2t}$ . Y definamos, para cada  $n \geq 1$ , a la familia infinita  $\mathcal{F}^n = \{F_{n,t} : t \geq 2\}$  (Fig. 13). En este contexto  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}^1$ .

Fig.13:  $\mathcal{F}^n$ 

**Lema 6.**  $\mathcal{F}^n$  es una familia infinita de obstrucciones mínimas de  $M^n$ ,  $n \geq 1$ .

**Demostración.** Sea  $F_{n,t} \in \mathcal{F}^n$ , para alguna  $n \geq 1$  y  $t \geq 2$ . Con las nociones de la sección anterior, vemos a la partición en cuestión como una  $(n+2)$ -coloración. Por los ceros de la diagonal se trata de una coloración propia. En  $G_0$  están representados  $n$  colores y los dos colores restantes se van alternado entre los vértices de  $P_t$ , así,  $v_1$  y  $v_{2t}$  tienen colores diferentes.

Por el mismo análisis que en  $M_1$ , debido a los ceros en  $(M^n)_{ii}$ , para  $i \in \{n+1, n+2\}$ , como  $F_{n,t}$  no es  $(n+1)$ -coloreable propiamente, debe existir un vértice  $v_{n+2} \in V(F_{n,t})$  tal que  $G - v_{n+2}$  es  $(n+1)$ -coloreable propiamente y exista un conjunto  $V_{n+1} \subset V(G)$  tal que  $v_{n+2}$  y  $V_{n+1}$  sean completamente adyacentes. Para que  $G - v_{n+2}$  sea  $(n+1)$ -coloreable, la única manera es que  $v_{n+2} \in V(G_0)$ . Como el color  $n+2$  no está representado en  $G_1$  y  $G_2$ , y dado que  $v_1$  y  $v_{2t}$  tienen colores diferentes: el color  $n+1$  debe estar en  $V(G_1)$  o en  $V(G_2)$ ; por lo que  $v_{n+2}$  no sería completamente adyacente a todos los vértices de color  $n+1$ . Y así,  $F_{n,t}$  no admite un  $M^n$ -partición.

Para ver que es obstrucción mínima, sea  $v_0 \in V(F_{n,t})$ , sin pérdida de generalidad tenemos tres casos:  $v_0 \in V(G_0)$ ,  $v_0 \in V(G_1)$  o  $v_0 \in V(P_t)$ . En cada caso daremos una coloración propia, de  $G - v_0$ , en la que los vértices de color  $n+2$  y los vértices de color  $n+1$  sean completamente adyacentes. Si  $v_0 \in V(G_0)$ , coloreamos a  $V(G_0 - v_0)$  con los primeros  $n-1$  colores, a  $V(G_1)$  lo coloreamos con los primeros  $n-1$  colores y el color  $n+1$ , a  $V(P_t)$  lo bicoloramos de tal manera que  $v_1$  tenga el color  $n$  y  $v_{2t}$  el color  $n+1$ , y a  $V(G_2)$  lo coloreamos con los primeros  $n-1$  colores y el color  $n$ . La anterior es una  $(n+1)$ -coloración propia de  $F_{n,t} - v_0$ . Ahora, si  $v_0 \in V(G_1)$ , coloreamos a  $V(G_0)$  con los primeros  $n-1$  colores y el color  $n+2$ , a  $V(G_1 - v_0)$  con los primeros  $n-1$  colores, a  $V(P_t)$  lo bicoloramos de tal manera que  $v_1$  tenga

el color  $n$  y  $v_{2t}$  el color  $n + 1$ , y a  $V(G_2)$  lo coloreamos con los primeros  $n$  colores. Esta coloración induce una  $M^n$ -partición de  $F_{n,t} - v_0$ . Por último, si  $v_0 \in V(P_t)$ , coloreamos a  $V(G_0)$  con los primeros  $n - 1$  colores y el color  $n + 2$ , a  $V(G_1)$  y  $V(G_2)$  con los primeros  $n$  colores, respectivamente, y a  $V(P_t - v_0)$ , lo bicoloramos con los colores  $n$  y  $n + 1$  de tal manera que  $v_1$  y  $v_{2t}$  tengan el color  $n + 1$ , o sólo uno, dependiendo de si  $v_0 = v_1$  o  $v_0 = v_{2t}$ . También, esta coloración induce una  $M^n$ -partición de  $F_{n,t} - v_0$ .

De los tres casos, concluimos que si  $v_0 \in V(F_{n,t})$ , entonces  $F_{n,t} - v_0$  admite una  $M^n$ -partición. Por lo tanto,  $\mathcal{F}^n$  es una familia infinita de obstrucciones mínimas de  $M^n$ . □

Para cada  $n \geq 1$ , sea  $M_n$  matriz cuadrada de tamaño  $(n + 2)$ , tal que:

$$(M_n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i > 1, j > i, \\ 1 & \text{si } j > 1, i > j, \\ * & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad M_n = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ * & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ * & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 1 \\ * & 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siendo así,  $M_1$ , de la sección anterior, es consistente con esta definición. Claramente, si  $G$  admite una  $M_n$ -partición, entonces,  $G$  admite una  $M_p$ -partición para toda  $p \geq n$ .

En este caso, igual que en el anterior,  $K_{n+3}$  es una obstrucción mínima. Una obstrucción mínima, un tanto más interesante, es la siguiente:

**Ejemplo 2.** Sea  $G_n$  la gráfica con vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  y el conjunto de vértices del clan  $v_7 = K_{n-1}$ , tal que, los vértices de  $v_7$  son adyacentes a todos los vértices,  $v_3$  es adyacente a todos los vértices excepto a  $v_6$ ,  $v_4$  es adyacente a todos los vértices excepto a  $v_1$  y además,  $v_1$  es adyacente a  $v_2$  y  $v_5$  es adyacente a  $v_6$  (ver Fig. 14). Observemos que  $G_n$  no admite una  $M_n$ -partición ya que no existe un clan  $U$  de  $n$  vértices tal que  $G_n - U$  sea una gráfica bipartita.

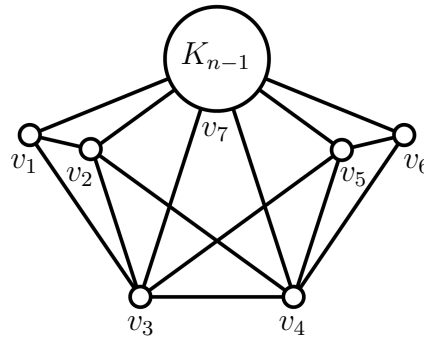


Fig.14.

Ahora, si  $n = 1$ , no existe  $v_7$ ,  $G_n$  es isomorfa a  $F_6$  y de la sección anterior sabemos que es una obstrucción mínima de  $M_1$ . Cuando  $n > 1$ , si quitamos un vértice  $v_0$  de  $v_7$ , al clan  $\{(v_7 - v_0), v_3, v_4\}$  lo coloreamos con los últimos  $n$  colores, a  $v_2$  y  $v_5$  de color 2 y, a  $v_1$  y  $v_6$  de color 1. Si quitamos al vértice  $v_1$ , coloreamos al clan  $\{v_7, v_4\}$  con los últimos  $n$  colores, a  $v_2$  y  $v_5$  con el color 2 y, a  $v_3$  y  $v_6$  con de color 1. Si quitamos al vértice  $v_2$ , coloreamos al clan  $\{v_7, v_5\}$  de los últimos  $n$  colores, a  $v_3$  y  $v_6$  de color 2 y, a  $v_1$  y  $v_4$  de color 1. Finalmente, si quitamos al vértice  $v_3$ , coloreamos al clan  $\{v_7, v_4\}$  con los últimos  $n$  colores, a  $v_2$  y  $v_5$  de color 2 y, a  $v_1$  y  $v_6$  de color 1. Los casos en donde quitamos a  $v_6$ ,  $v_5$  y  $v_4$  son análogos a los casos en donde quitamos a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , respectivamente. Es así como concluimos que  $G_n$  es una obstrucción mínima de  $M_n$  para cada  $n \geq 1$ .

**Lema 7.**  $\mathcal{F}_1$  es una familia infinita de obstrucciones mínimas de  $M_n$ ,  $n \geq 1$ .

**Demostración.** Sea  $F_{1,t} \in \mathcal{F}_1$ . Según la configuración de  $M_n$ , debe de existir un clan  $U_1$  con a lo más  $n + 1$  vértices tal que  $F_{1,t} - U_1$  es un conjunto independiente o un clan  $U_2$  con a lo más  $n$  vértices, tal que,  $F_{1,t} - U_2$  es una gráfica bipartita de tal manera que cada arista de  $F_{1,t} - U_2$  tiene un extremo completamente adyacente a los vértices de  $U_2$  en  $F_{1,t}$ . El primer caso no se cumple y en el segundo, el único clan que lo cumple está conformado por un vértice y la partición sería equivalente a  $M_1$  y así,  $F_{1,t}$  no admite una  $M_n$ -partición. Tomando en cuenta el Corolario 2, sabemos que si  $v_0 \in V(F_{1,t})$ , entonces  $F_{1,t} - v_0$  admite una  $M_1$ -partición, luego,  $F_{1,t} - v_0$  admite una  $M_n$ -partición. Por lo tanto,  $\mathcal{F}_1$  es una familia infinita de obstrucciones mínimas de  $M_n$ ,  $n \geq 1$ .

□

Ahora, consideremos a la gráfica  $H_n$  cuyos vértices son el clan  $K_{n+2}$  y el conjunto independiente de  $n + 2$  elementos,  $I_{n+2}$ , de tal manera que hay un apareamiento con los vértices de  $K_{n+2}$  y los vértices de  $I_{n+2}$ . Es fácil verificar que  $H_n$  es una obstrucción mínima de  $M_n$ . En general, si consideramos un conjunto independiente  $I_m$ ,  $m \leq n + 2$ , una partición  $P_m$  de  $K_{n+2}$ , en  $m$  conjuntos distintos del vacío, y para cada parte de  $P_m$  existe un único elemento en  $I_m$  tal que son completamente adyacentes, la gráfica que inducen  $K_{n+2}$  y  $I_m$ , también es una obstrucción mínima de  $M_1$ . Más general, si fijamos un conjunto  $K_{n_0} \subset K_{n+2}$ ,  $n_0 < n$ , permitiendo que  $K_{n_0} = \emptyset$ , hacemos el mismo procedimiento anterior pero con  $K_{n_1} = K_{n+2} - K_{n_0}$  y adicionalmente pedimos que los elementos de un subconjunto, no vacío, del respectivo  $I_{m_1}$ ,

sean totalmente adyacentes a  $K_{n0}$ , obtendremos más obstrucciones mínimas de  $M_n$ . Como se habrá notado, los ejemplos anteriores son gráficas escindibles.

Así pues, cuando  $n$  aumenta todo indica que la cantidad de obstrucciones también lo hace. ¿Qué otras estructuras pueden aparecer cuando  $n$  tiende a infinito? y más interesante aún, ¿qué obstrucciones trascienden a la  $n$ ?, es decir, las obstrucciones que son constantes para toda  $n$  o a partir de alguna  $n$ , por ejemplo:  $F_1$  y la familia infinita  $\mathcal{F}_1$ .



# Capítulo 4

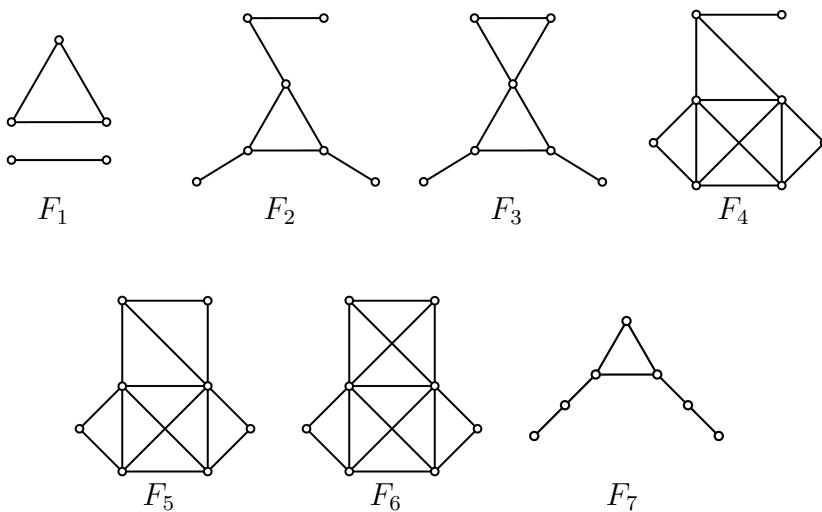
## $M_\infty$ -partición

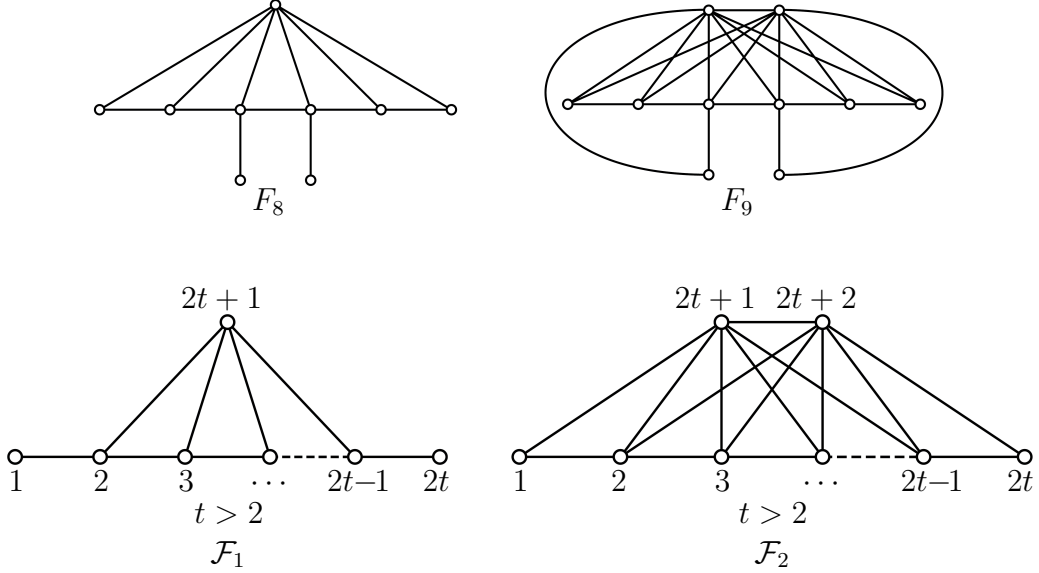
Esta sección está dedicada a obtener las obstrucciones mínimas, para gráficas cordales, de la partición representada por la matriz

$$M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4** Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces,  $G$  admite una  $M_\infty$ -partición si y sólo si  $G$  es libre de  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9$  y de cualquier gráfica de las familias infinitas  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ .

Donde:





Previo a la demostración del resultado principal, será necesario desarrollar una serie de resultados para escudriñar la esencia de las estructuras implícitas en la partición  $M_\infty$ . Notemos que: aquí también es válida la Observación 2 y que, cualquier gráfica bipartita o escindible admite una  $M_\infty$ -partición.

**Lema 8.** *Sea  $G$  una gráfica cordal, sea  $A \subset V$  un clan mínimo por contención tal que  $G - A$  es una gráfica bipartita y sea  $A_0 \subset A$ . Entonces  $A - A_0$  es clan mínimo por contención tal que  $(G - A_0) - (A - A_0)$  es una gráfica bipartita.*

**Demostración.** Es claro que  $(G - A_0) - (A - A_0)$  es una gráfica bipartita, veamos que  $(A - A_0)$  es mínimo por contención con esta propiedad. Por contradicción, supongamos que existe otro clan  $A' \subset (A - A_0)$ , tal que  $(G - A_0) - A'$  es una gráfica bipartita. El clan  $(A' \cup A_0) \subset A$  satisface que  $G - (A' \cup A_0)$  es una gráfica bipartita, contradiciendo que  $A$  es mínimo por contención con esa cualidad. Así es como llegamos al resultado deseado.  $\square$

**Lema 9.** *Si  $G$  es una gráfica cordal con  $C = (v_1 v_2 \dots v_n)$  un ciclo con  $n > 3$  vértices. Si  $v_2$  no es adyacente a  $v_4, v_5, \dots, v_n$ , entonces hay una cuerda con extremos  $v_1$  y  $v_3$ .*

**Demostración.** Sea  $C_0 \subseteq G$  un ciclo de longitud mínima de manera que  $v_2 \in V(C_0) \subseteq V(C)$ . Si  $|C_0| > 3$ , hay una cuerda en  $C_0$ , como  $v_2$

no es adyacente a  $v_4, v_5, \dots, v_n$ , dicha cuerda no tiene a  $v_2$  como extremo y obtendríamos un ciclo de longitud menor a la de  $C_0$  del que  $v_2$  sería vértice, contradiciendo su elección de  $C_0$ . Así pues,  $|C_0| = 3$  y, nuevamente, como  $v_2$  no es adyacente a  $v_4, v_5, \dots, v_n$ ,  $v_1$  es adyacente a  $v_3$ .  $\square$

**Observación 3.** Si  $G$  es una gráfica cordal,  $A \subset V$  es un clan y  $ab \in E(G - A)$ , entonces los vecinos de  $a$  en  $A$  están contenidos en los vecinos de  $b$  en  $A$  o viceversa. De lo contrario, habría un ciclo de tamaño cuatro.

**Observación 4.** Si  $G$  es una gráfica cordal y  $C \subseteq G$  es un ciclo, entonces hay un triángulo con vértices de  $C$ . Por esta razón, si  $A \subseteq V$  es un clan tal que  $G - A$  es bipartita, no hay ciclos con los que no comparta vértices.

**Lema 10.** Sean  $G$  una gráfica cordal y  $A \subset V$  un clan de  $G$  tal que  $G - A$  es bipartita. Si  $v_1 v_2 \dots v_n$  es una trayectoria en  $G - A$  y los vértices de  $A_0 \subseteq A$  son vecinos de  $v_1$  y  $v_n$  simultáneamente, entonces los vértices de  $A_0$  también son vecinos de  $v_i$  para toda  $i \in \{2, 3, \dots, v_{n-1}\}$ .

**Demostración.** Por contradicción: sea  $i \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$  tal que  $v_i$  no es vecino de algún  $x \in A_0$ , sea  $m = \max\{j \in \{2, 3, \dots, n - 1\} \text{ con } j < i, \text{ tal que } v_j \text{ es vecino de } x\}$  y sea  $M = \min\{j \in \{2, 3, \dots, n - 1\} \text{ con } j > i, \text{ tal que } v_j \text{ es vecino de } x\}$ . Entonces,  $(v_m v_{m+1} \dots v_M x)$  es un ciclo que no tiene cuerdas con extremo  $x$ . Por el Lema 9 existe una cuerda entre  $v_m$  y  $v_M$ , por tanto, un ciclo fuera de  $A$ , contradiciendo su cualidad.  $\square$

**Lema 11.** Sea  $G$  una gráfica cordal libre de  $F_1, F_2$  y  $F_3$ . Sea  $A \subset V$  clan mínimo por contención tal que  $G - A$  es bipartita, con  $|A| = n$ . Sea  $ab \in E(G - A)$ , entonces:

- a) Si  $n = 3$ ,  $a$  o  $b$  tiene al menos dos vecinos en  $A$ .
- b) Si  $n = 2$ , existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es bipartita o  $a$  o  $b$  tiene al menos un vecino en  $A$ .

**Demostración.** Demostraremos ambos incisos al mismo tiempo y por contradicción. Sea  $A = \{x, y, z\}$  o  $A = \{y, z\}$  en su debido caso. Como  $G$  es libre de  $F_1$ , cuando  $n = 3$  existe al menos una arista entre  $ab$  y  $A$ , sin pérdida de generalidad digamos que el conjunto de vecinos de  $b$  en  $A$  está contenido en el conjunto de vecinos de  $a$  en  $A$  y supongamos que dicho conjunto es

únicamente  $x$ . Entonces, por ser  $A$  mínimo por contención con la propiedad de  $G - A$  bipartita, al omitir  $\{x, y\}$  o  $\{y\}$  cuando  $n = 2$ , existe un triángulo  $\Delta_z$  que tiene como vértice a  $z$  y al omitir  $\{x, z\}$  o  $\{z\}$  cuando  $n = 2$ , existe un triángulo  $\Delta_y$  que tiene como vértice a  $y$ . Nuevamente como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $ab$  tiene al menos un vecino en  $\Delta_y$  y en  $\Delta_z$  (diferentes de  $y$  y  $z$ ). Tenemos tres casos en los que los triángulos pueden o no compartir vértices.

**Caso 1:** Los triángulos  $\Delta_y$  y  $\Delta_z$  no comparten vértices. Sean  $v_y$  y  $v_z$  vecinos de  $ab$  en  $\Delta_y$  y  $\Delta_z$  respectivamente.

Entonces los vértices  $a$  o  $b$  junto con  $v_y, y, z$  y  $v_z$  forman un ciclo. Dado que  $G$  es cordal y  $ab$  no tiene de vecino a  $y$  ni  $z$ , entonces, ambos  $v_y$  y  $v_z$  son vecinos de  $a$  o de  $b$  y hay una cuerda entre ellos (ver Fig. 15). De esta manera hay un triángulo fuera de  $A$ , lo que contradice la propiedad de que  $G - A$  es bipartita (Observación 4).

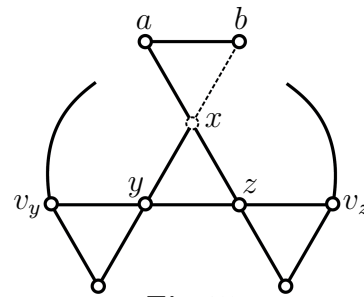


Fig.15.

**Caso 2:** Los triángulos  $\Delta_y$  y  $\Delta_z$  comparten dos vértices  $v_1$  y  $v_2$ . Se forman dos nuevos triángulos  $\Delta_1 = (yzv_1)$  y  $\Delta_2 = (yzv_2)$ . Por ser  $G$  libre de  $F_1$  y como  $ab$  no tiene de vecinos a  $y$  y  $z$ ,  $ab$  tiene como vecinos a  $v_1$  y  $v_2$  (ver Fig. 16). Por tanto, se forma un ciclo fuera de  $A$  con los vértices  $a$  y/o  $b$ ,  $v_1$  y  $v_2$ , contradiciendo nuestra hipótesis.

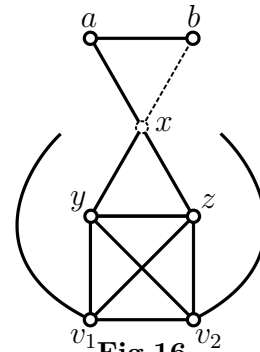


Fig.16.

**Caso 3:** Los triángulos  $\Delta_y$  y  $\Delta_z$  comparten un único vértice  $v_0$ . Similar a los casos anteriores, si  $ab$  tiene más de un vecino en  $V(\Delta_y) \cup V(\Delta_z)$ , se formaría un ciclo fuera de  $A$ . Por ello, sólo  $v_0$  es vecino de  $ab$  (ver Fig. 17) y, de esta manera, si  $n = 3$ : tenemos en  $G - v_0$  a  $F_2$  o  $F_3$  como subgráfica inducida, dependiendo de si  $b$  es o no adyacente a  $x$ , contradiciendo la hipótesis.

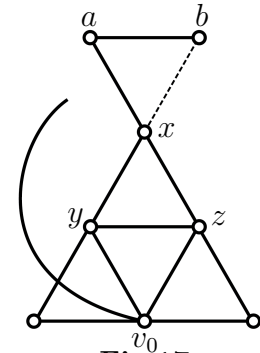


Fig.17.

Y si  $n = 2$  y  $G - v_0$  es bipartita tenemos el resultado pero si  $G - v_0$  no es bipartita: existe un triángulo  $\Delta$  fuera de  $v_0$ , dicho triángulo debería de tener a  $y$  o  $z$  (supongamos  $y$ ) como vértice pero no a  $a$  o  $b$  ya que estamos suponiendo que no son adyacentes. Como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $ab$  tiene como vecino a un vértice de  $\Delta$ , digamos  $w$ , diferente de  $y$  y  $z$ . Así pues, tenemos un ciclo con vértices en  $\{a, b, v_0, y, w\}$  y como  $y$  no es vecino de  $ab$  hay una cuerda entre  $v_0$  y  $w$ , por ende un ciclo fuera de  $A$ .

Por lo tanto  $ab$  tiene al menos dos adyacencias en el conjunto  $A$  y por la Observación 3 tenemos el resultado.  $\square$

Este resultado es la clave para un resultado más general:

**Lema 12.** *Sea  $G$  una gráfica cordal libre de  $F_1, F_2$  y  $F_3$ . Sea  $A \subset V$  clan mínimo por contención tal que  $G - A$  es bipartita, con  $|A| = n \geq 3$ . Sea  $ab \in E(G - A)$ , entonces,  $a$  o  $b$  tiene al menos  $n - 1$  vecinos en  $A$ .*

**Demostración.** Por contradicción. De la Observación 3, sin pérdida de generalidad asumamos que los vecinos de  $b$  en  $A$  están contenidos en los vecinos de  $a$  en  $A$ . Supongamos que  $a$  tiene menos de  $n - 1$  vecinos en  $A$ . Entonces existen dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  en  $A$  que no son vecinos de  $a$  (ni de  $b$ ), como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $a$  es adyacente a los demás vértices de  $A$ . Sea  $v_0$  un vértice de  $A$  diferente de  $v_1$  y  $v_2$  ( $n \geq 3$ ) y consideremos el triángulo  $\Delta = (v_0v_1v_2)$ . Por el Lema 8,  $V(\Delta)$  es mínimo por contención que satisface que  $(G - (A - V(\Delta))) - V(\Delta)$  es una gráfica bipartita, donde  $ab$  es únicamente adyacente a  $v_0$ , esto contradice al inciso a) del Lema 11. Por lo tanto  $a$  tiene al menos  $n - 1$  vecinos en  $A$ .  $\square$

Para cada  $i \in \{1, 2\}$  y para cada  $t \in \mathbb{N}$ , con  $t > 2$ , denotamos por  $F_{i,t}$  al  $(t - 2)$ -ésimo elemento de la familia  $\mathcal{F}_i$ .

**Lema 13.** *Sea  $G$  una gráfica cordal libre de  $F_{1,3}, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  y  $F_7$ , sea  $A_1 \subseteq V$ , con  $|A_1| = n \geq 2$ , clan mínimo por contención tal que  $G - A_1$  es una gráfica bipartita. Supongamos que existe  $ab \in E(G - A_1)$  con exactamente  $n - 1$  vecinos en  $A_1$  y que, en el caso  $n = 2$ , no existe  $v_0 \in V$  tal que  $G - v_0$  es bipartita. Entonces existe  $A_2 \subset V$ , clan, tal que:*

- a)  $G - A_2$  es bipartita,  $|A_1 \cap A_2| = n - 1$  y  $a$  o  $b$  es completamente adyacente a  $A_2$ .

- b) Para cualquier arista fuera de  $A_2$ , al menos uno de sus extremos es completamente adyacente a  $A_2$ .
- c) Si  $v_n = A_1 - A_2$ , sea  $T$  la componente conexa que contiene a  $v_n$  en  $(G - A_2)$ . Entonces, para todo  $w \in V(T)$  sucede que  $d_T(w, v_n) \leq 2$ . Además, si existe  $w_2 \in V(T)$  con  $d_T(w_2, v_n) = 2$ , todo  $w \in V(T)$ , vecino de  $v_n$ , es completamente adyacente a  $A_2$ .

**Demostración.** Por la Observación 4 la componente conexa  $T$  es un árbol. De la Observación 3, sin pérdida de generalidad supongamos que los vecinos de  $b$  en  $A_1$  están contenidos en los vecinos de  $a$  en  $A_1$ . Como  $G$  libre de  $F_1, F_2$  y  $F_3$ , el Lema 12 o, en su debido contexto, el inciso b) del Lema 11 es aprovechable. Sea  $A_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , de tal manera que  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  son vecinos de  $a$ , sea  $H = G[A_1 - v_n]$  ( $H = v_1$  en el caso  $n = 2$ ).

**Demostración del inciso a):** Por ser  $A_1$  mínimo por contención tal que  $G - A_1$  es bipartita, existen  $u_1, u_2 \in V(G - \{A_1 \cup \{a, b\}\})$  tal que  $\{u_1, u_2, v_n\}$  forman un triángulo. Como  $G$  es libre de  $F_1$  y  $v_n$  no es adyacente a  $a$ , sin pérdida de generalidad sea  $u_1$  vecino de  $ab$ . Si  $b$  es adyacente a  $u_1$  y si suponemos que existe  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  tal que  $b$  no es adyacente a  $v_i$ , tendríamos el ciclo  $(abu_1v_nv_i)$ , dado que  $v_n$  no es vecino de  $b$  y  $G$  es cordal, existe una cuerda con extremos  $a$  y  $u_1$  y tendríamos el triángulo  $(abu_1)$  fuera de  $A_1$ , contradiciendo una de nuestras hipótesis. Entonces  $b$  es adyacente a  $v_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , salvo un intercambio entre  $a$  y  $b$ , podemos suponer que desde el principio  $a$  es adyacente a  $u_1$  (y  $b$  no).

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  se forma el respectivo ciclo  $(au_1v_nv_i)$ . Dado que  $G$  es cordal y  $a$  no es adyacente a  $v_n$  implica que  $u_1$  es adyacente a  $v_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  (ver Fig. 18). Entonces proponemos al clan  $A_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u_1\}$ .

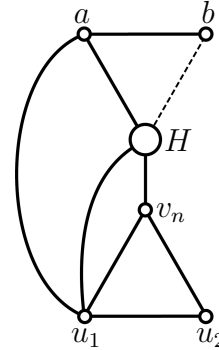


Fig.18.

Veamos que  $G - A_2$  es bipartita; supongamos que no, esto es, existe un triángulo  $\Delta \subseteq (G - A_2)$ . Como  $G - A_1$  es bipartita entonces  $v_n \in V(\Delta)$ , como  $v_n$  no es vecino de  $a$  ni de  $b$ , entonces  $a, b \notin V(\Delta)$ . Tenemos dos casos dependiendo de si  $u_2$  pertenece o no a los vértices de  $\Delta$ :

**Caso a.1:**  $u_2 \in V(\Delta)$ ,  $\Delta = (v_n u_2 x)$ , como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $ab$  debe tener de vecino a  $u_2$  o  $x$  (ver Fig. 19), así, existe un ciclo con vértices en  $\{a, b, u_1, u_2, x\}$  fuera de  $A_1$ , contradiciendo una hipótesis.

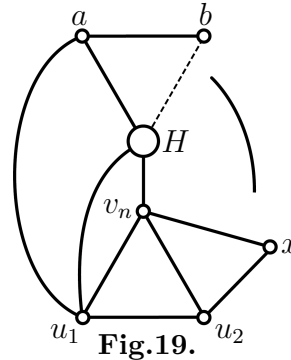


Fig.19.

**Caso a.2:**  $u_2$  no es vértice de  $\Delta = (v_n x y)$ . Como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $a$  o  $b$  es adyacente a  $x$  (sin pérdida de generalidad). Siendo así, existe un ciclo con vértices en  $\{a, b, x, v_n, u_1\}$ . Puesto que  $v_n$  no es vecino de  $a$  ni de  $b$  y  $b$  no es vecino de  $u_1$ , entonces  $x$  es vecino de  $a$  y de  $u_1$  (Fig. 20), por lo que existiría el ciclo  $(axu_1)$  fuera de  $A_1$ , contradicción.

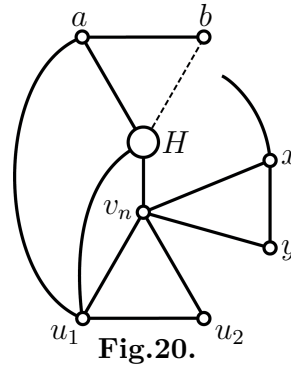


Fig.20.

Por lo que efectivamente,  $G - A_2$  es bipartita,  $|A_1 \cap A_2| = |\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}| = n - 1$  y  $a$  es completamente adyacente a  $A_2$ .

**Demostración del inciso b):** Continuaremos con la nomenclatura desarrollada en el inciso anterior. Sea  $cd \in E(G - A_2)$ , veamos que al menos un extremo es completamente adyacente a  $A_2$ .

**Caso b.1:**  $a$  o  $v_n$  es extremo de  $cd$ . Por la definición de  $A_2$  el resultado es inmediato.

**Caso b.2:**  $c = b$  y  $d \neq a$  ( $d \notin \{v_n, u_2\}$ , no es posible). Sabemos que  $b$  no es adyacente a  $v_n$  y dado que  $a$  es adyacente a  $u_1$ ,  $b$  no puede ser adyacente a  $u_1$  ni  $u_2$  para no formar un ciclo fuera de  $A_1$ .

$G$  es libre de  $F_1$ , entonces  $d$  tiene algún vecino en  $\{u_1, u_2, v_n\}$ . Si fuera  $u_1$  o  $u_2$  tendríamos el ciclo  $(abdu_1)$  o el ciclo  $(abdu_2u_1)$ , respectivamente, fuera de  $A_1$ . La única posibilidad es que  $d$  sea adyacente a  $v_n$  (ver Fig. 21).

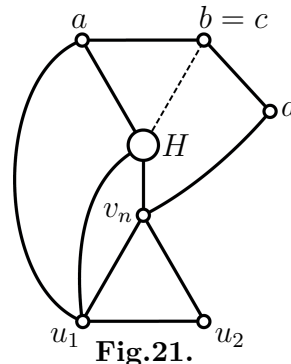
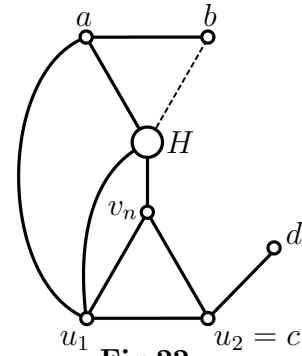


Fig.21.

Sin embargo, se formaría el ciclo  $(abdv_nu_1)$  y como  $v_n$  no es adyacente a  $a$  ni  $b$ , por ser  $G$  cordal, existe la cuerda con extremos  $d$  y  $u_1$ , así, existe el ciclo  $(abdu_1)$  fuera de  $A_1$ . Entonces este caso no es posible.

**Caso b.3:**  $c = u_2$  y  $d \neq v_n$  ( $d \notin \{a, b\}$ , no es posible). Por el inciso a)  $G - A_2$  es bipartita, entonces  $d$  no es vecino de  $v_n$ , además,  $d$  tampoco puede ser vecino de  $a$  o  $b$  porque tendríamos un ciclo fuera de  $A_1$  con vértices en  $\{a, b, d, u_2, u_1\}$ .

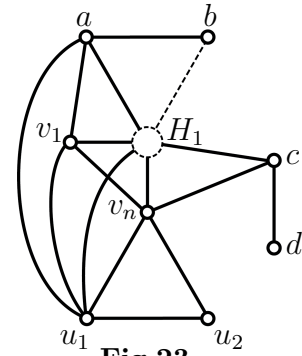
Si existiera  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  tal que  $u_2$  no es adyacente a  $v_i$ , entonces  $d$  tampoco es adyacente a  $v_i$  (por el posible ciclo  $(v_idu_2v_n)$ ). Por último, como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $b$  no puede ser adyacente a  $v_i$  ( $G[a, b, v_i, u_2, d]$ ). Pero  $G[a, b, v_i, v_n, u_1, u_2, d]$  es copia de  $F_{1,3}$ . Por lo tanto  $v_i$  es vecino de  $u_2$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , así,  $u_2$  es completamente adyacente a  $A_2$  (Fig. 22).



**Fig.22.**

**Caso b.4:**  $\{c, d\} \cap \{a, b, v_n, u_2\} = \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad suponemos que los vecinos de  $d$  en  $A_1$  están contenido es los vecinos de  $c$  en  $A_1$ . Tenemos dos subcasos:  $c$  tiene  $n - 1$  o  $n$  vecinos en  $A_1$ .

**Caso b.4.1:**  $c$  tiene  $n - 1$  vecinos en  $A_1$ . Supongamos que dichos vecinos son diferentes de los vecinos de  $a$  en  $A_1$ , a saber,  $c$  no es adyacente a  $v_1$  pero  $c$  sí es adyacente a  $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ , sea  $H_1 = H - v_1$  ( $H_1 = \emptyset$  si  $n = 2$ ). Como  $G - A_2$  es bipartita, sucede que  $c$  no es adyacente a  $u_2$  y  $d$  no es adyacente a  $v_n$  ni  $u_2$ .



**Fig.23.**

Ahora, si hubiera una arista entre  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$ , dado que  $G$  es cordal y  $v_n$  no es adyacente a  $a$ ,  $b$  ni  $d$ , existiría una arista entre  $u_1$  y  $c$ , por lo que se formaría un ciclo con vértices en  $\{a, b, c, d, u_1\}$  fuera de  $A_1$ , por esto no hay aristas entre  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$ . En este sentido, como  $G$  es libre de  $F_1$ , tenemos que  $b$  no puede ser adyacente a  $v_1$ . Además,  $d$  no puede ser adyacente a  $u_1$ ,

de lo contrario del ciclo  $(cd u_1 v_n)$  obtendríamos el triángulo  $(cd u_1)$ , fuera de  $A_1$ . Sin embargo, como  $G$  es libre de  $F_1$   $cd$  debe tener al menos un vecino en el triángulo  $(u_1 v_1 a)$  y la única manera es que  $c$  sea adyacente a  $u_1$  (ver Fig. 23). Pero la subgráfica  $G[a, b, c, d, u_1, v_1, v_n]$  sería isomorfa a  $F_{1,3}$ . De ahí que este subsubcaso no es posible.

Consideremos que los  $n - 1$  vecinos de  $c$  en  $A_1$  coinciden con los vecinos de  $a$  en  $A_1$ . Como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $cd$  debe tener vecinos en  $\{u_1, u_2, v_n\}$ , no puede ser  $v_n$  y  $u_1$  y  $u_2$  no pueden ser al mismo tiempo adyacentes a  $cd$ , existiría un ciclo fuera de  $A_1$ .

Si el único vecino de  $cd$  fuera  $u_2$ , independientemente de si es vecino de  $c$  o  $d$  (no ambos, por  $A_2$ ), no hay aristas entre  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$  (por  $A_1$ ), ni hay más aristas entre  $\{a, b\}$  y  $\{u_1, u_2\}$  (ver Fig. 24). Por lo tanto, tendríamos una subgráfica de  $G$ , inducida por  $\{a, b, c, d, u_1, u_2, v_n\}$  isomorfa a  $F_7$ , contradicción. Por esta razón, el único posible vecino de  $cd$  en  $\{u_1, u_2, v_n\}$  es  $u_1$ .

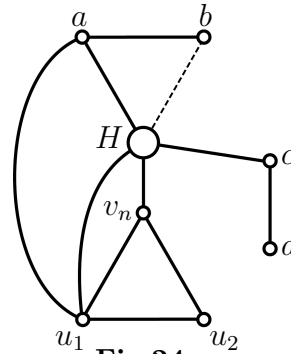


Fig.24.

Entonces, por la Observación 3 y dado que ambos  $c$  y  $d$  no pueden ser adyacentes a  $u_1$  (por  $A_1$ ), salvo un cambio de nombres,  $c$  es completamente adyacente a  $A_2$ .

**Caso b.4.2:**  $c$  es completamente adyacente a  $A_1$ . Por contradicción, supongamos que  $c$  no es adyacente a  $u_1$ . Entonces  $d$  tampoco puede ser adyacente a  $u_1$ .

Por  $A_2$ ,  $c$  no es adyacente a  $u_2$  ni  $d$  adyacente a  $v_n$  y por ello tampoco  $d$  es adyacente a  $u_2$ . Análogamente a los casos anteriores: por  $A_1$  y dado que  $v_n$  no es adyacente a  $a, b$  ni  $d$ , no hay adyacencias entre  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$  y tampoco hay más adyacencias entre  $\{a, b\}$  y  $\{u_1, u_2\}$  (ver Fig. 25).

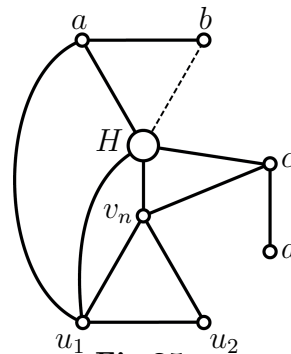


Fig.25.

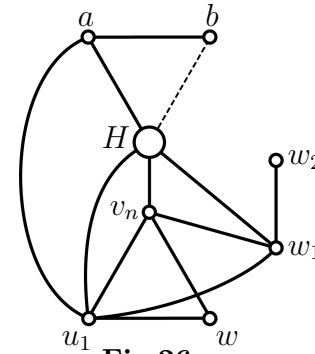
En consecuencia,  $G[a, b, c, d, u_1, u_2, v_n]$  es  $F_7$ , de ahí que nuestra suposición es incorrecta y  $c$  sí es adyacente a  $u_1$  y por lo tanto completamente adyacente a  $A_2$ .

Ya agotamos todos los casos. Si sucediera que para alguna arista  $cd \in E(G - A_2)$ , con  $v_n \notin \{c, d\}$ , ambos extremos fueran completamente adyacente a  $A_2$ , tendríamos un triángulo  $(cdu_1)$  fuera de  $A_1$ . Entonces, en estas condiciones sólo un extremo puede ser completamente adyacente a  $A_2$ .

**Demostración del inciso c):** Primero veamos que no existe un vértice en  $G - A_2$  a distancia tres de  $v_n$ . Por contradicción, supongamos que existen  $w_1, w_2, w_3 \subseteq V(G - A_2)$  (distintos de  $v_n$ ), tal que  $d_T(w_i, v_n) = i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Por el inciso b)  $w_2$  o  $w_3$  es totalmente adyacente a  $A_2$ . En cualquier caso, como  $v_n$  es totalmente adyacente a  $A_2$ , por el Lema 10, tenemos que tanto  $w_1$  como  $w_2$  son totalmente adyacentes a  $A_2$  y por lo tanto tendríamos el triángulo  $(w_1w_2u_1)$ , fuera de  $A_1$ , contradicción. Por lo tanto no existe tal trayectoria y cualquier vértice que se encuentre en  $T$ , está a lo más a distancia dos de  $v_n$ .

Por esto, como ni  $a$  ni  $b$  son adyacentes a  $v_n$ , sucede que  $ab$  no es arista de  $T$ , es decir,  $a$  y  $b$  no pertenecen a la componente conexa que contiene a  $v_n$  en  $G - A_2$ .

Si existen  $w_1, w_2 \in V(G - A_2)$  con  $d_T(w_i, v_n) = i$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Por el inciso b)  $w_1$  o  $w_2$  es totalmente adyacente a  $A_2$ . Si fuera  $w_2$ , por el Lema 10 y dado que  $v_n$  es adyacente a  $u_1$ , existiría el triángulo  $(w_1w_2u_1)$  (fuera de  $A_1$ ). Entonces,  $w_1$  es completamente adyacente a  $A_2$  y  $w_2$  no lo es, de hecho, no es adyacente a  $u_1$ .



**Fig.26.**

Ahora, si además existiera  $w \in V(G - A_2)$  a distancia uno de  $v_n$ , diferente de  $w_1$ , veamos que todos los vértices de  $A_2$  son vecinos de  $w$ . Si  $u_1$  no fuera vecino de  $w$ , la subgráfica inducida  $G[a, b, u_1, v_n, w_1, w_2, w]$  sería isomorfa a  $F_2$ , entonces sí son adyacentes. Por último, supongamos que existe  $i \in \{1, 2, \dots, v_{n-1}\}$  tal que  $v_i$  no es vecino de  $w$ . Si  $w_2$  no fuera vecino de  $v_i$ ,  $G[a, b, v_i, v_n, w_1, w_2, w]$  sería una copia de  $F_2$  o  $F_3$ , dependiendo de si  $b$  es o no adyacente a  $v_i$ , luego,  $v_i$  tiene que ser vecino de  $w_2$ . Sin embargo,  $G[a, b, v_i, u_1, v_n, w, w_1, w_2]$  es  $F_4$  o  $F_5$ , dependiendo de si  $v_i$  es vecino de  $b$  o no

(ver Fig.26). Por lo tanto,  $w$  es totalmente adyacente a  $A_2$ . Y este resultado concluye la demostración del lema.  $\square$

**Lema 14.** *Sea  $G$  una gráfica cordal libre de cualquier gráfica de las familias  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ . Sea  $A \subset V$  clan, con  $G - A$  bipartita y tal que un extremo de cualquier arista en  $G - A$ , es completamente adyacente a  $A$ . Entonces, si  $u$  y  $v$  son parte del mismo árbol  $T$  en  $G - A$  tal que  $u$  y  $v$  no son completamente adyacentes a  $A$ ,  $d_T(u, v)$  es par o igual a 3.*

**Demostración.** Por contradicción, supongamos que existen  $u, v \in V(G - A)$  que satisfacen la hipótesis y sucede que la distancia  $d = d_T(u, v)$ , es impar, diferente de 3.

Tenemos dos opciones, 1: existe  $x \in A$  tal que  $x$  no es vecino de  $u$  ni de  $v$  o 2: existen  $x, y \in A$  tal que  $x$  es vecino de  $u$  pero no de  $v$  y  $y$  es vecino de  $v$  pero no de  $u$ .

Por hipótesis  $d$  no puede ser 1. Sea  $P_{uv}$  la trayectoria en  $T$  desde  $u$  a  $v$ . Nuevamente, por hipótesis, los respectivos vecinos inmediatos tanto de  $u$  como de  $v$ , son completamente adyacentes a  $A$ . Si  $d$  fuera mayor que 3, por el Lema 10, cada vértice de  $P_{uv} - \{u, v\}$  es completamente adyacente a  $A$ . De manera que, en cada caso, 1 o 2,  $G[V(P_{uv}) \cup \{x\}]$  o  $G[V(P_{uv}) \cup \{x, y\}]$  serían isomorfos a  $F_{1,t}$  o  $F_{2,t}$  respectivamente, donde  $t = (d + 1)/2$ . De modo que  $d = 3$  o un número par.  $\square$

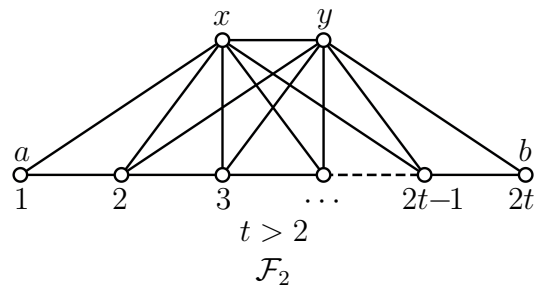
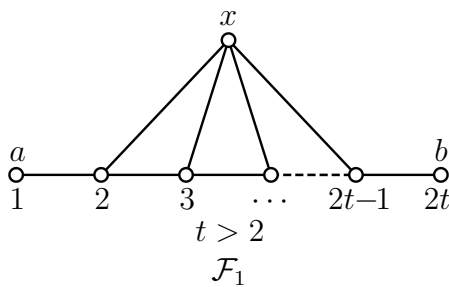
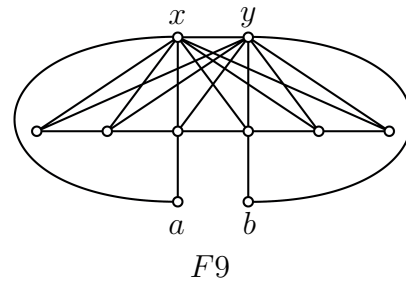
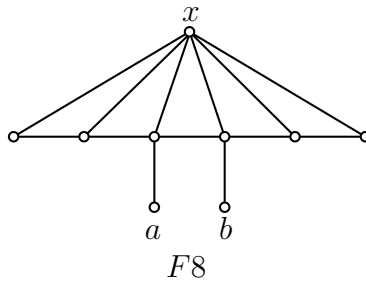
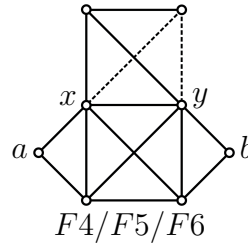
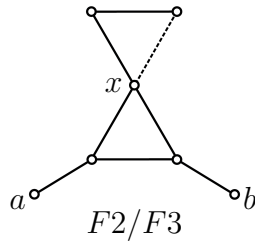
Finalmente nos encontramos en condiciones de demostrar nuestro resultado principal.

**Teorema 4.** *Sea  $G$  una gráfica cordal. Entonces,  $G$  admite una  $M_\infty$ -partición si y sólo si  $G$  es libre de  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9$  y de cualquier gráfica de las familias infinitas  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ .*

**Demostración.** En general, si una gráfica  $G$  admite una  $M_\infty$ -partición, existen una partición de  $V$  en tres subconjuntos  $V_1, V_2$  y  $V_3$ , de tal manera que  $V_1$  y  $V_2$  son conjuntos independientes, los vértices en  $V_3$  forman un clan y los vértices de  $V_2$  son totalmente adyacentes a los vértices de  $V_3$ . Dicho clan debe cumplir, al menos una de las dos propiedades siguientes,  $P_1$ :  $G - V_3$  es un conjunto independiente o  $P_2$ :  $G - V_3$  es una gráfica bipartita de tal manera que cada arista de  $G - V_3$  tiene un extremo completamente adyacente a los vértices de  $V_3$  en  $G$ . Para mayor comodidad podemos ver esta partición como

una coloración, donde a cada vértice le asignamos el color  $i$  dependiendo de si el vértice pertenece a la partición  $V_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Continuamos la demostración de la condición necesaria por contrapositiva. En particular,  $F_1$  y  $F_7$  no cumplen la propiedad  $P_1$  ni la propiedad  $P_2$ , por lo que dichas gráficas no admiten una  $M_\infty$ -partición. En los casos restantes, las gráficas  $F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_8, F_9, \mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ , ninguna cumple  $P_1$  pero hay un único clan  $V_3$  que cumple  $P_2$ . Identifiquemos a los respectivos vértices de  $V_3$ , por  $x$  y  $y$  o únicamente por  $x$ , dependiendo el caso, como se muestra a continuación y tomemos en cuenta a los vértices  $a$  y  $b$ :



En cada caso, a los vértices  $x$  y  $y$  les corresponde el color 3 y al resto se les debe colorear propiamente con 1 y 2. Sin embargo, la distancia entre  $a$  y  $b$  es impar, es decir, les corresponden colores diferentes, pero, ninguno es

completamente adyacente a  $V_3$ . Por lo tanto,  $F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_8, F_9, \mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  no admiten una  $M_\infty$ -partición.

Para la condición suficiente, como  $G$  es libre de  $F_1$ ,  $G$  es libre de  $2K_3$  (dos triángulos ajenos), por el Teorema 1 en [7]  $G$  es una  $(2, 1)$ -gráfica, así, existe un clan  $A$  tal que  $G - A$  es una gráfica bipartita. Sea  $A_1$  clan mínimo por contención tal que  $G - A_1$  es bipartita, con  $|A_1| = n$ .

**Caso 1:**  $n \geq 2$ . Si  $n = 2$  y existe un vértice  $v_0$  tal que  $G - v_0$  es bipartita, considérese el Caso 2, si no: como  $G$  es libre de  $F_1, F_2$  y  $F_3$ , por el Lema 12 y el inciso b) del Lema 11 cada arista  $ab \in E(G - A_1)$ , tiene  $n - 1$  o  $n$  vecinos en  $A_1$ .

**Caso 1.1:** Existe una arista  $ab \in G - A_1$  con únicamente  $n - 1$  vecinos en  $A_1$ . En el contexto del Lema 13, sea  $A_2$  el clan que satisface los incisos a), b) y c), sea  $v_n$  el vértice en  $A_1$  que no es vecino de  $ab$ . Entonces cualquier componente conexa en  $G - A_2$  que no tenga a  $v_n$  como vértice, no puede tener dos aristas ajenas, de lo contrario, cada vértice de la trayectoria, que contenga a los vértices que son completamente adyacentes a  $A_2$ , de esas dos respectivas aristas, serían completamente adyacentes a  $A_2$  y dicha trayectoria unión  $\{u_1\}$  sería un ciclo fuera de  $A_1$ . Por lo tanto, cada componente conexa de  $G - A_2$ , que no tenga a  $v_n$ , es una estrella donde el único vértice completamente adyacente a  $A_2$  es el centro de dicha estrella. Entonces, a cada centro de dichas estrellas les asignamos el color 2, a los brazos el color 1, al clan  $A_2$  el color 3 y por el inciso c) del Lema 13, si existe algún vértice en  $G - A_2$  a distancia 2 de  $v_n$ , le asignamos a  $v_n$  y a todos los vértices (en  $G - A_2$ ) a distancia 2 el color 1 y a los que se encuentran a distancia 1 el color 2. Y si todos los vértices en la componente de  $G - A_2$ , en donde se encuentra  $v_n$ , son vecinos de  $v_n$ , les asignamos el color 1 y a  $v_n$  el color 2. Y así, en este caso, tenemos una  $M_\infty$ -partición.

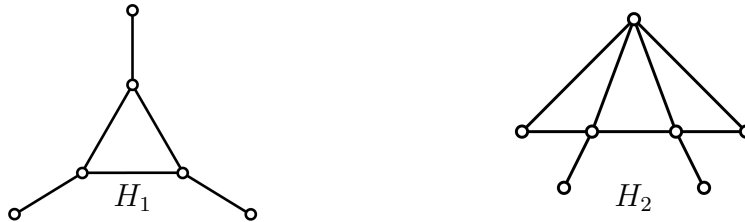
**Caso 1.2:** todas las aristas en  $G - A_1$  tienen un extremo completamente adyacente a  $A_1$ . En el contexto del Lema 14, sean  $u$  y  $v$  hojas del mismo árbol  $T$  en  $G - A_1$ , tal que  $u$  y  $v$  no son completamente adyacentes a  $A_1$ , como en la demostración del Lema 14, tenemos dos opciones, 1: existe  $x \in A_1$  tal que  $x$  no es vecino de  $u$  ni de  $v$  o 2: existen  $x, y \in A_1$  tal que  $x$  es vecino de  $u$  pero no de  $v$  y  $y$  es vecino de  $v$  pero no de  $u$ , además, la  $d_T(u, v)$  es par o igual a 3.

**Caso 1.2.1:** Supongamos que existe un par  $u$  y  $v$ , con las condiciones anteriores de manera que  $d_T(u, v) = 3$ , con la trayectoria  $T_{uv} = uu_1v_1v$  en  $T$ , con ambos  $u_1$  y  $v_1$  completamente adyacentes a  $A_1$ . No existe arista alguna  $ab$  en  $(G - A_1) - T$ . Ya que,  $G[u, u_1, v_1, v, a, b, x]$  o  $G[u, u_1, v_1, v, a, b, x, y]$ ,

dependiendo la circunstancia, sería copia de  $F_2, F_3, F_4, F_5$  o  $F_6$ . De modo que,  $(G - A_1) - T$  es un conjunto independiente. Asimismo, la longitud de  $T$  no puede ser muy grande, es decir, si existiera  $w_1 \in V(T)$  tal que  $d_T(u, w_1) = 4$  y  $d_T(v, w_1) = 5$  (o viceversa), al considerar al vecino de  $w_1, w_2$ , donde  $d_T(u, w_2) = 3$  y  $d_T(v, w_2) = 4$ ,  $G[u, u_1, v_1, v, w_1, w_2, x]$  o  $G[u, u_1, v_1, v, w_1, w_2, x, y]$  sería copia de  $F_2, F_3, F_4, F_5$  o  $F_6$ . Por otra parte, no pueden existir  $w_1, w_2 \in V(T)$  tal que  $d_T(w_1, u) = 3$ ,  $d_T(w_1, v) = 4$ ,  $d_T(w_2, v) = 3$  y  $d_T(w_2, u) = 4$ , ya que si 1: ambos  $w_1$  y  $w_2$  son completamente adyacentes a los vértices de  $A_1$  tendríamos a  $F_8$  o  $F_9$ , si 2: ambos no son completamente adyacentes a  $A_1$  tendríamos  $F_{1,3}$  o  $F_{2,3}$  y si 3:  $w_1$  es completamente adyacente a  $A_1$  pero  $w_2$  no, o viceversa, tendríamos a  $F_3$  o  $F_6$ . Por lo que, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo  $w \in V(T)$ ,  $d_T(u, w) \leq 3$  y por consiguiente  $d_T(u_1, w) \leq 2$ . Después de esto, considerando que los vértices  $w$  con  $d_T(u_1, w) = 1$  que no son hojas de  $T$ , son completamente adyacentes a  $A_1$ : coloreamos a los vértices aislados en  $G - A_1$  y todas las hojas del árbol  $T$  de color 1, al clan  $A_1 \cup \{u_1\}$  de color 3 y al resto de vértices de color 2.

**Caso 1.2.2:** La distancia entre cualquier par de vértices en  $G - A_1$  que no son completamente adyacentes a  $A_1$  es par. Entonces, partimos a los vértices de  $G$  de tal manera que a los vértices en  $A_1$  les corresponda el color 3 y a los vértices de  $G - A_1$  los bicoloreamos propiamente con los colores 1 y 2, de tal manera que a los vértices que no son completamente adyacentes a  $A_1$  se les asigne el color 1.

**Caso 2:**  $n = 1$ . Tomemos en cuenta a las gráficas  $H_1$  y  $H_2$ :



Tanto  $H_1$  como  $H_2$  son obstrucciones mínimas del patrón  $M_1$ . La idea es detectar el caso en donde se cumplen las hipótesis del Teorema 3 para concluir que  $G$  admite una  $M_1$ -partición; o, dar una coloración asociada al patrón  $M_\infty$  en el caso contrario.

**Caso 2.1:**  $G$  tiene como subgráfica inducida a  $H_1$  o  $H_2$ . En ambas circunstancias tendríamos una subgráfica inducida con vértices  $\{u, u_1, v_1, v, x\}$ , con  $(u_1xv_1)$  es un ciclo,  $u$  es adyacente a  $u_1$  y  $v$  es adyacente a  $v_1$ , sin más adyacencias entre ellos (ver Fig. 27). Donde  $x$  es tal que  $G - x$  es bipartita.

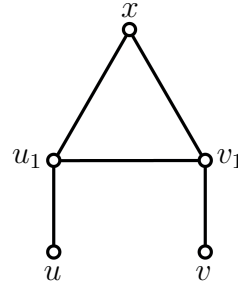


Fig.27.

Sea  $T$  árbol en  $G - x$  que contiene a los vértices  $\{u, u_1, v_1, v\}$ . Como no hay ciclos en  $G - x$ , sin importar si  $G$  contiene a  $H_1$  o  $H_2$ , por el hecho de que  $G$  no contiene a  $F_1$  ni  $F_2$ , tanto  $u$  como  $v$  no tienen más vecinos. Similar al Caso 1.2.1, como  $G$  es libre de  $F_2$  y  $F_3$ ,  $(G - x) - T$  es un conjunto independiente. Además, no puede existir  $w_1 \in V(T)$  tal que  $d_T(u, w_1) = 4$  y  $d_T(v, w_1) = 5$  (o viceversa), ya que al considerar al vecino de  $w_1$ ,  $w_2$  tal que  $d_T(u, w_2) = 3$  y  $d_T(v, w_2) = 4$ , si  $G[u_1, v_1, x, w_1, w_2]$  no fuera  $F_1$  entonces  $G[u, u_1, v_1, v, x, w_1, w_2]$  sería copia de  $F_2$  o  $F_3$ .

Si  $H_2$  es subgráfica inducida y si existen  $w_1, w_2, w'_1, w'_2 \in V(T)$  tal que  $d_T(u_1, w_i) = i$  y  $d_T(v_1, w'_i) = i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , con  $u_1 \neq w'_1 \neq w_1 \neq v_1$ , tal que  $w_1$  y  $w'_1$  son vecinos de  $x$ . Por  $F_{1,3}$ ,  $w_2$  o  $w'_2$  es vecino de  $x$ , por  $F_8$  no pueden ser ambos y por  $F_3$  no puede ser uno vecino de  $x$  y el otro no.

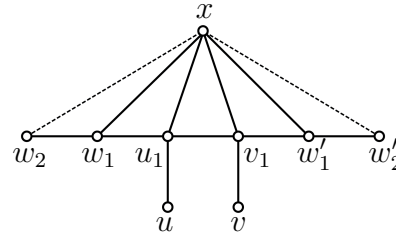


Fig.28.

A su vez, si  $H_1$  es subgráfica inducida y existen  $w_1, w_2 \in V(T)$ , tal que  $d_T(u_1, w_i) = i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , con  $w_1 \neq v_1$ , por  $F_2$ ,  $w_1$  es vecino de  $x$ . Conclusión idéntica al intercambiar de lugar a  $u_1$  por  $v_1$  (ver Fig. 28).

A raíz del análisis anterior, podemos suponer, independientemente de si  $G$  tiene a  $H_1$  o  $H_2$  como subgráfica inducida, que para todo  $w \in V(T)$ ,  $d_T(u_1, w) \leq 2$ , si  $d_T(u_1, w) = 1$  y  $w$  no es hoja de  $T$ , entonces  $w$  es vecino de  $x$ . Por tal motivo, podemos colorear al clan  $\{u_1, x\}$  de color 3, a los vecinos de  $u_1$ , diferentes de  $x$ , que no son hojas de  $T$ , de color 2 y al resto de vértices de color 1.

**Caso 2.2:**  $G$  no tiene como subgráfica inducida a  $H_1$  ni  $H_2$  y como, por hipótesis, tampoco contiene como subgráfica inducida a  $F_1, F_7$  ni a ninguna

gráfica de la familia  $\mathcal{F}_1$ , por el Teorema 3 de la sección anterior:  $G$  admite una  $M_1$ -partición y por lo tanto  $G$  admite una  $M_\infty$ -partición.  $\square$

**Corolario 3.** *El conjunto de gráficas formado por  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9$  y las familias infinitas  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ , es el conjunto de todas las obstrucciones mínimas de la partición representada por la matriz  $M_\infty$  para gráficas cordales.*

# Conclusiones

Como se habrá notado, en los capítulos 2 y 4, aparte de caracterizar, por primera vez a las particiones  $M_1$  y  $M_\infty$  a través de una familia de obstrucciones mínimas, en el contexto de gráficas cordales, de las respectivas demostraciones se lee entre líneas un algoritmo, ya que dichas demostraciones fueron, en esencia, constructivas. En el caso de  $M_1$ , si queremos determinar si una gráfica cordal  $G$  acepta una  $M_1$  partición, entonces: comenzamos identificando a los vértices  $v \in V$ , tal que  $G - v$  es una gráfica bipartita, lo cual se hace en tiempo polinomial (cúbico). Si existe al menos un vértice con esa propiedad, dependiendo el caso en el Teorema 3, hay un algoritmo implícito, que va detectando si la gráfica acepta una  $M_1$ -partición y da la partición explícita o en su defecto identifica que obstrucción mínima está contenida como subgráfica inducida en  $G$ , es decir, hasta aquí, tenemos un algoritmo certificador. Ahora, si no existe ningún vértice  $v \in V$ , tal que  $G - v$  es bipartita, según el Lema 4, es porque  $G$  contiene alguna de tres obstrucciones mínimas; si nos interesara, podríamos extender el algoritmo para saber exactamente cual obstrucción mínima está contenida en  $G$  y tendríamos un algoritmo certificador que corre en tiempo polinomial. En el caso de  $M_\infty$  en [7] desarrollaron un algoritmo de reconocimiento de tiempo  $O(n(m + n))$ , que, según el Teorema 1, si  $G$  no contiene a  $2K_3$  como subgráfica inducida,  $G$  tendría a un clan  $A$  tal que  $G - A$  es una gráfica bipartita. Dependiendo del tamaño del clan  $A$ , el algoritmo continuaría en el respectivo caso del Teorema 4, que auxiliándose de los lemas obtenidos en el capítulo 4, nos daría otro algoritmo certificador, que obtiene la  $M_\infty$ -partición o detecta una obstrucción mínima contenida en  $G$ .

Para trabajos posteriores se podría considerar hacer de manera precisa los dos algoritmos esbozados anteriormente. Una tarea aún más ambiciosa, sería exponer todas las obstrucciones mínimas, para gráficas cordales, de las restantes 54 matrices de partición de  $3 \times 3$ , de las que se sabe que su correspondiente conjunto de obstrucciones mínimas es finito, y por ende, hay

un algoritmo en tiempo polinomial que resuelve el problema de  $M$ -partición. Si bien ya hay en la literatura varias matrices resueltas, aún no se ha dado una clasificación completa explícita.

# Bibliografía

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory, Springer-Verlag (2008).
- [2] T. Feder, P. Hell and S. N. Rizi, Obstructions to partitions of chordal graphs, *Discrete Mathematics* 313 (2013) 1861–1871.
- [3] P. Hell, Graph partitions with prescribed patterns, *European Journal of Combinatorics* 35 (2014) 335–353.
- [4] T. Feder, P. Hell and O. Shklarsky, Matrix partitions of split graphs, *Discrete Applied Mathematics* 166 (2014) 91–96.
- [5] P. Hell and P-L. Yen, Join colourings of chordal graphs, *Discrete Mathematics* 338 (2015) 2453–2461.
- [6] T. Feder, P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira and F. Protti, List matrix partitions of chordal graphs, *Theoretical Computer Science* 49 (2005) 52–66.
- [7] P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira and F. Protti, Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques, *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185–194.