



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

Algunas variantes modernas del problema de la galería de arte

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
Doctor en Ciencias (Computación)

PRESENTA:
Israel Aldana Galván

DIRECCIÓN:
Jorge Urrutia Galicia
Instituto de Matemáticas

CODIRECCIÓN:
José David Flores Peñaloza
Facultad de Ciencias

Ciudad de México, marzo del 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a la universidad y al posgrado por todas las experiencias vividas.

Al CONACYT por el apoyo recibido.

A mis padres Jesús y Aurora, porque siempre me han apoyado de manera incondicional.

A mi hermana Aby, porque intercambiar ideas contigo me ayuda a ver la vida con una perspectiva diferente e interesante.

A mis directores de tesis Jorge y David, por apoyarme y guiarme en la elaboración de este trabajo.

A Carlos, por sus valiosas aportaciones.

A mis sinodales por sus oportunas observaciones.

A mis compañeros y amigos Juan Carlos, José Luis, Erick y Nestaly con quienes compartí esta etapa resolviendo problemas interesantes.

Agradezco y dedico este trabajo a mi familia, mi esposa Gaby y mi hija Alexa, por su generosa paciencia y con quienes soy muy feliz.

Índice general

Índice de figuras	3
Índice de tablas	5
1. Introducción	7
2. Preliminares	15
2.1. Teoría de gráficas	15
2.2. Galerías de arte e iluminación	21
2.2.1. Galerías ortogonales	27
2.2.2. Iluminación con reflectores	29
2.2.3. Iluminación con radares	34
2.2.4. Vigilancia de poliedros ortogonales con guardias tipo arista	41
3. Variante del PGA en ortoáboles	49
3.1. Definiciones	49
3.2. Resultados preliminares	50
3.3. Iluminación de ortoárboles	55
3.4. Problemas abiertos	56
4. Variante cromática del PGA	59
4.1. Iluminación rectangular de polígonos ortogonales con reflectores de tamaño $\pi/2$	59
4.2. Iluminación rectangular de poliedros ortogonales con guardias de tipo segmento de tamaño $\pi/2$	62
4.3. Problemas abiertos	64
5. El Problema de Testigos	65
5.1. Preliminares Testigos	65
5.2. Atestiguando polígonos ortogonales	66
5.3. Un algoritmo para encontrar un conjunto testigo mínimo	68
5.4. Problemas Abiertos	70

ÍNDICE GENERAL

6. Conclusiones	71
Bibliografía	73
Índice alfabético	78

Índice de figuras

1.1. Un polígono ortogonal fuertemente iluminado por un conjunto de guardias.	9
2.1. Gráfica con cinco vértices y siete aristas.	16
2.2. Diferentes grados de los vértices de un gráfica.	17
2.3. Gráfica y subgráfica.	18
2.4. Gráfica bipartita.	19
2.5. Ilustración del Teorema 3.	20
2.6. Una gráfica G , con su gráfica dual G' .	21
2.7. Cuñas de diferentes tamaños.	24
2.8. Guardia tipo arista cerrado, abierto y arista- $\frac{\pi}{2}$.	25
2.9. Clasificación de vértices para poliedros ortogonales.	26
2.10. En ocasiones son necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices, para vigilar un polígono ortogonal.	28
2.11. El problema de la iluminación de estrados.	30
2.12. Los polígonos ortogonales pueden tener 8 tipos de vértices.	31
2.13. Ilustración del Teorema 12.	31
2.14. Colocación de los reflectores utilizando diferentes reglas de iluminación.	32
2.15. Una hélice con cuatro aspas y 12 vértices. Pegado de dos hélices.	33
2.16. Una hélice con 32 vértices, y un agujero que requiere 12 reflectores ortogonales. Familia que $32 + 28h$ vértices que requiere $12 + 11h$ reflectores	34
2.17. Orientación inicial de α -reflectores giratorios para vigilar una recta L .	36
2.18. Ilustración del Teorema 15.	36
2.19. Etapas de iluminación de un $v\frac{3\pi}{2}$ -reflector giratorio.	39
2.20. Area iluminada por $v\frac{3\pi}{2}$ -reflectores giratorios ubicados en los 8 tipos de vértices existentes.	40
2.21. Son necesarios al menos dos $\frac{3\pi}{2}$ -reflectores giratorios para iluminar continuamente un punto P .	40
2.22. En ocasiones son necesarios $\frac{n}{2} v\frac{3\pi}{2}$ -reflectores giratorios para iluminar el interior de un polígono ortogonal.	41
2.23. Dos poliedros ortogonales pegados. Un poliedro ortogonal excavado de otro.	44
2.24. Poliedro ortogonal que alcanza la cota inferior del Teorema 23.	45

ÍNDICE DE FIGURAS

2.25. Puntos distinguidos del poliedro ortogonal que alcanza la cota inferior del Teorema 23.	46
2.26. Guardias y puntos distinguidos del poliedro ortogonal que alcanza la cota inferior del Teorema 23.	47
2.27. Familia de poliedros ortogonales, que necesitan $\frac{4}{45}e$ guardias para vigilar el poliedro.	47
3.1. Un ortoárbol, un corredor, una unión y una hoja.	50
3.2. Vértices de una unión.	51
3.3. Corredores con cuatro y siete vértices.	52
3.4. Ilustración del Teorema 1, inicio del paso recursivo.	53
3.5. Ilustración del Teorema 1, diferentes casos en los que exactamente k cajas en C se interseca con $B'' \in C_k$	54
3.6. Un ortoárbol que necesita de $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices para ser iluminado.	56
3.7. Ilustración del Teorema 1.	57
3.8. Cobertura de balizas.	58
4.1. Iluminación del interior de un polígono ortogonal utilizando reflectores- $\frac{\pi}{2}$	60
4.2. Iluminación del interior y el exterior de un polígono ortogonal utilizando reflectores- $\frac{\pi}{2}$	61
4.3. Ilustración del Teorema 4.3.	62
4.4. Un polígono ortogonal P con hoyos tal que $2 \leq \chi(P, \frac{\pi}{2})$	63
4.5. Descomposición de un poliedro ortogonal con hoyos en poliedros de levantamiento disjuntos dos a dos.	63
5.1. Un polígono ortogonal P tal que su frontera no es un conjunto testigo.	66
5.2. Ilustración de la demostración del Lema 6.	67

Índice de tablas

1.1. Algunos de los resultados de la variante cromática del problema de la galería de arte.	11
2.1. Resultados sobre Galerías de arte con agujeros.	29
2.2. Cuadrantes vigilados por las etapas $E1$ a $E4$ con radares- $\frac{3\pi}{2}$	38
2.3. Partición de los vértices inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$	38

Capítulo 1

Introducción

En 1973 el matemático Victor Klee planteó el problema de determinar cuántos guardias se requieren para vigilar el interior de una galería de arte, el cual se puede también plantear en términos de iluminación, es decir, cuántas lámparas se requieren para iluminar el interior de una galería de arte. La galería de arte puede ser modelada como un polígono simple. Este problema se conoce como *El Problema de la Galería de Arte (PGA)*.

En adelante usaremos indistintamente los términos vigilar e iluminar, tratando de apearnos a la nomenclatura utilizada en los artículos originales que se usan como referencia.

Los problemas de la galería de arte o problemas de iluminación pertenecen a una área clásica de estudio en Geometría Discreta y Computacional. El primer resultado conocido en esta área, es precisamente la respuesta a la pregunta planteada por V. Klee, y es conocido como el Teorema de la Galería de Arte de Chvátal, el cual afirma que $\lfloor n/3 \rfloor$ lámparas son siempre suficientes, y en ocasiones necesarias para iluminar cualquier polígono con n vértices [18]. En 1978 se establece en [29] una demostración concisa y elegante del teorema.

En 1983 se demuestra en [46] que encontrar el número mínimo de guardias que se requieren para vigilar un polígono simple con agujeros es un problema NP-Completo. En 1986 en [41] se extiende el resultado para polígonos simples con guardias ubicados en los vértices, demostrando que también es NP-Completo. Así mismo, en [2] se demuestra para guardias ubicados en cualquier punto del polígono. El problema es NP-Duro en polígonos ortogonales [48], en polígonos ortogonales delgados [53] y polígonos simples monótonos [40]. El problema es APX-Duro en polígonos simples [24].

Un *reflector- α* f es un tipo de lámpara que emite luz dentro de un cono de tamaño angular α limitado por dos rayos que parten de un punto, el vértice de f ; α es el tamaño de f . En 1997 en [17] se resolvió el problema que consiste en iluminar el plano con n reflectores de tamaños $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, de modo que sus ápices se ubican en un conjunto de puntos con n elementos, uno por ápice. En 1994 en [26] se establecen reglas que permiten colocar reflectores en vértices de polígonos ortogonales de manera óptima con el objetivo de vigilarlo. En 2011 se presentan en [39] las condiciones que deben cumplir reflectores giratorios para poder vigilar el plano.

Existe una gran cantidad de resultados y documentos dedicados al estudio de muchas variaciones sobre los problemas de la Galería de Arte que han aparecido a lo largo de los años. El lector interesado puede consultar el libro de J. O'Rourke sobre las galerías de arte [45], o los compendios de T. Shermer [50] y J. Urrutia [55].

Durante los últimos casi cincuenta años de investigaciones respecto a este problema, han surgido muchas variantes del mismo, algunas basadas en restricciones sobre los guardias como; la posición que pueden ocupar, su forma o su tipo de visibilidad, y otras basadas en restricciones sobre el modelo utilizado para representar la galería de arte como: polígonos simples, polígonos ortogonales, poliedros, etc.

En la presente investigación estudiamos tres variantes del problema de la galería de arte, a continuación damos una breve descripción de los mismos:

1. En el Capítulo 3 consideramos un problema de cobertura en la familia de poliedros ortogonales llamada ortoárboles, los resultados se encuentran publicados en [5].

La mayoría de los estudios sobre el problema de La Galería de Arte o problemas de iluminación se refieren a polígonos en el plano. Una variación relativamente nueva, de la que no se sabe mucho, en parte debido a su dificultad, es la de la iluminación de los poliedros en \mathbb{R}^3 . Es bien sabido que no todos los poliedros, incluso los poliedros ortogonales, pueden iluminarse con lámparas colocadas en sus vértices. Uno de los primeros ejemplos de esto es el poliedro conocido como poliedro de Seidel, que contiene $O(n^2)$ vértices y requiere $O(n^3)$ lámparas para iluminarlo; vea [45].

Sin embargo, se sabe que cualquier poliedro siempre puede iluminarse desde un conjunto con e de sus aristas; es decir, si consideramos las aristas de un poliedro como tubos de luz fluorescentes. Urrutia [55] conjeturó en 1996 que cualquier poliedro ortogonal en \mathbb{R}^3 puede iluminarse utilizando a lo más $\lfloor e/12 \rfloor \pm O(1)$ de sus aristas. También demostró que $\lfloor e/6 \rfloor$ siempre son suficientes. Cerrar la brecha entre la cota inferior y la superior sigue siendo un problema abierto.

Recientemente se han obtenido mejoras parciales en este problema. Benbernou et al. [9] demostraron que cualquier poliedro ortogonal con e aristas y género g siempre se puede iluminar usando $\lfloor 11e/72 \rfloor - g/6 - 1$ lámparas sobre aristas (en este caso son abiertas, es decir, no incluyen los puntos extremos). Un resultado similar, al utilizar un conjunto más restringido de lámparas sobre aristas, lámparas de apertura $\pi/2$, fue demostrado en [7] por I. Aldana et al. En [57] Viglietta obtiene resultados sobre poliedros iluminados que usan caras en lugar de vértices o aristas. Una buena colección de resultados sobre temas relacionados, se puede consultar en la Tesis doctoral de Viglietta [56].

En este capítulo la variante considerada consiste en iluminar un ortoárbol dado con el mínimo número de guardias. Restringimos a los guardias para ser colocados únicamente en los vértices del ortoárbol. Demostramos que $\lfloor n/8 \rfloor$ guardias son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar un ortoárbol de n vértices.

2. En el Capítulo 4 consideramos una variante cromática del problema de la galería de arte en polígonos y poliedros ortogonales, los resultados se encuentran publicados en [6].

Decimos que dos puntos p y q en un polígono o poliedro P son visibles uno al otro si el segmento \overline{pq} se encuentra contenido en P ; llamaremos *visión lineal* o *estándar* a este tipo de visibilidad. Decimos que dos puntos p y q en P son visibles uno al otro si el rectángulo isotético más pequeño que los contiene, se encuentra contenido en P ; llamaremos *visión ortogonal* o *rectangular* a este tipo de visibilidad. Utilizando visibilidad de *escalera*, p y q son mutuamente visibles si P contiene una trayectoria poligonal monótona e isotética que une a p y a q . Finalmente, con visibilidad de *k-periscopio*, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p y q son mutuamente visibles si P contiene una trayectoria poligonal monótona e isotética con a lo más k vueltas que une a p y a q .

Un punto p es iluminado por un punto q , si p es rectangularmente visible desde q . Un conjunto de puntos G (*guardias*) ilumina P , si cada punto en P es rectangularmente visible por al menos un elemento de G . Un conjunto G de guardias coloreados de un polígono o poliedro P *ilumina fuertemente* a P , si cada elemento p de P es visible desde al menos un elemento de G , y todos los elementos de G que ven a p tienen un color diferente, ver la Figura 1.1.

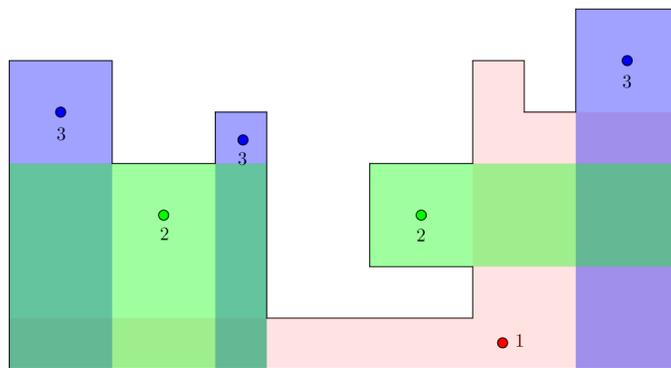


Figura 1.1: Un polígono ortogonal fuertemente iluminado por un conjunto de guardias. Observe que cada elemento p del polígono es visible desde al menos un guardia, y todo guardia que ve a p tienen un color diferente.

Una versión cromática del problema de la galería de arte fue estudiada en [25]. El problema fue motivado por aplicaciones distribuidas en robótica, donde los colores representan frecuencias asignadas a un conjunto de centros de control, de modo que cada robot siempre se pueda comunicar con al menos un centro de control sin interferencia. Una versión cromática con reflectores fue estudiada en [34]. Una versión cromática con iluminación libre de conflicto fue estudiada en [8]. Una versión cromática con iluminación libre de conflicto utilizando el modelo de visión rectangular

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

fue estudiado en [33]. En la Tabla 1.1 se presentan algunos de los resultados de la variante cromática del problema de la galería de arte.

Tabla 1.1: Algunos de los resultados de la variante cromática del problema de la galería de arte.

Resultados conocidos				
Polígonos simples				
Polígono	inferior	superior	I/V/ α	Referencia
Espiral		≤ 2	f/1/2 π	[25]
Monotono	$\Omega(\sqrt{n})$		f/1/2 π	[25]
General	$\Omega(n)$	$O(n)$	f/1/2 π	[25]
Monotono		$O(\log n)$	lc/1/2 π	[8]
General		$O(\log^2 n)$	lc/1/2 π	[8]
General	1	1	f/1/ $\leq \pi$	[34]
Polígonos ortogonales				
Escalera		≤ 3	f/1/2 π	[25]
Monotono	$\Omega(\sqrt{n})$		f/1/2 π	[25]
General	$\Omega(\frac{\log^2 n}{\log^3 n})$		lc/1/2 π	[33]
General	$\Omega(\log n)$	$O(\log n)$	f/1/2 π	[8][33]
General	$\Omega(\log^2 n)$	$O(\log^2 n)$	lc/r/2 π	[33]
General (interior y exterior)	1	1	f/r/ $\frac{\pi}{2}$	trabajo presente, [6]
General (con h hoyos)	2	$h + 1$	f/r/ $\frac{\pi}{2}$	trabajo presente, [6]
Poliedros ortogonales				
General		Si $\mathcal{H} = 0$: 1 Si $\mathcal{H} > 0$: $\mathcal{H} + 1$	f/r/segmento- $\frac{\pi}{2}$	trabajo presente, [6]
<p>I: Tipo de iluminación (lc: libre de conflicto f: fuerte). V: modelo de visibilidad (l: estándar r: ortogonal). α: ángulo de visibilidad. \mathcal{H}: Al descomponer un poliedro en poliedros de levantamiento, existe un polígono que genera estos poliedros que tiene el mayor número de hoyos denominado \mathcal{H}. segmento-α: lámparas tipo segmento con ángulo de visibilidad α. Las cotas superiores e inferiores mostradas son sobre el número cromático.</p>				

El problema consiste en encontrar el número $\chi(n)$ más pequeño de colores, de manera que cualquier polígono o poliedro con n vértices pueda ser fuertemente iluminado con un conjunto de guardias usando $\chi(n)$ colores. Denotamos por $\chi(P, \alpha)$, $\chi(\text{ext}(P), \alpha)$ y $\chi(P \cup \text{ext}(P), \alpha)$ a los enteros más pequeños tales que existe un conjunto de guardias con un ángulo de visibilidad de tamaño α (*guardias- α*), coloreados con $\chi(P, \alpha)$, $\chi(\text{ext}(P), \alpha)$ y $\chi(P \cup \text{ext}(P), \alpha)$ colores que iluminan fuertemente al interior de P , al exterior de P , denotado por $\text{ext}(P)$ y a $P \cup \text{ext}(P)$ respectivamente.

Estudiamos el problema en polígonos ortogonales en \mathbb{R}^2 y poliedros ortogonales en \mathbb{R}^3 utilizando el modelo de visibilidad rectangular. Utilizamos guardias de tipo reflector- α en \mathbb{R}^2 y tipo segmento- α en \mathbb{R}^3 , con α igual a $\pi/2$. Demostramos que para un polígono ortogonal P en \mathbb{R}^2 , utilizando reflectores- $\frac{\pi}{2}$, $\chi(P \cup \text{ext}(P), \frac{\pi}{2}) = 1$. También demostramos que si P tiene h hoyos entonces $2 \leq \chi(P, \frac{\pi}{2}) \leq h + 1$.

Para el caso de un poliedro \mathcal{P} en \mathbb{R}^3 tenemos resultados similares. Partimos \mathcal{P} en poliedros de levantamiento con cortes en la dirección adecuada, procedimiento descrito en el Capítulo 4, digamos con planos paralelos al plano xy . Obtenemos el polígono que genera cada uno de estos poliedros de levantamiento, suponiendo que el polígono con el máximo número de hoyos tiene h hoyos, entonces demostramos que:

si $h = 0$:

$$a) \chi(\mathcal{P}, \frac{\pi}{2}) = 1,$$

y si $h > 0$:

$$a) \chi(\mathcal{P}, \frac{\pi}{2}) \leq h + 1,$$

3. En el Capítulo 5 consideramos el *Problema de Testigos* que es una variante de PGA que consiste en encontrar un conjunto W en un polígono P tal que, si W es vigilado por algún conjunto de guardias G , entonces se garantiza que G también vigila a P . El conjunto W es llamado un *conjunto testigo*.

El problema de testigos bajo el modelo de visibilidad lineal fue estudiado por Chwa et al. en [19]. Ellos demostraron que no todos los polígonos simples admiten un conjunto de testigos finito y, si un polígono simple P admite un conjunto de testigos finito, entonces todos los testigos deben pertenecer a la frontera de P . Adicionalmente, ellos dieron un algoritmo de complejidad de tiempo $O(n^2 \log n)$ que obtiene un conjunto de testigos mínimo para P si existe, y reporta su no existencia en caso de que así sea.

La principal motivación detrás de nuestra investigación es el hecho de que un conjunto testigo permite verificar rápidamente si un conjunto de puntos vigila a un polígono, los resultados se encuentran publicados en [4]:

En contraste con el modelo de visibilidad lineal, PGA puede ser resuelto en tiempo polinomial bajo algunos modelos de visibilidad. Utilizando visibilidad rectangular, un conjunto de guardias mínimo puede ser encontrado en tiempo polinomial si el polígono no tiene hoyos: un algoritmo de complejidad en tiempo $O(n^{17})$ fue presentado por Worman y Keil en [59]. Sin embargo, si el polígono tiene hoyos, entonces este problema es NP-difícil, como fue demostrado por Biedl y Mehrabi en [10]. Utilizando visibilidad de escalera, Motwani et al. [42] demostraron que un conjunto mínimo de guardias puede ser encontrado en tiempo $O(n^8)$ en polígonos ortogonales sin hoyos, pero sigue siendo un problema abierto determinar si el problema es NP-difícil en polígonos con hoyos. Finalmente, utilizando visibilidad de k -periscopio, Gewali y Ntafos demostraron en [30] que PGA puede ser resuelto en tiempo $O(n^3)$ para $k = 1$ en una familia restringida de polígonos ortogonales.

En este capítulo, estudiamos el problema de testigos en polígonos ortogonales bajo el modelo de visibilidad rectangular. Primero, demostramos que existen polígonos ortogonales cuya frontera no es un conjunto testigo. Después demostramos que siempre se

puede encontrar un conjunto testigo de cardinalidad $O(n^2)$ para cualquier polígono ortogonal.

Finalmente, describimos un algoritmo para encontrar un conjunto de testigos mínimo en polígonos ortogonales, el cual tiene una complejidad de tiempo $O(n^4)$. El polígono puede tener hoyos.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Teoría de gráficas

En este capítulo, se presentan definiciones y resultados importantes de teoría de gráficas.

El primer trabajo sobre la teoría de gráficas fue escrito por el famoso matemático suizo Leonard Euler, y apareció en 1736. Desde un punto de vista matemático, la teoría de gráficas fue insignificante en un principio, ya que se le asociaba con algunos juegos de entretenimiento. Pero algunos descubrimientos recientes en matemáticas, y particularmente en sus aplicaciones, le han dado un gran impulso. Actualmente hay algunos temas en matemáticas puras donde la teoría de gráficas es una herramienta natural, pero hay muchos otros usos en conexión con preguntas prácticas: apareamientos, problemas de transporte, el flujo en redes de tuberías, “programación” en general. En nuestro caso para PGA, la teoría de gráficas es una importante herramienta de apoyo.

La teoría de gráficas también hace su aparición en diversos campos como la economía, la psicología y la biología. En matemáticas, la teoría de gráficas ha sido clasificada como una rama de la topología, pero también está fuertemente relacionada con el álgebra y la teoría de matrices.

Los resultados presentados a continuación se pueden consultar en [16].

Una *Gráfica* G es un par ordenado (V, A) donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos son llamados vértices o nodos, y un conjunto A de pares no ordenados de vértices distintos $\{u, v\}$ llamados aristas. Los conjuntos V y A son los conjuntos de vértices y aristas de G son denotados por $(V(G), A(G))$ respectivamente.

El número de vértices en G es llamado el *orden* de G y el número de aristas de G es el *tamaño* de G . También es conveniente representar a las gráficas por medio de diagramas. En tal representación, dibujamos los vértices con puntos y a las aristas con segmentos de línea o curvas que unen dos puntos apropiados. Un diagrama de la gráfica G con: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ y $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_1v_4$, $e_4 = v_2v_3$, $e_5 = v_2v_4$, $e_6 = v_3v_4$ y $e_7 = v_4v_5$ se muestran en la Figura 2.1.

Si $e = uv \in A(G)$ (es decir, si uv es una arista de la gráfica G) entonces decimos que e

une a los vértices u y v . Dos vértices u y v son *adyacentes* en una gráfica G si $uv \in A(G)$. Si $uv \notin A(G)$, entonces u y v son vértices no adyacentes. Si $e = uv \in A(G)$ entonces u y v son cada uno incidentes con e . Si uv y uw son aristas distintas de una gráfica G (es decir $v \neq w$) entonces uv y uw son aristas adyacentes. Así en la gráfica G descrita en la Figura 2.1, v_1 y v_3 son adyacentes pero v_1 y v_5 no son adyacentes.

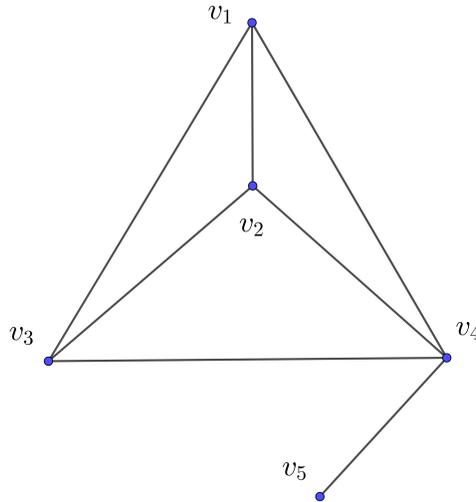


Figura 2.1: Gráfica con cinco vértices y siete aristas.

El *grado de un vértice* v en G es el número de aristas que inciden en v . El grado de v se denota por $\text{grado}_G(v)$ o simplemente $\text{grado}(v)$. Un vértice v , es llamado par o impar, de acuerdo a si $\text{grado}(v)$ es par o impar. Denotamos como $\Delta(G)$ al grado máximo entre todos los vértices de la gráfica G , y por $\delta(G)$, al grado mínimo de entre todos los vértices de la gráfica G . Así por ejemplo en la gráfica de la Figura 2.2, tenemos que: $\text{grado}(v_1) = 0$, $\text{grado}(v_2) = 2$, $\text{grado}(v_3) = 1$, $\text{grado}(v_4) = 2$, $\text{grado}(v_5) = 3$, $\text{grado}(v_6) = 2$.

Una (p, q) -gráfica es una gráfica de orden p y tamaño q . La gráfica de la Figura 2.2 es una $(6, 5)$ -gráfica. Podemos ver que la suma de sus grados es 10, es decir, $2q$.

A continuación presentamos dos resultados conocidos del área.

Teorema 1. *Para toda gráfica G , la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de aristas. Así, si G es una (p, q) -gráfica con vértices v_1, v_2, \dots, v_p entonces $\sum_{i=1}^p \text{grado}(v_i) = 2q$.*

Demostración. Al sumar los grados de los vértices de una gráfica G , contamos cada arista dos veces, una por cada uno de los vértices en que incide la arista. \square

Teorema 2. *Toda gráfica contiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración. Sea G una gráfica. Si G no contiene vértices impares, entonces se cumple el resultado. Suponga que G contiene k vértices impares, denotados por v_1, v_2, \dots, v_k . Si G contiene vértices pares los denotamos por u_1, u_2, \dots, u_n .

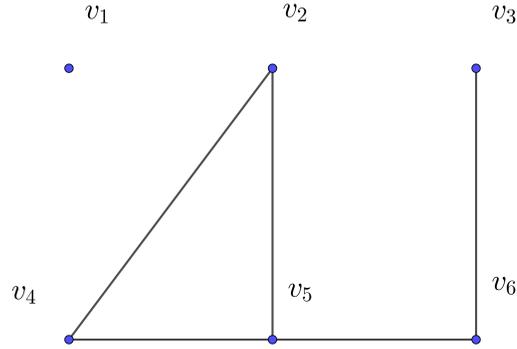


Figura 2.2: Diferentes grados de los vértices de un gráfica.

Por el Teorema 1, $\sum_{i=1}^k \text{grado}(v_i) + \sum_{j=1}^n \text{grado}(u_j) = 2q$ donde q es el número de aristas de G . Como cada uno de los números $\text{grado}(u_1), \text{grado}(u_2), \dots, \text{grado}(u_n)$ es par, entonces $\sum_{j=1}^n \text{grado}(u_j)$ también es par, así tenemos que $\sum_{i=1}^k \text{grado}(v_i) = 2q - \sum_{j=1}^n \text{grado}(u_j)$ es par, pero cada uno de los números $\text{grado}(v_1), \text{grado}(v_2), \dots, \text{grado}(v_k)$ es impar. Por lo tanto, k debe ser par, así G tiene un número par de vértices de grado impar. Si G no tiene vértices pares, entonces $(\text{grado}(v_1) + \text{grado}(v_2) + \dots + \text{grado}(v_k)) = 2q$ de donde concluimos también que k es par. \square

Una gráfica H es una *subgráfica* de G , denotada por $H \leq G$, si H es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Una *subgráfica generadora* H de G , es cualquier subgráfica que tenga el mismo número de vértices. En la Figura 2.3 se muestran dos gráficas G y H , donde H es subgráfica de G .

Una *subgráfica inducida* H de G , es aquella que cumple que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H)$ es el conjunto de todas las aristas de G con vértices de H .

Un *camino* en una gráfica G , es una secuencia finita de vértices x_0, x_1, \dots, x_n y aristas a_1, a_2, \dots, a_n de G : $x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_n, x_n$ donde los puntos finales de a_i son x_{i-1} y x_i para cada i , y además los x_i y x_{i+1} son incidentales a a_{i+1} , para todo $i = 0 \dots n - 1$. La longitud de un camino es n . Un *uv-camino* en una gráfica G , es un camino que comienza en el vértice u y termina en el vértice v . Un *uv-paseo* en una gráfica, es un *uv-camino* que no repite aristas. Una *uv-trayectoria*, es un *uv-camino* o *uv-paseo* tal que no repite vértices. Un *uv-paseo* en el cual $u = v$, y que contiene al menos tres aristas es llamado *circuito*. Un circuito debe terminar en el mismo vértice en el que se empezó. Un circuito que no repite vértices (excepto el primero y el último) es llamado *ciclo*, denotaremos un ciclo C de G como $C = v_0v_1, \dots, v_kv_0$.

La *distancia entre dos vértices* u y v de G , es la longitud del menor *uv-camino*, deno-

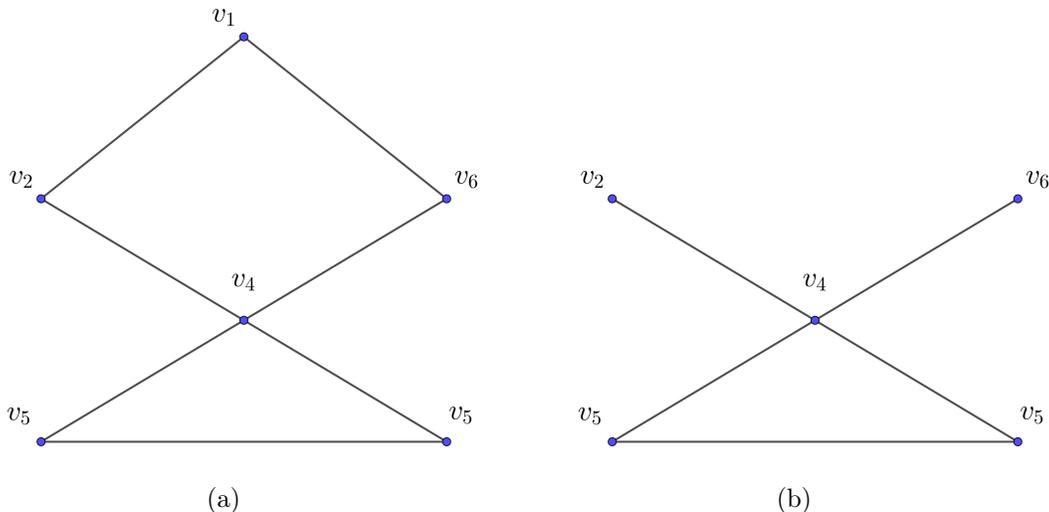


Figura 2.3: (a) Gráfica G y (b) H subgráfica de G .

taremos $d(v, w)$ como la distancia entre u y v . La *excentricidad* $e(v)$ de un vértice v de G , es el máximo valor de $d(v, w)$, donde w es cualquier vértice de la gráfica. El *radio de una gráfica* $r(G)$ de G , es la excentricidad del vértice de menor excentricidad. Un vértice es llamado *vértice central*, si su excentricidad es igual al radio de G . El *centro de una gráfica* $c(G)$, es el conjunto de sus vértices centrales.

Dos vértices u y v de G , están *conectados* si $u = v$ o si $u \neq v$ y existe en G una *uv-trayectoria*. G es una *gráfica conexa*, si todo par de vértices de G están conectados. En otro caso se dice que G es *disconexa*. Una *subgráfica conexa* H de G , es una *componente conexa* (o simplemente una componente) de G , si $H = H'$ siempre que H' sea una subgráfica conexa de G que contenga a H . Es decir, una componente de una gráfica es una subgráfica conexa máxima. G es *conexa* si y solo si el número de sus componentes es uno. Denotaremos por $C(G)$ a las componentes de G .

Decimos que v es un *vértice de corte* de G , si $C(G - v) > C(G)$. Decimos que a es una *arista de corte* (o puente) de G , si $C(G - a) > C(G)$.

G es llamada *bipartita*, si es posible separar al conjunto $V(G)$ en dos subconjuntos no vacíos V_1 y V_2 , tal que toda arista de G , une a un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . En la Figura 2.4 se muestra una gráfica bipartita. G es una *gráfica bipartita completa* $K_{m,n}$, es una gráfica con m vértices en V_1 y n vértices en V_2 , en la cual existe una arista entre cada vértice de V_1 y de V_2 .

Se dice que G es un *árbol* si G es una gráfica conexa y no tiene ciclos. G es un *bosque* si G es una gráfica que no contiene ciclos. (Puede ser conexa o disconexa).

Los siguientes resultados son útiles y frecuentemente utilizado de árboles.

Teorema 3. Sea $G = (V, A)$ un árbol, entonces para cualesquiera 2 vértices u y $v \in V$,

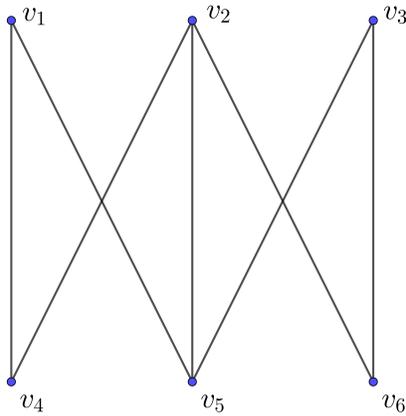


Figura 2.4: Gráfica bipartita.

existe un único camino que los une.

Demostración. Dado que todo árbol es conexo, existe al menos un uv -camino. Supongamos que existe más de un uv -camino y sean P_1 y P_2 dos de estos caminos. Dado que $P_1 \neq P_2$ existe al menos una arista $xy \in P_1$ tal que $xy \notin P_2$, como se muestra en la Figura 2.5. Entonces $(P_1 \cup P_2) - xy$ es conexa, por lo que existe un xy -camino, sea P tal camino, entonces $P \cup \{xy\}$ forma un ciclo, contradiciendo la hipótesis de que G es un árbol. \square

En la Figura 2.5 podemos ver una ilustración del Teorema 3.

Teorema 4. Si $G = (V, A)$ es un árbol, entonces $|A| = |V| - 1$.

Demostración. Por inducción en $|V|$. Supongamos que $|V| = 1$, entonces $|A| = 0 = |V| - 1$. Supongamos que el teorema es cierto para todo árbol con menos de $|V|$ vértices con $|V| \geq 2$. Tomemos la arista $uv \in A$, por el teorema anterior $G - uv$ es disconexa dado que no existe otro uv -camino y $C(G - uv) = 2$ (el número de componentes conexas de G), sean $H_1 = (V_1, A_1)$ y $H_2 = (V_2, A_2)$ tales componentes. Vemos que las dos son acíclicas y por tanto árboles con menos de $|V|$ vértices. Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que: $|A_i| = |V_i| - 1$ para $(i = 1, 2)$ y además sabemos que: $|A| = |A_1| + |A_2| + 1$ y $|V| = |V_1| + |V_2|$ por lo tanto: $|A| = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = |V| - 1$. \square

Una k -coloración de los vértices de G es una función $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Una coloración induce una partición de los vértices de G en conjuntos de la forma $c_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$. Estos conjuntos son llamados las clases cromáticas inducidas por c . Se dice que una k -coloración c de G es buena, si para cualesquiera dos vértices u y v adyacentes en G , se tiene que $c(u) \neq c(v)$.

Una gráfica es *plana* si tiene una representación en el plano, de tal manera que dos aristas tienen un punto común si y sólo si son adyacentes. Una *gráfica plana* divide al

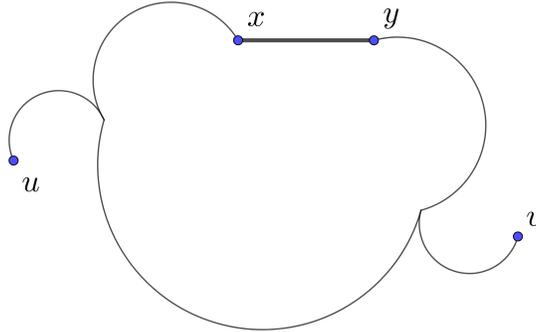


Figura 2.5: Ilustración del Teorema 3.

plano en diferentes regiones conexas, a la cerradura de cada una de estas regiones se le llama *cara de la gráfica* teniendo siempre una cara no acotada llamada *cara exterior*. El resto de caras son llamadas *caras interiores*. Sea $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ el conjunto de caras de G , decimos que dos caras f_i y f_j son *adyacentes* si comparten una arista e en su frontera, también diremos que e es *incidente en f_i y f_j* , de igual forma se dice que f_i y f_j son incidentes en e .

Euler enunció el siguiente teorema, el cual define una relación entre el número de aristas, vértices y caras de una gráfica plana, conocido como la fórmula de Euler.

Teorema 5. *Sea $G = (V, A)$ una gráfica conexa dibujada en el plano definiendo el conjunto de caras F , entonces: $|V| - |A| + |F| = 2$.*

Demostración. Por inducción sobre $|F|$. Supongamos que $|F| = 1$, entonces G tiene una única cara, la cual tendrá que ser su cara exterior, esto implica que G no tiene ciclos, por lo que al ser también conexa G es un árbol, entonces sabemos que: $|A| = |V| - 1$. Lo cual cumple con el teorema.

Ahora supongamos que el teorema es válido para toda gráfica plana conexa con menos de $n \geq 2$ caras, sea G una gráfica con n caras, y sea e una arista que no sea de corte en G . Entonces e incide en al menos una cara interior de G . Consideremos la gráfica $G - e$, se puede ver que las dos caras en las que incide e se convierte en una sola. Entonces $G - e$ es conexa con $n - 1$ caras y satisface la hipótesis de inducción. $G - e$ es una subgráfica generadora de G , y su número de aristas es $|A| - 1$, de modo que: $|V| - (|A| - 1) + (|F| - 1) = 2$. Por lo que obtenemos: $|V| - |A| + |F| = 2$. \square

Si G es una gráfica plana, se puede definir a otra gráfica G^* a partir de G de la siguiente

forma: Por cada cara f de G se tiene un vértice f^* en G^* , y por cada arista e de G , se consideran las caras f y g , incidentes en e , entonces G^* tendrá la arista e^* que conecta a los vértices f^* y g^* . Decimos que G^* es la *gráfica dual* de G , y podemos ver que G^* es también una gráfica plana, pues puede ser dibujada colocando cada vértice f^* en el interior de la cara f , y dibujando la arista e^* de forma que cruce sólo en un punto a e sin que cruce ninguna otra arista de G . Esta forma de dibujarla se puede ver en la Figura 2.6.

Una *gráfica geométrica*, es una gráfica dibujada en el plano, de tal forma que sus vértices son puntos, y una arista uv es el segmento \overline{uv} .

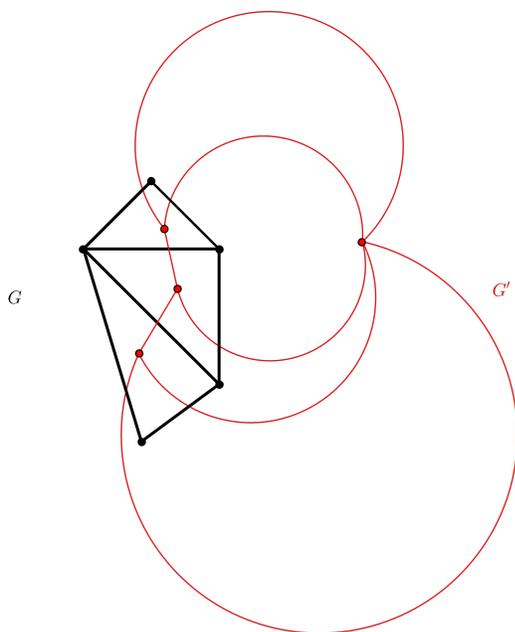


Figura 2.6: Una gráfica G , con su gráfica dual G' .

2.2. Galerías de arte e iluminación

El problema de la galería de arte se puede plantear de la siguiente forma: Dado un polígono simple P , encontrar el conjunto G de puntos mínimo en P , tal que todo punto de P es vigilado desde un punto de G .

En este capítulo se presentan variantes del problema original que muestran la intensa investigación que se ha realizado en el área en los últimos cuarenta años. Como ya se mencionó, para modelar galerías de arte generalmente se utilizan polígonos o poliedros. Ya que todos los resultados de esta investigación están modelados con polígonos o poliedros

ortogonales los resultados que presentamos en este capítulo se concentran justamente en este tipo de polígonos y poliedros.

Comenzaremos por presentar algunas definiciones que serán útiles a lo largo de la investigación.

Un *polígono* P es una secuencia ordenada de n puntos en el plano v_1, \dots, v_n ($n \geq 3$) llamados vértices de P , junto con el conjunto de segmentos de recta que unen v_i con v_{i+1} ($i = 1, \dots, n-1$) y v_n con v_1 llamadas aristas de P .

Un polígono P se dice que es un *polígono simple*, si y sólo si cualquier par de sus aristas no consecutivas no se intersectan entre sí.

Un polígono simple divide al plano en dos regiones, una no acotada llamada exterior y otra acotada llamada interior. Por simplicidad al decir polígono nos referiremos a un polígono simple junto con su interior.

Un polígono P se dice que es un *polígono ortogonal*, si y sólo si sus aristas son paralelas a alguno de los ejes coordenados, una consecuencia es que el ángulo entre dos aristas siempre es $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$.

Consideremos un polígono P y un conjunto de polígonos Q_1, \dots, Q_n , tales que $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ para $(i \neq j)$ y Q_i ($i = 1, \dots, n$) está totalmente contenido en el interior de P . El conjunto: $H = P - \bigcup_{i=1}^n \text{interior}(Q_i)$ será llamado *polígono con agujeros*. En el caso que P y Q_i ($i = 1, \dots, n$) sean polígonos ortogonales, H será llamado polígono ortogonal con agujeros.

Un polígono es llamado *ortogonal* si todas sus aristas son paralelas al eje x o al eje y . Sea P un polígono simple ortogonal en el plano, un *hoyo* de P es un polígono ortogonal contenido en el interior de P .

Dado un polígono ortogonal P en \mathbb{R}^2 , denotamos con $|P|$ el número de vértices de P , con ∂P , $\text{int}(P) = P - \partial(P)$, y $\text{ext}(P) = \mathbb{R}^2 - P$, a la frontera el interior y el exterior de P respectivamente. Análogamente dado un poliedro ortogonal \mathcal{P} en \mathbb{R}^3 , denotamos con $|\mathcal{P}|$, \mathcal{P} , $\partial\mathcal{P}$, $\text{int}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} - \partial(\mathcal{P})$, y $\text{ext}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$, como el número de vértices, la frontera, el interior y el exterior de \mathcal{P} respectivamente.

Una arista e de P es una *arista derecha* si existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquier punto a distancia menor o igual que ε de un punto interior de e y a la izquierda de e pertenece al interior de P . Una *arista izquierda, superior e inferior* se define de manera similar.

Una *diagonal de un polígono* P es un segmento de recta que conecta dos vértices de P y está en el interior de P .

Una *triangulación* $T(P)$ de un polígono P , es una división del interior de P en triángulos con interiores mutuamente ajenos, de tal forma que las aristas de estos triángulos solamente pueden ser aristas o diagonales de P .

Las siguientes definiciones serán utilizadas considerando también elementos en \mathbb{R}^3 .

Una cara f paralela al plano xz de un poliedro ortogonal \mathcal{P} es una *cara derecha* (*cara izquierda*), si para cualquier punto interior $q \in f$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquier punto a distancia menor o igual que ε y a la derecha (izquierda) de f pertenece al interior de \mathcal{P} . De manera similar se define una *cara superior* y *cara inferior* paralela al plano xy , así como una *cara frontal* y *cara posterior* paralela al plano yz .

Un *poliedro* en \mathbb{R}^3 es un conjunto compacto que tiene como frontera una variedad lineal bidimensional a trozos. Una *cara* de un poliedro es un subconjunto planar maximal de su frontera cuyo interior es conexo y no vacío. Un poliedro es *ortogonal* si todas sus caras son paralelas a los planos xy , xz o yz . Las caras de un poliedro pueden ser polígonos con hoyos, y si el poliedro es ortogonal, entonces sus caras y sus hoyos también son ortogonales. Un *vértice* de un poliedro es un vértice de cualquiera de sus caras. Una *arista* es un segmento de línea recta mínimo compartido por dos caras y que une dos vértices del poliedro.

Un *ortotárbol* [21] es un poliedro ortogonal simplemente conexo que es la unión de un conjunto de cajas $S = \{B_1, \dots, B_n\}$ en \mathbb{R}^3 pegadas cara a cara tal que la gráfica cuyos vértices son B_1, \dots, B_n , dos de los cuales son adyacentes si comparten una cara, es un árbol. Denotaremos a este árbol como T_P .

Un polígono o poliedro P es monótono en la dirección \vec{d} si cada línea ℓ en la misma dirección interseca el interior de P en a lo más una componente conexa de ℓ .

Un *histograma* es un polígono ortogonal H (o una rotación de H por un ángulo múltiplo de $\pi/2$) que tiene una arista e paralela al eje x tal que el segmento de línea vertical que conecta cualquier punto de H con e está contenido en H .

Un *polígono de escalera* es un polígono ortogonal cuya frontera se puede dividir en dos subcadenas que alteran vértices convexos y cóncavos, tal que los puntos finales de estas subcadenas son vértices convexos. Un polígono de escalera en el que una de sus subcadenas tiene un sólo vértice interior es llamado *abanico convexo*.

Dado un polígono P en el plano, definimos al *poliedro de levantamiento* generado por P y de altura c como el poliedro definido por el conjunto de puntos (x, y, λ) tal que $(x, y) \in P$ y $0 \leq \lambda \leq c$. Al resultado de aplicar la misma definición a un polígono ortogonal con hoyos ortogonales, lo llamaremos *poliedro ortogonal de levantamiento con hoyos*.

Decimos que dos puntos p y q en un polígono o poliedro P son *visibles* uno al otro si el segmento \overline{pq} se encuentra contenido en P ; llamaremos *visibilidad lineal* o *estándar* a este tipo de visibilidad. Si el rectángulo isotético más pequeño que contiene a p y q se encuentra contenido en P , entonces diremos que son visibles bajo el modelo de *visibilidad ortogonal* o *rectangular*.

Un punto p es *iluminado* por un punto q , si p es rectangularmente visible desde q . Un conjunto de puntos G (*guardias*) ilumina P , si cada punto en P es visible por al menos un elemento de G . Un conjunto G de guardias coloreados de un polígono o poliedro P *ilumina fuertemente* a P , si cada elemento p de P es visible desde al menos un elemento de G , y todos los elementos de G que ven a p tienen un color diferente.

Un *reflector* r es una lámpara que ilumina una zona angular de tamaño α . Llamaremos a r un reflector- α ; el tamaño de r también será llamado α . Si un reflector debe ser colocado en un vértice de un polígono P , se le llamará un *v-reflector*. En el caso que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, r se llamará un *reflector ortogonal*.

El *inicio de un reflector* f , es la semirecta orientada que comienza en el ápice de f y deja el área iluminada de f a la derecha, y el área no iluminada por f a la izquierda. El *final de f* se define de manera similar. La *orientación de un reflector* f , es el ángulo no negativo entre el eje positivo x y el comienzo de f .

Las siguientes definiciones son comunes a los modelos de visibilidad descritos anteriormente.

Dados dos subpolígonos ortogonales P_1 y P_2 de P . Decimos que P_1 y P_2 son *independientes* si ningún punto de P puede ver puntos de $\text{int}(P_1)$ y $\text{int}(P_2)$ de manera simultánea.

Considere dos puntos p y q en un polígono P . Para un punto p su *polígono de visibilidad* es el conjunto de puntos visibles desde p . Una *ventana* de un subpolígono P' de P son aquellas partes de la $\partial P'$ que no pertenecen a la ∂P . Una ventana de P' es una *ventana inferior* de P si la ventana pertenece a una arista inferior de P' . De manera similar definimos una *ventana superior*, una *ventana izquierda* y una *ventana derecha*. El *núcleo de visibilidad* de P , denotado por $K(P)$, es el conjunto de puntos en P desde donde son visibles todos los puntos de P . Considere que no todos los polígonos contienen un núcleo no vacío. El *polígono de visibilidad* de p , denotado por $\text{VP}(p)$, es el conjunto de puntos de P que son visibles desde p . El *núcleo de visibilidad* de p , denotado por $\text{VK}(p)$, es el conjunto de puntos desde donde es visible cada punto de $\text{VP}(p)$.

Ahora extendemos la definición de un *reflector* a \mathbb{R}^3 . Una *cuña* en \mathbb{R}^3 es la intersección, o unión de dos semiespacios cuyos planos de soporte se intersectan. La línea de intersección de los planos soporte es llamada el *eje* de la cuña. Una cuña es llamada *pequeña*, si es la intersección de dos semiespacios. Es llamada *grande* si es la unión de dos semiespacios. Note que si una cuña \mathcal{W} es pequeña, entonces la intersección de \mathcal{W} con un plano ortogonal al eje de \mathcal{W} , determina una zona angular \mathcal{A} de tamaño menor o igual a π , si \mathcal{W} es una cuña grande, entonces el tamaño de \mathcal{A} es mayor que π . La cuña \mathcal{W} será llamada *cuña- α* si el tamaño de \mathcal{A} es α . Una *cuña ortogonal* en \mathbb{R}^3 es la intersección o la unión de dos semiespacios cuyos planos de soporte son ortogonales. Si una cuña ortogonal es pequeña, es una cuña- $\frac{\pi}{2}$, si es grande es una cuña- $\frac{3\pi}{2}$.

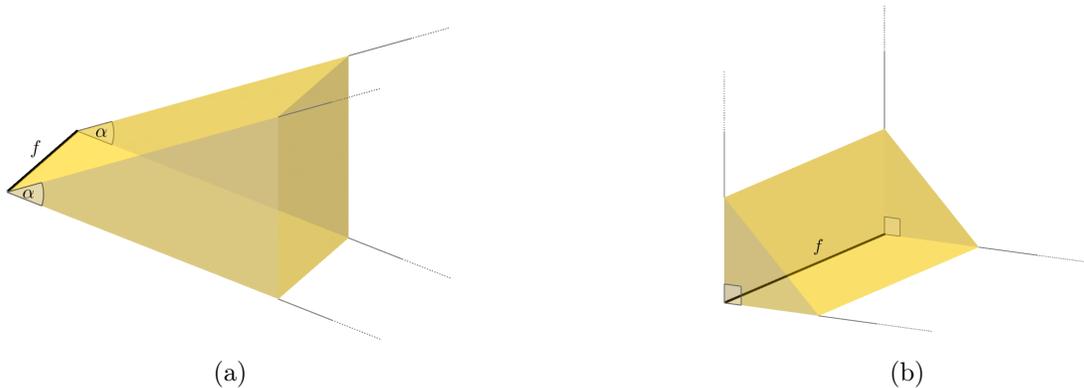


Figura 2.7: (a) Cuña de tamaño α , (b) cuña de tamaño $\pi/2$.

Sea f una arista de un poliedro \mathcal{P} . Llamamos a f un *guardia arista- α* de \mathcal{P} si f vigila todos los puntos de \mathcal{P} visibles desde f y contenidos en la cuña- α cuyo eje contiene f , vea la Figura 2.7a. Si $\alpha = \pi/2$ llamamos a f un *guardia arista ortogonal*. Notamos que los

guardias tipo aristas- α son generalizaciones naturales de los reflectores- α . Suponemos que un arista- α f puede ser rotada sobre su eje hasta alcanzar una orientación final. En el resto del trabajo suponemos que nuestras aristas- α son siempre colocados de tal forma que sus planos de soporte son siempre paralelos a los planos xy , xz o yz de \mathbb{R}^3 . En nuestro lenguaje los guardias tipo arista usados en [58] son aristas- 2π en los que los puntos finales no son incluidos.

Sea s un segmento de un poliedro \mathcal{P} . Llamamos a s un guardia segmento- α de \mathcal{P} si s vigila todos los puntos de \mathcal{P} visibles desde s y contenidos en la cuña- α cuyos ejes contiene s , vea la Figura 2.7a. Si $\alpha = \pi/2$ llamamos a s un *guardia segmento ortogonal*. Suponemos que un segmento- α s puede ser rotado sobre su propio eje hasta alcanzar una orientación final. En el resto del trabajo suponemos que nuestros segmentos- α son siempre colocados de tal forma que sus planos de soporte son siempre paralelos a los planos xy , xz o yz de \mathbb{R}^3 .

Utilizaremos aristas- $\frac{\pi}{2}$ f y segmentos- $\frac{\pi}{2}$ s para vigilar puntos p que se encuentren dentro de la cuña de $\pi/2$ con la restricción adicional de que la arista y el segmento de línea que une p y f así como p y s es un segmento de línea ortogonal a f y s respectivamente, vea la Figura 2.7b.

La Figura 2.8 muestra las variaciones consideradas en la literatura, guardias tipo aristas cerradas, aristas abiertas y aristas- $\frac{\pi}{2}$. Se puede ver que las aristas- $\frac{\pi}{2}$ son un modelo más débil ya que tienen un rango de iluminación menor que las aristas cerradas y abiertas.

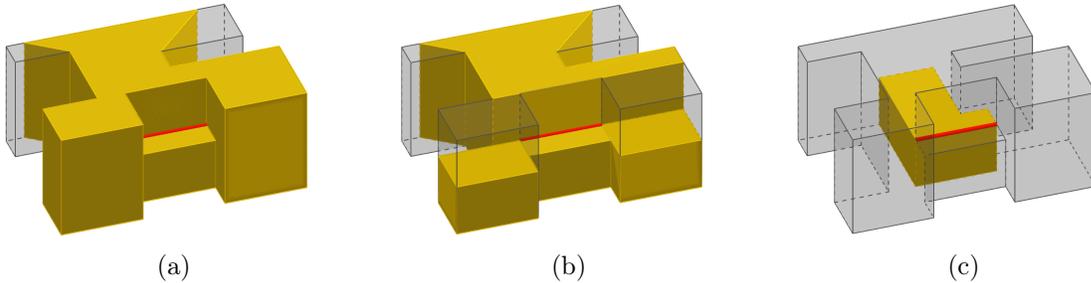


Figura 2.8: (a) Guardia tipo arista cerrado, (b) guardia tipo arista abierto, (c) guardia arista- $\frac{\pi}{2}$.

En el plano, para medir el ángulo interior de un vértice v en un polígono, generalmente consideramos un círculo suficientemente pequeño centrado en v que no contenga otros vértices del polígono, y medimos la porción del círculo que cae dentro del polígono, y lo dividimos por el radio. De esta forma tenemos ángulos que varían entre 0 y 2π . Es bien sabido que la suma de los ángulos internos de un triángulo es π . Ya que un polígono de n vértices puede ser particionado en exactamente $n - 2$ triángulos usando diagonales para unir pares de vértices del polígono, tenemos que la suma de ángulos internos de un polígono es siempre $(n - 2)\pi$. Se puede extender esta idea a \mathbb{R}^3 . Sea \mathcal{P} un poliedro en \mathbb{R}^3 , y sea v un vértice de \mathcal{P} . El *ángulo sólido* de \mathcal{P} en v es definido de la siguiente manera: Considere una esfera \mathcal{C} centrada en v . El tamaño del ángulo de \mathcal{P} en v es el *área* de la porción de la

frontera de \mathcal{C} que cae dentro de \mathcal{P} dividida por el cuadrado del radio de \mathcal{C} . Como el área de una esfera unitaria es 4π , tenemos que el tamaño máximo de un ángulo sólido en los vértices de un poliedro es a lo más 4π .

Clasificación de vértices en poliedros ortogonales

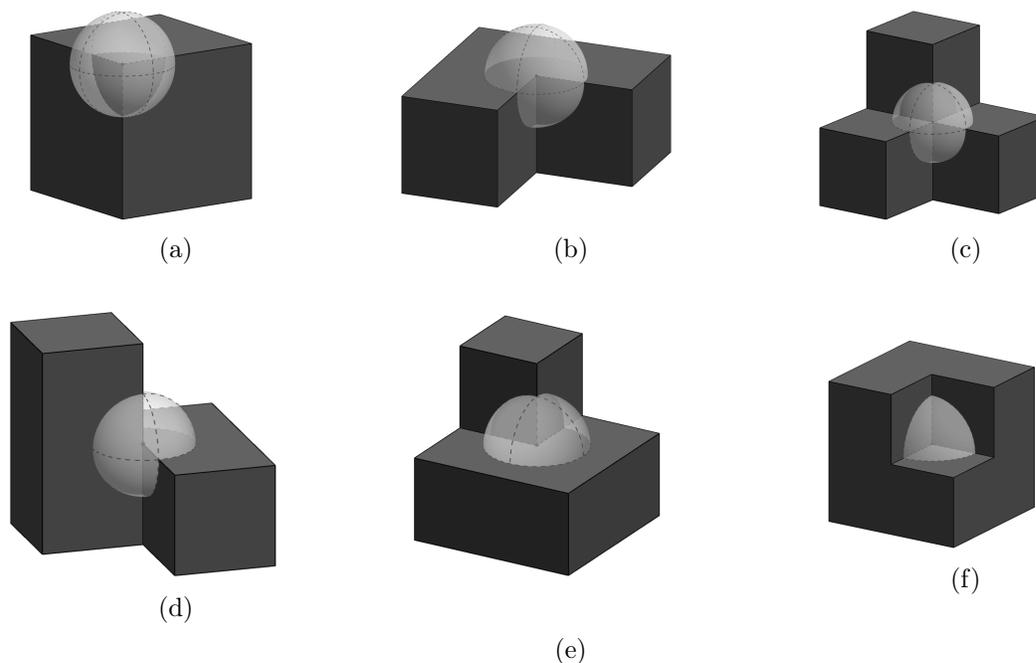


Figura 2.9: Clasificación de vértices para poliedros ortogonales: (a) vértice de 1 octante, (b) vértice de 3 octantes, (c) vértice de 4 octantes de grado seis, (d) vértice de 4 octantes de grado cuatro, (e) vértice de 5 octantes y (f) vértice de 7 octantes.

Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal en \mathbb{R}^3 . Clasificamos los vértices de \mathcal{P} de acuerdo al tamaño de sus ángulos sólidos interiores. Un vértice x de \mathcal{P} se clasifica como de 1 *octante* si su ángulo sólido interior es $\pi/2$, vea la Figura 2.9a, se clasifica como de 3 *octantes* si su ángulo sólido interior es $3\pi/2$, vea la Figura 2.9b. Los vértices de 4 *octantes*, 5 *octantes* y 7 *octantes* son definidos en forma similar como se muestra en las Figuras 2.9c, 2.9d, 2.9e y 2.9f respectivamente.

Recuerde que un vértice es *convexo* si participa en cada una de sus caras incidentes como vértice convexo o llano, y es *cóncavo* en cualquier otro caso. Por lo tanto, los vértices de 1 *octante*, 4 *octantes*, y 7 *octantes* son vértices convexos en sus caras; de 3 *octantes* y 5 *octantes* son vértices cóncavos en sus caras.

El *genero* g de una superficie orientada conexa, es un número entero que representa el número máximo de cortes a lo largo de curvas cerradas simples que no se intersectan entre

si, sin hacer que la variedad resultante se desconecte [43].

En nuestro resultado utilizamos la fórmula de Euler-Poincaré, que dice que para cualquier poliedro de género g con f caras, e aristas, v vértices y un total de h hoyos en sus caras, es cierta la identidad

$$v - e - h + f = 2 - 2g \text{ [47].}$$

Al estudiar el problema de vigilancia de galerías de arte, se pueden establecer diferentes tipos de restricciones, por ejemplo: a la forma de los polígonos utilizados para modelar la galería, a los guardias, a los que además se les puede restringir respecto a su ubicación en el polígono, así como también al tipo de visibilidad que utilizan los guardias dando origen variantes interesantes del problema.

2.2.1. Galerías ortogonales

En 1983 Kahn, Klawe y Keitman [38] demuestran lo siguiente:

Teorema 6. *Sea P un polígono ortogonal con n vértices, entonces para vigilar P son suficientes y en ocasiones necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices.*

Para la demostración descomponen el polígono en cuadriláteros convexos, se obtiene una gráfica 4-coloreable, de tal forma que cada cuadrilátero tenga un vértice de cada uno de los cuatro colores, la cual induce una partición de los vértices compuesta por cuatro partes, por lo que una de estas partes está compuestas por a los más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices, obteniendo así la suficiencia del teorema. Para la necesidad se puede ver que la familia de polígonos sugerida por la Figura 2.10 requiere al menos un guardia por cada lengua.

La mayor parte del artículo está dedicada a demostrar que todo polígono ortogonal tiene una descomposición en cuadriláteros convexos.

Edelsbrunner, O'Rourke y Welzl [31] presentaron un algoritmo que en tiempo $O(n)$ obtiene un conjunto de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices que vigilan un polígono ortogonal dado. Su algoritmo se basa en una descomposición del polígono en subpolígonos con forma de L .

Galerías de arte con agujeros

La introducción de los agujeros u hoyos en el estudio de las galerías de arte introduce una complejidad adicional, en la que en muchos caso hace que las cotas permanezcan abiertas y en muchos otros problemas hace que estos se vuelvan NP-Completo. O'Rourke en [45], da el siguiente resultado para polígonos con agujeros:

Teorema 7. *Sea $p^v(n, h)$ el número mínimo de vértices, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, entonces $p^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$*

La demostración procede eliminando los agujeros uno a la vez, cortando a P sobre una diagonal que una dos vértices de P , uno de los cuales es vértice de un agujero, y el otro pertenece a la cara exterior.

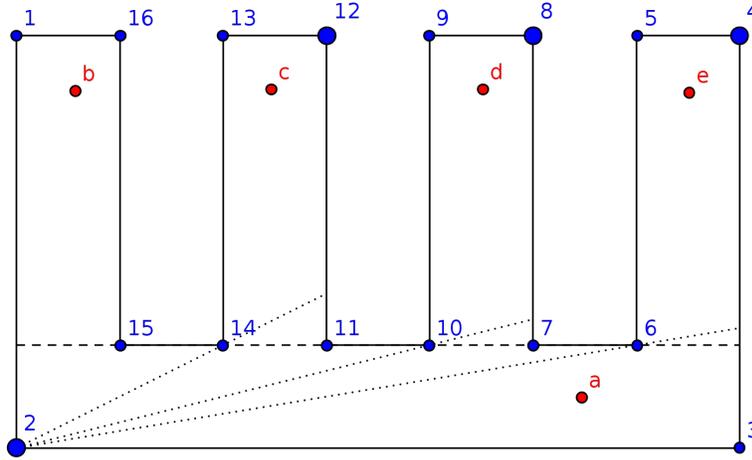


Figura 2.10: En ocasiones son necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices, para vigilar un polígono ortogonal.

Sea $p^p(n, h)$ el número mínimo de guardias, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, Shermer establece que $p^p(n, h) \geq \lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$, y conjetura que la cota es justa, demuestra su conjetura para $h = 1$, para valores mayores que 1 la conjetura continua abierta, estos resultados se pueden ver en [45].

Para guardias Bjorling-Sachs y Souvaine [14] e independientemente Hoffmann, Kaufman y Kriegel [27] demostraron:

Teorema 8. $\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$ guardias son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier polígono P con n vértices y h agujeros.

Bjorling-Sachs y Souvaine [15] presentan un algoritmo de tiempo $O(n^2)$ que encuentra la posición de tales guardias. La idea principal del resultado de Bjorling-Sachs y Souvaine consiste en remover un canal de cuatro lados, tal que un vértice nuevo es agregado por cada canal y además existe un triángulo T en el polígono resultante tal que cualquier vértice de T vigila el interior del canal. Este triángulo es forzado a aparecer en una triangulación del polígono resultante, de modo que usando la demostración de Fisk para el teorema de Chvátal se obtiene el resultado.

Para polígonos ortogonales, el método de O'Rourke se extiende para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 9. Sea $ort^v(n, h)$ el número mínimo de vértices necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h agujeros ortogonales, entonces

$$ort^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor.$$

Sea $ort^p(n, h)$ el número mínimo de guardias necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h agujeros ortogonales, O'Rourke en [45] conjetura que $ort^p(n, h)$ es independiente de h : $ort^p(n, h) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, Aggarwal [2] verificó esta conjetura para $h = 1$

Autor	Resultado	Referencia
O'Rourke	$p^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$	[45]
Shermer	$p^p(n, h) \geq \lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$	[45]
Bjorling-Sachs y Souvaine	$p^p(n, h) \leq \lceil \frac{n+h}{3} \rceil$	[14]
Hoffmann, Kaufman y Kriegel	$p^p(n, h) \leq \lceil \frac{n+h}{3} \rceil$	[27]
O'Rourke	$ort^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$	[45]
Hoffman	$ort^p(n, h) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$	[32]

Tabla 2.1: $p^p(n, h)$ es el número mínimo de guardias, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, $p^v(n, h)$ es el número mínimo de vértices, mismas condiciones, $ort^v(n, h)$ es el número mínimo de vértices, necesarios para vigilar un polígono ortogonal P con n vértices y h agujeros, $ort^p(n, h)$ es el número mínimo de guardias, mismas condiciones.

y $h = 2$, y permaneció abierta hasta 1990, cuando F. Hoffmann [32] demostró el siguiente resultado.

Teorema 10. *Sea $ort^p(n, h)$ el número mínimo de guardias necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h agujeros ortogonales, entonces*

$$ort^p(n, h) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor.$$

Hoffman procedió demostrando que cualquier polígono ortogonal con agujeros puede ser dividido en $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ polígonos en forma de estrella, cada uno con a lo más 16 vértices.

Para vértices la cota superior se mantiene en $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$, sin embargo, Shermer conjetura que $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ vértices siempre bastan para vigilar un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros [45].

En la Tabla 2.2 se presenta un resumen de los resultados sobre Galerías de arte con agujeros.

2.2.2. Iluminación con reflectores

Un problema estudiado sobre iluminación con reflectores, se conoce como el problema de la iluminación de estrados, en [55] J. Urrutia estudió este problema, el cual consiste en determinar si los reflectores de un teatro pueden ser rotados sobre sus bases de tal manera que todo el estrado quede iluminado.

Supongamos que tenemos un segmento de línea L y un conjunto de reflectores $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ representados por fuentes de luz que iluminan una zona angular de tamaño α_i , ($i = 1, \dots, n$). Supongamos que los vértices de dichos reflectores están fijos y que éstos se pueden rotar sobre sus vértices. ¿Será posible rotar $\{r_1, \dots, r_n\}$ de tal manera que L quede iluminado? Un ejemplo se puede ver en la Figura 2.11.

En [35] Ito Hiroy, Uehara Hideyuki y Yokoyama Mitsuo demostraron que el problema es NP-Completo.

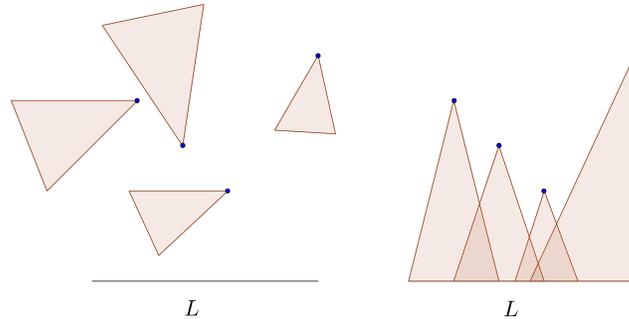


Figura 2.11: El problema de la iluminación de estrados.

Los problemas de iluminación óptima de estrados con reflectores han sido estudiados en [37] y [35], de iluminación del plano en [52], y de iluminación de polígonos en [44].

Iluminación de polígonos ortogonales

En [26] Vladimir Estivill y Jorge Urrutia, así como en [54] establecen un resultado que a la postre se convirtió en la base para muchos resultados adicionales, los cuales permiten introducir movimiento en los reflectores así como aumentar la dimensión de las galerías, el resultado se presenta a continuación.

Teorema 11. *Sea P un polígono ortogonal de n vértices, entonces $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales, ubicados en los vértices, son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar P .*

Para la demostración primero se establecen cuatro reglas para colocar reflectores (reglas de iluminación), donde cada una de ellas es capaz de iluminar el interior de un polígono ortogonal: $\{NE, NO, SE, SO\}$.

Dado un polígono P , una arista e de P se dice que será una arista norte (arista-N), si el interior del polígono se encuentra por debajo de e , análogamente definimos las aristas sur, este y oeste. Un vértice se dice que es vértice-NE si las aristas del polígono que inciden en el vértice son una arista norte y una arista este. De manera similar se definen vértice-NO, vértice-SE y vértice-SO, como se ilustra en la Figura 2.12.

A continuación se definen las siguientes reglas de iluminación:

1. Regla NE: para cada arista norte e del polígono, colocar un reflector ortogonal alineado con e en el vértice este de e ; para cada arista este e del polígono, colocar un reflector ortogonal alineado con e en el vértice norte de e , como se muestra en la Figura 2.13 (a).
2. Las reglas NO, SE, y SO se definen de manera similar.

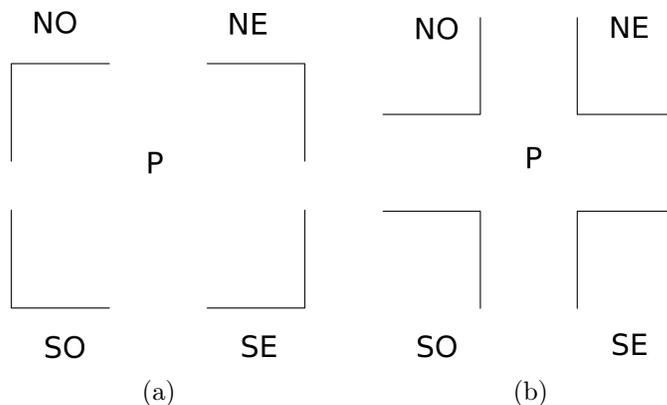


Figura 2.12: Los polígonos ortogonales pueden tener 8 tipos de vértices, (a) vértices convexos, (b) vértices cóncavos.

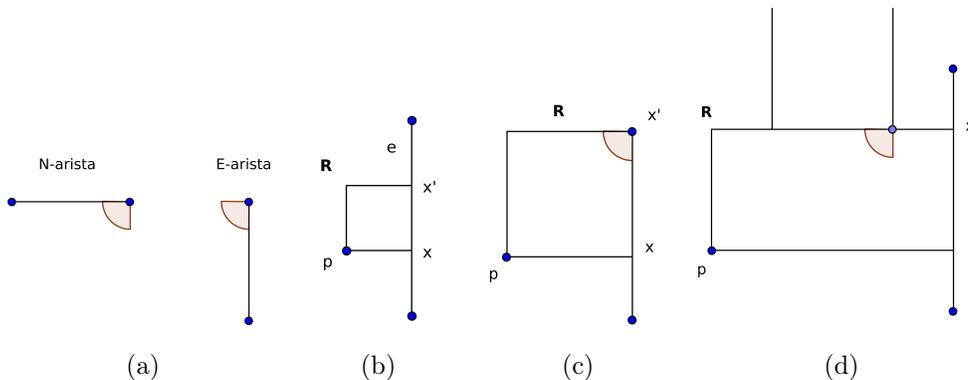


Figura 2.13: (a) Colocación de los reflectores utilizando la regla NE en arista norte y en arista este, (b),(c) y (d) Ilustración del Teorema 12.

Veremos que estas reglas de iluminación producen una asignación de los reflectores ortogonales de tal forma que iluminan el interior de un polígono ortogonal.

Teorema 12. *La regla noreste produce una asignación de reflectores que iluminan el interior de un polígono ortogonal P .*

Demostración. Sea p un punto en el interior del polígono P . Sea x el primer punto en la frontera de P visible por un rayo horizontal que sale de p hacia el este. Entonces x se encuentra en una arista este e y p es visible desde x .

Ahora considere un punto x' en e justo arriba de x , y considere el rectángulo R cuyos puntos extremos son x' y p , como se muestra en la Figura 2.13 (b). Si x' se encuentra lo suficientemente cerca de x , el rectángulo R estará contenido en P . Considere mover x' hacia el norte mientras R se mantenga completamente contenido en el interior de P , en

algún momento no se podrá continuar. Esto sucede porque:

- x' ha alcanzado el vértice norte de e , en cuyo caso, p es iluminado por un reflector en este punto, como se muestra en la Figura 2.13 (c).
- El lado superior del rectángulo R ha coincidido con una arista norte, en cuyo caso, p es iluminado por un reflector en el punto este de esta arista norte, como se muestra en la Figura 2.13 (d).

En cualquier caso p es iluminado y la demostración se ha completado. \square

La demostración de las otras reglas es similar.

Demostración del Teorema 11. Por las reglas de iluminación previamente descritas, el polígono P puede iluminarse de cuatro maneras diferentes colocando reflectores ortogonales en vértices de P .

Los conjuntos de reflectores utilizados en las reglas NO, NE, SE, y SO son ajenos. Se puede ver que al poner reflectores ortogonales usando simultáneamente las cuatro reglas de iluminación, en cada vértice cóncavo se pondrán exactamente dos reflectores y en cada vértice convexo uno, como se ilustra en la Figura 2.14.

Como el número de vértices cóncavos es $\frac{n-4}{2}$, y el número de vértices convexos es $\frac{n+4}{2}$ [55]; el número total de reflectores utilizado por las cuatro reglas es $\frac{3n-4}{2}$. Esto indica que una de las cuatro reglas de iluminación utiliza a lo más $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales.

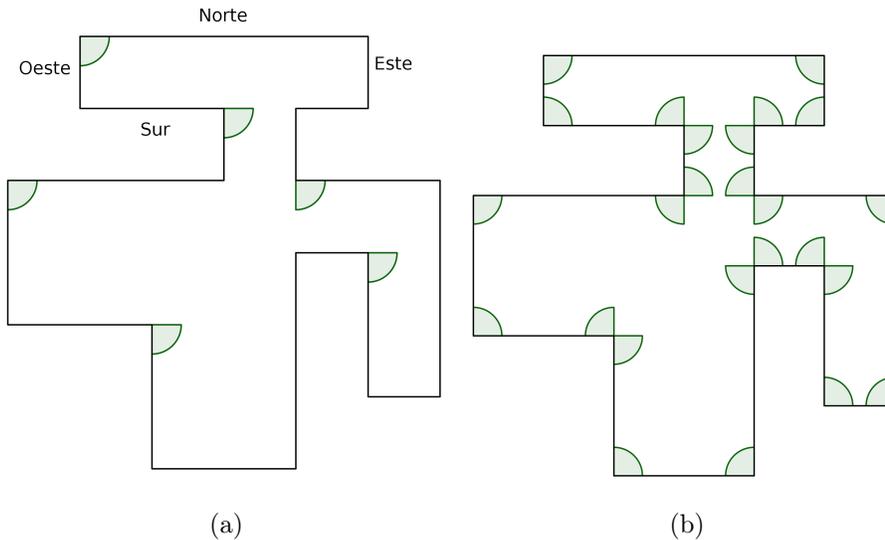


Figura 2.14: (a) Colocación de los reflectores utilizando la regla NO. (b) Colocación de los reflectores utilizando todas las reglas.

Para demostrar que existen polígonos que requieren $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales, considere los polígonos de la Figura 2.15. El primero P_{12} que llamaremos la hélice con cuatro

aspas tiene 12 vértices, y requiere cuatro reflectores ortogonales. El segundo se obtiene pegando dos hélices por un aspa. Se puede ver que el número de vértices se incrementa en 8, y el número de reflectores requeridos en tres.

Repitiendo esta operación de pegar copias extras de P_{12} se puede obtener una familia de polígonos con $n = 12 + 8m$ vértices que requieren $4 + 3m$ reflectores ortogonales, es decir $4 + 3\lfloor \frac{n-12}{8} \rfloor = \lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ lo cual se demuestra la cota inferior. \square

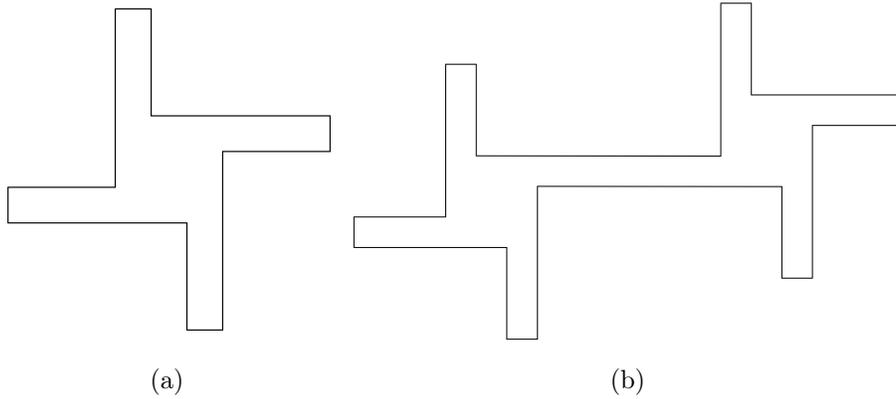


Figura 2.15: (a) Una hélice con cuatro aspás y 12 vértices requiere cuatro reflectores ortogonales. (b) Pegando dos hélices por un aspa el número de vértices se incrementa en 8, y el número de reflectores requeridos en tres.

A continuación se presenta la extensión del resultado anterior a polígonos ortogonales con agujeros, el resultado puede consultarse en [36], y como es de suponerse las cotas están en función del número de hoyos.

Teorema 13. *Sea P un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros. Un total de $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales son suficientes para iluminar P .*

Demostración. Iluminemos P utilizando cada una de las reglas de iluminación descritas anteriormente, Teorema 12. Sea $\|X\|$ el número de reflectores utilizados por la regla X .

Notemos que cada arista del polígono recibe a lo más dos reflectores (por ejemplo, una arista norte recibe un reflector en su vértice este, con la regla noreste; y uno en su vértice oeste, con la regla noroeste) y los conjuntos de reflectores para cada par de reglas son ajenos. Más aún, en la regla noreste un vértice convexo recibe sólo un reflector. Por lo tanto el número de reflectores $\|NE\|$ usados por la regla noreste es $\|NE\| = \|SE\|_r + \|NO\|_r + \|NE\|_c$, donde $\|SE\|_r$ es el número de vértices sureste cóncavos, y $\|NE\|_c$ es el número de vértices noreste convexos.

Entonces el número total de vértices ortogonales usados por las cuatro reglas está dado por $\|NE\| + \|NO\| + \|SE\| + \|SO\| = 2r + c$, donde r es el número de vértices cóncavos en el polígono P y c es el número de vértices convexos.

Ya que para un polígono ortogonal sin agujeros $c = \frac{n+4}{2}$ y $r = \frac{n-4}{2}$; y como para un polígono ortogonal con agujeros los vértices convexos en el agujero son vértices cóncavos en el polígono, mientras que los vértices cóncavos en el agujero son vértices convexos en el polígono. Tenemos que la regla de iluminación que utiliza el menor número de reflectores utiliza $\lfloor \frac{2r+c}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2(r_0+c_1+\dots+c_h)+c_0+r_1+\dots+r_h}{4} \rfloor$ reflectores, donde $c_i + r_i = n_i$ y c_i es el número de vértices convexos en el i -ésimo agujero. Como $n = \sum_{i=0}^h n_i$, se tiene que $\lfloor \frac{2r+c}{4} \rfloor$ es $\lfloor \frac{2(\frac{n_0-4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i+4}{2}) + \frac{n_0+4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i-4}{2}}{4} \rfloor = \lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ lo cual completa la demostración. \square

Para ver que la cota es justa se tiene el siguiente teorema.

Teorema 14. [36] *Sea P un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros. Un total de $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar P .*

Demostración. Para demostrar la necesidad de este número de reflectores, considere el polígono P_{32} de la Figura 2.16(a). Esta figura contiene 32 vértices, un agujero, y requiere 12 reflectores. Evaluando la fórmula $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ para $n = 32$ y $h = 1$ obtenemos 12 reflectores. Para valores mayores de h pegamos nuevamente copias de P_{32} a lo largo de una arista vertical como en la Figura 2.16(b). Repitiendo este proceso h veces, se producen polígonos con $32 + 28h$ vértices que requieren $12 + 11h$ reflectores, lo cual demuestra el resultado. \square

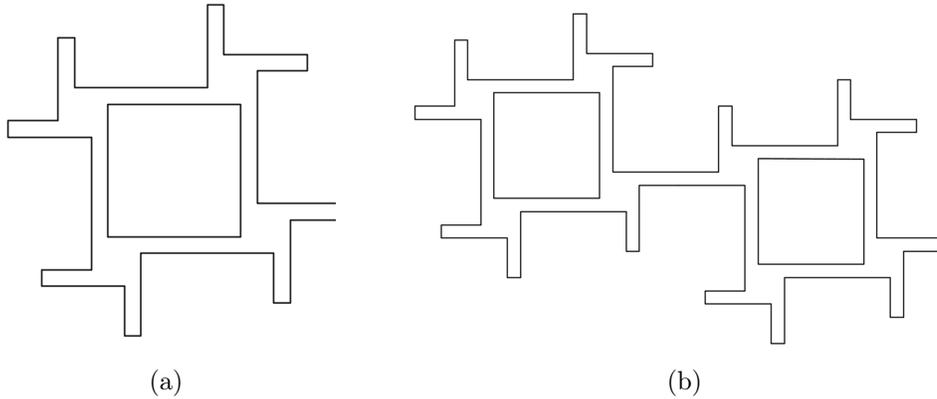


Figura 2.16: (a) Una hélice con 32 vértices y un agujero que requiere 12 reflectores ortogonales. (b) Familia de $32 + 28h$ vértices que requiere $12 + 11h$ reflectores, donde h es el número de agujeros.

2.2.3. Iluminación con radares

Una evolución interesante de la investigación realizada sobre galerías de arte fue el dejar de considerar a estas como entes estáticos. A continuación vemos algunas de estas

variantes en las que se agrega movimiento a la visibilidad los guardias. En [23] E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales y J. Urrutia presentan resultados interesantes utilizando radares con diferentes variantes.

Sea P un conjunto de puntos en el plano y R una región plana. Sea $F(P; R)$ el ínfimo sobre todos los ángulos $\alpha \leq 2\pi$ tal que si radares- α son localizados en los puntos de P . Entonces existe una orientación inicial de los radares de tal forma que toda la región R es vigilada. Sea R una región en el plano. Sea $F(n; R)$ el ínfimo sobre todos los $F(P; R)$ donde P es un conjunto de radares- α . Considere un radar- α colocado en un punto k que rota en sentido positivo. Definimos el sector vigilado por el radar en el tiempo t , de la siguiente manera:

- Sea $F_k(\phi; 0)$ que denota el sector inicial definido por el radar cuando su orientación es ϕ ; éste es el sector circular definido por un círculo de radio infinito centrado en k y delimitado por kk_ϕ y $kk_{\phi+\alpha}$.
- Al tiempo t el radar rotará un ángulo de t radianes. Sea $F_k(\phi, t)$ que denota el sector circular al tiempo t , el cual está definido por un círculo de radio infinito, centrado en k y delimitado por $kk_{\phi-t}$ y $kk_{\phi-t+\alpha}$.

Teorema 15. [23] Para cualquier conjunto P de $n \geq 2$ radares en una recta L , se tiene que $F(P; L) = \frac{3\pi}{n}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que la recta L es horizontal. Sea $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto de n radares- α en L , y sean los puntos tales que la coordenada x de p_i sea menor que la de p_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Primero se demuestra que el ángulo $\frac{3\pi}{n}$ es siempre suficiente. Sea la orientación inicial de los radares $F_{p_i}(\frac{i3\pi}{n}; 0)$, para ($i = 0, 1, \dots, n-1$), como se muestra en la Figura 2.17.

Se define un plano dual de la siguiente manera: cada radar i es un sector circular de un círculo unitario C delimitado por $\frac{i3\pi}{n}$ y $\frac{(i+1)3\pi}{n}$; en el tiempo t la recta L es representada como un segmento dirigido \vec{L} tal que \vec{L} cruza el centro de C y la cabeza de \vec{L} forma un ángulo t con el eje horizontal, como se muestra en la Figura 2.18 (a).

En el plano dual los radares son estáticos mientras que L rota de manera continua. La orientación \vec{L} de L preserva la rotación de los radares en el plano original. La cabeza de \vec{L} representa ∞ , mientras que la cola representa $-\infty$ del plano original.

Como la suma de ángulos es 3π , el sector circular $[0, \pi)$ de C en el plano dual es siempre vigilado por dos conjuntos ($S_1, S_2 \subseteq P$) de radares, mientras que el sector circular $[\pi, 2\pi)$ de C en el plano dual es vigilado por un conjunto ($S_3 \subseteq P$) de radares.

Observe que cada radar en S_3 está entre S_1 y S_2 en el plano original. Sean $a \in S_1$, $b \in S_2$ y $c \in S_3$ los radares que vigilan un segmento de \vec{L} en el tiempo t en el plano dual. Si a y b vigilan la cabeza de \vec{L} , c vigila la cola. Por lo tanto, L está vigilada por c y b en el plano original. De manera similar si a y b vigilan la cola de \vec{L} , c vigila la cabeza. Por lo tanto, L está vigilada por a y c en el plano original.

Ahora se demuestra que un ángulo de $\frac{3\pi}{n}$ es siempre necesario. Supongamos por contradicción que la suma de ángulos es menor que 3π . Entonces existe un tiempo t en el que sólo dos radares, supongamos a y b , vigilan un segmento de \vec{L} en el plano dual como se representa en la Figura 2.18 (b). Supongamos que a vigila la cola y b la cabeza de \vec{L} en el plano dual, como se muestra en la Figura 2.18 (b). Por lo tanto, L está completamente vigilada en el plano original. Sin embargo, en el tiempo $(t + \pi)$ a vigila la cabeza y b la cola de \vec{L} en plano dual. Por lo tanto, el segmento \overline{ab} de L en el plano original no está cubierto. \square

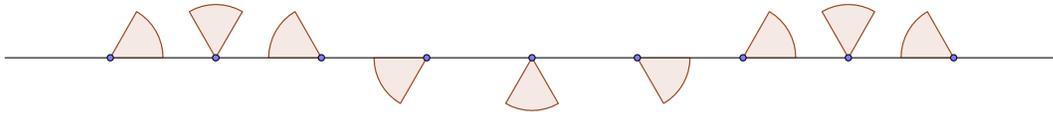


Figura 2.17: Orientación inicial de α -reflectores giratorios para vigilar una recta L .

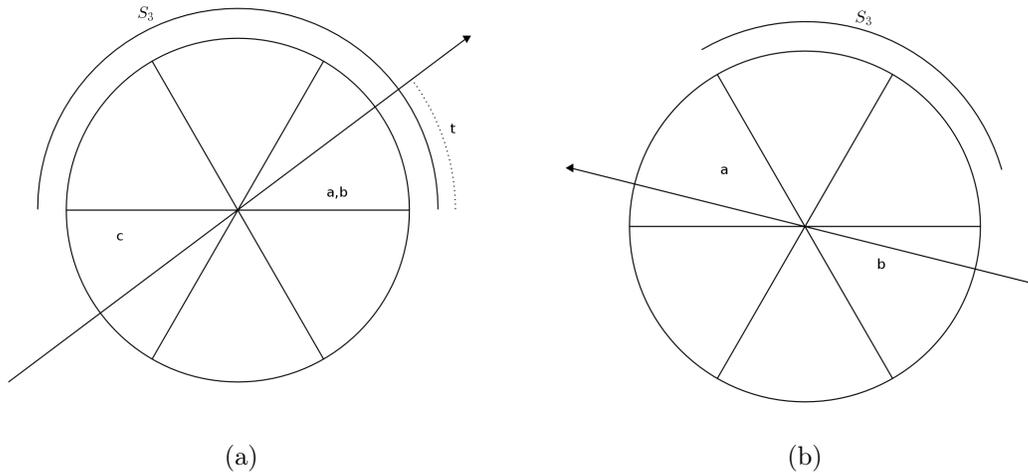


Figura 2.18: Ilustración del Teorema 15. (a) Recta representada como un segmento dirigido que cruza el centro de C y la cabeza forma un ángulo t con el eje horizontal. (b) Si $F(n, L) < \frac{3\pi}{2}$, L no siempre está completamente vigilada.

Vigilancia de polígonos ortogonales, utilizando radares- $\frac{3\pi}{2}$

En [26], Estivill Castro y J. Urrutia establecen que $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar un polígono ortogonal de n vértices. Durante la demostración del resultado, se establecen cuatro reglas $\{NE, NO, SE, SO\}$ para

colocar reflectores (reglas de iluminación), donde cada una de ellas es capaz de iluminar el interior de un polígono ortogonal. Utilizando estas reglas en [3] I. Aldana et. al demostraron el siguiente resultado.

Teorema 16. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices son suficientes m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.*

Demostración. La orientación, donde el ángulo recto sin vigilancia de un radar- $\frac{3\pi}{2}$, coincide con el cuarto cuadrante del plano cartesiano, se denominará *orientación canónica*, como se muestra en la Figura 2.19 (a).

Para vigilar un polígono ortogonal P con radares- $\frac{3\pi}{2}$, bastará ver que en todo momento está activa alguna de las reglas de iluminación antes mencionadas.

Supongamos que se coloca un radar- $\frac{3\pi}{2}$ con orientación canónica en cada vértice de un polígono ortogonal P . Supongamos también que estos radares giran de manera continua a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo en sentido negativo; entonces completarán un ciclo de 2π en cuatro etapas de $\frac{\pi}{2}$ cada una.

Durante la etapa $E1$, los radares pasarán de su posición inicial $P0$ a una posición $P1$, vigilando un área subtendida por un ángulo π con centro en el radar, como se muestra en la Figura 2.19 (a).

Si se colocan los ejes del plano cartesiano haciendo coincidir el origen con los radares, entonces durante la etapa $E1$ los cuadrantes I y II estarán vigilados, como se muestra en la Figura 2.19 (b).

El área vigilada, cuadrantes I y II , contiene al área que se obtendría si se utilizaran las reglas de iluminación SE y SO con reflectores ortogonales. Si se analizan de manera similar el resto de las etapas, llegaremos al resumen presentado en la Tabla 2.2 y se puede verificar en la Figura 2.20 (a).

Analizando la Tabla 2.2, se puede ver que en cada etapa está contenida el área vigilada por dos reglas diferentes. También se puede observar que el conjunto de reglas $\{NE, SO\}$ es suficiente para vigilar P durante las cuatro etapas, ya que en cada etapa aparece al menos una de las reglas. De la misma forma el conjunto de reglas $\{NO, SE\}$ es suficiente para vigilar P .

Observemos que los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ utilizan vértices ajenos para la colocación de radares, como se puede ver en la Figura 2.20 (b) y (c), y se resume en la Tabla 2.3. Los dos conjuntos de reglas utilizan el total de los vértices de P , por lo tanto los conjuntos $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ inducen una partición del conjunto de vértices.

La partición inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ es de dos partes, por lo tanto una de ellas está compuesta por a lo más m vértices. Si mantenemos radares en los vértices de esta parte, tendremos que son suficientes m radares para vigilar el interior de P . \square

Después demuestran que las partes de la partición inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, utilizan cada una exactamente m radares- $\frac{3\pi}{2}$ ubicados en los vértices.

Etapas	Cuadrantes	Reglas
$E1$	II y I	SE, SO
$E2$	I y IV	SO, NO
$E3$	IV y III	NO, NE
$E4$	III y II	NE, SE

Tabla 2.2: Cuadrantes vigilados por las etapas $E1$ a $E4$ con radares- $\frac{3\pi}{2}$ ubicados en los vértices, iniciados con orientación canónica en un polígono ortogonal P ; junto con el área iluminada que se obtendría si se utilizaran reglas de iluminación con reflectores ortogonales en P .

Conjunto	vértices			
$\{NE, SO\}$	NE_c	SO_c	NO_r	SE_r
$\{NO, SE\}$	NE_r	SO_r	NO_c	SE_c

Tabla 2.3: Partición de los vértices inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, donde NE_c es el vértice convexo NE y NE_r es el vértice cóncavo NE ; el resto de vértices se definen de manera similar.

Corolario 1. *Sea P un polígono ortogonal. Si se colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ ubicados en los vértices con orientación canónica, utilizando el conjunto de reglas de iluminación $\{NE, SO\}$ o $\{NO, SE\}$. Entonces el interior de P estará vigilado.*

Demostración. El resultado se obtiene de la demostración del Teorema 16. \square

Para demostrar la necesidad, primero veremos que un radar no es suficiente para vigilar un punto en el plano, y que dos radares sí lo son.

Teorema 17. *Para mantener vigilado permanentemente un punto en el plano, un radar- $\frac{3\pi}{2}$ no es suficiente, mientras que dos, sí lo son.*

Demostración. Sea p un punto en el plano, y A otro punto en el que se encuentra un radar- $\frac{3\pi}{2}$. Sea t un instante en el que el radar está justo antes de dejar de vigilar a p , es evidente que un ϵ después p no estará vigilado, como se puede ver la Figura 2.21 (a).

Sean A y B dos puntos con radares- $\frac{3\pi}{2}$ que giran a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo en sentido negativo. Coloquemos el radar de A en la misma posición del caso anterior. Coloquemos el radar de B vigilando p justo al comienzo de su periodo de vigilancia, como se muestra en la Figura 2.21 (b).

El radar en B vigilará continuamente p por un periodo de $\frac{3\pi}{2}$, al finalizar este periodo, el radar en A se encontrará vigilando a p justo cuando faltan $\frac{\pi}{2}$ para dejar de hacerlo, como se muestra en la Figura 2.21 (c).

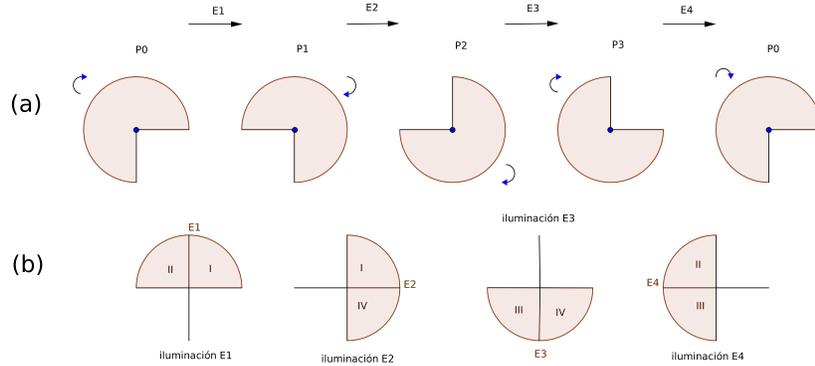


Figura 2.19: Etapas de iluminación de un $v\frac{3\pi}{2}$ -reflector giratorio que gira en sentido negativo durante un ciclo completo de 2π , y donde cada etapa dura $\frac{\pi}{2}$.

Al finalizar el último periodo de $\frac{\pi}{2}$ los radares de A y B se encontrarán nuevamente en la configuración inicial, vigilando a p continuamente. \square

Teorema 18. *En ocasiones son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$ ubicados en los vértices, para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices.*

Demostración. Consideremos el polígono de la Figura 2.22(a), por el Teorema 17 los puntos a , b y c deben ser vigilados por al menos dos radares.

El punto a sólo puede ser vigilado por radares ubicados en los vértices 2, 3, 4 y 5. El punto b sólo puede ser vigilado por los vértices 1, 2, 5 y 6. El punto c sólo puede ser vigilado por los vértices 1, 6, 7 y 8.

En cualquier selección que hagamos de los vértices, al utilizar dos por cada uno de los puntos a , b y c , será necesario utilizar al menos cuatro de los ocho vértices para colocar radares.

Ahora considere la sucesión de polígonos sugerida por el polígono de la Figura 2.22(b). Al agregar un polígono igual al de la Figura 2.22(a), y unirlos por los vértices 8 y 7 de la figura original a los vértices 3 y 4 de la nueva copia respectivamente, tendremos la Figura 2.22(b).

Si observamos la Figura 2.22(b), se puede ver que el análisis previo se mantiene igual hasta el punto c , para los puntos d y e el análisis es similar ya que d sólo puede ser vigilado por los puntos 7, 8, 11 y 12, mientras que e sólo puede ser vigilado por los puntos 8, 9, 10 y 11.

Para este nuevo polígono se agregaron cuatro vértices, y fue necesario utilizar al menos dos de ellos para mantenerlo vigilado, es claro que si seguimos agregando polígonos como

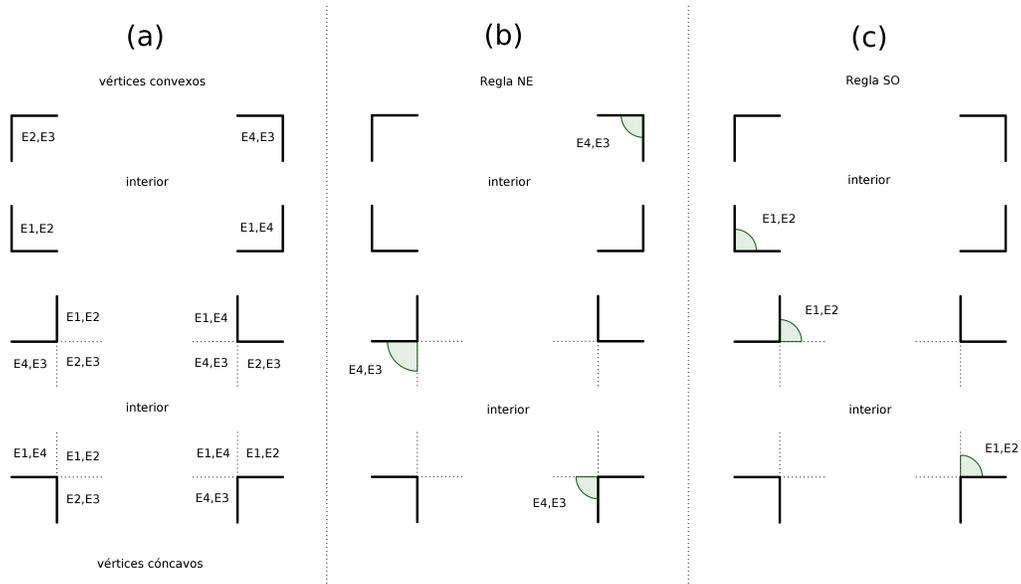


Figura 2.20: (a) Área iluminada por $v\frac{3\pi}{2}$ -reflectores giratorios ubicados en los 8 tipos de vértices existentes durante las etapas de iluminación (E1,E2,E3,E4). (b) Regla de iluminación de la regla NE. (c) Regla de iluminación de la regla SO.

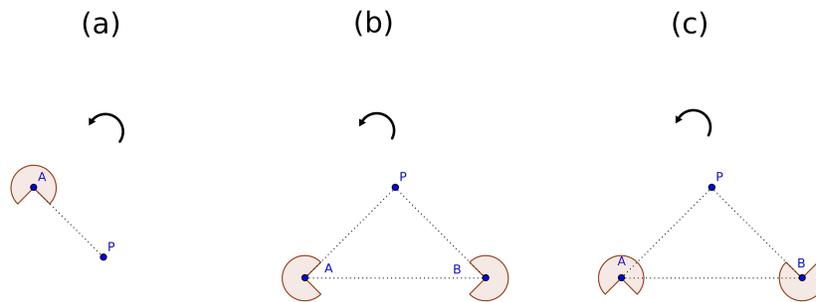


Figura 2.21: Son necesarios al menos dos $\frac{3\pi}{2}$ -reflectores giratorios para iluminar continuamente un punto P .

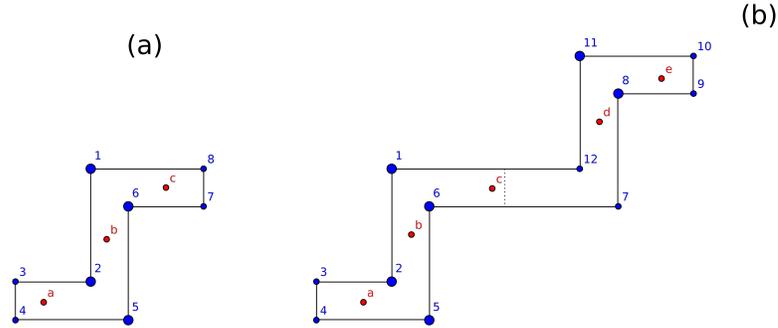


Figura 2.22: En ocasiones son necesarios $\frac{n}{2}$ o $\frac{3n}{2}$ -reflectores giratorios para iluminar el interior de un polígono ortogonal.

los de la Figura 2.22(a) de la misma manera, será necesario utilizar al menos m vértices para mantener vigilado el nuevo polígono. \square

Teorema 19. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices, son suficientes y en ocasiones necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$ ubicados en los vértices.*

Demostración. Por los Teoremas 16 y 18 se obtiene el resultado. \square

2.2.4. Vigilancia de poliedros ortogonales con guardias tipo arista

En [7] I. Aldana et al. demostraron una generalización de un resultado bien conocido para polígonos ortogonales en el plano, el cual dice que un polígono ortogonal con n vértices tiene $(n+4)/2$ vértices convexos y $(n-4)/2$ vértices cóncavos. Se demostró que un poliedro ortogonal simple y conexo con n vértices, k de los cuales tienen grado mayor o igual a cuatro; tiene $(n+8+3k)/2$ vértices convexos y $(n-8-3k)/2$ vértices cóncavos.

Aplicaron este resultado a una variante del problema de la galería de arte en poliedros ortogonales. La variante es la siguiente: Dado un poliedro ortogonal \mathcal{P} en \mathbb{R}^3 , encontrar el mínimo número de guardias tipo *arista- $\frac{\pi}{2}$* (aristas con una cuña de visibilidad de tamaño $\pi/2$) que pueden vigilar \mathcal{P} . Demostraron que si \mathcal{P} tiene k_4 vértices de grado cuatro, k_6 vértices de grado seis, genero g y h_m hoyos en sus caras; entonces se puede vigilar utilizando a lo más $(11e - k_4 - 3k_6 - 12g - 24h_m + 12)/72$ aristas- $\frac{\pi}{2}$.

A continuación presentamos los resultados de esta investigación. Comenzaremos por generalizar las fórmulas para saber cuál es el número de vértices tanto convexos como cóncavos de un poliedro ortogonal en \mathbb{R}^3 .

Teorema 20. *Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal en \mathbb{R}^3 homeomorfo a la esfera con $n = 2k$ vértices, tal que su uno-esqueleto es una gráfica regular de grado tres. Entonces \mathcal{P} tiene $(n + 8)/2$ vértices convexos y $(n - 8)/2$ vértices cóncavos.*

Demostración. Como cada vértice tiene grado tres el número de aristas e es $3k$. Por la fórmula de Euler, el número de caras f es $k + 2$. El número de vértices cóncavos en un polígono ortogonal es $(n - 4)/2$, entonces el número de vértices cóncavos en cada cara de \mathcal{P} es $(V_i - 4)/2$, donde V_i es el número de vértices en la i -ésima cara de \mathcal{P} . Entonces el número de vértices cóncavos de \mathcal{P} es:

$$r = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{V_i - 4}{2} \quad (2.1)$$

Multiplicando por dos la ecuación (2.1), tenemos:

$$2r = \sum_{i=1}^{k+2} V_i - \sum_{i=1}^{k+2} 4$$

Como cada vértice pertenece a tres caras, al realizar la primer suma cada vértice es contado tres veces;

$$\begin{aligned} 2r &= 6k - 4(k + 2) \\ r &= k - 4 \end{aligned}$$

Como $n = 2k$, $r = (n - 8)/2$, y ya que $n = c + r$, $c = (n + 8)/2$. □

Ahora demostraremos dos lemas que nos permitirán incorporar vértices de cuatro octantes en la contabilización de vértices convexos y cóncavos de un poliedro ortogonal cuyo uno esqueleto es conexo.

Lema 1. *Sea P un polígono ortogonal con n vértices, s de los cuales son llanos. Entonces el número de vértices convexos de P es $c = (n - s + 4)/2$, y el número de vértices cóncavos es $r = (n - s - 4)/2$.*

Demostración. Como la suma de los ángulos internos de un polígono simple es $\pi(n - 2)$, el ángulo de cada vértice convexo es $\pi/2$, el ángulo de cada vértice cóncavo es $3\pi/2$, y el ángulo de cada vértice llano es π ;

$$\pi(n - 2) = \left(\frac{\pi}{2}\right) c + \left(\frac{3\pi}{2}\right) r + (\pi)s.$$

Resolviendo para c y reemplazando en $n = c + r + s$ tenemos $n = 2r + s + 4$. Por lo tanto, $r = (n - s - 4)/2$ y $c = (n - s + 4)/2$. □

Ahora demostraremos el siguiente lema para polígonos ortogonales con hoyos:

Lema 2. Sea P un polígono ortogonal con n vértices, s de los cuales son llanos, y h hoyos. Entonces el número de vértices convexos es $c = (n - s - 4h + 4)/2$, y el número de vértices cóncavos es $r = (n - s + 4h - 4)/2$.

Demostración. Observe que un hoyo es un polígono ortogonal en el que sus vértices convexos son vértices cóncavos en P , sus vértices cóncavos son vértices convexos en P , y sus vértices llanos son vértices llanos en P . Por lo tanto, utilizando el Lema 1 tenemos que si m es el número de vértices en P sin considerar los hoyos, s_m de los cuales son llanos, y cada hoyo tiene n_i vértices, s_i de los cuales son llanos; entonces el número de vértices cóncavos de P es:

$$r = \left(\sum_{i=1}^h \frac{n_i - s_i + 4}{2} \right) + \frac{m - s_m - 4}{2} = \frac{n - s + 4h - 4}{2}$$

Entonces tenemos que el número de vértices convexos c en P es $c = (n - s - 4h + 4)/2$. \square

Consideremos k_3 como el número de vértices de grado tres, k_4 el número de vértices de grado cuatro y k_6 el número de vértices de grado seis en el uno esqueleto de un poliedro.

Teorema 21. Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal en \mathbb{R}^3 con $n = k_3 + k_4 + k_6$ vértices y género g . Entonces \mathcal{P} tiene $(n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$ vértices cóncavos y $(n + 3(k_4 + k_6) - 8g + 8)/2$ vértices convexos.

Demostración. El número de aristas e es $3k_3/2 + 2k_4 + 3k_6$. Usando la fórmula de Euler-Poincaré, el número de caras f es $k_3/2 + k_4 + 2k_6 + 2 + h - 2g$. Por el Lema 2, el número de vértices cóncavos en \mathcal{P} es:

$$r = \sum_{i=1}^f \frac{V_i - s_i + 4h_i - 4}{2} \tag{2.2}$$

Donde V_i es el número de vértices, s_i es el número de vértices llanos, y h_i es el número de hoyos de la i -ésima cara de \mathcal{P} . Resolviendo la Ecuación (2.2) tenemos:

$$2r = \sum_{i=1}^f V_i - \sum_{i=1}^f s_i + \sum_{i=1}^f 4h_i - \sum_{i=1}^f 4$$

En la primer suma contamos el total de vértices. Los vértices k_3 son contados tres veces, los vértices k_4 son contados cuatro veces, y los vértices k_6 son contados seis veces. La segunda suma cuenta el total de vértices llanos, pero existen sólo vértices k_4 y son contados dos veces. La tercer suma nos da el total de hoyos en \mathcal{P} . Entonces tenemos:

$$2r = 3k_3 + 4k_4 + 6k_6 - 2k_4 - 4(k_3/2 + k_4 + 2k_6 + 2 - 2g) \tag{2.3}$$

$$2r = k_3 - 2k_4 - 2k_6 - 8 + 8g \tag{2.4}$$

Como $n = k_3 + k_4 + k_6$ obtenemos

$$r = (n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$$

ya que $n = c + r$ y $c = (n + 3(k_4 + k_6) + 8 - 8g)/2$. □

Ahora demostramos un lema de vigilancia sobre poliedros en \mathbb{R}^3 .

Definimos a continuación la regla de colocación (reglas de vigilancia) para guardias tipo aristas- $\frac{\pi}{2}$ de la misma forma que en [1], en aristas paralelas al eje x de un poliedro P como sigue: En la regla *superior derecha* colocamos un guardia en cada arista derecha de cada cara superior de P , y en cada arista superior de cada cara derecha de P ; de tal forma que su ángulo de iluminación cubra el intervalo 3π a 2π . Definimos tres reglas adicionales, *superior izquierda*, *inferior derecha*, e *inferior izquierda* de manera similar.

Lema 3. *Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal con género g y h agujeros en sus caras. Entonces \mathcal{P} puede ser vigilado por guardias de tipo arista de tamaño $\pi/2$, utilizando cualquiera de las siguientes reglas: superior derecha, superior izquierda, inferior derecha e inferior izquierda.*

Demostración. Demostraremos el resultado para la regla *superior derecha*, la demostración de las otras reglas es similar. Sea p un punto en \mathcal{P} y β el plano que contiene a p y es paralelo al plano yz . Sea Q la intersección entre \mathcal{P} y β . Q está formado por un conjunto de polígonos ortogonales. Observe que la regla *superior derecha* coloca guardias de tipo reflector de tamaño $\pi/2$ como en la regla de iluminación *superior derecha* de [1], la cual ilumina Q y por lo tanto, vigila a p . □

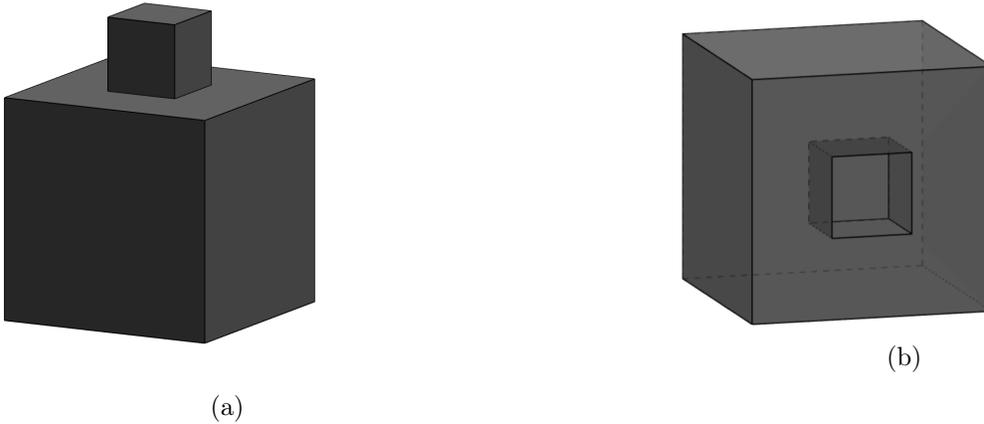


Figura 2.23: (a) Dos poliedros ortogonales pegados, (b) un poliedro ortogonal excavado de otro.

Algunas caras de un poliedro ortogonal \mathcal{P} pueden tener hoyos. Cuando estos hoyos aparecen el uno esqueleto de \mathcal{P} se puede llegar a desconectar, por ejemplo vea la Figura 2.23b. En este ejemplo se excavó un poliedro ortogonal H de una caja en el centro de una de sus caras, la llamaremos f . Observe que los vértices de k octantes de H se convierten en vértices de $(8 - k)$ octantes en \mathcal{P} excepto por aquellos que caen en f ; en ese caso los vértices de 1 octante de H se convierten en vértices de 3 octantes de \mathcal{P} , y los vértices de 3 octantes de H se convierten en vértices de 1 octante de \mathcal{P} , (i.e. los vértices convexos se convierten en vértices cóncavos y viceversa). Observe que al menos cuatro vértices de H en f son cóncavos; y dos de las aristas incidentes a ellos son convexas, mientras que la otra es cóncava. Por lo tanto, las reglas de vigilancia colocan cuatro aristas- $\frac{\pi}{2}$ en estas aristas. Ésto será utilizado en la demostración del próximo teorema, ya que nos permitirá ahorrar cuatro aristas por hoyo en el que hayamos excavado un poliedro ortogonal (en esa demostración colocaremos cinco aristas- $\frac{\pi}{2}$ en las aristas incidentes a los vértices cóncavos de grado tres).

Existe otro caso en el que el uno esqueleto de \mathcal{P} se desconecta, y sucede cuando en lugar de excavar un poliedro ortogonal H , lo pegamos en el centro de una cara f de \mathcal{P} , ver Figura 2.23a. En este caso es fácil ver que cuando aplicamos las reglas de vigilancia a \mathcal{P} descritas anteriormente, los puntos de \mathcal{P} en H serán vigilados por aristas en H ; y los puntos en $\mathcal{P} - H$ puede ser vigilado por aristas en el uno esqueleto de $\mathcal{P} - H$. Esto implica que la aristas de H en f pueden ser consideradas como aristas convexas cuando aplicamos las reglas de vigilancia. Por lo tanto, nos ahorramos al menos cuatro guardias tipo aristas, uno por cada arista cóncava de H en f .

En ambos casos nos ahorramos al menos cuatro guardias por hoyo.

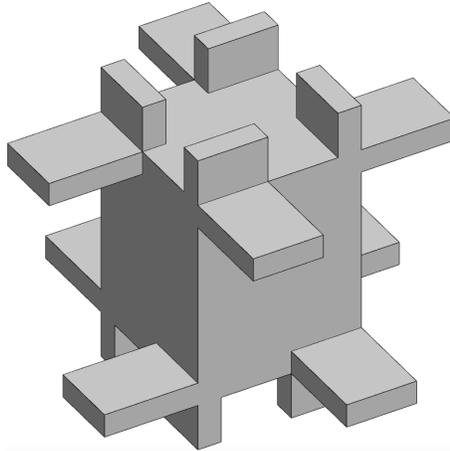


Figura 2.24: Poliedro ortogonal que alcanza la cota inferior del Teorema 23.

Teorema 22. *Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal con n vértices, k_4 de grado cuatro, k_6 de grado seis, e aristas, género g y h_m hoyos en las caras de \mathcal{P} . Entonces $(11e - k_4 - 3k_6 - 12g - 24h_m + 12)/72$ aristas- $\frac{\pi}{2}$ siempre son suficientes para vigilar el interior de \mathcal{P} .*

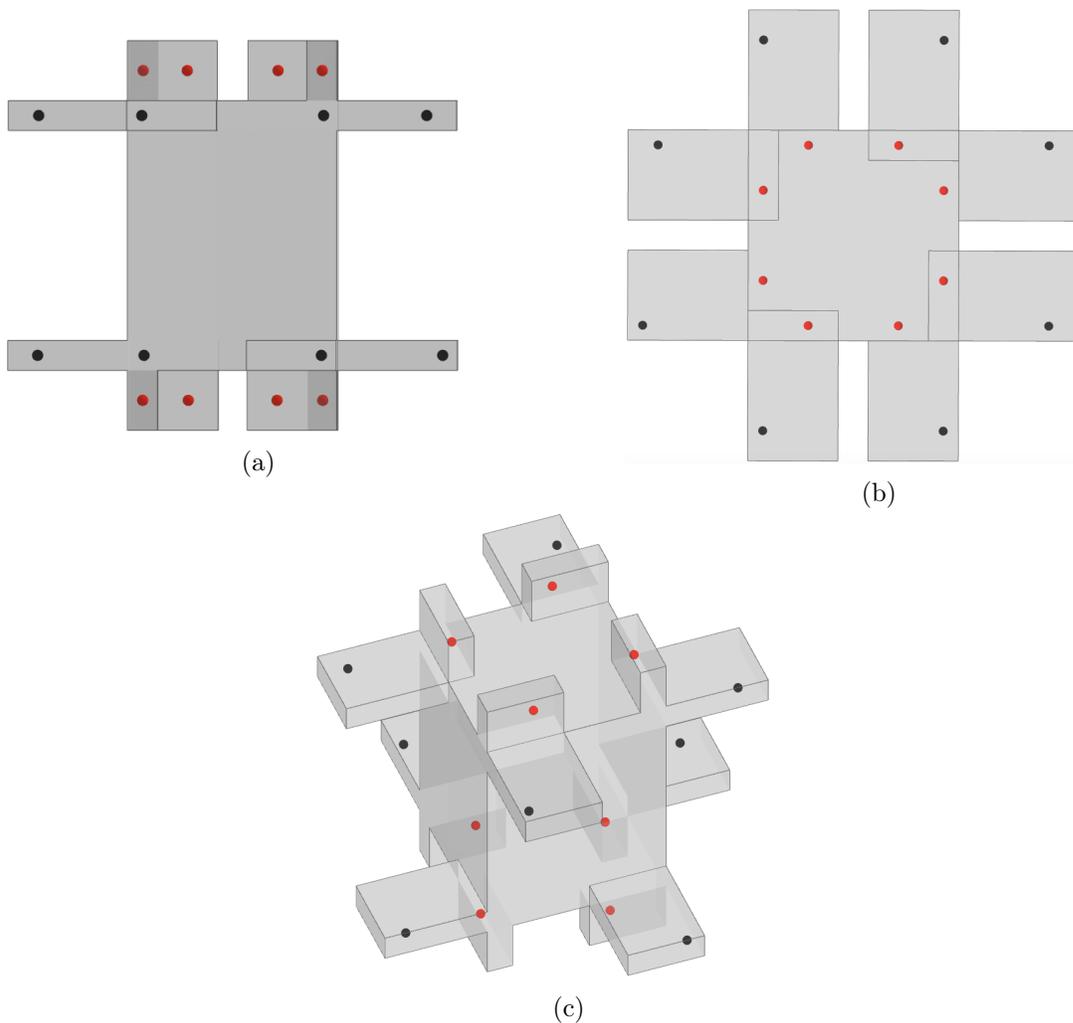


Figura 2.25: Puntos distinguidos, (a) vista frontal, (b) vista Superior, (c) vista de 45° .

Demostración. Primero encontraremos la cantidad de aristas convexas y cóncavas que son incidentes a cada uno de los diferentes tipos de vértices que tiene \mathcal{P} .

Observe que cada vértice de un octante es incidente a tres aristas convexas. Cada vértice de tres octantes es incidente a dos aristas convexas y una arista cóncava. Cada vértice de cuatro octantes con grado cuatro, es incidente a dos aristas convexas y dos aristas cóncavas. Cada vértice de cuatro octantes con grado seis, es incidente a tres aristas convexas y tres aristas cóncavas. Cada vértice de cinco octantes es incidente a una arista convexa y dos aristas cóncavas. Finalmente cada vértice de siete octantes es incidente a tres aristas cóncavas.

Por el Teorema 21, \mathcal{P} tiene $c = (n + 3(k_4 + k_6) - 8g + 8)/2$ vértices convexas y $r =$

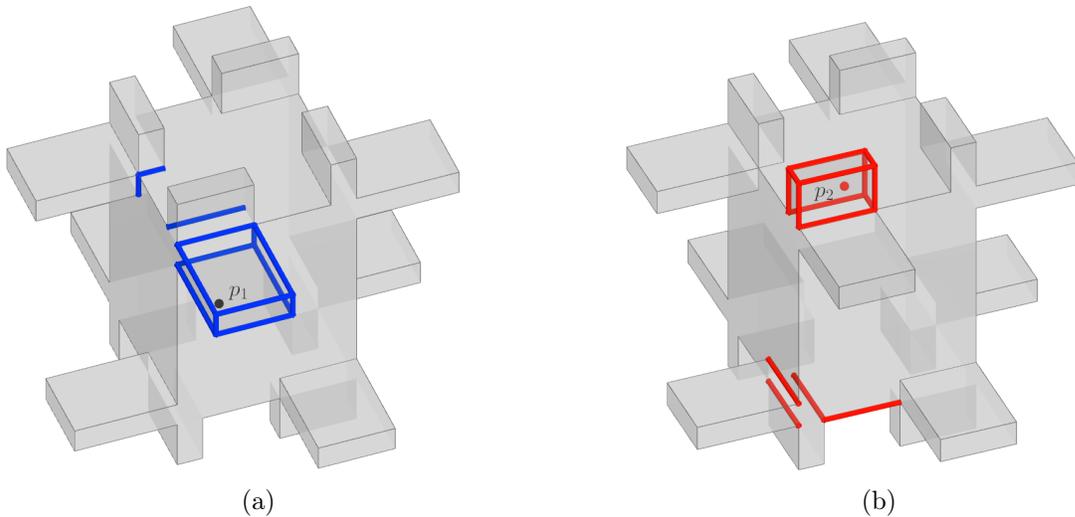


Figura 2.26: (a) Punto distinguido p_1 y un conjunto de guardias aristas- $\pi/2$ que lo vigilan (b) punto distinguido p_2 y un conjunto de guardias aristas- $\pi/2$ que lo vigilan.

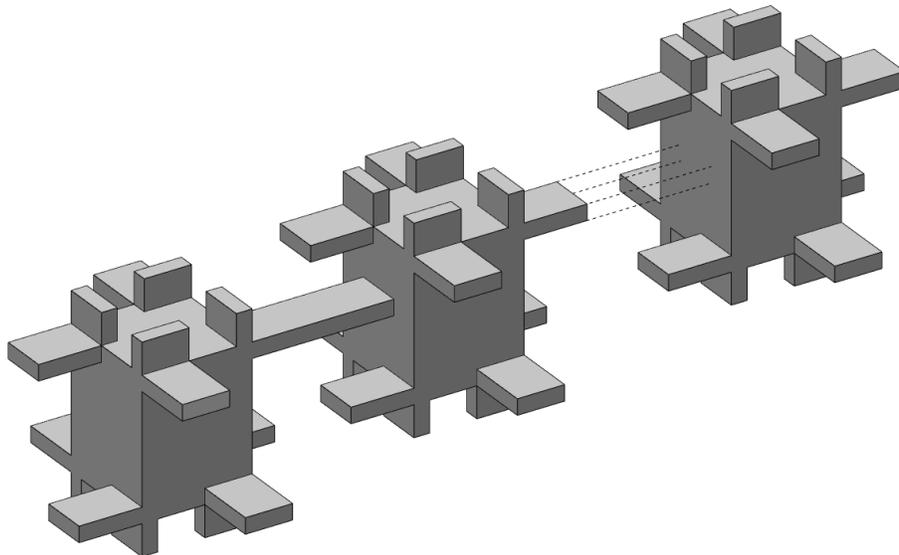


Figura 2.27: Familia de poliedros ortogonales, que necesitan $\frac{4}{45}e$ guardias para vigilar el poliedro.

$(n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$ vértices cóncavos. Observe que de acuerdo con la definición, los vértices de cuatro octantes ya sea que tengan grado cuatro o seis son convexos. Si restamos de c los vértices k_4 y k_6 tenemos que \mathcal{P} tiene $c' = (n + k_4 + k_6 - 8g + 8)/2$ vértices convexos de grado tres, k_4 de cuatro octantes y grado cuatro, k_6 de cuatro octantes y grado seis, y

$r = (n - 3(k_4 + k_6) + 8g - 8)/2$ vértices cóncavos.

En el peor caso cada vértice convexo es adyacente a tres aristas cóncavas, cada vértice de cuatro octantes de grado cuatro es adyacente a dos aristas convexas y dos aristas cóncavas, cada vértice de cuatro octantes de grado seis es adyacente a tres aristas cóncavas y tres aristas convexas, y cada vértice cóncavo es adyacente a dos aristas cóncavas y una convexa.

Colocamos aristas- $\frac{\pi}{2}$ en todas las aristas paralelas al eje x utilizando las reglas *superior izquierda*, *superior derecha*, *inferior izquierda*, e *inferior derecha*.

De forma similar, colocamos aristas- $\frac{\pi}{2}$ en todas las aristas paralelas a los ejes y y z de \mathcal{P} . Ésto utilizará un total de $(6c' + 6k_4 + 9k_6 + 5r)/2$ aristas- $\frac{\pi}{2}$. Supongamos que \mathcal{P} tiene un número de aristas paralelas al eje x menor o igual que el de las aristas paralelas a los ejes y y z . Entonces seleccionamos de entre las reglas la que coloque un número menor de guardias.

Tenemos que $(6c' + 6k_4 + 9k_6 + 5r)/24$ aristas- $\frac{\pi}{2}$ son siempre suficientes para vigilar \mathcal{P} . Substituyendo c' y r en la ecuación previa, tenemos un total de $(11n + 3k_4 + 9k_6 - 8g + 8)/48$ aristas- $\frac{\pi}{2}$.

Como \mathcal{P} tiene h_m hoyos en sus caras, y para cada una de ellas podemos ahorrarnos cuatro guardias concluimos que el número de aristas- $\frac{\pi}{2}$ en \mathcal{P} es $(11n + 3k_4 + 9k_6 - 8g - 16h_m + 8)/48$. Si sustituimos $n = (2e - k_4 - 3k_6)/3$ en el número aristas- $\frac{\pi}{2}$, entonces tendremos finalmente que $(11e - k_4 - 3k_6 - 12g - 24h_m + 12)/72$ aristas- $\frac{\pi}{2}$ son siempre suficientes para vigilar el interior de \mathcal{P} . \square

Teorema 23. *Existen poliedros ortogonales con e aristas tales que el número de guardias tipo aristas- $\frac{\pi}{2}$ necesarios para vigilar su interior es de al menos $\frac{4}{45}e$.*

Demostración. Consideramos el poliedro \mathcal{P} ilustrado en la Figura 2.24. Está formado por un cubo en el que sus vértices han sido reemplazados por poliedros con forma de L . Cada poliedro L está formado por 21 aristas y 14 vértices. Por lo que todas las L junto con las 21 aristas del cubo original forman un poliedro con un total de 180 aristas. Mostraremos que \mathcal{P} requiere de al menos 16 aristas- $\frac{\pi}{2}$ para ser vigilado.

Sea \mathcal{A} el conjunto de puntos distinguidos de \mathcal{P} mostrado en la Figura 2.25. Mostraremos que ninguna arista de \mathcal{P} puede vigilar más de un punto de \mathcal{A} . Sean p_1 y p_2 los puntos en \mathcal{A} que están situados en una L de \mathcal{P} , también mostrados en las Figuras 2.26a y 2.26b, respectivamente. Note que el conjunto \mathcal{E}_1 de aristas gruesas mostrado en la Figura 2.26a contiene a las únicas aristas de \mathcal{P} que pueden ver al punto p_1 y ninguna de ellas puede ver otro punto en \mathcal{A} . También observe que el conjunto de aristas gruesas de \mathcal{E}_2 mostrado en la Figura 2.26b contiene a las únicas aristas de \mathcal{P} que pueden ver al punto p_2 y ninguna de ellas puede ver otro punto en \mathcal{A} . Por lo tanto, se necesita una arista- $\frac{\pi}{2}$ por cada punto en \mathcal{A} , lo que resulta en al menos 16 guardias.

Podemos extender \mathcal{P} a una familia de poliedros al unir un número arbitrario de copias de \mathcal{P} . Se pueden pegar a través de extender uno de los cuboides de una L y pegarlo en una cara del cubo central de la siguiente copia, vea la Figura 2.27. Observe que al hacer esto necesitaremos la misma proporción de aristas- $\frac{\pi}{2}$ para vigilar el poliedro, la cual es $\frac{4}{45}e$. \square

Capítulo 3

Variante del PGA en ortoáboles

3.1. Definiciones

Comenzamos este capítulo con algunas definiciones adicionales.

Sea $p = (x_1, y_1, z_1)$ y $q = (x_2, y_2, z_2)$ tal que $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, y $z_1 < z_2$. Entonces llamamos *caja* al conjunto de puntos $\{(x, y, z)\}$ tal que $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, y $z_1 \leq z \leq z_2$.

Sea P un ortoárbol que es la unión del conjunto de cajas $S = \{B_1, \dots, B_m\}$. Observe que no todos los vértices de una caja $B_i \in S$ son vértices de P . Dos cajas de P que comparten una cara común, tal que ninguno de los vértices de esa cara son vértices de P se llamarán *cajas redundantes*. En este caso, las dos cajas se pueden combinar en una sola caja sin afectar la estructura de P . Por lo tanto, en el resto de este documento asumiremos que P no contiene pares de cajas redundantes.

Observe que dada una caja B_i de P , un vértice v de B_i no es un vértice de P si v pertenece exactamente a dos cajas de P . En todos los demás casos posibles, es decir, si v es el vértice de una, tres o cuatro cajas de P , entonces v es un vértice de P .

Clasificamos las cajas de un ortoárbol como en [22] de la siguiente manera: Una caja $B_i \in S$ es una *hoja* si en T_p es adyacente a una sola caja. Una caja $B_i \in S$ es una *unión* si existen al menos dos cajas adyacentes a B_i y se intersecan entre sí. Una caja $B_i \in S$ es un *conector* si es adyacente a exactamente dos cajas que no se intersecan entre sí. Tenga en cuenta que cualquier conector se debe intersecar con al menos dos uniones. Un *corredor* de P es una caja contenida en P que es la unión de al menos dos cajas de S y no está propiamente contenida en otra caja contenida en P , vea la Figura 3.1.

Para demostrar que un ortoárbol se puede iluminar con $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices procederemos de la siguiente manera: Primero veremos que si un ortoárbol no tiene cajas redundantes, entonces cada una de sus cajas contiene al menos cuatro vértices del ortoárbol. Este resultado será auxiliar para demostrar un teorema que sirve de base para el resultado principal, y es que un ortoárbol siempre se puede dividir en un conjunto de corredores, en el que cada uno de ellos contiene al menos ocho vértices del ortoárbol. Finalmente veremos que

los vértices de cada corredor se pueden ocho colorear de tal forma que los vértices de cada caja tengan un color diferente, y que cada corredor tenga al menos ocho colores distintos. Por supuesto cada vértice de un corredor es capaz de vigilar al corredor, y por lo tanto existirá una clase cromática que contenga a lo más $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices y sea capaz de iluminar el ortoárbol.

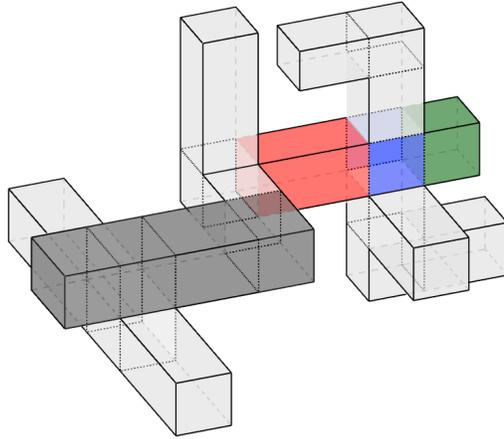


Figura 3.1: Un ortoárbol. Se muestra un corredor en gris, un conector en rojo, una unión en azul y una hoja en verde.

3.2. Resultados preliminares

Los siguientes resultados serán utilizados en el resto del capítulo:

Lema 1. *Sea P un ortoárbol que es la unión de $S = \{B_1, \dots, B_n\}$, y sea $B_i \in S$. Entonces, al menos cuatro de los vértices de B_i también son vértices de P .*

Demostración. Si B_i es una hoja, entonces cuatro de sus vértices son vértices de P .

Si B_i es un conector, entonces es adyacente a dos uniones, cada una de las cuales es adyacente a al menos otra caja que se interseca con B_i en una arista. Los cuatro puntos finales de estas dos aristas son vértices de P .

Si B_i es una unión, entonces es adyacente a al menos otras dos cajas, digamos B_j y B_k , de manera que $B_j \cap B_k$ es una arista de P y sus puntos finales son vértices de P . Si no hay otra caja adyacente a B_i , entonces los dos vértices de B_i no contenidos en $B_j \cup B_k$ son vértices de P . Observe que cualquier otra caja adyacente a B_i en P obliga a que dos vértices adicionales de B_i sean vértices de P , pero también puede hacer que a lo más dos vértices de B_i se eliminen de P . Por lo tanto, cualquier caja en S contiene al menos cuatro vértices de P . \square

En la demostración anterior los casos en los que B_i es una hoja o un conector, son relativamente fáciles de ver, para el caso en el que B_i es una unión, en la Figura 3.2 podemos ver todos los posibles casos en que se presenta una unión.

El siguiente teorema se usará para demostrar nuestros principales resultados en iluminación de ortoárboles.

Teorema 1. *Cualquier ortoárbol P contiene un conjunto de corredores $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $P = C_1 \cup \dots \cup C_m$.
2. Cada $C_i \in \mathcal{C}$ contiene al menos ocho vértices de P .
3. Cada $C_i \in \mathcal{C}$ contiene al menos cuatro vértices de P que no son vértices de $P_{i-1} = C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$.

Además, para cualquier elemento $C_i \in \mathcal{C}$ podemos seleccionar un conjunto V_i de ocho vértices de P contenidos en C_i , de tal manera que se cumpla lo siguiente: Todos los elementos de V_i contenidos en $P_{i-1} = C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ inciden en una caja $B \in P_{i-1}$, y al menos cuatro elementos de V_i no están contenidos en P_{i-1} .

Antes de demostrar el resultado, es importante señalar que no todos los corredores de un ortoárbol contienen ocho vértices del ortoárbol. En la Figura 3.3 se muestran tres

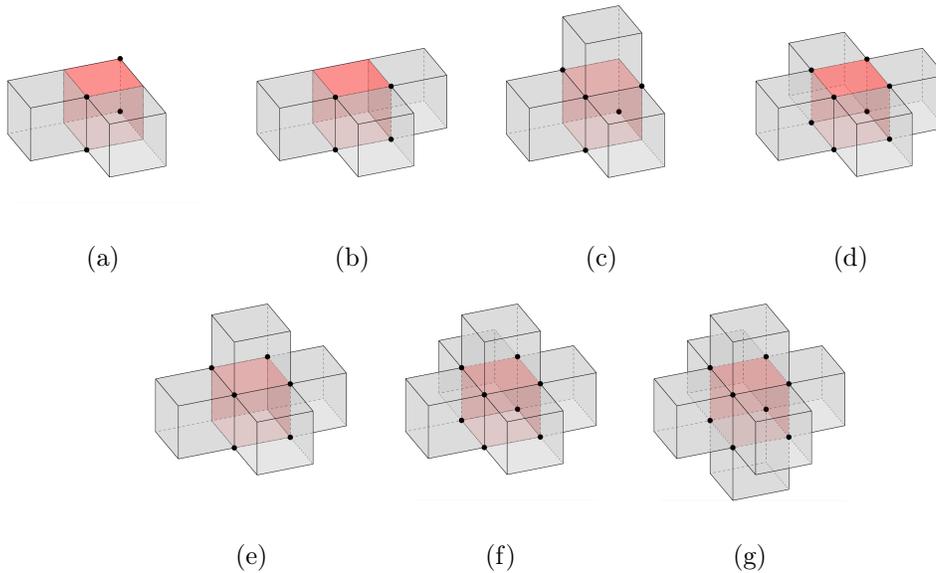


Figura 3.2: (a),(b),(c),(d),(e),(f) y (g) Presentan los vértices de una unión (pintada en rojo) con dos, tres, tres, cuatro, cinco, seis, y siete cajas adyacentes respectivamente.

ortoárboles que contienen corredores con siete y cuatro vértices. Por lo que la selección de los corredores en el Teorema 1 debe hacerse con cuidado. Aquí es donde radica la verdadera dificultad del resultado. Además, los interiores de los corredores que se seleccionarán en la demostración del Teorema 1 pueden intersectarse. Procedemos ahora con la demostración del teorema.

Demostración. Elegimos los corredores $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ de manera recursiva como sigue: Sea C_1 un corredor de P que contiene una hoja de P . Supongamos que hemos elegido C_1, \dots, C_{k-1} de tal manera que $P_{k-1} = C_1 \cup \dots \cup C_{k-1}$ es un ortoárbol. Si $P' = P \setminus P_{k-1}$ es no vacío, sea B' una caja en P' tal que $B' \cap P_{k-1}$ sea una cara de B' . Sea B la caja de P_{k-1} que comparte una cara con B' ; vea la Figura 3.4.

Si B' es una hoja de P , sea C_k el corredor de P que contiene a B y a B' . Por el Lema 1, B contiene al menos cuatro vértices de P . Dado que B' es una hoja, entonces contiene cuatro vértices de P no contenidos en P_{k-1} , y por lo tanto C_k contiene al menos ocho vértices, cuatro de los cuales no están en P_{k-1} .

Supongamos entonces que B' no es una hoja de P . Seleccionamos el corredor C_k de P de la siguiente manera: Si hay un corredor C' de P' que contiene al menos tres cajas, una de las cuales es B' , entonces deje que C_k sea el corredor de P que contiene C' . Observe que dado que C' contiene tres cajas, entonces contiene al menos ocho vértices de P . Notemos que si C' contiene al menos una caja que no se interseca con P_{k-1} , entonces contiene cuatro vértices de P que no están en P_{k-1} . Podría suceder que C' tenga exactamente tres cajas, y que todas se intersequen en B . Entonces, C' contiene a lo más cuatro vértices en P_{k-1} , los vértices de la cara común a B y B' . Por lo tanto, podemos seleccionar de nuevo ocho vértices de P en C_k , cuatro de los cuales no están en P_{k-1} .

Supongamos entonces que cualquier corredor de P' que contenga B' tiene dos cajas, y sea $C' = B' \cup B''$ uno de dichos corredores. Sea C_k el corredor de P que contiene C' . Si B pertenece a C_k , entonces C_k contiene al menos tres cajas, una de las cuales, B'' , no interseca P_{k-1} . Por lo tanto, C_k contiene al menos cuatro vértices de P que no están en P_{k-1} , es decir, aquellos que están en B'' . Supongamos entonces que ningún corredor C' de

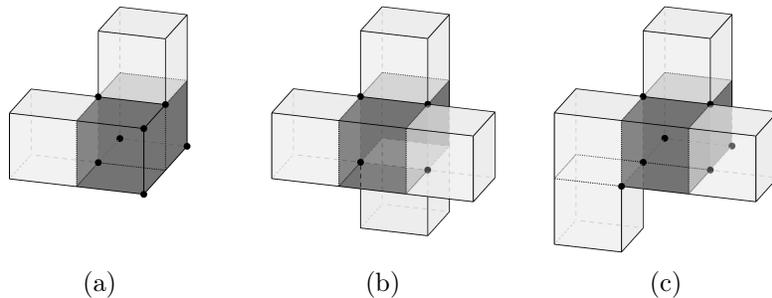


Figura 3.3: Los corredores que se muestran con cubos oscuros contienen siete, cuatro y siete vértices de P respectivamente.

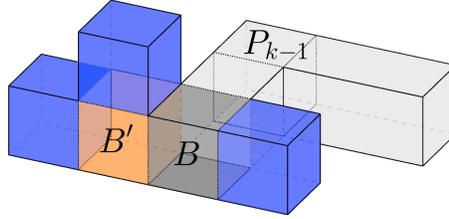


Figura 3.4: Ilustración del Teorema 1, inicio del paso recursivo. Una caja B' , que se muestra en amarillo, junto a una caja B en P_{k-1} , se muestra en gris. Las cajas azules no están en P_{k-1} y podrían estar contenidas en un corredor de P que contiene a B' .

P' está propiamente contenido en un corredor de P . Sea $B' \cup B''$ cualquier corredor de P' que contenga a B' . Considere $C_k = B' \cup B''$.

Sea C_i un corredor en $\{C_1, \dots, C_{k-1}\}$ que contiene a B . Notemos que B'' y C_i se intersecan en una arista de B , vea la Figura 3.5. Si B'' es una hoja; entonces C_k contiene al menos ocho vértices de P , cuatro de los que pertenecen a B'' no están en P_{k-1} , y listo.

Supongamos entonces que B'' no es una hoja de P . Entonces B'' es una unión que es adyacente en T_P a al menos una caja A que no está en P_{k-1} , por ejemplo, vea la Figura 3.5. Supongamos sin pérdida de generalidad que B' está sobre B y a la izquierda de B'' , vea la Figura 3.5. Considere que ninguna caja B'' de P comparte la cara superior de B' (en tal caso, existiría un corredor que contenga a B , B' y B''). Surgen tres subcasos:

- Exactamente una caja contenida en C_i interseca a B'' . En este caso hay cuatro vértices de P en $C_k \cap C_i$, los de color verde en las Figuras 3.5a y 3.7f. Surgen dos subcasos para las cajas adyacentes a B'' en T_P .
 - No existe una caja sobre B'' . Supongamos sin pérdida de generalidad, que una caja A comparte la cara posterior de B'' ; vea la Figura 3.5a. Como no hay una caja de P que comparta la cara superior de B' , los dos vértices azules que se muestran en la Figura 3.5a son vértices de P . Nuevamente, hay a lo más una caja de P compartiendo una de las caras frontales de C_k ; la cual es adyacente a B' o B'' . En cualquier caso, al menos dos de los vértices rojos que se muestran en la Figura 3.5a son vértices de P .
 - Existe una caja A sobre B'' . En este caso, hay dos vértices de P en $B' \cap A$ que se muestran en azul en la Figura 3.7f. Note que hay a lo más dos cajas de P que comparten una cara de C_k , una cara frontal y otra cara posterior de C_k . En cualquier caso, al menos dos de los vértices rojos que se muestran en la Figura 3.7f son vértices de P .
- Exactamente dos cajas contenidas en C_i intersecan B'' ; vea la Figura 3.5c. En este caso hay tres vértices de P en $C_k \cap C_i$, los que se muestran en verde en las Figuras 3.5c y 3.5d. Ya que no hay una caja de P que comparta cualquiera de las caras frontales de

C_k , o la cara superior de B' , los dos vértices negros que se muestran en la Figura 3.5c y 3.5d son vértices de P . Pero como B'' no es una hoja de P , debe existir una caja A que comparta una de las caras de B'' . Surgen dos subcasos.

- Existe una caja A de P que comparte la cara superior de B'' . En este caso, hay dos vértices de P en $B' \cap A$. Puede haber una caja de P compartiendo una de las dos caras posteriores de C_k . En ambos casos, uno de los vértices rojos que se muestran en la Figura 3.5c es un vértice de P .
 - No existe una caja de P compartiendo la cara superior de B'' . En este caso, hay una caja A que comparte la cara posterior de B'' . Como no hay una caja sobre B' , los tres vértices azules que se muestran en la Figura 3.5d son vértices de P .
- Exactamente tres cajas contenidas en C_i intersecan B'' ; vea la Figura 3.5e. En este

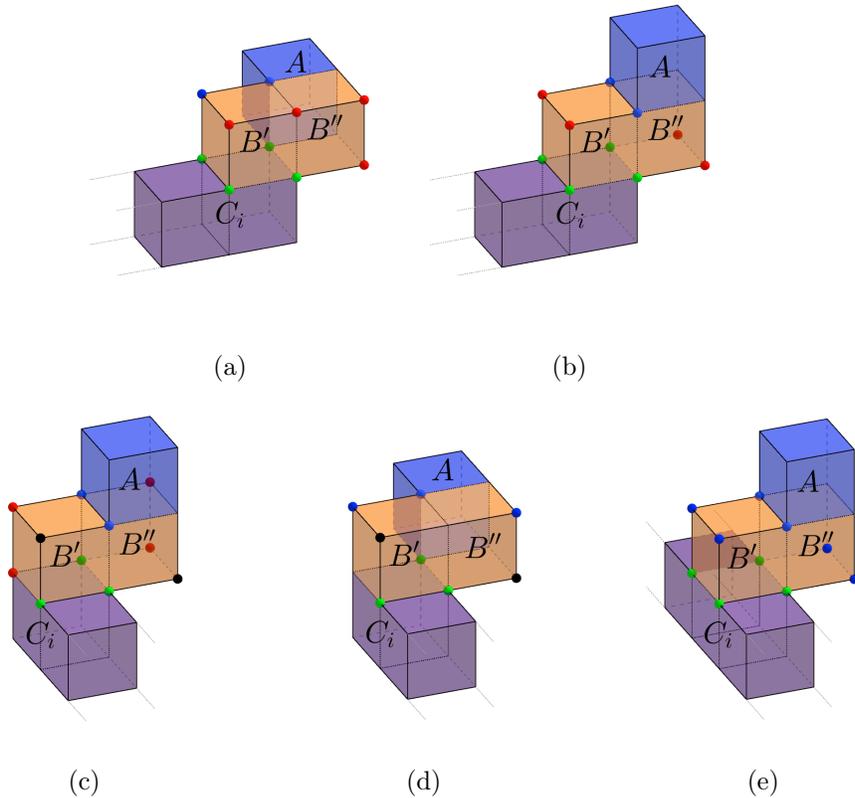


Figura 3.5: Ilustración del Teorema 1, a) y b) muestran los casos en los que exactamente una caja en C se interseca con $B'' \in C_k$. c) y d) muestran los casos en que exactamente dos cajas en C se intersecan con B'' . e) muestra el caso en el que tres cajas en C se intersecan con B'' .

caso hay exactamente una caja A de P que comparte la cara superior de B'' , como se muestra en la figura. En este caso, es fácil ver que C_k contiene diez vértices de P ; vea la Figura 3.5e.

En cada uno de los casos analizados anteriormente, C_k contiene al menos cuatro vértices de P que no pertenecen a P_{k-1} . □

3.3. Iluminación de ortoárboles

En esta sección demostraremos el resultado principal:

Teorema 2. *Para iluminar cualquier ortoárbol de n vértices, siempre son suficientes y en ocasiones necesarios $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices.*

La demostración del Teorema 2 se basa en el siguiente lema:

Lema 2. *Los vértices de P pueden ser coloreados con ocho colores de tal forma que:*

- (i) *Los vértices de P contenidos en cualquier caja $B_i \in S$ tengan colores distintos.*
- (ii) *Cualquier corredor $C_i \in \{C_1, \dots, C_{k-1}\}$ contiene al menos ocho vértices con colores distintos.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ el conjunto de corredores de P generados como en la demostración del Teorema 1. Coloreamos los vértices de $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ de la siguiente manera:

Para empezar los vértices de P en C_1 se pueden colorear con ocho colores de tal manera que se cumplan (i) y (ii).

Supongamos que los vértices de P en P_{k-1} han sido coloreados de modo que se cumplan (i) y (ii). Ahora mostraremos como colorear los vértices de P en C_k . Sean $B \in P_{k-1}$ y $B' \in P'$ dos cajas de P como en la demostración del Teorema 1.

Si C_k contiene a B , por el Lemma 1, B tiene al menos cuatro vértices de P que ya han sido coloreados con diferentes colores. Ahora podemos ver que los cuatro vértices de C_k que no están en P_{k-1} se pueden colorear de tal manera que estos vértices y los vértices de B utilicen ocho colores diferentes, y que la coloración así obtenida se pueda extender a una coloración de C_k que satisfaga (i) y (ii).

Si C_k no contiene a B , entonces la intersección de C_k con P_{k-1} es la cara f en la cual B y B' se intersecan. Elija un conjunto S' de ocho vértices de P en C_k que contengan los vértices de P en f . Tenga en cuenta que a lo más cuatro de ellos ya están coloreados, los que pertenecen a f . Use los colores no utilizados para colorear los elementos restantes de S' . Como antes, esta coloración se puede hacer de tal manera que se puede extender a una coloración de C_k que se cumplan (i) y (ii). □

El Teorema 2 se sigue directamente del Lemma 2, ya que cada corredor de P tiene al menos un vértice de cada color. Por lo tanto, cada clase cromática de la ocho coloración de los vértices de P obtenidos en el Lema 2 ilumina P . Una de estas clases cromáticas tiene a lo más $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices. La Figura 3.6 muestra un ejemplo de un ortoárbol para el cual se necesitan $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices para iluminarlo. En la Figura 3.7 se puede ver la aplicación del algoritmo inducido por el Teorema 1 y el Lema 2 a un ortoárbol.

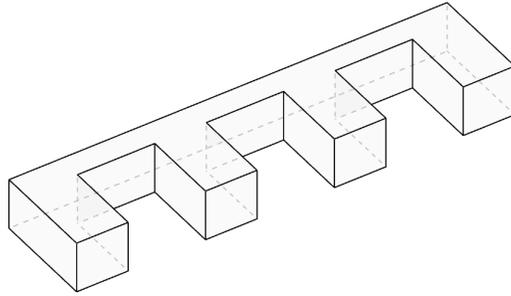


Figura 3.6: Un ortoárbol que necesita de $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices para ser iluminado.

3.4. Problemas abiertos

Dejamos abierto el problema de determinar si el algoritmo que presentamos aquí se puede usar en una variante de AGP en ortoárboles considerando un modelo de visibilidad diferente. Como por ejemplo visibilidad rectangular, o visibilidad con balizas. No es fácil ver que el resultado de iluminación se puede extender para cubrir un ortoárbol con balizas, sin embargo, esto fue demostrado en [5].

Un guardia de tipo *baliza* (del inglés *beacon*) es un punto en un poliedro \mathcal{P} que atrae a otros puntos en \mathcal{P} hacia sí mismo. Una baliza $b \in \mathcal{P}$ atrae a un punto $p \in \mathcal{P}$ como se describe a continuación, ver Figura 3.8. Si el segmento de línea ℓ que une a b con p contiene un segmento contenido en \mathcal{P} , donde uno de sus puntos finales es p , entonces p comienza a moverse a lo largo de ℓ en dirección de b ; de lo contrario, si p está en una cara f de \mathcal{P} , entonces p se desliza (si puede) en f a lo largo del segmento de línea que une a p con la proyección ortogonal de b sobre el plano que contiene a f . Decimos que p está *atorado* con respecto a b si existe un $\epsilon > 0$ tal que cualquier punto en \mathcal{P} a distancia a lo más ϵ desde p , está más lejos de b que p . Como se señaló en [51, 20], existe un caso en el que no está claro qué camino debe seguir p cuando es atraído por b . Esto sucede cuando p se encuentra en una arista cóncava e de \mathcal{P} (una para la cual el ángulo interno determinado por las caras de \mathcal{P} incidentes en e es mayor que π), y el segmento de línea que conecta a p con b comienza con un segmento no contenido en \mathcal{P} .

Decimos que b cubre a p si cuando b atrae a p , este se mueve hacia b , llegando eventualmente a b . Un conjunto de atractores $\{b_1, \dots, b_m\}$ cubre un ortoárbol si para cualquier punto $p \in \mathcal{P}$, existe atractor $b_i \in \{b_1, \dots, b_m\}$ que cubre a p .

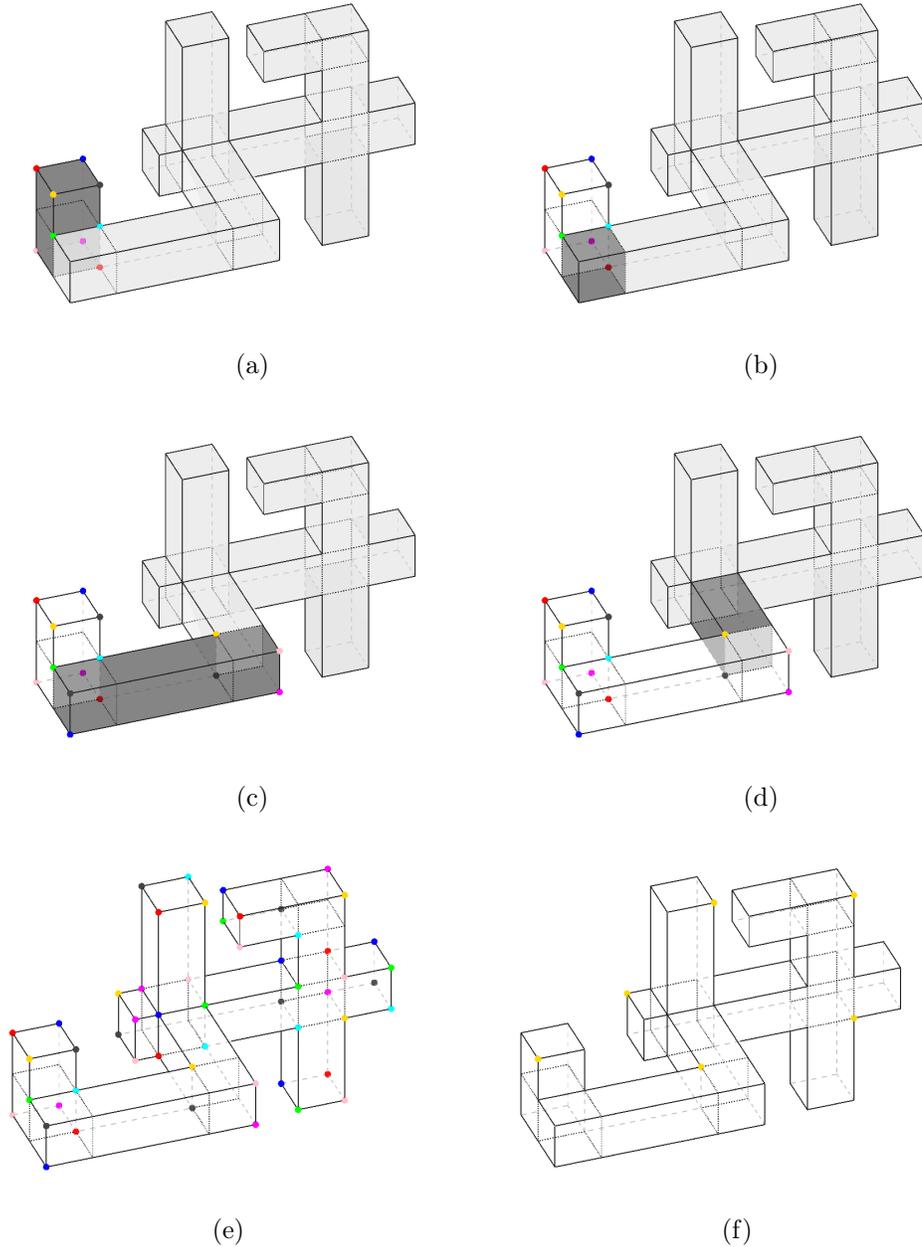


Figura 3.7: Ilustración del Teorema 1. (a),(b),(c) y (d) Presentan los primeros pasos del algoritmo inducido por el Teorema 1 y el Lema 2, (e) presenta el resultado final de la ocho coloración, y (f) presenta una clase cromática de tamaño $\lfloor n/8 \rfloor$ que ilumina el ortoárbol.

La variante del problema de la galería de arte utilizando balizas fue introducida en [11, 12, 13]. Este modelo extiende la noción de visibilidad; si un objeto es visible desde una baliza, entonces puede ser atraído en línea recta.

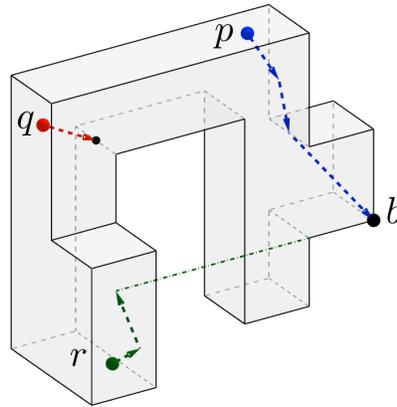


Figura 3.8: El punto p está cubierto por una baliza ubicada en el punto b . Los puntos q y r no están cubiertos por b , r se atora en una cara y el punto q a una arista de P .

Capítulo 4

Variante cromática del PGA

En el presente capítulo estudiaremos la variante cromática del problema de la galería de arte. En todo el capítulo utilizaremos el modelo de visibilidad rectangular, así como iluminación fuerte. Primero abordaremos el tema estudiando la iluminación de polígonos ortogonales en \mathbb{R}^2 , utilizando reflectores- α , con α igual a $\pi/2$. Después estudiaremos la Iluminación de poliedros ortogonales con guardias tipo segmento de tamaño también $\pi/2$. Finalmente presentaremos problemas que abordaremos en un futuro. La idea principal de esta investigación es establecer las bases para averiguar como varía el numero cromático en relación con el tamaño de los guardias. Como veremos a continuación si utilizamos guardias de tamaño $\pi/2$, entonces el número cromático tanto para polígonos ortogonales en \mathbb{R}^2 como para poliedros ortogonales en \mathbb{R}^3 es uno.

4.1. Iluminación rectangular de polígonos ortogonales con reflectores de tamaño $\pi/2$

Comenzamos con resultados para reflectores- $\frac{\pi}{2}$. En la siguiente sección veremos que estos resultados servirán de base para resolver el problema en poliedros ortogonales.

Teorema 24. *Sea P un polígono ortogonal. Entonces $\chi(P, \frac{\pi}{2}) = 1$.*

Demostración. Colocamos reflectores- $\frac{\pi}{2}$ en P usando el siguiente algoritmo:

1. Colocamos un reflector- $\frac{\pi}{2}$ en el vértice derecho de una arista superior de P con una orientación de $3\pi/2$, siendo P' el área iluminada. Observe que P' es un polígono ortogonal.
2. Supongamos que $P' \neq P$, de otra forma habríamos terminado. Ahora colocamos un reflector- $\frac{\pi}{2}$ en el vértice derecho de cada ventana inferior de P' con orientación $3\pi/2$, incrementando el área iluminada P' .
3. Continuamos hasta que no haya más ventanas inferiores en P' , como se muestra en la Figura 4.1. Si $P' = P$ habremos terminado.

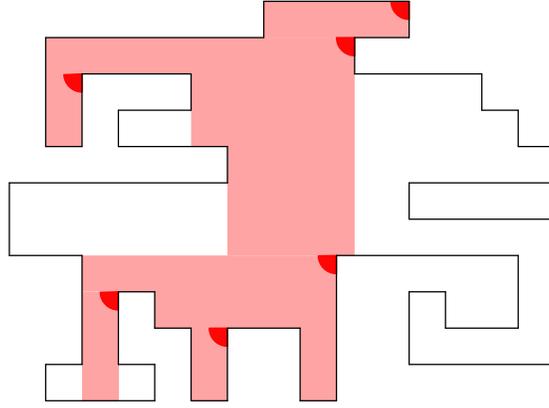


Figura 4.1: Iluminación del interior de un polígono ortogonal utilizando reflectores- $\frac{\pi}{2}$.

4. Supongamos que $P' \neq P$. De forma recursiva procedemos de la siguiente manera: Cada subpolígono P'' de $P - P'$ tiene una o dos aristas que contienen ventanas de P' . En el primer caso (una arista) supongamos sin pérdida de generalidad que P'' contiene una arista izquierda que contiene una ventana derecha de P' . Rotamos P'' hasta que e se convierta en una arista superior y repetimos el proceso anterior comenzando en el vértice derecho de e . En el segundo caso (dos aristas), estas dos aristas son incidentes a un vértice v de P'' . Rotamos P'' hasta que v pertenezca a una arista superior, y repita el proceso anterior comenzando en v . Procedemos de manera similar con las aristas derechas e izquierdas de P' .

Demostramos que este algoritmo es correcto por inducción sobre el número de vértices. Para el caso base considere $|P| = 4$, se puede ver que el algoritmo es correcto. Supongamos que el algoritmo es correcto para todos los polígonos ortogonales de tamaño $\leq n$. Ahora considere $|P| = n + 2$. Aplicamos a P el algoritmo del paso (1) al paso (3). Observe que cada reflector colocado en los pasos (2) y (3) es colocado con orientación $3\pi/2$ en una ventana inferior, iluminando un área que se encuentra por debajo de P' . Por lo tanto, el área iluminada se incrementa sin iluminar algún área previamente iluminada de P' o de alguna componente conexa de $P - P'$ que este por debajo de la ventana. Note que cada ventana inferior w contiene al menos un vértice v_w de P . Al colocar un reflector en cada ventana inferior w de P' , la nueva región P' ya no contendrá a w , y v_w no volverá a ser utilizado. Cuando este proceso termina: Si $P' = P$ habremos terminado, y si $P' \neq P$ entonces tendremos que cada componente conexa Q de $P - P'$ es un polígono tal que $|Q| < |P|$. Por lo tanto cada componente conexa de $P - P'$ puede ser iluminada aplicando la hipótesis de inducción (paso 4 del algoritmo) sin iluminar ningún área previamente iluminada. \square

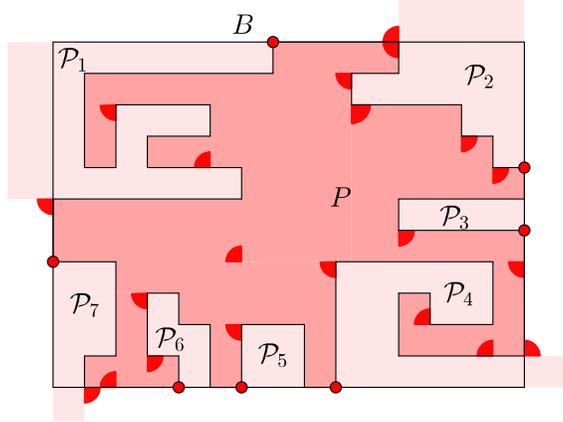


Figura 4.2: Iluminación del interior y el exterior de un polígono ortogonal utilizando reflectores- $\frac{\pi}{2}$.

En los siguientes resultados extenderemos el resultado anterior para iluminar también el exterior de un polígono ortogonal.

Teorema 25. *Sea P un polígono ortogonal. Entonces $\chi(\text{ext}(P), \frac{\pi}{2}) = 1$.*

Demostración. Sea B el rectángulo más pequeño que contiene a P . Sea \mathcal{P} el conjunto de polígonos que son las componentes conexas de $B - P$. Para iluminar el exterior de P , es necesario iluminar los polígonos en \mathcal{P} así como el exterior de B . Para cada $Q \in \mathcal{P}$, observe que $Q \cap \partial B$ contiene un segmento de línea e tal que si consideramos e como la arista base horizontal superior de Q , su punto final derecho es un vértice de P . Por lo tanto, aplicamos a cada $Q \in \mathcal{P}$ el Teorema 24. Observe que si en la iluminación anterior hay un polígono Q incidente en una esquina de B , entonces la región iluminada alcanzará el exterior de B como se muestra en la Figura 4.2. Para iluminar el exterior de B , colocamos un reflector- $\frac{\pi}{2}$ con orientación π en el vértice derecho de P que se encuentra en la arista superior de B . De manera similar, coloque un reflector- $\frac{\pi}{2}$ con orientaciones $3\pi/2$, 0 , y $\pi/2$ en las aristas izquierda, inferior y derecha de B respectivamente, vea la Figura 4.2. Puesto que todas las regiones iluminadas son independientes, pueden tener el mismo color. \square

Los Teoremas 24 y 25 implican el siguiente teorema:

Teorema 26. *Sea P un polígono ortogonal. Entonces $\chi(P \cup \text{ext}(P), \frac{\pi}{2}) = 1$.*

A continuación estudiaremos el caso en el que los polígonos ortogonales tienen hoyos.

Teorema 27. *Sea P un polígono ortogonal con $h > 0$ hoyos. Entonces $2 \leq \chi(P \cup \text{ext}(P), \frac{\pi}{2}) \leq h + 1$*

Demostración. Para la cota superior, sea $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ el conjunto de líneas que contienen las aristas inferiores de los hoyos de P paralelas al eje x , tales que $i < j$ sii la

coordenada y denotada por y_i de l_i es menor que la coordenada y denotada por y_j de l_j . Sea l_0 una arista inferior más baja de P y l_{K+1} una arista superior más alta de P . Entonces, para cada $0 \leq i < k$, el conjunto de puntos de P cuya coordenada y pertenece al intervalo (y_i, y_{i+1}) forma un conjunto P_i de subpolígonos de P . Para cada $i = 0, \dots, k$ utilice el Teorema 24 para iluminar todos los subpolígonos de P_i con el color i , esto puede hacerse ya que todos los elementos de cada P_i son independientes dos a dos. Como $k \leq h$, usamos como máximo $h + 1$ colores para iluminar P ; en la Figura 4.3 se muestra un ejemplo.

Para la cota inferior considere la Figura 4.4. Observe que cuando iluminamos los puntos a , b y c , la región A o la región B , digamos A , tiene al menos dos zonas iluminadas con el color uno y una tercer zona C entre ellas no iluminada. Para iluminar C se necesita un segundo color, ya que el polígono de visibilidad de cualquier reflector que ilumine C se superpone con al menos una de las zonas iluminadas de A . \square

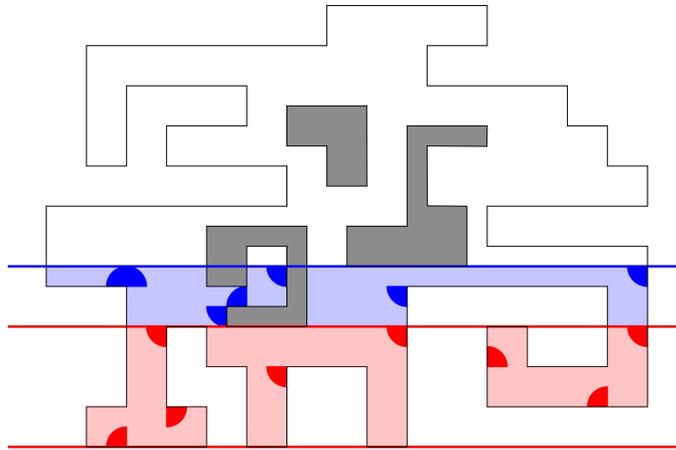


Figura 4.3: Ilustración del Teorema 4.3. Observe en color rojo los subpolígonos inducidos por la recta que cubre la arista inferior con la coordenada y más baja de un hoyo. En azul el siguiente conjunto de subpolígonos.

4.2. Iluminación rectangular de poliedros ortogonales con guardias de tipo segmento de tamaño $\pi/2$

En esta sección analizaremos el problema en \mathbb{R}^3 utilizando segmentos- α con α igual a $\pi/2$.

Para la demostración del resultado principal veremos que un poliedro ortogonal \mathcal{P} es la unión de poliedros de levantamiento disjuntos dos a dos. A continuación iluminaremos estos poliedros de levantamiento como si fueran polígonos ortogonales utilizando reflectores

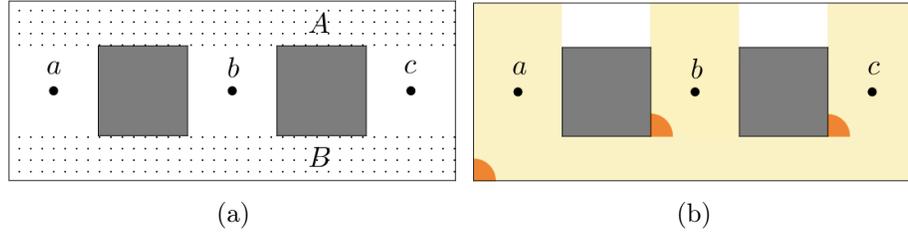


Figura 4.4: (a) Un polígono ortogonal P con hoyos (en color gris) tal que $2 \leq \chi(P, \frac{\pi}{2})$. Esta familia crece añadiéndole hoyos al polígono. (b) Si los puntos a , b , y c son iluminados con el color uno, entonces la región A o la región B , tiene por lo menos dos zonas iluminadas, y entre ellas una zona no iluminada; esta zona fuerza el uso de un segundo color para iluminar el polígono.

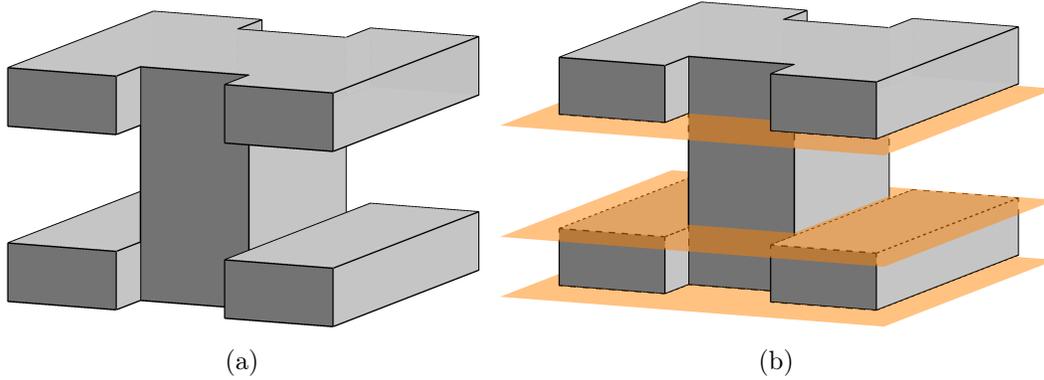


Figura 4.5: (a) Un poliedro ortogonal con hoyos. (b) Descomposición de un poliedro ortogonal en poliedros de levantamiento disjuntos dos a dos.

de tamaño $\pi/2$, después simplemente sustituiremos los reflectores por guardias de tipo segmento de tamaño $\pi/2$.

Sea $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ el conjunto de planos que contiene caras de \mathcal{P} paralelas al plano xy , tal que $i < j$ sii la coordenada z de Q_i denotada por z_i es menor o igual que la coordenada z de Q_j denotada por z_j . Entonces, para cada $1 \leq i \leq k - 1$, el conjunto de puntos de \mathcal{P} cuya coordenada z pertenece al intervalo $[z_i, z_{i+1}]$ forma un conjunto \mathcal{P}_i de poliedros de levantamiento, en la Figura 4.5 se muestra un ejemplo. Observe que P es la unión de todos los poliedros de levantamiento contenidos en \mathcal{P}_i para $i = 1 \dots k - 1$.

Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal con n vértices. Considere los poliedros de levantamiento introducidos en el párrafo anterior. Sea $\mathcal{Q}' = \{Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{k-1}\}$ un conjunto de planos paralelos al plano xy , donde Q'_i se encuentra entre Q_i y Q_{i+1} . Sea $Q' \in \mathcal{Q}'$ un plano tal que $Q' \cap \mathcal{P}$ contiene un polígono con el máximo número de hoyos denotado por h_{xy} , sobre todos los polígonos contenidos en $Q'_i \cap \mathcal{P}$ para $i = 1, \dots, k - 1$. Defina de manera similar h_{xz} y h_{yz} . Sea $h = \min\{h_{xy}, h_{xz}, h_{yz}\}$.

Teorema 28. *Si $h = 0$: $\chi(\mathcal{P}, \frac{\pi}{2}) = 1$, y si $h > 0$: $\chi(\mathcal{P}, \frac{\pi}{2}) \leq h + 1$.*

Demostración. Observe que una determinada colocación de un conjunto de guardias que iluminan un polígono ortogonal R , también funciona al colocar guardias segmentos- α de longitud ℓ para iluminar un poliedro de levantamiento de altura ℓ inducido por R . Supongamos sin pérdida de generalidad que $h = h_{xy}$. Para iluminar \mathcal{P} , es necesario iluminar cada poliedro de levantamiento en \mathcal{P}_i , con $1 \leq i < k$. Primero iluminamos cada polígono $R \in Q_i \cap \mathcal{P}$ con h_R hoyos, que genere un poliedro de levantamiento en \mathcal{P}_j , lo hacemos aplicando el teorema adecuado:

1. Si $h = 0$: iluminamos P_i utilizando el Teorema 24.
2. Si $h > 0$: iluminamos P_i utilizando el Teorema 27.

Después reemplazamos cada reflector- $\frac{\pi}{2}$ utilizado, por un segmento- $\frac{\pi}{2}$ de longitud $z_{i+1} - z_i$. Ahora \mathcal{P}_i está iluminado, al igual que \mathcal{P} . □

4.3. Problemas abiertos

Sería interesante ampliar el estudio de la variante cromática del problema de la galería de arte considerando por ejemplo, para el caso de polígonos ortogonales en \mathbb{R}^2 , la iluminación fuerte utilizando reflectores- α , donde $\pi < \alpha \leq 2\pi$; para iluminar tanto el interior como el exterior. Estudiar la variante para el caso de familias más pequeñas, por ejemplo, la familia de polígonos ortogonales delgados en \mathbb{R}^2 , así como los ortoárboles en \mathbb{R}^3 . Finalmente también sería interesante indagar en una versión dinámica de la iluminación cromática, utilizando reflectores giratorios tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 .

Hasta ahora queda abierto el de problema de ajustar las cotas para el caso de polígonos ortogonales con hoyos.

Capítulo 5

El Problema de Testigos

5.1. Preliminares Testigos

Considere que en el presente capítulo siempre se utiliza el modelo de visibilidad rectangular, a menos que se especifique otra cosa. Un *conjunto de testigos* W es un conjunto de puntos de un polígono P , tal que si algún conjunto de puntos G vigila a W , entonces P también es vigilado por G . Un punto p *atestigua* a otro punto q si al vigilar p se garantiza que también se vigila q , por lo tanto P es *atestiguado* si cada punto de P es atestiguado por un elemento de W .

Los siguientes resultados auxiliares fueron demostrados considerando la visibilidad lineal. Sin embargo también son válidos para la visibilidad rectangular.

Teorema 3. [19, Theorem 1] Sea P un polígono simple y sea W un conjunto de puntos en P . Entonces W es un conjunto testigo de P si y sólo si la unión de los núcleos de visibilidad de los elementos de W cubren completamente a P .

Lema 3. [19, Lemma 1] Sea P un polígono simple y sean p y q puntos en P . Entonces p atestigua a q si y sólo si q pertenece a $VK(p)$.

Lema 4. [19, Lemma 2] Sea P un polígono simple. Un punto p en P atestigua a un punto q en P si y sólo si $VP(p) \subset VP(q)$.

Lema 5. [19, Lemma 3] Sea P un polígono simple, y sean p , q y r puntos en P . Si p atestigua a q y q atestigua a r , entonces p atestigua a r .

La *partición canónica* o *pixelación* de un polígono ortogonal P es la partición de P que se obtiene al extender las aristas incidentes a cada vértice cóncavo hasta que cada una de ellas toca la frontera de P , vea la Figura 5.1. Las regiones obtenidas de esta partición son conocidas como *pixeles*. Nosotros denotamos como Ψ al conjunto de pixeles obtenidos de la pixelación. Note que Ψ puede tener un número cuadrático de pixeles.

5.2. Atestiguando polígonos ortogonales

Es sabido que, utilizando visibilidad lineal, si existe un conjunto de testigos finito W , entonces los elementos de W deben estar ubicados en la frontera del polígono [19]. Para polígonos ortogonales utilizando la visibilidad rectangular no es el caso, ya que siempre podemos encontrar un conjunto de testigos finito como demostramos en el Lema 7. En la Figura 5.1 mostramos un polígono ortogonal que no es atestiguado utilizando el modelo de visibilidad rectangular, aún si colocamos un testigo en cada punto de la frontera.

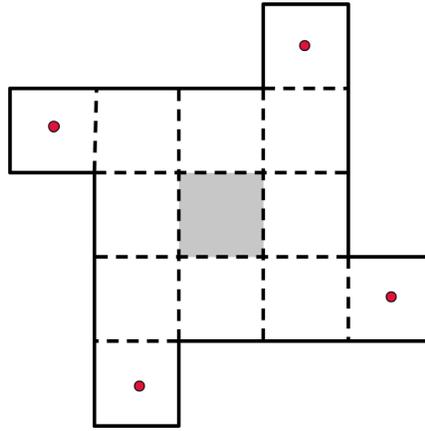


Figura 5.1: Un polígono ortogonal P tal que su frontera no es un conjunto testigo. Los puntos rojos vigilan la frontera de P . La región gris no está vigilada. Por lo tanto, se tiene que colocar un testigo en la parte interior de P .

Considere el conjunto de pixeles Ψ obtenido de la pixelación de algún polígono ortogonal P . Para demostrar que siempre es posible encontrar un conjunto de testigos finito en P , primero demostraremos que cualesquiera dos puntos en un pixel de Ψ tienen el mismo núcleo de visibilidad.

Lema 6. *Sea X un pixel obtenido de una pixelación de un polígono ortogonal P , y sean $p, q \in X$ dos puntos distintos. Entonces $VK(p) = VK(q)$, y $X \subset VK(p)$.*

Demostración. Sea H el rectángulo maximal contenido en P cuya arista superior contiene a la arista superior de X y cuya arista inferior contiene la arista inferior de X . De forma similar, sea V el rectángulo maximal contenido en P cuya arista izquierda contiene la arista izquierda de X y cuya arista derecha contiene la arista derecha de X . Note que las aristas izquierdas y derechas de H , así como las aristas superiores e inferiores de V están contenidas en aristas de P .

Observe que si $VP(p) = VP(q)$, entonces $VK(p) = VK(q)$. Por lo tanto, demostraremos que $VP(p) = VP(q)$. Considere un punto $r \in P$ visto por p . Ahora demostraremos que r también es visible para q . Note que si r está contenido en H o V entonces es visible para q . Por lo tanto, supondremos que r no está contenido ni en H ni en V .

Como r es vista por p , $R(p, r)$ está contenido en P , vea la Figura 5.2. Observe que las aristas horizontales de $R(p, r)$ y $R(q, r)$ incidentes a p y q , respectivamente, están contenidas en H . De manera similar, las aristas verticales de $R(p, r)$ y $R(q, r)$ incidentes a p y q , respectivamente, están contenidas en V . Como la diferencia simétrica de $R(p, r)$ y $R(q, r)$ está contenida en $V \cup H$ para cualquier $r \in P$ visible para p , $R(q, r)$ está contenido en P . Por lo tanto, q ve a r .

Como $VP(p)$ para cualquier $p \in X$ está contenido en el polígono de visibilidad de cualquier otro punto en X , $X \subset VK(p)$. \square

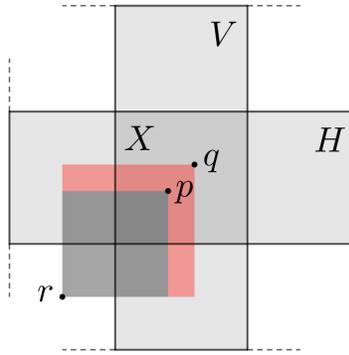


Figura 5.2: Ilustración de la demostración del Lema 6. Dados dos puntos p y q en el mismo pixel X , ellos tienen el mismo polígono de visibilidad.

El siguiente corolario es una consecuencia directa de el lema anterior.

Corolario 2. *Sea p un punto en un polígono ortogonal P . Entonces $VK(p)$ es la unión de un conjunto de pixeles de la pixelación de P .*

El Lema 6 nos permite dar las siguientes definiciones. Definimos como el *núcleo de visibilidad de un pixel a* , denotado por $VK(a)$, como el núcleo de visibilidad de cualquier punto en a . Decimos que un pixel a atestigua a un pixel b si cualquier punto en a contiene a cualquier punto de b en su kernel de visibilidad. Note que por el Lema 5, si el pixel a atestigua al pixel b , entonces a atestigua la región de P atestiguada por b .

Lema 7. *Sea P un polígono ortogonal con n vértices. Entonces, siempre existe un conjunto de testigos finito W para P . Más aún, W tiene $O(n^2)$ elementos.*

Demostración. Sea Ψ el conjunto de pixeles obtenidos de la pixelación de P . Por el Lema 6, el núcleo de visibilidad de cualquier punto p en P contiene el pixel de P en el que p está contenido. Por el Teorema 3, un conjunto W de P es un conjunto testigo para P si la unión de los núcleos de visibilidad de los elementos de W son P . Por lo tanto, un conjunto de puntos que contiene un punto en cada pixel de Ψ es un conjunto testigo para P . Como $|\Psi| \in O(n^2)$, Siempre podemos encontrar un conjunto de testigos finito con $O(n^2)$ elementos para un polígono ortogonal. \square

De los Lemas 6 y 7 tenemos que cualquier conjunto de testigos mínimo contiene a lo más un punto en cada pixel de P . Por simplicidad, de aquí en adelante diremos que un conjunto de pixeles L es un conjunto testigo si un conjunto que contiene un punto en cada pixel de L es un conjunto testigo.

Las siguientes observaciones se obtienen del Teorema 3 y los Lemas 3, 4 y, 5:

- Si un pixel a no está contenido en el núcleo de visibilidad de otro pixel en P , entonces a debe ser incluido en un conjunto testigo mínimo.
- Si un pixel a está contenido en el núcleo de visibilidad de b , pero b no está contenido en el núcleo de visibilidad de a , entonces a no puede ser incluido en un conjunto testigo mínimo.
- Si dos o más pixeles diferentes se contienen mutuamente en sus respectivos núcleos de visibilidad, entonces sólo uno de ellos puede ser incluido en un conjunto testigo mínimo.

5.3. Un algoritmo para encontrar un conjunto testigo mínimo

Para encontrar los pixeles contenidos en un conjunto testigo mínimo, primero obtenemos el conjunto de pixeles Ψ de la pixelación de P . Después, construimos una gráfica dirigida H , la cual llamaremos *gráfica de núcleo* de P , de tal forma que exista una biyección entre el conjunto de nodos de H y Ψ . Después de eso, obtendremos el núcleo de visibilidad K del pixel representado por cada nodo $u \in H$. Finalmente, agregaremos a H el arco de u a v si K contiene el pixel representado por $v \in H$, con $u \neq v$. Por simplicidad, decimos que un nodo u en H atestigua a otro nodo v si H contiene el arco (u, v) .

Para calcular el núcleo de visibilidad de un punto p en un polígono ortogonal, primero calculamos $VP(p)$ y después $K(VP(p))$, el núcleo de $VP(p)$. Observemos que $VP(p)$ es un polígono ortogonal. Por lo tanto, podemos utilizar algún algoritmo existente para calcular el núcleo de un polígono ortogonal.

Ahora demostraremos que un polígono obtenido de esta manera es de hecho el núcleo de visibilidad de un punto p .

Proposición 1. *Sea P un polígono ortogonal, posiblemente con hoyos. Sea p un punto en P . Entonces el polígono obtenido al calcular el núcleo de $VP(p)$ es igual a $VK(p)$.*

Demostración. Podemos observar que $K(VP(p))$ está contenido en $VK(p)$. Por lo tanto, sólo demostraremos que $K(VP(p))$ contiene a $VK(p)$. Supongamos que existe un punto $q \in VK(p)$ que no está contenido en el polígono obtenido al calcular el núcleo de $VP(p)$. Por lo tanto, existe un punto $r \in VP(p)$ tal que $R(q, r)$ está contenido en P pero no en $VP(p)$. Como p ve a q y r , entonces ambos $R(p, q)$ y $R(p, r)$ están contenidos en P . Por lo tanto, $R(p, q) \cup R(p, r) \cup R(q, r) \subset P$. Esto implica que para cualquier punto $l \in R(q, r)$ tenemos que $R(p, l) \subset R(p, q) \cup R(p, r) \cup R(q, r) \subset P$. Por lo tanto, $l \in VP(p)$, lo que implica que

$R(q, r) \subset VP(p)$, una contradicción. Por lo tanto, q está contenido en el polígono obtenido al calcular el núcleo de $VP(p)$. \square

Ahora demostramos como encontrar un conjunto testigo mínimo una vez que hemos construido la gráfica de núcleo H de P . Dos nodos u y v en una gráfica dirigida son *mutuamente adyacentes* si existe un arco de u a v y un arco de v a u . Un *clique* en una gráfica dirigida es un conjunto de nodos mutuamente adyacentes dos a dos en la gráfica dirigida. Observe que por el Lema 5, para cualquier clique C en H , cualquier nodo de C atestigua todos los elementos de C así como las regiones atestiguadas por los elementos de C .

Decimos que un nodo u de H es un *nodo fuente* si para cualquier arco de la forma (v, u) , donde v es cualquier otro nodo de H , H también contiene el arco (u, v) .

Teorema 4. *Sea P un polígono ortogonal. Sea H la gráfica de núcleo de P . Sea C un conjunto que contiene exactamente un nodo en cada clique maximal de nodos fuente en H . entonces cualquier conjunto que contiene un punto en el pixel asociado a cada nodo de C es un conjunto testigo mínimo para P .*

Demostración. Sea u un nodo de H . Si u es un nodo fuente entonces sólo puede ser atestiguado por un nodo contenido en el clique que contiene a u . Note que, como la propiedad de ser testigo es transitiva (Lema 5), cada nodo en H está contenido en a lo más un clique maximal.

Por lo tanto necesitamos colocar un testigo en un pixel de P asociado a un nodo de un clique maximal de nodos fuente en H para poder atestiguar P .

Ahora suponga que u no es un nodo fuente. Como la propiedad de ser testigo es transitiva, existe un arco de un nodo fuente a u . De lo contrario u sería un nodo fuente. Por lo tanto, no es necesario colocar un testigo en un pixel asociado a un nodo que no es un nodo fuente en H .

Por lo tanto, el conjunto testigo compuesto por un pixel por cada clique maximal de nodos fuentes en H es un conjunto testigo mínimo para P . \square

Para poder reportar un conjunto testigo mínimo, hacemos un recorrido de H como sigue. Si el nodo $u \in H$ no es un nodo fuente, lo eliminamos de H . Si u es un nodo fuente, agregamos el pixel representado por u al conjunto testigo W y eliminamos u y sus vecinos de H . Note que de esta manera agregamos al conjunto testigo a lo más un pixel por cada clique maximal de nodos fuente de H .

Ahora analizaremos el tiempo de ejecución de la solución propuesta. Obtener la pixelación toma tiempo $O(n^2)$, ya que tenemos que reportar $O(n^2)$ regiones. El tiempo requerido para generar una digráfica H depende de la subrutina utilizada para calcular el núcleo de visibilidad de cada pixel.

En su libro [28], Fink y Wood dan un algoritmo de tiempo $O(n \log n)$ para calcular $VP(p)$ de un punto p en un polígono ortogonal utilizando visibilidad rectangular. En [49], Schuierer y Wood dan un algoritmo de tiempo $O(n)$ para calcular el núcleo de un polígono

ortogonal utilizando visibilidad rectangular. Note que por el Corolario 2, $VK(p)$ es un conjunto de pixeles si utilizamos visibilidad rectangular. También note que $VK(p)$ es un rectángulo. Por lo tanto, encontrar el conjunto de pixeles en $VK(p)$ toma tiempo $O(1)$. Como el núcleo de visibilidad de un punto puede tener $O(n^2)$ pixeles, H puede tener $O(n^4)$ arcos. Por lo tanto, construir H toma $O(n^4)$.

En el último paso del algoritmo hacemos un recorrido de H para reportar el conjunto testigo mínimo. Como procesamos cada nodo de H sólo una vez, este paso toma tiempo $O(n^2)$. Por lo tanto, nuestro procedimiento toma tiempo $O(n^4)$.

5.4. Problemas Abiertos

Sería interesante ver si estos resultados se pueden extender a otros tipos de visibilidades, como de hecho se hace en [4]. Aquí se estudia el problema de encontrar un conjunto testigo mínimo para un polígono ortogonal bajo otros dos modelos de visibilidad ortogonal, el modelo de escalera y el modelo de k -periscopio.

Utilizando *visibilidad de escalera*, p y q son mutuamente visibles si P contiene una trayectoria poligonal monótona e isotética que une a p y a q . Con el modelo de *visibilidad k -periscopio*, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p y q son mutuamente visibles si P contiene una trayectoria poligonal monótona e isotética con a lo más k vueltas que une a p y a q .

También sería interesante indagar en una versión dinámica, estudiando el problema de testigos utilizando reflectores giratorios, tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 .

Hasta donde sabemos el problema de testigos no se ha estudiado en una versión cromática.

Capítulo 6

Conclusiones

En la presente investigación consideramos tres variantes modernas de el problema de la galería de arte, las cuales resultan enfoques novedosos. En general trabajamos considerando principalmente polígonos y poliedros ortogonales, tuvimos especial interés extender, siempre que se pudo, los resultados de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . Así mismo tratamos de utilizar en la medida de lo posible el modelos visibilidad rectangular, que resulta natural en los polígonos y poliedros ortogonales; y en muchos casos esta visibilidad facilita la resolución de estos problemas.

Primero estudiamos una variante de PGA en poliedros ortogonales utilizando los vértices del poliedro para la iluminación. Presentamos por primera vez cotas justas para la iluminación en una familia de poliedros. Como ya se mencionó anteriormente existen poliedros que no pueden ser iluminados con los vértices, por lo que encontrar familias restringidas en las que si se puede es interesante. Demostramos que en la familia de poliedros ortogonales denominada ortoárboles, $\lfloor n/8 \rfloor$ vértices son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar un ortoárbol de n vértices.

Después estudiamos una variante cromática en polígonos ortogonales en \mathbb{R}^2 y poliedros ortogonales en \mathbb{R}^3 utilizando el modelo de visibilidad rectangular. Utilizamos guardias de tipo reflector- α en \mathbb{R}^2 y de tipo segmento- α en \mathbb{R}^3 , en ambos casos con α igual a $\pi/2$. La variante cromática concibe una forma diferente de iluminar, ya que en este caso la iluminación no es suficiente, también se pide que los guardias tengan asociado un color y que cada guardia que ilumina un punto tenga un color diferente. Demostramos que para un polígono ortogonal P en \mathbb{R}^2 , utilizando reflectores- $\frac{\pi}{2}$, $\chi(P, \frac{\pi}{2}) = 1$ para iluminar el interior y el exterior de P al mismo tiempo. También demostramos que si P tiene h hoyos entonces $2 \leq \chi(P, \frac{\pi}{2}) \leq h + 1$. Como se sugirió en la sección de problemas abiertos sería interesante estudiar este problema variando el tamaño de α , con el objetivo de descubrir la relación que existe entre $\chi(P)$ y el tamaño de α . También es importante resaltar que los hoyos en este problema presentan un dificultad importante, y probablemente se requiera de otras técnicas para ajustar las cotas.

Para el caso de un poliedro \mathcal{P} en \mathbb{R}^3 obtuvimos resultados similares, en donde si parti-

mos a \mathcal{P} en poliedros de levantamiento con cortes en la dirección adecuada, digamos con planos paralelos al plano xy . Obtenemos el polígono que genera cada uno de estos poliedros de levantamiento y suponemos que el polígono con el máximo número de hoyos tiene h hoyos, entonces:

si $h = 0$:

1. $\chi(\mathcal{P}, \frac{\pi}{2}) = 1$,

y si $h > 0$:

1. $\chi(\mathcal{P}, \frac{\pi}{2}) \leq h + 1$,

Finalmente estudiamos el problema de Testigos en polígonos ortogonales bajo el modelo de visibilidad rectangular. Demostramos que existen polígonos ortogonales que no son atestiguados por su frontera. Después demostramos que todos los polígonos ortogonales admiten un conjunto testigo finito. Conseguimos esto utilizando la pixelación de un polígono ortogonal, en el que cualesquiera dos puntos en el mismo pixel tienen el mismo polígono de visibilidad. Como resultado principal, presentamos un algoritmo que calcula un conjunto testigo mínimo para polígonos ortogonales en tiempo $O(n^4)$.

En todas las variantes dejamos problemas abiertos y sugeridos para trabajo futuro.

Bibliografía

- [1] James Abello, Vladimir Estivill-Castro, Thomas Shermer, and Jorge Urrutia. Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlights. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 8(01):25–38, 1998.
- [2] Alok Aggarwal. The art gallery theorem: its variations, applications and algorithmic aspects. 1984.
- [3] I. Aldana, D. Flores-Penaloza, C. Velarde, C. Cedillo, J. Aguilar, E. Solis, and J. Urrutia. Orthogonal polygon illumination with rotating floodlights. In *In proceedings of XVI Spanish Meeting on Computational Geometry. Barcelona, Spain, July 1-3*, pages 77–80, 2015.
- [4] I. Aldana-Galván, C. Alegría, J.L. Alvarez-Rebollar, N. Marín-Nevárez, E. Solís-Villarreal, J. Urrutia, and C. Velarde. Finding minimum witness sets in orthogonal polygons. *To be published in Computational Geometry. Canadian Conference on Computational Geometry 2018*.
- [5] I. Aldana-Galván, J. L. Álvarez-Rebollar, J. C. Catana-Salazar, N. Marín, E. Solís-Villarreal, J. Urrutia, and C. Velarde. Tight bounds for illuminating and covering of orthotrees with vertex lights and vertex beacons. *Graphs and Combinatorics*, 2020.
- [6] I. Aldana-Galván, J.L. Álvarez-Rebollar, J.C. Catana-Salazar, N. Marín-Nevárez, E. Solís-Villarreal, J. Urrutia, and C. Velarde. Strong chromatic illumination of orthogonal polygons and polyhedra with $\pi/2$ - and π -floodlights and floodlight segments. In *In proceedings of XVII Spanish Meeting on Computational Geometry. Alicante, Spain, July 26-28*, pages 56–68, 2017.
- [7] I. Aldana-Galván, J.L. Alvarez-Rebollar, M. Jimenez-Salinas, E. Solís-Villarreal, and J. Urrutia. Minimizing the interior solid angle sum of orthogonal polyhedra and guarding them with $\pi/2$ -edge guards. In *In proceedings of 28th Canadian Conference on Computational Geometry Proceedings CCCG 2016*, pages 175–181, 2016.
- [8] Andreas Bärttschi and Subhash Suri. Conflict-free chromatic art gallery coverage. *Algorithmica*, 68(1):265–283, 2014.

- [9] Nadia M. Benbernou, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anastasia Kurdia, Joseph O'Rourke, Godfried Toussaint, Jorge Urrutia, and Giovanni Viglietta. Edge-guarding orthogonal polyhedra. In *Proceedings of the 23rd Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, August 10-12*, pages 461–466, 2011.
- [10] Therese C. Biedl and Saeed Mehrabi. On r-guarding thin orthogonal polygons. In *ISAAC*, volume 64 of *LIPICs*, pages 17:1–17:13. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016.
- [11] Michael Biro. *Beacon-based routing and guarding*. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, 2013.
- [12] Michael Biro, Jie Gao, Justin Iwerks, Irina Kostitsyna, and Joseph Mitchell. Beacon-based routing and coverage. In *21st Fall Workshop on Computational Geometry*, 2011.
- [13] Michael Biro, Justin Iwerks, Irina Kostitsyna, and Joseph SB Mitchell. Beacon-based algorithms for geometric routing. In *Workshop on Algorithms and Data Structures*, pages 158–169. Springer, 2013.
- [14] I. Bjorling-Sachs and D. Souvaine. A tight bound for guarding polygons with holes. (1991).
- [15] I. Bjorling-Sachs and D. Souvaine. An efficient algorithm for guard placement in polygons with holes. (1995).
- [16] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graduate Texts in Mathematics, Graph Theory*. Springer, (1988).
- [17] Prosenjit Bose, Leonidas Guibas, Anna Lubiw, Mark Overmars, Diane Souvaine, and Jorge Urrutia. The floodlight problem. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 7(01n02):153–163, 1997.
- [18] Vašek Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18(1):39–41, 1975.
- [19] Kyung-Yong Chwa, Byung-Cheol Jo, Christian Knauer, Esther Moet, René van Oostrum, and Chan-Su Shin. Guarding art galleries by guarding witnesses. In Rudolf Fleischer and Gerhard Trippen, editors, *Algorithms and Computation*, pages 352–363, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Berlin Heidelberg.
- [20] Jonas Cleve. Combinatorics of beacon-based routing and guarding in three dimensions. *Master's thesis, Freie Universität Berlin*, 2017.
- [21] Mirela Damian and Robin Flatland. Unfolding low-degree orthotrees with constant refinement. In *30th Canadian Conference on Computational Geometry, Winnipeg, August 8-10*. Elsevier, 2018.

- [22] Mirela Damian and Robin Flatland. Unfolding orthotrees with constant refinement. *arXiv preprint arXiv:1811.01842*, 2018.
- [23] O. Morales E. Kranakis, F. MacQuarie and J. Urrutia. Uninterrupted coverage of a planar region with rotating directional antennae. (2011).
- [24] S. Eidenbenz, C. Stamm, and P. Widmayer. Inapproximability results for guarding polygons and terrains. *Algorithmica*, 31(1):79–113, Sep 2001.
- [25] Lawrence H Erickson and Steven M LaValle. An art gallery approach to ensuring that landmarks are distinguishable. In *Robotics: Science and Systems*, volume 7, pages 81–88, 2012.
- [26] Vladimir Estivill-Castro and Jorge Urrutia. Optimal floodlight illumination of orthogonal art galleries. In *CCCG*, pages 81–86, 1994.
- [27] M. Kaufman y K. Kriegel F. Hoffman. The art gallery problem for polygons with holes. (1991).
- [28] Eugene Fink and Derick Wood. *Strong Restricted-Orientation Convexity*. 01 1997.
- [29] Steve Fisk. A short proof of chvátal’s watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(3):374, 1978.
- [30] Laxmi Gewali and Simeon Ntafos. Covering grids and orthogonal polygons with periscope guards. *Computational Geometry*, 2:309–334, 01 1992.
- [31] J. O’Rourke y E. Welzl H. Edelsbrunner. Stationing guards in rectilinear art galleries. (1984).
- [32] F. Hoffman. On the rectilinear art gallery problem, *proc. icalp*. (1990).
- [33] Frank Hoffmann, Klaus Kriegel, Subhash Suri, Kevin Verbeek, and Max Willert. Tight bounds for conflict-free chromatic guarding of orthogonal art galleries. In *LIPICs-Leibniz International Proceedings in Informatics*, volume 34. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2015.
- [34] Hamid Hoorfar and Ali Mohades. Special guards in chromatic art gallery. In *31th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG)*, 2015.
- [35] UEHARA Hideyuki ITO Hiroy and YOKOYAMA Mitsuo. Np-completeness of stage illumination problems. (2000).
- [36] T. Shermer J. Abello, V. Estivill and J. Urrutia. Illumination with orthogonal floodlights. (1995).
- [37] E. Rivera-Campo J. Czyzowicz and J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of stages. (1993).

- [38] M. Klawe J. Kahn and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen. (1983).
- [39] Evangelos Kranakis, Fraser MacQuarie, Oscar Morales-Ponce, and Jorge Urrutia. Uninterrupted coverage of a planar region with rotating directional antennae. In *International Conference on Ad-Hoc Networks and Wireless*, pages 56–68. Springer, 2012.
- [40] Erik A. Krohn and Bengt J. Nilsson. Approximate guarding of monotone and rectilinear polygons. *Algorithmica*, 66(3):564–594, Jul 2013.
- [41] D Lee and Arthurk Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(2):276–282, 1986.
- [42] Rajeev Motwani, Arvind Raghunathan, and Huzur Saran. Covering orthogonal polygons with star polygons: The perfect graph approach. *J. Comput. Syst. Sci.*, 40:19–48, 02 1990.
- [43] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [44] J. O’Rourke and D. Xu. Illumination of polygons with 90 textdegree vertex lights. (1994).
- [45] Joseph O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*, volume 57. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1987.
- [46] Joseph O’Rourke and Kenneth Supowit. Some np-hard polygon decomposition problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(2):181–190, 1983.
- [47] Henri Poincaré. Sur la généralisation d’un théoreme d’euler relatif aux polyedres. *Comptes Rendus de Séances de l’Academie des Sciences*, 117:144, 1893.
- [48] Dietmar Schuchardt and Hans-Dietrich Hecker. Two np-hard art-gallery problems for ortho-polygons. *Mathematical Logic Quarterly*, 41(2):261–267, 1995.
- [49] Sven Schuierer and D. Wood. Staircase visibility and computation of kernels. *Algorithmica*, 14:1–26, 01 1995.
- [50] Thomas C Shermer. Recent results in art galleries (geometry). *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1384–1399, 1992.
- [51] Thomas C. Shermer. A combinatorial bound for beacon-based routing in orthogonal polygons. *arXiv:1507.03509*, 07 2015.
- [52] W. Steiger and I. Streinu. Positive and negative results on the floodlight problem. (1994).

BIBLIOGRAFÍA

- [53] Ana Paula Tomás. *Guarding Thin Orthogonal Polygons Is Hard*, pages 305–316. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [54] J. Urrutia. Iluminando polígonos con reflectores. (1995).
- [55] Jorge Urrutia. Art gallery and illumination problems. In J.-R. SackJ. Urrutia, editor, *Handbook of Computational Geometry*, pages 973 – 1027. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [56] Giovanni Viglietta. *Guarding and searching polyhedra*. PhD thesis, University of Pisa, 2012.
- [57] Giovanni Viglietta. Face-guarding polyhedra. *Computational Geometry*, 47(8):833–846, 2014.
- [58] Giovanni Viglietta, Nadia Benbernou, Erik D Demaine, Martin L Demaine, Anastasia Kurdia, Joseph O’Rourke, Godfried T Toussaint, and Jorge Urrutia. Edge-guarding orthogonal polyhedra. In *CCCG*, 2011.
- [59] Chris Worman and J Mark Keil. Polygon decomposition and the orthogonal art gallery problem. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 17(02):105–138, 2007.

Índice alfabético

- (p, q)*-gráfica, 17, 18
- k*-coloración, 22
- (guardias, 9
- Problema de Testigos*, 9
- ángulo sólido, 28
- árbol, 20
- arista de corte, 20
- arista derecha, 24
- arista izquierda, 24
- arista- α , 24
- atestiguado, 67
- atestigua, 67
- atorado, 57
- baliza, 57
- bipartita, 20
- bosque, 20
- cajas redundantes, 51
- caja, 51
- camino, 19
- cara de la gráfica, 22
- cara derecha, 24
- cara frontal, 24
- cara inferior, 24
- cara izquierda, 24
- cara posterior, 24
- cara superior, 24
- centro de una gráfica, 19
- circuito, 19
- componente conexa, 20
- conector, 51
- corredor, 51
- cuña ortogonal, 24
- distancia entre dos vértices, 19
- genero, 28
- gráfica bipartita completa, 20
- gráfica conexa, 20
- gráfica dual, 22
- gráfica geométrica, 22
- gráfica plana, 22
- guardia segmento ortogonal, 24
- histograma, 24
- hoja, 51
- ilumina fuertemente, 9
- inicio de un reflector, 24
- núcleo de visibilidad, 24
- orientación de un reflector, 24
- orotárbol, 24
- pixelación, 67
- polígono con agujeros, 24
- polígono de escalera, 24
- polígono de visibilidad, 24
- polígono ortogonal, 24
- polígono simple, 24
- polígono, 24
- poliedro de levantamiento, 24
- radio de una gráfica, 19
- reflector ortogonal, 24
- subgráfica conexa, 20
- unión, 51
- uv*-camino, 19
- uv*-paseo, 19
- uv*-trayectoria, 19
- vértice central, 19
- vértice de corte, 20

ÍNDICE ALFABÉTICO

- ventana derecha*, 24
- ventana inferior*, 24
- ventana izquierda*, 24
- ventana superior*, 24
- visión lineal*, 9
- visión ortogonal*, 9
- visibilidad k -periscopio*, 72
- reflector- α , 9

- abanico convexo*, 24
- conjunto testigo*, 9
- cuña*, 24
- poliedro ortogonal de levantamiento con hoyos*, 24
- visibilidad de escalera*, 72

- caras adyacentes, 22
- conjunto de testigos, 67

- El Problema de Testigos, 67
- excentricidad de una gráfica, 19

- Galerías de arte con agujeros, 29
- Galerías ortogonales, 29
- Gráfica, 17
- grado de un vértice, 17, 18

- Iluminación con radares, 36
- Iluminación con reflectores, 31
- Iluminación de ortoárboles, 56
- Iluminación de polígonos ortogonales, 32
- Iluminación rectangular de polígonos ortogonales con reflectores de tamaño $\pi/2$, 61
- Iluminación rectangular de poliedros ortogonales con guardias de tipo segmento de tamaño $\pi/2$, 64

- orden de una gráfica, 17
- orientación canónica, 38

- partición canónica, 67

- reflector- α , 24

- sector vigilado, 36
- subgráfica, 19
- subgráfica generadora, 19
- subgráfica inducida, 19

- tamaño de una gráfica, 17

- vértices conectados, 20
- Variante cromática del PGA, 61
- Variante del PGA en ortoárboles, 51
- Vigilancia de polígonos ortogonales, 38
- Vigilancia de poliedros ortogonales con guardias tipo arista, 42