UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dinámica en Hiperespacios

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ÁRTICO RAMÍREZ URRUTIA

Director de tesis:
Dr. Gerardo Acosta García.
Instituto de Matemáticas.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. abril de 2020

Tesis
Dinámica en Hiperespacios

M. en C. Ártico Ramírez Urrutia
Instituto de Matemáticas, UNAM.
Asesor: Dr. Gerardo Acosta García.

12 de febrero de 2020

Índice General

Prefacio

Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. En el presente trabajo se estudian las propiedades de *transitividad* y *transitividad por cadenas* en las funciones inducidas a los hiperespacios:

- $2^X = \{A \subset X\colon A \text{ es un conjunto cerrado y no vacío}\}$;
- $\mathsf{F}_n(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathsf{C}_n(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes conexas}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Una función continua $f\colon X \to X$ se dice que es transitiva si para cada par de puntos $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $z \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$ y $d(y, f^n(z)) < \varepsilon$. La función f es transitiva por cadenas si para cada par de puntos $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de puntos

$$\Gamma = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \subset X$$

tales que $a_0 = x$, $a_n = y$ y $d(f(a_i), a_{i+1}) < \varepsilon$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ambas propiedades son importantes. La primera es un elemento esencial en lo que algunos autores llaman funciones caóticas (ver [9]). La segunda aparece en el análisis de la dinámica de f en los conjuntos límite $\omega(x_0, f)$. Resulta que para cada $x_0 \in X$, la función $f_{|_{\omega(x_0,f)}}\colon \omega(x_0, f) \to \omega(x_0, f)$ es transitiva por cadenas (ver [15]).

En 1975, W. Bauer y K. Sigmund publican *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures* ([4]) en el que prueban lo siguiente: para X un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ un homeomorfismo, si el homeomorfismo inducido $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es transitivo, entonces el homeomorfismo f es transitivo ([4, Proposición 2]). Más tarde, en el 2003, Román-Flores prueba este hecho para cualquier función continua $f\colon X \to X$ ([24, Teorema 3.6]). A partir de este momento, comienzan a aparecer una serie de artículos enfocados en estudiar la dinámica de las funciones inducidas a los hiperespacios y su relación con la dinámica de la función base $f\colon X \to X$.

En el caso de la transitividad en la función inducida 2^f, J. Banks [2] prueba que las siguientes tres condiciones son equivalentes: $f \times f$ es transitiva, 2^f es transitiva y $2^f \times 2^f$ es transitiva. En 2011, G. Higuera y A. Illanes [14] prueban que lo anterior también se cumple para la función inducida $\mathsf{F}_n(f)$. Para la función inducida $\mathsf{C}(f)$, $f \times f$ transitiva no implica $\mathsf{C}(f)$ transitiva. En [1] se exhibe un ejemplo de una función continua $f\colon X \to X$ en el que $\mathsf{C}(f)$ es transitiva. Esta función se define en el Cubo de Hilbert.

Se desconoce mucho acerca de la transitividad de las funciones inducidas $\mathsf{C}(f)$. Un resultado interesante sobre este tema fue publicado por G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez en 2009 ([1, Teorema 4.5]), donde prueban que si un continuo X tiene un arco libre (un arco que sin sus puntos extremos es un conjunto abierto en X), entonces $\mathsf{C}(f)$ no es transitiva. Este resultado mostró que la estructura topológica del espacio X es determinante para que la función inducida $\mathsf{C}(f)$ sea transitiva.

Sobre la transitividad de las funciones inducidas $\mathsf{C}_n(f)$, con $n \in \mathbb{N}$, no se ha publicado nada. Este trabajo comienza estudiando la transitividad de dichas funciones.

En el Capítulo 3 se define una nueva propiedad topológica a la que denominaremos *Densidad de Continuos de Convergencia*, o bien DCC. En Teoría de Continuos se han estudiado los continuos que poseen continuos de convergencia (subcontinuos que se pueden ver como límite de subcontinuos ajenos dos a dos), pero no aquellos cuyo conjunto de continuos de convergencia es un conjunto denso en $\mathsf{C}(X)$. La razón para estudiar esta nueva propiedad se muestra en el Teorema 3.3, donde se prueba que en los continuos X con la propiedad DCC, si $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathsf{C}(f)$ es transitiva. Este es uno de los resultados importantes sobre la transitividad de las funciones inducidas $\mathsf{C}_n(f)$, para $n \in \mathbb{N}$, que se presentan en este trabajo. El otro resultado importante en esta línea aparece previamente en el Capítulo 2, Teorema 2.10, en el que se afirma que si X es un continuo (no necesariamente con la propiedad DCC) y $\mathsf{C}(f) \times \mathsf{C}(f)$ es transitiva, entonces $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. La prueba de este teorema se debe al hecho de que el sistema dinámico $(\mathsf{C}_n(X), \mathsf{C}_n(f))$ es semiconjugado del sistema dinámico $(\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)), \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f)))$ (Teorema 2.9).

Una pregunta muy natural es la siguiente: ¿qué continuos tienen la propiedad DCC?. En el Capítulo 3 vemos que las n-celdas ($[0,1]^n$), con $n > 1$, son continuos que tienen la propiedad DCC, al igual que el cubo de Hilbert. Se podría pensar que los continuos con dicha propiedad no pueden ser continuos de dimensión menor a 2. Por ejemplo, un arco no tiene la propiedad DCC y es de dimensión 1. Sin embargo, al final del capítulo se prueba que la carpeta de Sierpinski también posee dicha propiedad (Teorema 3.18), siendo este un continuo de dimensión 1. Hasta donde se sabe, esta información que se ofrece sobre la carpeta de Sierpinski es nueva y, creemos, representa un avance significativo en el estudio de su estructura topológica.

El Capítulo 4 está dedicado a estudiar la transitividad por cadenas en las funciones inducidas a los hiperespacios, más específicamente a probar que la transitividad por cadenas en 2^f y en $\mathsf{F}_n(f)$ son condiciones equivalentes. De hecho, otros conceptos similares a la transitividad como el mezclado débil, la transitividad total y ser una función exacta tienen sus versiones por cadenas. Una vez definidas estas versiones estudiamos sus posibles equivalencias. Resulta que todas estas nuevas condiciones son equivalentes. Esto último aparece enunciado en el Teorema 4.5. Cabe decir que este resultado es importante para la dinámica en hiperespacios, pues antes de este teorema no se sabía nada acerca de la transitividad por cadenas en las funciones inducidas a los hiperespacios. El artículo [10] apareció en 2015. La participación del autor de este trabajo en dicho artículo consiste, en esencia, en la idea que se desarrolla en este capítulo. Finalmente, dados X un árbol y una función continua $f\colon X \to X$, vemos que si $\mathsf{C}(f)$ es transitiva por cadenas, entonces la dinámica de f es sencilla, en el sentido de que f^m es la identidad, para algún $m \in \mathbb{N}$ (Teorema 4.34).

Muchas son las propiedades dinámicas de $f\colon X \to X$ que se han estudiado a lo largo de decenas de años. La transitividad y la transitividad por cadenas no son conceptos nuevos. La propuesta de Bauer y Sigmund [4] consiste en relacionar la dinámica de f con la teoría de hiperespacios. Lo hicieron a través de las funciones inducidas. Dicha propuesta no tuvo eco en un principio; sin embargo, a partir de los primeros años de este siglo surge una serie de trabajos muy significativa en donde los autores retoman dicha idea (ver referencias de [1]).

Este trabajo se inscribe dentro de este proceso. Estamos convencidos que la teoría sobre la dinámica en las funciones inducidas a los hiperespacios es una herramienta importante en el estudio de las propiedades de los sistemas dinámicos discretos generados por $f\colon X \to X$.

Por último, como se muestra en el Capítulo 3, la relación entre algunas propiedades dinámicas de $f\colon X \to X$ y la teoría de hiperespacios puede sugerir, a los matemáticos dedicados a la topología, el estudio de nuevos conceptos que nos permitan comprender de mejor manera la estructura misma del espacio X.

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se presentan los conceptos sobre topología y dinámica (discreta) que se requieren para la comprensión de este trabajo, así como algunos resultados generales en estas dos áreas que se usarán en los siguientes capítulos. En las dos últimas secciones de esta introducción se presentan algunos resultados sobre transitividad y transitividad por cadenas que se usarán más adelante.

1.1. Sistemas dinámicos

En esta sección se definen algunos conceptos dinámicos. En general, el espacio base de un sistema dinámico no necesariamente es compacto; sin embargo, en este trabajo los consideraremos compactos.

Definición 1.1. *Un **sistema dinámico (discreto)** es un par (X, f), donde X es un espacio métrico, compacto y no vacío y $f\colon X \to X$ es una función continua.*

Definimos a continuación las *iteraciones de una función* f: f^0 es la función identidad de X en X, $f^1 = f$ y, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, f^n es la composición

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-veces}}.$$

Definición 1.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. La **órbita de** x (a través de f) se define como la sucesión*

$$\text{órb}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}.$$

Para indicar que una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge a un elemento b escribiremos $\{a_n\}_{n\geq 1} \to b$.

Definición 1.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. El **ω-conjunto límite** de x es el conjunto de puntos límite de* $\text{órb}(x, f)$*, es decir,*

$$\omega(x, f) = \{y \in X \colon \textit{existe } \{n_i\}_{i\geq 1} \subset \mathbb{N}, \textit{ tal que } n_i \to \infty \textit{ y } f^{n_i}(x) \to y\}.$$

Dado $x \in X$, como la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\geq 1}$ posee una subsucesión convergente, sucede que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Además, $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado en X (ver [18, Proposición 12.6]).

En vista de que los conjuntos cerrados contienen a todos sus puntos de acumulación, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico y A un subconjunto cerrado de X. Si existe $x \in X$ tal que* $\text{órb}(x, f) \subset A$*, entonces $\omega(x, f) \subset A$.*

Las siguientes propiedades del ω-conjunto límite son conocidas y las pruebas se pueden consultar en [18, Proposiciones 12.7 y 12.8]. La primera de estas propiedades dice que el ω-conjunto límite es fuertemente invariante bajo f (un subconjunto $A \subset X$ es **fuertemente invariante** bajo f si $f(A) = A$).

Teorema 1.5. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x, y \in X$. Entonces*

1) $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$;

2) $f(\omega(x, f^m)) = \omega(f(x), f^m)$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$;

3) *si* $y \in \text{órb}(x, f)$, *entonces* $\omega(x, f) = \omega(y, f)$.

Como el espacio X es compacto toda función continua $f \colon X \to X$ es uniformemente continua. De este hecho se deducen los siguientes lemas.

Lema 1.6. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $n > 1$ un entero. Para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $a, b \in X$ con $d(a, b) < \varepsilon$, entonces $d(f^i(a), f^i(b)) < \varepsilon$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Lema 1.7. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $\varepsilon > 0$ y $n > 1$ un entero. Existe una sucesión $\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_{n-1} < \delta_n = \varepsilon$ tal que si $d(a, b) < \delta_i$, entonces $d(f(a), f(b)) < \frac{\delta_{i+1}}{2}$, para $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

1.2. Hiperespacios y funciones inducidas

Como se mencionó previamente, los espacios que se consideran en este trabajo son métricos y compactos. En algunas ocasiones el espacio que se estudia es un **continuo**, es decir, un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un espacio métrico X, un **subcontinuo** de X es un subconjunto de X que es compacto, conexo y no vacío. Un **subcontinuo no degenerado** de X es un subcontinuo de X con más de un punto.

Sobre la notación. Usualmente d denota la métrica de X. Si X es un espacio métrico y compacto, $A \subset X$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\mathrm{cl}_X(A)$ es la cerradura de A en X, $\mathrm{int}_X(A)$ es el interior de A en X, $\mathrm{fr}_X(A)$ es la frontera de A, $\mathrm{diám}(A)$ es el diámetro de A, $|A|$ es la cardinalidad de A, $\mathrm{B}_X(x, \varepsilon)$ es la bola centrada en x de radio ε y $\mathrm{N}_X(A, \varepsilon)$ es la nube centrada en A de radio ε, la cual se define a continuación.

Definición 1.8. *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto, $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $\varepsilon > 0$. La **nube centrada en** A **de radio** ε es el conjunto*

$$\mathrm{N}_X(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \ \textit{para algún } a \in A\} = \bigcup_{a \in A} \mathrm{B}_X(a, \varepsilon).$$

De lo anterior se observa que la nube $\mathrm{N}_X(A, \varepsilon)$ es un conjunto abierto en X. Retomaremos este concepto de nubes más adelante para definir la métrica de Hausdorff.

Dentro de los espacios que se estudian en este trabajo se encuentran las gráficas finitas, los árboles y las dendritas.

Definición 1.9. *Una **gráfica finita** es un espacio métrico y compacto que se puede expresar como una unión finita de segmentos de recta. Un **ciclo** es un continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1. Un **árbol** es una gráfica finita conexa que no contiene ciclos. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene ciclos.*

Recordemos que un espacio topológico X es **localmente conexo** si para cada $x \in X$ y todo abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto C de X, tal que C es abierto y conexo en X y, además, $x \in C \subset U$. Las gráficas finitas y lo árboles son espacios localmente conexos. Por tanto, los árboles son dendritas y podemos pensar que la noción de dendrita extiende la de un árbol. Más adelante veremos un ejemplo interesante sobre la dinámica de una función definida en una dendrita.

Aunque la siguiente definición se puede escribir para espacios topológicos en general, se presenta aquí para espacios métricos y compactos.

Definición 1.10. *Dados un espacio métrico y compacto X y $n \in \mathbb{N}$, definimos los siguientes conjuntos, que llamaremos* ***hiperespacios de*** *X:*

$$2^X = \{A \subset X \colon A \neq \emptyset \text{ y } A = \mathrm{cl}_X(A)\};$$

$$\mathsf{F}_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\};$$

$$\mathsf{C}(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\};$$

$$\mathsf{C}_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes conexas}\}.$$

Notemos que $C(X) = C_1(X)$. A cada uno de los cuatro espacios anteriores, se les puede dotar de una métrica conocida como la **métrica de Hausdorff**. Basta con definir tal métrica en el hiperespacio 2^X y considerar la restricción para los demás hiperespacios. Así, para $A, B \in 2^X$, la métrica de Hausdorff H en 2^X se define como sigue:

$$H(A,B) = \inf\{\delta > 0 \colon A \subset \mathrm{N}_X(B,\delta) \text{ y } B \subset \mathrm{N}_X(A,\delta)\}.$$

Los detalles que prueban que H es una métrica se pueden consultar en [21, Teorema 4.2]. Las siguientes propiedades acerca de las nubes no son difíciles de probar, por lo que se omite la prueba.

Teorema 1.11. *Sean (X,d) un espacio métrico y compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces*

1) *si* $0 < \delta \leq \varepsilon$, *entonces* $\mathrm{N}_X(A,\delta) \subset \mathrm{N}_X(A,\varepsilon)$;

2) *si* $A \subset B$, *entonces* $\mathrm{N}_X(A,\varepsilon) \subset \mathrm{N}_X(B,\varepsilon)$;

3) $\mathrm{N}_X(A \cup B,\varepsilon) = \mathrm{N}_X(A,\varepsilon) \cup \mathrm{N}_X(B,\varepsilon)$;

4) $\mathrm{cl}_X(\mathrm{N}_X(A,\varepsilon)) \subset \mathrm{N}_X(A,2\varepsilon)$;

5) $\mathrm{diám}(A) \leq \mathrm{diám}(\mathrm{N}_X(A,\varepsilon)) \leq \mathrm{diám}(A) + 2\varepsilon$.

Es posible dotar de una topología al hiperespacio 2^X, a partir de la topología del espacio métrico y compacto X. Dados conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_k$ de X, definimos el conjunto

$$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \left\{ A \in 2^X \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \right\}.$$

A estos conjuntos se les conoce como **vietóricos**. En [21, Teorema 4.5] se prueba que la familia de los vietoricos es una base para una topología en 2^X (conocida como la **topología de Vietoris**) y, además, que la topología en 2^X generada por la métrica de Hausdorff H, coincide con la topología de Vietoris. Las propiedades que se mencionan en el siguiente resultado son conocidas y suelen aparecer como ejercicios en los libros de hiperespacios de continuos, una prueba de ellas puede consultarse en [22, Teoremas 1.33 y 1.34]

Teorema 1.12. *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces*

1) *$H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset \mathrm{N}_X(B, \varepsilon)$ y $B \subset \mathrm{N}_X(A, \varepsilon)$;*

2) *si U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $A \subset \mathrm{N}_X(A, \delta) \subset U$.*

En [21, Teorema 4.13] se prueba que si X es un espacio métrico y compacto, entonces el hiperepacio 2^X es compacto. Es también conocido que los hiperespacios $\mathsf{C}(X)$, $\mathsf{F}_n(X)$ y $\mathsf{C}_n(X)$ son compactos, para cada $n \in \mathbb{N}$ ([21, Corolario 4.3]).

En la siguiente observación se aplica la propiedad 1) del Teorema 1.12. Básicamente lo que se enuncia es que si dos elementos en $\mathsf{C}_n(X)$ están *cercanos* uno del otro, entonces componente a componente se encuentran *cercanos* en $\mathsf{C}(X)$. Entenderemos que $C_0(X) = \emptyset$.

Lema 1.13. *Sea (X, d) un espacio métrico y compacto. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que $A \in \mathsf{C}_n(X) \setminus \mathsf{C}_{n-1}(X)$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ las n componentes conexas de A y supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que los elementos de la familia $\{\mathrm{N}_X(A_1, \varepsilon), \mathrm{N}_X(A_2, \varepsilon), \ldots, \mathrm{N}_X(A_n, \varepsilon)\}$ son ajenos dos a dos. Entonces para cada $B \in \mathsf{C}_n(X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$, sucede que B tiene exactamente n componentes conexas $B_1, B_2, \ldots, B_n$ y, reordenándolas de ser necesario, sucede que $H(A_i, B_i) < \varepsilon$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demostración. Es claro que el resultado se cumple si $n = 1$. Supongamos que $n > 1$.

Como $H(A, B) < \varepsilon$, entonces $A \subset \mathrm{N}(B, \varepsilon)$ y $B \subset \mathrm{N}(A, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{N}(A_i, \varepsilon)$. Sean $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $a_i \in A_i$. Sea $b \in B$ tal que $d(a_i, b) < \varepsilon$. Entonces, $B \cap \mathrm{N}(A_i, \varepsilon) \neq \emptyset$. En vista de que B tiene a lo más n componentes conexas, que los elementos de la familia $\{\mathrm{N}_X(A_1, \varepsilon), \mathrm{N}_X(A_2, \varepsilon), \ldots, \mathrm{N}_X(A_n, \varepsilon)\}$ son ajenos dos a dos y que B intersecta a cada elemento de dicha familia, tenemos que B posee exactamente n componentes conexas.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea B_i la componente conexa de B que intersecta a $\mathrm{N}_X(A_i, \varepsilon)$. Entonces $B_i \subset \mathrm{N}_X(A_i, \varepsilon)$. Vamos a probar ahora que $A_i \subset \mathrm{N}_X(B_i, \varepsilon)$. Sea $a_i \in A_i$, existen $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $b \in B_j$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Así, $b \in \mathrm{N}(A_i, \varepsilon) \cap \mathrm{N}(A_j, \varepsilon)$. Por lo tanto, $i = j$. De lo anterior, $H(A, B) < \varepsilon$.

□

Si (X, f) es un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$, entonces las **funciones inducidas** en los hiperespacios

$$2^f : 2^X \to 2^X,$$

$$\mathsf{F}_n(f) : \mathsf{F}_n(X) \to \mathsf{F}_n(X),$$

$$\mathsf{C}(f) : \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(X),$$

$$\mathsf{C}_n(f) : \mathsf{C}_n(X) \to \mathsf{C}_n(X),$$

se definen como $\Lambda(f)(A) = f(A)$, con $\Lambda(f) \in \{2^f, \mathsf{F}_n(f), \mathsf{C}(f), \mathsf{C}_n(f)\}$ y $A \in \{2^X, \mathsf{F}_n(X), \mathsf{C}(X), \mathsf{C}_n(X)\}$, respectivamente. En adelante denotaremos por $\Lambda(X)$ a cualquiera de estos hiperespacios y por $\Lambda(f)$ a la correspondiente función inducida.

En [16, Lema 13.3, p. 106] se prueba que la función 2^f es continua. Como el resto de las funciones inducidas son restricciones de la función 2^f, tales funciones también son continuas. Notemos que si $h : X \to Y$ es una función continua, entonces h también induce una función continua $\Lambda(h) : \Lambda(X) \to \Lambda(Y)$ definida de manera similar.

1.3. Sistemas dinámicos inducidos

A partir de un sistema dinámico (X, f) y $n \in \mathbb{N}$, se obtienen los sistemas dinámicos

$$(2^X, 2^f), (\mathsf{F}_n(X), \mathsf{F}_n(f)), (\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(f)) \text{ y } (\mathsf{C}_n(X), \mathsf{C}_n(f)),$$

conocidos como los **sistemas dinámicos inducidos a los hiperespacios**.

En alguna ocasión se menciona otro sistema dinámico inducido, denotado por $(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(f))$, siendo $\mathsf{F}(X)$ el hiperespacio que se define como

$$\mathsf{F}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene un número finito de elementos}\}.$$

La función $\mathsf{F}(f) \colon \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(X)$ se define de manera similar a las otras funciones inducidas. El detalle de $\mathsf{F}(X)$ es que si X no es finito, entonces $\mathsf{F}(X)$ no es cerrado en 2^X. Sin embargo, por ser $\mathsf{F}(X)$ denso en 2^X [13, Pág. 49] es importante estudiarlo. Se debe aclarar que $\Lambda(X)$ hace referencia a cualquiera de los hiperespacios anteriores, salvo a a $\mathsf{F}(X)$. Tenemos el siguiente lema.

Lema 1.14. *Sea X un continuo no degenerado, $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \dots, A_k \in \Lambda(X)$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, sean $\Delta_j = \{A \in \Lambda(X) : A_j \subset A\}$ y*

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_k.$$

Entonces Δ no es denso en $\Lambda(X)$.

Demostración. Primero, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, Δ_j es un conjunto cerrado en $\Lambda(X)$ (ver [22, Teorema 1.21]). Entonces, Δ es un conjunto cerrado en $\Lambda(X)$. Sea $N = \{i \in \{1, 2, \dots, k\} : A_i \in \mathsf{F}_1(X)\}$. Sea

$$x \in X \setminus \bigcup_{i \in N} A_i.$$

Como $\{x\} \in \Lambda(X) \setminus \Delta$ y Δ es cerrado, entonces Δ no es denso. $\square$

Si dos sistemas dinámicos son conjugados, entonces comparten las mismas propiedades dinámicas. Antes de definir la conjugación veamos un concepto un poco más débil.

Definición 1.15. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos. Si existe una función continua y suprayectiva $h \colon X \to Y$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.3.1}$$

*conmuta, es decir, tal que $h \circ f = g \circ h$, entonces se dice que el sistema (Y, g) es **semiconjugado** del sistema (X, f) vía la función h. En el caso en que la función h sea un homeomorfismo, diremos que los sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) son **conjugados**, vía la función h.*

Por **propiedades dinámicas** nos referiremos a aquellas propiedades que se preservan bajo conjugación. Esto significa que en una propiedad dinámica, siempre que (X, f) y (Y, g) sean dos sistemas dinámicos conjugados y uno de los sistemas tenga la propiedad, entonces el otro sistema también la tiene. En las siguientes secciones veremos varios ejemplos de propiedades dinámicas.

Lema 1.16. *Supongamos que el sistema dinámico (Y, g) es conjugado del sistema (X, f) vía el homeomorfismo $h\colon X \to Y$. Entonces el sistema dinámico $(\Lambda(Y), \Lambda(g))$ es conjugado del sistema dinámico $(\Lambda(X), \Lambda(f))$ vía el homeomorfismo $\Lambda(h)\colon \Lambda(X) \to \Lambda(Y)$.*

Demostración. Por hipótesis, el diagrama (1.3.1) es conmutativo. De este se induce otro diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} \Lambda(X) \arrow[r, "\Lambda(f)"] \arrow[d, "\Lambda(h)"'] & \Lambda(X) \arrow[d, "\Lambda(h)"] \\ \Lambda(Y) \arrow[r, "\Lambda(g)"'] & \Lambda(Y) \end{tikzcd}$$

Por [21, Teorema 4.7] $\Lambda(h)$ es un homeomorfismo y se tiene la conjugación. □

Así pues, sistemas dinámicos conjugados producen sistemas dinámicos inducidos conjugados. En el caso de la semiconjugación no es así en general. Consideremos la siguiente definición.

Definición 1.17. *Sean X y Y dos continuos. Una función continua y suprayectiva $h\colon X \to Y$ es*

1) ***confluente** si para todo $K \in \mathsf{C}(Y)$ y cada componente conexa C de $h^{-1}(K)$, se tiene que $h(C) = K$;*

2) ***débilmente confluente*** *si para cada* $K \in \mathsf{C}(Y)$, *existe una componente conexa* C *de* $h^{-1}(K)$ *tal que* $h(C) = K$.

Es claro que las funciones confluentes son débilmente confluentes. Es fácil probar que una función continua y suprayectiva $h\colon X \to Y$ es débilmente confluente, si y sólo si la función inducida $\mathsf{C}(h)\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(Y)$ es suprayectiva. De esto último se tiene el siguiente lema.

Lema 1.18. *Supongamos que el sistema dinámico* (Y, g) *es semiconjugado del sistema* (X, f) *vía una función débilmente confluente* $h\colon X \to Y$. *Entonces la función inducida* $\mathsf{C}(h)\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(Y)$ *es continua y suprayectiva.*

1.4. Transitividad y otras propiedades dinámicas

Definición 1.19. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Diremos que* f *es* ***topológicamente transitiva*** *(o transitiva en* X*) si para todo par de conjuntos abiertos y no vacíos* $U, V \subset X$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

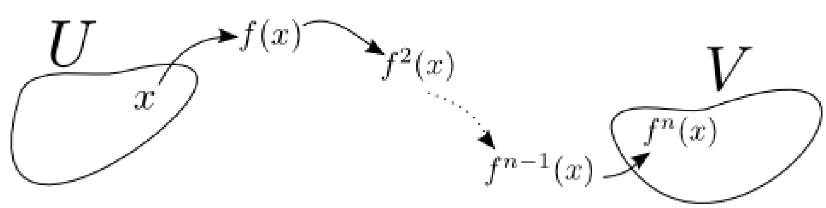

Figura 1.1: Función Transitiva

Es decir, f es transitiva si para todo par de conjuntos abiertos y no vacíos U y V en X, existe $x \in U$ tal que $f^n(x) \in V$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. El ejemplo clásico de un sistema dinámico transitivo lo veremos en el Ejemplo 2.5.

Otra manera de definir la transitividad de una función es en términos del ω-conjunto límite, como se indica en el siguiente teorema. Una prueba de este resultado se puede ver en [5, Proposición 39].

Teorema 1.20. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Entonces* f *es transitiva si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $\omega(x, f) = X$.

En algunas ocasiones, para probar que una función $f\colon X \to X$ es transitiva bastará hacer uso de alguna de las siguientes observaciones.

Observación 1.21. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x_0 \in X$. Si para toda $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $d(f^n(x_0), x) < \varepsilon$, entonces $\omega(x_0, f) = X$.*

Observación 1.22. *Sean (X, f) un sistema dinámico, con X un espacio sin puntos aislados y $x_0 \in X$. Si para todo abierto no vacío U en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) \in U$, entonces $\omega(x_0, f) = X$.*

Las siguientes propiedades están muy relacionadas con la transitividad en el sentido del Teorema 1.24.

Definición 1.23. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Decimos que*

1) *f es **totalmente transitiva** si para toda $n \geq 1$, la n-ésima iteración $f^n \colon X \to X$ es transitiva;*

2) *f es **débilmente mezcladora** si $f \times f \colon X \times X \to X \times X$ es transitiva, donde $(f \times f)(a, b) = (f(a), f(b))$, para cada $a, b \in X$;*

3) *f es **exacta** si para todo conjunto abierto y no vacío U en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.*

Una prueba del siguiente teorema aparece en [22, Teoremas 2.41 y 2.44].

Teorema 1.24. *Sea (X, f) un sistema dinámico.*

1) *Si f es exacta, entonces f es débilmente mezcladora.*

2) *Si f es débilmente mezcladora, entonces f es totalmente transitiva.*

3) *Si f es totalmente transitiva, entonces f es transitiva.*

El siguiente lema dice que la transitividad, al igual que las otras propiedades que se definieron, son propiedades dinámicas. Este resultado se suele enunciar para conjugaciones en vez de semiconjugaciones. La prueba es muy similar a la que aparece en [18, Proposición 11.6].

Lema 1.25. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos y P cualquiera de las propiedades: ser transitiva, totalmente transitiva, débilmente mezcladora o exacta. Supongamos que (Y, g) es semiconjugado del sistema (X, f). Si f tiene la propiedad P, entonces g tiene la propiedad P.*

Sobre estas propiedades dinámicas en las funciones inducidas a los hiperespacios, se mencionan a continuación algunos resultados destacados de los que haremos referencia más adelante. En [2, Teorema 2] [Banks (2005)] prueba lo siguiente.

Teorema 1.26. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Son equivalentes:*

1) *f es débilmente mezcladora;*

2) *2^f es débilmente mezcladora;*

3) *2^f es transitiva.*

En [14, Teorema 4.3] [Higuera, Illanes, 2011] se prueba que lo anterior también se satisface para las funciones inducidas $\mathsf{F}_n(f)$.

Teorema 1.27. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Son equivalentes:*

1) *f es débilmente mezcladora;*

2) *$\mathsf{F}_k(f)$ es débilmente mezcladora, para cada $k \in \mathbb{N}$;*

3) *$\mathsf{F}_k(f)$ es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$;*

4) *$\mathsf{F}_k(f)$ es débilmente mezcladora, para alguna $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;*

5) *$\mathsf{F}_k(f)$ es transitiva, para alguna $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Definición 1.28. *Sea X un espacio topológico. Un* ***arco*** *en X es la imagen de una función continua e inyectiva $\varphi\colon [0, 1] \to X$. Por $\overline{ab} \subset X$ denotaremos a un arco, siendo $a = \varphi(0)$ y $b = \varphi(1)$ los puntos extremos de dicho arco.*

Definición 1.29. *Sea X un espacio topológico. Decimos que el arco $\overline{ab} \subset X$ es un* ***arco libre*** *si $\overline{ab} \setminus \{a, b\}$ es un conjunto abierto en X.*

En [1, Teorema 4.5] [Acosta, Illanes, Méndez, 2009] se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.30. *Sean X un continuo con un arco libre y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces la función inducida $\mathsf{C}(f)\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(X)$ no es transitiva.*

Como consecuencia inmediata del Teorema 1.30, si X es una gráfica finita, entonces para ninguna función continua $f\colon X \to X$ la función inducida $\mathsf{C}(f)$ es transitiva.

1.5. Transitividad por Cadenas

En un sistema dinámico (X, f), la función f es transitiva si dados $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un elemento $z \in \mathrm{B}_X(x, \varepsilon)$, tal que $órb(z, f) \cap \mathrm{B}_X(y, \varepsilon) \neq \emptyset$. Para definir transitividad por cadenas se usa lo que se denomina como *cadenas* (o *seudo-órbitas finitas*).

Definición 1.31. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\varepsilon > 0$. Una sucesión infinita $\langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle$ es una **ε-seudo-órbita** si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $\langle x_0, x_1, \ldots, x_k\rangle$ es una sucesión finita y $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, diremos que la sucesión es una **ε-cadena** de x_0 a x_k de longitud k.*

Definición 1.32. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que f es **transitiva por cadenas** si para toda $\varepsilon > 0$ y $x, y \in X$, existe una ε-cadena de x a y.*

El siguiente lema es una reformulación de [3, Teorema 2.1] [Barwell, Good, Oprocha, Rains, 2013].

Lema 1.33. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Sean B^* una base para X y sea $\mathrm{B} = \mathrm{B}^* \setminus \{\emptyset, X\}$. Entonces, f es transitiva por cadenas si y sólo si para toda $U \in \mathrm{B}$, $\mathrm{cl}_X(f(U)) \cap X \setminus U \neq \emptyset$.*

Es claro que toda órbita en X es una ε-seudo-órbita, para toda $\varepsilon > 0$. de aquí, se tiene lo siguiente.

Teorema 1.34. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es transitiva, entonces f es transitiva por cadenas*

Si X es un continuo con más de un punto, entonces la función identidad $Id \colon X \to X$ es transitiva por cadenas y claramente no es transitiva. Más aún, si X es un continuo y $f \colon X \to X$ es una función continua tal que $f^n = Id$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces f es transitiva por cadenas y no es transitiva, pues $\mid \omega(x, f) \mid < \infty$, para toda $x \in X$.

El último resultado del capítulo nos dice que la transitividad por cadenas es una propiedad dinámica. La prueba es muy sencilla y se omite.

Lema 1.35. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos, con (Y, g) semiconjugado del sistema (X, f). Si f es transitiva por cadenas, entonces g es transitiva por cadenas.*

Capítulo 2

Transitividad

En la Sección 2.2 de este capítulo se prueba el Teorema 2.9, el cual afirma que si X es un continuo, entonces el sistema dinámico inducido $(\mathsf{C}_n(X), \mathsf{C}_n(f))$ es semiconjugado de $(\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)), \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f)))$. Para la transitividad de las funciones inducidas $\mathsf{C}(f)$ este teorema es muy importante, pues de este resultado se obtiene el Teorema 2.10, en el que se prueba si X es un continuo y la función inducida $\mathsf{C}(f)$ es débilmente mezcladora, entonces $\mathsf{C}_n(f)$ es débilmente mezcladora.

En la sección 3.1, se define por primera vez lo que denominamos como Densidad de Continuos de Convergencia (propiedad DCC) y se prueba que si X es un continuo tal que que el conjunto de continuos de convergencia es denso en $\mathsf{C}(X)$ (continuos con la propiedad DCC) y $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathsf{C}(f)$ es transitiva (Teorema 3.3).

Comencemos con la primera sección de este capítulo en la que se prueba una generalización del Teorema 1.30 para las funciones inducidas $\mathsf{C}_n(f)$.

2.1. Transitividad en $\mathsf{C}_n(f)$

Esta sección está dedicada a estudiar la transitividad de las funciones inducidas $\mathsf{C}_n(f)$, para $n \in \mathbb{N}$. En el Teorema 1.30, los autores (ver [1]) prueban que si X es un continuo con arco libre y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces $\mathsf{C}(f)$ no es transitiva. Se prueba en el Teorema 2.4 que lo mismo sucede para $\mathsf{C}_n(f)$, con $n \in \mathbb{N}$. Veamos primero que un elemento en $\mathsf{C}_n(X)$ cuyo ω-conjunto límite es $\mathsf{C}_n(X)$ debe tener exactamente n componentes conexas y ninguna de ellas puede ser un continuo con un solo punto.

Teorema 2.1. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $n \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathsf{C}_n(X)$ son tales que $\omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$, entonces B tiene exactamente n componentes conexas. Más aún, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathsf{C}_n(f)^m(B)$ tiene exactamente n componentes conexas.*

Demostración. Sea $B \in \mathsf{C}_n(X)$. Para probar la primera parte, supongamos que B no posee exactamente n componentes conexas. Entonces, como B tiene a lo más n componentes conexas, resulta que en realidad B tiene a lo más $n-1$ componentes conexas. Luego $B \in \mathsf{C}_{n-1}(X)$ y, por tanto, $\text{órb}(B, \mathsf{C}_n(f)) \subset \mathsf{C}_{n-1}(X)$. Como $\mathsf{C}_{n-1}(X)$ es cerrado en $\mathsf{C}_n(X)$, por el Teorema 1.4,

$$\mathsf{C}_n(X) = \omega(B, \mathsf{C}_n(f)) \subset \mathsf{C}_{n-1}(X) \neq \mathsf{C}_n(X),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, B tiene exactamente n componentes conexas. La segunda parte se sigue de la propiedad 3) del Teorema 1.5, en este caso

$$\omega(\mathsf{C}_n(f)^m(B), \mathsf{C}_n(f)) = \omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X).$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Sean (X, f) un sistema dinámico con X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathsf{C}_n(X)$ tales que $\omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$. Como ya se ha indicado, B tiene exactamente n componentes conexas, digamos $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Dada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathsf{C}_n(f)^m(B) = f^m(B) = f^m(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \\ = f^m(B_1) \cup f^m(B_2) \cup \cdots \cup f^m(B_n).\end{aligned}$$

Como $\mathsf{C}_n(f)^m(B)$ tiene exactamente n componentes conexas, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, sucede que $f^m(B_i) \cap f^m(B_j) = \emptyset$. Entonces $f^m(B_1), f^m(B_2), \ldots, f^m(B_n)$ son las n componentes conexas de $\mathsf{C}_n(f)^m(B)$. Intuitivamente, ninguna de las componentes de B puede colapsar a un punto bajo las iteraciones de $\mathsf{C}_n(f)$. De aquí el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to X$ una función continua. Supongamos que $B \in \mathsf{C}_n(X)$ es tal que $\omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$ y que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son las n componentes conexas de B. Entonces $|f^m(B_i)| > 1$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n puntos distintos en X. Sean

$$\varepsilon = \text{mín}\{d(x_i, x_j)\colon i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j\} \text{ y } \delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por [21, Teorema 5.4], existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathsf{C}(X)$ tales que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in A_i$ y

$$\delta \leq \text{diám}(A_i) \leq 2\delta.$$

Es claro que $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathsf{C}_n(X)$. Sea $\gamma = \frac{\delta}{3}$. Existe una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, tales que $H(\mathsf{C}(f)^{n_i}(B), A) < \gamma$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la segunda parte del Lema 1.13, $H(\mathsf{C}(f)^{n_i}(B_j), A_j) < \gamma$, para toda $i \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Así, si suponemos que para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $m \in \mathbb{N}$, $|f^m(B_j)| = 1$, entonces para $n_i > m$, $|f^{n_i}(B_j)| = 1$. Como $A_i \subset \mathrm{N}(\mathsf{C}(f)^{n_i}(B_j), \gamma)$, entonces

$$\delta \leq \text{diám}(A_i) \leq 2\gamma < \delta,$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, $|f^m(B_i)| > 1$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

□

En el siguiente teorema se muestra que no solamente cada componente conexa de B tiene más de un punto, sino que además tienen interior vacío.

Teorema 2.3. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $B \in \mathsf{C}_n(X)$ es tal que $\omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son las n componentes conexas de B, entonces $\mathrm{int}_X(f^k(B_i)) = \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demostración. Es claro que si $\mathrm{int}_X(f^k(B)) = \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathrm{int}_X(f^k(B_i)) = \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Supongamos que, para alguna $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathrm{int}_X(f^m(B)) \neq \emptyset$. Sea $K = f^m(B)$. Luego, por 3) del Teorema 1.5, $\omega(K, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$. Sean $x \in \mathrm{int}_X(K)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathrm{B}_X(x, \varepsilon) \subset K$. Como $\{x\} \in \mathsf{C}_n(X)$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^l(K), \{x\}) < \varepsilon$. Así,

$$f^l(K) \subset \mathrm{N}_X(\{x\}, \varepsilon) = \mathrm{B}_X(x, \varepsilon) \subset K.$$

Más en general, para cada $t \in \mathbb{N}$, $f^{(t+1)l}(K) \subset f^{tl}(K)$. En otras palabras, la sucesión $\{f^{il}(K)\}_{i \geq 1}$ es una sucesión anidada de manera decreciente y converge a

$$C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^{il}(K).$$

De lo anterior, se tiene que $\omega(K, \mathsf{C}_n(f)^l) = \{C\}$. Por otra parte, como $\omega(K, \mathsf{C}_n(f)^l)$ es fuertemente invariante bajo $\mathsf{C}_n(f)^l$, entonces

$$\{f^l(C)\} = \mathsf{C}_n(f)^l(\{C\}) = \mathsf{C}_n(f)^l(\omega(K, \mathsf{C}_n(f)^l)) = \omega(K, \mathsf{C}_n(f)^l) = \{C\}.$$

Es decir, $f^l(C) = C$. Si $r \geq l$, entonces $r = tl + i$, para algún $t \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$. Luego,

$$f^i(C) \subset f^i(f^{tl}(K)) = f^{tl+i}(K) = f^r(K).$$

Sea $\Delta = \bigcup_{i=0}^{l-1} \{A \in \mathsf{C}_n(X) \colon f^i(C) \subset A\}$. Como Δ es cerrado y $\omega(K, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$, entonces Δ es denso en $\mathsf{C}_n(X)$, pero esto último contradice el Lema 1.14. Por lo tanto, $\mathrm{int}_X(f^k(B)) = \emptyset$, para toda $k \in \mathbb{N}$. □

Usando los Teoremas 2.2 y 2.3 se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sean X un continuo con un arco libre y $f \colon X \to X$ una función continua. Entonces para ninguna $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva.*

Demostración. Supongamos que $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva. Entonces existe $B \in \mathsf{C}_n(X)$ tal que $\omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X)$. Sea A un arco libre en X con extremos p y q. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $A \subsetneq X$. Sean $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos contenidos en $X \setminus A$.

El vietórico

$$\mathcal{U} = \langle A \setminus \{p, q\}, W_1, W_2, \ldots, W_{n-1} \rangle \cap C_n(X)$$

es un conjunto abierto y no vacío de $\mathsf{C}_n(X)$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{C}_n(f)^k(B) = f^k(B) \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 2.1, $f^k(B)$ tiene exactamente n componentes conexas. Observemos que $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ y $A \setminus \{p, q\}$ son conjuntos abiertos, ajenos dos a dos y no vacíos. Sea B_0 la componente conexa de $f^k(B)$ tal que $B_0 \subset A \setminus \{p, q\}$. Por el Teorema 2.2 tenemos que B_0 es no degenerado. Entonces B_0 es un arco. Como $A \setminus \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X, se tiene que $\mathrm{int}_X(B_0) \neq \emptyset$ y, por tanto, $\mathrm{int}_X(f^k(B)) \neq \emptyset$, contradiciendo el Teorema 2.3. Esto prueba que $C_n(f)$ no es transitiva. □

Ejemplo 2.5. *Consideremos la función tienda $T \colon [0, 1] \to [0, 1]$ definida por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

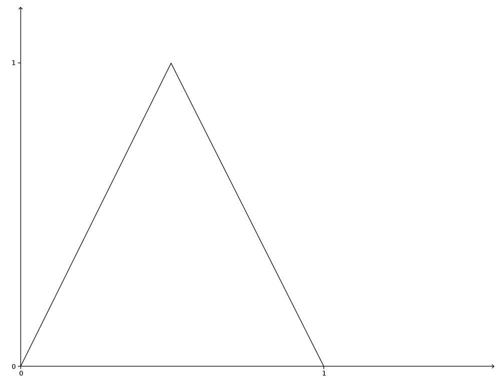

Figura 2.1: La función tienda.

En [18, Proposición 8.2] se prueba que T es exacta. Por el Teorema 1.24, T es débilmente mezcladora. Después, por el Teorema 1.27, $\mathsf{F}_n(T)$ es transitiva, para cada $n \in \mathbb{N}$. También 2^T es transitiva, por el Teorema 1.26. Sin embargo, del Teorema 2.4 se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función inducida $\mathsf{C}_n(T)$ no es transitiva.

Es natural preguntarse si existe un ejemplo de un sistema dinámico tal que la función inducida en el hiperespacio $\mathsf{C}_n(X)$ sea transitiva. El siguiente ejemplo aparece en [1, Ejemplo 7]. En él se muestra la existencia de un sistema dinámico (Q, σ) en el que la función inducida $\mathsf{C}(\sigma)$ es transitiva. El espacio Q, que se presenta a continuación, es el *cubo de Hilbert* definido con base $\mathbb{Z}$ en vez de base $\mathbb{N}$.

Ejemplo 2.6. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $I_n = [0, 1]$. Definimos al espacio Q como*

$$Q = \prod_{n \in \mathbb{Z}} I_n.$$

La función $\sigma\colon Q \to Q$ está definida de la siguiente manera. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$, entonces $\sigma(a) = b$, donde $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $b_n = a_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. La métrica $d\colon Q \times Q \to [0, \infty)$ de Q se define como sigue:

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a_n - b_n|}{2^{|n|}}.$$

Resulta que la función σ y la función inducida $\mathsf{C}(\sigma)$ son transitivas (ver [1, Teorema 7.18]). A continuación veremos que la función inducida $\mathsf{C}(\sigma)$

es de hecho débilmente mezcladora. Luego, por el Teorema 2.10 que más adelante veremos $\mathsf{C}_n(\sigma)$ es transitiva para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.7. *La función inducida $\mathsf{C}(\sigma)$ es débilmente mezcladora.*

Demostración. Sean $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathsf{C}(Q)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{|i|>N} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Sea además

$$\varphi\colon Q \to \prod_{i\in[-N,N]} I_n, \tag{2.1.1}$$

la proyección natural sobre las coordenadas desde $-N$ a N de Q. Entonces, $\varphi(A_1), \varphi(A_2), \varphi(B_1), \varphi(B_2)$ son subcontinuos de $\prod\limits_{i\in[-N,N]} I_n$.

Definimos

$$D_j = \{(a)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q\colon (a_{-N}, \ldots, a_N) \in \varphi(A_j) \text{ y } (a_{N+1}, \ldots, a_{3N+1}) \in \varphi(B_j)\},$$

para $j \in \{1,2\}$. Notemos que

$$D_j = \prod_{n<-N} I_n \times \varphi(A_j) \times \varphi(B_j) \times \prod_{n>3N+1} I_n,$$

para cada $j \in \{1,2\}$. Entonces, $D_1, D_2 \in \mathsf{C}(Q)$.

Es claro que $\varphi(D_j) = \varphi(A_j)$ y que $\varphi(\mathsf{C}(\sigma)^{2N+1}(D_j)) = \varphi(B_j)$, para cada $j \in \{1,2\}$. Así,

$$D_j \subset \mathrm{N}_X(A_j, \varepsilon) \text{ y } A_j \subset \mathrm{N}_X(D_j, \varepsilon),$$

al igual que

$$\mathsf{C}(\sigma)^{2N+1}(D_j) \subset \mathrm{N}_X(B_j, \varepsilon) \text{ y } B_j \subset \mathrm{N}_X(\mathsf{C}(\sigma)^{2N+1}(D_j), \varepsilon),$$

para cada $i \in \{1,2\}$. Es decir,

$$H(D_j, A_j) < \varepsilon \text{ y } H(\mathsf{C}(\sigma)^{2N+1}(D_j), B_j) < \varepsilon,$$

con $j \in \{1,2\}$. Esto muestra que $\mathsf{C}(\sigma)$ es débilmente mezcladora.

$\square$

2.2. La Transitividad entre $\mathsf{C}_n(f)$ y $\mathsf{C}(f)$

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{A} \in \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X))$, existen $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_s \in \mathsf{C}(X)$ tales que $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$. Es claro que la unión de los elementos de $\mathcal{A}$, es decir el conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s$, es un elemento de $\mathsf{C}_n(X)$. Notemos que

$$\begin{aligned}&\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f))(\mathcal{A}) = \mathsf{C}(f)(\mathcal{A}) = \mathsf{C}(f)(\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}) = \\ &\quad = \{\mathsf{C}(f)(A_1), \mathsf{C}(f)(A_2), \ldots, \mathsf{C}(f)(A_s)\} = \{f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_s)\}.\end{aligned}$$

En [20, Lema 1.48], se prueba que si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$, entonces

$$H(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) < H^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

con H^2 la métrica de Hausdorff para 2^{2^X} generada por la métrica de Hausdorff H para 2^X. De aquí, se tiene que la función que a cada $\mathcal{A} \in \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X))$ le asocia la unión de sus elementos es una función continua. Esto es lo que se enuncia a continuación.

Lema 2.8. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$, $f\colon X \to X$ una función continua. Sea*

$$\rho_n\colon \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)) \to \mathsf{C}_n(X),$$

la función definida, para $\mathcal{A} \in \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X))$, por $\rho_n(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Entonces ρ_n está bien definida y es continua.

Del lema anterior se sigue el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces el sistema dinámico $(\mathsf{C}_n(X), \mathsf{C}_n(f))$ es semiconjugado del sistema $(\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)), \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f)))$.*

Demostración. Consideremos la función continua $\rho_n\colon \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)) \to \mathsf{C}_n(X)$ del Lema 2.8. Esta función en suprayectiva, pues si $A \in \mathsf{C}_n(X)$, entonces A se puede escribir en su descomposición en componentes conexas como

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

con $1 \leq k \leq n$. Sea $\mathcal{A} \in \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X))$ definido como $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$. Es claro que $\rho_n(\mathcal{A}) = A$. Resta ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)) \arrow[r, "\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f))"] \arrow[d, "\rho_n"'] & \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X)) \arrow[d, "\rho_n"] \\
\mathsf{C}_n(X) \arrow[r, "\mathsf{C}_n(f)"'] & \mathsf{C}_n(X)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Sea $\mathcal{A} \in \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(X))$ como en el párrafo anterior. Entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\rho_n \circ \mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f))\Big)(\mathcal{A}) &= \rho_n(\{\mathsf{C}(f)(A_1), \ldots, \mathsf{C}(f)(A_k)\}) = \\
&= \rho_n(\{f(A_1), \ldots, f(A_k)\}) = \bigcup_{i=1}^{k} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \\
&= \mathsf{C}_n(f)\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathsf{C}_n(f)(\rho_n(\{A_1, \ldots, A_k\})) = (\mathsf{C}_n(f) \circ \rho_n)(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.10. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\mathsf{C}(f)$ es débilmente mezcladora, entonces $\mathsf{C}_n(f)$ es débilmente mezcladora.*

Demostración. Supongamos que $\mathsf{C}(f)\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(X)$ es débilmente mezcladora. Luego, por [14, Teorema 4.5], se tiene que $\mathsf{F}_n(\mathsf{C}(f))$ es débilmente mezcladora. Por el Teorema 2.9 y el Lema 1.25, $\mathsf{C}_n(f)$ es débilmente mezcladora.

□

En los Teoremas 1.26 y 1.27 se muestra que la transitividad y el mezclado débil son equivalentes en las funciones inducidas a los hiperespacios 2^X y $\mathsf{F}_n(X)$, para $n \in \mathbb{N}$. Por lo anterior, pudiera ser que la hipótesis de ser $\mathsf{C}(f)$ débilmente mezcladora esté de más. Es decir, se tiene la siguiente conjetura.

Conjetura 2.11. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\mathsf{C}(f)$ es transitiva, entonces $\mathsf{C}(f)$ es débilmente mezcladora.*

Si la Conjetura 2.11 fuera cierta, tendríamos que la transitividad de la función inducida $\mathsf{C}(f)$ implicaría la transitividad de las funciones inducidas $\mathsf{C}_n(f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como hemos visto, la presencia de arcos libres en los continuos X impide la existencia de una función $f\colon X \to X$ tal que $\mathsf{C}(f)$ sea transitiva. Quizá, no sea suficiente con que el continuo X no contenga arcos libres para que exista una función $f\colon X \to X$ tal que $\mathsf{C}(f)$ sea transitiva. En el siguiente capítulo se presenta una nueva propiedad topológica y se prueba que en los continuos que tienen esta propiedad, $\mathsf{C}_n(f)$ transitiva, para alguna $n \in \mathbb{N}$, implica $\mathsf{C}(f)$ transitiva.

Capítulo 3

Densidad de continuos de convergencia

3.1. Transitividad en $\mathsf{C}_n(f)$

Para definir la propiedad que se menciona al final del capítulo anterior necesitamos enunciar una definición ya conocida en la teoría de continuos.

Definición 3.1. *Sean X un continuo y $C \subset X$ un subcontinuo no degenerado de X. Decimos que C es un* ***continuo de convergencia*** *en X si existe una sucesión de subcontinuos $\{C_n\}_{n\geq 1}$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C, \text{ con } C \cap C_n = \emptyset, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos elegir los subcontinuos C_n ajenos dos a dos ([8, Lema 3.1, p. 103]). Notemos que por ejemplo un arco no posee continuos de convergencia, tampoco una gráfica finita. Se han estudiado los espacios en los cuales existen continuos de convergencia (ver por ejemplo [21, Teorema 5.12]). La siguiente propiedad es más fuerte, pues se pide que el espacio tenga no sólo uno, sino "muchos" continuos de convergencia. Hasta donde se sabe, la siguiente propiedad aparece por primera vez en el presente trabajo.

Definición 3.2. *Sea X un continuo. Diremos que X tiene la* ***propiedad DCC*** *si para todo $A \in \mathsf{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$, existe un continuo de convergencia $C \in \mathsf{C}(X)$ tal que $H(A, C) < \varepsilon$.*

Las siglas DCC son la abreviación de "Densidad de Continuos de Convergencia". Por definición, un continuo X tiene la propiedad DCC si y sólo si la familia

$$\mathcal{C}_X = \{C \in \mathsf{C}(X) \setminus \mathsf{F}_1(X) \colon C \text{ es un continuo de convergencia en } X\}$$

es denso en $\mathsf{C}(X)$. En la siguiente sección se muestran algunos ejemplos de continuos con la propiedad DCC. Mientras, tenemos el siguiente teorema que muestra la importancia de estudiar esta propiedad.

Teorema 3.3. *Sean X un continuo con la propiedad DCC y $f\colon X \to X$ una función continua. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva, entonces $\mathsf{C}(f)$ es transitiva.*

Demostración. El resultado es claro para $n = 1$, por lo que supongamos que $n \geq 2$. Como $\mathsf{C}_n(f)$ transitiva, existe $B \in \mathsf{C}_n(X)$ tal que

$$\omega(B, \mathsf{C}_n(f)) = \mathsf{C}_n(X).$$

Por el Teorema 2.1, B tiene exactamente n componentes conexas, digamos $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Probaremos que

$$\omega(B_i, \mathsf{C}(f)) = \mathsf{C}(X), \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Para ver esto, tomemos $A \in \mathsf{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Como X tiene la propiedad DCC, existe un continuo de convergencia $A' \in \mathsf{C}(X) \setminus \mathsf{F}_1(X)$ tal que $H(A', A) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por ser A' un continuo de convergencia, existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathsf{C}(X)$ tales que $H(A_i, A') < \frac{\varepsilon}{3}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. Usando la normalidad de X así como la propiedad 2) del Teorema 1.12, podemos probar que existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\mathrm{N}_X(A_i, \varepsilon') \cap \mathrm{N}_X(A_j, \varepsilon') = \emptyset$, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Definamos $D = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Entonces $D \in \mathsf{C}_n(X) \setminus \mathsf{C}_{n-1}(X)$. Como $D \in \mathsf{C}_n(X) = \omega(B, \mathsf{C}_n(f))$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(\mathsf{C}_n(f)^m(B), D) = H(f^m(B), D) < \frac{\varepsilon'}{3}.$$

Como los elementos de la familia

$$\left\{\mathrm{N}_X\left(A_1, \frac{\varepsilon'}{3}\right), \mathrm{N}_X\left(A_2, \frac{\varepsilon'}{3}\right), \ldots, \mathrm{N}_X\left(A_n, \frac{\varepsilon'}{3}\right)\right\}$$

son ajenos dos a dos y $f^m(B) \in \mathsf{C}_n(X)$ es tal que $H(f^m(B), D) < \frac{\varepsilon'}{3}$, por el Lema 1.13 podemos suponer, sin perder generalidad, que las n componentes conexas $f^m(B_1), f^m(B_2), \ldots, f^m(B_n)$ de $f^m(B)$ son tales que $H(f^m(B_i), A_i) < \frac{\varepsilon'}{3} < \frac{\varepsilon}{3}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Notemos que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene

$$H(f^m(B_i), A) \leq H(f^m(B_i), A_i) + H(A_i, A') + H(A', A) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $H(\mathsf{C}(f)^m(B_i), A) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $A \in \omega(B_i, \mathsf{C}(f))$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como A es un elemento arbitrario de $\mathsf{C}(X)$, tenemos que $\omega(B_i, \mathsf{C}(f)) = \mathsf{C}(X)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En particular, $\mathsf{C}(f)$ es transitiva. $\square$

3.2. Continuos con la propiedad DCC

En esta sección se muestra una serie de ejemplos de continuos con la propiedad DCC. Comencemos con ejemplos de continuos que tienen esta propiedad y que son de dimensión finita. Más adelante se presenta un ejemplo de un continuo de dimensión infinita, el Cubo de Hilbert, que también tiene esta propiedad.

A los continuos que son homeomorfos al producto cartesiano

$$I_n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n\text{-veces}} \subset \mathbb{R}^n$$

con $n \in \mathbb{N}$, se les conoce como **n-celdas**. En el caso de los arcos (1-celdas) la propiedad DCC no se satisface. Sin embargo, para las n-celdas, con $n > 1$, se prueba que la propiedad DCC se satisface. Básicamente, necesitamos aproximarnos a los subcontinuos de las n-celadas mediante árboles. Basta enunciar las proposiciones para los espacios I_n, con $n > 1$.

Lema 3.4. *Sean $X = I_n$, para alguna $n > 1$, $K \in \mathsf{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $K' \in \mathsf{C}(X)$ tal que $K' \subset \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ y $H(K, K') < \varepsilon$.*

Demostración. Sean $0 < \delta < \varepsilon$ y

$$D = \underbrace{J \times J \times \cdots \times J}_{n\text{-veces}},$$

con $J = \left[\frac{\delta}{\sqrt{n}}, 1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right]$. Aquí d representa a la métrica euclidiana en X y p al centro de X, esto es, $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in X$. Sea $\varphi \colon X \to D$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \in D, \\ \hat{x}, & si \quad x \notin D, \end{cases}$$

donde $\hat{x}$ es el punto de intersección entre el segmento de recta $\overline{px}$ y $\mathrm{fr}_X(D)$. Nótese que φ es una retracción. Observemos lo siguiente, si $z \in X \setminus D$, entonces

$$d(z, \hat{z}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - \hat{z}_i)^2} \leq \sqrt{n\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^2} = \delta < \varepsilon.$$

Así, para toda $x \in X$, $d(x, \varphi(x)) < \varepsilon$. Sea $K' = \varphi(K) \in \mathsf{C}(X)$.

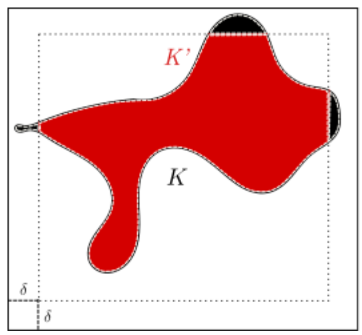

Figura 3.1: Retracción de K en K'.

Si $x \in K' \cap K$, entonces $x \in \mathrm{N}_X(K, \varepsilon)$. Ahora, si $x \in K' \setminus K$, entonces $\varphi(y) = x$, para algún $y \in K$. Como $d(y, x) = d(y, \varphi(y)) < \varepsilon$, entonces $x \in \mathrm{N}_X(K, \varepsilon)$. Es decir,

$$K' \subset \mathrm{N}_X(K, \varepsilon).$$

Sea $x \in K$. Si $x \in D$, entonces $x = \varphi(x) \in \varphi(K) = K' \subset \mathrm{N}_X(K', \varepsilon)$.

Si $x \notin D$, entonces $d(x, \varphi(x)) < \varepsilon$. En cualquier caso,

$$K \subset \mathrm{N}_X(K', \varepsilon).$$

Por lo tanto, $H(K, K') < \varepsilon$. $\square$

En el siguiente lema se prueba que toda gráfica finita y conexa se puede aproximar con árboles.

Lema 3.5. *Sean $X = I_n$, para alguna $n > 1$, $K \in \mathsf{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Existe un árbol $T \in \mathsf{C}(X)$ tal que $H(K, T) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como K es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}_X(x_i, \varepsilon),$$

siendo esta última unión un conjunto conexo. Para cada par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ denotaremos por $\overline{x_i x_j}$ al segmento de recta comprendido entre los puntos x_i y x_j. Sea $T \in \mathsf{C}(X)$ un árbol de la forma

$$T = \bigcup_{i,j \in \Omega} \overline{x_i x_j},$$

con $\Omega \subset \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $x_1, x_2, \ldots, x_m \in T$.

Es decir, T es cualquier árbol que tenga como conjunto de vértices a $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ y cuyas aristas sean segmentos de recta comprendidos entre estos vértices.

Si $x \in K$, entonces $x \in \mathrm{B}_X(x_i, \varepsilon)$, para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así, $x \in \mathrm{N}_X(T, \varepsilon)$. Así, $K \subset \mathrm{N}_X(T, \varepsilon)$. Por otra parte, es claro que $T \subset \mathrm{N}(K, \varepsilon)$. Por lo tanto, $H(K, T) < \varepsilon$.

$\square$

Probaremos ahora que las celdas de dimensión mayor o igual a dos tienen la propiedad DCC. Antes necesitamos definir lo que se conoce como cadenas circulares [19, Definición 2.5.1].

Definición 3.6. *Sea X un espacio métrico y compacto. Una **cadena circular** $\mathcal{U}$ es una sucesión finita $U_0, U_1, \ldots, U_n$ de subconjuntos de X tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ o $i, j \in \{0, n\}$.*

Teorema 3.7. *Sea $X = I_n$, para alguna $n > 1$. Entonces X tiene la propiedad DCC.*

Demostración. Sean $K \in \mathsf{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Lema 3.4 existe $K' \in \mathsf{C}(X)$ tal que $K' \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ y $H(K', K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Del Lema 3.5 existe un árbol $T \in \mathsf{C}(X)$ tal que $H(K', T) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, T es un árbol tal que $T \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ y

$$H(K, T) \leq H(K, K') + H(K', T) < \varepsilon.$$

Afirmación. T es un continuo de convergencia.

Sea $\delta > 0$. Existe $0 < \gamma < \frac{\delta}{2}$ tal que $\mathrm{N}_{\mathbb{R}^n}(T, \gamma) \subset X$. Como T es una gráfica finita sin ciclos, podemos suponer que si $\mathcal{U} = \{\mathrm{B}_X(x_i, \gamma)\}_{i=1}^{k}$ es una cubierta abierta finita de T, con $x_1, x_2, \ldots, x_k \in T$, entonces $\mathcal{U}$ no contiene cadenas circulares.

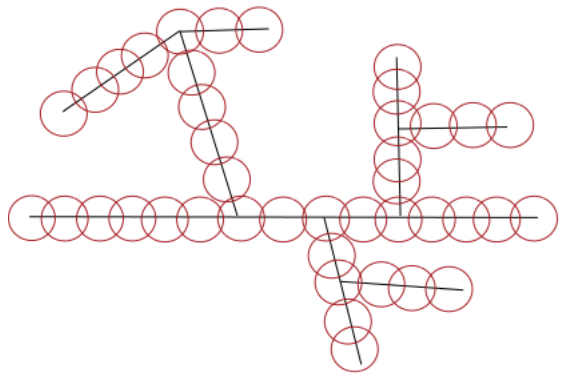

Figura 3.2: Cubierta abierta $\mathcal{U}$.

Sea $D = \mathrm{fr}_X(\bigcup \mathcal{U})$. Es claro que $D \in \mathsf{C}(X)$. Además, $D \cap T = \emptyset$. Por otra parte, si $x \in D$, entonces $d(x, x_j) = \gamma < \delta$, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así, $D \subset \mathrm{N}_X(T, \delta)$. Luego, si $x \in T$, entonces $x \in \mathrm{B}_X(x_i, \gamma)$, para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Sea $z \in \mathrm{fr}_X(\mathrm{B}_X(x_i, \gamma)) \cap D$, entonces $d(z, x) \leq 2\gamma < \delta$. Así, $T \subset \mathrm{N}_X(D, \delta)$. Por lo tanto $H(T, D) < \delta$.

Esto último prueba que T es continuo de convergencia y por lo tanto, X tiene la propiedad DCC.

$\square$

El siguiente resultado podría ser enunciado como corolario del teorema anterior; sin embargo, debido a la importancia del espacio en cuestión, se enuncia como teorema.

Teorema 3.8. *Sea $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ el cubo de Hilbert. Entonces X tiene la propiedad DCC.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $K \in \mathsf{C}(X)$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i>N} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sea $\varphi \colon X \to I_N$ la proyección sobre las primeras N entradas de X. Como φ es continua entonces $K' = \varphi(K)$ es un subcontinuo de I_N. Por el

Teorema 3.7, existe un árbol $T' \in \mathsf{C}(I_N)$ tal que $H_{I_N}(K', T') < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $T \in \mathsf{C}(X)$ definido como

$$T = T' \times \prod_{n>N} J_n,$$

con $J_n = [0, 1]$, para toda $n > N$.

Afirmación 1. $H_X(K, T) < \varepsilon$.

Sea $x \in T$. Entonces x es de la forma $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ donde $(x_i)_{i=0}^{N} \in T'$ y $(x_i)_{i>N} \in \prod_{n>N} J_n$. Por lo anterior, existe $y \in K$ tal que

$$d_{I_N}((x_i)_{i=0}^{N}, \varphi(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así,

$$d_X(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\, x_i - y_i \,|}{2^i} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{|\, x_i - y_i \,|}{2^i} + \sum_{i>N} \frac{|\, x_i - y_i \,|}{2^i} <$$
$$< d_{I_N}((x_i)_{i=0}^{N}, \varphi(y)) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Con esto último tenemos que $T \subset \mathrm{N}_X(K, \varepsilon)$. Análogamente se tiene que $K \subset \mathrm{N}_X(T, \varepsilon)$.

Afirmación 2. T es un continuo de convergencia en X.

Sea $\delta > 0$. Como T' es un continuo de convergencia en I_N existe $D' \in \mathsf{C}(I_N)$ tal que $H_{I_N}(D', T') < \delta$ y $D' \cap T' = \emptyset$. Sea

$$D = D' \times \prod_{n>N} J_n.$$

Entonces, si $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in T$, existe $(y)_{i=1}^{N} \in D'$ tal que

$$d_{I_N}((x_i)_{i=1}^{N}, (y_i)_{i=1}^{N}) < \delta.$$

Sea

$$y = (y_i)_{i=1}^{N} \times (x_i)_{i>N}.$$

Es claro que $y \in D$. Además,

$$d_X(x, y) = d_{I_N}((x_i)_{i=1}^{N}, (y_i)_{i=1}^{N}) < \delta.$$

Es decir, $T \subset \mathrm{N}_X(D, \delta)$. La prueba para la contención $D \subset \mathrm{N}_X(T, \delta)$ es análoga. Por lo tanto, $H_X(T, D) < \delta$. Finalmente, como $T' \cap D' = \emptyset$, entonces $T \cap D = \emptyset$.

$\square$

De este resultado y del Teorema 3.3 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.9. *Sean $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ el cubo de Hilbert, $f \colon X \to X$ una función continua y $n \geq 2$ un número natural. Si $\mathsf{C}_n(f)$ es transitiva, entonces $\mathsf{C}(f)$ es transitiva.*

Podría parecer que un continuo con la propiedad DCC debería ser un continuo de dimensión mayor que 1. En la siguiente sección se ve que esto no es así, pues el continuo que se define es de dimensión 1 y tiene la propiedad DCC.

3.3. La Carpeta de Sierpinski

La Carperta de Sierpinski es un continuo que tiene varias propiedades. Una muy importante es que cualquier continuo de dimensión 1 se puede encajar de manera inyectiva dentro de ella [17]. Otras propiedades que no se estudian en este trabajo son las referidas a los fractales. En cierta forma, en la construcción que veremos a continuación se muestra de manera superficial la idea de fractal.

Consideremos la 2-celda $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ como nuestro primer conjunto. Después, definimos $S_1 = S_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, con $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ el interior de $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se define

$$S_n = S_{n-1} \setminus \bigcup_{i,j \equiv 1 \pmod 3} \left(\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n} \right) \times \left(\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n} \right).$$

Notemos que estos conjuntos forman una sucesión decreciente de subcontinuos

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots .$$

Definición 3.10. *La Carpeta de Sierpinski se define como el conjunto*

$$S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Cada S_n es un continuo y por lo tanto S es un continuo. Este conjunto está compuesto por varias copias homeomorfas de él. Podemos definir a estos conjuntos de la siguiente manera.

Sean, $S_{11} = [0, \frac{1}{3}] \times [0, \frac{1}{3}] \cap S$, $S_{12} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [0, \frac{1}{3}] \cap S \ldots S_{18} = [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \cap S$. Cada uno de estos S_{1i} es una copia homeomorfa de S a escala 1 a 3.

Si pensamos a cada uno de los S_{1i} como el conjunto S podemos repetir el mismo proceso y se construyen las copias homeomorfas S_{2i}, con $1 \leq i \leq 8^2$, que son copias homeomorfas de S a escala 1 a 3^2. En general, podemos definir copias homeomorfas de S a escala 1 a 3^n, S_{ni}, con $1 \leq i \leq 8^n$ y $n \in \mathbb{N}$.

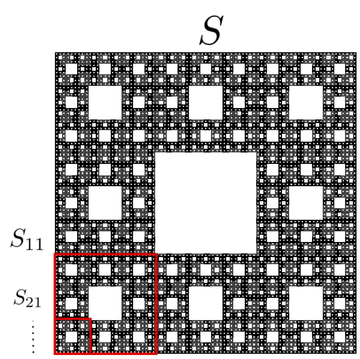

Figura 3.3: Los primeros conjuntos S_{n1}

La forma en la que se construye la Carpeta de Sierpinski se asemeja en mucho a la del conjunto de Cantor. En el conjunto de Cantor existe una infinidad de puntos extremos, es decir, puntos x tales que para algún valor $\delta > 0$, $(x, x+\delta) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ (o bien, $(x-\delta, x) \cap \mathcal{C} = \emptyset$). En el caso de la Carpeta de Sierpinski tenemos algo similar, solo que aquí podríamos decir que existen *segmentos de recta extremos*.

La idea de construir un continuo de convergencia consiste en evitar estos *segmentos de recta extremos*, pues de esta manera es posible rodear dichos segmentos y construir continuos cercanos y ajenos. Esta idea se aclara más en las siguientes párrafos. Los continuos de convergencia que se construyen son árboles. Antes, construiremos unas gráficas conexas.

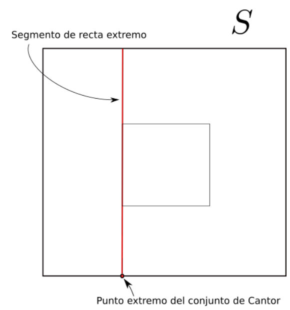

Figura 3.4: Segmentos de recta extremos

Dada $\varepsilon > 0$, para cada uno de los conjuntos S_{ni} que se definieron anteriormente, definimos los subconjuntos M_{ni}^{ε} de la siguiente forma. Comencemos definiendo al subconjunto $M_0^{\varepsilon} \subset S$. Sea

$$z \in \mathcal{C} \setminus \mathrm{Ext}(\mathcal{C}), \tag{3.3.1}$$

tal que $d(z, 0) < \varepsilon$. Entonces, los segmentos de recta

$$\{z\} \times [0,1], [0,1] \times \{z\} \subset S.$$

Más aún. Se tiene la siguiente observación.

Observación 3.11. *Si $\omega \in \mathcal{C}$ y $0 \leq a < b \leq 1$, entonces $\{\omega\} \times [a,b] \subset S$*

Definimos al subcontinuo $M_0^{\varepsilon} \in \mathsf{C}(S)$ como

$$M_0^{\varepsilon} = \{z\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{z\}.$$

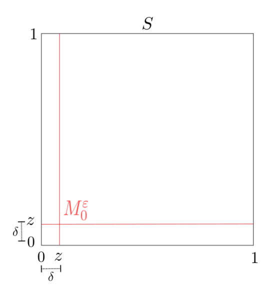

Figura 3.5: Conjunto M_0^{ε}

Así como cada S_{ni} es una copia homeomorfa de S, se tienen también conjuntos $M^\varepsilon_{ni} \subset S_{ni}$, que son copias homeomorfas de M^ε_0.

Observación 3.12. *Sean $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, 8^n\}$, si $|S_{ni} \cap S_{nj}| > 1$, entonces $M^\varepsilon_{ni} \cup M^\varepsilon_{nj}$ es arcoconexo.*

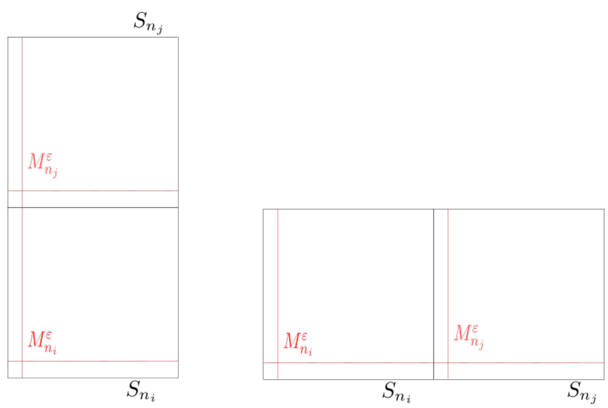

Figura 3.6: Formas en que se conectan M^ε_{ni} y M^ε_{nj}

En palabras más coloquiales, $M^\varepsilon_{n_i}$ y $M^\varepsilon_{n_j}$ se conectan siempre que S_{n_i} y S_{n_j} se intersecten en más de un punto.

Es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \textit{diám}(S_{ni}) = 0.$$

Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\textit{diám}(S_{Ni}) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $i \in \{1, 2, \ldots, 8^N\}$. Sea $K \in \mathsf{C}(S)$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$\mathcal{N}'_K = \{i \in \{1, 2, \ldots, 8^N\} \colon S_{Ni} \cap K \neq \emptyset\}.$$

Definimos

$$\mathcal{N}''_K = \{r \in \{1, 2, \ldots, 8^N\} \colon \text{ existen } i, j \in \mathcal{N}'_K \text{ con } \\ |S_{Ni} \cap S_{Nj}| = 1 \text{ y } |S_{Ni} \cap S_{Nr}|, |S_{Nj} \cap S_{Nr}| > 1\}.$$

Sea $\mathcal{N}_K = \mathcal{N}'_K \cup \mathcal{N}''_K$ y sea

$$M^\varepsilon_K = \bigcup_{i \in \mathcal{N}_k} M_{Ni}$$

Sobre este conjunto se tienen las siguientes propiedades.

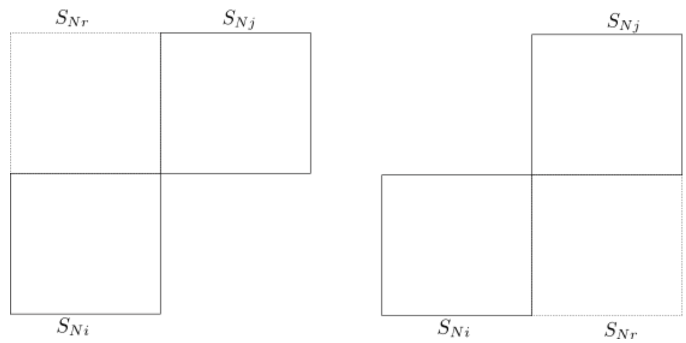

Figura 3.7: Los elementos r del conjunto $\mathcal{N}''_K$

Lema 3.13. *El conjunto M^ε_K es un subcontinuo de S*

Demostración. Por la forma en que se definió $\mathcal{N}''_K$ y por la Observación 3.12 se tiene que M^ε_K es arcoconexa.

□

Lema 3.14. $H(K, M^\varepsilon_K) < \varepsilon$.

Demostración. Sea $x \in K$. Existe $i \in \{1, 2, \ldots, 8^N\}$ tal que $x \in S_{Ni}$. Para cualquier $y \in M_{Ni}$ tenemos que

$$d(x, y) < \text{diám}(S_{Ni}) < \varepsilon.$$

Es decir, $K \subset \mathrm{N}_S(M^\varepsilon_K, \varepsilon)$.

Por otra parte, si $x \in M^\varepsilon_K$ se tienen dos casos.

Caso 1. $x \in M_{Ni}$, para alguna $i \in \mathcal{N}'_K$. En este caso es claro que si $y \in S_{Ni} \cap K$, entonces $d(x, y) < \varepsilon$.

Caso 2. $x \in M_{Nr}$, para alguna $r \in N''_K$. Entonces, existen $i, j \in N'_K$ tales que $|S_{Ni} \cap S_{Nj}| = 1$ y $|S_{Ni} \cap S_{Nr}|, |S_{Nj} \cap S_{Nr}| > 1$. Sea $y \in S_{Ni}$, se tiene que

$$d(x, y) < \text{diám}(S_{Nr} \cup S_{Ni}) < \text{diám}(S_{Nr}) + \text{diám}(S_{Ni}) < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Así, $M^\varepsilon_K \subset \mathrm{N}_S(K, \varepsilon)$. Es decir, $H(K, M^\varepsilon_K) < \varepsilon$.

□

Dados $K \in \mathsf{C}(S)$ y $\varepsilon > 0$, hemos construido una gráfica finita M_K^ε que está a distancia menor que ε de K en $\mathsf{C}(S)$. De esta gráfica finita podemos sustraer un árbol, el cual se aproxima más a nuestro continuo de convergencia.

Lema 3.15. *Sean $\varepsilon > 0$ y $K \in \mathsf{C}(S)$. Existe un árbol $A_K^\varepsilon \subset M_K^\varepsilon$ tal que $H(A_K^\varepsilon, K) < \varepsilon$*

Demostración. La prueba de este lema consiste en un argumento inductivo sobre el número de ciclos simples (ciclos que no contienen otros ciclos) que tiene la gráfica finita M_K^ε. Podemos suponer entonces que la gráfica M_K^ε tiene un solo ciclo, digamos C. Sean $p, q \in C$ tales que:

1. $(p, q) \subset M_{Ni}$, para algún i,
2. $(p, q) \cap \mathrm{Br}(M_K^\varepsilon) = \emptyset$, es decir, no existen puntos de ramificación en el interior del segmento de recta $[p, q]$.
3. Si $p = (k, l)$ y $q = (r, l)$, con $k < r$, entonces $k, r \in \mathcal{C} \setminus \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$ (aquí se está pensando a M_{Ni} como M_0^ε).

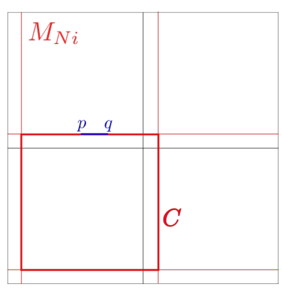

Figura 3.8: El segmento de recta $[p, q]$

Por argumentos similares a los del Lema 3.14, si $A_K^\varepsilon = M_K^\varepsilon \setminus (p, q)$ se tiene que $H(K, A_K^\varepsilon) < \varepsilon$.

□

Ahora bien, el árbol A_M^ε puede no ser un continuo de convergencia. Para construir un continuo *muy cercano* a A_M^ε bastaría con encontrar una curva cerrada que lo *rodee*; sin embargo, encontrar dicha curva no es posible si nuestro árbol intersecta la frontera de la 2-cerda, $[0, 1] \times [0, 1]$. Definiremos a continuación el que será nuestro continuo de convergencia.

Lema 3.16. *Sean $\varepsilon > 0$ y $K \in \mathsf{C}(S)$. Existe un continuo $T_K^\varepsilon \subset A_K^\varepsilon$ tal que T_K^ε no intersecta a la frontera de S_N y $H(T_K^\varepsilon, A_K^\varepsilon) < \varepsilon$*

Demostración. El subcontinuo A_K^ε está compuesto por una unión finita de los subcontinuos de M_{N_i}. Así, si A_K^ε intersecta a la frontera de S_N entonces alguno de estos M_{N_i} intersecta a dicha frontera. Como estos subcontinuos M_{N_i} son una copia homeomorfa de M^ε basta con analizar el caso en que un subcontinuo de M^ε intersecte a la frontera de $[0,1] \times [0,1]$.

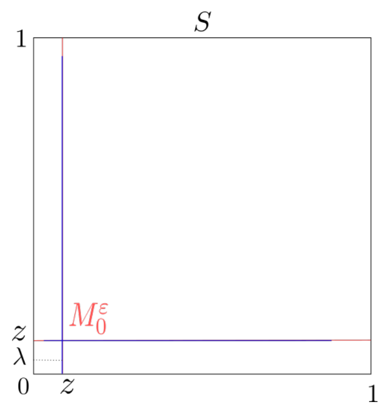

Figura 3.9: Caso en que M_0^ε intersecta la frontera de $[0,1] \times [0,1]$.

Sea L cualquier subcontinuo de M^ε. De los cuatro casos que tenemos consideraremos únicamente uno, los restantes son análogos. Supongamos que esta intersección se da únicamente en $(z, 0) \in L \cap [0,1] \times [0,1]$.

Existe $0 < \lambda < z$ tal que $\lambda \in \mathcal{C} \setminus \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$. Es claro que $L \setminus \{z\} \times [0, \lambda) \in \mathsf{C}(S)$ y no intersecta a la frontera de $[0,1] \times [0,1]$. También es claro que $H(T_K^\varepsilon, A_K^\varepsilon) < \varepsilon$. □

Teorema 3.17. *El continuo T_K^ε del Lema 3.16 es un continuo de convergencia.*

Demostración. El continuo T_K^ε se puede escribir de la siguiente forma

$$T_K^\varepsilon = \bigcup_{t=1}^{m} L_t,$$

siendo cada uno de estos L_t un segmento de recta de la forma $\{z\} \times [b, c]$, o bien $[b, c] \times \{z\}$, para cada $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Para ver que T_K^ε es un continuo de convergencia bastará con probar que cada uno de los L_t lo es, mostrando que existe una curva cerrada simple cercana a L_t.

Sea $\delta > 0$. Supongamos que $L_t = \{z\} \times [b, c]$. En general, existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2^N\}$ tales que el extremo $(z, b) \in S_{Ni}$ y el extremo $(z, c) \in S_{Nj}$. Sin embargo, podemos suponer sin perdida de generalidad que $i = j$. Es decir, supongamos que $L_t \subset S_{Ni}$.

Caso 1. L_t no intersecta la frontera de S_{Ni}.

Existen $b' < b$ y $c' > c$ tales que $\{z\} \times [b', c']$ no intersecta a la frontera de S_{Ni},

$$|b - b'|, |c - c'| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

y además, $[p_i, q_i] \times \{b'\}, [p_i, q_i] \times \{c'\} \subset S_{Ni}$ por la Observación 3.11. De esta misma observación, tenemos que existen $z' < z < z''$ tales que

$$|z' - z|, |z'' - z| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

y $\{z'\} \times [r_i, s_i], \{z''\} \times [r_i, s_i] \subset S_{Ni}$. Por lo tanto, si

$$D = (\{z'\} \times [b', c']) \cup (\{z''\} \times [b', c']) \cup ([z', z''] \times \{b'\}) \cup ([z', z''] \times \{c'\}),$$

entonces $D \in C(S)$, $D \cap L_t = \emptyset$ y es claro que $H(D, L_t) < \delta$.

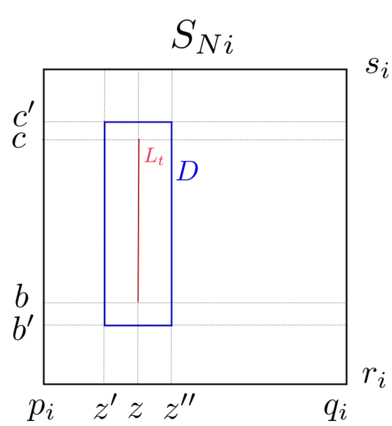

Figura 3.10: Construcción del conjunto D.

Caso 2. L_t intersecta a la frontera de S_{Ni}.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que L_t intersecta a la frontera de S_{Ni} únicamente en el punto (z,c) (para el punto (z,b) el argumento es similar). Como (z,c) no pertenece a la frontera de $[0,1]\times[0,1]$, existe $l\neq i$ tal que (a,c) pertenece a la frontera de S_{Nl}. Entonces, existe $c'>c$ tal que $[p_l,q_l]\times\{c'\}\subset S_{Nl}$. Eligiendo $z'<z<z''$ como en el caso 1, el resto de la prueba es similar.

$\square$

Finalmente, llegamos al teorema importante de este capítulo.

Teorema 3.18. *La carpeta de Sierpinski S tiene la propiedad DCC.*

Demostración. Sean $\varepsilon>0$ y $K\in\mathsf{C}(S)$. De los lemas 3.13 y 3.14 tenemos un continuo $M_K^{\frac{\varepsilon}{2}}$ tal que

$$H(K,M_K^{\frac{\varepsilon}{2}})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el Lema 3.15, existe un árbol $A_K^{\frac{\varepsilon}{2}}\subset M_K^{\frac{\varepsilon}{2}}$, tal que

$$H(A_K^{\frac{\varepsilon}{2}},K)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Del Lema 3.16, existe un árbol $T_K^{\frac{\varepsilon}{2}}\subset A_K^{\frac{\varepsilon}{2}}$ tal que

$$H(A_K^{\frac{\varepsilon}{2}},T_K^{\frac{\varepsilon}{2}})<\frac{\varepsilon}{2},$$

que por el Teorema 3.17, $T_K^{\frac{\varepsilon}{2}}$ es un continuo de convergencia. Además

$$H(T_K^{\frac{\varepsilon}{2}},K)\leq H(T_K^{\frac{\varepsilon}{2}},A_K^{\frac{\varepsilon}{2}})+H(A_K^{\frac{\varepsilon}{2}},K)<\varepsilon.$$

$\square$

Capítulo 4

Transitividad por cadenas

Una de las estrategias para comprender la dinámica de una función continua $f\colon X \to X$, definida en un espacio métrico y compacto X, consiste en estudiar las órbitas $\text{órb}(x, f)$ de los puntos $x \in X$. El uso de tecnologías para computar una órbita podría no ser del todo precisa, lo que podría generar un cierto margen de error. En otras palabras, lo que podríamos estar observando no sería una órbita, sino una seudo-órbita. Por lo anterior, estudiar las seudo-órbitas adquiere un particular interés en el estudio de los sistemas dinámicos y, por tanto, en la dinámica de hiperespacios.

4.1. El teorema principal

Antes de enunciar el teorema principal de este capítulo, recordaremos brevemente algunas definiciones e introduciremos un poco de notación.

Dado un conjunto X, denotaremos al producto finito

$$\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n-veces}$$

por $X^{(n)}$. Mientras que por $f^{(n)}$ denotaremos a la función

$$\underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n-veces}\colon X^{(n)} \to X^{(n)}.$$

Dada $\delta > 0$, una seudo-órbita es una secesión finita o infinita $\langle x_0, x_1, \ldots\rangle$ tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$, para toda $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si la δ-seudo-órbita es finita: $\langle x_0, x_1 \ldots x_n\rangle$ la llamaremos δ-cadena de longitud n (en este caso, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$).

Se dice que un subconjunto $\Lambda \subset X$ es internamente transitivo por cadenas si para todo par de puntos $x, y \in \Lambda$ y $\delta > 0$, existe una δ-cadena $\langle x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y\rangle \subset \Lambda$. En el caso particular en que $\Lambda = X$ se dice que f es transitiva por cadenas.

Si $x, y, z \in X$ y Γ_1, Γ_2 son dos δ-cadenas en X de la forma

$$\Gamma_1 = \langle x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y\rangle \text{ y } \Gamma_2 = \langle y = y_0, y_1, \ldots, y_m = z\rangle,$$

entonces $\Gamma_1 + \Gamma_2$ representará a la concatenación de Γ_1 y Γ_2 dada por

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \langle x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y = y_0, \ldots, y_m = z\rangle,$$

la cual es una δ-cadena cuya longitud es precisamente la suma de las longitudes de cada una de las dos δ-cadenas. Para las δ-cadenas de la forma $\Gamma = \langle x = x_0, x_1 \ldots, x_n = x\rangle$ y toda $k \in \mathbb{N}$, tendremos que

$$k\Gamma = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \cdots + \Gamma}_{k-veces}.$$

Definición 4.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que f es:*

1) ***débilmente mezcladora por cadenas*** *si $f^{(2)}\colon X^{(2)} \to X^{(2)}$ es transitiva por cadenas;*

2) ***totalmente transitiva por cadenas*** *si para toda $n \in \mathbb{N}$, la función $f^n\colon X \to X$ es transitiva por cadenas;*

3) ***exacta por cadenas*** *si para toda $\varepsilon > 0$ y para todo conjunto abierto no vacío $U \subset X$, existe $n = n(\varepsilon, U) \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: para toda $x \in X$, existen $u \in U$ y una ε-cadena de la forma,*

$$\langle u = a_0, a_1, \ldots, a_n = x\rangle.$$

Estas definiciones por cadenas corresponden a las versiones clásicas que aparecen en la Definición 1.23. Como se menciona en el Teorema 1.24, toda función exacta es débilmente mezcladora y toda función débilmente mezcladora es totalmente transitiva. En la versión con cadenas, veremos que estas tres propiedades resultan ser equivalentes (Teorema 4.5). En los siguientes ejemplos se muestra que para la versión sin cadenas la equivalencia entre estas propiedades no se satisfacen.

Ejemplo 4.2. *Sean S^1 la circunferencia de radio 1, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y*

$$T_\lambda \colon S^1 \to S^1,$$

dada por $T_\lambda(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2\pi\lambda)}$.

Como T_λ es una rotación de factor irracional, T_λ es transitiva ([9, Ejemplo 3.12]) y por lo tanto, T_λ^n también es transitiva, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, si U, V son dos arcos abiertos, ajenos y opuestos por el diámetro, entonces $T_\lambda^n(U) \cap T_\lambda^n(V) = \emptyset$. Si U, V se encuentran suficientemente alejados uno del otro, entonces $(T_\lambda \times T_\lambda)^n(U \times V) \cap (U \times U) = \emptyset$. Es decir, T_λ no es débilmente mezcladora.

Ejemplo 4.3. *Sean $I = [0, 1]$ y $T \colon I \to I$ la función tienda. Sea $X_\infty = \varprojlim\{T, I\} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}} \colon T(x_{i+1}) = T(x_1)$ para toda $i \in \mathbb{N}\}$ y sea $\sigma_T \colon X_\infty \to X_\infty$ dada por*

$$\sigma_T(x_1, x_2, \ldots) = (T(x_1), x_1, x_2, \ldots)$$

Como T es débilmente mezcladora ([22, Teorema 2.60]), entonces σ_T es débilmente mezcladora ([7, Teorema 7]). Sin embargo, σ_T es un homeomorfismo por lo que no puede ser una función exacta.

Las siguientes son otras propiedades definidas por cadenas.

Definición 4.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que f es:*

1) ***mezcladora por cadenas*** *si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $x, y \in X$, entonces existe una ε-cadena de x a y de longitud n.*

2) ***recurrente por cadenas*** *si para toda $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe una ϵ-cadena de x en x.*

A continuación se enuncian el Teorema Principal del presente capítulo, así como dos corolarios del mismo. En la sección 4.2 se da la prueba del Teorema Principal.

Teorema 4.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *$\mathsf{F}(f)$ es transitiva por cadenas,*

2) *2^f es transitiva por cadenas,*

3) $\mathsf{F}_n(f)$ *es transitiva por cadenas, para algún* $n \geq 2$*,*

4) $\mathsf{F}_n(f)$ *es transitiva por cadenas, para toda* $n \geq 1$*,*

5) f *es transitiva por cadenas y para todo par de conjuntos abiertos y no vacíos de* X*,* U *y* V*, se tiene que* $\mathrm{cl}_X(f(U)) \nsubseteq V$ *o* $\mathrm{cl}_X(f(V)) \nsubseteq U$*,*

6) $f^{(n)}$ *es transitiva por cadenas, para algún* $n \geq 2$*,*

7) $f^{(n)}$ *es transitiva por cadenas, para toda* $n \geq 1$*,*

8) f *es débilmente mezcladora por cadenas,*

9) f *es exacta por cadenas,*

10) *para toda* $z \in X$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe un entero positivo* $n_\varepsilon \geq 1$ *tal que para toda* $x \in X \setminus \{z\}$*, existe una* ε*-cadena de longitud* n_ε *de* z *a* x*.*

11) f *es totalmente transitiva por cadenas,*

12) f *es mezcladora por cadenas.*

De hecho, si cualquiera de las doce condiciones del teorema anterior se satisface, entonces f es transitiva por cadenas. El caso particular de la implicación 6) $\Rightarrow$ 7) es interesante, pues representa una versión por cadenas del Teorema de Furstenberg ([11, Proposición II.3]). De la equivalencia entre 7) y 8) se sigue el siguiente resultado.

Corolario 4.6. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Entonces,* f *es débilmente mezcladora por cadenas si y solo si* $f^{(n)}\colon X^{(n)} \to X^{(n)}$ *es transitiva por cadenas, para toda* $n \geq 1$*.*

Otro corolario interesante es el siguiente.

Corolario 4.7. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Si* f *es transitiva por cadenas y tiene un punto fijo, entonces todas las condiciones del Teorema 4.5 se cumplen.*

Demostración. Basta con mostrar $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas. Sean $z_0 \in X$ un punto fijo de f, $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$ dos elementos de $\mathsf{F}_2(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, para cada $a_i \in A$, con $i \in \{1, 2\}$, existe una ε-cadena $\langle a_i = t_0^i, t_1^i, \ldots, t_{m_i}^i = z_0 \rangle$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $m_1 \leq m_2$. Así, tenemos una ε-cadena, $\langle a_1 = \hat{t}_0^1, \hat{t}_1^1, \ldots, \hat{t}_{m_2}^1 = z_0 \rangle$, definida de la siguiente manera:

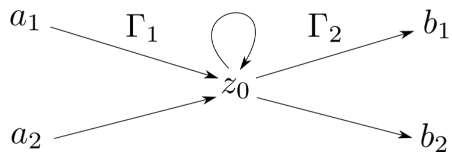

Figura 4.1: ε-cadenas que pasan por z_0.

$$\hat{t}_j^1 = \begin{cases} t_j^1 & \text{si } j \in \{0, 1, \ldots, m_1\}; \\ z_0 & \text{si } m_1 < j \leq m. \end{cases}$$

Por lo tanto, si para cada $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ definimos $A_j = \{\hat{t}_j^1, t_j^2\}$, entonces

$$\Gamma_1 = \langle A = A_0, A_1, \ldots, A_m = \{z_0\} \rangle$$

es una ε-cadena en $\mathsf{F}_2(X)$. Análogamente, se puede construir una ε-cadena en $\mathsf{F}_2(X)$,

$$\Gamma_2 = \langle \{z_0\} = B_0, B_1, \ldots, B_l = B \rangle.$$

Así, la sucesión $\Gamma_1 + \Gamma_2$ es una ε-cadena en $\mathsf{F}_2(X)$. Por lo tanto, $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas. $\square$

4.2. La prueba del teorema principal

Lema 4.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es transitiva por cadenas, entonces f es suprayectiva.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Como f es transitiva por cadenas, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, existe una $\frac{1}{k}$-cadena de x a y, digamos $\langle x = a_0^k, a_1^k, \ldots, a_{n_k-1}^k, a_{n_k}^k = y \rangle$. Como X es compacto, podemos suponer que $a_{n_k-1}^k \to a$, para alguna $a \in X$. Por la continuidad de f, $f(a) = y$. $\square$

En el Teorema 4.10 veremos que la transitividad por cadenas en las funciones inducidas a los hiperespacios implica la transitividad por cadenas de la función base f. Este resultado será consecuencia del siguiente lema.

Lema 4.9. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Sea $\Lambda(X) \subset 2^X$ invariante bajo 2^f tal que $\mathsf{F}_1(X) \subset \Lambda(X)$. Si $\Lambda(f)$ es transitiva por cadenas, entonces f es transitiva por cadenas.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $\mathsf{F}_1(X) \subset \Lambda(X)$, entonces $\{x\}, \{y\} \in \Lambda(X)$. Por hipótesis, existe una ε-cadena

$$\mathcal{L} = \langle \{x\} = A_0, A_1, \ldots A_k = \{y\} \rangle.$$

Ahora, como $H(2^f(\{x\}), A_1) < \varepsilon$, existe $a_1 \in A_1$ tal que $d(f(x), a_1) < \varepsilon$. Luego, como $H(2^f(A_1), A_2) < \varepsilon$, existe $a_2 \in A_2$ tal que $d(f(a_1), a_2) < \varepsilon$. Continuando de esta forma, tenemos que $H(2^f(A_{k-1}), \{y\}) < \varepsilon$, por lo que el elemento $a_{k-1} \in A$ elegido previamente cumple que $d(f(a_{k-1}), y) < \varepsilon$. Si definimos

$$L = \langle x = a_0, a_1, \ldots, a_k = y \rangle,$$

es claro que L es una ε-cadena de x a y. □

Teorema 4.10. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Si alguna de las funciones inducidas $2^f \colon 2^X \to 2^X$, $\mathsf{F}(f) \colon \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(X)$, $\mathsf{F}_n(f) \colon \mathsf{F}_n(X) \to \mathsf{F}_n(X)$, $\mathsf{C}(f) \colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(X)$ o $\mathsf{C}_n(f) \colon \mathsf{C}_n(X) \to \mathsf{C}_n(X)$ es transitiva por cadenas, entonces la función $f \colon X \to X$ es transitiva por cadenas.*

El recíproco del teorema anterior no es cierto en general, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.11. *Sean $X = \{a, b\}$ y $f \colon X \to X$ la función definida por $f(a) = b$ y $f(b) = a$. Es claro que f es transitiva por cadenas. Sin embargo, para $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$, no es posible dar una ε-cadena en 2^X, de $\{a, b\}$ a $\{a\}$.*

Para probar las equivalencias de 1) a 4) del Teorema 4.5 utilizaremos el siguiente lema.

Lema 4.12. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $Y \subset X$ un subconjunto denso e invariante bajo f. Entonces, $f_{|_Y} \colon Y \to Y$ es transitiva por cadenas si y sólo si $f \colon X \to X$ es transitiva por cadenas.*

Demostración. Supongamos $f_{|_Y} \colon Y \to Y$ es transitiva por cadenas. Por el Lema 4.8, $f_{|_Y}$ es suprayectiva. Como Y es denso en X (el cual es compacto), entonces $f \colon X \to X$ es suprayectiva. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que si $d(a, b) < \delta$, entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, para todo $a, b \in X$. Sea $y' \in f^{-1}(y)$. Como $\mathrm{cl}_X(Y) = X$, existen $z_0, z_1 \in Y$ tales que $d(z_0, f(x)) < \varepsilon$ y $d(z_1, y') < \delta$. Así, $d(f(z_1), y) < \varepsilon$. Por hipótesis, existe una ε-cadena en Y de la siguiente forma: $\langle z_0 = a_0, a_1, \ldots, a_k = z_1 \rangle$, con $k \in \mathbb{N}$. Luego, la sucesión

$$\langle x, z_0 = a_0, a_1, \ldots, a_k = z_1, y \rangle,$$

es una ε-cadena en X.

Ahora, supongamos que f es transitiva por cadenas. Sean $a, b \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que, si $d(s, t) < \delta$, entonces $d(f(s), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $s, t \in X$. Por hipótesis, existe una $\frac{\delta}{2}$-cadena en X de la forma, $\langle a = z_0, z_1, \ldots, z_k = b\rangle$, con $k \geq 1$. Como Y es denso en X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, existe $t_{i+1} \in \mathrm{B}_X(z_{i+1}, \frac{\delta}{2}) \cap Y$. Así,

$$d(f(t_i), t_{i+1}) \leq d(f(t_i), f(z_i)) + d(f(z_i), z_{i+1}) + d(z_{i+1}, t_{i+1}) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión finita $\langle a, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, b\rangle$ es una ε-cadena en Y. $\square$

Es claro que para cualquier $K \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathsf{F}(X)$ tal que $H(K, A) < \varepsilon$. De este hecho y del Lema 4.12 tenemos 1) $\Leftrightarrow$ 2). Por otra parte, dados $A, B \in \mathsf{F}(X)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A, B \in \mathsf{F}_n(X)$. Notemos que toda ε-cadena de A a B en $\mathsf{F}_n(X)$, es una ε-cadena en de A en B, en $\mathsf{F}(X)$. De esto último, se tiene 4) $\Rightarrow$ 1).

Probaremos a continuación que 2^f transitiva por cadenas implica $\mathsf{F}_2(f)$ transitiva por cadenas y, por lo tanto, tendremos 2) $\Rightarrow$ 3).

Teorema 4.13. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si 2^f es transitiva por cadenas, entonces $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas.*

Demostración. Sean $A = \{x_0, y_0\}$ y $B = \{x_1, y_1\}$ dos elementos de $\mathsf{F}_2(X)$, $z \in X$ cualquier elemento y $\varepsilon > 0$. Como 2^f es transitiva por cadenas, existen ε-cadenas de la forma

$$\Gamma_1 = \langle A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = \{z\}\rangle$$

y

$$\Gamma_2 = \langle \{z\} = B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m = B\rangle$$

en 2^X. Sea $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Como $H(f(A_i), A_{i+1}) < \varepsilon$, existen $x_i, y_i \in A_i$ tales que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ y } d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon.$$

Renombrando a los elementos de $B = \{x, y\}$ como $B = \{x_m, y_m\}$, tenemos elementos $x_{i-1}, y_{i-1} \in B_{i-1}$ tales que $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ y $d(f(y_{i-1}), y_i) < \varepsilon$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces, si $A_i^* = \{x_i, y_i\}$ y $B_j^* = \{x_j, y_j\}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ las sucesiones finitas

$$\Gamma_1^* = \langle A = A_0^*, A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^* = \{z\}\rangle$$

y

$$\Gamma_2^* = \langle \{z\} = B_0^*, B_1^*, B_2^*, \ldots, B_m^* = B \rangle$$

son ε-cadenas en $\mathsf{F}_2(X)$. Luego, $\Gamma_1^* + \Gamma_2^*$ es una ε-cadena en $\mathsf{F}_2(X)$, de A en B. □

Probaremos ahora que 3) $\Rightarrow$ 4) con lo que tendremos las equivalencias desde 1) hasta 4). Para ello, bastará con probar los siguientes lemas.

Lema 4.14. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $\mathsf{F}_n(f)$ es transitiva por cadenas, entonces $\mathsf{F}_{n+1}(f)$ es transitiva por cadenas.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathsf{F}_{n+1}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\} \text{ y } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$$

Sean $A' = A \setminus \{a_{n+1}\}$, $B' = B \setminus \{b_{n+1}\}$, $A'' = A' \setminus \{a_n\}$ y $B'' = B' \setminus \{b_n\}$. Como $\mathsf{F}_n(f)$ es transitiva por cadenas, existen ε-cadenas

$$\langle A' = A_0, A_1, \ldots, A_r = A'' \rangle$$

y

$$\langle B' = B_0, B_1, \ldots, B_t = B'' \rangle$$

de longitud r y t, respectivamente. Entonces,

$$\Gamma_1 = \langle A_0 \cup \{a_{n+1}\}, A_1 \cup \{f(a_{n+1})\}, \ldots, A_r \cup \{f^r(a_{n+1})\} \rangle,$$

es una ε-cadena de A a $A'' \cup \{f^r(a_{n+1})\}$. Como $\mathsf{F}_n(f)$ es suprayectiva, entonces f es suprayectiva. Sea $w \in f^{-t}(b_{n+1})$, entonces

$$\Gamma_2 = \langle B_0 \cup \{w\}, B_1 \cup \{f(w)\}, \ldots, B_t \cup \{f^t(w)\} \rangle,$$

es una ε-cadena de $B'' \cup \{w\}$ a B. Como $\mathsf{F}_n(f)$ es transitiva por cadenas, existe una ε-cadena Γ_3 de $A'' \cup \{f^r(a_{n+1})\}$ a $B'' \cup \{w\}$. Finalmente, $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_2$ es una ε-cadena de A a B, en $\mathsf{F}_{n+1}(X)$.

□

Lema 4.15. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $\mathsf{F}_n(f)$ es transitiva por cadenas, entonces $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathsf{F}_2(X)$. Como $A, B \in \mathsf{F}_n(X)$, existe una ε-cadena en $\mathsf{F}_2(X)$ inducida de una ε-cadena en $\mathsf{F}_n(X)$ como en el Teorema 4.13. □

Para ver la equivalencia de las afirmaciones anteriores con la afirmación 5) del Teorema 4.5, recordemos la definición de ser débilmente incompresible introducida por Sharkovsky en [25].

Definición 4.16. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Un subconjunto Λ de X se dice que es* ***débilmente incompresible*** *si para cualquier subconjunto propio, no vacío y cerrado M de Λ, se tiene que*

$$M \cap \mathrm{cl}_X(f(\Lambda \setminus M)) \neq \emptyset.$$

Es claro que un conjunto Λ es débilmente incompresible si todo subconjunto propio, abierto y no vacío U de Λ, $\mathrm{cl}_X(f(U)) \cap (\Lambda \setminus U) \neq \emptyset$. Un ejemplo de conjuntos débilmente incompresibles son los ω-conjuntos límite (ver [5, Capítulo IV, Lema 3]).

Probaremos ahora que 5) implica 3).

Teorema 4.17. *Sea (X, f) un sistema dinámico que satisface la siguiente propiedad: para todo par U, V de subconjuntos ajenos, abiertos y no vacíos de X, se tiene que*

$$\mathrm{cl}_X(f(U)) \nsubseteq V \text{ o } \mathrm{cl}_X(f(V)) \nsubseteq U.$$

Si f es transitiva por cadenas, entonces $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas.

Demostración. Por el Lema 1.33, es suficiente con probar que, si $\langle U, V\rangle$ es un abierto básico, propio y no vacío de $\mathsf{F}_2(X)$, entonces

$$\mathrm{cl}_{\mathsf{F}_2(X)}(\mathsf{F}_2(f)(\langle U, V\rangle)) \cap \mathsf{F}_2(X) \setminus \langle U, V\rangle \neq \emptyset.$$

Sea $\langle U, V\rangle$ un básico, propio y no vacío de $\mathsf{F}_2(X)$.

Supongamos primero que $U \cap V \neq \emptyset$. Como f es transitiva por cadenas, por el Lema 1.33,

$$\mathrm{cl}_X(f(U \cap V)) \cap X \setminus (U \cap V) \neq \emptyset.$$

Sea $x \in \mathrm{cl}_X(f(U \cap V)) \cap X \setminus U \cap V$, es claro que

$$\{x\} \in \mathrm{cl}_{\mathsf{F}_2(X)}(\mathsf{F}_2(f)(\langle U, V\rangle)) \cap \mathsf{F}_2(X) \setminus \langle U, V\rangle.$$

Supongamos ahora que $U \cap V = \emptyset$. Nótese que U, V son abiertos propios, no vacíos de X. Como f es transitiva por cadenas (y por Lema 1.33, débilmente incompresible), entonces

$$\mathrm{cl}_X(f(U)) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset \text{ y } \mathrm{cl}_X(f(V)) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset.$$

Sean $x \in \mathrm{cl}_X(f(U)) \cap X \setminus U$ y $y \in \mathrm{cl}_X(f(V)) \cap X \setminus V$. Es fácil ver que $\{x, y\} \in \mathrm{cl}_{\mathsf{F}_2(X)}(\mathsf{F}_2(f)\langle U, V\rangle)$. Si $x = y$, entonces $\{x\} \notin \langle U, V\rangle$ y por lo tanto,

$$\{x\} \in \mathrm{cl}_{\mathsf{F}_2(X)}(\mathsf{F}_2(f)(\langle U, V\rangle)) \cap (\mathsf{F}_2(X) \setminus \langle U, V\rangle).$$

Si $x \neq y$ y $\{x, y\} \in \langle U, V\rangle$, entonces $x \in V$ y $y \in U$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathrm{cl}_X(f(U)) \nsubseteq V$. Sea $z \in \mathrm{cl}_X(f(U)) \setminus V$, como $y \in \mathrm{cl}_X(f(V)) \setminus V$ tenemos que

$$\{z, y\} \in \mathrm{cl}_{\mathsf{F}_2(X)}(\mathsf{F}_2(\langle U, V\rangle)) \text{ y } \{z, y\} \notin \langle U, V\rangle.$$

Esto prueba que $\mathrm{cl}_{\mathsf{F}_2(X)}(\mathsf{F}_2(f)(\langle U, V\rangle)) \cap \mathsf{F}_2(X) \setminus \langle U, V\rangle \neq \emptyset$. □

Para probar 3) $\Rightarrow$ 5) supondremos que 5) no se satisface. Como $\mathsf{F}_2(f)$ transitiva por cadenas implica f transitiva por cadenas (Teorema 4.10) se tiene que existen conjuntos abiertos y no vacíos $U, V \subset X$ tales que

$$\mathrm{cl}_X(f(U)) \subseteq V \text{ y } \mathrm{cl}_X(f(V)) \subseteq U.$$

Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^n(U \cup V) \subset U \cup V$. De aquí, $\mathsf{F}_2^n(\langle U, V\rangle) \cap \langle U\rangle = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$, contradiciendo la hipótesis de que $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas.

Las equivalencias de 6) y 7) con los anteriores se deducen del siguiente Lema 1.35.

Teorema 4.18. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $f^{(n)} \colon X^{(n)} \to X^{(n)}$ *es transitiva por cadenas;*

b) $\mathsf{F}_n(f) \colon \mathsf{F}_n(X) \to \mathsf{F}_n(X)$ *es transitiva por cadenas.*

Demostración. Sea $h \colon X^{(n)} \to \mathsf{F}_n(X)$ definida de la siguiente manera: si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$, entonces

$$h((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Es fácil ver que h es continua y suprayectiva. Además, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$, entonces

$$\begin{aligned} h \circ f^{(n)}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) &= h((f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))) = \\ &= \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} = \\ &= \mathsf{F}_n(f)(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \\ &= \mathsf{F}_n(f)(h((x_1, x_2, \ldots, x_n))) = \mathsf{F}_n(f) \circ h((x_1, x_2, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

Así, por el Lema 1.35, tenemos que a) implica b).

Probemos ahora que b) implica a). Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^{(n)}$, $\varepsilon > 0$ y $z \in X$. Entonces $h((x_1, x_2, \ldots, x_n)), h((y_1, y_2, \ldots, y_n))$ y $\{z\} \in \mathsf{F}_n(X)$. Por hipótesis, existen ε-cadenas en $\mathsf{F}_n(X)$ de la siguiente forma:

$$\langle h((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = A_0, A_1, \ldots, A_{m_1} = \{z\}\rangle$$

y

$$\langle \{z\} = B_0, B_1, \ldots, B_{m_2} = h((y_1, y_2, \ldots, y_n))\rangle.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tienen ε-cadenas inducidas en X,

$$\langle x_i = a_0^i, a_1^i, \ldots, a_{m_1}^i = z\rangle \text{ y } \langle z = b_0^i, b_1^i, \ldots, b_{m_2}^i = y_i\rangle,$$

con $a_j^i \in A_j$ y $b_t^i \in B_t$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, m_1\}$ y $t \in \{0, 1, \ldots, m_2\}$. Así, la sucesión $\langle D_0, D_1, \ldots, D_{m_1}, D_{m_1+1}, \ldots, D_{m_1+m_2}\rangle$, definida por

$$D_i = \begin{cases} (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n) & \text{si } i \in \{0, 1, \ldots, m_1\}; \\ (b_{i-m_1}^1, b_{i-m_1}^2, \ldots, b_{i-m_1}^n) & \text{si } i \in \{m_1+1, m_1+2, \ldots, m_1+m_2\}, \end{cases}$$

es una ε-cadena en $X^{(n)}$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. □

Para las equivalencias con 8), 9) y 10) observemos primero que 8)⇒6)⇔7).

Probaremos ahora que 7)⇒10). Sean $z \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como X es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^k \mathrm{B}_X(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Por hipótesis, $f^{(k)} \colon X^{(k)} \to X^{(k)}$ es transitiva por cadenas. Como $(z, z, \ldots, z)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^{(k)}$, existe una $\frac{\varepsilon}{2}$-cadena

$$\Gamma = \langle (z, z, \ldots, z) = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_k^0), (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_k^1), \ldots \\ \ldots (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r) = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \rangle.$$

Sea $x \in X$, entonces $x \in \mathrm{B}_X(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, $d(f_j^{r-1}(z_j^{r-1}), x) < d(f_j^{r-1}(z_j^{r-1}), x_j) + d(x_j, x) < \varepsilon$. Por lo tanto, la sucesión $\langle z = z_j^0, z_j^1, \ldots, z_j^{r-1}, x \rangle$ es una ε-cadena de u a x de longitud k, satisfaciéndose con esto 10).

Veremos ahora que 10)$\Rightarrow$9). Sean $\varepsilon > 0$ y U un subconjunto abierto y no vacío de X. Sea $u \in U$. Por hipótesis, existe un entero positivo n_ε tal que para cada $x \in X \setminus \{u\}$, existe una ε-cadena de longitud n_ε de u a x.

Con el siguiente resultado probaremos 9)$\Rightarrow$8), con lo cual tendríamos la equivalencia desde 1) hasta 10).

Teorema 4.19. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es exacta por cadenas, entonces f es débilmente mezcladora por cadenas.*

Demostración. Supongamos que f es exacta por cadenas.

Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X^{(2)}$ y $\varepsilon > 0$. Sean $U_1 = \mathrm{B}_X(f(x_1), \varepsilon)$ y $U_2 = \mathrm{B}_X(f(x_2), \varepsilon)$. Por hipótesis, existen enteros positivos m_1 y m_2 tales que para cada $x \in X$, existen $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ y ε-cadenas

$$\langle u_1 = a_0, a_1, \ldots, a_{m_1} = x \rangle \text{ y } \langle u_2 = b_0, b_1, \ldots, b_{m_2} = x \rangle.$$

Luego, para $f(x_2)$, existe $z_1 \in U_1$ y una ε-cadena

$$\langle z_1 = c_0, c_1, \ldots, c_{m_1} = f(x_2) \rangle.$$

De manera análoga, para $f(x_1)$, existe $z_2 \in U_2$ y una ε-cadena

$$\langle z_1 = d_0, d_1, \ldots, d_{m_2} = f(x_1) \rangle.$$

También, para y_1, tenemos $z_2' \in U_2$ y una ε-cadena

$$\langle z_2' = s_0, s_1, \ldots s_{m_2} = y_1 \rangle.$$

Análogamente, para y_2, tenemos $z_1' \in U_1$ y una ε-cadena

$$\langle z_1' = t_0, t_1, \ldots t_{m_1} = y_2 \rangle.$$

Así, las sucesiones

$$\langle x_1, z_1 = c_0, c_1, \ldots, c_{m_1} = f(x_2), z_2' = s_0, s_1, \ldots, s_{m_2} = y_1 \rangle$$

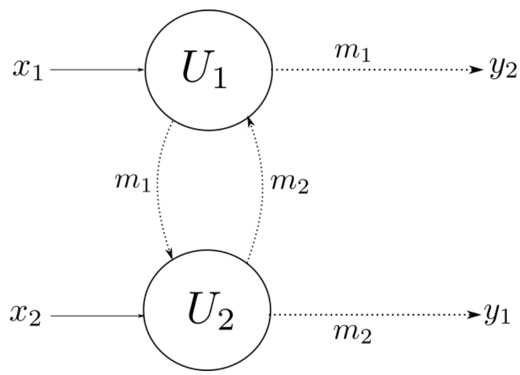

Figura 4.2: ε-cadenas en $X^{(2)}$

y

$$\langle x_2, z_2 = d_0, d_1, \ldots, d_{m_2} = f(x_1), z_1' = t_0, t_1, \ldots, t_{m_1} = y_2 \rangle$$

son ε-cadenas, ambas de longitud $m_1 + m_2 + 2$. Por lo tanto, la sucesión

$$\langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) = (c_0, d_0), \ldots, (s_{m_2}, t_{m_1}) = (y_1, y_2) \rangle$$

es una ε-cadena en $X^{(2)}$. $\square$

Resta probar las equivalencias con 11) y 12).

En [23, Corolario 12] Richeson y Wiseman probaron la equivalencia entre 11) y 12). Probaremos que 11) es equivalente a las condiciones anteriores con lo que se completará la prueba del teorema 4.5.

El siguiente resultado prueba que 7)$\Rightarrow$11).

Teorema 4.20. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es débilmente mezcladora por cadenas, entonces f es totalmente transitiva por cadenas.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezcladora por cadenas. Demostraremos que f^n es transitiva por cadenas. Sean $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.

Por el Lema 1.7, existe una sucesión $0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n = \varepsilon$ tal que, si $d(a, b) < \delta_i$ entonces $d(f(a), f(b)) < \frac{\delta_{i+1}}{2}$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Sea $\delta = \frac{\delta_1}{2}$, como f es débilmente mezcladora por cadenas y por el Corolario 4.6, existe una δ-cadena en $X^{(n)}$ de la siguiente forma:

$$\langle (x,y,\ldots,y)=(z_1^0,z_2^0,\ldots,z_n^0),(z_1^1,z_2^1,\ldots,z_n^1),\ldots$$
$$\ldots,(z_1^t,z_2^t,\ldots,z_n^t)=(y,y,\ldots,y)\rangle,$$

con $t \geq 1$. Por lo tanto, la sucesión

$$\langle x=z_1^0,z_1^1,z_1^2\ldots,z_1^t=y=z_2^0,z_2^1,\ldots,z_2^t=y=z_3^0,\ldots,z_n^t=y\rangle,$$

es una δ-cadena de longitud tn. Renombramos a la δ-cadena y la escribimos en la forma

$$x=a_0,a_1,\ldots,a_{tn}=y.$$

Como $d(f(x),a_1)<\delta<\delta_1$, entonces $d(f^2(x),f(a_1))<\frac{\delta_2}{2}$. También, se tiene que $d(f(a_1),a_2)<\frac{\delta_2}{2}$, por lo tanto, $d(f^2(x),a_2)<\frac{\delta_2}{2}$. Nuevamente, como $d(f^2(x),a_2)<\delta_2$, entonces $d(f^3(x),f(a_2))<\frac{\delta_3}{2}$. Pero $d(f(a_2),a_3)<\frac{\delta_3}{2}$, entonces $d(f^3(x),a_3)<\delta_3$.

Finalmente, siguiendo este proceso tenemos que

$$d(f^n(x),a_n)<\delta_n=\varepsilon.$$

De manera análoga se prueba que $d(f^n(a_{in}),a_{(i+1)n})<\varepsilon$, para toda $i\in\{0,1,\ldots,t-1\}$. Por lo tanto, la sucesión

$$\langle x=z_0,z_1=a_n,z_2=a_{2n},\ldots,z_t=a_{tn}=y\rangle,$$

es una ε-cadena en X, para la función f^n.

Es decir, f^n es transitiva por cadenas, para toda $n\in\mathbb{N}$.

□

Para terminar, probaremos que 11)⇒8).

Teorema 4.21. *Sea (X,f) un sistema dinámico. Si f es totalmente transitiva por cadenas, entonces f es débilmente mezcladora por cadenas.*

Demostración. Supongamos que f es totalmente transitiva por cadenas. Probaremos que $f^{(2)}\colon X^{(2)}\to X^{(2)}$ es transitiva por cadenas.

Sean (x_1,x_2), $(y_1,y_2)\in X^{(2)}$ y $\varepsilon>0$. Debemos probar que existen dos ε-cadenas de la misma longitud, una de x_1 a y_1 y otra de x_2 a y_2. Como f es totalmente transitiva por cadenas, entonces f es transitiva por cadenas.

Por lo tanto, existe una ε-cadena T_1, para f, de x_1 a x_2, de longitud m_1, así como una ε-cadenas T_2, para f, de x_2 a x_1, de longitud m_2.

Por hipótesis, la función $f^{m_1+m_2}$ es transitiva por cadenas y, por lo tanto, existe una ε-cadena T_3', para $f^{m_1+m_2}$, de x_1 a y_1, de longitud m_3. Digamos que esta cadena T_3' tiene la forma:

$$\langle x_1 = a_0, a_1, \ldots, a_{m_3} = y_1 \rangle.$$

Así, la sucesión T_3, definida como

$$\begin{aligned}\langle x_1 = a_0, f(a_0), f^2(a_0), \ldots, f^{m_1+m_2-1}(a_0), a_1, f(a_1), \ldots\\ \ldots, f^{m_1+m_2-1}(a_1), a_2, \ldots, a_{m_3-1}, f(a_{m_3-1}), \ldots\\ \ldots, f^{m_1+m_2-1}(a_{m_3-1}), a_{m_3} = y_1 \rangle,\end{aligned}$$

es una ε-cadena, para f, de x_1 a y_1, de longitud $m_3(m_1 + m_2)$.

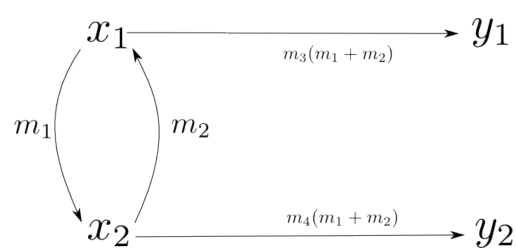

Figura 4.3: Construcción de ε-cadenas de la misma longitud.

De manera similar, se puede construir una ε-cadena T_4, para f, de x_2 a y_2, de longitud $m_4(m_1+m_2)$. Si $m_3 = m_4$ termina la prueba. Supongamos sin perdida de generalidad que $m_3 = k + m_4$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces las ε-cadenas, para f, T_3 y $T_4+k(T_1+T_2)$ de x_1 a y_1 y de x_2 a y_2, respectivamente, son ambas de longitud $m_3(m_1 + m_2)$. $\square$

4.3. Una aplicación sobre dinámica en continuos

Para el caso en que el espacio X es un continuo, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.22. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Supongamos f es transitiva por cadenas. Si U y V son un par de conjuntos* *propios, abiertos, ajenos y no vacíos de X, entonces*

$$\mathrm{cl}_X(f(U)) \nsubseteq V \text{ o } \mathrm{cl}_X(f(V)) \nsubseteq U.$$

Demostración. Supongamos que no se cumple la conclusión.

Sean U, V dos conjuntos abiertos ajenos, propios y no vacíos tales que, $\mathrm{cl}_X(f(U)) \subset V$ y $\mathrm{cl}_X(f(V)) \subset U$. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ de tales que

$$\mathrm{N}_X(\mathrm{cl}_X(f(U)), \varepsilon_1) \subset V \text{ y } \mathrm{N}_X(\mathrm{cl}_X(f(V)), \varepsilon_2) \subset U.$$

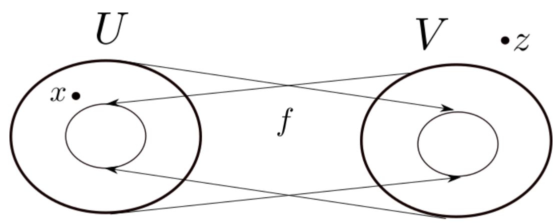

Figura 4.4: Lema 4.22

Por ser X conexo, existe $z \in X \setminus (U \cup V)$. Si $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ entonces, para $x \in U$, $f(x) \in \mathrm{cl}_X(f(U))$. Así, si $x_1 \in X$ es tal que $d(x_1, f(x)) < \varepsilon$, entonces $x_1 \in V$ y por lo tanto, $f(x_1) \in \mathrm{cl}_X(f(V))$. Si $x_2 \in X$ tal que $d(x_2, f(x_1)) < \varepsilon$ entonces $x_2 \in U$ y así sucesivamente. En resumen, toda ε-cadena que inicia en $x \in U$ se queda contenida en $U \cup V$. Por lo tanto, no existe una ε-cadena de x a z, contradiciendo la hipótesis. □

Del Lema 4.22 y del Teorema 4.5 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.23. *Sean Xun continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, f es transitiva por cadenas si y solo si alguna (y por lo tanto las demás) de las condiciones del Teorema 4.5 se satisface. Más aún, todas las condiciones del Teorema 4.5 son equivalente a pedir que f sea recurrente por cadenas.*

Demostración. La última parte es consecuencia de [23, Corolario 14], donde se prueba que en los continuos, que f sea transitiva por cadenas o recurrente por cadenas son equivalentes. □

En vista de que si X es un continuo, entonces 2^X es un continuo (ver [19, Corolario 1.8.9]) y de la equivalencia entre la transitividad de f y 2^f del Corolario 4.23 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.24. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es transitiva por cadenas;*

2) *2^f es transitiva por cadenas;*

3) *2^f es totalmente transitiva por cadenas;*

4) *2^f es débilmente mezcladora por cadenas;*

5) *2^f es exacta por cadenas;*

6) *2^f es recurrente por cadenas;*

7) *2^f es mezcladora por cadenas.*

Del Corolario 4.23 tenemos que la transitividad por cadenas de f implica la transitividad por cadenas de las funciones inducidas 2^f y de $\mathsf{F}_n(f)$, para $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto no se satisface en general para $\mathsf{C}(f)$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.25. *Consideramos de nuevo la función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ del Ejemplo 2.5. Como a continuación veremos, la función $\mathsf{C}(T)$ no es transitiva por cadenas.*

Sean $A = [0,1]$ y $B = \{0\}$. Supongamos que existe una $\frac{1}{8}$-cadena en $\mathsf{C}(X)$ de A a B, digamos $\langle A = C_0, C_1, \ldots, C_k = B\rangle$, con $k \in \mathbb{N}$. Como $H(\mathsf{C}(T)(A), C_1) < \frac{1}{8}$, entonces $[0,1] \subset \mathrm{N}_{[0,1]}(C_1, \frac{1}{8})$. Así, $[\frac{1}{8}, \frac{7}{8}] \subset C_1$. Luego,

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right] = \mathsf{C}(T)\left(\left[\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right]\right) \subset \mathsf{C}(T)(C_1).$$

Ahora, $H(\mathsf{C}(T)(C_1), C_2) < \frac{1}{8}$, entonces $[\frac{1}{4}, 1] \subset \mathsf{C}(T)(C_1) \subset \mathrm{N}_{[0,1]}(C_2, \frac{1}{8})$, con lo cual, $[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}] \subset C_2$. Así,

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right] = \mathsf{C}(T)\left(\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right]\right) \subset \mathsf{C}(T)(C_2).$$

Continuando con este proceso se tiene que $[\frac{1}{4}, 1] \subset \mathsf{C}(T)(C_j)$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Por lo tanto, $H(\mathsf{C}(T)(C_{k-1}), B) \not< \frac{1}{8}$, contradiciendo la hipótesis.

Teorema 4.26. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que X tiene r componentes conexas. Si $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas, entonces X es un continuo.*

Demostración. Supongamos que X tiene r componentes conexas, digamos $K_1, K_2, \ldots, K_r$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \{d(K_i, K_j) \colon i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$. Sean $A = \{a\} \subset K_1$ y $B = \{b_1, b_2\}$ tal que $b_i \in K_1$, con $i \in \{1, 2\}$. Dado que si $x, y \in K_t$, para algún $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$, entonces $\{f(x), f(y)\} \subset K_s$, para algún $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$, no existe una ε-cadena de A en B, en $\mathsf{F}_2(X)$, contradiciendo la hipótesis. $\square$

Existe un espacio métrico y compacto, con una infinidad de componentes conexas, y una función continua $f \colon X \to X$ tal que $\mathsf{F}_2(f)$ es transitiva por cadenas.

Ejemplo 4.27. *Sea $\Sigma_2 = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A_i = \{0, 1\}$ para toda $i \geq 1$, y sea $\sigma \colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dada por $\sigma(a_1, a_2, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$. Esta función es conocida como la función **shift**.*

No es difícil ver que σ es una función exacta y por tanto, débilmente mezcladora. Entonces, $\mathsf{F}_n(\sigma) \colon \mathsf{F}_n(\Sigma_2) \to \mathsf{F}_n(\Sigma_2)$ es transitiva para $n \geq 1$ ([14, Teorema 4.5]).

4.4. Transitividad por cadenas en $\mathsf{C}(f)$

En esta última sección veremos que para los árboles, las funciones inducidas $\mathsf{C}(f)$ "casi nunca" son transitivas por cadenas. Se probará primero este hecho para los intervalos cerrados. Es necesario recordar aquí la definición de función turbulenta. Esta propiedad es bastante conocida y estudiada (ver [5]).

Definición 4.28. *Sean J un intervalo cerrado y $f \colon J \to J$ una función continua. Se dice que f es **turbulenta** si existen subintervalos A, B de J tales que $|A \cap B| \leq 1$ y $A \cup B \subset f(A) \cap f(B)$.*

Usaremos en esta sección dos resultados. En el primero, los autores [Block, Coven, 1986] (ver [6]) prueban el siguiente teorema.

Teorema 4.29. *Sean J un intervalo cerrado y $f \colon J \to J$ una función continua. Si todos los puntos de J son recurrentes por cadenas, entonces f^2 es la identidad o f^2 es turbulenta.*

Usando este resultado se prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.30. *Sean J un intervalo y $f \colon J \to J$ una función continua y transitiva por cadenas. La función $C(f)$ es transitiva por cadenas si y sólo si f^2es la identidad.*

Demostración. Supongamos primero que f^2 es la identidad. Entonces, $\mathsf{C}(f)^2$ es la identidad. Así, $\mathsf{C}(f)^2$ es transitiva por cadenas. Por el Teorema 4.5, $\mathsf{C}(f)$ es transitiva por cadenas.

Supongamos ahora que $\mathsf{C}(f)$ es transitiva por cadenas y que f^2 no es la identidad. Del Corolario 4.23 se tiene que f es recurrente por cadenas. Por el Teorema 4.29, f^2 es turbulenta. Luego, existen subintervalos A, B de J con a lo más un punto en común tales que $A \cup B \subset f^2(A) \cap f^2(B)$. Digamos que $A = [a, b]$ y $B = [c, d]$, con $a < b \leq c < d$. Tenemos por lo tanto dos casos.

Caso 1. $A \cap B \neq \emptyset$.

Como $A \cup B \subset f^2(A)$, existe un subcontinuo $A' \subset A$ tal que $f^2(A') = A$. Digamos que $A' = [u, v]$. Si $a < u$, entonces $a < u < v \leq b = c < d$. Por otra parte, $A \cup B \subset f^2(A) = f^4(A')$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < u < v < d - \varepsilon$. Nótese que si $D \in \mathsf{C}(J)$ y $A \cup B \subset D$, entonces $H(D, A') \not< \varepsilon$.

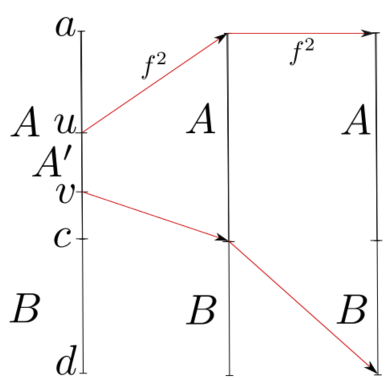

Figura 4.5: $A' \subset f^4(A')$

Afirmación. Si $D \in \mathsf{C}(J)$ y $H(D, f^4(A')) < \varepsilon$, entonces $A' \subset D$.

Como $H(D, f^4(A')) < \varepsilon$, entonces $f^4(A') \subset \mathrm{N}_J(D, \varepsilon)$.

Así, $[a, d] = A \cup B \subset \mathrm{N}_J(D, \varepsilon)$. Digamos que $D = [x, y]$ y supongamos que $u < x$. Entonces, $d(a, x) = d(a, u) + d(u, x)$, donde $d(a, u) > \varepsilon$. Luego, $d(a, x) > \varepsilon$ y, por lo tanto, $d(a, t) > \varepsilon$, para toda $t \in D$. Esto último no es posible pues

$$A \subset A \cup B \subset f^4(A') \subset \mathrm{N}_J(D, \varepsilon).$$

Análogamente se prueba que $y < v$. Concluimos así que $A' \subset D$.

Así, si $H(D, f^4(A')) < \varepsilon$, entonces $A' \subset A \cup B \subset f^4(D)$. Es claro que no existe una ε-cadena con $\mathsf{C}(f)^4$, de A' a A'. Es decir, $\mathsf{C}(f)^4$ no es transitiva por cadenas y, por el Corolario 4.23, $\mathsf{C}(f)$ tampoco es transitiva por cadenas.

Ahora, supongamos que $u = a$. Como $A \cup B \subset f^2(A)$, existe un subcontinuo $B' \subset B$ tal que $f^2(B') = B$, digamos que $B' = [r, s]$, donde $c \leq r < s \leq d$. Si $s < d$, análogamente al caso anterior, se prueba que f^4 no es transitiva por cadenas. Supongamos entonces que $s = d$. Entonces, $A' = [a, v]$ y $B' = [r, d]$. En vista de que $f^2([a, v]) = A$, $f^2([s, d]) = B$, $A \cup B \subset f(A)$ y $A \cup B \subset f(B)$, se tiene que $B \subset f^2([v, b])$ y $A \subset f^2([b, r])$. Es decir, $A \cup B \subset f^2([v, r])$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $H(D, f^2([v, r])) < \varepsilon$, entonces $[v, r] \subset D$. Por lo tanto, f^2 no es transitiva por cadenas.

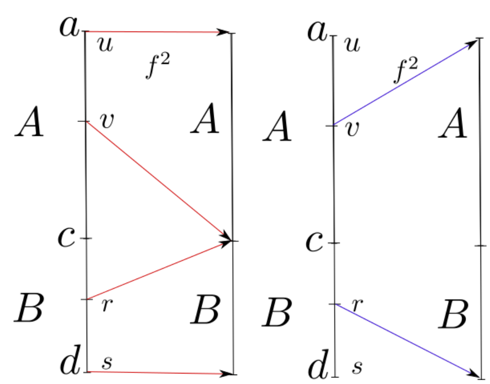

Figura 4.6: $[v, r] \subset f^2([v, r])$

Caso 2. Supongamos $A \cap B = \emptyset$. La prueba para este caso es análoga a la del caso 1.

□

Observación 4.31. *La idea básica en la prueba anterior fue la siguiente. Dados los intervalos A y B de la turbulencia de f^2, existe un subintervalo $C \subset A \cup B$ tal que $A \cup B \subset f^{2t}(C)$, para alguna $t \in \mathbb{N}$, de manera que C no intersecta puntos extremos de $f^{2t}(C)$. La construcción de C fue posible en el intervalo, el cual no contiene ciclos.*

El Teorema 4.29 fue vital para la prueba del Teorema 4.30. Una generalización de este resultado a los árboles se probó en [12]. Antes de enunciarlo necesitamos extender la definición de turbulencia y dar un poco de notación. Recordemos que un árbol es una gráfica finita que no contiene ciclos. A los puntos de un árbol T que no son de corte se les conoce como *puntos extremos*. Al conjunto de puntos extremos lo denotaremos por $\mathrm{End}(T)$. $\mathrm{Fix}(f)$ es el conjunto de puntos fijos de la función $f\colon T \to T$. Al mínimo común múltiplo de $2, 3, \ldots, n$ lo denotaremos por a_n.

En [12] se extiende la definición de función turbulenta a los árboles de la siguiente manera.

Definición 4.32. *Sean T un árbol y $f\colon T \to T$ una función continua. Se dice que T es* ***turbulenta*** *si existen subcontinuos no degenerados $J, K \subset T$, con interiores ajenos, tales que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$.*

Nótese que si T es el triodo simple en la forma $T = J \cup K$, con $J = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq x \leq 1\}$ y $K = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 1\}$ y $f\colon T \to T$ es cualquier función continua tal que $f(J) = T$ y $f(K) = T$, entonces f es turbulenta. Sin embargo, el tipo de turbulencia que se maneja en [12] no es de esta forma. Se aclarará este hecho después de enunciar el teorema.

Teorema 4.33 (Gengrong, Fanping, 2004)**.** *Sean T un árbol con n puntos extremos y $f\colon T \to T$ una función continua. Si f es recurrente por cadenas, entonces*

1. *Si $Fix(f) \cap End(T) = \emptyset$, entonces f^{a_n} es la identidad o f^{a_n} es turbulenta;*

2. *Si $Fix(f) \cap End(T) \neq \emptyset$, entonces $f^{a_{n-1}}$ es la identidad o $f^{a_{n-1}}$ es turbulenta*

En la prueba de este resultado los autores muestran que si la función $g = f^k$ no es la identidad, siendo k un entero positivo que es divisor de a_n, entonces existen $p \in \mathrm{Fix}(g)$ y $y \in T$ tales que $y \in (g(y), p)$ y $p = g^2(y)$, donde $(g(y), p)$ es el intervalo abierto que une a los puntos $g(y)$ y p. Es decir, prueban la existencia de la turbulencia en una forma muy particular.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 4.30 a los árboles.

Teorema 4.34. *Sean T un árbol y $f\colon T \to T$ una función continua y transitiva por cadenas. La función $C(f)$ es transitiva por cadenas si y sólo si f^m es la identidad, para algún $m \in \mathbb{N}$.*

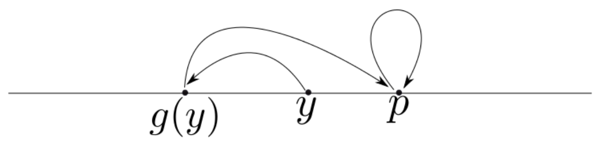

Figura 4.7: Turbulencia en el Teorema 4.33

Demostración. Ya se ha argumentado en la prueba del Teorema 4.30 que si f^m es la identidad, entonces $C(f)$ es transitiva. Supongamos f^m no es la identidad, para toda $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 4.33, f^m es turbulenta, para alguna $m \in \mathbb{N}$. Así, existen intervalos $J, K \subset T$ tales que J y K se intersectan solamente en un punto y $J \cup K \subset f^m(J) \cap f^m(K)$. El resto de la prueba es similar a la prueba del Teorema 4.30 como consecuencia de la Observación 4.31.

□

Lo natural ahora es preguntarse si el Teorema 4.34 se puede generalizar a las dendritas. Como veremos en el siguiente ejemplo la respuesta es no. La dendrita que a continuación se define (que por cierto tiene arcos libres) se suele denotar por F_ω.

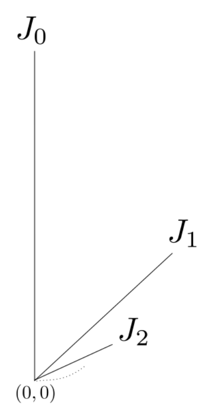

Figura 4.8: Dendrita F_ω.

Ejemplo 4.35. *La construcción se hace en el plano $\mathbb{R}^2$.*

Sea $F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} J_n$*, donde* $J_0 = \{(0, y) \colon 0 \leq y \leq 1\}$ *y* $J_n = \{(x, \frac{x}{n}) \colon 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}\}$*, si* $n \geq 1$*. Definamos* $f \colon F_\omega \to F_\omega$ *de la siguiente forma.*

1. $f_{|_{J_0}} : J_0 \to \{(0,0)\}$ *es la función constante que manda todo a* $(0,0)$*;*

2. $f_{|_{J_1}} : J_1 \to J_0$ *está dada por* $f_{|_{J_1}}(x,x) = (0,2x)$*;*

3. *Si* $n > 0$*, entonces* $f_{|_{J_{n+1}}} : J_{n+1} \to J_n$ *está dada por*

$$f_{|_{J_{n+1}}}\left(x, \frac{x}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+2)}{n+1}x, \frac{(n+2)}{n(n+1)}x\right).$$

En términos más coloquiales, la función f colapsa al intervalo J_0 en el punto $(0,0)$, mientras que al resto de los intervalos J_n los manda de manera homeomorfa al intervalo anterior J_{n-1}.

Observación 4.36. *De la definición del ejemplo 4.35 se tienen las siguientes propiedades.*

1. *Si* $n \geq 1$*,* $f_{|_{J_{n+1}}} : J_{n+1} \to J_n$ *es un homeomorfismo;*

2. *Para toda* $n \geq 0$*,* $f^{n+1}(J_n) = \{(0,0)\}$*;*

3. $Per(f) = \{(0,0)\}$*;*

4. *Para* $n \geq 0$*, diám*$(J_n) = \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}$.

5. *La función* $f \colon F_\omega \to F_\omega$ *es transitiva por cadenas.*

Notemos que por 3) de la Observación 4.36, f^m nunca es la identidad. Ahora, si $K \in \mathsf{C}(F_\omega)$, con $(0,0) \in K$ y $\varepsilon > 0$, existe $K' \in \mathsf{C}(F_\omega)$ tal que $H(K,K') < \varepsilon$ y $K' \cap J_n = \{(0,0)\}$, para casi toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K' \cap J_n = \{(0,0)\}$, para $n \geq N$.

Si $(0,0) \notin K$, entonces K es un subintervalo de algún J_n y elegimos $K' = K$.

En ambos casos, por 2) de la Observación 4.36, para alguna $m \geq 1$, $f^m(K') = \{(0,0)\}$. De lo anterior se tiene la siguiente observación.

Observación 4.37. *Para cada* $K \in \mathsf{C}(F_\omega)$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe una* ε*-cadena en* $\mathsf{C}(F_\omega)$ *de* K *en* $\{(0,0)\}$.

Por otra parte, si $K \in \mathsf{C}(F_\omega)$, con $(0,0) \notin K$ y $\varepsilon > 0$, entonces K es un subintervalo contenido en algún intervalo J_n, con $n \in \mathbb{N}$. Así, $f^{-r}(K)$ es un subintervalo de J_{n+r}, para cada $r \in \mathbb{N}$. Por 4) de la Observación 4.36,

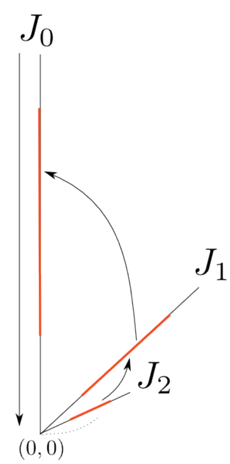

Figura 4.9: ε-cadena de K en $\{(0,0)\}$.

diám(J_n) tiende a 0, cuando n tiende a infinito. Así, existe $L \in C(F_\omega)$ con $H(L, \{(0,0)\}) < \varepsilon$ y $f^t(L) = K$, para alguna $t \in \mathbb{N}$.

Ahora, si $(0,0) \in K$ la idea es muy similar. Podemos escribir a K como

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

donde $I_n \subset J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es importante notar que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{(0,0)\}.$$

De manera análoga al caso anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $H(J_n, \{(0,0)\}) < \varepsilon$. Además, por 1) de la Observación 4.36, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un intervalo $K_n \subset J_{n+N}$ tal que $f^N(K_n) = I_n$. Es claro que $(0,0) \in K_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $K' \in \mathsf{C}(F_\omega)$ dada por

$$K' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n,$$

entonces $H(K', \{(0,0)\}) < \varepsilon$ y $f^N(K') = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^N(K_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = K$.

De aquí la siguiente observación.

Observación 4.38. *Para cada* $K \in \mathsf{C}(F_\omega)$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe una* ε*-cadena en* $\mathsf{C}(F_\omega)$ *de* $\{(0,0)\}$ *en* K*.*

De las Observaciones 4.37 y 4.38 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.39. *La función inducida* $\mathsf{C}(f)$ *es transitiva por cadenas, donde* $f\colon F_\omega \to F_\omega$ *es la función del Ejemplo 4.35.*

Como hemos observado en el Ejemplo 4.35, el Teorema 4.34 no se puede generalizar a las dendritas.

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes, H. Méndez, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 156 (2009), no. 5, 1013–1033.

[2] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos Solitons Fractals 25 (2005), no. 3, 681–685.

[3] A. D. Barwell, C. Good, P. Oprocha, B. E. Raines, *Characterizations of ω-limit sets in topologically hyperbolic systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), no. 5, 1819–1833.

[4] W. Bauer, K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79 (1975) 81–92.

[5] L. S. Block, W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Mathematics, 1513. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] L. Block, E. M. Coven, *Maps of the interval with every point chain recurrent*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), no. 3, 513–515.

[7] J. R. Brown, *Inverse limits, entropy and weak isomorphism for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972), 55–66.

[8] D. Daniel, C. T. Kennaugh, *Concerning metrizable continua of convergence*, Proceedings of the Spring Topology and Dynamical Systems Conference. Topology Proc. 27 (2003), no. 1, 101–109.

[9] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[10] L. Fernández, C. Good, M. Puljiz, Á. Ramírez, *Chain transitity in hyperspaces*, Chaos Solitons Fractals 81 (2015), part A, 83–90.

[11] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophanthine approximation*, Math. Systems Theory 1 (1967) 1–49.

[12] Z. Gengrong, Z. Fanpin, *Pointwise chain recurrent maps of the tree*, Bull. Austral. Math. Soc. 69 (2004), no. 1, 63–68.

[13] K. P. Hart, Jun-iti Nagata, J. E. Vaughan, *Encyclopedia of General Topology*, Elsevier Science Publishers, B.V., Amsterdam, 2004.

[14] G. Higuera Rojo, A. Illanes *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc. 37 (2011), 367–401.

[15] M. W. Hirsch, Hal L. Smith, X.-Q. Zhao, *Chain transitivity, attractivity, and strong repellors for semidynamical systems*, J. Dynam. Differential Equations 13 (2001), no. 1, 107–131.

[16] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Decker, Inc., New York, Basel. 1999.

[17] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos.* Aportaciones Mat. Textos 28 (2004).

[18] J. E. King Dávalos, H. Méndez Lango. *Sistemas Dinámicos Discretos.* Las Prensas de Ciencias, UNAM, México, 2014.

[19] S. Macías. *Topics on Continua.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[20] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of Sets.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.

[21] S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[22] A. Ramírez Urrutia, *Dinámica en Hiperespacios*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., 2012.

[23] D. Richeson, J. Wisman. *Chain Recurrence Rates and Topological Entropy*, Topology Appl. 156 (2008), no. 2, 251–261.

[24] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos Solitons Fractals 17 (2003), no. 1, 99–104.

[25] A. N. Sharkovsky, *On attracting and attracted sets*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 160:5 (1965), 1036–1038.