UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CONVERGENCIA DE TRAYECTORIAS CUÁNTICAS DISCRETAS A LA ECUACIÓN DE BELAVKIN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
HUGO BELMONT MARENTES

DIRECTOR :
MIGUEL ARTURO BALLESTEROS MONTERO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS (IIMAS)
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2023.

Agradecimientos

Primero quisiera agradecer a mis padres, Hugo y Julia, agradezco su cariño y apoyo incondicional, y reconozco su gran esfuerzo y dedicación en mi formación. Les estaré siempre agradecido.

También agradezco a mi abuelita Carmelita, a mi hermana Adriana y a Daniel por el gran cariño y apoyo incondicional que me han brindado durante todos estos años.

Al Dr. Miguel Ballesteros por su infinita paciencia y dedicación en la revisión de este trabajo, sus comentarios y correciones fueron muy valiosos para mejorarlo considerablemente. Por los valiosos consejos y opiniones que me ha brindado durante gran parte de mi carrera.

A Itzel por brindarme su cariño, amistad y apoyo en todo momento. También agradezco sus valiosos comentarios sobre redacción.

A los miembros del jurado (el Dr. Luis Silva, el Dr. Ivan Naumkin, el Dr. Francisco Javier Torres y la Dra. Maria Emilia Caballero) por su tiempo y apoyo. En especial a la Dr. Maria Emilia Caballero por sus consejos y por brindarme la oportunidad de trabajar con ella en sus cursos.

Al posgrado en Ciencias Matemáticas por la gran calidad de los cursos que se imparten. En especial a mis profesores del posgrado, aprendí mucho de ellos.

A la Dra. Silvia, Lucía, María Inés y María Teresa por la excelente atención que nos brindan durante toda nuestra estancia en el posgrado.

A mis amigos quienes me han brindado su apoyo, compañía y bastantes momentos de diversión. En especial a Beny.

Agradezco al CONACYT por la beca que me otorgó durante mis estudios de maestría y finalmente, quisiera mencionar que esta investigación fue realizada gracias al proyecto FORDECYT-PRONACES, PRONACES 429825/2020, al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108818 y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN101621.

Índice

1. Introducción

En este trabajo se estudiará la convergencia de procesos estocásticos en tiempo discreto en la mecánica cuántica a la solución de una ecuación diferencial estocástica llamada ecuación de Belavkin. Este procedimiento permite justificar la modelación matemática de la evolución de un sistema cuántico en tiempo continuo mediante esta ecuación diferencial estocástica. Los resultados de este trabajo fueron desarrollados antes en el artículo [18], sin embargo, la demostración de los resultados de este trabajo se abordan de manera rigurosa y mediante algunas técnicas distintas.Un aspecto importante a destacar es que estos resultados no son autocontenidos y no encontramos forma de aplicar los resultados que se citan en [18] para justificar los resultados que no se demuestran. El objetivo de este trabajo es desarrollar de manera clara y detallada la descripción del modelo en tiempo discreto, la existencia y unicidad de la ecuación de Belavkin, y los resultados de convergencia. Además, se espera que este trabajo sirva como base para desarrollar resultados de convergencia mediante éstas técnicas para el modelo discreto desarrollado en la referencia [2].

El desarrollo de este trabajo requiere de teoría de espacios de Hilbert y además, de resultados del área de probabilidad y procesos estocásticos. En su mayoría, estos resultados se enunciarán sin demostración, para cada uno de estos resultados se darán las referencias correspondientes.

Primero veremos el modelo discreto. El sistema cuántico que nos interesa medir está representado por un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$ acoplado a una cadena de sistemas idénticos e independientes. Cada copia de estos sistemas se encuentra representada por un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$. El espacio $\mathcal{H}$ espacio representa un tren de fotones o electrones disparados hacia el sistema $\mathcal{H}_0$. Consideraremos que estos espacios son de dimensión finita. A cada espacio se le asociará un operador positivo de clase traza, con traza igual a 1, a un operador con éstas características se le conoce como estado u operador de densidad y a los operadores de densidad sobre $\mathcal{H}$ los denotaremos por $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Cada copia de $\mathcal{H}$ interactúa con $\mathcal{H}_0$ una tras otra en intervalos de tiempo de longitud h. La información de la evolución del sistema $\mathcal{H}_0$ se obtiene al realizar una medición sobre el sistema $\mathcal{H}$ en cada interacción. En la primera interacción, el sistema está descrito por el producto tensorial $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ y la evolución está descrita por un Hamiltoniano H_{tot}, que es un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. Su forma general es

$$H_{tot} = H_0 \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{H}_0} \otimes H + \lambda H_{int},$$

donde H_0 y H son operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$, respectivamente, H_{int} es un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ y $\lambda > 0$. A H_0 y H se les conoce como Hamiltonianos libres, al operador H_{int}, como el Hamiltoniano de interacción y a λ, como la constante de acoplamiento.

El operador

$$U = e^{ihH_{tot}}$$

describe la interacción de la siguiente manera: Si ρ es un estado en el producto tensorial $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, en la representación de Schrödinger, la evolución está dada por

$$\rho \mapsto U\,\rho\,U^*.$$

Después de la primera interacción, se repite la interacción pero esta vez acoplando una nueva copia de $\mathcal{H}$ al sistema $\mathcal{H}_0$. Se considera que esta nueva copia se encuentra aislada durante la primera interacción y que la primera copia se encuentra aislada durante el resto del experimento. Este procedimiento se repite de manera sucesiva.

Las mediciones sobre el sistema se realizan de la siguiente manera: Sea X un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$, a este operador le llamaremos observable. Consideremos su descomposición espectral,

$$\mathsf{X} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i,$$

donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ son los valores propios de X y P_i es la proyección asociada al valor propio λ_i, para cada $i \in \{1, \cdots, p\}$. Los valores que podemos medir a través del sistema cuántico son los valores propios del observable X y el resultado de la medición es aleatorio. Si el estado de referencia antes de la medición es ρ la probabilidad de observar el valor λ_i se encuentra dada por

$$\mathbb{P}[Observar\ \lambda_i] = Tr\big(\rho P_i\big),$$

para cada $j \in \{1, \cdots, p\}$. Si se ha observado el valor λ_i, el nuevo estado de referencia se encuentra dado por

$$\rho = \frac{P_i\, \rho\, P_i}{Tr(\rho\, P_i)}.$$

Las interacciones del sistema $\mathcal{H}_0$ y cada copia de $\mathcal{H}$ se encuentran representadas por el espacio de Hilbert

$$\Gamma = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}.$$

Las mediciones cuánticas repetidas son una combinación de estos principios: antes de cada medición, el estado inicial se verá afectado por la interacción entre $\mathcal{H}_0$ y la copia de $\mathcal{H}$, y posteriormente la medición da lugar a una modificación aleatoria del sistema. Esto da lugar a una sucesión de operadores de densidad aleatorios, a esta sucesión le llamaremos trayectoria cuántica discreta.

Consideraremos un estado inicial ρ sobre $\mathcal{H}_0$ y sobre cada copia de $\mathcal{H}$ consideraremos el estado inicial $|x_0\rangle\langle x_0|$. Luego, el estado inicial sobre Γ se encuentra dado por

$$\hat{\rho}_0 := \rho \otimes (|x_0\rangle\langle x_0| \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots).$$

El espacio muestral que describirá estas interacciones será $\Omega^{\mathbb{N}}$, donde $\Omega = \{1, \cdots, p\}$. Ω corresponde al conjunto de índices de los eigenvalores del observable X y $\Omega^{\mathbb{N}}$ representa los posibles resultados de las mediciones en cada una de las interacciones. La sigma álgebra asociada a este espacio es la σ-álgebra generada por los cilindros de $\Omega^{\mathbb{N}}$:

$$\Lambda_{i_1, \cdots, i_n} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \cdots, \omega_n = i_n\},$$

con $(i_1, \cdots, i_n) \in \Omega^n$. Denotaremos a dicha σ-álgebra por Σ.

Para cada $n \geq 1$, definimos el operador V_n de la siguiente manera: considemos $V_0 = I$ y para $n \geq 0$ definimos de manera recursiva $V_{n+1} = V_n U_{n+1}$, donde U_{n+1} es el operador unitario que actúa como U en $\mathcal{H}_0$ en la $n+1$-ésima copia de $\mathcal{H}$. Para cualquier $(i_1, \cdots, i_n) \in \Omega^n$, consideraremos el operador

$$\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n) := (I \otimes P_{i_1} \otimes \cdots \otimes P_{i_n} \otimes I \otimes \cdots)\mu_n(I \otimes P_{i_1} \otimes \cdots \otimes P_{i_n} \otimes I \otimes \cdots),$$

donde $\mu_n = V_n \hat{\rho}_0 V_n$. Este operador es positivo y $Tr(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n))$ representa la probabilidad de observar los eigenvalores corespondientes a los índices $i_1, \cdots, i_n$ en las primeras n mediciones.

Por medio del teorema de Kolmogorov veremos que existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma)$ tal que

$$\mathbb{P}(\Lambda_{i_1, \cdots, i_n}) = Tr(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $\tilde{\rho}_n : \Omega^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{B}(\Gamma)$ por

$$\tilde{\rho}_n(\omega) := \begin{cases} \dfrac{\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)}{Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big)} & si \quad Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) \neq 0, \\ 0 & si \quad Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) = 0. \end{cases}$$

Para $n = 0$ se define $\tilde{\rho}_0(\omega) := \hat{\rho}_0$, para todo $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}$. Este operador representa el estado del sistema después de la n-ésima medición y $\tilde{\rho}_n$ es un operador de densidad sobre Γ fuera de un conjunto de medida cero.

El proceso estocástico $(\rho_n)_{n\geq 0}$ que estudiaremos es el siguiente:

$$\rho_n(\omega) = Tr_{\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}}(\tilde{\rho}_n(\omega)),$$

Donde $Tr_{\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}}(\cdot)$ denota el operador traza parcial respecto del espacio $\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}$. La variable aleatoria ρ_n representa el estado del sistema $\mathcal{H}_0$ después de la n-ésima medición y $\tilde{\rho}_n$ es un operador de densidad sobre $\mathcal{H}_0$ fuera de un conjunto de medida cero.

Para el caso particular $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ tendremos que este cumple la fórmula recursiva:

$$\rho_{n+1} = \mathcal{L}_0(\rho_n) + \mathcal{L}_1(\rho_n) + X_{n+1}\left(\sqrt{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_n) - \sqrt{\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_n)\right), \quad n \geq 0.$$

donde $\mathcal{L}_i : \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ se encuentra dado por

$$\mathcal{L}_i(\rho) = Tr_{\mathcal{H}_0}\big((I \otimes P_i)U\left(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\right)U^*(I \otimes P_i)\big), \quad \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0),$$

para cada $i \in \{0, 1\}$, y para cada $n \geq 1$, la variable aleatoria X_n se encuentra dada por

$$X_n := \frac{\mathbb{1}_{A_n} - Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))}{\sqrt{Tr(\mathcal{L}_0(\rho_n))Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))}}.$$

donde $A_n := \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \omega_n = 1\}$. El conjunto A_n representa el evento de observar el eigenvalor con índice 1 en la n-ésima medición. A diferencia de la referencia [18], consideraremos la siguiente filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ para el proceso $(\rho_n)_{n\geq 0}$:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega^{\mathbb{N}}\}$$

y para $n \geq 1$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_k : k \leq n),$$

donde $\pi_n(\omega) = \omega_n$, para cada $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}$. Para las variables aleatorias $(X_n)_{n\geq 1}$ tendremos la siguientes igualdades:

- $\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = 0$,
- $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = 1$.

La filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ nos permitirá calcular de manera clara y explícita las expresiones anteriores. Dichas expresiones serán importantes para estudiar el resultado de convergencia. Es importante destacar que en la referencia [18] se considera otra filtración y no se realizan los cálculos de manera explícita.

Posteriormente analizaremos el modelo en tiempo continuo. La ecuación de Belavkin es una ecuación diferencial estocástica con valores en $M_2(\mathbb{C})$ y esta se encuentra dada por:

$$d\rho_t = L(\rho_t)\,dt + (C\rho_t + \rho_t C^* - Tr(C\rho_t + \rho_t C^*)\rho_t)\;dW_t,$$

con condición inicial $\rho_0 = \rho$, $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Donde $(W_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano unidimensional y

$$L(M) = -i[H_0, M] + CMC^* - 1/2\{C^*C, M\},$$

con H_0 es autoadjunto y $C \in M_2(\mathbb{C})$. A L se le conoce como el operador de Lindblad.

Las operaciones $[\cdot,\cdot]$ y $\{\cdot,\cdot\}$ denotan al conmutador y anticonmutador respectivamente, es decir, $[A, B] = AB - BA$ y $\{A, B\} = AB + BA$.

La solución $(\rho_t)_{t\geq 0}$ cumple una propiedad importante: para cada $t \geq 0$ se tiene que ρ_t es un operador de densidad. A diferencia de la referencia [18], estudiaremos la existencia y unicidad de la ecuación de Belavkin, y dicha propiedad mediante técnicas de cálculo estocástico respecto de semimartingalas continuas. Parte del desarrollo de estos resultados se encuentran basados en la referencia [3] con dos diferencias importantes: En dicha referencia únicamente se demuestra la existencia de una solución de la ecuación de Belavkin, sin embargo, no se considera la unicidad de esta ecuación. Además, la demostración de que ρ_t es un operador de densidad se basa en la fórmula de integración por partes.

Por último, veremos el resultado de convergencia. Consideraremos fijos $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, un observable X con descomposición espectral $\mathsf{X} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ y una base ortonormal $\{x_0, x_1\}$ de $\mathbb{C}^2$. Supondremos que la descomposición espectral de X no es diagonal en la base $\{x_0, x_1\}$, es decir, las proyecciones espectrales cumplen la siguiente relación:

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & a_{0,1} \\ \bar{a}_{0,1} & a_1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} a_1 & \text{-}a_{0,1} \\ \text{-}\bar{a}_{0,1} & a_0 \end{pmatrix},$$

con $a_0, a_1 > 0$, $a_1 + a_0 = 1$ y $|a_{0,1}| = \sqrt{a_0 a_1}$. Esta hipótesis es importante para obtener el resultado de convergencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos el operador unitario sobre $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ dado por

$$U^n = \exp(-\frac{i}{n} H^n_{tot})$$

donde H^n_{tot} se encuentra representado en bloques en la base $\{x_0 \otimes x_0, x_1 \otimes x_0, x_0 \otimes x_1, x_1 \otimes x_1\}$ por

$$H^n_{tot} = \begin{pmatrix} H_0 & ie^{-i\theta}\sqrt{n}C^* \\ -ie^{i\theta}\sqrt{n}\,C & H_0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es tal que $a_{0,1} = e^{i\theta}\sqrt{a_0 a_1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por

$$(\rho^n_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

al proceso estocástico con $\rho^n_0 = \rho$ construído en el modelo discreto a partir del observable X y el operador unitario U^n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el proceso estocástico $\hat{\rho}^n = (\hat{\rho}^n_t)_{t\geq 0}$ por

$$\hat{\rho}^n_t := \rho^n_{\lfloor nt \rfloor}.$$

Veremos que $\hat{\rho}^n$ converge en distribución sobre el espacio de Skorokhod a la solución de la ecuación de Belavkin $\hat{\rho} = (\rho_t)_{t\geq 0}$ con condición inicial $\rho_0 = \rho$, denotaremos esta convergencia por $\hat{\rho}^n \Rightarrow \hat{\rho}$. Tendremos que existe $\widehat{N} \in \mathbb{N}$ (que dependerá de las proyecciones espectrales de X) tal que para $n \geq \widehat{N}$, $\hat{\rho}^n$ cumple la siguiente igualdad:

$$\hat{\rho}^n_t = \rho + \epsilon^n_t + \int_0^t L(\hat{\rho}^n_{s\text{-}})\, dV^n_s + \int_0^t \Big(C\hat{\rho}^n_{s\text{-}} + \hat{\rho}^n_{s\text{-}}C^* - Tr\big(C\hat{\rho}^n_{s\text{-}} + \hat{\rho}^n_{s\text{-}}C^*\big)\hat{\rho}^n_{s\text{-}}\Big)\, dW^n_s,$$

donde

$$W_t^n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i^n,$$

y

$$V_t^n := \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}.$$

Esta expresión se obtiene por medio de expresiones asintóticas sobre los operadores unitarios $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de la fórmula recursiva desarrollada en el modelo discreto y por medio de la integral de Lebesgue-Stieltjes. Analizaremos por separado la convergencia de los procesos estocásticos $\{\epsilon^n\}_{n\geq\widehat{N}}$, $\{W^n\}_{n\geq\widehat{N}}$ y $\{V^n\}_{n\geq\widehat{N}}$ y posteriormente concluiremos el resultado por medio de los teoremas de convergencia de integrales estocásticas de la referencia [16]. Cabe destacar que en el reescalamiento para el Hamiltoniano total H_{tot}^n considerado en la referencia [18] no es correcto por lo que en esta tesis corregimos esta situación.

2. Resultados de análisis funcional

2.1. Operadores de clase traza y de Hilbert Schmidt

Definición 2.1. Sea T un operador positivo sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dada una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos el valor

$$Tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle.$$

Esta cantidad es positiva (posiblemente infinita) y diremos que es la traza T.

Proposición 2.2. *La cantidad $Tr(T)$ es independiente de la base.*

La demostración de este resultado se puede consultar en las referencias [1], sección 2.1 o en la referencia [7], capítulo 2, sección 2.3.

Definición 2.3. Diremos que un operador acotado T es un operador de clase traza si $Tr(|T|) < \infty$. Al conjunto de operadores de clase traza lo denotaremos por $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$.

Dado $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ definimos

$$\|T\|_1 := Tr(|T|).$$

Teorema 2.4. *$\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ es un espacio vectorial, $\|\cdot\|_1$ es una norma sobre este espacio y además $(\mathcal{L}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Para todo $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ tenemos que*

$$\|T\| \leq \|T\|_1.$$

Proposición 2.5. *Sea $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. El valor*

$$Tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle$$

converge absolutamente y es independiente de la elección de la base. Además

$$|Tr(T)| \leq \|T\|_1.$$

Para un operador $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ llamaremos a $Tr(T)$ la traza de T.

Proposición 2.6. *Sea $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, entonces*

(a) para todo $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se tiene que $ST, TS \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ y además

- $\max\{\|TS\|_1, \|ST\|_1\} \leq \|S\|\|T\|_1$,
- $Tr(ST) = Tr(TS)$.

(b) $T^* \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ y además

- $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$,
- $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$.

La demostración de este resultado se puede consultar en las referencias [1], sección 2.1.

De las proposiciones anteriores podemos deducir el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Dado $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ y $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador unitario, se tiene que $UTU^* \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ y además*

$$Tr(UTU^*) = Tr(T).$$

Definición 2.8. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Decimos que T es un operador de Hilbert-Schmidt si

$$Tr(T^*T) < \infty.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ al conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt sobre $\mathcal{H}$ y definimos $\|\cdot\|_2$ por

$$\|T\|_2 := Tr(T^*T).$$

Teorema 2.9. *(a) Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de Hilbert Schmidt si y sólo si existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

La serie es independiente de la base y

$$Tr(T^*T) = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_{\mathcal{H}}.$$

(b) La función $(S,T) \mapsto \langle S,T\rangle$ definida por

$$\langle S,T\rangle = Tr(S^*T)$$

es un producto escalar sobre $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ y $(\mathcal{L}_2(\mathcal{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

(c) Si $T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se tiene que $ST, TS \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ y además

$$\text{máx}\{\|TS\|_2, \|ST\|_2\} \leq \|S\|\|T\|_2.$$

(d) Para todo $T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ tenemos que $\|T\| \leq \|T\|_2$ y si $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ tenemos que

$$\|T\| \leq \|T\|_2 \leq \|T\|_1.$$

Nótese que en el caso de dimensión finita, si $M = (M_{i,j}) \in M_d(\mathbb{C})$, tenemos que

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |M_{i,j}|^2.$$

2.2. Producto tensorial de espacios de Hilbert

Los resultados de esta sección se pueden consultar en la referencia [7], capítulo 2, sección 2.4 y [1], sección 2.2.

Definición 2.10. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert. Sean $\phi \in \mathcal{H}_1$ y $\psi \in \mathcal{H}_2$. Definimos la forma bilineal conjugada $\phi \otimes \psi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ por

$$\phi \otimes \psi(\phi', \psi') = \langle \phi', \phi\rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi', \psi\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Sea E el conjunto de combinaciones lineales finitas de dichas formas bilineales conjugadas. Sobre E definiremos un producto interno. Primero, dados $\phi \otimes \psi, \phi' \otimes \psi'$ definimos

$$\langle \phi \otimes \psi, \phi' \otimes \psi' \rangle := \langle \phi, \phi' \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi, \psi' \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

y para cualesquiera $\sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \otimes \psi_i$, $\sum_{i=1}^{m} b_i \phi_i' \otimes \psi_i' \in E$ consideraremos la extensión lineal de la relación anterior, es decir,

$$\langle \sum_{i=1}^{k} a_i \, \phi_i \otimes \psi_i, \sum_{i=1}^{m} b_i \, \phi_i' \otimes \psi_i' \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i b_j \langle \phi_i, \phi_j' \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi_i, \psi_j' \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Proposición 2.11. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *está bien definido y es un producto interno sobre E.*

Definición 2.12. El producto tensorial entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, denotado por $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, es la completación del espacio pre-Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Nótese que si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son de dimensión finita, podemos considerar directamente al espacio $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ como el producto tensorial entre estos espacios. La siguiente proposición nos permitirá determinar una base ortonormal para el espacio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Proposición 2.13. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ conjuntos numerables y $\{e_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ y $\{f_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Entonces $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in \mathcal{M}, j \in \mathcal{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.*

Ahora veremos el producto tensorial de operadores. Dados $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ definimos $A \otimes B : E \to E$ por medio de la igualdad

$$A \otimes B(\phi \otimes \psi) := A\phi \otimes B\psi.$$

y su extensión lineal sobre todo E, es decir,

$$A \otimes B(\sum_{i=1}^{m} \phi_i \otimes \psi_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, A\phi_i \otimes B\psi_i.$$

$A \otimes B$ está bien definido, es un operador lineal acotado y $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$.

Definición 2.14. Definimos el producto tensorial entre A y B, $A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, como la cerradura del operador $A \otimes B : E \to E$ bajo el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$.

El producto tensorial preserva algunas clases de operadores acotados.

Proposición 2.15. *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert separables y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$.*

1. *Si A y B son compactos, entonces $A \otimes B$ es un operador compacto sobre $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.*

2. *Si A y B son operadores de clase traza, entonces $A \otimes B$ es de clase traza. En particular tenemos que*
$$\|A \otimes B\|_1 = \|A\|_1 \|B\|_1$$
y
$$Tr(A \otimes B) = Tr(A) Tr(B).$$

2.3. Producto tensorial infinito de un espacio de Hilbert

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\psi \in \mathcal{H}$ con $\|\psi\| = 1$ definiremos el producto tensorial infinito $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}$ basado en ψ. Es importante mencionar que el producto tensorial $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}$ depende del vector ψ pero no será incluído en la notación de éste. Definiremos este producto tensorial de manera inductiva identificando el producto tensorial $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}$ como un subespacio de $\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{H}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La demostración de los resultados de esta sección se pueden consultar en la referencia [7], capítulo 2, sección 2.4.2.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{H}^{(n)} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}$$

y dados $m \leq n$ definimos el operador $l_{m,n}^{\psi} : \mathcal{H}^{(m)} \to \mathcal{H}^{(n)}$ por medio de

$$l_{m,n}^{\psi}(x) := x \otimes \big(\otimes_{i=1}^{n-m} \psi \big).$$

Nótese que para cualesquiera $k \leq m \leq n$ se tiene que $l_{k,m}^{\psi} l_{m,n}^{\psi} = l_{k,n}^{\psi}$. Además tenemos que $l_{m,n}^{\psi}$ es un operador lineal y una isometría, es decir, $\|l_{m,n}^{\psi}(x)\|_{\mathcal{H}^{(n)}} = \|x\|_{\mathcal{H}^{(n)}}$. Por lo tanto $l_{m,n}^{\psi}$ es un operador lineal continuo.

Denotaremos el límite inductivo de los espacios $\mathcal{H}^{(n)}$ como

$$\mathcal{H}^{(\infty)} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{(n)} / \sim,$$

donde la razón de equivalencia $\sim$ se define de la siguiente manera: $x \sim y$ si y sólo si $l_{m,n}^{\psi}(x) = y$ para algún par $m \leq n$.

Luego, le daremos a $\mathcal{H}^{(\infty)}$ la estructura de un espacio vectorial con producto interno mediante las siguientes operaciones: para $[x_m], [y_n] \in \mathcal{H}^{(\infty)}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $m \leq n$ y $x_m \in \mathcal{H}^{(m)}$, $y_n \in \mathcal{H}^{(n)}$ definimos

$$\begin{aligned}
&\alpha[x_m] := [\alpha x_m], \\
&[x_m] + [y_n] := [l_{m,n}^{\psi}(x) + y_n], \\
&\langle [x_m], [y_n] \rangle_{\mathcal{H}^{(\infty)}} := \langle l_{m,n}^{\psi}(x), y_n \rangle_{\mathcal{H}^{(n)}}, \\
&\langle [y_n], [x_m] \rangle_{\mathcal{H}^{(\infty)}} := \langle [y_n], l_{m,n}^{\psi}(x) \rangle_{\mathcal{H}^{(n)}}.
\end{aligned}$$

Estas operaciones están bien definidas y en particular, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{(\infty)}}$ está bien definida pues $\|\psi\| = 1$.

Definición 2.16. Definimos el espacio de Hilbert $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$ como la completación de $\mathcal{H}^{\infty}$ a través del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{(\infty)}}$ y diremos que el producto tensorial está basado en ψ.

Nótese que $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$ sólo consta de clases de equivalencia, sin embargo, tenemos $\mathcal{H}^{(n)}$ inmerso para todo $n \in \mathbb{N}$ de manera isométrica. Dado $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathcal{H}^{(n)}$, denotaremos a la clase de éste vector por $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \otimes \psi \cdots \otimes \psi \otimes \cdots$ y para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{(m)})$, definiremos el operador lineal

$$T \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \cdots$$

de la siguiente manera: para $[x_n] \in \mathcal{H}^{(\infty)}$ con $x_n \in \mathcal{H}^{(n)}$, si $n \leq m$ tenemos

$$T \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \cdots ([x_n]) = \big[T(l_{n,m}^{\psi}(x))\big].$$

Si $n > m$, entonces

$$T \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \cdots ([x_n]) = \big[\big(T \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-m} I\big)(x_n)\big].$$

Este operador está bien definido sobre $\mathcal{H}^{(\infty)}$ y es continuo de norma $\|T\|$. Finalmente, extendemos $T \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \cdots$ en todo $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$ por continuidad.

Para ψ definimos la proyección $|\psi\rangle\langle\psi| : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$|\psi\rangle\langle\psi|\, \phi := \langle\psi, \phi\rangle\, \psi.$$

De manera análoga podemos definir el operador

$$T \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots$$

sobre el producto tensorial $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$ basado en ψ de la siguiente manera: para $[x_n] \in \mathcal{H}^{(\infty)}$ con $x_n \in \mathcal{H}^{(n)}$, si $n \leq m$ tenemos

$$T \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots ([x_n]) = \big[T(l_{n,m}^{\psi}(x))\big].$$

Si $n > m$, entonces

$$T \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots ([x_n]) = \big[\big(T \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-m} |\psi\rangle\langle\psi|\big)(x_n)\big].$$

Este operador está bien definido sobre $\mathcal{H}^{(\infty)}$ y es continuo de norma $\|T\|$. Finalmente, extendemos $T \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \cdots$ en todo $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$ por continuidad.

Teorema 2.17. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal tal que $e_n = \psi$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto*

$$\big\{e_{n_1} \otimes \cdots \otimes e_{n_k} \otimes \psi \otimes \cdots \otimes \psi \otimes \cdots \,|n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N}\big\}$$

forma una base ortonormal de $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$.

2.4. Traza parcial respecto de un espacio

Los resultados de esta sección se pueden consultar en las referencias [1] y [7].

Definición 2.18. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert separables. Para cada $g \in \mathcal{K}$ definimos el operador $|g\rangle_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ por

$$|g\rangle_{\mathcal{K}}\, f := f \otimes g.$$

Tenemos que $|g\rangle_{\mathcal{K}}$ es un operador lineal continuo con norma $\|g\|_{\mathcal{K}}$. Su adjunto es el operador ${}_{\mathcal{K}}\langle g| : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ definido por

$${}_{\mathcal{K}}\langle g|\, u \otimes v := \langle g, v\rangle u,$$

y su extensión por continuidad sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. La norma de este operador también es igual a $\|g\|_{\mathcal{K}}$.

El siguiente teorema define y caracteriza a la traza parcial.

Teorema 2.19. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert separables y T un operador de clase traza sobre $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$. Para toda base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{K}$, la serie*

$$Tr_{\mathcal{K}}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\mathcal{K}}\langle e_n|T|e_n\rangle_{\mathcal{K}}$$

converge en $(\mathcal{L}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ y el operador $Tr_{\mathcal{K}}(T)$ no depende de la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El operador $Tr_{\mathcal{K}}(T)$ es el único operador de clase traza sobre $\mathcal{H}$ tal que

$$Tr\big(Tr_{\mathcal{K}}(T)B\big) = Tr\big(T(B\otimes I)\big),$$

para todo $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

La siguiente serie de propiedades de la traza parcial serán de utilidad en la siguientes secciones. Éstas se pueden deducir del teorema 2.19 y de las propiedades de la traza.

Teorema 2.20. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert separables y T un operador de clase traza definido sobre $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) Si $T = A\otimes B$, donde A y B son de clase traza, tenemos

$$Tr_{\mathcal{K}}(T) = Tr(B)\,A.$$

b) $Tr\big(Tr_{\mathcal{K}}(T)\big) = Tr(T)$.

c) Si $A, B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces

$$Tr_{\mathcal{K}}\big((A\otimes I)T(B\otimes I)\big) = A\,Tr_{\mathcal{K}}(T)\,B.$$

También tenemos las siguientes propiedades:

Teorema 2.21. *Sea $T\in\mathcal{L}_1(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Se cumplen las siguientes propiedades*

a) Si T es positivo, $Tr_{\mathcal{K}}(T)$ es positivo.

b) $Tr_{\mathcal{K}}(T)^* = Tr_{\mathcal{K}}(T^*)$.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [7], capítulo 2, sección 2.5.

3. Resultados de probabilidad

En esta sección veremos resultados de probabilidad y procesos estocásticos que serán útiles a lo largo de este trabajo. Para ver esto, será útil mencionar conceptos propios de esta área. Un espacio de probabilidad es un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y a Ω le llamaremos espacio muestral. Diremos que una propiedad se cumple casi seguramente si esta propiedad se cumple fuera de un conjunto en $\mathcal{F}$ de medida cero y lo abreviaremos como "c.s.".

Definición 3.1. (Variable aleatoria). Sean E un conjunto y $\mathcal{E}$ una σ-álgebra de subconjuntos de E, si $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ es una función medible diremos que X es una variable aleatoria con valores en E. Si (E, d) es un espacio métrico, consideraremos que la variable aleatoria es medible respecto respecto de la σ-álgebra de Borel de dicho espacio métrico y a esta la denotaremos por $\mathcal{B}(E)$.

Definición 3.2. (Ley o distribución de una variable aleatoria). Sea $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ una variable aleatoria. Denotaremos por $\mathbb{P}_X$ a la medida inducida por X, es decir, la medida definida por

$$\mathbb{P}_X(E) := \mathbb{P}(X^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{E}.$$

Diremos que $\mathbb{P}_X$ es la ley o distribución de X. También denotaremos a la ley de X por $\mathcal{L}(X)$.

Dado $E \in \mathcal{E}$, tambíen utilizaremos la notación:

$$\mathbb{P}(X^{-1}(E)) := \mathbb{P}(X \in E).$$

Definición 3.3. (σ-álgebra generada por una familia de variables aleatorias). Dada una familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i \in I}$ denotaremos por $\sigma(X_i : i \in I)$ a la sigma álgebra más pequeña que hace medible a esta familia de funciones y le llamaremos la sigma álgebra generada por $\{X_i\}_{i \in I}$. Si únicamente tenemos una variable aleatoria X, denotaremos a esta sigma álgebra por $\sigma(X)$.

Definición 3.4. (Independencia de σ-álgebras). Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ una familia de σ-álgebras tal que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, para todo $i \in I$. Diremos que $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ son independientes si para cualesquiera $k > 1$, $i_1, \cdots, i_k \in I$ y $F_{i_l} \in \mathcal{F}_{i_l}$ se cumple:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(F_{i_j}).$$

Definición 3.5. (Independencia de variables aleatorias). Diremos que una familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i \in I}$ son independientes si las σ-álgebras $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ son independientes.

Definición 3.6. (Esperanza de una variable aleatoria). Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Si $X \in L^1(\Omega)$ o X es no negativa, definimos la esperanza de X por

$$\mathbb{E}[X] := \int X \, d\mathbb{P}.$$

Definición 3.7. Dado un conjunto $A \in \mathcal{F}$, definimos la indicadora de A, $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$, por

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1. Esperanza condicional y propiedades

El primer resultado que veremos es el de esperanza condicional y sus propiedades.

Definición 3.8. (Esperanza condicional de una variable aleatoria dada una σ-álgebra). Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espacio de probabilidad fijo y sean $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sigma álgebra y $X \in L^1(\Omega)$. La esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$, denotada por $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$, se define como la variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible tal que

$$\int X \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} = \int \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mathbb{1}_A d\mathbb{P}, \tag{3.2}$$

para todo $A \in \mathcal{G}$.

La existencia de esta variable aleatoria se obtiene al aplicar el teorema de Radón Nykodym a la medida con signo $\mathbb{Q} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\mathbb{Q}(A) := \int X \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Notemos que del teorema de Radón-Nykodym también se sigue que esta variable aleatoria es única en el siguiente sentido: si Z es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible que cumple la propiedad (3.2), $Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ casi seguramente.

Observación 3.9. Algunas consecuencias inmediatas de la definición de esperanza condicional son las siguientes:

(a) Si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, tenemos que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

(b) Considerando $A = \Omega$ en la igualdad (3.2), tenemos que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

(c) Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = X$ c.s.

Definición 3.10. Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de Ω. Diremos que $\mathcal{C}$ es un π-sistema si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intersecciones, es decir, si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Veremos una caracterización de la esperanza condicional en términos de π-sistemas.

Proposición 3.11. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ un π-sistema y $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$. Supongamos que Ω es una unión finita o numerable de elementos de $\mathcal{C}$. Si Z es una variable aleatoria integrable y $\mathcal{G}$-medible tal que*

$$\int X \mathbb{1}_C \, d\mathbb{P} = \int Z \mathbb{1}_C \, d\mathbb{P},$$

para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces $Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ c.s.

La demostración del resultado anterior se puede consultar en la referencia [5], capítulo 5, sección 34. Algunas propiedades importantes de la esperanza condicional son las siguientes:

Teorema 3.12. *Sean X, Y y $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias en $L^1(\Omega)$. Entonces se cumplen:*

(i) *Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $X = a$ c.s., entonces $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = a$ c.s.*

(ii) *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ c.s.*

(iii) *Si $X \leq Y$ c.s., entonces $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ c.s.*

(iv) *$|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{G}]$ c.s.*

(v) Si $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *c.s. y* $|X_n| \le Y$, *con* $Y \in L^1(\Omega)$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} E[X_n \,|\, \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$ *c.s.*

Proposición 3.13. *Si* $X, Y, XY \in L^1(\Omega)$ *y* X *es* $\mathcal{G}$*-medible, entonces*

$$\mathbb{E}[XY \,|\, \mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{G}] \quad \textit{c.s.}$$

Proposición 3.14. *Si* $X \in L^1(\Omega)$ *y si* $\mathcal{G}_1$ *y* $\mathcal{G}_2$ *son sigma álgebras tales que* $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, *entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_2] \,|\, \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_1] \quad \textit{c.s.}$$

Proposición 3.15. *(Desigualdad de Jensen). Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función convexa y* $X \in L^1(\Omega)$. *Si* $\varphi(X) \in L^1(\Omega)$, *entonces*

$$\varphi\big(\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]\big) \le \mathbb{E}[\varphi(X) \,|\, \mathcal{G}] \quad \textit{c.s.}$$

Proposición 3.16. *Sea* $X \in L^1(\Omega)$ *y suponga que* $\sigma(X)$ *es independiente de* $\mathcal{G}$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \quad \textit{c.s.}$$

Las demostraciones del teorema 3.12 y las proposiciones 3.13, 3.14 y 3.15, se pueden consultar en la referencia [5], capítulo 5, sección 34. Para la demostración de la proposición 3.16, ver la referencia [11], capítulo 10, sección 1.1.

3.2. Procesos estocásticos

Definición 3.17. (Proceso estocástico). Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias indexadas por un conjunto T, que denotaremos por $(X_t)_{t\in T}$, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que toman valores en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$. A E se le conoce como el espacio de estados.

En este trabajo consideraremos los siguientes conjuntos de índices: $T = [0, \infty)$, $T = [0, t]$ con $t > 0$ y $T = \mathbb{N}$. Si $T = [0, \infty)$ utilizaremos la notación, $(X_t)_{t\ge 0}$ y si $T = \mathbb{N}$, utilizaremos la notación $(X_n)_{n\ge 1}$. Además, consideraremos como espacio de estados espacios los siguientes espacios de dimensión finita: $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}$, $M_{k\times n}(\mathbb{R})$ y $M_n(\mathbb{C})$, cada uno de estos equipados con su respectiva sigma álgebra de Borel.

Definición 3.18. Sea $(X_t)_{t\in T}$ un proceso estocástico. Diremos que la familia de funciones definidas por

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

son las trayectorias de $(X_t)_{t\in T}$.

Nos enfocaremos en algunos conceptos de procesos en tiempo continuo (es decir, el caso $T = [0, \infty)$ y $T = [0, t]$ con $t > 0$).

Definición 3.19. Sea T un subintervalo de $[0, \infty)$ y sean $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diremos que $(X_t)_{t\in T}$ es una versión de $(Y_t)_{t\in T}$ si para todo $t \in T$ se tiene que

$$X_t = Y_t \quad \text{c.s.}$$

Definición 3.20. Sea T un subintervalo $[0, \infty)$ y sean $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diremos que $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ son indistinguibles si para casi todo $\omega \in \Omega$ se cumple:

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega), \qquad \text{para todo } t \in T.$$

Definición 3.21. Sea (E, d) un espacio métrico, $\mathfrak{B}(E)$ su sigma álgebra de Borel y T un subintervalo de $[0, \infty)$. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\in T}$ con espacio de estados E tiene trayectorias continuas (casi seguramente) si las trayectorias

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

son funciones continuas para todo $\omega \in \Omega$ (respectivamente, para casi todo $\omega \in \Omega$).

Tenemos que si $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ son indistinguibles entonces $(X_t)_{t\in T}$ es una versión de $(Y_t)_{t\in T}$. En la siguiente proposición veremos que el recíproco es cierto en algunos casos.

Proposición 3.22. *Sea T un subintervalo de $[0, \infty)$ y sean $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y además suponga que éstos tienen trayectorias continuas por la izquierda o continuas por la derecha. Si $(X_t)_{t\in T}$ es una versión de $(Y_t)_{t\in T}$, entonces $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ son indistinguibles.*

3.3. Movimiento Browniano

En esta sección veremos la definición del Movimiento Browniano y una de sus caracterizaciones. Este proceso será muy importante en las siguientes secciones de este trabajo.

Definición 3.23. Diremos que un proceso estocástico $(W_t)_{t\geq 0}$ (definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) con espacio de estados $E = \mathbb{R}^m$ es un Movimiento Browniano m-dimensional si cumple las siguientes propiedades:

a) $W_0 = 0$ casi seguramente.

b) Los incrementos de $(W_t)_{t\geq 0}$ son independientes, es decir, las variables aleatorias

$$W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \cdots, W_{t_1} - W_{t_0}$$

son independientes, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$.

c) $W_t - W_s$ y $W_{t+h} - W_{s+h}$ tienen la misma distribución, para cualesquiera $0 \leq s < t$ y $h > 0$.

d) W_t tiene distribución

$$\mathbb{P}_{W_t}(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left(\frac{\|x\|^2}{2t}\right) dx.$$

e) $(W_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas.

Si $m = 1$ diremos que $(W_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano unidimensional o simplemente, un Movimiento Browniano.

Observación 3.24. La condición de incrementos independientes (la condición b)) de la definición 3.23 es equivalente a

b') $\sigma(W_t - W_s)$ es independiente de $\sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$.

La demostración de la existencia del Movimiento Browniano se puede consultar en la referencia [5], capítulo 7, sección 37 y en la referencia [21], capítulo 4, sección 4.2.

Veremos la caracterización del movimiento Browniano como un proceso Gaussiano. Antes de ver esta caracterización veremos algunas definiciones.

Definición 3.25. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una variable aleatoria. Definimos la función característica de X por

$$\phi_X(u) := \mathbb{E}[e^{i\langle u,X\rangle}], \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

donde $\langle \cdot,\cdot \rangle$ denota al producto interior de $\mathbb{R}^m$.

Definición 3.26. Diremos que una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es Gaussiana si la función caracteristica de X es de la forma

$$\phi_X(u) = e^{iu\mu - \frac{\sigma^2}{2}u^2},$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq 0$.

Tenemos que $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2$.

Definición 3.27. Diremos que una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es una vector Gaussiano si la función caracteristica de X es de la forma

$$\phi_X(u) = e^{i\langle u,m\rangle - \frac{1}{2}\langle u,Cu\rangle},$$

donde $m \in \mathbb{R}^m$ y C una matriz semipositiva definida. A C se le conoce como la matriz de covarianzas de X. Si denotamos las entradas de X por $X = (X_1, \cdots, X_m)$, tenemos que

$$\mathbb{E}[X_i] = m_i$$

y

$$C_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - m_i)(X_j - m_j)].$$

Para consultar resultados sobre vectores Gaussianos ver [12], capítulo 16.

Definición 3.28. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ con espacio de estados $E = \mathbb{R}^m$ es un proceso Gaussiano para cualesquiera $n \geq 1$ y $t_1, \cdots, t_n$ se tiene que el vector $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ es un vector Gaussiano.

Los siguientes resultados caracterizan al movimiento Browniano como processo Gaussiano.

Proposición 3.29. *Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano unidimensional. Para cada $t > 0$ se tiene que W_t es una variable aleatoria con $\mathbb{E}[W_t] = 0$ y $\mathbb{E}[W_t^2] = t$, es decir,*

$$\phi_{W_t}(u) = e^{-\frac{t}{2}u^2}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, definimos donde

$$a \wedge b := \text{mín}\{a, b\}.$$

Teorema 3.30. *Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano unidimensional. Entonces $(W_t)_{t\geq 0}$ es un proceso Gaussiano tal que para todo $n \geq 1$ y $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$ es un vector Gaussiano con matriz de covarianzas C definida positiva y ésta se encuentra dada por*

$$C_{ij} = t_i \wedge t_j, \quad i, j \leq n.$$

Teorema 3.31. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ proceso Gaussiano con valores en $\mathbb{R}$ y con trayectorias continuas. Si para cualesquiera $n \geq 1$ y $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ es un vector Gaussiano con matriz de covarianzas C dada por*

$$C_{ij} = t_i \wedge t_j, \quad i, j \leq n,$$

entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano.

La demostración de la proposición 3.29 y los teoremas 3.30 y 3.31 se pueden consultar en la referencia [21], capítulo 2.

3.4. Filtraciones y procesos estocásticos

En las siguientes definciones consideraremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fijo.

Definición 3.32. (Filtración). Una filtración es una familia de sigma álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, para todo $t \geq 0$ y $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, para cualesquiera $0 \leq s < t$. Diremos que un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad filtrado.

Definición 3.33. (Proceso adaptado). Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$.

Tenemos que cualquier proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ definida por

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t),$$

y a $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ llamaremos la filtración natural de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Dada una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, para cada $t > 0$ definimos

$$\mathcal{F}_{t\text{-}} := \sigma\big(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\big),$$

y para cada $t \geq 0$, definimos

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s<t} \mathcal{F}_s.$$

Definición 3.34. Diremos que una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, para todo $t \geq 0$.

Definición 3.35. Diremos que una variable aleatoria $T : \Omega \to [0, \infty]$ es un tiempo de paro respecto de la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

para todo $t \geq 0$.

Nótese que un tiempo de paro T puede tomar el valor infinito.

Definición 3.36. Definimos la sigma álgebra $\mathcal{F}_\infty$ por

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\Big).$$

Ahora, dado un tiempo de paro T respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, definimos

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0\}. \tag{3.3}$$

Tenemos que $\mathcal{F}_T$ es una sigma álgebra.

Ahora veremos algunas propiedades de tiempos de paro.

Proposición 3.37. *Sea $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración. $T : \Omega \to [0, \infty]$ es un tiempo de paro respecto de la filtración $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ si y sólo si*

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Proposición 3.38. *Sean S, T tiempos de paro respecto de la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Entonces:*

a) Si $S \leq T$, entonces $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

b) Si $T \equiv t$ con $t > 0$, entonces $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

c) $S \wedge T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro y $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Además, $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$ y $\{S = T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.1.

Veremos algunas definiciones más sobre procesos estocáticos y su relación con los tiempos de paro. Estas clases de procesos serán importantes a lo largo de este trabajo.

Definición 3.39. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ con valores en $(E, \mathcal{E})$ es medible si el mapeo

$$(\omega, t) \mapsto X_t(\omega),$$

definido sobre $\Omega \times [0, \infty)$ equipado con la sigma álgebra producto $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}([0, \infty))$ es medible.

Definición 3.40. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivo si para cada $t \geq 0$ el mapeo

$$(\omega, s) \mapsto X_s(\omega),$$

definido sobre $\Omega \times [0, t]$ equipado con la sigma álgebra producto $\mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}([0, t])$ es medible.

Definición 3.41. (Sigma álgebra progresiva). Diremos que un conjunto $\Gamma \subset \Omega \times [0, \infty)$ es progresivo si el proceso estocástico definido por

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_\Gamma(\omega, t)$$

es progresivo. A la clase de subconjuntos progresivos la denotaremos por $\mathcal{P}$. Tenemos que $\mathcal{P}$ es una sigma álgebra de subconjuntos de $\Omega \times [0, \infty)$ y le llamaremos la sigma álgebra progresiva.

Tenemos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivo si y sólo si el mapeo

$$(\omega, t) \mapsto X_t(\omega),$$

definido sobre $\Omega \times [0, \infty)$, equipado con la sigma álgebra $\mathcal{P}$, es medible.

Definición 3.42. Sea T un tiempo de paro respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivo. Para cada $t \geq 0$ definimos

$$X_t^T(\omega) := X_{T(\omega)\wedge t}(\omega).$$

Proposición 3.43. *Sea T un tiempo de paro respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivo. Entonces $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ es una filtración y $(X_t^T)_{t\geq 0}$ es un proceso progresivo respecto de las filtraciones $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en [8], capítulo 2, sección 1.

Tendremos que una clase importante de procesos son progresivos. Esto será importante para trabajar con integrales estocásticas respecto de semimartingalas continuas en este trabajo.

Proposición 3.44. *Sea (E, d) un espacio métrico equipado con su sigma álgebra de Borel. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con espacio de estados E y con trayectorias continuas por la derecha o continuas por la izquierda. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivo.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.1.

Proposición 3.45. *Sea (E,d) un espacio métrico equipado con su sigma álgebra de Borel y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ con espacio de estados E.*

a) Sea O un conjunto abierto y suponga que $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas por la derecha. Entonces

$$T_O(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in O\}$$

es un tiempo de paro respecto de $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$.

b) Sea F un conjunto cerrado y suponga que $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas. Entonces

$$T_F(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in F\}$$

es un tiempo de paro respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.1.

3.5. Martingalas

En esta sección considedaremos un espacio filtrado fijo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Definición 3.46. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado tal que $X_t \in L^1(\Omega)$, para todo $t \geq 0$. Diremos que

- $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala si para cualesquiera $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] = X_s \quad c.s.$$

- $(X_t)_{t\geq 0}$ es una submartingala si para cualesquiera $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] \geq X_s \quad c.s.$$

- $(X_t)_{t\geq 0}$ es una supermartingala si para cualesquiera $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] \leq X_s \quad c.s.$$

Un par de ejemplos importantes son los siguientes:

Proposición 3.47. *Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano y sea $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ su filtración natural, es decir,*

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t).$$

Los procesos $(W_t)_{t\geq 0}$ y $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ son martingalas respecto de $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$.

Demostración. Sean $0 \leq s < t$. Tenemos que $W_t - W_s$ tiene la misma distribución que W_{t-s} y por tanto tenemos que

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = \mathbb{E}[W_{t-s}] = 0 \tag{3.4}$$

y

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = \mathbb{E}[(W_{t-s})^2] = t - s. \tag{3.5}$$

Puesto que $\sigma(W_t - W_s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s^0$ (ver la observación 3.24), de la proposición 3.16 y la igualdad (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t \,|\, \mathcal{F}_s^0] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s \,|\, \mathcal{F}_s^0] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s \,|\, \mathcal{F}_s^0] + W_s \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s \\ &= W_s. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lo cual muestra que $(W_t)_{t\geq 0}$ es una martingala. Por otra parte, de la proposición 3.16 y las igualdades (3.4) y (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t^2 - t \,|\, \mathcal{F}_s^0] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 + 2W_sW_t - W_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s^0] - t \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s^0] + 2W_s\mathbb{E}[W_t \,|\, \mathcal{F}_s^0] - W_s^2 - t \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] + 2W_s^2 - W_s^2 - t \\ &= W_s^2 - s. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Lo cual muestra que $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala.

□

3.5.1. Teoremas de convergencia de martingalas

Proposición 3.48.

a) *(Desigualdad de Doob). Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala o una submartingala positiva con trayectorias continuas por la derecha. Para cada $t > 0$ y $\lambda > 0$ se tiene:*

$$\lambda\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s| > \lambda\Big] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|].$$

b) *(Desigualdad L^p de Doob). Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con trayectorias continuas por la derecha. Entonces para cada $t > 0$ y $p > 1$ se tiene :*

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.4.

Ahora veremos resultados sobre convergencia de martingalas. Empezaremos con algunas definiciones.

Definición 3.49. Diremos que una familia de variables aleatorias $(X_i)_{i\in I}$ es uniformemente integrable si

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq M}] = 0$$

Definición 3.50. Diremos que una martingala $(X_t)_{t\geq 0}$ es cerrada si existe una variable aleatoria $Z \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $t \geq 0$,

$$X_t = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_t] \quad c.s.$$

El teorema de convergencia es el siguiente:

Teorema 3.51. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con trayectorias continuas por la derecha. Entonces son equivalentes:*

a) $(X_t)_{t\geq 0}$ *es cerrada.*

b) $(X_t)_{t\geq 0}$ *es uniformemente integrable.*

c) $(X_t)_{t\geq 0}$ *converge casi seguramente y en $L^1(\Omega)$ conforme $t \to \infty$.*

Más aún, si alguna de estas propiedades se cumplen se tiene que

$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_t],$$

para todo $t \geq 0$, donde $X_\infty \in L^1(\Omega)$ es tal que

$$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \quad c.s.$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.3.

Lema 3.52. *Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de variables aleatorias acotadas en $L^p(\Omega)$, entonces $(X_i)_{i\in I}$ es uniformemente integrable.*

Demostración. Sean $M \geq 0$ e $i \in I$. De la desigualdad de Markov tenemos que

$$\mathbb{P}(|X_i| \geq M) \leq \frac{1}{M^p}\mathbb{E}[|X_i|^p]. \tag{3.8}$$

Sea $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, de la desigualdad (3.8) y de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geq M\}}] &\leq \mathbb{E}[|X_i|^p]^{1/p}\mathbb{P}(|X_i| \geq M)^{1/q} \\
&\leq \frac{1}{M^{q/p}}\mathbb{E}[|X_i|^p]^{1/p}\mathbb{E}[|X_i|^p]^{1/q} \\
&\leq \frac{K}{M^{q/p}},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $K = \sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|^p]$. De la desigualdad (3.9) se sigue que

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geq M\}}] = 0.$$

□

De este resultado obtenemos lo siguiente:

Proposición 3.53. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con trayectorias continuas por la derecha y acotada en $L^p(\Omega)$, con $p > 1$. Entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ converge c.s. y en $L^p(\Omega)$ a una variable aleatoria $X_\infty \in L^p(\Omega)$, y*

$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_t],$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Del lema 3.52 tenemos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable y del teorema 3.51 tenemos que $(X_t)_{t\geq 0}$ converge casi seguramente a una variable aleatoria $X_\infty \in L^1(\Omega)$ y

$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t],$$

para todo $t \geq 0$. Basta probar que $X_\infty \in L^p(\Omega)$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ converge X_∞ en $L^p(\Omega)$. Del lema de Fatou tenemos que

$$\mathbb{E}[|X_\infty|^p] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] \leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty,$$

y por lo tanto $X_\infty \in L^p(\Omega)$. Sea $M = \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p]$, de la desigualdad L^p de Doob (proposición 3.48 inciso b)) tenemos que

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}[|X_t|^p] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p M,$$

para todo $t \geq 0$. Luego, del teorema de convergencia monótona tenemos que

$$\mathbb{E}\Big[\lim_{n\to\infty} \big(\sup_{0\leq s\leq n} |X_s|^p\big)\Big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq n} |X_s|^p\Big] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p M. \tag{3.10}$$

Sea

$$Y = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{0\leq s\leq n} |X_s|^p\big),$$

de la desigualdad (3.10) tenemos que $Y \in L^1(\Omega)$ y además, para todo $t > 0$, tenemos:

$$|X_t - X_\infty|^p \leq 2^p Y \quad c.s.$$

Luego, del teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X_t - X_\infty|^p] = \mathbb{E}\big[\lim_{t\to\infty} |X_t - X_\infty|^p\big] = 0.$$

Por lo tanto, $(X_t)_{t\geq 0}$ converge a X_∞ en $L^p(\Omega)$.

$\square$

3.5.2. Teoremas de paro opcional

Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con trayectorias continuas por la derecha tal que

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty,$$

donde X_∞ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_\infty$-medible. Dado un tiempo de paro $T : \Omega \to [0,\infty]$, definimos la variable aleatoria X_T por

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}(\omega) + X_\infty \mathbb{1}_{\{T=\infty\}}(\omega).$$

Tenemos que X_T es $\mathcal{F}_T$-medible, donde $\mathcal{F}_T$ se encuentra dada por (3.3).

Teorema 3.54. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala uniformente integrable con trayectorias continuas por la derecha. Sean S, T tiempos de paro con $S \leq T$. Entonces $X_S, X_T \in L^1(\Omega)$ y*

$$X_S = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_S],$$

en particular, para cualquier tiempo de paro S se tiene que

$$X_S = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_S]$$

y

$$\mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_\infty] = E[X_0].$$

La demostración de este teorema se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.4.

Proposición 3.55. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con trayectorias continuas por la derecha y sea T un tiempo de paro. Entonces*

a) El proceso estocástico $(X_t^T)_{t\geq 0} = (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ es una martingala respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

b) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable, entonces $(X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable y

$$X_{t\wedge T} = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_t],$$

para todo $t \geq 0$.

La demostración de este teorema se puede consultar en la referencia [17], capítulo 3, sección 3.4.

3.6. Semimartingalas continuas

3.6.1. Procesos de variación finita

Definición 3.56. Diremos que una función continua por la derecha $A : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es de variación finita si para cada $t > 0$,

$$V(t) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{k} |A(t_i) - A(t_{i-1})| \,:\, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p_n-1} < t_k = t,\, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

A la función V le llamaremos la variación total de A y a $V(t)$ le llamaremos la variación de A en $[0,t]$. Notemos que V es una función no negativa y creciente. Si $\lim_{t\to\infty} V(t) < \infty$, diremos que A es de variación acotada.

Tenemos que si A es de variación finita, A es la diferencia de dos funciones crecientes y continuas por la derecha: las funciones $(V + A)/2$ y $(V - A)/2$ cumplen estas condiciones.

Definición 3.57. Diremos que una medida μ sobre $\mathfrak{B}([0,\infty))$ es una medida de Radon si μ es finita en intervalos compactos de $[0,\infty)$.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.58. *Existe una correspondencia única entre funciones de variación finita A y medidas de Radon μ sobre $\mathfrak{B}([0,\infty))$, dada de la siguiente manera:*

$$A(t) = \mu([0,t]).$$

Demostración. Sean $F := (V - A)/2$ y $G := (V + A)/2$. Puesto que F y G son no negativas, crecientes y continuas por la derecha, existen medidas μ_F, μ_G sobre $\mathfrak{B}([0,\infty))$ tales que

$$F(t) = \mu_F([0,t])$$

y

$$G(t) = \mu_G([0,t]).$$

Nótese que esta es la construcción usual de la medida de Lebesgue-Stieltjes (ver la referencia [9], capítulo 1, sección 1.5). Si definimos la medida con signo

$$\mu := \mu_G - \mu_F,$$

cumple la relación

$$A(t) = \mu([0,t]).$$

Recíprocamente, sea μ una medida de Radon. Sean μ_+, μ_- la descomposición de Hahn de la medida μ, es decir,

$$\mu = \mu_+ - \mu_-,$$

y μ_+, μ_- son mutuamente singulares (ver [9], capítulo 3, sección 3.1). Si definimos

$$A(t) = \mu_+([0,t]) - \mu_-([0,t]),$$

tenemos que A es una función continua por la derecha y de variación finita, pues es la diferencia de dos funciones crecientes.

$\square$

Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int_{(0,t]} |f|\, d|\mu| < \infty$ para todo $t \geq 0$, donde $|\mu|$ es la variación total de la medida μ asociada a A del teorema 3.6.1. Definimos

$$\int_0^t f(s)\, |dA(s)| := \int_{(0,t]} f\, d|\mu|.$$

y

$$\int_0^t f(s)\, dA(s) := \int_{(0,t]} f\, d\mu,$$

Ahora consideraremos un espacio de probabilidad filtrado fijo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Definición 3.59. Diremos que un proceso estocástico con trayectorias continuas por la derecha $(A_t)_{t\geq 0}$ es de variación finita si es un proceso adaptado y sus trayectorias son de variación finita. Diremos que $(A_t)_{t\geq 0}$ es creciente si es adaptado y tiene trayectorias crecientes.

Definición 3.60. Sea $(H_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivo tal que para todo $\omega \in \Omega$

$$\int_0^t |H_s(\omega)|\, |dA_s(\omega)| < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Sea el proceso estocástico $= (\int_0^t H_s\, dA_s)_{t\geq 0}$ definido por

$$(\int_0^t H_s\, dA_s)(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)\, dA_s(\omega).$$

Proposición 3.61. *Sea $(H_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivo tal que para todo $\omega \in \Omega$*

$$\int_0^t |H_s(\omega)|\, |dA_s(\omega)| < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces el proceso estocástico $= (\int_0^t H_s\, dA_s)_{t\geq 0}$ es progresivo.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.1.

Un caso importante es el siguiente: si consideramos $A_t(\omega) = t$ para todo $t \geq 0$, tenemos que si $(H_t)_{t\geq 0}$ es un proceso progresivo tal que

$$\int_0^t |H_s(\omega)| ds < \infty, \quad \forall t \geq 0,$$

entonces el proceso estocástico $H \cdot A = ((H \cdot A)_t)_{t\geq 0}$ es de variación finita y además, para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$(\int_0^t H_s \, dA_s)(\omega) := \int_0^t H_s(\omega) \, ds,$$

para todo $\omega \in \Omega$.

3.6.2. Martingalas locales continuas

Consideraremos un espacio de probabilidad filtrado fijo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Dado un proceso progresivo, denotaremos por X^T al proceso estocástico $(X_t^T)_{t\geq 0}$ (ver definición 3.42). Usando esta notación tenemos la siguiente propiedad: si T y S son tiempos de paro, tenemos que

$$(X^T)^S = (X^S)^T = X^{S\wedge T}.$$

Definición 3.62. Diremos que un proceso estocástico $M = (M_t)_{t\geq 0}$ tal que $M_0 = 0$ c.s. y con trayectorias càdlàg (continuas por la derecha con límites por la izquierda) es una martingala local si existe una sucesión creciente de tiempos de paro $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

a) $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ c.s. y

b) M^{T_n} es una martingala uniformemente integrable.

En este caso diremos que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reduce a M. Si M_0 es distinto de cero, diremos que M es una martingala local si $M - M_0$ es una martingala local, donde

$$M - M_0 := (M_t - M_0)_{t\geq 0}.$$

Además, si M tiene trayectorias continuas, diremos que M es una martingala local continua.

Algunas observaciones importantes sobre martingalas locales son las siguientes:

Observación 3.63.

a) Una martingala es una martingala local, basta considerar la sucesión de tiempos de paro constantes $T_n = n$. Pues

$$M_{t\wedge n} = \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_t],$$

para todo $t \geq 0$ y una martingala de esta forma es uniformemente integrable.

b) En la definición de martingala local con $M_0 = 0$, basta considerar que M^{T_n} sea una martingala pues podemos considerar los tiempos de paro $(T_n \wedge n)_{n\in\mathbb{N}}$ y de la proposición 3.55 inciso b), tenemos que $M^{T_n\wedge n}$ es una martingala uniformemente integrable.

c) De la proposición 3.55 inciso a), tenemos lo siguiente: si M es una martingala local y T un tiempo de paro, entonces M^T es una martingala local. Pues si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son tiempos de paro que reducen a M, tenemos que

$$(M^T - M_0^T)^{T_n} = (M - M_0)^{T\wedge T_n},$$

es una martingala para cada $n \in \mathbb{N}$.

d) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reducen M y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, entonces la sucesión

$$(T_n \wedge S_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

reduce a M.

e) El espacio de martingalas locales continuas M, con $M_0 = 0$, es un espacio vectorial.

El siguiente teorema nos proporciona algunas propiedades importantes de las martingalas locales.

Teorema 3.64.

a) Una martingala local continua tal que $M_0 \in L^1(\Omega)$ y $M_t \geq 0$, para todo $t \geq 0$, es una submartingala.

b) Si M es una martingala local continua y existe $Z \in L^1(\Omega)$ tal que $|M_t| \leq Z$ para todo $t \geq 0$, entonces M es una martingala.

c) Si M es una martingala local continua y $M_0 = 0$ (o $M_0 \in L^1(\Omega)$), la sucesión de tiempos de paro

$$T_n(\omega) = \text{ínf}\{t \geq 0 : |M_t(\omega)| \geq n\}$$

reduce a M.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.2.

Teorema 3.65. *Sea M es una martingala local continua tal que $M_0 = 0$ y M tiene trayectorias de variación finita, entonces $M_t = 0$, para todo $t \geq 0$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.2. El resultado anterior nos dice que no podemos definir la integral estocástica respecto de semimartingalas continuas en el sentido de la proposición 3.61.

Definición 3.66. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Denotaremos a la clase de subconjuntos nulos de $\mathbb{P}$ por:

$$\mathcal{N} = \{M : M \subset N,\ \mathbb{P}(N) = 0\}.$$

Diremos que una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es completa si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

Nótese que $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$, para todo $t \geq 0$.

En los siguientes teoremas consideraremos que la fitración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es completa.

Teorema 3.67. *Sea $M = (M_t)_{t\geq 0}$ una martingala local continua. Entonces existe un proceso creciente con trayectorias continuas, denotado por $\langle M, M\rangle = ((\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$, tal que $\langle M, M\rangle_0 = 0$ y $(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua. Si $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ es otro proceso que cumple las condiciones anteriores, entonces Y y $\langle M, M\rangle$ son indistinguibles.*

Además, para $t > 0$, si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ es una sucesión de particiones tal que $\sup |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = \langle M, M\rangle_t$$

en probabilidad (en medida).

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.3.

Definición 3.68. Sea M una martingala local continua. Al proceso estocástico $\langle M, M\rangle$ dado por el teorema 3.67 le llamaremos la variación cuadrática de M.

Proposición 3.69. *Sea T un tiempo de paro y M una martingala local continua. Entonces*

$$\langle M^T, M^T\rangle = \langle M, M\rangle^T.$$

Demostración. Sea T un tiempo de paro. De la observación 3.63 inciso c), tenemos que

$$(M^2 - \langle M, M\rangle)^T = \Big((M^2_{t\wedge T}) - \langle M, M\rangle_{t\wedge T}\Big)_{t\geq 0}$$

es una martingala local. Luego, del teorema 3.67 tenemos que los procesos $\langle M^T, M^T\rangle$ y $\langle M, M\rangle^T$ son indistinguibles.

□

Sea M una martingala continua y $\langle M, M\rangle$ su variación cuadrática, definimos

$$\langle M, M\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty} \langle M, M\rangle_t.$$

El siguiente teorema nos proporciona algunas propiedades útiles que nos permitirán determinar cuándo una martingala local es una martingala.

Proposición 3.70. *Sea M una martingala local continua con $M_0 = 0$. Entonces $M = 0$ si y sólo si $\langle M, M\rangle = 0$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.3

Teorema 3.71. *Sea M una martingala local continua con $M_0 \in L^2(\Omega)$.*

(i) Son equivalentes:

- *a) M es una martingala acotada en $L^2(\Omega)$.*
- *b) $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$.*

Además, si alguna de estas propiedades se cumple, $(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ es una martingala uniformemente integrable y $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]$.

(ii) Son equivalentes:

- *a) M es una martingala tal que $M_t \in L^2(\Omega)$, para todo $t \geq 0$.*
- *b) $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t] < \infty$, para todo $t \geq 0$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.3.

Definición 3.72. Sean M y N martingalas locales continuas. Definimos el proceso estocástico $\langle M, N\rangle$ como

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{2}(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle N, N\rangle_t - \langle M, M\rangle_t). \tag{3.11}$$

A $\langle M, N\rangle$ le llamaremos la covariación de N y M. Notemos que $\langle M, N\rangle$ tiene trayectorias continuas es un proceso de variación finita pues es una suma y resta de procesos crecientes.

Proposición 3.73. *Sean M y N martingalas locales continuas. Se cumple lo siguiente:*

a) *$(M_tN_t - \langle M,N\rangle_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua, y si Y es otro proceso de variación finita tal que $(M_tN_t - Y_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua, entonces Y y $\langle M,N\rangle$ son indistinguibles.*

b) *El mapeo $(M,N)\mapsto\langle M,N\rangle$ es bilineal y simétrico.*

c) *Para cada $t>0$, si $0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{p_n}^n=t$ es una sucesión de particiones tal que $\sup|t_i^n-t_{i-1}^n|\to 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n}-N_{t_{i-1}^n})=\langle M,N\rangle_t$$

en probabilidad (en medida).

d) *Si N y N son martingalas continuas acotadas en $L^2(\Omega)$, $(M_tN_t-\langle M,N\rangle_t)_{t\geq 0}$ es una martingala uniformemente integrable y el siguiente límite existe casi seguramente:*

$$\langle M,N\rangle_\infty=\lim_{t\to\infty}\langle M,N\rangle_t.$$

Además, $\langle M,N\rangle_\infty\in L^1(\Omega)$ y

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=\mathbb{E}[M_0N_0]+\mathbb{E}[\langle M,N\rangle_\infty].$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.3.

Proposición 3.74. *(Kunita-Watanabe). Sean M y N martingalas locales continuas. Sean H y K procesos medibles. Entonces*

$$\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s|\leq\Big(\int_0^\infty (H_s)^2 d\langle M,M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty (K_s)^2 d\langle N,N\rangle_s\Big)^{1/2},$$

casi seguramente.

3.6.3. Semimartingalas continuas

Definición 3.75. Diremos que un proceso adaptado $X=(X_t)_{t\geq 0}$ es una semimartingala local continua si existe una martingala continua $M=(M_t)_{t\geq 0}$ y un proceso de variación finita $A=(A_t)_{t\geq 0}$ con trayectorias continuas con $A_0=0$, tales que

$$X_t=M_t+A_t,$$

para todo $t\geq 0$. Denotaremos a esta descomposición por $X=M+A$.

Tenemos que si X es una semimartingala continua la descomposición $X=A+M$ es única en el siguiente sentido:

Proposición 3.76. *Sea X una semimartingala continua. Sean M,M' martingalas locales continuas y A,A' procesos de variación finita con $A_0=A_0'=0$ y con trayectorias continuas, tales que $X=M+A=M'+A'$. Entonces M y M' son indistinguibles y, A y A' son indistinguibles.*

Demostración. Sean M, M' martingalas locales continuas y A, A' procesos de variación finita con trayectorias continuas tales que
$$X = M + A = M' + A'.$$
Tenemos que
$$M_t - M'_t = A_t - A'_t,$$
para todo $t \geq 0$. Luego, $(M_t - M'_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua y un proceso de variación finita con $M_0 - M'_0 = A_0 - A'_0 = 0$. De la proposición 3.65 tenemos que
$$M_t = M'_t,$$
para todo $t \geq 0$, y de la proposición 3.22 tenemos que M y M' son indistinguibles. De igual manera, tenemos que A y A' son indistinguibles.

□

Definición 3.77. Sean X y Y semimartingalas continuas con descomposición $X = M + A$ y $Y = M' + A'$. Definimos la covariación entre X y Y por
$$\langle X, Y\rangle = \langle M, M'\rangle.$$

Proposición 3.78. *Sean X y Y semimartingalas continuas. Para cada $t > 0$, si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ es una sucesión de particiones tal que $\sup|t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}) = \langle X, Y\rangle_t$$
en probabilidad (en medida).

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 4, sección 4.3.

3.7. Integración estocástica respecto de semimartingalas continuas

3.7.1. Integración estocástica respecto de martingalas continuas acotadas en L^2

Consideraremos un espacio filtrado fijo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y además consideraremos que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es completa (ver definición 3.66).

Denotaremos por $\mathbb{H}^2$ al conjunto de martingalas continuas acotadas en $L^2(\Omega)$ con $M_0 = 0$. Consideraremos que $M, M' \in \mathbb{H}^2$ son iguales si M y M' son indistinguibles (ver definición 3.20). Dada $M \in \mathbb{H}^2$, de la proposición 3.52 tenemos que existe $M_\infty \in L^2(\Omega)$ tal que
$$M_t = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathcal{F}_t], \tag{3.12}$$
para todo $t \geq 0$ y $\lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty$ casi seguramente y en $L^2(\Omega)$. Además, del teorema 3.71 tenemos que $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$ y
$$\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]. \tag{3.13}$$
Por otra parte, de la proposición 3.73 inciso d) tenemos que para cualesquiera $M, N \in \mathbb{H}^2$ la variable aleatoria
$$\langle M, N\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty} \langle M, N\rangle_t$$

está bien definida. Además, de las igualdades (3.11) y (3.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
E[M_\infty N_\infty] &= \frac{1}{2}(E[(M_\infty + N_\infty)^2 - M_\infty^2 - N_\infty^2]) \\
&= \frac{1}{2}\big(E[\langle M+N, M+N\rangle_\infty] - \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] - \mathbb{E}[\langle N, N\rangle_\infty]\big) \\
&= E[\frac{1}{2}(\langle M+N, M+N\rangle_\infty - \langle M, M\rangle_\infty - \langle N, N\rangle_\infty)] \\
&= \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty].
\end{aligned}$$

Esto nos permite definir la siguiente forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{H}^2$

$$(M, N)_{\mathbb{H}^2} := \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty].$$

De la igualdad (3.12) se sigue que $(M, M)_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty^2] = 0$ si y sólo si $M = 0$, por lo que $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}^2}$ es un producto interno real sobre $\mathbb{H}^2$.

Proposición 3.79. $\mathbb{H}^2$ *equipado con el producto interno* $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}^2}$ *es un espacio de Hilbert.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 5, sección 5.1.

Definición 3.80. Sea $M \in \mathbb{H}^2$. Denotaremos por $L^2(M)$ a la clase de procesos progresivos H tales que

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s\Big] < \infty.$$

La integral $\int_0^\infty H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s$ se define para cada $\omega \in \Omega$ en el sentido de Lebesgue-Stieltjes (ver proposición 3.61), pues $\langle M, M\rangle$ es un proceso de variación finita.

$L^2(M)$ se puede representar como un espacio L^2 de la siguiente manera: Sea $\mathcal{P}$ la sigma álgebra progresiva (ver la definición 3.41) y sea μ_M la siguiente medida sobre $(\Omega \times [0,\infty), \mathcal{P})$ definida por la igualdad

$$\mu_M(\Gamma) = \int \Big(\int_0^\infty \mathbb{1}_\Gamma(\omega, s)\, d\langle M, M\rangle_s(\omega)\Big)\mathbb{P}(\,d\omega).$$

Entonces

$$L^2(M) = L^2(\Omega \times [0,\infty), \mathcal{P}, \mu_M).$$

Luego, tenemos que $L^2(M)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(H, K)_{L^2(M)} := \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_s K_s\, d\langle M, M\rangle_s\Big].$$

Definición 3.81. Diremos que un proceso estocástico H es elemental si es de la siguiente forma:

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{k-1} H_i(\omega)\mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ y H_i es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_i}$-medible, para todo $i \in \{0, \cdots, k-1\}$. Denotaremos por $\mathscr{E}$ a la clase de procesos elementales.

Proposición 3.82. *Los procesos elementales* $\mathscr{E}$ *son un subespacio denso en* $L^2(M)$.

Teorema 3.83. *Sea $M \in \mathbb{H}^2$. Dado $H \in \mathscr{E}$ de la forma*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{k-1} H_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

definimos el proceso estocástico $H \cdot M = ((H \cdot M)_t)_{t \geq 0}$ por

$$(H \cdot M)_t(\omega) := \sum_{i=0}^{k-1} H_i(\omega)(M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t}),$$

Tenemos que $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$. El mapeo

$$H \mapsto H \cdot M$$

se puede extender a una isometría entre $L^2(M)$ y $\mathbb{H}^2$. Además, para cada $H \in L^2(M)$, $H \cdot M$ es la única martingala en $\mathbb{H}^2$ tal que

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = \int_0^t H_s \, d\langle M, N \rangle_s,$$

para todo $N \in \mathbb{H}^2$. Si T es un tiempo de paro, tenemos que

$$(H \mathbb{1}_{[0,T]}) \cdot M = H \cdot M^T = H^T \cdot M,$$

donde $[0, T]$ se encuentra dado por

$$\{(w, s) \in \Omega \times [0, \infty) : 0 \leq s \leq T(\omega)\}.$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 5, sección 5.1.

Definición 3.84. Dada $M \in \mathbb{H}^2$ y $H \in L^2(M)$, diremos que $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$ es la integral estocástica de H con respecto de M. También utilizaremos la siguiente notación:

$$\int_0^t H_s \, dM_s := (H \cdot M)_t.$$

Observación 3.85. Otra alternativa para definir la integral estocástica es la siguiente: Dado $H \in L^2(M)$, consideremos el funcional lineal definido sobre $\mathbb{H}^2$

$$N \mapsto \mathbb{E}\Big[\int^\infty H_s \, d\langle M, N \rangle_s \Big]$$

De la proposición 3.74 (Kunita-Watanabe) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s \, d\langle M, N \rangle_s] &\leq \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s \, d\langle M, M \rangle_s]^{1/2} \mathbb{E}[\langle N, N \rangle]^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_s \, d\langle M, M \rangle_s \Big]^{1/2} \|N\|_{\mathbb{H}^2}. \end{aligned}$$

Tenemos dicho funcional es continuo y por tanto, del teorema de representación de Riesz existe $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$ tal que

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s \, d\langle M, N \rangle_s] = \mathbb{E}[\langle H \cdot M, N \rangle_\infty]$$

para todo $N \in \mathbb{H}^2$. De igual manera, tenemos que la martingala obtenida cumple las propiedades del teorema 3.83 (ver [20], capítulo 4, sección 2).

La construcción del teorema 3.83 nos permite interpretar a $H \cdot M$ como una integral.

Esta integral también cumple la siguiente regla de asociatividad:

Proposición 3.86. *Sea $M \in \mathbb{H}^2$ y $H \in L^2(M)$. Sea K un proceso progresivo, entonces $KH \in L^2(M)$ si y sólo si $K \in L^2(H \cdot M)$. Si alguna de estas propiedades se cumplen, tenemos que*

$$(KH) \cdot M = K \cdot (H \cdot M).$$

3.7.2. Integración estocástica respecto de martingalas locales

La integral $H \cdot M$ se puede extender a martingalas locales continuas. La clase de procesos que podremos integrar es la siguiente:

Definición 3.87. Sea M una martingala local continua, denotaremos por $L^2_{loc}(M)$ a la clase de procesos progresivos H tales que

$$\int_0^t H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s < \infty, \quad \forall t \geq 0 \;\; c.s.$$

Teorema 3.88. *Sea M una martingala local continua. Para cada $H \in L^2_{loc}(M)$ existe una única martingala local continua $H \cdot M$ tal que*

$$\langle H \cdot M, N\rangle = \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle_s,$$

para toda martingala local continua N. Si T es un tiempo de paro, tenemos que

$$(H \mathbb{1}_{[0,T]}) \cdot M = H \cdot M^T = H^T \cdot M,$$

donde $[0, T]$ se encuentra dado por

$$\{(w, s) \in \Omega \times [0, \infty) : 0 \leq s \leq T(\omega)\}.$$

Sea K un proceso progresivo, entonces $KH \in L^2_{loc}(M)$ si y sólo si $K \in L^2_{loc}(H \cdot M)$. Si alguna de estas propiedades se cumplen, tenemos que

$$(KH) \cdot M = H \cdot (H \cdot M).$$

Además, si $M \in \mathbb{H}^2$ y $H \in L^2(M)$, la definición de $H \cdot M$ es consistente con la definición del teorema 3.83.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 5, sección 5.1.

Definición 3.89. Dada M una martingala local y $H \in L^2_{loc}(M)$, diremos que la martingala local $H \cdot M$ es la integral estocástica de H con respecto de M. También utilizaremos la siguiente notación:

$$\int_0^t H_s \, dM_s := (H \cdot M)_t.$$

3.7.3. Integración estocástica respecto de semimartingalas continuas

Extenderemos la integral a semimartingalas continuas. La clase de procesos que integraremos es la siguiente:

Definición 3.90. Diremos que un proceso progresivo H es localmente acotado si

$$\sup_{0\leq s\leq t} |H_s(\omega)| < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

para casi todo $\omega \in \Omega$.

Observación 3.91. Notemos que en particular cualquier proceso adaptado con trayectorias continuas es localmente acotado. Por otra parte, si H es localmente acotado, entonces para cualquier proceso de variación finita A tenemos que

$$\int^t |H_s(\omega)| \, |dA_s(\omega)| < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

por lo que la integral

$$\int_0^t H_s \, dA_s$$

se encuentra bien definida en el sentido de la proposición 3.61. Además, tenemos que $H \in L^2_{loc}(M)$ para toda martingala local continua M, lo cual nos permitirá definir la integral estocástica $H \cdot M$ para toda martingala local continua M.

Luego, definiremos la integral estocástica para procesos localmente acotados respecto de semimartingalas continuas de la siguiente manera:

Definición 3.92. Sea una semimartingala continua $X = M + A$ con A un proceso de variación finita con trayectorias continuas con $A_0 = 0$ y M una martingala local continua. Dado H un proceso localmente acotado, definimos la integral estocásticade H respecto de X, denotada por $H \cdot X$ mediante la siguiente igualdad:

$$(H \cdot X)_t := \int_0^t H_s \, dA_s + \int_0^t H_s \, dM_s$$

donde la integral $\int_0^t H_s \, dA_s$ denota a la integral de Lebesgue-Stieltjes de la proposición 3.61 y $\int_0^t H_s \, dM_s$ denota a la integral estocástica de H respecto de M de la proposición 3.88. También usaremos la notación

$$\int_0^t H_s \, dX_s := (H \cdot X).$$

Esta integral estocástica cumple las siguientes propiedades:

Proposición 3.93. *Sea H un proceso localmente acotado y X una semimartingala continua. Se cumplen las siguientes propiedades:*

a) El mapeo $(H, X) \mapsto H \cdot X$ es bilineal.

b) Si H K son procesos localmente acotados y X una semimartingala continua, entonces

$$H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X.$$

c) Si X es una martingala local (un proceso de variación finita), entonces $H\cdot X$ es una martingala local (respectivamente, un proceso de variación finita).

d) Si T es un tiempo de paro, entones $(H\mathbb{1}_{[0,T]})\cdot X = H\cdot X^T = H^T\cdot X$.

Teorema 3.94. *Sea X una semimartingala continua y H un proceso adaptado con trayectorias continuas. Entonces para cualquier $t\geq 0$ y cualquier sucesión de particiones de $[0,t]$, $0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{p_n}^n$ tal que $\sup_i|t_{i+1}^n-t_i^n|\to 0$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i}) = \int_0^t H_s\,dX_s$$

en probabilidad (en medida).

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 5, sección 5.1.

Observación 3.95. (Algunos cálculos útiles sobre integrales estocásticas).

a) La propiedad b) de la proposicion 3.93 se escribe de forma integral de la siguiente manera: Si H y K son localmente acotados, X es una semimartingala continua y

$$Z_t := \int_0^t H_s\,dX_s,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t K_s\,dZ_s &= \int^t K_sH_s\,dX_s \\ &= \int^t K_sH_s\,dA_s + \int^t K_sH_s\,dM_s.\end{aligned} \tag{3.14}$$

b) Sean M y N martingalas locales continuas y H, K procesos localmente acotados. Del teorema 3.88 y De la simetría del mapeo $(M,N)\mapsto\langle M,N\rangle$ (proposición 3.73 inciso b)) se sigue que

$$\begin{aligned}\langle H\cdot M, K\cdot N\rangle_t &= \int_0^t H_s\langle M, K\cdot N\rangle_s. \\ &= \int_0^t H_s\langle K\cdot N, M\rangle_s.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nuevamente del teorema 3.88 se tiene que

$$\langle K\cdot N, M\rangle_t = \int_0^t H_s\langle M, K\cdot N\rangle_s. \tag{3.16}$$

De las igualdades (3.16) en (3.15) y de la asociatividad de la integral de Lebesgue-Stieltjes tenemos que

$$\langle H\cdot X, K\cdot Y\rangle_t = \int_0^t H_sK_s\langle M,N\rangle_s. \tag{3.17}$$

c) Sean $X = A + M$, $Y = B + N$ semimartingalas continuas, donde A y V son procesos de variación finita y sean H, K procesos localmente acotados. Nótese que

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s \, dX_s = \int_0^t H_s \, dA_s + \int_0^t H_s \, dM_s$$

y

$$(K \cdot Y)_t = \int_0^t K_s \, dX_s = \int_0^t K_s \, dV_s + \int_0^t K_s \, dN_s.$$

Nótese que los procesos estocásticos $(\int_0^t H_s \, dA_s)_{t \geq 0}$ y $(\int_0^t K_s \, dV_s)_{t \geq 0}$ son procesos de variación finita. Luego, por definición del bracket entre semimartingalas continuas (definición 3.77) y de la igualdad (3.17) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle_t &= \langle H \cdot M, K \cdot N \rangle_t. \\ &= \int_0^t H_s K_s \langle M, N \rangle_s. \end{aligned} \tag{3.18}$$

d) Sea M una martingala local continua. Sea

$$M - M_0 = (M_t - M_0)_{t \geq 0},$$

nótese que de igual manera M es una martingala local (ver definición 3.62). Del teorema 3.73 inciso c) se sigue que

$$\langle M - M_0, N \rangle = \langle M, N \rangle, \tag{3.19}$$

en particular

$$\langle M - M_0, M - M_0 \rangle = \langle M, M \rangle. \tag{3.20}$$

De igual manera tenemos que

$$\langle M - M_0, N - N_0 \rangle = \langle M, N \rangle. \tag{3.21}$$

para toda martingala local continua N. Luego, del teorema 3.88 y de (3.19) se sigue que para cualquier $H \in L^2_{loc}(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle H \cdot (M - M_0), N \rangle &= \int_0^t H_s \, d\langle M - M_0, N \rangle_s \\ &= \int_0^t H_s \, d\langle M, N \rangle_s \\ &= \langle H \cdot M, N \rangle, \end{aligned}$$

para toda martingala local continua. Del teorema 3.88 concluímos que la integral estocástica de H con respecto de M coincide con la integral estocástica de H respecto de $M - M_0$, es decir,

$$H \cdot (M - M_0) = H \cdot M,$$

o en forma integral

$$\int_0^t H_s \, d(M - M_0)_s = \int_0^t H_s \, dM_s. \tag{3.22}$$

3.7.4. Fórmula de Itô y algunas consecuencias

La Fórmula de Itô es un resultado importante en el cálculo estocástico, ya que nos dice que al aplicar una función de clase C^2 a una semimartingala continua ésta es una semimartingala continua y además tendremos una fórmula explicita de su descomposición como semimartingala continua. Denotaremos por $C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ al espacio de funciones 2 veces continuamente diferenciables.

Proposición 3.96. *(Fórmula de Itô). Sean $X^1, \cdots, X^m$ semimartingalas continuas y $F \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, entonces para cada $t \geq 0$,*

$$
\begin{aligned}
F(X_t^1, \cdots, X_t^m) = F(X_0^1, \cdots, X_0^m) &+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \cdots, X_s^m)\, dX_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_j \partial x_i}(X_s^1, \cdots, X_s^m)\, d\langle X^i, X^j \rangle_s.
\end{aligned}
$$

Nótese que esta igualdad se da casi seguramente para cada $t \geq 0$. La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [17], capítulo 5, sección 5.2.

Observación 3.97. La fórmula de Itô también es válida si para cada $t \geq 0$, $(X_t, \cdots, X_t^m) \in O$, donde $O \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto y si $F \in C^2(O, \mathbb{R})$. (véase la referencia [17], capítulo 5, sección 5.2).

Una notación usual para la fórmula de Itô es la notación diferencial, la igualdad

$$
\begin{aligned}
F(X_t^1, \cdots, X_t^m) = F(X_0^1, \cdots, X_0^m) &+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \cdots, X_s^m)\, dX_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(X_s^1, \cdots, X_s^m)\, d\langle X^i, X^j \rangle_s.
\end{aligned}
$$

se denota por

$$
\begin{aligned}
dF(X_t^1, \cdots, X_t^m) = &\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t^1, \cdots, X_t^m)\, dX_t \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(X_s^1, \cdots, X_s^m)\, d\langle X^i, X^j \rangle_t.
\end{aligned}
$$

Observación 3.98. En una dimensión tenemos lo siguiente. Si X es una semimartingala, si $m = 1$ y $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fórmula de Itô se simplifica de la siguiente manera:

$$
F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \frac{dF}{dx}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2 F}{dx^2}(X_s)\, d\langle X, X \rangle_s.
$$

o en notación diferencial,

$$
dF(X_t) = \frac{dF}{dx}(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2}(X_t)\, d\langle X, X \rangle_t.
$$

Aplicando la Fórmula de Itô a la función $f(x, y) = xy$, obtenemos la siguiente fórmula:

Proposición 3.99. *(Fórmula de integración por partes). Sean X y Y semimartingalas continuas, entonces*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_s.$$

El siguiente teorema es una consecuencia de la fórmula de Itô.

Teorema 3.100. *Sea M una martingala local continua con $M_0 = 0$. Definimos el proceso estocástico*

$$\mathcal{E}(M)_t := \exp\Big(M_t - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_t\Big).$$

Entonces $\mathcal{E}(M)$ es martingala local continua que cumple la relación:

$$\mathcal{E}(M)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s\,dM_s.$$

Si Y es otra martingala local continua tal que

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s\,dM_s,$$

entonces Y y $\mathcal{E}(M)$ son indistinguibles.

Demostración. Sea $f(x,y) = \exp(x - \frac{1}{2}y)$. Aplicaremos la fórmula de Itô a la función f y a las semimartingalas continuas $X = M$ y $Y = \langle M,M\rangle$. Antes de desarrollar la fórmula notemos lo siguiente: por definición de la covariación entre semimartingalas (definición 3.77) tenemos que

$$\langle X,Y\rangle = \langle M,0\rangle = 0,$$

pues la parte correspondiente a la martingala local en la descomposición de Y es igual a cero. Entonces los términos que involucran a las derivadas cruzadas de f en la fórmula de Itô serán iguales a cero. De igual manera tenemos que

$$\langle Y,Y\rangle = 0,$$

por lo que los términos que involucran la segunda derivada con respecto de y también son iguales a cero. Tomando en cuenta estas observaciones y desarrollando la fórmula de Itô tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(X_t,Y_t) &= 1 + \int_0^t f(X_s,Y_s)\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s,Y_s)\,dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s,Y_s)\,d\langle X,X\rangle_s \\
&= 1 + \int_0^t f(X_s,Y_s)\,dM_t - \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s,Y_s)\,d\langle M,M\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s,Y_s)\,d\langle M,M\rangle_s \\
&= 1 + \int_0^t f(X_s,Y_s)\,dM_s.
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{E}(M)_t = f(X_t,Y_t)$ para todo $t \geq 0$, tenemos que

$$\mathcal{E}(M)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s\,dM_s. \tag{3.23}$$

Nótese que

$$\mathcal{E}(M)_t > 0$$

para todo $t \geq 0$ y $f(x) = 1/x$ es de clase C^2 en el abierto $(0, \infty)$ por lo que podemos aplicar la fórmula de Itô a $\mathcal{E}(M)$ y a la función $f(x) = 1/x$ (ver observación 3.97). De esto tenemos que

$$\frac{1}{\mathcal{E}(M)_t} = 1 - \int_0^t \frac{1}{(\mathcal{E}(M)_s)^2}\, d\mathcal{E}(M)_s + \int_0^t \frac{1}{(\mathcal{E}(M)_s)^3}\, d\langle \mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M)\rangle_s. \tag{3.24}$$

Nótese que de las igualdades (3.20) (de la observación 3.95 inciso d)) y (3.23) se tiene que

$$\langle \mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M)\rangle_t = \langle \mathcal{E}(M) \cdot M, \mathcal{E}(M) \cdot M\rangle_t. \tag{3.25}$$

Por otra parte, de la igualdad (3.25) y de la observación 3.95 inciso c) tenemos que

$$\langle \mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M)\rangle_t = \int_0^t (\mathcal{E}(M)_s)^2 d\langle M, M\rangle_s, \tag{3.26}$$

Ahora veamos la segunda parte del teorema. Nótese que de la igualdad (3.22) de la observación 3.95 y la igualdad (3.23 se sigue que para cualquier proceso H localmente acotado se tiene:

$$\int^t H_s\, d\mathcal{E}(M) = \int_0^t H_s d(\mathcal{E}(M) \cdot M)_s.$$

De esto último, de la observación 3.95 inciso a), y las igualdades (3.23) y (3.26), podemos reexpresar (3.24) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{E}(M)_t} &= 1 - \int_0^t \frac{1}{(\mathcal{E}(M)_s)^2}\, d\mathcal{E}(M)_s + \int_0^t \frac{1}{(\mathcal{E}(M)_s)^3}\, d\langle \mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M)\rangle_s \\ &= 1 - \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(M)_s}\, dM_s + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(M)_s}\, d\langle M, M\rangle_s.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Sea Y una martingala local continua tal que

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s\, dM_s. \tag{3.28}$$

De la fórmula de integración por partes (proposición 3.99), de la proposición 3.95 inciso a) y las igualdades (3.27) y (3.28) tenemos que

$$\begin{aligned}Y_t(\mathcal{E}(M)_t)^{-1} &= 1 + \int_0^t Y_s\, d(\mathcal{E}(M)_s)^{-1} + \int_0^t (\mathcal{E}(M)_s)^{-1}\, dY_s + \left\langle Y, (\mathcal{E}(M))^{-1}\right\rangle_t \\ &= 1 - \int_0^t Y_s(\mathcal{E}(M)_s)^{-1}\, dM_s + \int_0^t Y_s(\mathcal{E}(M)_s)^{-1}\, d\langle M, M\rangle_s \\ &\quad + \int_0^t Y_s(\mathcal{E}(M)_s)^{-1}\, dM_s + \langle Y, (\mathcal{E}(M)_t)^{-1}\rangle_t \\ &= 1 + \int_0^t Y_s(\mathcal{E}(M)_s)^{-1}\, d\langle M, M\rangle_s + \langle Y, (\mathcal{E}(M))^{-1}\rangle_t.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Nótese que en las integrales respecto de $(\mathcal{E}(M))^{-1}$ y Y omitimos la constante 1 por la igualdad (3.22)de la observación 3.95. Por otra parte, de las igualdades (3.27),(3.28) y la igualdad (3.18) de la observación 3.95 tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Y, (\mathcal{E}(M))^{-1}\rangle_t &= \langle(-\mathcal{E}(M))^{-1} \cdot M, Y \cdot M\rangle_t \\ &= -\int_0^t (\mathcal{E}(M)_s)^{-1} Y_s\, d\langle M, M\rangle_s.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Recordemos que en la igualdad 3.30, únicamente estamos considerando las martingalas locales en la descomposición de Y y $(\mathcal{E}(M)_t)^{-1}$ y omitimos las constantes por la igualdad (3.22) de la observación 3.95. Sustituyendo la igualdad (3.30) en (3.29) obtenemos que

$$Y_t(\mathcal{E}(M)_t)^{-1} = 1$$

y por lo tanto, $Y_t = \mathcal{E}(M)_t$, para todo $t \geq 0$. Puesto que Y y $\mathcal{E}(M)$ tienen trayectorias continuas, de la proposición 3.22 se sigue que Y y $\mathcal{E}(M)$ son indistinguibles.

□

Definición 3.101. Al proceso estocástico $\mathcal{E}(M)$ definido por la igualdad

$$\mathcal{E}(M)_t := \exp\Big(M_t - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\Big)$$

le llamaremos la exponencial de Dooléans-Dade.

3.7.5. Algunas observaciones sobre la integral estocástica respecto del movimiento Browniano

Consideraremos integrales estocásticas respecto del movimiento Browniano y de semimartingalas derivadas de estas integrales. En los teoremas anteriores consideramos la hipótesis de que la filtración fuera completa. En el caso del movimiento Browniano, podemos obtener una filtración con estas características.

Definición 3.102. Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano m-dimensional. Diremos que una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es admisible si

1. $(W_t)_{t\geq 0}$ es adaptado respecto de la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
2. Para cualesquiera $0 \leq s < t$ se tiene que $\sigma(W_t - W_s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.

Definición 3.103. Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano m-dimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para cada $t \geq 0$, definimos

$$\overline{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}), \tag{3.31}$$

donde $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$ y $\mathcal{N}$ son los subconjuntos nulos de $\mathbb{P}$. Notemos que para cada $t \geq 0$, $\overline{\mathcal{F}}_t$ es la completación de $\mathcal{F}_t^0$.

Proposición 3.104. $(W_t)_{t\geq 0}$ *un Movimiento Browniano m-dimensional definido sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *La filtración* $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ *es una filtración admisible y además es continua por la derecha.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [21], capítulo 6, sección 6.7.

A partir de ahora, consideraremos un Movimiento Browniano unidimensional $W = (W_t)_{t\geq 0}$ adaptado respecto de una filtración completa $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y además asumiremos que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es admisible. De manera similar a la proposición 3.47 tenemos que W es una martingala y por lo tanto, una martingala local. De esto mismo se sigue que $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala local y del teorema 3.67 se sigue

$$\langle W, W\rangle_t = t. \tag{3.32}$$

Observación 3.105. De (3.32) se sigue que $L^2_{loc}(W)$ es la clase de procesos progresivos H tales que

$$\int_0^t (H_s)^2(\omega)\, ds < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

para casi todo $\omega \in \Omega$.

3.8. Ecuaciones diferenciales estocásticas respecto del movimiento Browniano

Definición 3.106. Sean $b : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to M_{m\times d}(\mathbb{R})$ funciones medibles y sea $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano d-dimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y supongamos que W es adaptado respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ completa y continua por la derecha. Diremos que un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ con valores en $\mathbb{R}^m$ es una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \tag{3.33}$$

con condición inicial $X_0 = \xi$ si cumple lo siguiente:

a) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas y es adaptado de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,

b) $X_0 = \xi$ c.s.

c) $\int_0^t |b_i(s, X_s)| ds + \int_0^t \sigma^2_{ij}(s, X_s) ds < \infty$ casi seguramente, para cualesquiera $t \geq 0$ y $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq d$.

d) Para todo $1 \leq i \leq m$, se satisface

$$X^i_t = X^i_0 + \int_0^t b_i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\, dW^j_s,$$

de manera vectorial esto se denota por

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

A b y σ les llamaremos los coeficientes de la ecuación (3.33).

Definición 3.107. (Unicidad trayectorial). Sean $b : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to M_{m\times d}(\mathbb{R})$ funciones medibles y sea $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano d-dimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y supongamos que W es adaptado respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración admisible, completa y continua por la derecha. Diremos que la ecuación diferencial estocástica 3.33 con condición inicial ξ cumple unicidad trayectorial si para cualesquiera $X, \tilde{X}$ soluciones fuertes de 3.33 con condición inicial ξ, se tiene que X y $\tilde{X}$ son indistinguibles (ver definición 3.20).

La norma que consideraremos para matrices $\sigma \in M_{m\times d}(\mathbb{R})$, es la siguiente:

$$\|\sigma_{i,j}\|^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \sigma^2_{i,j}.$$

Para vectores $b \in \mathbb{R}^m$ consideraremos la norma euclidiana

$$\|b\|^2 = \sum_{i=1}^m |b_i|^2.$$

Proposición 3.108. *Sean $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to M_{m\times d}(\mathbb{R})$ localmente Lispchitz, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante K_n tal que para cualesquiera $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ con $\|x\| \leq n$ y $\|y\| \leq n$, se tiene que*

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - b(t, y)\| \leq K_n\|x - y\|.$$

Si existe una solución fuerte a la ecuación diferencial estocástica (3.33) con condición inicial ξ, entonces la solución de la ecuación diferencial estocástica (3.33) con condición inicial ξ cumple unicidad trayectorial.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [15], capítulo 5, sección 5.2.

Definición 3.109. Diremos que $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to M_{m\times d}(\mathbb{R})$ cumplen la condición global de Lipschitz si para cada $T > 0$ existe $K_T > 0$ tal que

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, x)\| \leq K_T\|x - y\|$$

para cualesquiera $t \in [0, T]$ y $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Diremos que $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to M_{m\times d}(\mathbb{R})$ cumplen la condición de crecimiento lineal si para cada $T > 0$ existe $M_T > 0$ tal que

$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq M_T(1 + \|x\|^2)$$

para cualesquiera $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 3.110. *(Existencia y unicidad). Sea $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano d-dimensional adaptado a una filtración $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ admisible, completa y continua por la derecha. Sea ξ una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$ medible con valores en $\mathbb{R}^m$ tal que*

$$\mathbb{E}[\|\xi\|^2] < \infty.$$

Si los coeficientes b y σ cumplen la condición global de Lipschitz y la condición de crecimiento lineal, existe un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ con trayectorias continuas y adaptado respecto de $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ tal que $(X_t)_{t\geq 0}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t$$

con condición inicial $X_0 = \xi$. Esta ecuación diferencial estocástica cumple unicidad trayectorial y para cada $T \geq 0$ tenemos que existe $C_T > 0$ tal que

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq T} \|X_s\|^2] \leq C_T\mathbb{E}[1 + \|\xi\|^2]$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [21], capítulo 18, sección 18.3.

3.9. Teorema de Girsanov

El siguiente teorema será de utilidad para estudiar algunas propiedades de la ecuación de Belavkin. Consideraremos $(W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano fijo sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y adaptado respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ admisible y continua por la derecha.

Teorema 3.111. *(Teorema de Girsanov). Sea $T > 0$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivo tal que*

$$\int_0^t X_s^2 \, ds < \infty, \forall t \ \ c.s.$$

Sea

$$Z_t = \exp\Big(\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \, ds\Big).$$

Sea Q la medida definida por

$$Q = Z_T \, d\mathbb{P}.$$

Si Z_t es una martingala, el proceso estocástico $(\tilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ definido por

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t X_s \, ds$$

es un Movimiento Browniano sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$.

La siguiente condicion es útil para determinar si el proceso Z del teorema 3.111 es una martingala.

Proposición 3.112. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivo tal que*

$$\int_0^t X_s^2 \, ds < \infty, \quad \forall t \ \ c.s.$$

Sea

$$Z_t = \exp\Big(\int_0^t X_s^2 dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \, ds\Big).$$

Si

$$\mathbb{E}\big[\big(\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \, ds\big)\big] < \infty,$$

para todo $t \geq 0$, entonces $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ es una martingala.

La demostración del teorema 3.111 y la proposición 3.112 se pueden consultar en la referencia [15], capítulo 3, sección 3.5.

3.10. Integración estocática respecto de semimartingalas càdlàg

Veremos la integral estocástica respecto de semimartingalas càdlàg para abordar los teoremas de convergencia de integrales estocásticas. La clase de procesos que integraremos son los procesos procesos càglàd (procesos continuos por la izquierda con límites por la derecha), esta clase será suficiente para desarrollar los resultados que veremos en las siguientes secciones. Los resultados más generales de integración respecto de semimartingalas càdlàg se pueden consultar en la referencia [13], capítulo 4 o la referencia [19], capítulo IV. Los resultados que veremos se encuentran en la referencia [19], capítulo II.

Consideraremos un espacio de probabilidad filtrado fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ y asumiremos que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es completa y continua por la derecha.

Definición 3.113. Diremos que un proceso estocástico H es un proceso simple predecible si

$$H_t(\omega) = H_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i(\omega)\mathbb{1}_{(T_i(\omega),T_{i+1}(\omega)]}(t),$$

donde $0 = T_1 \leq \cdots \leq T_n < \infty$ son tiempos de paro, H_i es una variable aleatoria acotada y $\mathcal{F}_{T_i}$ medible, para todo $0 \leq i \leq n$. A la clase de procesos simples precedibles la denotaremos por $\mathbf{S}$.

Denotaremos por $\mathbf{S}_u$ al espacio $\mathbf{S}$ equipado con la topología de la convergencia uniforme sobre las variables (t, ω) y denotaremos por L^0 al espacio de variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con la topología de convergencia en probabilidad, inducida por la métrica

$$d(X,Y) = \int \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\, d\mathbb{P}, \quad X, Y \in L^0.$$

Definición 3.114. Dado un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ definimos el mapeo $I_X : \mathbf{S} \to L^0$ por

$$I_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}),$$

donde $H \in \mathbf{S}$ tiene la representación

$$H_t(\omega) = H_0\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i\mathbb{1}_{(T_i(\omega),T_{i+1}(\omega)]}(t).$$

Definición 3.115. (Semimartingala). Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias càdlàg y adaptado. Diremos que un proceso estocástico es una semimartingala total si el mapeo $I_X : \mathbf{S}_u \to L^0$ es continuo. Diremos que X es una semimartingala si para cada $t \geq 0$ el proceso estocástico $X^t = (X_{t\wedge s})_{s\geq 0}$ es una semimartingala total.

Definición 3.116. (Otra definición de semimartingala). Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias càdlàg y adaptado. Diremos que X es una semimartingala si existe una martingala local $M = (M_t)_{t\geq 0}$ y un proceso de variación finita $A = (A_t)_{t\geq 0}$ tales que $M_0 = A_0 = 0$ y

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

para todo $t \geq 0$.

Nota 3.117. Las definiciones 3.115 y 3.116 son equivalentes. Este resultado se puede consultar en la referencia [19], capítulo III. La definición 3.115 permite desarrollar los resultados del capítulo II de [19], sin embargo, la definición 3.116 nos será de utilidad para ver los resultados de convergencia del capítulo 3 de este trabajo.

Definición 3.118. Denotaremos por $\mathbb{D}$ a la clase de procesos con trayectorias càdlàg (continuas por la derecha con límites por la izquierda) y por $\mathbb{L}$ a la clase de procesos con trayectorias càglàd (continuas por la izquierda con límites por la derecha).

Definición 3.119. Diremos que una sucesión de procesos estocásticos $\{H^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a H uniformemente en compactos en probabilidad si para cada $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |H^n_s - H_s| > \varepsilon\Big] = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Esta convergencia induce una topología por medio de la métrica

$$d_{ucp}(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mathbb{E}\Big[\min\{1, \sup_{0\le s\le n} |X_s - Y_s|\}\Big].$$

Denotaremos por $\mathbb{D}_{ucp}$, $\mathbb{L}_{ucp}$ y $\mathbf{S}_{ucp}$ a los espacios $\mathbb{D}, \mathbb{L}$ y $\mathbf{S}$ equipados con la topología inducida por la métrica d_{ucp}, respectivamente.

Proposición 3.120. *El espacio $\boldsymbol{S}$ es denso en $\mathbb{L}$ en la topología inducida por la métrica d_{ucp}.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [19], capítulo 2, sección 4.

Recordemos que dado un tiempo de paro T y X un proceso progresivo. El proceso X^T se encuentra definido por

$$X_t^T(\omega) = X_{t\wedge T(\omega)}(\omega).$$

Definición 3.121. Sea X un proceso estocástico con trayectorias càdlàg. Definimos el mapeo $J_X : \mathbf{S} \to \mathbb{D}$ por

$$J_X(H) = H_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(X^{T_{i+1}} - X^{T_i}),$$

donde $H \in \mathbf{S}$ se encuentra dado por

$$H_t(\omega) = H_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i(\omega)\mathbb{1}_{(T_i(\omega),T_{i+1}(\omega)]}(t),$$

con $0 = T_1 \le \cdots \le T_n < \infty$ tiempos de paro, H_i una variable aleatoria acotada y $\mathcal{F}_{T_i}$ medible, para todo $0 \le i \le n$.

Proposición 3.122. *Sea X una semimartingala. Entonces el mapeo $J_X : \boldsymbol{S}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp}$ es continuo.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [19], capítulo 2, sección 4.

Definición 3.123. (Integral estocástica respecto de semimartingalas). Sea X una semimartingala. Al mapeo lineal continuo $J_X : \mathbb{L}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp}$ que resulta de extender el mapeo $J_X : \mathbf{S}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp}$ le llamaremos la integral estocástica. Sea $H \in \mathbb{L}$, al proceso estocástico $J_X(H)$ le llamaremos la integral estocástica de H con respecto de X.

Usaremos las siguientes notaciones para la integral estocástica:

$$J_X(H) = H \cdot X = \int H\, dX.$$

Para cada $t \ge 0$, definimos

$$\int_0^t H_s\, dX_s := J_X(H)_t.$$

Teorema 3.124. *Sea X una semimartingala con trayectorias de variación finita y $H \in \mathbb{D}$. Entonces el proceso estocástico $H \cdot X$ es indistinguible del proceso estocástico obtenido por la integral de Lebesgue-Stieltjes trayectoria por trayectoria, es decir, el proceso estocástico definido por*

$$\int_0^t H_s(\omega)\, dX_s(\omega), \quad t \ge 0.$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [19], capítulo 2, sección 4.

Teorema 3.125. *Sea X una semimartingala y $H \in \mathbb{L}$. Entonces el proceso estocástico $Y = H \cdot X$ es una semimartingala y para cualquier $G \in \mathbb{L}$ se tiene que $G \cdot Y = (GH) \cdot X$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [19], capítulo 2, sección 4.

Definición 3.126. Sea un proceso adaptado X con trayectorias càdlàg. Denotaremos por $X_{\text{-}}$ al proceso estocástico $(X_{t\text{-}})_{t\geq 0}$, donde

$$X_{t\text{-}}(\omega) := \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

para $t > 0$ y $X_{0\text{-}} := 0$. Tenemos que $X_{\text{-}}$ es un proceso adaptado con trayectorias càglàd (continuas por la izquierda con límites por la derecha).

Proposición 3.127. *Sean*

$$0 = T_0^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n$$

tiempos de paro tales que:

- $\lim_{n\to\infty} \sup_k T_k^n = \infty$ *y*
- $\lim_{n\to\infty} \sup_k |T_{k+1}^n - T_k| = 0$ *c.s.*

Sea X una semimartingala y Y un proceso en $\mathbb{D}$ o en $\mathbb{L}$. Entonces el proceso estocástico

$$\sum_{i=1}^{k_n-1} Y_{T_i^n}(X^{T_{i+1}^n} - X^{T_{i+1}^n}).$$

converge uniformemente en compactos en probabilidad a la integral estocástica $Y_{\text{-}} \cdot X$.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [19], capítulo 2, sección 4.

Observación 3.128. Si X es una semimartingala continua (ver definición 3.75) tenemos en particular que X es una semimartingala (ver definición 3.116). Sea H es un proceso adaptado con trayectorias continuas y $t > 0$ fijo. Sea $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ una sucesión de particiones de $[0,t]$ tal que $\sup_i |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ los tiempos de paro constantes

$$T_i^n := t_i^n,$$

para $i \leq p_n$ y

$$T_{p_n+i}^n := t + i/n,$$

donde $1 \leq i \leq n^2$. Nótese que para estos tiempos de paro se tiene que $\lim_{n\to\infty} \sup_k T_k^n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \sup_k |T_{k+1}^n - T_k| = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el proceso estocástico

$$Y^n = \sum_{i=1}^{p_n+n^2-1} Y_{T_i^n}(X_t^{T_{i+1}^n} - X^{T_{i+1}^n})$$

Considerando el proceso estocástico Y^n en t tenemos que

$$Y_t^n = \sum_{i=1}^{p_n+n^2-1} Y_{T_i^n}(X_t^{T_{i+1}^n} - X_t^{T_{i+1}^n}) = \sum_{i=1}^{p_n-1} Y_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}).$$

Luego, tenemos que

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{p_n-1} Y_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) - J_X(H)_t| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |Y_s^n - J_X(H)_s| > \varepsilon). \tag{3.34}$$

Del teorema 3.127 tenemos que $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos en probabilidad a la integral estocástica $J_X(H)$ (ver definición 3.123) y de la desigualdad (3.34)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{p_n-1} Y_{T_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) - J_X(H)_t| > \varepsilon) = 0,$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} Y_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} = J_X(H)_t.$$

en probabilidad. Del teorema 3.94 tenemos que el proceso estocástico $J_X(H)$ coincide con la integral de H respecto de X definida como integral respecto de semimartingalas continuas (ver definición 3.92). Es importante mencionar esto pues en los teoremas de convergencia consideraremos integrales de este tipo.

Definición 3.129. Sea X una semimartingala. Definimos el proceso estocástico $[X, X]$ por

$$[X, X]_t = X_t^2 - 2\int_0^t X_{s^-}\, dX_s.$$

A $[X, X]$ le llamaremos la variación cuadrática de X.

Definición 3.130. Sean X y Y semimartingalas. Definimos el proceso estocástico $[X, Y]$ por

$$[X, Y]_t = X_t Y_t - \int_0^t Y_{s^-}\, dX_s - \int_0^t X_{s^-}\, dY_s.$$

A $[X, Y]$ le llamaremos el bracket entre X y Y.

4. Convergencia de Medidas de probabilidad

Sea (E, d) un espacio métrico y $\mathfrak{B}(E)$ su sigma álgebra de Borel. Denotaremos por $\mathscr{P}(E)$ al espacio de medidas de probabilidad definidas sobre $(E, \mathfrak{B}(E))$.

Definición 4.1. Diremos que una sucesión $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(E)$ converge débilmente a $\mathbb{P} \in \mathscr{P}(E)$ si

$$\int f\, d\mathbb{P}_n \to \int f\, d\mathbb{P},$$

para toda $f : E \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Denotaremos esta convergencia por $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

El siguiente teorema nos proporciona diferentes equivalencias de convergencia débil.

Teorema 4.2. *(de Portmanteau). Son equivalentes:*

(i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

(ii) $\int f\, d\mathbb{P}_n \to \int f\, d\mathbb{P}$, *para toda* $f : E \to \mathbb{R}$ *uniformemente continua y acotada.*

(iii) $\limsup_n \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ *para todo conjunto cerrado* F.

(iv) $\liminf_n \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ *para todo conjunto abierto* G.

(v) $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ *para todo* A *tal que* $\mathbb{P}(\partial A) = 0$.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [6], en el capítulo 1, página 16.

Tenemos que $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ si y sólo si $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbb{P}$ en la topología débil inducida por las funciones

$$\mathbb{P} \mapsto \int f\, d\mathbb{P},$$

con $f : E \to \mathbb{R}$ continua y acotada.

Si (E, r) es un espacio completo y separable tenemos que esta topología es inducida por la métrica

$$\varrho(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, \mathbb{P}(F) \leq \mathbb{Q}(F^\varepsilon) + \varepsilon, \ \ \forall\ F \text{ cerrado}\}$$

donde

$$F^\varepsilon := \{x \in E \,|\, \inf_{y\in F} r(x, y) < \varepsilon\},$$

y el espacio métrico $(\mathscr{P}(E), \varrho)$ es completo y separable. Luego, convergencia débil es equivalente a la convergencia respecto de ésta métrica. La demostración de estos resultados se pueden consultar en la referencia [6], en el capítulo 1, página 72.

Proposición 4.3. *Sea* (E, d) *y* (E', d') *espacios métricos y* $h : E \to E'$ *continua. Si* $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente a* $\mathbb{P}$ *en* $\mathscr{P}(E)$, *entonces* $\{\mathbb{P}_n \circ h^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente a* $\mathbb{P} \circ h^{-1}$ *en* $\mathscr{P}(E')$.

$$\mathbb{P} \circ h^{-1}(A) := \mathbb{P}(h^{-1}(A)).$$

Demostración. Sea $h : E \to E'$ continua y $f : E' \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Notemos que

$$\int f\, d\,\mathbb{P} \circ h^{-1} = \int f \circ h\, d\,\mathbb{P}.$$

Puesto que la función $f \circ h$ es continua y acotada y $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$, tenemos que

$$\int f \circ h \, d\mathbb{P}_n \to \int f \circ h \, d\mathbb{P}$$

y de la observación anterior se sigue que

$$\int f \, d\mathbb{P}_n \circ h^{-1} \to \int f \, d\mathbb{P} \circ h^{-1}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}_n \circ h^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} \circ h^{-1}$.

$\square$

Definición 4.4. Diremos que una familia de medidas de probabilidad $A \subset \mathscr{P}(E)$ es tensa si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset E$ tal que $\mathbb{P}(E \setminus K) \leq \varepsilon$, para todo $\mathbb{P} \in A$.

Teorema 4.5. *(de Prokhorov). Sea E un espacio métrico completo y separable. Entonces la familia $A \subset \mathscr{P}(E)$ es tensa si y sólo si A es relativamente compacto en $\mathscr{P}(E)$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [6], capítulo 1, sección 5.

Sea X una variable aleatoria con valores en un espacio métrico E, definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ a la ley de X bajo $\mathbb{P}$, es decir,

$$\mathcal{L}(X)(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathfrak{B}(E).$$

Consideraremos sucesiones $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias con valores en E tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n se encuentra definida sobre $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$, es decir, las variables aleatorias de la sucesión no necesariamente están definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

Sea X una variable aleatoria real sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $X \in L^1(\Omega)$. Denotaremos a la esperanza de X respecto de la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ por

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] := \int X \, d\mathbb{P}.$$

Definición 4.6. Diremos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en ley o en distribución a X si $\{\mathcal{L}(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $\mathcal{L}(X)$ y lo denotaremos por $X_n \Rightarrow X$.

Nótese que esto es equivalente a la siguiente condición:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(X_n)] \to \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)],$$

para toda $f : E \to \mathbb{R}$ continua y acotada.

Definición 4.7. Diremos que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa si $\{\mathcal{L}(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa.

Luego, tenemos versiones de los teoremas anteriores en términos de variables aleatorias:

Proposición 4.8. *Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos, $h : E \to E'$ continua y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con valores en E. Si $X_n \Rightarrow X$, entonces $h(X_n) \Rightarrow h(X)$.*

Teorema 4.9. *Sea E un espacio métrico completo y separable y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con valores en E. Entonces la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa si y sólo si $\{\mathcal{L}(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto en $\mathscr{P}(E)$.*

4.1. Resultados de convergencia en distribución sobre el espacio de Skorokhod

Sea (E, r) un espacio métrico separable. Diremos que una función $\alpha : [0, \infty) \to E$ es cádlág si es continua por la derecha y si el límite por la izquierda

$$\alpha(t\text{-}) = \lim_{s \uparrow t} \alpha(s)$$

existe para todo $t > 0$. Por convención usaremos la notación:

$$\alpha(0\text{-}) = \alpha(0).$$

Denotaremos por $D_E[0, \infty)$ el espacio de funciones cádlág (continuas por la derecha con límite por la izquierda) con valores en E.

Para estudiar la convergencia en distribución de variables aleatorias sobre $D_E[0, \infty)$ debemos considerar una métrica d sobre este conjunto tal que $(D_E[0, \infty), d)$ sea un espacio métrico completo y separable. Consideraremos el caso $E = \mathbb{R}^m$ equipado con la norma euclidiana (la cual denotaremos por $\|\cdot\|$), sin embargo, estos resultados se pueden generalizar a un espacio métrico (E, r) completo y separable intercambiando los papeles de r y $\|\cdot\|$.

Dado $\alpha \in D_{\mathbb{R}^m}[0, \infty)$ y $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, definimos

$$w(\alpha, I) = \sup_{s,t \in I} \|\alpha(t) - \alpha(s)\|,$$

y para $\alpha \in D_{\mathbb{R}^m}[0, \infty)$ y $\theta > 0$, se define

$$w'_N(\alpha, \theta) = \inf \Big\{ \max_{1 \le i \le r} w(\alpha, [t_{i-1}, t_i)) \,\Big|\, 0 = t_0 < \cdots < t_r = N,\ \inf_{i<r}(t_i - t_{i-1}) \ge \theta \Big\}.$$

Denotaremos por Λ al conjunto de funciones continuas $\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que son estrictamente crecientes, $\lambda(0) = 0$ y

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = \infty.$$

Teorema 4.10. *Existe una topología sobre $D_{\mathbb{R}^m}[0, \infty)$ generada por una métrica d tal que $(D_{\mathbb{R}^m}[0, \infty), d)$ es un espacio métrico completo y separable, a esta topología le llamaremos la topología de Skorokhod. Además, se tienen*

(i) La sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_{\mathbb{R}^m}[0, \infty)$ converge a α en dicha topología, es decir, $d(\alpha_n, \alpha) \to 0$ si y sólo si existe $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ tal que

a) $\lim_{n \to \infty} \sup_{s \ge 0} |\lambda_n(s) - s| = 0$ *y*

b) $\lim_{n \to \infty} \sup_{s \le T} \|\alpha_n(\lambda_n(s)) - \alpha(s)\| = 0$, *para todo $T > 0$.*

(ii) $A \subset D_{\mathbb{R}^d}[0, \infty)$ es relativamente compacto en dicha topología si y sólo si, se cumplen

a) $\sup_{\alpha \in A} \sup_{s \le N} \|\alpha(s)\| < \infty$, *para todo $N \in \mathbb{N}$ y*

b) $\lim_{\theta \downarrow 0} \sup_{\alpha \in A} w'_N(\alpha, \theta) = 0$, *para todo $N \in \mathbb{N}$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], el capítulo 6, página 330.

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos lo siguiente:

Proposición 4.11.

(i) Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ *es una sucesión de funciones que converge uniformemente en compactos a* α, *entonces* $\alpha_n \to \alpha$ *en la topología de Skorokhod.*

(ii) $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,\infty),\mathbb{R}^m)$ *converge a* α *en la topología de Skorokhod si y sólo si converge a* α *uniformemente en compactos. Es decir, la topología de* $(C([0,\infty),\mathbb{R}^m), d)$ *como subespacio de* $(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty), d)$ *es igual la topología de convergencia uniforme en compactos.*

Demostración. El inciso (i) se sigue directamente del teorema anterior si consideramos $\lambda_n(t) = t$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora demostraremos (ii), el recíproco se sigue directamente de (i) por lo que basta demostrar la implicación directa. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,\infty),\mathbb{R}^m)$ y $\alpha \in D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ tal que $\alpha_n \to \alpha$ en la topología de Skorokhod. Luego, existe $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\geq 0} |\lambda_n(s) - s| = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \|\alpha_n(\lambda_n(s)) - \alpha(s)\| = 0, \tag{4.1}$$

para todo $T > 0$. Notemos que

$$\sup_{s\geq 0} |\lambda_n(s) - s| = \sup_{s\geq 0} |\lambda_n^{-1}(s) - s|$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\geq 0} |\lambda_n^{-1}(s) - s| = 0.$$

Primero, de (4.1) tenemos que α es continua, pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \circ \lambda_n$ es continua. Por otra parte, tenemos que

$$\|\alpha_n(t) - \alpha(t)\| \leq \|\alpha_n \circ \lambda_n \circ \lambda_n^{-1}(t) - \alpha \circ \lambda_n^{-1}(t)\| + \|\alpha \circ \lambda_n^{-1}(t) - \alpha(t)\|. \tag{4.2}$$

Sea $T > 0$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que α es uniformemente continua en el intervalo $[0,T]$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$ se tiene que $\|\alpha(t) - \alpha(s)\| < \varepsilon$. Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$,

$$\sup_{s\leq T+\delta} \|\alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s)\| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_2$,

$$\sup_{s\geq 0} |\lambda_n^{-1}(s) - s| < \delta. \tag{4.4}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$, de (4.4) tenemos que para $s \in [0,T]$, $\lambda_n(s) \in [0, T+\delta]$ y por tanto

$$\sup_{s\leq T} \|\alpha_n \circ \lambda_n \circ \lambda_n^{-1}(s) - \alpha \circ \lambda_n^{-1}(s)\| \leq \sup_{s\leq T+\delta} \|\alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s)\| < \varepsilon.$$

Por otra parte, de la continuidad uniforme de α y de (4.4) tenemos que

$$\sup_{s\leq T} \|\alpha \circ \lambda_n^{-1}(s) - \alpha(s)\| \leq \sup_{s\leq T+\delta} \|\alpha_n \circ \lambda_n - \alpha(s)\| < \varepsilon.$$

Luego, de (4.2) y las desigualdades anteriores tenemos que para todo $n \geq N$,

$$\sup_{s\leq T} \|\alpha_n(t) - \alpha(t)\| \leq 2\varepsilon.$$

Por lo tanto, α_n converge a α uniformemente en compactos.

∎

A partir de ahora consideraremos que $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ está equipado con la métrica d y a $(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty), d)$ le llamaremos el espacio de Skorokhod. Veremos una manera de caracterizar a los borelianos de este espacio. Para cada $t \geq 0$, definimos $\pi_t : D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ por

$$\pi_t(\alpha) := \alpha(t). \tag{4.5}$$

Proposición 4.12. *Sea $\mathfrak{B}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$ la sigma álgebra de Borel de $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ equipado con la topología de Skorokhod y D un subconjunto denso de $[0,\infty)$. Entonces*

$$\mathfrak{B}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)) = \sigma(\pi_t : t \in D).$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [6], capítulo 3, página 173.

Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias càdlàg que toman valores en $\mathbb{R}^m$, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. De la proposición anterior tenemos que el mapeo

$$\omega \mapsto X.(\omega),$$

es $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$ medible: dado $D \subset [0,\infty)$ denso, $t_1, \cdots, t_k \in D$, y $A_1, \cdots, A_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, tenemos que

$$X^{-1}\big(\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(A_i)\big) = \bigcap_{i=1}^{k} X_{t_i}^{-1}(A_i) \in \mathcal{F},$$

pues para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, X_{t_i} es una variable aleatoria. Puesto que los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(A_i)$ generan a $\mathfrak{B}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$, podemos concluir el resultado. Luego, podemos considerar a un proceso con trayectorias en $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ como una variable aleatoria con valores en $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ y por tanto, tenemos que $\mathcal{L}(X) \in \mathscr{P}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$.

A las sucesiones de procesos estocásticos con trayectorias en $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ las denotaremos con superíndice: $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, utilizaremos la notación $X^n = (X_t^n)_{t\geq 0}$. En todos los teoremas que veremos, asumiremos que las sucesiones de procesos estocásticos tienen trayectorias en $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$.

Definición 4.13. Dado un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ y $t_1, \cdots, t_k \in [0,\infty)$ denotaremos por $\mathcal{L}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ a la ley de la variable aleatoria $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ y diremos que los elementos de la familia de medidas

$$\big\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}) \,|\, t_1, \cdots, t_k \in [0,\infty), k \in \mathbb{N}\big\}$$

son las distribuciones finito dimensionales de X.

Definición 4.14. Sean X, $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ procesos estocásticos con valores en $\mathbb{R}^m$ y $D \subset [0,\infty)$. Diremos que las distribuciones finito dimensionales de X^n convergen a X a lo largo de D si para cualesquiera $t_1, \cdots, t_k \in D$, $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$(X_{t_1}^n, \cdots, X_{t_k}^n) \Rightarrow (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}) \tag{4.6}$$

y denotaremos esta convergencia por

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X.$$

Nótese que la convergencia en (4.6) se refiere a convergencia en distribución de variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}^{km}$.

Definición 4.15. Sea X un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}^m$. Definimos el proceso de saltos $\Delta X = (\Delta X_t)_{t\geq 0}$ de la siguiente manera: para cada $t \geq 0$, definimos

$$\Delta X_t := X_t - X_{t\text{-}}.$$

Dado $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias càdlàg, definimos el conjunto

$$J(X) := \{t > 0 \,|\, \mathbb{P}[\Delta X_t \neq 0] > 0\}.$$

Lema 4.16. *$J(X)$ es a lo más numerable.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], capítulo 6, sección 3. Nótese que de este resultado se obtiene que $[0,\infty) \setminus J(X)$ es denso en $[0,\infty)$.

Proposición 4.17. *Dados X, $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ procesos estocásticos con trayectorias càdlàg que toman valores en $\mathbb{R}^m$ tales que $X^n \Rightarrow X$. Entonces $X^n \overset{\mathcal{L}(D)}{\longrightarrow} X$, donde $D = [0,\infty) \setminus J(X)$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], capítulo 6, página 349. Veremos que las distribuciones finito dimensionales de un proceso caracterizan su ley como elemento $\mathscr{P}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$. Primero veremos el siguiente resultado.

Proposición 4.18. *Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ medidas de probabilidad definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y suponga que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ coinciden en una clase $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ que es cerrada bajo intersecciones. Si $\sigma(C) = \mathcal{F}$, entonces $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [12], capítulo 6.

Proposición 4.19. *Sean X, Y procesos estocásticos con trayectorias càdlàg, definidos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ respectivamente y D un subconjunto denso de $[0,\infty)$. Si $\mathcal{L}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}) = \mathcal{L}(Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_k})$ para cualesquiera $t_1, \cdots, t_k \in D$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.*

Demostración. Sean $t_1, \cdots, t_k \in D$, y $A_1, \cdots, A_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Entonces

$$\mathbb{P}\Big(X^{-1}\big(\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(A_i)\big)\Big) = \tilde{\mathbb{P}}\Big(Y^{-1}\big(\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(A_i)\big)\Big), \tag{4.7}$$

ya que

$$X^{-1}\big(\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(A_i)\big) = (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_k).$$

Del teorema 4.12 tenemos que la familia

$$\mathcal{C} = \Big\{ \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(A_i) \,\big|\, t_1, \cdots, t_k \in D,\ A_1, \cdots, A_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m),\ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

genera a $\mathfrak{B}(D_{\mathbb{R}^d}[0,\infty))$ y por otra parte, tenemos que esta familia es cerrada bajo intersecciones. Puesto que la ley de X y la ley de Y coinciden en $\mathcal{C}$, de la proposición 4.18 se sigue que $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$. $\square$

Ahora mencionaremos algunos resultados que nos permitirán verificar la tensión y convergencia de sucesiones de procesos estocástico con trayectorias càdlàg.

Teorema 4.20. *La sucesión $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa si y sólo si*

a) Para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $K > 0$ tales que para todo $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}_n\big[\sup_{t\leq N} |X_t^n| > K\big] \leq \varepsilon,$$

b) Para todo $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\theta > 0$ tales que para todo $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}_n\big[w'_N(X^n, \theta) \geq \eta\big] \leq \varepsilon.$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], capítulo 6.

Definición 4.21. Una sucesión de procesos $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es C-tensa si es tensa y si todo punto límite de $\{\mathcal{L}(X^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a la ley de un proceso continuo. Es decir, si $\{\mathcal{L}(X^{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión que converge débilmente a $\mathbb{P} \in \mathscr{P}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$, entonces $\mathbb{P}$ está concentrada en el conjunto $C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$.

Proposición 4.22. *Sea $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión C-tensa de procesos estocásticos con valores en $\mathbb{R}^m$ y $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tensa (C-tensa) de procesos estocásticos con valores en $\mathbb{R}^k$. Entonces se cumplen:*

a) Si $m = k$ entonces $\{Y^n + X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa (respectivamente, C-tensa).

b) $\{(X^n, Y^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa (respectivamente, C-tensa).

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], capítulo 6.

Los resultados anteriores nos permiten establecer el siguiente criterio para verificar que una sucesión $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución.

Proposición 4.23. *Sean X, $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ procesos estocásticos con valores en $\mathbb{R}^m$ tales que*

a) La sucesión $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa y

b) $X^n \overset{\mathcal{L}([0,\infty))}{\longrightarrow} X$.

Entonces $X^n \Rightarrow X$.

Demostración. Sea $\{X^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Puesto que la sucesión es tensa, por el teorema de Prokhorov (teorema 4.5) tenemos que $\{\mathcal{L}(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto en $\mathscr{P}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$ y por tanto existe una subsucesión $\{\mathcal{L}(X^{n_{k_j}})\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$ tales que $\mathcal{L}(X^{n_{k_j}}) \Rightarrow \mathbb{P}$. Por otra parte, tenemos que esta subsucesión cumple

$$X^{n_{k_j}} \overset{\mathcal{L}([0,\infty))}{\longrightarrow} X. \tag{4.8}$$

Consideremos el espacio de probabilidad $(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty), \mathfrak{B}(D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)), \mathbb{P})$. Sobre éste espacio definimos el proceso estocástico $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ por medio de la igualdad

$$\tilde{X}_t := \pi_t,$$

donde π_t es la función dada por (4.5). Tenemos que

$$\tilde{X}_t(\alpha) = \alpha(t)$$

para cada $\alpha \in D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty))$. Luego, $\tilde{X}$ es la identidad sobre $D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ y por tanto, $\mathcal{L}(\tilde{X}) = \mathbb{P}$. De la proposición 4.17 se sigue que

$$X^{n_{k_j}} \overset{\mathcal{L}(D)}{\longrightarrow} \tilde{X}, \tag{4.9}$$

para $D = [0,\infty) \setminus J(\tilde{X})$. Luego, de (4.8) y (4.9) tenemos que para cualesquiera $t_1, \cdots, t_k \in D$,

$$\mathcal{L}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}) = \mathcal{L}(\tilde{X}_{t_1}, \cdots, \tilde{X}_{t_k}).$$

De la proposición 4.19 tenemos que $\mathcal{L}(X) = \mathbb{P}$, lo cual demuestra que $\mathcal{L}(X^{n_{k_j}}) \Rightarrow \mathcal{L}(X)$. Puesto que para cada subsucesión de $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ encontramos una subsucesión de ésta que converge a $\mathcal{L}(X)$, obtenemos que $X^n \Rightarrow X$.

□

Definición 4.24. Diremos que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathbb{R}^m$ converge a $c \in \mathbb{R}^m$ en probabilidad si

$$\mathbb{P}_n[\|X_n - c\| \geq \varepsilon] \to 0,$$

y lo denotaremos por $X_n \xrightarrow{P} c$.

A continuación veremos algunos resultados de convergencia que serán de utilidad. Primero veremos algunos resultados que nos permitirán estudiar la convergencia de las distribuciones finito dimensionales.

Proposición 4.25. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias en $\mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^m$. Entonces $X_n \xrightarrow{P} c$ si y sólo si $X_n \Rightarrow c$.*

Demostración. Para demostrar este resultado utilizaremos el teorema de Portmanteau (teorema 4.2). Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada y $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ se cumple que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(X_n)] - f(c)| &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\big[|f(X_n) - f(c)|\mathbb{1}_{\{\|X_n - c\| < \delta\}}\big] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\big[|f(X_n) - f(c)|\mathbb{1}_{\|X_n - c\| \geq \delta}\big]\\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \,\mathbb{P}_n[\|X_n - c\| \geq \delta],\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(X_n)] - f(c)| \leq \varepsilon$$

y puesto que esto se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(X_n)] \to f(c)$. Por lo tanto, $X_n \Rightarrow c$.

Para demostrar el recíproco, consideremos

$$f(x) = \min\{\|x - c\|, 1\}.$$

Puesto que f es continua y acotada, tenemos que

$$E_{\mathbb{P}_n}\big[\min\{\|X_n - c\|, 1\}\big] \to 0.$$

Nótese que para demostrar que $X_n \xrightarrow{P} c$ basta considerar $\varepsilon \in (0, 1)$. Luego, para $\varepsilon \in (0, 1)$ tenemos que

$$\mathbb{P}_n\big[\|X_n - c\| \geq \varepsilon\big] \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\big[\min\{\|X_n - c\|, 1\}\big]$$

y por tanto, tenemos que $\mathbb{P}_n\big[\|X_n - c\| \geq \varepsilon\big] \to 0$.

□

Proposición 4.26. *Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de variables aleatorias en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n y Y_n se encuentran definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, $X_n \Rightarrow X$ y $Y_n \Rightarrow c$, con $c \in \mathbb{R}^k$. Entonces $(Y_n, X_n) \Rightarrow (c, X)$.*

Demostración. Para probar este resultado utilizaremos el teorema de Portmanteau (teorema 4.2). Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada y $\varepsilon > 0$. Sea que existe $\delta > 0$ tal que para $\|x - y\| < \delta$ se cumple que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Notemos que la función

$$x \mapsto f(c, x)$$

es continua y acotada y por tanto, tenemos que

$$E_{\mathbb{P}_n}\big[f(c, X_n)\big] \to \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)].$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned}\big|\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(Y_n, X_n)] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)]\big| &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\big[|f(Y_n, X_n) - f(c, X_n)|\big] + \big|E_{\mathbb{P}_n}\big[f(c, X_n)\big] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)]\big| \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\big[|f(Y_n, X_n) - f(c, X_n)|\mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| < \delta\}}\big] + \big|E_{\mathbb{P}_n}\big[f(c, X_n)\big] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)]\big| \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\big[|f(Y_n, X_n) - f(c, X_n)|\mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| \geq \delta\}}\big] \\ &\leq \varepsilon + \big|E_{\mathbb{P}_n}\big[f(c, X_n)\big] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)]\big| + 2\|f\|_\infty \, \mathbb{P}_n[\|Y_n - c\| \geq \delta].\end{aligned}$$

De la proposición 4.25 tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(Y_n, X_n)] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)]| \leq \varepsilon$$

y puesto que esto se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[f(Y_n, X_n)] \to \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(c, X)]$. Por lo tanto, $(Y_n, X_n) \Rightarrow (c, X)$.

□

Corolario 4.27. *Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de variables aleatorias en $\mathbb{R}^m$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n y Y_n se encuentran definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, $X_n \Rightarrow X$ y $Y_n \Rightarrow c$, con $c \in \mathbb{R}^m$. Entonces $Y_n + X_n \Rightarrow c + X$.*

Demostración. De la proposición 4.26 tenemos que $(Y_n, X_n) \Rightarrow (c, X)$. Por otra parte, tenemos que la función $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$h(x, y) = x + y,$$

es continua. Luego, considerando ésta función en la proposición 4.8 se obtiene que $Y_n + X_n \Rightarrow c + X$.

□

Lema 4.28. *Si $\{Z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de procesos estocásticos tal que para todo $N \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{t\leq N} \|Z^n_s\| \xrightarrow{P} 0$$

entonces $Z^n \Rightarrow 0$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados $t_1, \cdots, t_k \in [0, \infty)$ tenemos que

$$\|(Z^n_{t_1}, \cdots, Z^n_{t_k})\|^2 \leq k\big(\sup_{s\leq N} \|Z^n_s\|\big)^2,$$

donde $N > 0$ es tal que $t_1, \cdots t_k \in [0, N]$. Entonces tenemos que

$$\mathbb{P}_n\big[\|(Z^n_{t_1}, \cdots, Z^n_{t_k})\| > \varepsilon\big] \leq \mathbb{P}_n\big[\sup_{s\leq N} \|Z^n_s\| > \varepsilon/\sqrt{k}\big],$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\big[\|(Z^n_{t_1}, \cdots, Z^n_{t_k})\| > \varepsilon\big] = 0.$$

y en consecuencia, de la proposición 4.25 tenemos que $(Z^n_{t_1}, \cdots, Z^n_{t_k}) \Rightarrow 0$. Luego, $Z^n \overset{\mathcal{L}([0,\infty))}{\longrightarrow} 0$.

Ahora veremos que la sucesión $\{Z_n\}_{n\in N}$ es tensa. Primero, dado $K > 0$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}_n\big[\sup_{t\leq N}\|Z_t^n\| > K\big] < \varepsilon,$$

es decir, $\{Z_n\}_{n\in N}$ verifica la condición a) del teorema 4.20. Por otra parte, notemos que para cualquier intervalo $I \subset [0, N]$ se tiene que

$$w(Z^n, I) \leq 2\sup_{t\leq N}\|Z_t^n\|$$

y en consecuencia,

$$w'_N(Z^n, \theta) \leq 2\sup_{t\leq N}\|Z_t^n\|, \tag{4.10}$$

para cualquier $\theta > 0$. Luego, dados $\eta > 0$ y $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}_n\big[\sup_{t\leq N}\|Z_t^n\| > \eta/2\big] < \varepsilon.$$

Entonces, de (4.10) tenemos que

$$\mathbb{P}_n\big[w'_N(Z^n, \theta) > \eta\big] \leq \mathbb{P}_n\big[\sup_{t\leq N}\|Z_t^n\| > \eta/2\big] < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que $\{Z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la condición b) del teorema 4.20 y por tanto, $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. Finalmente, de la proposición 4.23 se sigue que $Z^n \Rightarrow 0$.

□

Proposición 4.29. *Si la sucesión de procesos estocásticos $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a un proceso con trayectorias continuas X y $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $Z_n \Rightarrow 0$, entonces $(Z^n, X^n) \Rightarrow (0, X)$.*

Demostración. Puesto que $X^n \Rightarrow X$ y X tiene trayectorias continuas, tenemos en particular que $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $C-$tensa y de igual manera, tenemos que la sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. Luego, de la proposición 4.22, inciso b) tenemos que $\{(Z^n, X^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. Notemos que para $k \in \mathbb{N}$ y $t_1, \cdots, t_k \in [0, \infty)$ se tiene que

$$(Z_{t_1}^n, \cdots, Z_{t_k}^n) \Rightarrow (0, \cdots, 0)$$

y

$$(X_{t_1}^n, \cdots, X_{t_k}^n) \Rightarrow (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}),$$

Luego, de la proposición 4.26 se tiene que

$$(Z_{t_1}^n, \cdots, Z_{t_k}^n, X_{t_1}^n, \cdots, X_{t_k}^n) \Rightarrow (0, \cdots, 0, X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}),$$

pues la sucesión de variables aleatorias $\{(Z_{t_1}^n, \cdots, Z_{t_k}^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a un vector constante. Por lo tanto, de la proposición 4.23 se sigue $(Z^n, X^n) \Rightarrow (0, X)$.

□

Proposición 4.30. *Si la sucesión de procesos estocásticos $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a un proceso con trayectorias continuas X y $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $Z_n \Rightarrow 0$ y ambos toman valores en $\mathbb{R}^m$, entonces $Z^n + X^n \Rightarrow X$.*

Demostración. Puesto que $X^n \Rightarrow X$ y X tiene trayectorias continuas, tenemos en particular que $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $C-$tensa y de igual manera, tenemos que la sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. Luego, de la proposición 4.22, inciso a) tenemos que $\{Z^n + X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. Notemos que para $k \in \mathbb{N}$ y $t_1, \cdots, t_k \in [0,\infty)$ se tiene que

$$(Z^n_{t_1}, \cdots, Z^n_{t_k}) \Rightarrow (0, \cdots, 0)$$

y

$$(X^n_{t_1}, \cdots, X^n_{t_k}) \Rightarrow (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}),$$

Luego, del corolario 4.27 se sigue que

$$(Z^n_{t_1} + X^n_{t_1}, \cdots, Z^n_{t_k} + X^n_{t_k}) \Rightarrow (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}).$$

Por lo tanto, de la proposición 4.23 se sigue que $Z^n + X^n \Rightarrow X$.

□

4.2. Resultados de convergencia al Movimiento Browniano y convergencia de Integrales estocásticas

Ahora veremos resultados que nos permitirán estudiar la convergencia al movimiento browniano y convergencia de integrales estocásticas respecto de semimartingalas. Si $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de procesos estocásticos, además de considerar que X^n está definido sobre $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$, consideraremos que X^n es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}$ completa y continua por la derecha (ver definiciones 3.104 y 3.34, respectivamente).

Trabajaremos con integrales estocásticas multidimensionales. En las siguientes definiciones consideraremos fijos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ completa y continua por la derecha.

Definición 4.31. Diremos que un proceso estocástico $X = (X^1, \cdots, X^k)$ con valores en $\mathbb{R}^k$ es una semimartingala si $X^i = (X^i_t)_{t\geq 0}$ es una semimartingala para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$. De manera análoga diremos que X es una martingala local (un proceso de variación finita) si cada una de sus entradas es martingala local (respectivamente, un proceso de variación finita).

Definición 4.32. Sea $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ un proceso con trayectorias en $D_{M_{m\times k}(\mathbb{R})}[0,\infty)$ y X una semimartingala con valores en $\mathbb{R}^k$. Definimos la semimartingala $\int Y\,dX = \big(\int_0^t Y_{s\text{-}}\,dX_s\big)_{t\geq 0}$ con valores en $\mathbb{R}^m$ por

$$\Big(\int Y\,dX\Big)^i_t = \Big(\int_0^t Y_{s\text{-}}\,dX_s\Big)^i := \sum_{j=1}^k \int_0^t (Y_{s\text{-}})_{i,j}\,dX^j_s.$$

Donde la integral de cada sumando se encuentra dada por la definición 3.123.

Recordemos que el bracket entre dos semimartingalas X y Y se define por

$$[X,Y]_t = X_sY_s - \int_0^t X_{s\text{-}}dY_s - \int_0^t Y_{s\text{-}}dX_s.$$

4.2.1. Resultado de convergencia al Movimiento Browniano

Consideraremos fijos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ completa y continua por la derecha.

Definición 4.33. Diremos que un proceso estocástico $X = (X^1, \cdots, X^d)$ es una martingala gaussiana si $X_0 = 0$, X^i es una martingala para cada $i \in \{1, \cdots, d\}$ con respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y X es un proceso gaussiano (ver definición 3.28).

Para cada $t \geq 0$ definimos

$$C_{i,j}(t) := \mathbb{E}[X_t^i X_t^j],$$

y

$$C(t) := (C_{i,j}(t))_{i,j}.$$

Proposición 4.34. *Sea X una martingala gaussiana con valores en $\mathbb{R}^d$. Para cualesquiera $0 \leq s < t$, $C(t) - C(s)$ es una matriz positiva definida y para cada $u \in \mathbb{R}^d$ se tiene que*

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle u, X_t - X_s\rangle)] = \exp(i\langle u, (C(t) - C(s))u\rangle).$$

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], capítulo II, sección 4d.

Teorema 4.35. *Sea $X = (X^1, \cdots, X^d)$ una martingala gaussiana con*

$$C_{i,j}(t) = \mathbb{E}[X_t^i X_t^j],$$

para cada $i, j \leq d$, y $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X^n = (X^{n,1}, \cdots, X^{n,d})$ una martigala local. Además, supongamos que existe $K > 0$ tal que $\|\Delta X_t^n\| \leq K$, para todo $t \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si D es un subconjunto denso de $[0, \infty)$ son equivalentes:

(i) $X_n \Rightarrow X$,

(ii) *Para cualesquiera $i, j \in \{1, \cdots, m\}$,*

$$[X^{n,j}, X^{n,i}]_t \xrightarrow{P} C_{i,j}(t),$$

para todo $t \in D$.

La demostración de este resultado se puede consultar en la referencia [13], capítulo VIII, sección 3b.

Observación 4.36. Sea $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano (unidimensional) tal que para cualesquiera $0 \leq s < t$ se tiene que $\sigma(W_t - W_s)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$. Tenemos que W es una martingala respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y además, tenemos que W es un proceso Gaussiano con $W_0 = 0$ (proposición 3.30), luego, W es una martingala gaussiana (respecto de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$). Además, de la proposición 3.29 se tiene que

$$\mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Entonces, en el caso particular del Movimiento Browniano tenemos que $C(t) = t$.

De la observación 4.36 y el teorema 4.35 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.37. *Sea W un movimiento browniano, $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de martingalas locales con valores en $\mathbb{R}$ y suponga que existe $K > 0$ tal que $|\Delta X_t^n| \leq K$, para todo para todo $t \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si D es un subconjunto denso, son equivalentes*

(i) $X_n \Rightarrow W$,

(ii) $[X^n, X^n]_t \xrightarrow{P} t$, *para todo $t \in D$.*

4.2.2. Teoremas de convergencia de integrales estocásticas

Ahora veremos algunos resultados sobre convergencia de integrales estocásticas. Los demostración de los siguientes resultados se pueden consultar en la referencia [16].

Dado $\delta \in [0,\infty)$ definimos $h_\delta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por

$$h_\delta(x) = (1 - \delta/x)^+$$

y si $\delta = \infty$ consideremos $h_\delta(x) = 0$, para todo $x \in [0,\infty)$.

Definimos la función $J_\delta : D_{\mathbb{R}^d}[0,\infty) \to D_{\mathbb{R}^d}[0,\infty)$ por

$$J_\delta(\alpha)(t) = \sum_{s\le t} h_\delta(|\alpha(s) - \alpha(s-)|)(\alpha(s) - \alpha(s-)).$$

Sea $(A_t)_{t\ge0}$ es un proceso de variación finita, denotaremos por $T_t(A)$ a la variación total de A sobre el intervalo $[0,t]$, es decir

$$T_t(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{k} \|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}\| \,|\, t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = t\}.$$

Teorema 4.38. *Sea $\{(X^n, Y^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos con trayectorias en $D_{M_{k\times m}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^m}[0,\infty)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, (X^n, Y^n) es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}^n_t)_{t\ge0}$ y Y_n es una semimartingala respecto de $(\mathcal{F}^n_t)_{t\ge0}$. Sea $\delta \in [0,\infty]$. Considere*

$$Y_{\delta,n} = Y^n - J_\delta(Y^n).$$

$Y^{\delta,n}$ es una semimartingala y sea $Y^{\delta,n} = M^{\delta,n} + A^{\delta,n}$ una descomposición de $Y^{\delta,n}$ como suma de una martingala local y un proceso adaptado de variación finita (ver definición 3.116). Suponga que esta descomposición cumple la siguiente condición:

(C1) Para cada $\alpha > 0$ existe una sucesión $\{\tau^\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que τ^δ_n es tiempo de paro respecto de $(\mathcal{F}^n_t)_{t\ge0}$, $\mathbb{P}_n[\tau^\alpha_n \le \alpha] \le 1/\alpha$ y para cada $t \ge 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left[T_{t\wedge\tau^\alpha_n}(A^{\delta,n})\right] < \infty,$$

y para cada $i \le m$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left[[(M^{\delta,n})^i, (M^{\delta,n})^i]_{t\wedge\tau^\alpha_n}\right] < \infty$$

donde $(M^{\delta,n})^i$ es la i-ésima entrada $M^{\delta,n}$. Si $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$, entonces Y es una semimartingala respecto de una filtración en la cual X y Y son adaptados y además $(X_n, Y_n, \int X_n\, dY_n) \Rightarrow (X, Y, \int X\, dY)$.

Observación 4.39. Si $\delta = \infty$ tenemos que $J_\delta \equiv 0$ y $Y^{\delta,n} = Y^n$. Sea $Y^n = M^n + A^n$ una descomposición de Y^n como suma de una martingala local y un proceso de variación finita, si esta descomposición cumple la condición:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left[T_t(A^n)\right] < \infty,$$

y para cada $i \le m$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left[[M^{i,n}, M^{i,n}]_t\right] < \infty,$$

donde $M^{i,n}$ es la i-ésima entrada M^n.

entonces tenemos que $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple la condición (C1) para $\delta = \infty$ y para cualquier $\alpha > 0$, pues podemos considerar los tiempos de paro constantes $\tau_n^\delta = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $T_1[0,\infty)$ el conjunto de funciones crecientes y suprayectivas λ tales que $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(t+h) - \lambda(t) \leq h$, para todo $t, h \geq 0$. Consideremos $F, F_n : D_{\mathbb{R}^k}[0,\infty) \to D_{M_{k\times m}(\mathbb{R})}[0,\infty), n \in \mathbb{N}$, funciones medibles con la siguiente propiedad:

Suponga que existen funciones $G, G_n : D_{\mathbb{R}^k}[0,\infty) \times T_1[0,\infty) \to D_{M_{k\times m}(\mathbb{R})}[0,\infty)$ tales que

$$F_n(\alpha) \circ \lambda = G_n(\alpha \circ \lambda, \lambda) \tag{4.11}$$

y

$$F(\alpha) \circ \lambda = G(\alpha \circ \lambda, \lambda), \tag{4.12}$$

para cualquier $(\alpha, \lambda) \in D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty) \times T_1[0,\infty)$.

Consideraremos las siguientes condiciones sobre estas funciones:

(C2.1) Para todo $K \subset D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty) \times T_1[0,\infty)$ compacto y $t > 0$ se cumple

$$\sup_{(x,\lambda)\in K} \sup_{s\leq t} \|G_n(x,\lambda,s) - G(x,\lambda,s)\| \to 0.$$

(C2.2) Si $\{(\alpha_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_{\mathbb{R}^m}[0,\infty) \times T_1[0,\infty)$ es tal que

$$\sup_{s\leq t} \|\alpha_n(s) - \alpha(s)\| \to 0$$

y

$$\sup_{s\leq t} \|\lambda_n(s) - \lambda(s)\| \to 0,$$

para cada $t > 0$. Entonces

$$\sup_{s\leq t} \|G(\alpha_n, \lambda_n, s) - \lambda(x, \lambda, s)\| \to 0.$$

Definición 4.40. Sea B un proceso estocástico con trayectorias càdlàg, Y una semimartingala y $F : D_{\mathbb{R}^k}[0,\infty) \to D_{M_{k\times m}(\mathbb{R})}[0,\infty)$ dada como en (4.12). Diremos que la ecuación

$$X_t = S_t + \int_0^t F(X_s, s-)\, dY_s. \tag{4.13}$$

tiene una solución débil si existen $\tilde{X}$, $\tilde{S}$ procesos adaptados con trayectorias càdlàg y $\tilde{Y}$ una semimartingala (definidos sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{F}_t)_{t\geq 0}, \tilde{P})$) tales que (S, Y) y $(\tilde{S}, \tilde{Y})$ son iguales en ley y $\tilde{X}, \tilde{S}, \tilde{Y}$ cumplen (4.13). Diremos que (4.13) cumple unicidad débil si dadas X y $\tilde{X}$ dos soluciones débiles, se tiene que X y $\tilde{X}$ son iguales en ley.

Teorema 4.41. *Sean $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de procesos estocásticos con trayectorias en $D_{\mathbb{R}^k}[0,\infty)$ y $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de semimartingalas y para cada $n \in \mathbb{N}$, X^n, Y^n y S^n se encuentran definidos sobre el mismo espacio de probabilidad y son adaptados respecto de la misma filtración. Suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$, estos procesos satisfacen:*

$$X_t^n = S_t^n + \int_0^t F_n(X_s^n, s-)\, dY_s,$$

y además, $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satiface la condición (C1) y las funciones F y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están representadas en terminos de G y $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, las cuales satisfacen las condiciones (C2.1) y (C2.2).

Si $(S^n, Y^n) \Rightarrow (S, Y)$ y si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$X_t = U_t + \int_0^t F(X_s, s-)\, dY_s,$$

y ésta cumple unicidad en ley, entonces $(S^n, Y^n, X^n) \Rightarrow (S, Y, X)$.

Observación 4.42. El caso de interés en este trabajo será el siguiente: consideremos $F : \mathbb{R}^k \to M_{k\times m}(\mathbb{R})$ continua y sea $\tilde{F} : D_{\mathbb{R}^k}[0,\infty) \to D_{M_{k\times m}(\mathbb{R})}[0,\infty)$ la función definida por

$$\tilde{F}(\alpha, t) := F(\alpha(t)).$$

Si consideramos $G(\alpha, \lambda) := \tilde{F}(\alpha)$ para cada $(\alpha, \lambda) \in D_{\mathbb{R}^k}[0,\infty) \times T_1[0,\infty)$, de manera inmediata G y F cumplen (4.12). Por otra parte, si consideramos $G_n = G$ y $F_n = \tilde{F}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera inmediata se cumple la condición (C2.1) y bajo las condiciones anteriores, podemos verificar (C2.2) mediante la siguiente condición:

(C2') Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_{\mathbb{R}^d}[0,\infty)$ es tal que

$$\sup_{s\leq t} \|\alpha_n(s) - \alpha(s)\| \to 0.$$

para cada $t > 0$. Entonces

$$\sup_{s\leq t} \|F(\alpha_n(s)) - F(\alpha(s))\| \to 0.$$

5. Descripción de las trayectorias cuánticas discretas

En esta sección se describirá el modelo de las trayectorias en tiempo discreto. El sistema cuántico que nos interesa medir está representado por un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$ acoplado a una cadena de sistemas idénticos e independientes. Cada copia de estos sistemas se encuentra representada por un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$. A lo largo de este texto consideraremos que $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ son espacios de dimensión finita.

A cada espacio se le asociará un operador positivo de clase traza, con traza igual a 1. A un operador con éstas características se le conoce como estado u operador de densidad y al conjunto de operadores de densidad definidos sobre $\mathcal{H}$ lo denotaremos por $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Cada copia de $\mathcal{H}$ interactúa con $\mathcal{H}_0$ una tras otra en intervalos de tiempo de longitud h. La información de la evolución del sistema $\mathcal{H}_0$ se obtiene al realizar una medición sobre el sistema $\mathcal{H}$ en cada interacción. En la primera interacción, el sistema está descrito por el producto tensorial $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ y la interacción está descrita por un Hamiltoniano H_{tot}, que es un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$. Su forma general es

$$H_{tot} = H_0 \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{H}_0} \otimes H + \lambda H_{int},$$

donde H_0 y H son operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$, respectivamente, H_{int} es un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ y $\lambda > 0$. A H_0 y H se les conoce como Hamiltonianos libres, al operador H_{int}, como el Hamiltoniano de interacción y a λ, como la constante de acoplamiento.

El operador

$$U = e^{ihH_{tot}}$$

describe la interacción de la siguiente manera: Si ρ es un estado en el producto tensorial $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, en la representación de Schrödinger, la evolución está dada por

$$\rho \mapsto U\,\rho\,U^*.$$

Después de la primera interacción, se repite la interacción pero esta vez acoplando una nueva copia de $\mathcal{H}$ al sistema $\mathcal{H}_0$. Se considera que esta nueva copia se encuentra aislada durante la primera interacción y que la primera copia se encuentra aislada durante el resto del experimento. Este procedimiento se repite de manera sucesiva.

Describiremos a las interacciones sucesivas por medio del espacio de Hilbert

$$\Gamma = \mathcal{H}_0 \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}.$$

Para definir el producto tensorial $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$, consideraremos una base ortonormal de $\mathcal{H}$ fija $\beta = \{x_0, \cdots, x_{q-1}\}$. Consideraremos que el producto tensorial se encuentra basado en x_0 y por tanto,

$$\mathcal{B} = \left\{ x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_0 \otimes \cdots \,|\, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \{0, \cdots, q-1\},\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

forma una base ortonormal de $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$.

Por otra parte, puesto que $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$ es un espacio de dimensión finita, el operador unitario U se encuentra dado por

$$U = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes B_i, \tag{5.1}$$

donde A_i y B_i son operadores sobre $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$, respectivamente.

Para describir las interacciones sucesivas en el espacio Γ, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideraremos el operador $U_n \in \mathcal{B}(\Gamma)$ definido por la igualdad

$$U_n = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes \bigotimes_{j=1}^{n-1} I_{\mathcal{H}} \otimes B_i \otimes \bigotimes_{j \geq n+1} I_{\mathcal{H}}. \tag{5.2}$$

U_n es el operador que actúa como U sobre $\mathcal{H}_0$ y la n-ésima copia de $\mathcal{H}$ y sobre las demás copias de $\mathcal{H}$, actúa como la identidad.

Proposición 5.1. *El operador U_n es unitario, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y $\beta_0 = \{u_1, \dots u_q\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_0$. Tenemos que el conjunto

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{u \otimes v \,|\, u \in \beta_0,\, v \in \mathcal{B}\} \tag{5.3}$$

forma una base ortonormal de Γ. Ahora, sean $e, e' \in \mathcal{B}$ dados por

$$\begin{aligned} e &= u \otimes x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_0 \otimes \cdots, \\ e' &= v \otimes x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_{k'}} \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_0 \otimes \cdots. \end{aligned}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $k = k'$ y $n \leq k$. Entonces, de la ecuación (5.2) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle U_n e, U_n e' \rangle_\Gamma &= \sum_{r=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \langle C_{n,r} e, C_{n,l} e' \rangle_\Gamma \\ &= \sum_{r=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \langle A_r u, A_l v \rangle_{\mathcal{H}_0} \langle B_r x_{i_n}, B_l x_{j_n} \rangle_{\mathcal{H}} \prod_{a,b \neq n} \langle x_{i_a}, x_{j_b} \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \prod_{a,b \neq n} \delta_{i_a, j_b} \sum_{r=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \Big\langle A_r \otimes B_r (u \otimes x_{i_n}), A_l \otimes B_l (v \otimes x_{j_n}) \Big\rangle_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}} \\ &= \prod_{a,b \neq n} \delta_{i_a, j_b} \langle U(u \otimes x_{i_n}), U^*(v \otimes x_{j_n}) \rangle_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}} \\ &= \prod_{a,b \neq n} \delta_{i_a, j_b} \langle u \otimes x_{i_n}, v \otimes x_{j_n} \rangle_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}} \\ &= \delta_{u,v} \prod_{a,b=1}^{k} \delta_{i_a, j_b}, \end{aligned}$$

donde $C_{n,l} = A_l \otimes \bigotimes_{j=1}^{n-1} I \otimes B_l \otimes \bigotimes_{j \geq n} I$, $l \in \{1, \cdots, k\}$. De la igualdad anterior se sigue que

$$\langle U_n e, U_n^* e' \rangle_\Gamma = \langle e, e' \rangle_\Gamma = \begin{cases} 1 & e = e', \\ 0 & e \neq e' \end{cases}. \tag{5.4}$$

De la continuidad de U_n y del hecho de que $\tilde{\mathcal{B}}$ forma una base ortonormal de Γ, obtenemos que

$$\langle U_n^* U_n x, y \rangle_\Gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma,$$

para cualesquiera $x, y \in \Gamma$. Entonces $U_n^* U_n = I$ y de manera análoga, podemos concluir que $U_n U_n^* = I$. Por lo tanto, U_n es un operador unitario.

□

De manera similar a lo descrito anteriormente, si ρ es un estado en Γ, el efecto después de la n-ésima interacción sobre el sistema acoplado Γ se encuentra dado por

$$\rho \mapsto U_n \, \rho \, U_n,$$

Nótese que a diferencia de la descripción anterior, estamos considerando la interacción de $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_n$ inmersa en el sistema acoplado Γ. Luego, el resultado de las primeras n interacciones se encuentra descrito por el operador $V_n \in \mathcal{B}(\Gamma)$ definido por la fórmula recursiva:

$$\begin{cases} V_{n+1} = U_{n+1} V_n, \\ V_0 = I. \end{cases} \tag{5.5}$$

y el resultado de las primeras n mediciones se encuentra dado por

$$\rho \mapsto V_n \rho V_n.$$

Ahora veremos el principio de mediciones indirectas. Sea X un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$, a este operador le llamaremos observable. Consideremos su descomposición espectral,

$$\mathsf{X} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i,$$

donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ son los valores propios de X y P_i es la proyección asociada al valor propio λ_i, para cada $i \in \{1, \cdots, p\}$. Los valores que podemos medir a través del sistema cuántico son el espectro del observable X (en este caso, los valores propios de X) y el resultado de la medición es aleatorio; Si el estado de referencia antes de la medición es ρ la probabilidad de observar el valor λ_i se encuentra dada por

$$\mathbb{P}[Observar \ \lambda_i] = Tr\big(\rho P_i\big),$$

para cada $j \in \{1, \cdots, p\}$. Si se ha observado el valor λ_i, el nuevo estado de referencia se encuentra dado por

$$\rho = \frac{P_i \, \rho \, P_i}{Tr(\rho \, P_i)}.$$

Las mediciones cuánticas repetidas son una combinación de estos principios: antes de cada medición, el estado inicial se verá afectado por la interacción entre $\mathcal{H}_0$ y la copia de $\mathcal{H}$, y posteriormente la medición da lugar a una modificación aleatoria del sistema. Esto da lugar a una sucesión de operadores de densidad aleatorios, a esta sucesión le llamaremos trayectoria cuántica discreta. Veremos que esta trayectoria es un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad específico.

Consideraremos un estado inicial ρ sobre $\mathcal{H}_0$ y sobre cada copia de $\mathcal{H}$ consideraremos el estado inicial $|x_0\rangle\langle x_0|$. Luego, el estado inicial sobre Γ se encuentra dado por

$$\hat{\rho}_0 := \rho \otimes (|x_0\rangle\langle x_0| \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots).$$

Nótese que

$$|x_0\rangle\langle x_0| \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots \otimes |x_0\rangle\langle x_0| = | \otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0\rangle\langle \otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0|,$$

donde $\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0 = x_0 \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_0 \otimes \cdots$. Entonces tenemos que este operador es una proyección autoadjunta y por tanto, un operador positivo. De esto último obtenemos que $\hat{\rho}_0$ es positivo, pues es el producto tensorial de operadores positivos.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}_0) &= Tr(\rho_0) Tr\big(|\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0\rangle\langle\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0|\big) \\ &= Tr\big(|\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0\rangle\langle\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0|\big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Calculando la traza de este operador respecto de la base $\mathcal{B}$, se obtiene que

$$Tr\big(|\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0\rangle\langle\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0|\big) = \langle\otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0, \otimes_{n\in\mathbb{N}} x_0\rangle_\Gamma = 1.$$

De esto último y de (5.6) se sigue que $\hat{\rho}_0$ es un operador de densidad.

El espacio muestral que describirá estas interacciones será $\Omega^{\mathbb{N}}$, donde $\Omega = \{1, \cdots, p\}$. Ω corresponde al conjunto de índices de los eigenvalores del observable X y $\Omega^{\mathbb{N}}$ representa los posibles resultados de las mediciones en cada una de las interacciones. Equiparemos a este espacio con la σ-álgebra generada por los cilindros de $\Omega^{\mathbb{N}}$, es decir, por los conjuntos de la forma:

$$\Lambda_{i_1,\cdots,i_n} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \cdots, \omega_n = i_n\},$$

con $(i_1, \cdots, i_n) \in \Omega^n$. Denotaremos a dicha σ-álgebra por Σ.

Definición 5.2. Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador lineal $T^{(n)} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ por

$$T^{(n)} = I_{\mathcal{H}_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} I_{\mathcal{H}} \otimes T \otimes \bigotimes_{i\geq n+1} I_{\mathcal{H}}, \tag{5.7}$$

es decir, $T^{(n)}$ es el operador que actúa como T en la n-ésima copia de $\mathcal{H}$ y como la identidad en $\mathcal{H}_0$ y las demás copias de $\mathcal{H}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador

$$\mu_n := V_n \hat{\rho}_0 V_n^*.$$

De la proposición 2.7 se sigue que μ_n es un operador de densidad, pues V_n es un operador unitario.

Para cualquier $(i_1, \cdots, i_n) \in \Omega^n$, definimos el operador

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n) : &= (I \otimes P_{i_1} \otimes \cdots \otimes P_{i_n} \otimes I \otimes \cdots)\mu_n(I \otimes P_{i_1} \otimes \cdots \otimes P_{i_n} \otimes I \otimes \cdots) \\ &= P_{i_n}^{(n)} \cdots P_{i_1}^{(1)} \mu_n P_{i_1}^{(1)} \cdots P_{i_n}^{(n)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Notemos que cualquier operador de la forma VPV^* (con P un operador positivo) es un operador positivo. Notemos que $\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)$ es de esta forma si consideramos $V = P_{i_n}^{(n)} \cdots P_{i_1}^{(1)}$ y $P = \mu_n$, pues para todo $k \in \mathbb{N}$ y $j \in \Omega$, $P_j^{(k)}$ es un operador autoadjunto.

Por otra parte, tenemos que el operador U_n conmuta con el operador $P_i^{(m)}$ para cualesquiera $i \in \Omega$ y $m < n$. De esto se deduce que

$$\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_{n+1}) = P_{i_{n+1}}^{(n+1)} U_{n+1} \tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n) U_{n+1}^* P_{i_{n+1}}^{(n+1)}. \tag{5.9}$$

Este operador corresponde a la observación sucesiva de los eigenvalores $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_n}$ durante las primeras n mediciones. El siguiente teorema nos proporcionará la existencia de una medida de probabilidad definida sobre $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma)$ que permite describir las trayectorias cuánticas discretas.

Teorema 5.3. *Existe una única medida de probabilidad* $\mathbb{P}$ *definida sobre* $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma)$*, tal que para cada* $(i_1, \cdots, i_n) \in \Omega^n$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\big(\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}\big) = Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)\big). \tag{5.10}$$

Demostración. Considere la medida discreta sobre Ω^n, dada por

$$\{(i_1, \cdots, i_n)\} \mapsto Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)\big), \tag{5.11}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Veremos que esta familia de medidas (que dependen de n) satisfacen las condiciones del teorema de Kolmogorov.

Puesto que el operador dado por (5.8) es un operador positivo, de esto se sigue que

$$Tr(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)) \geq 0,$$

para cualesquiera $(i_1, \cdots, i_n) \in \Omega^n$ y $n \in \mathbb{N}$. Ahora, de la igualdad (5.9) y del hecho de que $\left(P_i^{(n)}\right)^2 = P_i^{(n)}$ para cualesquiera $i \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\begin{aligned} Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n, i_{n+1})\big) &= Tr\big(P_{i_{n+1}}^{(n+1)} U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)U_{n+1}^* P_{i_{n+1}}^{(n+1)}\big) \\ &= Tr\Big(U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)U_{n+1}^*\big(P_{i_{n+1}}^{(n+1)}\big)^2\Big) \\ &= Tr\big(U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)U_{n+1}^* P_{i_{n+1}}^{(n+1)}\big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

De esta última igualdad y de la proposición 2.7 obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i_{n+1}} Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n, i_{n+1})\big) &= Tr\Big(U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)U_{n+1}^*\big(\sum_{i_{n+1}} P_{i_{n+1}}^{(n+1)}\big)\Big) \\ &= Tr\big(U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)U_{n+1}^*\big) \\ &= Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)\big). \end{aligned} \tag{5.13}$$

De la igualdad (5.13) obtenemos dos resultados. En primer lugar, de manera recursiva obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i_1,\cdots,i_n} Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n)\big) &= \sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}} Tr\big(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_{n-1})\big) \\ &\ \vdots \\ &= \sum_i Tr\big(U_1\, \hat{\rho}_0\, U_1^* P_i^{(1)}\big) \\ &= Tr\big(U_1\, \hat{\rho}_0\, U_1^*\big) \\ &= Tr\big(\hat{\rho}_0\big) \\ &= 1, \end{aligned}$$

por tanto, las medidas discretas definidas por (5.11) son medidas de probabilidad. Por otra parte, la igualdad (5.13) demuestra que esta familia de medidas cumple la condición de consistencia del teorema de Kolmogorov, lo cual prueba la existencia y unicidad de la medida de probabilidad buscada.

□

La probabilidad dada por (5.10) corresponde a la probabilidad de observar los eigenvalores $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_n}$ de manera sucesiva, durante las primeras n mediciones.

Definición 5.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $\tilde{\rho}_n : \Omega^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{B}(\Gamma)$ por

$$\tilde{\rho}_n(\omega) := \begin{cases} \dfrac{\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)}{Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big)} & si \quad Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) \neq 0, \\ 0 & si \quad Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Para $n = 0$ se define $\tilde{\rho}_0(\omega) := \hat{\rho}_0$, para todo $\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}$.

Lema 5.5. *Si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son tales que $Tr(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1})) \neq 0$, se tiene que*

$$\tilde{\rho}_{n+1}(\omega) = \frac{P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}} U_{n+1} \tilde{\rho}_n(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}}{Tr\big(U_{n+1} \tilde{\rho}_n(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}\big)}.$$

Demostración. Sea $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$. De la igualdad (5.9) y de (5.14) se deduce que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) &= P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}} U_{n+1} \tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n) U^*_{n+1} P^{(n+1)} \\ &= Tr\big(\tilde{\mu}(w_1, \cdots, w_n)\big) P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}} U_{n+1} \tilde{\rho}_n(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

De la linealidad del operador traza y de la igualdad anterior se sigue que

$$\tilde{\rho}_{n+1}(\omega) = \frac{P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}} U_{n+1} \tilde{\rho}_n(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}}{Tr\big(P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}} U_{n+1} \tilde{\rho}_n(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}\big)}. \tag{5.16}$$

Por otra parte, se tiene que

$$Tr\big(P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}} U_{n+1} \tilde{\rho}_n(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}\big) = Tr\big(U_{n+1} \tilde{\rho}_k(\omega) U^*_{n+1} P^{(n+1)}_{\omega_{n+1}}\big). \tag{5.17}$$

Finalmente, el resultado se obtiene se obtiene al sustituir la igualdad (5.17) en (5.16).

□

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \tilde{\rho}_n(\omega) = 0\} = \bigcup \big\{\Lambda_{\omega_1, \cdots, \omega_n} \,|\, Tr(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)) = \mathbb{P}[\Lambda_{\omega_1, \cdots, \omega_n}] = 0\big\}.$$

Puesto que esta unión es finita, tenemos que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \tilde{\rho}_n(\omega) = 0\}) = 0$. Luego, tenemos que el conjunto

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \tilde{\rho}_n(\omega) = 0\} \tag{5.18}$$

tiene probabilidad cero, o dicho de otra manera, $\tilde{\rho}_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, casi seguramente.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos la siguiente variable aleatoria:

$$\rho_n(\omega) = Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}}(\tilde{\rho}_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega^{\mathbb{N}}.$$

Nótese que el proceso estocástico $(\rho_n)_{n \geq 0}$ toma valores en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$. Este proceso estocástico es de gran interés, pues representa la evolución del estado ρ sobre el sistema $\mathcal{H}_0$ después de cada interacción.

La siguiente proposición nos permite describir este proceso estocástico de manera recursiva y en términos del operador traza parcial sobre $\mathcal{H}$.

Proposición 5.6. *Para casi todo* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ *se tiene que*

$$\rho_{n+1}(\omega) = \frac{Tr_{\mathcal{H}}\big((I \otimes P_{w_{n+1}})U\,(\rho_n(\omega) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)\,U^*(I \otimes P_{w_{n+1}})\big)}{Tr\big(U\,(\rho_n(\omega) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)\,U^*(I \otimes P_{w_{n+1}})\big)}, \quad n \geq 0. \tag{5.19}$$

Demostración. Sea $(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) \in \Omega^{n+1}$. Definimos el operador $O(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}^{(n)})$ a partir de la siguiente fórmula recursiva:

$$O(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) = \big(I_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}^{(n)}} \otimes P_{\omega_{n+1}}\big)\tilde{U}_{n+1}\,\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)\,\tilde{U}^*_{n+1}\big(I_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}^{(n)}} \otimes P_{\omega_{n+1}}\big), \tag{5.20}$$

donde

$$\tilde{U}_{n+1} := \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes \bigotimes_{k=1}^{n} I_{\mathcal{H}} \otimes B_i, \tag{5.21}$$

y los operadores A_i, B_i cumplen la relación (5.1). Ahora, de la ecuación (5.9) podemos deducir lo siguiente:

$$\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n) = O(\omega_1, \cdots, \omega_n) \otimes \bigotimes_{k \geq n+1} |x_0\rangle\langle x_0|,$$

es decir, $O(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ corresponde a la parte de $\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ que actúa sobre $\mathcal{H}_0$ y las primeras n copias de $\mathcal{H}$.

Para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, tenemos

$$\begin{aligned} Tr\left(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big(T \otimes I_{\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}}\big)\right) &= Tr\Big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)(T \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}) \otimes \bigotimes_{k \geq n+1} |x_0\rangle\langle x_0|\Big) \\ &= Tr\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)(T \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}})\big)Tr\Big(\bigotimes_{k \geq n+1} |x_0\rangle\langle x_0|\Big) \\ &= Tr\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)(T \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}})\big). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}}\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) = Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big),$$

por lo cual, a partir de ahora trabajaremos con la traza parcial (respecto de $\mathcal{H}^{(n)}$) del operador $O(\omega_1, \cdots, \omega_n)$.

Por otra parte, de la igualdad (5.21) se sigue que

$$\begin{aligned} &O(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) = \\ &\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(A_l \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}\big)O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big(A_j^* \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}\big)\Big) \otimes \Big(P_{\omega_{n+1}} B_l |x_0\rangle\langle x_0| B_j^* P_{\omega_{n+1}}\Big). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Para obtener una expresión para el operador $Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big)$, calcularemos la traza parcial de cada uno de los términos de esta suma. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ y sean $l, j \in \{1, \cdots, k\}$, del teorema 2.20 tenemos que

$$\begin{aligned} &Tr\Big(\big(A_l \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}\big)O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big(A_j^* T \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}\big)\Big)Tr\Big(P_{\omega_{n+1}} B_l |x_0\rangle\langle x_0| B_j^* P_{\omega_{n+1}}\Big) = \\ &\quad Tr\Big(Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\Big(\big(A_l \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}\big)O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big(A_j^* T \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}}\big)\Big)\Big)Tr\Big(P_{\omega_{n+1}} B_l |x_0\rangle\langle x_0| B_j^* P_{\omega_{n+1}}\Big) = \\ &\quad Tr\Big(A_l\, Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big)A_j^* T\Big)Tr\Big(P_{\omega_{n+1}} B_l |x_0\rangle\langle x_0| B_j^* P_{\omega_{n+1}}\Big) = \\ &\quad Tr\Big(\big(A_l\, Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big)A_j^* T\big) \otimes \big(P_{\omega_{n+1}} B_l |x_0\rangle\langle x_0| B_j^* P_{\omega_{n+1}}\big)\Big) = \\ &\quad Tr\Big(\big(I \otimes P_{\omega_{n+1}}\big)\big(A_l \otimes B_l\big)\big(Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)\big(A_j^* \otimes B_j^*\big)\big(I \otimes P_{\omega_{n+1}}\big)\big(T \otimes I_{\mathcal{H}}\big)\Big). \end{aligned}$$

De ésta igualdad y del teorema 2.19 se obtiene la igualdad:

$$\begin{aligned}&Tr_{\mathcal{H}^{(n+1)}}\Big(\big((A_l \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}})O(\omega_1, \cdots, \omega_n)(A_j^* \otimes I_{\mathcal{H}^{(n)}})\big) \otimes \big(P_{\omega_{n+1}} B_l |x_0\rangle\langle x_0| B_j^* P_{\omega_{n+1}}\big)\Big) = \\ &Tr_{\mathcal{H}}\Big(\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\big(A_l \otimes B_l\big)\big(Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)\big(A_j^* \otimes B_j^*\big)\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\Big).\end{aligned} \tag{5.23}$$

Luego, de las ecuaciones (5.1), (5.22) y (5.23) obtenemos

$$\begin{aligned}Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}}\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1})\big) &= Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1})\big) \\ &= Tr_{\mathcal{H}}\Big(\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)U\big(Tr_{\mathcal{H}^{(n)}}\big(O(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\Big) \\ &= Tr_{\mathcal{H}}\Big(\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)U\big(Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}}\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\Big).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Ahora consideremos $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ tal que $Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big) > 0$. Multiplicando la igualdad (5.24) por el término $Tr\big(\tilde{\mu}(\omega_1, \cdots, \omega_n)\big)^{-1}$ y sustituyendo la relación (5.9) se sigue que

$$\begin{aligned}Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}}\big(P_j^{(n+1)} U_{n+1}\, \tilde{\rho}_n(\omega)\, U_{n+1}^* P_j^{(n+1)}\big) &= Tr_{\mathcal{H}}\Big(\big(I \otimes P_j\big)U\big(Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}}\big(\tilde{\rho}_n(\omega)\big) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_j\big)\Big) \\ &= Tr_{\mathcal{H}}\Big(\big(I \otimes P_j\big)U\big(\rho_n(\omega) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_j\big)\Big),\end{aligned} \tag{5.25}$$

para cualquier $j \in \Omega$.

Sea $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \setminus Z$ (donde Z se encuentra definido por (5.18)) y $n \geq 0$. De la igualdad (5.25) (considerando $j = \omega_{n+1}$) y del lema 5.5 se sigue que

$$\begin{aligned}\rho_{n+1}(\omega) &= Tr_{\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}}\big(\tilde{\rho}_{n+1}(\omega)\big) \\ &= \frac{Tr_{\mathcal{H}}\Big(\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)U\big(\rho_n(\omega) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\Big)}{Tr\big(\tilde{\rho}_n(\omega) U_{n+1}^* P_{\omega_{n+1}}^{(n+1)} U_{n+1}\big)}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Puesto que $Tr\big(\tilde{\rho}_{n+1}(\omega)\big) = Tr(\rho_{n+1}(\omega)) = 1$, de (5.26) se obtiene que

$$\begin{aligned}Tr\big(\tilde{\rho}_n(\omega) U_{n+1}^* P_{\omega_{n+1}}^{(n+1)} U_{n+1}\big) &= Tr\Big(\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)U\big(\rho_n(\omega) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\Big) \\ &= Tr\Big(U\big(\rho_n(\omega) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\big)U^*\big(I \otimes P_{\omega_n+1}\big)\Big).\end{aligned} \tag{5.27}$$

El resultado se obtiene al sustituir la ecuación (5.27) en (5.26).

□

5.1. Modelo de un sistema de dos niveles

Ahora veremos el caso específico $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Para cada $i \in \{0, 1\}$ definimos el operador lineal $\mathcal{L}_i : \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ por

$$\mathcal{L}_i(\rho) = Tr_{\mathcal{H}_0}\big((I \otimes P_i)U\,(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)\,U^*(I \otimes P_i)\big), \quad \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0).$$

Consideraremos la siguiente hipótesis sobre estos operadores: para cada $i \in \{0, 1\}$,

$$Tr\big(\mathcal{L}_i(\rho)\big) > 0 \tag{5.28}$$

para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. De ésta hipótesis y la proposición 5.6 tenemos que $(\rho_n)_{n\geq 0}$ se puede expresar de la siguiente manera

$$\rho_{n+1} = \frac{\mathcal{L}_0(\rho_n)}{Tr(\mathcal{L}_0(\rho_n))}\big(1 - \mathbb{1}_{A_{n+1}}\big) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_n)}{Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))}\mathbb{1}_{A_{n+1}}, \quad n \geq 0. \tag{5.29}$$

Dado $n \geq 0$, definimos $p_{n+1} := Tr(\mathcal{L}_0(\rho_n))$ y $q_{n+1} := Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))$. Nótese que p_{n+1} y q_{n+1} son variables aleatorias estrictamente positivas y además $p_{n+1}+q_{n+1} = 1$. Para cada $n \geq 1$ consideremos

$$A_n := \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}} \,|\, \omega_n = 1\}.$$

Nótese que el conjunto A_n corresponde al evento de observar el eigenvalor λ_1 en la n-ésima interacción.

Por último, definimos la siguiente variable aleatoria:

$$X_n := \frac{\mathbb{1}_{A_n} - q_n}{\sqrt{q_n p_n}}.$$

Nótese que $\mathbb{1}_{A_n} = \sqrt{q_n p_n} X_n + q_n$. Considerando esta expresión podemos reescribir (5.29) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\rho_{n+1} &= \frac{\mathcal{L}_0(\rho_n)}{p_{n+1}}\big(1 - \mathbb{1}_{A_{n+1}}\big) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_n)}{q_{n+1}}\mathbb{1}_{A_{n+1}} \\
&= \frac{\mathcal{L}_0(\rho_n)}{p_{n+1}}\big(1 - (\sqrt{q_{n+1}p_{n+1}}X_{n+1} + q_{n+1})\big) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_n)}{q_{n+1}}\big(\sqrt{q_{n+1}p_{n+1}}X_{n+1} + q_{n+1}\big) \\
&= \frac{\mathcal{L}_0(\rho_n)}{p_{n+1}}\big(- \sqrt{q_{n+1}p_{n+1}}X_{n+1} + p_{n+1})\big) + \frac{\mathcal{L}_1(\rho_n)}{q_{n+1}}\big(\sqrt{q_{n+1}p_{n+1}}X_n + q_{n+1}\big) \\
&= \rho_{n+1} = \mathcal{L}_0(\rho_n) + \mathcal{L}_1(\rho_n) + X_{n+1}\left(\sqrt{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_n) - \sqrt{\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_n)\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\rho_{n+1} = \mathcal{L}_0(\rho_n) + \mathcal{L}_1(\rho_n) + X_{n+1}\left(\sqrt{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}\mathcal{L}_1(\rho_n) - \sqrt{\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}}\mathcal{L}_0(\rho_n)\right), \quad n \geq 0. \tag{5.30}$$

Esta última expresión será de gran utilidad para estudiar la convergencia de las trayectorias discretas a la ecuación de Belavkin.

Veremos algunas propiedades del proceso $(X_n)_{n\geq 1}$. Dado $n \geq 1$, definimos $\pi_n : \Omega^{\mathbb{N}} \to \Omega$ por

$$\pi_n(\omega) = \omega_n.$$

π_n es la n-ésima proyección sobre $\Omega^{\mathbb{N}}$ y representa el índice del eigenvalor observado en la n-ésima medición. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtración definida de la siguiente manera: para $n = 0$, definimos $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega^N\}$ y para $n \geq 1$ definimos

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\{\pi_k : k \leq n\}).$$

Haremos un par de observaciones sobre ésta filtración.

Observación 5.7. Notemos que para cada $n \geq 1$. $\mathcal{F}_n$ es generada por la clase

$$\mathcal{C}_n = \{\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{k_i}^{-1}(\{j_i\}) \,:\, k_i \leq n, j_i \in \{0,1\} \text{ y } m \leq n\}, \tag{5.31}$$

y además $\mathcal{C}$ es un π-sistema (ver definición 3.10).

Observación 5.8.

a) Para cada $n \geq 1$, tenemos que ρ_n toma una cantidad a lo más finita de valores y la imagen inversa de cualquier boreliano de $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ bajo ρ_n es una unión finita de cilindros de la forma $\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$ o bien igual al vacío. Además notemos que

$$\Lambda_{i_1,\cdots,i_n} = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(\{i_j\}) \in \mathcal{F}_n.$$

Luego, tenemos que ρ_n es $\mathcal{F}_n$-medible.

b) De manera similar, tenemos que $p_n = Tr(\mathcal{L}_0(\rho_n))$ y $q_n = Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))$ son variables aleatorias $\mathcal{F}_n$-medibles.

Lema 5.9. *Para cada $n \geq 0$ tenemos la siguiente igualdad:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n] = Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big).$$

Demostración. Para demostrar el lema veremos que la variable aleatoria $Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))$ cumple las condición de la proposición 3.11. Sea $n = 0$, de la observación 3.9 inciso (a), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1} \,|\, \mathcal{F}_0] &= \mathbb{P}(\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_1 = 1\}) \\
&= Tr\big(P_1^{(1)} U_1 \hat{\rho}_0 U_1^* P_1^{(1)}\big) \\
&= Tr\big(I \otimes P_1 U \left(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|\right) U^* I \otimes P_1\big) \\
&= Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_0)\big),
\end{aligned}$$

donde $\hat{\rho}_0 = \rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \otimes \cdots$.

Sea $n \geq 1$ y $C \in \mathcal{C}_n$ (ver la igualdad (5.31)). Tenemos que

$$C = \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{k_i}^{-1}(\{j_i\}), \tag{5.32}$$

con $m \leq n$, $k_i \leq n$, $j_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$. Si $C \neq \emptyset$ tenemos que C se puede expresar como una unión finita y disjunta de cilindros de la forma $\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$:

$$C = \bigcup_{\substack{(i_1,\cdots,i_n) \\ k_i = j_i}} \Lambda_{i_1,\cdots,i_n}. \tag{5.33}$$

Luego, para calcular las integrales $\int \mathbb{1}_{A_{n+1}} \mathbb{1}_C \, d\mathbb{P}$ y $\int Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big) \mathbb{1}_C \, d\mathbb{P}$ para todo $C \in \mathcal{C}_n$ basta considerar la integral sobre los cilindros $\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$. Dado $\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$ tenemos que $A_{n+1} \cap \Lambda_{i_1,\cdots,i_n} = \Lambda_{i_1,\cdots,i_n,1}$, de esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{1}_{A_{n+1}} \mathbb{1}_{\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}} \, d\mathbb{P} &= \mathbb{P}(\Lambda_{i_1,\cdots,i_n,1}) \\
&= Tr(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n, 1)).
\end{aligned}$$

Luego, para C dado como en (5.33) tenemos que

$$\int \mathbb{1}_{A_{n+1}} \mathbb{1}_C \, d\mathbb{P} = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n) \\ k_i = j_i}} Tr(\tilde{\mu}(i_1, \cdots, i_n, 1)). \tag{5.34}$$

De igual manera calcularemos la integral

$$\int Tr(\mathcal{L}_1(\rho_n))\mathbb{1}_C \, d\mathbb{P}$$

considerando $C = \Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$. Sin pérdida de generalidad consideremos $\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$ tal que

$$\mathbb{P}(\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}) = Tr(\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n)) > 0.$$

Sea $\omega \in \Lambda_{i_1,\cdots,i_n}$, tenemos que

$$\tilde{\rho}_n(\omega) = \frac{\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n)}{Tr(\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n))}$$

y tomando traza en la igualdad (5.25) de la demostración de la proposición 5.6 tenemos que

$$\begin{aligned} Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n(\omega))\big) &= Tr\big(P_1^{n+1}U_{n+1}\tilde{\rho}_n(\omega)U_{n+1}^*P_1^{n+1}\big) \\ &= \frac{Tr\big(P_1^{n+1}U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n)U_{n+1}^*P_1^{n+1}\big)}{Tr\big(\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n)\big)}. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior y de la igualdad (5.9) tenemos que

$$\begin{aligned} \int Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big)\mathbb{1}_{\Lambda_{i_1,\cdots,i_n}} \, d\mathbb{P} &= Tr\big(P_1^{n+1}U_{n+1}\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n)U_{n+1}^*P_1^{n+1}\big) \\ &= Tr\big(\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n,1)\big). \end{aligned}$$

De esto obtenemos que $Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big) \in L^1(\Omega)$ ya que

$$\int Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big) \, d\mathbb{P} = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)} Tr\big(\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n,1)\big) < \infty.$$

Por otra parte, si C cumple (5.32) tenemos que

$$\int Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big)\mathbb{1}_C \, d\mathbb{P} = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n) \\ k_i=j_i}} Tr\big(\tilde{\mu}(i_1,\cdots,i_n,1)\big). \tag{5.35}$$

Notemos que de (5.34) y (5.35) tenemos que

$$\int Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big)\mathbb{1}_C \, d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_{A_{n+1}}\mathbb{1}_C \, d\mathbb{P},$$

para todo $C \in \mathcal{C}_n$. Por lo tanto, de la proposición 3.11 tenemos que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n] = Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big),$$

para todo $n \geq 1$.

□

Proposición 5.10. *Para cada $n \geq 0$, se cumplen las siguientes igualdades:*

a) $\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = 0$.

b) $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = 1$.

Demostración. Para $n = 0$, tenemos que $\rho_0(\omega) = \rho$, para todo $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, de esta igualdad y del lema 5.9 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1 \,|\, \mathcal{F}_0] &= \frac{1}{\sqrt{Tr(\mathcal{L}_1(\rho))Tr(\mathcal{L}_0(\rho))}}\big(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1} \,|\, \mathcal{F}_0] - Tr(\mathcal{L}_1(\rho))\big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para $n \geq 1$, notemos que $q_{n+1} = Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big)$ y $p_{n+1} = Tr\big(\mathcal{L}_0(\rho_n)\big)$ son $\mathcal{F}_n$-medibles y por lo tanto $\frac{1}{\sqrt{p_{n+1}q_{n+1}}}$ es $\mathcal{F}_n$-medible. De la proposición 3.13 y del lema 5.9 tenemos que

$$\begin{aligned}E[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[\frac{(\mathbb{1}_{A_{n+1}} - q_{n+1})}{\sqrt{p_{n+1}q_{n+1}}} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big]\\ &= \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}q_{n+1}}}\mathbb{E}\big[(\mathbb{1}_{A_{n+1}} - q_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\big]\\ &= \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}q_{n+1}}}\Big(\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\big] - q_{n+1}\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo cual demuestra el inciso a).

Ahora veamos b). Sea $n = 0$, de la igualdad

$$1 - Tr(\mathcal{L}_1(\rho)) = Tr(\mathcal{L}_0(\rho))$$

y del lema 5.9 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^2 \,|\, \mathcal{F}_0] &= \frac{1}{Tr(\mathcal{L}_1(\rho))Tr(\mathcal{L}_0(\rho))}\Big(\mathbb{E}\big[(\mathbb{1}_{A_1} - Tr(\mathcal{L}_1(\rho))^2 \,\big|\, \mathcal{F}_0\big]\Big)\\ &= \frac{1}{Tr(\mathcal{L}_1(\rho))Tr(\mathcal{L}_0(\rho))}\Big(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1} \,|\, \mathcal{F}_0] - 2Tr(\mathcal{L}_1(\rho))\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1} \,|\, \mathcal{F}_0] + Tr(\mathcal{L}_1(\rho))^2\Big)\\ &= \frac{1}{Tr(\mathcal{L}_1(\rho))Tr(\mathcal{L}_0(\rho))}\Big(Tr(\mathcal{L}_1(\rho)) - Tr(\mathcal{L}_1(\rho))^2\Big)\\ &= \frac{Tr(\mathcal{L}_1(\rho))\big(1 - Tr(\mathcal{L}_1(\rho))\big)}{Tr(\mathcal{L}_1(\rho))Tr(\mathcal{L}_0(\rho))}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Sea $n \geq 1$. Notemos que $\frac{1}{p_{n+1}q_{n+1}}$ es $\mathcal{F}_n$-medible y de la proposición 3.13 se sigue que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = \frac{1}{p_{n+1}q_{n+1}}\mathbb{E}\big[\big(\mathbb{1}_{A_{n+1}} - q_{n+1}\big)^2 \,|\, \mathcal{F}_n\big]. \tag{5.36}$$

Por otra parte, recordemos que

$$p_{n+1} + q_{n+1} = Tr\big(\mathcal{L}_0(\rho_n)\big) + Tr\big(\mathcal{L}_1(\rho_n)\big) = 1. \tag{5.37}$$

Desarrollando la expresión de la esperanza condicional de $\big(\mathbb{1}_{A_{n+1}} - q_{n+1}\big)^2$ dada $\mathcal{F}_n$, utilizando la proposición 3.13 en el término $q_{n+1}1_{A_{n+1}}$, y sustituyendo la igualdad del lema 5.9 y la igualdad (5.37) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{A_{n+1}} - q_{n+1})^2 \,|\, \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n] - 2\mathbb{E}[q_{n+1}\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n] + q_{n+1}^2\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n] - 2q_{n+1}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n] + q_{n+1}^2\\ &= q_{n+1} - q_{n+1}^2\\ &= q_{n+1}(1 - q_{n+1})\\ &= q_{n+1}p_{n+1}.\end{aligned} \tag{5.38}$$

De las igualdades (5.36) y (5.38) se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] &= \frac{1}{p_{n+1}q_{n+1}}\mathbb{E}\big[\big(\mathbb{1}_{A_{n+1}} - q_{n+1}\big)^2 \mid \mathcal{F}_n\big] \\ &= 1.\end{aligned}$$

Lo cual demuestra el inciso b).

□

6. Existencia y unicidad de la ecuación de Belavkin

En esta sección estudiaremos una ecuación diferencial estocástica que representa la evolución del sistema cuando se realizan mediciones de manera continua sobre este, para el caso de un sistema de dos niveles, es decir, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

La evolución del sistema cuando únicamente hay interacción entre este y un sistema externo, se describe por medio de un semigrupo de operadores definidos sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $(T_t)_{t\geq 0}$, que cumple las siguientes características:

1) $T_0 = I_{\mathcal{H}}$,
2) $Tr(T_t(B)) = Tr(B)$,
3) Para cada $t > 0$, T_t es un operador completamente positivo, es decir, el operador $T_t \otimes I_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)}$ es positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$ y
4) la función $t \mapsto T_t(B)$ es continua con la topología débil-*, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

En este caso, se dice que $(T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo cúantico dinámico. En el caso de dimensión finita se tiene que $T_t = e^{tL}$, y en [10] se demostró que $(T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo cúantico dinámico si y sólo si el generador infinitesimal L es de la siguiente forma:

$$L(M) = -i[H_0, M] + \sum_{i=1}^{k} \left(C_i M C_i^* - 1/2\{C_i^* C_i, M\}\right),$$

donde $k \in \mathbb{N}$, H_0 es autoadjunto y $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. A L se le conoce como el operador de Lindblad.

Las operaciones $[\cdot,\cdot]$ y $\{\cdot,\cdot\}$ denotan al conmutador y anticonmutador respectivamente, es decir, $[A, B] = AB - BA$ y $\{A, B\} = AB + BA$.

Dado un operador de densidad ρ, si consideramos la familia de operadores de densidad

$$\rho_t = T_t(\rho), \quad t \geq 0,$$

tenemos que $t \mapsto \rho_t$ es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho_t}{dt} = L(\rho_t), \\ \rho_0 = \rho. \end{cases}$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación maestra de Lindblad.

El objetivo de esta sección es demostrar la existencia y unicidad de una versión estocástica de esta ecuación para un sistema de dos niveles, esta ecuación diferencial estocástica corresponde al experimento de detección homodina (la descripción de este experimiento se puede consultar en la referencia [14]). Identificaremos el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ con $M_2(\mathbb{C})$, donde $M_2(\mathbb{C})$ denota a las matrices de 2×2 con entradas en los complejos. Estudiaremos la siguiente ecuación diferencial estocástica con valores en $M_2(\mathbb{C})$:

$$d\rho_t = L(\rho_t)\, dt + (C\rho_t + \rho_t C^* - Tr(C\rho_t + \rho_t C^*)\rho_t)\; dW_t, \tag{6.1}$$

con condición inicial $\rho_0 = \rho$, donde $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Expresado en forma integral, buscamos la solución de la ecuación

$$\rho_t = \rho + \int_0^t L(\rho_s)\, ds + \int_0^t (C\rho_s + \rho_s C^* - Tr(C\rho_s + \rho_s C^*)\rho_s)\; dW_s. \tag{6.2}$$

Considerando que la igualdad se cumple entrada por entrada y para la parte real e imaginaria de cada entrada, es decir,

$$
\begin{aligned}
(\rho_t)_{i,j} = \rho_{i,j} &+ \int_0^t Re(L(\rho_s)_{i,j})\, ds + \int_0^t Re((C\rho_s + \rho_s C^* - Tr(C\rho_s + \rho_s C^*)\rho_s)_{i,j})\, dW_s \\
&+ i\int_0^t Im(L(\rho_s)_{i,j})\, ds + i\int_0^t Im((C\rho_s + \rho_s C^* - Tr(C\rho_s + \rho_s C^*)\rho_s)_{i,j})\, dW_s.
\end{aligned}
$$

El operador de Lindblad $L : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ que consideraremos es el siguiente:

$$
L(M) := -i[H_0, M] - \frac{1}{2}\{C^*C, M\} + CMC^* \tag{6.3}
$$

donde $C \in M_2(\mathbb{C})$ y H_0 es autoadjunto. A la ecuación diferencial estocástica (6.1) se le conoce como la ecuación de Belavkin. Consideraremos que $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano unidimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y adaptado respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ admisible, completa y continua por la derecha. Además de probar existencia fuerte (ver definición 3.106) y unicidad trayectorial (ver definición 3.107) de esta ecuación diferencial estocástica, veremos que $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, para todo $t \geq 0$. Este resultado es consistente con lo que hemos visto hasta el momento; si buscamos aproximar un proceso en tiempo continuo por procesos estocásticos con valores en $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, se esperaría que este también tuviese valores en $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Notemos que la función $\widehat{R} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ definida por

$$
\widehat{R}(M) := CM + MC^* - Tr(CM + C^*M)M,
$$

no es Lipschitz, por lo que no podremos aplicar directamente los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales estocásticas, sin embargo, podremos aplicar estos teoremas a una "extensión" de esta ecuación a todo $M_2(\mathbb{C})$. Parte de las demostraciones de esta sección están basadas en la referencia [3].

Definimos las funciones $\widehat{C}, \widehat{O} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ y $\widehat{A} : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ por medio de las igualdades

$$
\begin{aligned}
\widehat{C}(M) &:= CM + MC^*, \\
\widehat{A}(M) &:= \begin{cases} \frac{Tr(\widehat{C}(M))}{\|M\|_1} & M \neq 0, \\ 0 & M = 0, \end{cases} \\
\widehat{O}(M) &:= \widehat{C}(M) - \widehat{A}(M)M,
\end{aligned}
$$

donde $\|\cdot\|_1$ denota a la norma de traza. Veremos algunas propiedades de estas funciones. Primero, si $M \neq 0$ entonces

$$
Tr(\widehat{O}(M)) = Tr(\widehat{C}(M))\left(1 - \frac{Tr(M)}{\|M\|_1}\right).
$$

Si M es un operador positivo tenemos $Tr(M) = \|M\|_1$ y por tanto,

$$
Tr(\widehat{O}(M)) = 0. \tag{6.4}
$$

Por otra parte, si $Tr(M) = 1$, se tiene que

$$
\widehat{O}(M) = \widehat{C}(M) - Tr(\widehat{C}(M))M. \tag{6.5}
$$

La ecuación diferencial estocástica que estudiaremos primero es la siguiente:

$$
dX_t = L(X_t)\, dt + \widehat{O}(X_t)\, dW_t
$$

con condición inicial $X_0 = M_0 \in M_2(\mathbb{C})$.

6.1. Estimaciones sobre los coeficientes L y $\widehat{O}$

Para ver las siguientes propiedades será útil considerar distintas normas sobre $M_n(\mathbb{C})$. Consideraremos la norma de operador,

$$\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|=1} \|Mx\|$$

y la norma de Hilbert Schmidt, la cual es inducida por el producto interno $Tr(M^*N)$. Esta última es la norma que usaremos para probar los teoremas de existencia y unicidad. Nótese que para el caso de operadores en dimensión finita, estas normas son equivalentes y más aún, tenemos que

$$\|M\| \leq \|M\|_2 \leq n\|M\|, \tag{6.6}$$

la demostración de estas desigualdades se puede consultar en [4], capítulo IV, sección IV.2.

Por otra parte, tenemos que $\|M\|_1 \leq \|M\|_2$, para cualquier $M \in M_n(\mathbb{C})$.

Lema 6.1. *Para $L, \widehat{C}, \widehat{O}$ y $\widehat{A}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $|\widehat{A}(M)| \leq 2\|\widehat{C}\|_2$, *para todo* $M \in M_2(\mathbb{C})$,

(b) $\|L(M)\| \leq \big(2\|H_0\| + \|C^*C\| + \|C\|\|C^*\|\big)\|M\|$, *para cualquier* $M \in M_2(\mathbb{C})$.

(c) $\|\widehat{C}(M)\|_2 \leq 4\|C\|_2\|M\|_2$, *para cualquier* $M \in M_2(\mathbb{C})$.

(d) $\|\widehat{O}(M) - \widehat{O}(N)\|_2 \leq 10\|C\|_2\|M-N\|_2$, *para cualesquiera* $M, N \in M_2(\mathbb{C})$.

En particular, (d) demuestra que $\widehat{O}$ son Lipschitz y, (b) y (c) demuestran que L y $\widehat{C}$ son Lipschitz pues son lineales.

Demostración. Primero demostraremos (a). Sea $M \neq 0$, de las observaciones anteriores y de la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |\widehat{A}(M)| &\leq \|M\|_1^{-1} |Tr\left((C^* + C)M\right)| \\ &\leq (\|C\|_2 + \|C^*\|_2)\frac{\|M\|_2}{\|M\|_1} \\ &\leq 2\|C\|_2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Nótese que si $M = 0$ la desigualdad se cumple de manera trivial, pues en este caso $\widehat{A}(M) = 0$. Esto demuestra el inciso (a). Demostraremos que L cumple la condición de Lipschitz con la norma de operador y en consecuencia, también con la norma de Hilbert Schmidt. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|L(M)\| &\leq \| - i[H_0, M] - \frac{1}{2}\{CC^*, M\} + CMC^*\| \\ &\leq \| - iH_0M + iH_0M - \frac{1}{2}CC^*M - \frac{1}{2}MCC^* + CMC^*\| \\ &\leq \big(2\|H_0\| + \|C^*C\| + \|C\|\|C^*\|\big)\|M\|. \end{aligned}$$

Esto demuestra el inciso (b) y el hecho de que L es Lipschitz, pues es un operador lineal. Para $\widehat{C}$ tenemos que de la desigualdad (6.6) y de las propiedades de la norma de operador, se sigue que

$$\begin{aligned} \|\widehat{C}(M)\|_2 &\leq 2\|\widehat{C}(M)\| \\ &\leq 2\big(\|C^*\| + \|C\|\big)\|M\| \\ &\leq 2\big(\|C^*\| + \|C\|\big)\|M\|_2 \\ &\leq 4\|C\|_2\|M\|_2. \end{aligned}$$

Esto demuestra el inciso (c). Puesto que $\widehat{C}$ es lineal, de esto último se sigue que esta es Lispchitz.

Para demostrar la condición sobre $\widehat{O}$ primero consideremos $N, M \neq 0$. De la desigualdad (c) y las propiedades de norma se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\widehat{O}(M) - \widehat{O}(N)\|_2 &\leq \|\widehat{C}(M-N)\|_2 + \|\widehat{A}(M)M - \widehat{A}(N)N\|_2 \\ &\leq 4\|C\|_2\|N-M\|_2 + \|\widehat{A}(M)M - \widehat{A}(N)N\|_2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned} \widehat{A}(M)M - \widehat{A}(N)N &= \frac{Tr(\widehat{C}(M-N))}{\|M\|_1}M + \frac{Tr(\widehat{C}(N))}{\|N\|_1}\left(\left(1 - \frac{\|N\|_1}{\|M\|_1}\right)M - (M-N)\right) \\ &= \frac{Tr(\widehat{C}(M-N))}{\|M\|_1}M + \widehat{A}(N)\left(\frac{\|M\|_1 - \|N\|_1}{\|M\|_1}M - (M-N)\right). \end{aligned} \tag{6.9}$$

De la desigualdad de Cauchy Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|Tr(\widehat{C}(M-N))|}{\|M\|_1}\|M\|_2 &\leq \|C + C^*\|_2\|M-N\|_2\frac{\|M\|_2}{\|M\|_1} \\ &\leq 2\|C\|_2\|M-N\|_2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Además, de (a) se sigue que

$$\begin{aligned} \left|\widehat{A}(N)\right| \left\|\left(\frac{\|M\|_1 - \|N\|_1}{\|M\|_1}\right)M - (M-N)\right\|_2 &\leq 2\|C\|_2\big|\|M\|_1 - \|N\|_1\big| + 2\|C\|_2\|M-N\|_2 \\ &\leq 2\|C\|_2\|\|M-N\|_1 + 2\|C\|_2\|\|M-N\|_1 \\ &\leq 4\|C\|_2\|\|M-N\|_2. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Luego, de las desigualdades (6.10) y (6.11), y la igualdad (6.9) se sigue que

$$\|\widehat{A}(M)M - \widehat{A}(N)N\|_2 \leq 6\|C\|_2\|\|M-N\|_2.$$

De esta desigualdad y de (6.8) obtenemos la desigualdad buscada:

$$\|\widehat{O}(M) - \widehat{O}(N)\|_2 \leq 10\|C\|_2\|\|M-N\|_2.$$

Ahora, notemos que si $M \neq 0$ y $N = 0$, del apartado (a) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{O}(M) - \widehat{O}(N)\|_2 &= \|\widehat{O}(M)\|_2 \\ &\leq 6\|C\|_2\|M\|_2. \end{aligned}$$

En ambos casos se cumple la desiguadad buscada y podemos concluir la desigualdad (d) y que $\widehat{O}$ es Lipschitz.

□

6.2. Demostración de existencia y unicidad

Nota 6.2. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diremos que X_t cumple un propiedad P, para todo $t \geq 0$ casi seguramente (o c.s.), si para ω fuera de un conjunto de medida cero se tiene que $X_t(\omega)$ cumple la propiedad P, para todo $t \geq 0$.

Primero estudiaremos existencia y unicidad de la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = L(X_t)\,dt + \widehat{O}(X_t)\,dW_t \tag{6.12}$$

con condición inicial $X_0 = M_0 \in M_2(\mathbb{C})$. Consideraremos la norma de Hilbert-Schmidt $\|\cdot\|_2$ sobre $M^2(\mathbb{C})$ para aplicar los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Proposición 6.3. *Existe $(X_t)_{t\geq 0}$, una solución fuerte a la ecuación diferencial estocástica (6.12), esta solución cumple unicidad trayectorial y además $X_t \in L^2(\Omega)$, para cada $t \geq 0$. Si la condición inicial M_0 es autoadjunto, X_t es autoadjunto, para todo $t \geq 0$ c.s.*

Demostración. De los incisos (c) y (d) de la proposición 6.1 obtenemos que $\widehat{O}$ y L son Lipschitz y por otra parte, que

$$\|L(M)\|_2^2 + \|\widehat{O}(M)\|_2^2 \leq K^2(1 + \|M\|_2^2),$$

donde $K = \text{máx}\{10\|C\|_2, 2\|H_0\| + \|CC^*\| + \|C\|\|C^*\|\}$. Es decir, los coeficientes cumplen la condición de crecimiento lineal (ver definición 3.109). Luego, del teorema de existencia y unicidad (teorema 3.110) obtenemos que existe una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (6.12) y esta cumple unicidad trayectorial. Además, para cada $T > 0$ existe una constance C_T tal que

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq T} \|X_s\|_2^2] \leq C_T(1 + \|M_0\|_2^2),$$

en particular, tenemos que $\mathbb{E}[\|X_t\|_2^2] < \infty$ para todo $t \geq 0$. Luego, $X_t \in L^2(\Omega)$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, notemos que $\widehat{C}(M)^* = \widehat{C}(M^*)$ y que $\|M\|_1 = \|M^*\|_1$, luego, si $M \neq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
O(M)^* &= \widehat{C}(M)^* - \frac{\overline{Tr(\widehat{C}(M))}}{\|M\|_1} M^* \\
&= \widehat{C}(M^*) - \frac{Tr(\widehat{C}(M^*))}{\|M^*\|_1} M^* \\
&= O(M^*).
\end{aligned}$$

De igual manera se tiene que $L(M)^* = L(M^*)$.

Si M_0 es autoadjunto, de las observaciones anteriores podemos concluir que el proceso $(X_t^*)_{t\geq 0}$ satisface la ecuación diferencial estocástica (6.12) con condición inicial $X_0^* = M_0^* = M_0$. Lo cual demuestra que $(X_t^*)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ son indistinguibles, es decir, $X_t^* = X_t$, para todo $t \geq 0$, casi seguramente. Por lo tanto, X_t es autoadjunto, para todo $t \geq 0$ casi seguramente.

□

Otra propiedad importante de esta ecuación es que su solución toma valores en los operadores positivos siempre que la condición inicial sea un operador positivo. Para demostrar dicho resultado, veremos algunas proposiciones auxiliares.

Proposición 6.4. *Sea $M_0 \in M_2(\mathbb{C})$ autoadjunto y $(X_t)_{t\geq 0}$ la solución de la ecuación (6.12) con condición inicial M_0. Definimos los procesos estocásticos $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ y $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ por*

$$Y_t := exp\left(-\int_0^t \widehat{A}(X_s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \widehat{A}^2(X_s)\,ds\right).$$

y $Z_t := Y_t^{-1} X_t$. Entonces:

a) Y es una martingala con esperanza igual a 1.

b) Z satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dZ_t = \left[L(Z_t) + \widehat{A}(X_t)\widehat{C}(Z_t)\right]\, dt + \widehat{C}(Z_t)\, dW_t.$$

con condición inicial $Z_0 = M_0$.

Demostración. Sean $M_0 \in M_2(\mathbb{C})$ autoadjunto y $(X_t)_{t\geq 0}$ la solución de la ecuación (6.12) con condición inicial M_0. De la proposición anterior sabemos que $X_t = X_t^*$, para todo $t \geq 0$ casi seguramente. En este caso tenemos que $(\widehat{A}(X_t))_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}$, pues

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{A}(X_t)} &= \overline{\frac{Tr(\widehat{C}(X_t))}{\|X_t\|_1}} \\
&= \frac{Tr(\widehat{C}(X_t)^*)}{\|X_t\|_1} \\
&= \frac{Tr(\widehat{C}(X_t))}{\|X_t\|_1} \\
&= \widehat{A}(X_t),
\end{aligned}$$

siempre que $X_t \neq 0$, de otra forma, esta igualdad se cumple de manera trivial. Por otra parte, de la proposición 6.1 inciso (a) tenemos que

$$\int_0^t \widehat{A}^2(X_s)\, ds \leq 4\|C\|_2^2 t, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.13}$$

Luego, el proceso $(A(X_t))_{t\geq 0} \in L^2_{loc}(W)$ (ver la observación 3.105) y por lo tanto, del teorema 3.88 se sigue que el proceso estocástico $(M_t)_{t\geq 0}$ definido por

$$M_t := -\int_0^t A(X_s)\, dW_s,$$

es una martingala local y además, de la igualdad (3.21) de la observación 3.95 y de la igualdad $\langle W, W\rangle_t = t$ (igualdad 3.32) se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle M, M\rangle_t &= \int_0^t A^2(X_s)\, d\langle W, W\rangle_s \\
&= \int_0^t A^2(X_s)\, ds.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

De esto último y del teorema 3.100 sigue que

$$Y_t = exp\left(-\int_0^t \widehat{A}(X_s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \widehat{A}^2(X_s)\, ds\right).$$

es la exponencial de Dooléans-Dade $\mathcal{E}(M)$ (ver definición 3.101). Luego, del teorema 3.100 y de la observación 3.95 inciso a) tenemos que:

$$\begin{aligned}
Y_t &= 1 + \int_0^t Y_s\, dM_s, \\
&= 1 - \int_0^t Y_s A(X_s)\, dW_s.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Por otra parte, de la desigualdad (6.13) se tiene que

$$\mathbb{E}\Big[exp\Big(\int_0^t \widehat{A}^2(X_s)ds\Big)\Big] \leq \exp(4\|C\|_2^2 t) < \infty,$$

para todo $t \geq 0$, y por tanto, de la proposición 3.112 se tiene que Y es una martingala real. Luego, tenemos que $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_0] = 1$.

Ahora demostraremos b). Utilizando la fórmula de integración por partes (proposición 3.99) y la observación 3.95 inciso a), tenemos que

$$\begin{aligned} Z_t &= Y_0^{-1} M_0 + \int_0^t Y_s^{-1} dX_s + \int_0^t X_s dY_s^{-1} + \langle Y^{-1}, X\rangle_t \\ &= M_0 + \int_0^t Y_s^{-1} L(X_s)\, ds + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{O}(X_s)\, dW_s + \int_0^t X_s dY_s^{-1} + \langle Y^{-1}, X\rangle_t \\ &= M_0 + \int_0^t L(Z_s)\, ds + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{O}(X_s)\, dW_s + \int_0^t X_s dY_s^{-1} + d\langle Y^{-1}, X\rangle_t. \end{aligned} \tag{6.16}$$

En la ecuación anterior, $\langle Y^{-1}, X\rangle_t$ denota a la matriz con entradas

$$(\langle Y^{-1}, X\rangle_t)_{i,j} := \langle Y^{-1}, X^{i,j}\rangle_t,$$

es decir, sus entradas constan de las covariaciones entre el proceso $(Y_t^{-1})_{t\geq 0}$ y cada una de las entradas de $(X_t)_{t\geq 0}$. Notemos que $Y_t > 0$ para todo $t \geq 0$ y la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es de clase C^2 en $(0, \infty)$. Aplicando la fórmula de Itô (ver proposición 3.96 y observación 3.97) a Y y f obtenemos que:

$$Y_t^{-1} = 1 - \int_0^t Y_s^{-2} dY_s + \int_0^t Y_s^{-3}\, d\langle Y, Y\rangle_s, \tag{6.17}$$

Puesto que Y satisface la igualdad

$$Y_t = 1 - \int_0^t Y_s \widehat{A}(X_s) dW_s,$$

de la igualdad (3.20) tenemos que

$$\langle Y, Y\rangle_t = \int_0^t Y_s^2 \widehat{A}^2(X_s) ds,$$

De esto último, la igualdad (6.17) y de la observación 3.95 inciso a) se sigue que

$$Y_t^{-1} = 1 + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{A}(X_s) dW_s + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{A}^2(X_s)\, ds. \tag{6.18}$$

De (6.18), la igualdad

$$X_t = M_0 + \int_0^t L(M_s)\, ds + \int_0^t \widehat{O}(M_s)\, dW_s,$$

la igualdad (3.21) y de la observación 3.95 inciso c) se sigue que

$$\langle X, Y^{-1}\rangle_t = \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{A}(X_s)\widehat{O}(X_s)\, dt. \tag{6.19}$$

Sustituyendo las igualdades (6.18) y (6.19) en la ecuación (6.16) y utilizando el inciso a) de la observación 3.95 obtenemos la igualdad:

$$Z_t = M_0 + \int_0^t L(Z_s)\, ds + \int_0^t Y_s^{-1} \left[\widehat{O}(X_s) + \widehat{A}(X_s)X_s\right] dW_s + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{A}(X_s) \left[\widehat{O}(X_s) + \widehat{A}(X_s)X_s\right] ds.$$

Nótese que $\widehat{O}(M) + \widehat{A}(M)M = \widehat{C}(M)$ para todo $M \in M_2(\mathbb{C})$. Entonces

$$Z_t = M_0 + \int_0^t L(Z_s)\, ds + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{C}(X_s)\, dW_s + \int_0^t Y_s^{-1}\widehat{A}(X_s)\widehat{C}(X_s)\, ds.$$

Luego, como $(Y_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}$ y $\widehat{C}$ es un operador lineal, obtenemos que Z satisface la igualdad

$$\begin{aligned} Z_t &= M_0 + \int_0^t L(Z_s)\, dt + \int_0^t \widehat{C}(Z_s)\, dW_s + \int_0^t \widehat{A}(X_s)\widehat{C}(Z_s)\, ds \\ &= M_0 + \int_0^t \left[L(Z_s) + \widehat{A}(X_s)\widehat{C}(Z_s)\right] dt + \int_0^t \widehat{C}(Z_s)\, dW_s. \end{aligned}$$

□

Ahora veremos una ecuación diferencial estocástica lineal que cumple la propiedad buscada. Esta estará relacionada con la ecuación (6.12) por medio del teorema de Girsanov. Antes de estudiar la ecuación lineal, veremos el siguiente lema.

Lema 6.5. *Sean $(X_t)_{t\geq 0}$, $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dos procesos estocásticos con valores en $M_n(\mathbb{C})$ tales que*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t A_s\, ds + \int_0^t M_s\, dW_s, \\ \tilde{X}_t &= \tilde{X}_0 + \int_0^t B_s\, ds + \int_0^t N_s\, dW_s, \end{aligned}$$

donde $(A_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, (M_t)_{t\geq 0}$ y $(N_t)_{t\geq 0}$ son procesos estocásticos adaptados con trayectorias continuas con valores en $M_k(\mathbb{C})$ y $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano unidimensional. Entonces,

$$X_t\tilde{X}_t = X_0\tilde{X}_0 + \int_0^t X_sB_s + A_s\tilde{X}_s + N_sM_s\, ds + \int_0^t X_sN_s + M_s\tilde{X}_s\, dW_s.$$

Demostración. Demostraremos este lema verificando la igualdad entrada por entrada. Sean $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, de la fórmula de integración por partes (proposición 3.99), del inciso a) de la observación

3.95 y de la igualdad (3.22) se sigue que

$$
\begin{aligned}
(X_t\tilde{X}_t)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} X_t^{i,k}\tilde{X}_t^{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_0^{i,k}X_0^{k,j} + \int_0^t X_s^{i,k} d\tilde{X}_s^{k,j} + \int_0^t \tilde{X}_s^{k,j} dX_s^{i,k} + \langle X^{i,k}, \tilde{X}^{k,j}\rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(X_0^{i,k}\tilde{X}_0^{k,j} + \int_0^t \big(X_s^{i,k}B_s^{k,j} + A_s^{i,k}\tilde{X}_s^{k,j}\big)\, ds + \int_0^t \big(X_s^{i,k}N_s^{k,j} + M_s^{i,k}\tilde{X}_s^{k,j}\big) dW_s \\
&\qquad + \langle X^{i,k}, \tilde{X}^{k,j}\rangle_s \Big) \\
&= (X_0\tilde{X}_0)_{i,j} + \int_0^t \Big((X_sB_s)_{i,j} + (A_s\tilde{X}_s)_{i,j} \Big)\, ds + \int_0^t \Big((X_sN_s)_{i,j} + (M_s\tilde{X}_s)_{i,j} \Big)\, dW_s \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \langle X^{i,k}, \tilde{X}^{k,j}\rangle_t.
\end{aligned} \tag{6.20}
$$

Por otra parte, de la igualdad (3.21), del inciso c) de la observación 3.95 y la igualdad $\langle W, W\rangle_t = t$ (igualdad (3.32) se sigue

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \langle X^{i,k}, \tilde{X}^{k,j}\rangle_t &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t M_s^{i,k}\, N_s^{k,j}\, d\langle W, W\rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t M_s^{i,k}\, N_s^{k,j}\, ds \\
&= \int_0^t (M_s\, N_s)_{i,j}\, ds.
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

Luego, sustituyendo (6.21) en la igualdad (6.20) tenemos que

$$
(X_t\tilde{X}_t)_{i,j} = (X_0\tilde{X}_0)_{i,j} + \textstyle\int_0^t (X_sB_s)_{i,j} + (A_s\tilde{X}_s)_{i,j} + (M_s\, N_s)_{i,j}\, ds + \int_0^t (X_sN_s)_{i,j} + (M_s\tilde{X}_s)_{i,j}\, dW_s,
$$

lo cual muestra el resultado.

□

Proposición 6.6. *Sea $P \in M_2(\mathbb{C})$ un operador positivo. Entonces la ecuación diferencial estocástica*

$$
dZ_t = L(Z_t)\, dt + \widehat{C}(Z_t)\, dW_t
$$

con condición inicial $Z_0 = P$ tiene una única solución fuerte y esta cumple unicidad trayectorial. Más aún, Z_t es un operador positivo, para todo $t \geq 0$ c.s.

Demostración. De la proposición 6.1 incisos (b) y (c), tenemos que L y $\widehat{C}$ son Lipschitz y además satisfacen la condición de crecimiento lineal, pues

$$
\|L(M)\|_2 + \|\widehat{C}(M)\|_2 \leq K^2(1 + \|M\|_2^2),
$$

donde $K = \text{máx}\{2\|C\|_2, 4\|H_0\| + 2\|C^*C\| + 2\|C\| + 2\|C^*\|\}$. Luego, del teorema 3.110 tenemos que existe una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica

$$
dZ_t = L(Z_t)\, dt + \widehat{C}(Z_t)\, dW_t
$$

con $X_0 = P$ y además esta satisface unicidad trayectorial. Ahora veamos que para cada $t \geq 0$, Z_t es positivo. Demostraremos que existe un proceso $(V_t)_{t\geq 0}$ con valores en $M_2(\mathbb{C})$, tal que $(V_t P V_t^*)_{t\geq 0}$ es indistinguible de $(Z_t)_{t\geq 0}$. Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dV_t = KV_t\, dt + CV_t\, dW_t, \tag{6.22}$$

con condición inicial $V_0 = I$ y donde

$$K := -iH_0 - \frac{1}{2}CC^*.$$

Notemos que las funciones $M \mapsto KM$ y $M \mapsto CM$ son lineales y Lispchitz, por lo tanto, del teorema 3.110 existe una única solución de la ecuación diferencial estocástica (6.22) y esta es única de manera trayectorial. Si $(V_t)_{t\geq 0}$ es la solución de la ecuación (6.22), tenemos que el proceso estocástico $(V_t)_{t\geq 0}$ satisface la ecuación

$$dV_t^* = V_t^* K^*\, dt + V_t^* C^*\, dW_t, \tag{6.23}$$

con condición inicial $V_0 = I$. De las igualdades (6.22) y (6.23) y del lema 6.5 (considerando $X_t = V_t$ y $\tilde{X}_t = PV_t^*$) se sigue que $(V_t P V_t^*)_{t\geq 0}$ cumple la siguiente igualdad:

$$V_t P V_t^* = P + \int_0^t \left(V_s P V_s^* K^* + K V_s P V_s^* + C V_s P V_s^* C^*\right) ds + \int_0^t \left(V_s P V_s^* C^* + C V_s P V_s^*\right) dW_s.$$

Por otra parte, notemos que

$$L(M) = KM + MK^* + CMC^*,$$

para todo $M \in M_2(\mathbb{C})$. De estas observaciones se sigue que

$$V_t P V_t^* = P + \int_0^t L(V_s P V_s^*)\, ds + \int_0^t \widehat{C}(V_s P V_s^*)\, dW_s,$$

es decir, $(V_t P V_t^*)_{t\geq 0}$ satisface la misma ecuación diferencial estocástica que $(Z_t)_{t\geq 0}$ y por tanto, estos procesos son indistinguibles, es decir, $Z_t = V_t P V_t^*$ para todo $t \geq 0$ casi seguramente. Para concluir que Z_t es positivo basta notar que $V_t P V_t^*$ es positivo.

□

Proposición 6.7. *Sea $M_0 \in M_2(\mathbb{C})$ positivo y $(X_t)_{t\geq 0}$ la solución de la ecuación diferencial estocástica (6.12) con condición inicial M_0. Entonces X_t es positivo, para todo $t \geq 0$ casi seguramente. Más aún, $Tr(X_t) = Tr(M_0)$, para todo $t \geq 0$ c.s.*

Demostración. Puesto que M_0 es positivo, de la proposición 6.4 se sigue que $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una martingala con esperanza igual a 1. Sean $T > 0$ y $\mathbb{Q}$ la medida de probabilidad definida por

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &:= exp\left(\int_0^T \widehat{A}(X_s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \widehat{A}^2(X_s)\, ds\right) \\ &= Y_T.\end{aligned} \tag{6.24}$$

Puesto que

$$\int_0^t \widehat{A}^2(X_s)\, ds \leq 4\|C\|_2^2 t < \infty,$$

para todo $t \geq 0$, del teorema de Girsanov (teorema 3.111), se sigue que el proceso $(\tilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ definido por

$$\widehat{W}_t := W_t + \int_0^t A(X_s)\, ds$$

es un movimiento Browniano sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$. De la proposición 6.4 inciso b) y la propiedad de asociatividad de la integral respecto de semimartingalas (ver observación 3.95 inciso a)) tenemos que el proceso $Z_t = Y_t^{-1} X_t$ satisface la igualdad:

$$\begin{aligned} Z_t &= M_0 + \int_0^t \left[L(Z_s) + \widehat{A}(X_s)\widehat{C}(Z_s) \right] ds + \int_0^t \widehat{C}(Z_s)\, dW_s. \\ &= M_0 + \int_0^t L(Z_s)\, ds + \int_0^t \widehat{C}(Z_s) d\widehat{W}_s. \end{aligned}$$

Es decir, $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$Z_t = L(Z_t)\, dt + \widehat{C}(Z_t) d\widehat{W}_t \tag{6.25}$$

con condición inicial $Z_0 = M_0$. Luego, como M_0 es positivo, de la proposición 6.6 (aplicada sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$) se sigue que Z_t es positivo para todo $t \in [0,T]$, casi seguramente (bajo la medida $\mathbb{Q}$). Puesto que $Y_T > 0$, tenemos que las medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes, entonces tenemos que esta propiedad se cumple casi seguramente bajo la medida $\mathbb{P}$. Dado que $T > 0$ es arbitrario, podemos concluir que X_t es positivo, para todo $t \geq 0$ (casi seguramente bajo $\mathbb{P}$). Por último, notemos que de la ecuación (6.4) tenemos que $Tr(\widehat{O}(X_t)) = 0$, para todo $t \geq 0$ c.s. y además, notemos que para el operador de Lindblad

$$L(M) = -i[H_0, M] - \frac{1}{2}\{CC^*, M\} + CMC^*,$$

se tiene que

$$Tr(L(M)) = 0,$$

para todo $M \in M_2(\mathbb{C})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Tr(X_t) &= Tr(M_0) + \int_0^t Tr(L(X_s))\, ds + \int_0^t Tr(\widehat{O}(X_t))\, dW_s \\ &= Tr(M_0). \end{aligned}$$

□

Ahora veremos el teorema principal de esta sección. Este teorema es consecuencia inmediata de las observaciones hechas al inicio de esta sección y de la proposición anterior.

Teorema 6.8. *Sea $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Existe una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (6.1) con condición inicial ρ tal que $\rho_t \in L^2(\Omega)$ y esta es única de manera trayectorial. Más aún, ρ_t es un operador de densidad, para todo $t \geq 0$ c.s.*

Demostración. Sea $(\rho_t)_{t\geq 0}$ la solución a la ecuación diferencial estocástica (6.12) con condición inicial ρ. De la proposición 6.12 tenemos que $\rho_t \in L^2(\Omega)$ y de la proposición 6.7 se sigue que ρ_t es positivo, para todo $t \geq 0$ c.s. y $Tr(\rho_t) = Tr(\rho) = 1$, para todo $t \geq 0$ c.s. Por lo tanto $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ para todo $t \geq 0$ casi seguramente. Además, de las igualdad (6.5) se sigue que:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho + \int_0^t L(\rho_s)\, ds + \int_0^t \widehat{O}(\rho_s)\, dW_s \\ &= \rho + \int_0^t L(\rho_s)\, ds + \int_0^t (C\rho_s + \rho_s C^* - Tr(C\rho_s + \rho_s C^*)\rho_s)\, dW_s, \end{aligned}$$

es decir, $(\rho_t)_{t\geq 0}$ es una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (6.1) con condición inicial $\rho_0 = \rho$. Únicamente hemos demostrado que existe una solución fuerte con valores en $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, sin embargo, no hemos demostrado que la solución de (6.1) es única. La unicidad trayectorial de esta ecuación diferencial estocástica la demostraremos por medio de la proposición 3.108, por lo que veremos que los coeficientes de la ecuación (6.1) son localmente Lipschitz.

Sabemos que el operador L dado por (6.3) es localmente Lipschitz por ser un operador lineal, por lo que basta probar que la función $\widehat{R} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, dada por

$$\widehat{R}(M) = \widehat{C}(M) - Tr(\widehat{C}(M))M$$

es localmente Lipschitz. Sean $K > 0$ y $N, M \in M_2(\mathbb{C})$ tales que $\|M\|_2, \|N\|_2 \leq K$. Primero consideremos la siguiente igualdad:

$$\widehat{R}(M) - \widehat{R}(N) = \widehat{C}(M-N) - Tr\big(\widehat{C}(M)\big)(M-N) - Tr\big(\widehat{C}(N-M)\big)N. \tag{6.26}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} |Tr\big(\widehat{C}(M)\big)| &= |Tr(CM) + Tr(MC^*)| \\ &\leq 2\|C\|_2\|M\|_2. \end{aligned} \tag{6.27}$$

De la igualdad (6.26) y la desigualdad (6.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{R}(M) - \widehat{R}(N)\|_2 &\leq \big(4\|C\|_2 + 2\|C\|_2\|M\|_2 + 2\|C\|_2\|N\|_2\big)\|M-N\|_2 \\ &\leq \big(4\|C\|_2 + 4\|C\|_2K\big)\|M-N\|_2. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Luego, $\widehat{R}$ es localmente Lipschitz. Por lo tanto, de la proposición 3.108 se sigue que la solución de la ecuación 6.1 con condición inicial $\rho_0 = \rho$ cumple unicidad trayectorial.

$\square$

7. Aproximación de la ecuación de Belavkin a partir de trayectorias cuánticas discretas

El objetivo de esta sección es estudiar la convergencia de las trayectorias cuánticas discretas a la ecuación de Belavkin. La convergencia que estudiaremos es la convergencia en distribución sobre el espacio de Skorokhod. Para estudiar esta convergencia, debemos definir procesos estocásticos con trayectorias càdlàg con valores en este espacio que representen a las trayectorias cuánticas discretas. Sea $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, $\{x_0, x_1\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$, $\mathsf{X} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ un observable con descomposición espectral $\mathsf{X} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ una sucesión de operadores unitarios. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por

$$(\rho_k^n)_{k\in\mathbb{N}},$$

al proceso estocástico con $\rho_0^n = \rho$ construído en la sección 5 a partir del observable X y el operador unitario U^n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el proceso estocástico $\hat{\rho}^n = (\hat{\rho}_t^n)_{t\geq 0}$ por

$$\hat{\rho}_t^n := \rho_{\lfloor nt \rfloor}^n.$$

Nótese que este proceso es un proceso con trayectorias càdlàg y sus trayectorias son constantes por pedazos. Veremos que bajo hipótesis adecuadas, la sucesión de procesos estocásticos $\{\hat{\rho}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a la solución de la ecuación de Belavkin $(\rho_t)_{t\geq 0}$. Las hipótesis son las siguientes:

(A) El observable X no es diagonal en la base $\{x_0, x_1\}$, es decir, las proyecciones espectrales de X no son las proyecciones sobre los elementos de la base.

(B) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la evolución unitaria U_n se encuentra dada por

$$U_n = exp\left(-\frac{i}{n} H_{tot}^n\right),$$

donde $H_{tot}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ es el operador autoadjunto definido por

$$H_{tot}^n := H_0 \otimes I + \sqrt{n}\left((-iC) \otimes a_1^0 + iC^* \otimes a_0^1\right), \tag{7.1}$$

H_0 es autoadjunto, $C \in M_2(\mathbb{C})$ y para $i \neq j$, el operador a_j^i se encuentra definido por medio de la igualdad

$$a_j^i(x_k) = \delta_{i,k} x_j$$

y su extensión lineal a todo $\mathbb{C}^2$, o dicho de otra manera, a_1^0 y a_0^1 se encuentran representados en la base $\{x_0, x_1\}$ de la siguiente forma:

$$a_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La hipótesis (B) se interpreta de la siguiente manera: en cada cadena de Markov $(\rho_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ las interacciones se dan en intervalos de tiempo de longitud $1/n$ y la constante de acoplamiento es igual a $\sqrt{n}$.

7.1. Construcción de la sucesión

Antes de estudiar la convergencia veremos una expresión de los operadores $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$ de la sección en 5.1. Para determinar estas expresiones consideraremos la siguiente base ordenada de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

$$\beta = \{x_0 \otimes x_0, x_1 \otimes x_0, x_0 \otimes x_1, x_1 \otimes x_1\}. \tag{7.2}$$

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ y consideremos su representación respecto de la base β

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix},$$

donde $A_{ij} \in M_2(\mathbb{C})$, $i, j \in \{0, 1\}$. Notemos que si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, el operador $T \otimes I$ tiene la siguiente representación en la base β:

$$T \otimes I = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Tr\big(A(T \otimes I)\big) &= Tr\big(A_{0,0}T) + Tr\big(A_{1,1}T\big) \\ &= Tr\big((A_{0,0} + A_{1,1})T\big). \end{aligned}$$

Del teorema 2.19 se sigue que

$$Tr_{\mathcal{H}_0}\big(A\big) = A_{0,0} + A_{1,1},$$

es decir, la representación en la base $\{x_0, x_1\}$ de la traza parcial de A es igual a la suma de los bloques de la diagonal.

Sea X un observable con descomposición espectral $\mathsf{X} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$. Puesto que X es un operador sobre un espacio de dimensión 2, las proyecciones espectrales cumplen la siguiente relación:

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & a_{0,1} \\ \overline{a}_{0,1} & a_1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -a_{0,1} \\ -\overline{a}_{0,1} & a_0 \end{pmatrix},$$

donde $a_0, a_1 \geq 0$, $a_1 + a_0 = 1$ y $a_{1,0} \in \mathbb{C}$ cumple la relación $|a_{1,0}| = \sqrt{a_1 a_0}$. Más aún, como el observable X no es diagonal en la base $\{x_0, x_1\}$, tenemos que a_0 y a_1 son estrictamente positivos y $a_{0,1} \neq 0$. Luego, tenemos la siguiente representación en bloques del operador $I \otimes P_0$:

$$I \otimes P_0 = \begin{pmatrix} a_0 I & a_{0,1} I \\ \overline{a}_{0,1} I & a_1 I \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, tenemos que los bloques de la diagonal del operador $(I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)$, se encuentran dados por

$$\begin{aligned} \big((I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)\big)_{0,0} &= a_0^2 A_{0,0} + a_0 \overline{a}_{0,1} A_{0,1} + a_0 a_{0,1} A_{1,0} + |a_{0,1}|^2 A_{1,1}, \\ \big((I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)\big)_{1,1} &= |a_{0,1}|^2 A_{0,0} + a_1 \overline{a}_{0,1} A_{0,1} + a_1 a_{0,1} A_{1,0} + a_1^2 A_{1,1}, \end{aligned}$$

donde $\big((I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)\big)_{0,0}$ y $\big((I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)\big)_{1,1}$ denotan a los bloques $0,0$ y $1,1$ del operador $(I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{H}_0}((I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)) = (a_0^2 + |a_{0,1}|^2)A_{0,0} + (a_0 \overline{a}_{0,1} + a_1 \overline{a}_{0,1})A_{0,1} + (a_0 a_{0,1} + a_1 a_{0,1})A_{1,0} \\ + (|a_{0,1}|^2 + a_1^2)A_{1,1}. \end{aligned}$$

De la condición $P_0^2 = P_0$ tenemos que la igualdad anterior se simplifica de la siguiente manera:

$$Tr_{\mathcal{H}_0}((I \otimes P_0)A(I \otimes P_0)) = a_0 A_{0,0} + \overline{a}_{0,1} A_{0,1} + a_{0,1} A_{1,0} + a_1 A_{1,1}. \tag{7.4}$$

De manera análoga tenemos que

$$Tr_{\mathcal{H}_0}((I \otimes P_1)A(I \otimes P_1)) = a_1 A_{0,0} - \overline{a}_{0,1} A_{0,1} - a_{0,1} A_{1,0} + a_0 A_{1,1}. \tag{7.5}$$

Puesto que $a_0 + a_1 = 1$, tenemos que que

$$\mathcal{L}_0(A) + \mathcal{L}_1(A) = A_{0,0} + A_{1,1}. \tag{7.6}$$

Sea U un operador unitario con representación matricial en la base β :

$$U = \begin{pmatrix} U_{0,0} & U_{0,1} \\ U_{1,0} & U_{1,1} \end{pmatrix}.$$

donde $U_{i,j} \in M_2(\mathbb{C})$, $i, j \in \{0, 1\}$. Dado $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, tenemos que en la base β, el operador $\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|$ se encuentra representado por

$$\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0| = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} U(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)U^* &= \begin{pmatrix} U_{0,0} & U_{0,1} \\ U_{1,0} & U_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0,0}^* & U_{1,0}^* \\ U_{0,1}^* & U_{1,1}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_{0,0}\,\rho\, U_{0,0}^* & U_{0,0}\,\rho\, U_{1,0}^* \\ U_{1,0}\,\rho\, U_{0,0}^* & U_{1,0}\,\rho\, U_{1,0}^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Nótese que esta expresión únicamente depende de ρ y de los bloques $U_{0,0}$ y $U_{1,0}$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, la representación en bloques de H_{tot}^n respecto de la base β se encuentra dada por:

$$H_{tot}^n = \begin{pmatrix} H_0 & \sqrt{n}\; iC^* \\ -i\sqrt{n}\, C & H_0 \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Desarrollando los términos hasta orden 2 del operador unitario

$$U^n = exp\bigg(-\frac{i}{n} H_{tot}^n \bigg),$$

tenemos que

$$U^n = I - \frac{i}{n} H_{tot}^n - \frac{1}{2n^2} (H_{tot}^n)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

de ésto último y de la igualdad (7.8) podemos deducir las siguientes expresiones para los bloques $U_{0,0}^n$ y $U_{1,0}^n$ del operador unitario U^n:

$$\begin{aligned} U_{0,0}^n &= I - \frac{1}{n}\left(iH_0 + \frac{1}{2} C^* C \right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ U_{1,0}^n &= -\frac{1}{\sqrt{n}} C + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

donde $\left\{o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M_2(\mathbb{C})$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} n\, o\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \tag{7.9}$$

respecto de la norma de operador.

Las expresiones anteriores nos permiten calcular los bloques del operador $U^n(\rho\otimes|x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*$. Dado $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} U_{00}^n\rho(U_{00}^n)^* &= \rho - \frac{1}{n}\big(i[H_0,\rho] + 1/2\{C^*C,\rho\}\big) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho), \\ &= \rho + \frac{1}{n}\mathcal{J}(\rho) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho). \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{J}(\rho) = -i[H_0,\rho] - 1/2\{C^*C,\rho\}$$

y

$$\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho) = \left[\frac{1}{n}\big(iH_0 + \frac{1}{2}C^*C\big) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\rho\left[\frac{1}{n}\big(-iH_0 + \frac{1}{2}C^*C\big) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Puesto que $\|\rho\| \le \|\rho\|_1 = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\,\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\| &\le \left[\frac{1}{n}\big(\|H_0\| + 1/2\|C^*C\|\big) + \left\|o\left(\frac{1}{n}\right)\right\|\right]^2 \|\rho\| \\ &\le \left[\frac{1}{n}\big(\|H_0\| + 1/2\|C^*C\|\big) + \left\|o\left(\frac{1}{n}\right)\right\|\right]^2. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} n\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho) = 0,$$

para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ y más aún, la convergencia es uniforme sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

Por simplicidad, denotaremos por $\hat{o}_{\frac{1}{n}}$ a cualquier función $\hat{o}_{\frac{1}{n}} : \mathcal{S}(\mathbb{C}^2) \to M_2(\mathbb{C})$ que cumpla la condición:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho) = 0, \tag{7.10}$$

uniformemente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

Observación 7.1.

a) Sin pérdida de generalidad, consideraremos que el límite en (7.10) se cumple respecto de la norma de operador, la norma de Hilbert-Schmidt y la norma de traza, pues estas son equivalentes en dimensión finita.

b) Dado $p \in (-\infty, 1]$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n^p\,\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho) = 0,$$

uniformemente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

c) Puesto que $\big|Tr\big(\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\big)\big| \leq \big\|\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\big\|_1$, para cualquier $p \in (-\infty, 1]$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} n^p\, Tr\big(\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\big) = 0, \tag{7.11}$$

uniformemente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

De manera análoga, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos deducir expresiones para los demás bloques del operador $U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*$. Denotaremos por

$$(U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*)_{i,j}$$

al bloque i, j del operador $U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*$, para cualesquiera $i, j \in \{0, 1\}$. De (7.7) tenemos que los bloques de este operador se encuentran dados por:

$$(U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*)_{0,0} = U^n_{0,0}\rho(U^n_{0,0})^* = \rho + \frac{1}{n}\mathcal{J}(\rho) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho), \tag{7.12}$$

$$(U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*)_{0,1} = U^n_{0,0}\rho(U^n_{1,0})^* = -\frac{1}{\sqrt{n}}\rho C^* + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho), \tag{7.13}$$

$$(U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*)_{1,0} = U^n_{1,0}\rho(U^n_{0,0})^* = -\frac{1}{\sqrt{n}}C\rho + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho), \tag{7.14}$$

$$(U^n(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*)_{1,1} = U^n_{1,0}\rho(U^n_{1,0})^* = \frac{1}{n}C\rho C^* + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho). \tag{7.15}$$

Nótese que como funciones de ρ, los términos (7.13), (7.14) y (7.15) convergen a cero uniformemente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

Dados $i \in \{0, 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{L}^n_i : \mathcal{S}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ por

$$\mathcal{L}^n_i(\rho) := Tr_{\mathcal{H}_0}\big((I \otimes P_i)U^n\,(\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)\,(U^n)^*(I \otimes P_i)\big), \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2).$$

Veremos que la traza de estos operadores converge uniformemente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Este resultado es importante, pues nos permitirá estudiar la convergencia de la sucesión de procesos estocásticos $\{\hat{\rho}^n\}_{n\geq 0}$.

Lema 7.2. *Para cada $i \in \{0, 1\}$, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} Tr\big(\mathcal{L}^n_i(\rho)\big) = a_i,$$

para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Más aún, la convergencia es uniforme sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

Demostración. Sean $i \in \{0, 1\}$ y $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. De las igualdades (7.4) y (7.5) se sigue que

$$\begin{aligned}|Tr\big(\mathcal{L}^n_i(\rho)\big) - a_i| &= \big|Tr\big(\mathcal{L}^n_i(\rho)\big) - Tr(a_i\rho)\big|\\ &\leq \frac{a_i}{n}\big|Tr\big(\mathcal{J}(\rho)\big)\big| + a_i\big|Tr\big(\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\big)\big| + 2|a_{0,1}|\big|Tr\big(U^n_{00}\rho(U^n_{01})^*\big)\big|\\ &\quad + a_{1-i}\big|Tr\big(U^n_{01}\rho(U^n_{01})^*\big)\big|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|Tr\big(\mathcal{L}^n_i(\rho)\big) - a_i| \leq \frac{a_i}{n}K + a_i\|\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\|_1 + 2|a_{0,1}|\|U^n_{00}\rho(U^n_{01})^*\|_1 + a_{1-i}\|U^n_{01}\rho(U^n_{01})^*\|_1, \tag{7.16}$$

donde $K > 0$ es tal que

$$\|\mathcal{J}(M)\|_1 \leq K\|M\|_1,$$

para todo $M \in M_2(\mathbb{C})$.

El resultado se sigue de la desigualdad (7.16), pues los tres últimos términos del lado derecho de esta desigualdad convergen uniformemente a cero conforme $n \to \infty$.

$\square$

Dado que $a_0 > 0$ y $a_1 > 0$, del lema 7.2 se sigue que existe $\widehat{N} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \widehat{N}$,

$$Tr\big(\mathcal{L}_i^n(\rho)\big) > 0, \tag{7.17}$$

para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ y para cualquier $i \in \{0, 1\}$. Esta condición nos permite realizar la construcción de la sección 5.1 a partir de $\widehat{N}$, es decir, para cada $n \geq \widehat{N}$ tenemos la igualdad (5.30):

$$\rho_{k+1}^n = \mathcal{L}_0^n(\rho_k^n) + \mathcal{L}_1^n(\rho_k^n) + X_{k+1}^n\left(\sqrt{\frac{p_{k+1}^n}{q_{k+1}^n}}\mathcal{L}_1^n(\rho_k^n) - \sqrt{\frac{q_{k+1}^n}{p_{k+1}^n}}\mathcal{L}_0^n(\rho_k^n)\right), \quad k \geq 0, \tag{7.18}$$

donde

$$\begin{aligned} p_{k+1}^n &= Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho_k^n)\big), \\ q_{k+1}^n &= Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho_k^n)\big), \end{aligned}$$

y

$$X_{k+1}^n = \frac{\mathbb{1}_{A_{k+1}} - q_{k+1}^n}{\sqrt{p_{k+1}^n q_{k+1}^n}}.$$

Para cada $k \geq 0$, representaremos a ρ_k^n respecto de la base $\{x_0, x_1\}$. Luego, sustituyendo los bloques del operador $U^n(\rho_k^n \otimes |x_0\rangle\langle x_0|)(U^n)^*$ (igualdades (7.12) a (7.15)) en las igualdades (7.4), (7.5) y (7.6) tenemos que

$$\mathcal{L}_0^n(\rho) = a_0 U_{0,0}^n \rho (U_{0,0}^n)^* + \overline{a}_{0,1} U_{0,0}^n \rho (U_{1,0}^n)^* + a_{0,1} U_{1,0}^n \rho (U_{0,0}^n)^* + a_1 U_{1,0}^n \rho (U_{1,0}^n)^*, \tag{7.19}$$

$$\mathcal{L}_1^n(\rho) = a_1 U_{0,0}^n \rho (U_{0,0}^n)^* - \overline{a}_{0,1} U_{0,0}^n \rho (U_{1,0}^n)^* - a_{0,1} U_{1,0}^n \rho (U_{0,0}^n)^* + a_0 U_{1,0}^n \rho (U_{1,0}^n)^*, \tag{7.20}$$

$$\mathcal{L}_0^n(\rho) + \mathcal{L}_1^n(\rho) = \rho + \frac{1}{n}L(\rho) + \widehat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho), \tag{7.21}$$

donde $L : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ es el operador de Lindblad

$$L(M) = -i[H_0, M] - \frac{1}{2}\{C^*C, M\} + CMC^*. \tag{7.22}$$

Sustituyendo las igualdades (7.19), (7.20) y (7.21) en la igualdad (7.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}^n = \rho_k^n + \frac{1}{n}L(\rho_k^n) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_k^n) + \frac{X_{k+1}^n}{\sqrt{p_{k+1}^n q_{k+1}^n}}\Big[&\big(a_1 p_{k+1}^n - a_0 q_{k+1}^n\big)U_{0,0}^n \rho_k^n (U_{0,0}^n)^* - \overline{a}_{0,1} U_{0,0}^n \rho_k^n (U_{1,0}^n)^* \\ - a_{0,1} U_{1,0}^n \rho_k^n (U_{0,0}^n)^* + \big(a_0 q_{k+1}^n - a_1 p_{k+1}^n\big)U_{1,0}^n \rho_k^n (U_{1,0}^n)^*\Big]& \end{aligned} \tag{7.23}$$

Sustituyendo las igualdades (7.13), (7.14) y (7.15), en las igualdades (7.19) y (7.20) se sigue que

$$\begin{aligned} a_1 Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) - a_0 Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big) &= Tr\big(\overline{a}_{0,1} U_{0,0}^n \rho (U_{0,1}^n)^* + a_{0,1} U_{1,0}^n \rho (U_{0,0}^n)^*\big) + (a_1^2 - a_0^2) Tr(U_{1,0}^n \rho (U_{1,0}^n)^*) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} Tr\big(a_{1,0} C\rho + \overline{a}_{1,0}\rho C^*\big) + \frac{(a_1^2 - a_0^2)}{n} Tr(C\rho C^*) \\ &\quad + Tr(\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)). \end{aligned} \tag{7.24}$$

De la igualdad (7.24) y de la observación 7.1 inciso c) podemos deducir la siguiente expresión:

$$\Big[a_1 Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) - a_0 Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big)\Big] U_{0,0}^n \rho (U_{0,0}^n)^* = -\frac{1}{\sqrt{n}} Tr\big(a_{1,0} C\rho + \overline{a}_{1,0}\rho C^*\big)\rho + \frac{(a_1^2 - a_0^2)}{n} Tr(C\rho C^*)\rho + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho). \tag{7.25}$$

Sustituyendo las igualdades (7.14), (7.15) y (7.25) en la ecuación (7.23) se obtiene que

$$\rho_{k+1}^n = \rho_k^n + \frac{1}{n} L(\rho_k^n) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_k^n) + \frac{X_{k+1}^n}{\sqrt{p_{k+1}^n q_{k+1}^n}} \Big[\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(a_{0,1} C\rho_k^n + \overline{a}_{0,1}\rho_k^n C^* - Tr\big(a_{1,0} C\rho_k^n + \overline{a}_{1,0}\rho_k^n C^*\big)\rho_k^n\Big) + \frac{(a_1^2 - a_0^2)}{n} Tr(C\rho_k^n C^*)\rho_k^n + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_k^n) + \big(a_0 q_{k+1}^n - a_1 p_{k+1}^n\big) U_{0,0}^n \rho_k^n (U_{1,0}^n)^*\Big].$$

Por otra parte, del lema 7.2 y de la continuidad de la función $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{xy}}$ sobre $(0, \infty) \times (0, \infty)$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{a_0 a_1}}, \tag{7.26}$$

para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ y además, la convergencia es uniforme sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Con este resultado, podemos deducir otra expresión para ρ_{k+1}^n:

$$\rho_{k+1}^n = \rho_k^n + \frac{1}{n} L(\rho_k^n) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_k^n) + \frac{X_{k+1}^n}{\sqrt{a_0 a_1 n}} \Big(a_{0,1} C\rho_k^n + \overline{a}_{0,1}\rho_k^n C^* - Tr\big(a_{1,0} C\rho_k^n + \overline{a}_{1,0}\rho_k^n C^*\big)\rho_k^n\Big) + \frac{X_{k+1}^n}{\sqrt{n}} Z_n(\rho_k^n), \tag{7.27}$$

donde

$$Z_n(\rho) = \left(\frac{1}{\sqrt{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}} - \frac{1}{\sqrt{a_0 a_1}}\right)\Big(a_{0,1} C\rho + \overline{a}_{0,1}\rho C^* - Tr\big(a_{0,1} C\rho + \overline{a}_{0,1}\rho C^*\big)\rho\Big) + \left(\frac{a_0 Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) - a_1 Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}{\sqrt{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C\rho C^* + \sqrt{n}\,\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\rho\right) + \frac{(a_1^2 - a_0^2)}{\sqrt{n Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}} Tr(C\rho C^*) \tag{7.28}$$

Del lema 7.2 se sigue que $\{Z_n\}_{n\geq\widehat{N}}$ converge uniformemente a cero sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, pues en el primer y tercer término de la suma, la parte correspondiente al escalar converge uniformemente a cero y la parte correspondiente al operador está acotada uniformemente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ y en el segundo término, la parte correspondiente al escalar converge uniformemente a una constante finita y la parte correspondiente al operador converge uniformemente a cero (por la observación 7.1 inciso b)).

De la condición $|a_{0,1}| = \sqrt{a_0 a_1}$ y de la igualdad (7.27) obtenemos que

$$\rho_{k+1}^n = \rho_k^n + \frac{1}{n} L(\rho_k^n) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_k^n) + \frac{X_{k+1}^n}{\sqrt{n}} \Big(e^{i\theta} C\rho_k^n + e^{-i\theta}\rho_k^n C^* - Tr\big(e^{i\theta} C\rho_k^n + e^{-i\theta}\rho_k^n C^*\big)\rho_k^n\Big) + \frac{X_{k+1}^n}{\sqrt{n}} Z_n(\rho_k^n),$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es tal que $a_{1,0} = e^{i\theta}|a_{1,0}|$.

Sea $C_\theta = e^{-i\theta}C$. Nótese que $C_\theta C_\theta^* = CC^*$, por lo cual tenemos que la expresión del operador L como función de C (ver la ecuación (6.3)) es la misma para los operadores C_θ y C. Luego, podemos realizar la siguiente modificación al Hamiltoniano H^n_{tot}:

$$H^n_{tot} = \begin{pmatrix} H_0 & i\sqrt{n}\, C_\theta^* \\ -i\sqrt{n}\, C_\theta & H_0 \end{pmatrix},$$

para obtener la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} \rho^n_{k+1} = \rho^n_k + \frac{1}{n} L(\rho^n_k) + \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho^n_k) + \frac{X^n_{k+1}}{\sqrt{n}} \Big(C\rho^n_k + \rho^n_k C^* - Tr\big(C\rho^n_k + \rho^n_k C^*\big)\rho^n_k \Big) \\ + \frac{X^n_{k+1}}{\sqrt{n}} Z_n(\rho^n_k). \end{aligned}$$

De esta igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} \rho^n_{k+1} - \rho = {} & \rho^n_{k+1} - \rho^n_0 \\ = {} & \sum_{i=0}^{k} (\rho^n_{i+1} - \rho^n_i) \\ = {} & \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{n} L(\rho^n_i) + \sum_{i=0}^{k} \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho^n_i) + \sum_{i=0}^{k} \frac{X^n_{i+1}}{\sqrt{n}} \Big(C\rho^n_i + \rho^n_i C^* - Tr\big(C\rho^n_i + \rho^n_i C^*\big)\rho^n_k \Big) \\ & + \sum_{i=0}^{i} \frac{X^n_{i+1}}{\sqrt{n}} Z_n(\rho^n_i), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \rho^n_{k+1} = \rho + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{n} L(\rho^n_i) + \sum_{i=0}^{k} \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho^n_i) + \sum_{i=0}^{k} \frac{X^n_{i+1}}{\sqrt{n}} \Big(C\rho^n_i + \rho^n_i C^* - Tr\big(C\rho^n_i + \rho^n_i C^*\big)\rho^n_k \Big) \\ + \sum_{i=0}^{k} \frac{X^n_{i+1}}{\sqrt{n}} Z_n(\rho^n_i). \end{aligned} \tag{7.29}$$

Esta última expresión nos permitirá expresar al proceso $(\hat{\rho}^n_t)_{t\geq 0}$ en términos de integrales estocásticas.

7.2. Resultados de convergencia

En esta sección estudiaremos la convergencia de la sucesión $\{\hat{\rho}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la solución de la ecuación de Belavkin. Recordemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el proceso estocático $(\hat{\rho}^n_t)_{t\geq 0}$ se encuentra definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mathbb{P}_n)$, donde $\mathbb{P}_n$ es la medida de probabilidad construida en la sección 5 a partir del operador unitario U_n y el observable fijo X (ver teorema 5.11). Para cada $n \in \mathbb{N}$, la filtración $(\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}$ que consideraremos para $\hat{\rho}^n$ es la siguiente

$$\mathcal{F}^n_t := \sigma\big(\pi_k : k \leq \lfloor nt \rfloor\big),$$

donde π_k denota a la k-ésima proyección sobre $\Omega^{\mathbb{N}}$, es decir, $\pi_k(\omega) = \omega_k$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathbb{E}_n[X]$ a la esperanza de X respecto del espacio de probabilidad $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mathbb{P}_n)$ y de manera análoga, denotaremos por $\mathbb{E}_n[X|\mathcal{F}]$ a la esperanza de X dada $\mathcal{F} \subset \Sigma$ respecto de dicho espacio de probabilidad.

Estudiaremos la convergencia a partir de $\widehat{N} \in \mathbb{N}$ tal que se cumple la condición (7.17). Nótese que esto no afecta la convergencia de la sucesión completa y además nos permite representar al proceso $\hat{\rho}_n$ (con $n \geq N$) en términos de integrales estocásticas. De la ecuación (7.29) obtenemos la igualdad:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^n_t = \rho^n_{\lfloor nt \rfloor} = \rho + \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \frac{1}{n} L(\rho^n_i) + \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho^n_i) + \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \frac{X^n_{i+1}}{\sqrt{n}} \Big(C\rho^n_i + \rho^n_i C^* - Tr\big(C\rho^n_i + \rho^n_i C^*\big)\rho^n_i \Big) \\ + \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \frac{X^n_{i+1}}{\sqrt{n}} Z_n(\rho^n_i),\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, considerando que las sumas del lado derecho son cero si $\lfloor nt \rfloor = 0$. En términos de integrales estocásticas podemos reexpresar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^n_t = \rho + \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho^n_i) + \int_0^t Z_n(\hat{\rho}^n_{s\text{-}})\, dW^n_s + \int_0^t L(\hat{\rho}^n_{s\text{-}})\, dV^n_s \\ + \int_0^t \Big(C\hat{\rho}^n_{s\text{-}} + \hat{\rho}^n_{s\text{-}} C^* - Tr\big(C\hat{\rho}^n_{s\text{-}} + \hat{\rho}^n_{s\text{-}} C^*\big)\hat{\rho}^n_{s\text{-}} \Big)\, dW^n_s,\end{aligned} \tag{7.30}$$

donde

$$W^n_t := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X^n_i,$$

y

$$V^n_t := \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}.$$

Tenemos que los procesos estocásticos $W^n = (W^n_t)_{t\geq 0}$ y $V^n = (V^n_t)_{t \geq 0}$ son procesos càdlàg, adaptados a la filtración $(\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}$ y son proceso de variación finita pues son constantes por pedazos. Luego, la igualdad (7.30) se obtiene por medio de la integral de Lebesgue-Stieltjes (ver teorema 3.124).

Los teoremas que usaremos en esta sección se encuentran enunciados para procesos sobre $\mathbb{R}^m$, sin embargo, podemos resolver esto de dos maneras: primero, podemos identificar al proceso ρ^n como un proceso con valores en $\mathbb{R}^8$ y aplicar los teoremas directamente (ya que estos teoremas sólo dependen de la norma euclidiana) o bien, podemos notar que estos resultados se pueden extender a procesos estocásticos definidos sobre $M_2(\mathbb{C})$.

Primero estudiaremos la convergencia de los procesos V^n y W^n por separado. Nótese que V^n es constante como variable aleatoria sobre $D_{\mathbb{R}}[0,\infty)$ y además, para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$|V^n_t - t| = \Big|\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} - \frac{nt}{n}\Big| \leq \frac{1}{n},$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \leq T} |V^n_t - t| = 0,$$

es decir, la función $t \mapsto V^n_t$ converge uniformemente en compactos a la identidad y por tanto, también converge respecto de la topología de Skorokhod sobre $D_{\mathbb{R}}[0,\infty)$ (ver teorema 4.10). En particular tenemos que $V^n \Rightarrow Id$, donde Id denota a la función identidad sobre $[0,\infty)$.

Ahora veremos un lema que nos ayudará a estudiar la convergencia de $\{W^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Recordemos que $\widehat{N} \in \mathbb{N}$ denota al número natural que cumple la condición (7.17).

Lema 7.3. *Para cada $n \geq \widehat{N}$ se cumple lo siguiente:*

(a) W^n es una martingala respecto de $(\mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0}$ y

(b) $[W^n, W^n]_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}(X_i^n)^2$.

Demostración. Sean $0 \leq s < t$, Notemos que

$$W_t^n - W_s^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} X_i^n,$$

Primero consideremos el caso $\lfloor ns\rfloor < \lfloor nt\rfloor$, de la proposición 3.14 y de la proposición 5.10 inciso a) se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_n[W_t^n - W_s^n \,|\, \mathcal{F}_s^n] &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \mathbb{E}_n[X_j^n \,|\, \mathcal{F}_s^n] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \mathbb{E}_n\big[\mathbb{E}_n[X_j^n \,|\, \sigma\big(\pi_i : i \leq j-1\big)]\big|\mathcal{F}_s^n\big] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pues $\mathcal{F}_s^n \subset \sigma\big(\pi_i : i \leq j-1\big)$, para cada $j \in \{\lfloor ns\rfloor + 1, \cdots, \lfloor nt\rfloor\}$. Para el caso $\lfloor ns\rfloor = \lfloor nt\rfloor$ tenemos que la igualdad $E_n[W_t^n - W_s^n \,|\, \mathcal{F}_s^n] = 0$ se cumple inmediatamente. Entonces tenemos que

$$E_n[W_t^n \,|\, \mathcal{F}_s^n] = E_n[W_s^n \,|\, \mathcal{F}_s^n] = W_s^n.$$

Por lo tanto, W^n es una martingala.

Ahora, para calcular el bracket de W^n primero notemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t W_{s\text{-}}^n \, dW_s^n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=2}^{\lfloor nt\rfloor}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{j-1} X_i^n\Big)X_j^n \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i<j\leq\lfloor nt\rfloor} X_i^n X_j^n.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Por otra parte, tenemos que

$$(W_t^n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}(X_i^n)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i<j\leq\lfloor nt\rfloor} X_i^n X_j^n. \tag{7.32}$$

Recordemos que

$$[W^n, W^n]_t = (W_t^n)^2 - 2\int_0^t W_{s\text{-}}^n \, dW_s^n,$$

(ver definición 3.129). Por lo tanto, de las igualdades (7.31) y (7.32) tenemos que

$$\begin{aligned}
[W^n, W^n]_t &= (W_t^n)^2 - 2\int_0^t W_{s\text{-}}^n \, dW_s^n \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}(X_i^n)^2.
\end{aligned}$$

□

Proposición 7.4. *La sucesión* $\{W^n\}_{n\geq \widehat{N}}$ *converge en distribución a* W*, donde* $W=(W_t)_{t\geq 0}$ *es un movimiento browniano.*

Demostración. Del lema 7.2 y de la continuidad de la función $(x,y)\mapsto\sqrt{\frac{x}{y}}$ sobre $(0,\infty)\times(0,\infty)$ obtenemos que existe una constante $K>0$ y $N_1\in\mathbb{N}$ tales que para todo $n\geq N_1$ se tiene que

$$\sqrt{\frac{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big)}{Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}}+\sqrt{\frac{Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big)}}\leq K, \tag{7.33}$$

para todo $\rho\in\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$.

Sea $\widehat{N}\in\mathbb{N}$ para la cual se cumple la condición (7.17). Para todo $n\geq\widehat{N}$, tenemos que

$$X_i^n=\sqrt{\frac{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho_{i-1}^n)\big)}{Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho_{i-1}^n)\big)}}(1-\mathbb{1}_{A_i})-\sqrt{\frac{Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho_{i-1}^n)\big)}{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho_{i-1}^n)\big)}}\mathbb{1}_{A_i}. \tag{7.34}$$

para todo $i\in\mathbb{N}$. Sea $n\geq\max\{N_1,\widehat{N}\}$, de las igualdades (7.33) y (7.34) tenemos que

$$\begin{aligned}|\Delta W_t^n|&=|W_t^n-W_{t^-}^n|\\&=|X_{\lfloor nt\rfloor}^n|\\&\leq K,\end{aligned} \tag{7.35}$$

es decir, para cualquier $n\geq\max\{N_1,\widehat{N}\}$, el proceso ΔW^n se encuentra acotado por la constante K.

Ahora veremos que $[W^n,W^n]_t\xrightarrow{P}t$. Del lema 7.3 inciso (a), tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n\Big[\Big([W^n,W^n]_t-\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)^2\Big]&=\frac{1}{n^2}\mathbb{E}_n\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}(X_i^n)^2-1\Big)^2\Big]\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}_n\Big[\big((X_i^n)^2-1\big)^2\Big]+\frac{1}{n^2}\sum_{i<j\leq\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}_n\Big[\big((X_i^n)^2-1\big)\big((X_j^n)^2-1\big)\Big].\end{aligned} \tag{7.36}$$

Por otra parte, de la proposición 5.10 inciso b) y de la proposición 3.13 tenemos que para $i<j$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n\Big[\big((X_i^n)^2-1\big)\big((X_j^n)^2-1\big)\mid\sigma(\pi_l:l\leq j-1)\Big]&=\big((X_i^n)^2-1\big)\mathbb{E}_n\Big[\big((X_j^n)^2-1\big)\mid\sigma(\pi_l:l\leq j-1)\Big]\\&=0,\end{aligned} \tag{7.37}$$

y por tanto

$$\mathbb{E}_n\Big[\big((X_i^n)^2-1\big)\big((X_j^n)^2-1\big)\Big]=0.$$

Sustituyendo esta igualdad en (7.36) tenemos que

$$\mathbb{E}_n\Big[\Big([W^n,W^n]_t-\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)^2\Big]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}_n\Big[\big((X_i^n)^2-1\big)^2\Big].$$

De esta igualdad y la desigualdad (7.35) se obtiene que para $n \geq max\{\widehat{N}, N_1\}$

$$\mathbb{E}_n\Big[\Big([W_n, W^n]_t - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\Big)^2\Big] \leq \frac{(K^2+1)^2}{n^2}.$$

Luego, de la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}_n\Big[\Big([W^n, W^n]_t - t\Big)^2\Big]\Big)^{1/2} &\leq \Big(\mathbb{E}_n\Big[\Big([W^n, W^n]_t - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\Big)^2\Big]\Big)^{1/2} + \Big|\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} - t\Big| \\ &\leq \frac{K^2+1}{n} + \Big|\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} - t\Big|.\end{aligned}$$

De esta desigualdad podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n\Big[\Big([W^n, W^n]_t - t\Big)^2\Big] = 0,$$

y por lo tanto, de la desigualdad

$$\mathbb{P}_n\big[\,|[W^n, W^n]_t - t| > \varepsilon\,\big] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}_n\Big[\Big([W^n, W^n]_t - t\Big)^2\Big],$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\big[\,|[W^n, W^n]_t - t| > \varepsilon\,\big] = 0,$$

para cada $\varepsilon > 0$, es decir,

$$[W^n, W^n]_t \xrightarrow{P} t. \tag{7.38}$$

De (7.35) y de (7.38) tenemos que $\{W^n\}_{n\geq\widehat{N}}$ cumple las condiciones del corolario 4.37. Por lo tanto, $W^n \Rightarrow W$.

□

Observación 7.5. Para cada $n \geq \widehat{N}$, de la proposición 5.10 tenemos que

$$\mathbb{E}_n[(X_j^n)^2\,|\sigma(\pi_i : i \leq j-1)] = 1,$$

para todo $j \geq 1$. En particular, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n[(X_j^n)^2] &= \mathbb{E}_n\Big[\mathbb{E}_n[(X_j^n)^2\,|\,\sigma(\pi_i : i \leq j)]\Big] \\ &= 1.\end{aligned} \tag{7.39}$$

De esto último se sigue que

$$\mathbb{E}_n\big[\,[W^n, W^n]_t\big] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}_n\big[(X_i^n)^2\big] = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \leq t. \tag{7.40}$$

Luego,

$$\sup_{n\geq\widehat{N}} \mathbb{E}_n\big[\,[W^n, W^n]_t\big] < \infty. \tag{7.41}$$

La condición anterior es de suma importancia, pues ésta nos permitirá verificar que se cumplen las condiciones de los teoremas de convergencia de integrales estocásticas.

Lema 7.6. *Definimos el proceso estocástico $Z_n(\hat{\rho}^n)$ por*

$$Z_n(\hat{\rho}^n)_t := Z_n(\hat{\rho}^n_t),$$

donde Z_n se encuentra dado por (7.28). Entonces

$$Z_n(\hat{\rho}^n) \Rightarrow 0.$$

Demostración. Recordemos que Z_n se encuentra dado por

$$\begin{aligned} Z_n(\rho) = &\left(\frac{1}{\sqrt{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big)Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}} - \frac{1}{\sqrt{a_0 a_1}}\right)\Big(a_{1,0}C\rho + \overline{a}_{1,0}\rho C^* - Tr\big(a_{1,0}C\rho + \overline{a}_{1,0}\rho C^*\big)\rho\Big) \\ &+ \left(\frac{a_0 Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big) - a_1 Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}{\sqrt{Tr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big)Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}C\rho C^* + \sqrt{n}\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\rho\right) + \frac{(a_1^2 - a_0^2)}{\sqrt{nTr\big(\mathcal{L}_0^n(\rho)\big)Tr\big(\mathcal{L}_1^n(\rho)\big)}} Tr(C\rho C^*) \end{aligned}$$

y $\{Z_n\}_{n\geq \widehat{N}}$ converge uniformemente a cero sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Sea $n \geq \widehat{N}$, dado $T \in [0,\infty)$, tenemos que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|Z_n(\hat{\rho}^n_t)\|_2 \leq \sup_{\rho\in\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)} \|Z_n(\rho)\|_2.$$

Luego, para cada n se tiene que

$$\mathbb{P}_n\Big[\sup_{0\leq t\leq T} \|Z_n(\hat{\rho}^n_t)\|_2 > \varepsilon\Big] \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\rho\in\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)} \|Z_n(\rho)\|_2,$$

entonces

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|Z_n(\hat{\rho}^n_t)\|_2 \xrightarrow{P} 0,$$

pues la sucesión de funciones $\{Z_n\}_n$ converge uniformemente a cero sobre $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$. Luego, del lema 4.28 se sigue que

$$Z_n(\hat{\rho}^n) \Rightarrow 0.$$

□

Para cada n definimos el proceso estocástico $I^n = (I^n_t)_{t\geq 0}$ por medio de

$$I^n_t := \int_0^t Z_n(\hat{\rho}^n_{s\text{-}})\, dW^n_s. \tag{7.42}$$

Proposición 7.7. $I_n \Rightarrow 0$.

Demostración. Del lema 7.6 sabemos que $Z_n(\hat{\rho}^n) \Rightarrow 0$. Por otra parte, de la proposición 4.29 obtenemos que $(Z_n(\hat{\rho}^n), W^n) \Rightarrow (0, W)$, pues $\{W^n\}_{n\geq\widehat{N}}$ converge en distribución al movimiento browniano y este es un proceso estocástico con trayectorias continuas. De (7.41) tenemos que $\{W^n\}_{n\geq\widehat{N}}$ cumple la condición (C1') de la observación 4.39 y por tanto, del teorema 4.38 se sigue que

$$(Z_n(\hat{\rho}^n), W^n, I^n) \Rightarrow (0, W, 0).$$

En particular, tenemos que $I^n \Rightarrow 0$.

□

Ahora veremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.8. *Sean* $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$, $\{x_0, x_1\}$ *una base ortonormal de* $\mathbb{C}^2$ *y* $\mathsf{X} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ *un observable cuya descomposición espectral no es diagonal en la base* $\{x_0, x_1\}$, *es decir, las proyecciones espectrales cumplen la siguiente relación:*

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & a_{0,1} \\ \overline{a}_{0,1} & a_1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} a_1 & \text{-}a_{0,1} \\ \text{-}\overline{a}_{0,1} & a_0 \end{pmatrix},$$

donde $a_0, a_1 > 0$, $a_1 + a_0 = 1$ *y* $|a_{0,1}| = \sqrt{a_0 a_1}$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos el proceso estocástico* $(\rho_k^n)_{k\geq 0}$ *con estado inicial* $\rho_0^n = \rho$, *construído a partir del observable* X *y del operador unitario*

$$U^n = exp\Big(-\frac{i}{n} H_{tot}^n\Big),$$

donde

$$H_{tot}^n := H_0 \otimes I + \sqrt{n}\left(-ie^{i\theta} C \otimes a_1^0 + ie^{-i\theta} C^* \otimes a_0^1\right), \tag{7.43}$$

y θ *es tal que* $a_{1,0} = e^{i\theta}|a_{1,0}|$. *Sea* $(\rho_t)_{t\geq 0}$ *la solución de la ecuación de Belavkin (ecuación (6.1)) con condición inicial* $\rho_0 = \rho$, *es decir,*

$$\rho_t = \rho + \int_0^t L(\rho_s)\, ds + \int_0^t \Big(C\rho_s + \rho_s C^* - Tr(C\rho_s + \rho_s C^*)\rho_s\Big)\, dW_s,$$

donde

$$L(M) := -i[H_0, M] - \frac{1}{2}\{CC^*, M\} + CMC^*, \quad M \in M_2(\mathbb{C}).$$

Entonces la sucesión de procesos estocásticos $\{\rho^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$\rho_t^n = \rho_{\lfloor nt \rfloor}^n,$$

converge en distribución a $(\rho_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. Sea $\widehat{N} \in \mathbb{N}$ tal que cumple la condición (7.17). Entonces para todo $n \geq \widehat{N}$ se tiene que

$$\hat{\rho}_t^n = \rho + \epsilon_t^n + \int_0^t L(\hat{\rho}_{s\text{-}}^n)\, dV_s^n + \int_0^t \Big(C\hat{\rho}_{s\text{-}}^n + \hat{\rho}_{s\text{-}}^n C^* - Tr\big(C\hat{\rho}_{s\text{-}}^n + \hat{\rho}_{s\text{-}}^n C^*\big)\hat{\rho}_{s\text{-}}^n\Big)\, dW_s^n, \tag{7.44}$$

donde $\epsilon^n = (\epsilon_t^n)_{t\geq 0}$ se encuentra dado por

$$\epsilon_t^n := \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_i^n) + I_t^n,$$

(ver la ecuación (7.30)). Luego, consideraremos la convergencia de la sucesión a partir de $\widehat{N}$ para poder aplicar los resultados de integrales estocásticas.

Para aplicar directamente los teoremas de integrales estocásticas, identificaremos a los procesos estocásticos $(X_t)_{t\geq 0}$ con espacio de estados $M_2(\mathbb{C})$ como procesos estocásticos con espacio de estados $\mathbb{R}^8$: para cada $t \geq 0$, sea $(X_t)_{ij}$ la entrada ij de X_t, identificaremos a X_t con el vector con entradas $Re((X_t)_{ij})$ y $Im((X_t)_{ij})$, donde $i, j \in \{0, 1\}$. El orden en el que identificaremos cada una de las entradas del vector que resulta de este procedimiento es indistinto.

Primero analicemos la convergencia de la sucesión de procesos $\{\epsilon^n\}_{n\geq \widehat{N}}$. Notemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor-1}\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_i^n)\Big\|_2 &\leq \lfloor nT\rfloor \sup_{\rho\in\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)}\Big\|\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\Big\|_2 \\ &\leq T\sup_{\rho\in\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)}\Big\|n\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\Big\|_2.\end{aligned} \tag{7.45}$$

Luego, para cada $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\mathbb{P}_n\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor-1}\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_i^n)\Big\|_2 > \varepsilon\Big] \leq \frac{T}{\epsilon}\sup_{\rho\in\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)}\Big\|n\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho)\Big\|_2, \tag{7.46}$$

y por tanto

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor-1}\hat{o}_{\frac{1}{n}}(\rho_i^n)\Big\|_2 \xrightarrow{P} 0.$$

Del lema 4.28 se sigue que $\epsilon^n - I^n \Rightarrow 0$ y además, de la proposición 7.42 tenemos que $I^n \Rightarrow 0$. Luego, de la proposición 4.30 se sigue que $\varepsilon^n \Rightarrow 0$.

Por otra parte, tenemos que $V^n \Rightarrow Id$ y $W^n \Rightarrow W$ (proposición 7.4), donde Id denota a la función identidad sobre $[0,\infty)$ y W es un Movimiento Browniano. De la proposición 4.22 inciso b) tenemos que la sucesión (V^n, W^n) es tensa, pues cada una de las entradas converge en distribución a procesos estocásticos con trayectorias continuas. Ahora veamos que $(V^n, W^n) \Rightarrow (Id, W)$. De la proposición 4.26 obtenemos que para $k \in \mathbb{N}$ y $t_1, \cdots, t_k \in [0,\infty)$ se tiene que

$$(W_{t_1}^n, \cdots, W_{t_k}^n) \Rightarrow (W_{t_1}, \cdots, W_{t_k})$$

y además tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}(V_{t_1}^n, \cdots, V_{t_k}^n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\lfloor nt_1\rfloor}{n}, \cdots, \frac{\lfloor nt_k\rfloor}{n}) = (t_1, \cdots, t_k).$$

Nótese que este límite es un límite de vectores que son constantes como variables aleatorias y en particular, este límite también se cumple en distribución a una constante, es decir,

$$(V_{t_1}^n, \cdots, V_{t_k}^n) \Rightarrow (t_1, \cdots, t_k).$$

De esto último y de la proposición 4.26 tenemos que

$$(V_{t_1}^n, \cdots, V_{t_k}^n, W_{t_1}^n, \cdots, W_{t_k}^n) \Rightarrow (t_1, \cdots, t_k, W_{t_1}, \cdots, W_{t_k}),$$

es decir,

$$(V^n, W^n) \xrightarrow{\mathcal{L}([0,\infty))} (Id, W), \tag{7.47}$$

(ver definición 4.17). Luego, de (7.47) y de la proposición 4.23 obtenemos que

$$(V^n, W^n) \Rightarrow (Id, W). \tag{7.48}$$

De (7.48) y de la proposición 4.29 tenemos que $(\epsilon^n, V^n, W^n) \Rightarrow (0, Id, W)$. Además, notemos que la función

$$(x, y, z) \mapsto (x + \rho, y, z)$$

es continua sobre $D_{\mathbb{R}^8\times\mathbb{R}^2}[0,\infty)$ (o bien, sobre $D_{M_2(\mathbb{C})\times\mathbb{R}^2}[0,\infty)$) y por tanto, de la proposición 4.8 se sigue que

$$(\rho+\epsilon^n, V^n, W^n) \Rightarrow (\rho, Id, W). \tag{7.49}$$

Por último, reescribiremos la ecuación (7.44) para poder aplicar el teorema de convergencia de integrales estocásticas. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\rho}^n_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\rho}+\epsilon^n_t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L(\hat{\rho}^n_{s\text{-}}) & C\hat{\rho}^n_{s\text{-}} + \hat{\rho}^n_{s\text{-}}C^* - Tr\big(C\hat{\rho}^n_{s\text{-}} + \hat{\rho}^n_{s\text{-}}C^*\big)\hat{\rho}^n_{s\text{-}} \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} V^n_s \\ W^n_s \end{pmatrix}. \tag{7.50}$$

Tenemos que la semimartingala vectorial (V^n, W^n) cumple la condición (C1') de la observación 4.39, pues

$$T_t(V^n) = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n},$$

luego, de esto último y de la observación 7.5 se sigue que

$$\sup_{n\geq \widehat{N}} \mathbb{E}_n\big[[W^n,W^n]_t + T_t(V^n)\big] \leq 2t. \tag{7.51}$$

Recordemos que las funciones $L, \widehat{R} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ se encuentran dadas por

$$L(M) = -i[H_0, M] - \frac{1}{2}\{CC^*, M\} + CMC^*, \quad M \in M_2(\mathbb{C}),$$

y

$$\widehat{R}(M) = CM + MC^* - Tr(CM + MC^*)M, \quad M \in M_2(\mathbb{C}).$$

Identificaremos a L y $\widehat{R}$ como funciones de $\mathbb{R}^8$ en $\mathbb{R}^8$. Con esta identificación, definimos la función $F : \mathbb{R}^8 \to M_{16\times 2}(\mathbb{R})$ por

$$F(M) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L(M) & \widehat{R}(M) \end{pmatrix}, \quad M \in \mathbb{R}^8,$$

donde los ceros en los bloques de F representan al vector 0 en $\mathbb{R}^8$ como vector columna. Veremos que F cumple la condición (C2') de la observación 4.42. Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_{\mathbb{R}^8}[0,\infty)$ tal que

$$\sup_{s\leq T} \|M_n(s) - M(s)\|_2 \to 0.$$

Tenemos que

$$\|F(M_n(s)) - F(M(s))\|_2 = \|L(M_n(s)) - M(s))\|_2 + \|\widehat{R}(M_n(s)) - \widehat{R}(M(s))\|_2.$$

De la linealidad y continuidad de L, obtenemos directamente que

$$\sup_{s\leq T} \|L(M_n(s)) - L(M(s))\|_2 \to 0.$$

De manera análoga a la desigualdad (6.28) de la demostración del teorema 6.8, obtenemos que

$$\sup_{s\leq T} \|\widehat{R}(M_n(s)) - \widehat{R}(M(s))\|_2 \leq \big(4\|C\|_2 + 4\|C\|_2 K\big) \sup_{s\leq T} \|M_n(s) - M(s)\|_2$$

donde

$$K := \text{máx}\big\{\sup_{s\leq T}\|M(s)\|_2, \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{s\leq T}\|M_n(s)\|_2\big\}.$$

Y por tanto,

$$\sup_{s\leq T} \|\widehat{R}(M_n(s)) - \widehat{R}(M(s))\|_2 \to 0. \tag{7.52}$$

Luego, F cumple la condición (C2').

Puesto que la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\rho_t = \rho + \int_0^t L(\rho_s)\, ds + \int_0^t \Big(C\rho_s + \rho_s C^* - Tr\big(C\rho_s + \rho_s C^*\big)\rho_s\Big) dW_s \tag{7.53}$$

cumple unicidad trayectorial (teorema 6.8), cumple unicidad en ley. Por otra parte, tenemos que

$$(0, \rho + \epsilon^n, 0, V^n, W^n) \Rightarrow (0, \rho, 0, Id, W),$$

pues sólo añadimos la coordenada cero. Por lo tanto, de esto último, de las condiciones (7.51) y (7.52), y del teorema 4.41 se sigue que

$$(0, \rho + \epsilon^n, V^n, W^n, 0, \hat{\rho}^n) \Rightarrow (0, \rho, Id, W, 0, \hat{\rho}).$$

En particular, tenemos que $\hat{\rho}^n \Rightarrow \hat{\rho}$.

□

Referencias

[1] Stephane Attal. Tensor products and partial traces. `http://math.univ-lyon1.fr/\textasciitildeattal/Partial_traces.pdf`.

[2] M Ballesteros, N Crawford, M Fraas, J Fröhlich, and B Schubnel. Perturbation theory for weak measurements in quantum mechanics, i–systems with finite-dimensional state space. *arXiv*, pages arXiv–1709, 2017.

[3] Alberto Barchielli and Matteo Gregoratti. *Quantum trajectories and measurements in continuous time: the diffusive case*, volume 782. Springer, 2009.

[4] Rajendra Bhatia. *Matrix analysis*, volume 169. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, third edition, 1995.

[6] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley, 2nd edition, 1999.

[7] Carlos Nathanael Chávez Saab. Operadores aleatorios en la mecánica cuántica: procesos estocásticos y análisis funcional. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

[8] Stewart N Ethier and Thomas G Kurtz. *Markov processes: characterization and convergence*, volume 282. John Wiley & Sons, 2009.

[9] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.

[10] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski, and E.C.G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n level systems. *J. Math. Phys.*, 17:821–825, 1976.

[11] Allan Gut. *Probability: a graduate course*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2013.

[12] Jean Jacod and Philip Protter. *Probability essentials*. Springer Science & Business Media, 2012.

[13] Jean Jacod and Albert Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288. Springer Science & Business Media, 2013.

[14] E. Jakeman, C.J. Oliver, and E.R. Pike. Optical homodyne detection. *Advances in Physics*, 24(3):349–405, 1975.

[15] Ioannis Karatzas and Steven E Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1998.

[16] Thomas G Kurtz and Philip Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *The Annals of Probability*, pages 1035–1070, 1991.

[17] Jean-François Le Gall. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, volume 274. Springer, 2016.

[18] Clément Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation: the diffusive case. *The Annals of Probability*, pages 2332–2353, 2008.

[19] Philip E Protter. Stochastic differential equations. In *Stochastic integration and differential equations*, pages 249–361. Springer, 2005.

[20] Daniel Revuz and Marc Yor. Continuous martingales and brownian motion. 1999.

[21] René L. Schilling and Lothar Partzsch. *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014.