



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Divisores efectivos en el esquema de Hilbert de puntos en el plano.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO
DE: MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Manuel Alejandro Leal Camacho

DIRECTOR
Dr. César Adrián Lozano Huerta
Instituto de Matemáticas, UNAM - Oaxaca

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2021.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	v
1. Interpolación	1
1.1. Interpolación de Lagrange	1
1.2. Interpolación de Lagrange en \mathbb{P}^n	2
1.3. Rectas contenidas en hipersuperficies	2
1.4. Curvas normales racionales	3
1.5. Haces vectoriales	5
2. El esquema de Hilbert de puntos en el plano	9
2.1. Definiciones	9
2.2. Esquema de Hilbert de puntos	11
2.3. Puntos en una superficie	13
2.4. Divisor de Brill-Noether	13
3. Generalidades de clases efectivas en $\text{Pic } \mathbb{P}^{2[n]}$	19
3.1. Invariantes numéricos de un haz vectorial	19
3.2. Cono efectivo: definición y propiedades	21
3.3. Producto de intersección en $\mathbb{P}^{2[n]}$	23
3.4. Divisores extremales	26
4. El cono efectivo de $\mathbb{P}^{2[n]}$	29
4.1. Haces de Steiner en el plano	29
4.2. Multiplicación de polinomios	31
4.3. Determinando el cono efectivo	35
4.4. Interpolación y estabilidad de haces vectoriales	38
4.5. Haces excepcionales	39
4.6. Clasificación de haces vectoriales estables	45
4.7. Cono efectivo: el caso general	50
5. Descomposición por lugar base estable	55
5.1. Una estrategia para calcular la descomposición por lugar base estable	55
5.2. Curvas en familias conocidas	58
5.3. Resoluciones minimales de puntos y degeneraciones	60
5.4. Teorema de Gaeta para haces vectoriales	65
5.5. Demostración del Teorema 5.1	67
5.6. Descomposición por lugar base estable de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[8]}$	68
5.7. Descomposición por lugar base estable de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[12]}$	71

Introducción

Algunas de las variedades más interesantes en geometría algebraica son los *espacios móduli*. Un espacio móduli es una variedad \mathcal{M} que, a su vez, parametriza alguna familia de variedades algebraicas. La relación entre la geometría de \mathcal{M} y la geometría de los objetos que parametriza da lugar a una gran riqueza desde el punto de vista algebraico y geométrico.

Dado un espacio móduli \mathcal{M} un tema de interés es el estudio de la geometría birracional de \mathcal{M} a través del *programa del modelo minimal*. Por ejemplo, en [6] se estudia el espacio de Kontsevich de morfismos estables $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$; [21] trata sobre el espacio móduli de curvas de género 2; el espacio móduli de curvas de género superior se estudia en [22] y [23]; [30] analiza el espacio de cuádricas completas; [29] estudia la geometría birracional del esquema de Hilbert de puntos en el plano y sus deformaciones; y [7] estudia el caso, más general, de espacios móduli de gavillas coherentes sobre el plano \mathbb{P}^2 .

El espacio que estudiaremos en este trabajo de tesis es el *esquema de Hilbert de puntos* en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 , denotado por $\mathbb{P}^{2[n]}$. Éste parametriza subesquemas del plano de dimensión 0 y longitud n ; el elemento general en $\mathbb{P}^{2[n]}$ corresponde a n puntos distintos en \mathbb{P}^2 . A pesar de que los objetos que parametriza $\mathbb{P}^{2[n]}$ son sencillos, describir la geometría birracional de $\mathbb{P}^{2[n]}$ en su totalidad es un tema de investigación actual. Por ejemplo, en [2] se estudia este problema para $n \leq 9$ y se muestra su relación con la teoría de estabilidad de Bridgeland. Por otro lado, el contenido de la tesis doctoral [25] es calcular el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$, el cual es un ingrediente fundamental en el estudio del programa del modelo minimal, para una familia infinita de valores de n . En el trabajo subsecuente [26] se calcula el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ para todo valor de n .

Esta tesis está basada principalmente en los dos artículos [25] y [26]. La organización de la tesis es como sigue: en el capítulo 1 daremos algunos ejemplos de problemas de interpolación en geometría algebraica con el fin de motivar la noción de *interpolación* para un haz vectorial. Informalmente, un haz vectorial E sobre una variedad X satisface interpolación para n puntos si el número de secciones globales de E que se anulan en n puntos generales de X es el esperado. En el capítulo 2 trataremos generalidades del esquema de Hilbert $\mathbb{P}^{2[n]}$. En particular, veremos que el grupo de Picard de $\mathbb{P}^{2[n]}$ es libre abeliano en dos generadores. Por último, explicaremos cómo un haz E que satisface interpolación para n puntos da lugar a un divisor efectivo cuya clase en términos de estos dos generadores es

$$(\deg E) \cdot H - \frac{\text{rank } E}{2} \Delta.$$

Esta relación será nuestra principal herramienta para construir clases efectivas en $\mathbb{P}^{2[n]}$. Una vez hecho esto, debemos probar que estas clases son extremales; es decir, que generan al cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. Con este fin en mente, estudiaremos en el capítulo 3 el producto de intersección definido entre curvas y divisores de $\mathbb{P}^{2[n]}$. El capítulo 4 reúne los resultados generales sobre el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. Utilizamos los resultados del capítulo 3 para calcular $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ en los casos cubiertos en [25]. Además, basándonos en resultados de [26], explicaremos cómo determinar $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ de manera numérica en el caso general. En el capítulo 5 estudiaremos el concepto de *descomposición por lugar base estable* (SBLD por sus siglas en inglés) de $\mathbb{P}^{2[n]}$. Determinar el cono efectivo puede considerarse el primer paso en el cálculo de la SBLD así que el contenido de este capítulo es una continuación natural de lo presentado en el capítulo 4. Las herramientas principales para investigar la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ serán, además de los cálculos realizados en los capítulos 3 y 4, un estudio cuidadoso de las distintas resoluciones minimales que puede tener un ideal de n puntos en el plano. En este capítulo proponemos una estrategia constructiva para calcular la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. Utilizaremos esta estrategia para determinar el *cono movable* de $\mathbb{P}^{2[n]}$ (es decir, el siguiente paso en el cálculo de la SBLD) para la familia de valores de $n = \binom{r+1}{2}$ en el teorema 5.1 y para calcular parcialmente la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[12]}$ de manera explícita.

El teorema 5.1 es el resultado principal de esta tesis y es parte de un trabajo en curso junto con el Dr. César Adrián Lozano Huerta y el Dr. Tim Ryan. Por otro lado, hasta donde sabemos el cálculo explícito de la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ para $n \geq 10$ no aparece en la literatura.

Capítulo 1

Interpolación

Dedicaremos este capítulo a estudiar algunos ejemplos de problemas de interpolación en geometría algebraica. El ejemplo más sencillo que abordaremos es el problema de interpolación de Lagrange, que busca encontrar una función polinomial de una variable que tome ciertos valores en determinados puntos.

Las primeras dos secciones tratan sobre interpolación de Lagrange y sobre una posible generalización. En la tercera sección discutiremos cuándo una colección de rectas determina una hipersuperficie en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n . La cuarta sección habla sobre cuándo una colección de puntos en \mathbb{P}^n determina cierto tipo especial de curvas: las curvas normales racionales. En la quinta y última sección definimos la noción de interpolación para haces vectoriales, la cual jugará un papel central durante todo este trabajo de tesis.

Durante todo el capítulo, \mathbb{K} denotará un campo infinito y $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ al espacio proyectivo de dimensión n sobre \mathbb{K} .

1.1. Interpolación de Lagrange

Teorema 1.1 (Interpolación de Lagrange). *Dadas $d + 1$ parejas $(x_0, y_0), \dots, (x_d, y_d) \in \mathbb{K}^2$ tales que $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$, existe un único polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado d o menor tal que $p(x_i) = y_i$ para cada i .*

Demostración. Consideremos un polinomio

$$p(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$$

(nótese que a_d podría ser 0). La condición de que $p(x_i) = y_i$ para cada i es equivalente a la ecuación lineal

$$A \cdot (a_0, a_1, \dots, a_d)^t = (y_0, \dots, y_d) \tag{1.1.1}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^d \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_d & \dots & x_d^d \end{pmatrix}$$

es la matriz de *Vandermonde*. El determinante de A es

$$\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (x_j - x_i),$$

el cual es distinto de cero pues los x_i son distintos a pares. Por lo tanto, la ecuación (1.1.1) tiene una única solución. ■

Para nuestros fines será más natural formular el teorema 1.1 para funciones algebraicas $p : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ por medio de la inclusión natural

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ x &\mapsto [x : 1]. \end{aligned}$$

El siguiente resultado es equivalente al teorema 1.1.

Teorema 1.2 (Interpolación de Lagrange 2). *Dados d puntos distintos $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{P}^1$ existe un polinomio homogéneo p de grado d , único salvo por un múltiplo escalar, tal que $p(x_1) = \dots = p(x_d) = 0$.*

1.2. Interpolación de Lagrange en \mathbb{P}^n

Proposición 1.3. *Dados $N := \binom{d+n}{n} - 1$ puntos generales en \mathbb{P}^n existe una única hipersuperficie de grado d que los contiene.*

Observación 1.3.1. La proposición 1.3 no es una generalización estricta del teorema 1.1 pues éste dice exactamente qué configuraciones satisfacen la conclusión; en el caso $n = 1$ basta con que los N puntos sean distintos. \triangleleft

Demostración de la proposición 1.3. Dado un vector $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de enteros no negativos, denotamos

$$|\alpha| := \sum_{i=0}^n \alpha_i.$$

Una hipersuperficie de grado d en \mathbb{P}^n está determinada por un polinomio homogéneo de grado d distinto de 0, que podemos escribir como

$$P(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha \cdot x_0^{\alpha_0} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}. \quad (1.2.1)$$

Dos polinomios definen la misma hipersuperficie si y sólo si uno es un múltiplo escalar del otro. Esto nos permite dar una estructura de espacio proyectivo de dimensión N al conjunto de hipersuperficies de grado d en \mathbb{P}^n , al cual denotaremos por V_d^n . Si $x = [x_0 : \dots : x_n]$ denota a un punto en \mathbb{P}^n , entonces la hipersuperficie definida por P contiene a x si y sólo si la ecuación (1.2.1) se anula. Por lo tanto, dados r puntos $x^{(1)}, \dots, x^{(r)} \in \mathbb{P}^n$, el conjunto

$$V_d^n(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) := \{F \in V_d^n : \{x^{(1)}, \dots, x^{(r)}\} \subset F\}$$

es un subespacio lineal de V_d^n determinado por r ecuaciones lineales. Estas ecuaciones no necesariamente son independientes, pero si $r \leq N$, esto prueba que la dimensión de $V_d^n(x^{(1)}, \dots, x^{(r)})$ es al menos $N - r$. En particular cualquier colección de N puntos está contenida en una hipersuperficie de grado d .

Ahora demostraremos, por inducción en $r \leq N$, que si $\{x^{(1)}, \dots, x^{(r)}\} \subset \mathbb{P}^n$ entonces en efecto

$$\dim V_d^n(x^{(0)}, \dots, x^{(r)}) = N - r. \quad (1.2.2)$$

El caso particular en que $r = N$ demostrará que $V_d^n(x^{(0)}, \dots, x^{(N)})$ consiste de un único punto, que es justo lo que buscamos demostrar.

Si $r = 0$ la ecuación (1.2.2) claramente se satisface. Supongamos que es cierta para $0 \leq r < N$ y consideremos un subconjunto general $\{x^{(0)}, \dots, x^{(r+1)}\} \subset \mathbb{P}^n$. Tomemos una curva $F \in V_d^n(x^{(0)}, \dots, x^{(r)})$ y notemos que $x^{(r+1)} \notin F$ en general. Por lo tanto

$$\begin{aligned} N - (r + 1) &\leq \dim V_d^n(x^{(0)}, \dots, x^{(r+1)}) \\ &< \dim V_d^n(x^{(0)}, \dots, x^{(r)}) = N - r. \end{aligned}$$

■

1.3. Rectas contenidas en hipersuperficies

En la sección anterior estudiamos el número de puntos que determinan a una hipersuperficie de grado d en \mathbb{P}^n . Una generalización natural consiste en preguntarnos cuántos k -planos determinan a una hipersuperficie para valores de k mayores a 0. A continuación discutimos esta pregunta para el caso $k = 1$; es decir, el caso de rectas contenidas en una hipersuperficie en \mathbb{P}^n .

Como en la sección anterior, denotaremos por V_d^n al conjunto de hipersuperficies de grado d en \mathbb{P}^n , el cual forma un espacio proyectivo de dimensión $N := \binom{d+n}{n} - 1$. Por el teorema de Bézout, si una

hipersuperficie de grado d intersecta a una recta en $d + 1$ puntos distintos o más entonces la contiene completamente. Es decir, dada una recta $L \subset \mathbb{P}^n$ y $d + 1$ puntos distintos $x_0, \dots, x_d \in L$, los conjuntos

$$V_d^n(L) := \{F \in V_d^n : L \subset F\} \text{ y}$$

$$V_d^n(x_0, \dots, x_d) := \{F \in V_d^n : x_0, \dots, x_d \in F\}$$

coinciden. De manera similar al teorema 1.1 podemos ver que la condición $x_i \in F$ es equivalente a una ecuación lineal en las coordenadas de F . Por lo tanto, $V_d^n(L)$ es un subespacio lineal de V_d^n determinado por $d + 1$ ecuaciones lineales. De manera análoga, dadas k rectas $L_1, \dots, L_k \subset \mathbb{P}^n$, el conjunto

$$V_d^n(L_1, \dots, L_k) := \{F \in V_d^n : L_1 \cup \dots \cup L_k \subset F\}$$

es un subespacio lineal de V_d^n determinado por $k \cdot (d + 1)$ condiciones lineales. En particular,

$$\dim V_d^n(L_1, \dots, L_k) \geq N - k \cdot (d + 1)$$

y la igualdad se alcanzará cuando todas las condiciones lineales sean independientes. El siguiente teorema asegura que estas condiciones son independientes si elegimos una colección general de rectas (ver [20]).

Teorema 1.4 (Hartshorne-Hirschowitz). *Supongamos que \mathbb{K} es algebraicamente cerrado y $n \geq 3$. Si $L_1, \dots, L_k \subset \mathbb{P}^n$ son k rectas generales se cumple que*

$$\dim V_d^n(L_1, \dots, L_k) = N - k \cdot (d + 1)$$

si $N \geq k \cdot (d + 1)$, y $V_d^n(L_1, \dots, L_k)$ es vacío en otro caso.

Del teorema anterior vemos que cinco rectas generales en \mathbb{P}^3 no están contenidas en ninguna superficie cúbica. Una pregunta natural es ¿qué condiciones geométricas especiales deben tener 5 rectas para estar contenidas en una cúbica? En este caso en particular la respuesta es sencilla y consta de las siguientes dos familias:

- a) cinco rectas dos de las cuales son incidentes,
- b) cinco rectas incidentes a otra recta común.

Más aún, una hipersuperficie cúbica está determinada de manera única por cualquier colección de cinco rectas contenidas en ella. El resultado recíproco es falso, como lo ejemplifica el siguiente teorema (ver [5]).

Teorema 1.5 (Cayley-Salmon). *Si \mathbb{K} es algebraicamente cerrado y de característica 0, una hipersuperficie cúbica general en \mathbb{P}^3 contiene 27 rectas.*

De hecho, una hipersuperficie general de grado d en \mathbb{P}^n contiene un número finito (distinto de cero) de rectas si y sólo si $d = 2n - 3$ (ver [34]). El número exacto de rectas que contiene una hipersuperficie general de grado $d = 2n - 3$ en \mathbb{P}^n es bien conocido para valores pequeños de n . Una discusión del tema se puede encontrar en [12, capítulo 6].

1.4. Curvas normales racionales

Los problemas que hemos considerado hasta ahora tratan sobre cómo ciertos objetos determinan hipersuperficies en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n . El objetivo de esta sección es probar la proposición 1.7. Ésta sigue la misma filosofía, pero considerando curvas en lugar de hipersuperficies.

Definición 1.6. Diremos que un subconjunto $Z \subset \mathbb{P}^n$ está en *posición linealmente general* si para cada $1 \leq k \leq n$, ningún subconjunto $Z' \subset Z$ de $k + 2$ puntos está contenido en un k -plano.

Observación 1.6.1. Si Z está en posición linealmente general entonces cualquier subconjunto $Z' \subset Z$ lo está. Si Z tiene exactamente $n + 2$ elementos, entonces Z está en posición linealmente general si y sólo si no está contenido en un hiperplano. La imagen de un conjunto en posición linealmente general bajo un automorfismo de \mathbb{P}^n está de nuevo en posición linealmente general. \triangleleft

Proposición 1.7. *Dados $n + 3$ puntos en posición linealmente general en \mathbb{P}^n existe una única curva normal racional que los contiene.*

Lema 1.8. *Dados dos subconjuntos $Z = \{x_0, \dots, x_{n+1}\}, Z' = \{y_0, \dots, y_{n+1}\} \subset \mathbb{P}^n$ en posición linealmente general existe un único cambio de coordenadas $\theta \in \mathbb{P}GL(n+1, \mathbb{K})$ tal que $\theta \cdot x_i = y_i$ para cada $0 \leq i \leq n+1$.*

Demostración del lema. Vamos a suponer que $Z = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$, donde $e_i := [0 : \dots : 1 : \dots : 0]$ tiene su única entrada distinta de 0 en la i -ésima posición para $0 \leq i \leq n$, y $e_{n+1} := [1 : 1 : \dots : 1]$. Denotemos por $E_0, \dots, E_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ a los elementos de la base canónica, y por $E_{n+1} := E_0 + \dots + E_n$. Asimismo, consideremos representantes no homogéneos $Y_0, \dots, Y_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ de y_0, \dots, y_{n+1} respectivamente.

Como Z' está en posición linealmente general, el conjunto $\{Y_0, \dots, Y_{n+1}\}$ es una base de \mathbb{K}^{n+1} como espacio vectorial y

$$Y_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot Y_i$$

con todos los λ_i distintos de 0. Sea $\Theta : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ la única transformación lineal tal que $\Theta \cdot E_i = \lambda_i \cdot Y_i$ para $0 \leq i \leq n$. Sigue que

$$\begin{aligned} \Theta \cdot E_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \Theta \cdot E_i \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot Y_i \\ &= Y_{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la clase $\theta \in \mathbb{P}GL(n+1, \mathbb{K})$ de Θ cumple lo pedido.

Para mostrar la unicidad de θ basta notar que un cambio de coordenadas que fija a e_0, \dots, e_n tiene entradas $\lambda_i \neq 0$ en la diagonal y es cero en cualquier otra entrada. Si además queremos que

$$e_{n+1} = \theta \cdot e_{n+1} = [\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n]$$

necesitamos entonces que $\lambda_0 = \dots = \lambda_n$; es decir, $\theta \in \mathbb{P}GL(n, \mathbb{K})$ es necesariamente la identidad. ■

Corolario 1.9. *Supongamos que $0 \leq k \leq n$. Dados $k+1$ puntos en \mathbb{P}^n en posición linealmente general existe un único k -plano que los contiene.*

Demostración. Por el lema 1.8, podemos suponer que los puntos son $Z_k := \{e_0, \dots, e_k\}$, donde e_i es como en el lema. Basta entonces notar que el único k -plano que contiene a Z_k es el determinado por las ecuaciones $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$.

Para ver esto recordemos que un k -plano en \mathbb{P}^n está determinado por $n-k$ formas lineales

$$a_0^{(j)} x_0 + a_1^{(j)} x_1 + \dots + a_n^{(j)} x_n; \quad 1 \leq j \leq n-k$$

linealmente independientes. Evaluando en cada uno de los puntos e_i vemos que los coeficientes $a_i^{(j)}$ con $0 \leq i \leq k$ son todos 0. ■

Demostración de la Proposición 1.7. Denotaremos por $\mathbb{K}[x, y]_n \subset \mathbb{K}[x, y]$ al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado n . La dimensión de $\mathbb{K}[x, y]_n$ es $n+1$ pues $\{x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n\}$ es una base.

Cualesquiera $n+3$ puntos en posición general pueden ser llevados, con un cambio lineal de coordenadas, a $Z = \{e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, u\}$ donde e_i es como en el Corolario 1.9 y $u = [u_0 : u_1 : \dots : u_n]$. Como Z está en posición linealmente general, todos los u_i son distintos a cero y distintos entre sí. Para cada $0 \leq i \leq n$ definimos

$$H_i(x, y) := \prod_{j \neq i} (x - u_j y) \in \mathbb{K}[x, y]_n.$$

Afirmamos que los polinomios H_i son linealmente independientes. Para ver esto, consideremos una relación lineal

$$\alpha_0 \cdot H_0(x, y) + \dots + \alpha_n \cdot H_n = 0 \tag{1.4.1}$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ son constantes. De la definición de H_i vemos que $H_i(u_j, 1) = 0$ si y sólo si $i = j$. Sustituyendo $(x, y) = (u_i, 1)$ en (1.4.1) obtenemos entonces que $\alpha_i = 0$.

Al ser linealmente independientes, los polinomios H_j forman una base de $\mathbb{K}[x, y]_n$. Por lo tanto, la imagen del morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ [x : y] &\mapsto [H_0(x, y) : \dots : H_n(x, y)] \end{aligned}$$

es una curva normal racional. Notemos que para $0 \leq i \leq n$ se tiene que $\varphi[u_i : 1] = e_i$. Además, $\varphi[0 : 1] = u$ y $\varphi[1 : 0] = e_{n+1}$. Esto prueba la existencia de la curva normal racional.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe otra curva normal racional que pasa por Z . Esta curva es la imagen del morfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ [x : y] &\mapsto [H'_0(x, y) : \dots : H'_n(x, y)]. \end{aligned}$$

Los H'_i forman una base de $\mathbb{K}[x, y]_n$. Haciendo una reparametrización de \mathbb{P}^1 podemos suponer que $\psi[t_i : 1] = e_i$ para $0 \leq i \leq n+1$ y que $\psi[1 : 0] = u$. Como $H'_i(t_j, 1)$ es la j -ésima entrada de e_i , sigue que

$$H'_i(t_j, 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto, cada H'_i es de la forma

$$H'_i(x, y) = \lambda_i \prod_{j \neq i} (x - t_j y).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= [H'_0(t_{n+1}, 1) : \dots : H'_n(t_{n+1}, 1)] \\ &= \left[\lambda_0 \prod_{j \neq 0} (t_{n+1} - t_j) : \dots : \lambda_n \prod_{j \neq n} (t_{n+1} - t_j) \right] \\ &= \left[\frac{\lambda_0}{t_{n+1} - t_0} : \dots : \frac{\lambda_n}{t_{n+1} - t_n} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos elegir

$$\lambda_i := t_{n+1} - t_i.$$

Por último, notemos que

$$\begin{aligned} [u_0 : \dots : u_n] &= \psi[1 : 0] \\ &= [\lambda_0 : \dots : \lambda_n]. \end{aligned}$$

De esta manera vemos que

$$t_i = t_{n+1} - u_i$$

para $0 \leq i \leq n$. De aquí obtenemos un automorfismo

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x : y] &\mapsto [t_{n+1}x - y : y] \end{aligned}$$

que satisface la ecuación

$$\psi \circ \theta = \varphi.$$

Por lo tanto, φ y ψ tienen como imagen a la misma curva normal racional. ■

1.5. Haces vectoriales

En esta sección definimos el concepto de *interpolación* para haces vectoriales. A partir de este punto trabajaremos con variedades algebraicas sobre el campo de los números complejos \mathbb{C} . Sobre una variedad algebraica X los conceptos de *haz vectorial* y *gavilla coherente localmente libre* son equivalentes y los usaremos de manera indistinta. Si X es una variedad algebraica y E es un haz vectorial sobre X , denotaremos por $h^i(X, E)$ a la dimensión sobre \mathbb{C} del espacio vectorial $H^i(X, E)$. Denotaremos por \mathcal{O}_X a la gavilla estructural de X . Si $Y \subset X$ es un subsquema cerrado, denotaremos por $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ a la gavilla de ideales de Y .

Definición 1.10. Sea E un haz vectorial de rango r sobre una variedad X . Decimos que E *satisface interpolación* para n puntos si

- 1) $h^0(X, E) \geq rn$, y
- 2) para una configuración general $Z \subset X$ de n puntos, $h^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z) = h^0(X, E) - rn$.

Observación 1.10.1. El espacio vectorial $H^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z)$ se puede interpretar como el espacio de secciones de E que se anulan en los puntos de Z . Para ver esto, consideremos la sucesión exacta (de gavillas de \mathcal{O}_X -módulos)

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

La sucesión anterior induce una nueva sucesión exacta

$$0 \rightarrow E \otimes \mathcal{I}_Z \rightarrow E \rightarrow E|_Z \rightarrow 0.$$

Ésta produce a su vez una sucesión exacta larga de cohomología cuyos primeros términos son:

$$0 \rightarrow H^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z) \rightarrow H^0(X, E) \xrightarrow{\rho} H^0(Z, E).$$

El morfismo ρ asigna a cada sección $s \in H^0(X, E)$ la restricción $s|_Z \in H^0(Z, E|_Z)$. Por lo tanto, un elemento de $H^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z)$ es lo mismo que una sección de E que se vuelve 0 al restringirla a Z .

Notemos que $E|_Z \cong \mathcal{O}_Z^r$, pues Z consiste de un número finito de puntos. Por lo tanto:

$$h^0(Z, E|_Z) = nr.$$

Es decir, E satisface interpolación para n puntos si y sólo si el morfismo ρ es suprayectivo para la configuración general de n puntos $Z \subset X$.

Un caso particularmente interesante es cuando $h^0(X, E) = n \cdot \text{rank } E$. En este caso E satisface interpolación para n puntos si y sólo si el morfismo de restricción $\rho : H^0(X, E) \rightarrow H^0(Z, E|_Z)$ es un isomorfismo para Z general. En este sentido podemos pensar que el problema de interpolación de E respecto a Z es determinar una sección de E a partir de los valores que debe tomar en los puntos; E satisface interpolación si, cuando Z es general, este problema siempre tiene una única solución. \triangleleft

Ejemplo 1.10.2. Un haz lineal L sobre una variedad X satisface interpolación para n puntos si y sólo si $n \leq h^0(X, L)$. \triangleleft

Corolario 1.11 (de la proposición 1.3). *Si $d \geq 0$ y $k \leq \binom{d+n}{n}$ entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ satisface interpolación para k puntos.*

Ejemplo 1.11.3. Si E_1 y E_2 son dos haces vectoriales sobre X de rangos r_1 y r_2 , respectivamente, entonces

$$E := E_1 \oplus E_2$$

es un haz de rango $r_1 + r_2$. Además se cumple el isomorfismo

$$H^0(Z, E|_Z) \cong H^0(Z, E_1|_Z) \oplus H^0(Z, E_2|_Z)$$

para cualquier configuración $Z \subset X$. Por lo tanto, E satisface interpolación para n puntos si y sólo si E_1 y E_2 tienen la misma propiedad. \triangleleft

Del ejemplo anterior podemos obtener una infinidad de haces que no satisfacen interpolación. Por ejemplo, el haz

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$$

no satisface interpolación para ningún número de puntos. El siguiente ejemplo muestra que existen haces vectoriales que no satisfacen interpolación y que no se obtienen de esta manera.

Ejemplo 1.11.4. Consideremos un haz E en \mathbb{P}^2 definido como el cokernel de un morfismo general

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2). \quad (1.5.1)$$

Se tiene que E es un haz de rango 2 y que $h^0(\mathbb{P}^2, E) = 6 = 3 \cdot \text{rank } E$. Ahora veremos que E no satisface interpolación para 3 puntos. Consideremos tres puntos generales $Z \subset \mathbb{P}^2$ cuya gavilla de ideales $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ admite una resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^3 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

que corresponde al hecho de que Z está determinado por tres ecuaciones de grado 2 (esto es consecuencia del teorema 2.19). Esta sucesión sigue siendo exacta tras tomar el producto tensorial con E , lo cual produce la siguiente sucesión exacta de cohomología:

$$H^0(\mathbb{P}^2, E(-3))^2 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E(-2))^3 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z).$$

A partir de (1.5.1) vemos que $h^0(\mathbb{P}^2, E(-3)) = 0$ y $h^0(\mathbb{P}^2, E(-2)) = 1$. Por lo tanto, $h^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) \geq 3 > 0$.

Ahora veamos que en efecto E no se descompone como suma directa de dos haces lineales. Asumamos a modo de contradicción que

$$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)$$

con $a \geq b$. De (1.5.1) vemos que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(-2)) = 1.$$

Esto implica que $a = 2$ y $b < a$. Se tiene además que

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b+1)) &= h^0(\mathbb{P}^2, E(1)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a+1)) \\ &= 10 - 10 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b+1 < 0$. Por último vemos que

$$\begin{aligned} 17 &= h^0(\mathbb{P}^2, E(2)) \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a+2)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b+2)) \\ &\leq 15 + 1 \\ &= 16, \end{aligned}$$

lo cual es la contradicción que buscábamos. ◁

Para terminar este capítulo reinterpretaremos el problema discutido en la sección 1.3 en el lenguaje de haces vectoriales. Para esto, consideremos la *variedad grassmanniana* $X := \mathbb{G}(k, n)$ de k -planos en \mathbb{P}^n . Esta variedad está equipada con un *haz universal* $U \subset \mathcal{O}_X^{n+1}$ de rango $k+1$; su fibra en un punto $[H] \in X$ es el plano en \mathbb{K}^{n+1} cuya proyectivización es el k -plano $H \subset \mathbb{P}^n$ que representa $[H]$. El producto simétrico

$$E := \text{Sym}^d(U^*)$$

es un haz de rango $d+1$ cuya fibra sobre $[H]$ es el espacio vectorial de d -formas en H . Si P es un polinomio homogéneo de grado d en \mathbb{P}^n , podemos formar una sección $s_P \in H^0(X, E)$ asociando a cada punto $[H] \in X$ la restricción $P|_H$. Esto nos permite identificar al espacio vectorial de formas de grado d en \mathbb{P}^n con un subespacio $W \subset H^0(X, E)$. De esta manera, si $Z \subset X$ es un subesquema consistente de r puntos simples, una sección $s_P \in W$ se anula en Z si y sólo si las r rectas que representan los puntos de Z están contenidas en la hipersuperficie determinada por P . Notemos que

$$\begin{aligned} h^0(X, E) &\geq \dim W \\ &= h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \\ &= \binom{n+d}{d}. \end{aligned}$$

Considerando el caso $k = 1$ obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.12 (del teorema 1.4). *Si $n \geq 3$, el haz $E := \text{Sym}^d(U^*)$ sobre $\mathbb{G}(1, n)$ satisface interpolación para k puntos siempre que*

$$\binom{d+n}{n} \geq k \cdot (d+1).$$

Capítulo 2

El esquema de Hilbert de puntos en el plano

El tema principal de este capítulo es el esquema de Hilbert de puntos en el plano \mathbb{P}^2 . Éste es un caso particular de una construcción mucho más general desarrollada en [18]. Revisaremos las definiciones básicas de estos objetos (en el caso de esquemas proyectivos sobre \mathbb{C}) en la sección 1. La sección 2 tratará sobre el caso particular de puntos en una superficie S , con especial interés en el caso $S = \mathbb{P}^2$. En la sección 3 relacionaremos los esquemas de Hilbert de puntos con el concepto de interpolación de haces vectoriales abordado en el capítulo anterior.

2.1. Definiciones

Sea $X \subset \mathbb{P}^r$ un subesquema cerrado. Informalmente, el esquema de Hilbert de X , denotado por Hilb_X , consiste de todos los subesquemas cerrados $Y \subset X$ y está dotado de una estructura geométrica que refleja las propiedades de los objetos que parametriza. Formalmente, Hilb_X es la solución a un problema de representabilidad o problema módulo.

Definición 2.1. Denotemos por $\mathbf{Sch}_{\mathbb{C}}$ a la categoría de esquemas sobre \mathbb{C} y por \mathbf{Sets} a la categoría de conjuntos. Definimos el *functor de Hilbert* de $X \subset \mathbb{P}^r$ como el functor

$$\text{Hilb}_X : \mathbf{Sch}_{\mathbb{C}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

que asocia a cada esquema B el conjunto de subesquemas cerrados $F \subset B \times X$ tales que la proyección $\pi : F \rightarrow B$ es *plana*.

Un subesquema $F \subset B \times X$ como en la definición se conoce como una *familia* de subesquemas de X parametrizada por B . La preimagen (como esquema) $F_b := \pi^{-1}(b)$ sobre un punto (cerrado) $b \in B$ es un subesquema de $\{b\} \times X \cong X$ llamado la *fibra* de F sobre el punto b .

La principal consecuencia de que $F \rightarrow B$ sea plana está codificada en el polinomio de Hilbert. Recordemos que $X \subset \mathbb{P}^r$ es un esquema proyectivo, así que está equipado con un haz lineal muy amplio $\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)|_X$.

Definición 2.2. Dada una gavilla coherente E en X denotaremos por

$$E(m) := E \otimes \mathcal{O}_X(1)^{\otimes m}.$$

Asimismo, denotaremos por

$$\chi(E) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot h^i(X, E)$$

a la *característica de Euler* de E . Si $Y \subset X$ es un subesquema cerrado, la función

$$p_Y(m) := \chi(\mathcal{O}_Y(m))$$

es un polinomio numérico en m (es decir, con coeficientes racionales) llamado el *polinomio de Hilbert* de $Y \subset X$.

Teorema 2.3. [19, teorema 9.9] Sea B un esquema entero y noetheriano. Si $F \in \mathcal{H}ilb_X(B)$ entonces el polinomio de Hilbert de F_b no depende de b .

Observacion 2.3.1. Los invariantes numéricos de Y se pueden obtener a partir del polinomio de Hilbert p_Y . Por ejemplo:

i) La dimensión de Y es

$$\dim Y = \deg(p_Y).$$

ii) Si $n = \dim Y$ y $p_Y^{(n)}$ denota la n -ésima derivada de p_Y entonces el grado de $Y \subset \mathbb{P}^r$ es

$$\deg(Y) = p_Y^{(n)}(0).$$

iii) El género aritmético de Y es

$$p_a(Y) = 1 + (-1)^{\dim Y} p_Y(0).$$

Del teorema anterior vemos que estos invariantes no cambian a lo largo de una familia plana (con base conexa y reducida). \triangleleft

Teorema 2.4. [18, Teorema 3.2] El functor $\mathcal{H}ilb_X$ es representable por un esquema proyectivo $\mathcal{H}ilb_X$. Más aún, $\mathcal{H}ilb_X$ es la unión disjunta

$$\mathcal{H}ilb_X = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}[m]} \mathcal{H}ilb_X^p$$

donde cada $\mathcal{H}ilb_X^p$ parametriza subesquemas cerrados de X con polinomio de Hilbert p .

Observacion 2.4.2. El teorema anterior tiene como consecuencia que existen un esquema proyectivo $\mathcal{H}ilb_X$ y una familia $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}ilb_X \times X$, llamada la *familia universal*, tales que para cualquier esquema B y cualquier familia $F \in \mathcal{H}ilb_X(B)$ existe un único morfismo $\varphi : B \rightarrow \mathcal{H}ilb_X$ donde el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H}ilb_X \end{array}$$

es cartesiano. Es decir, cualquier familia $F \in \mathcal{H}ilb_X(B)$ se obtiene a partir de $\mathcal{H}ilb_X$ y de su familia universal. \triangleleft

En general no estamos interesados en todo el esquema $\mathcal{H}ilb_X$, sino en la componente $\mathcal{H}ilb_X^p$ que resulta de fijar un polinomio numérico p . A continuación mostramos algunos ejemplos básicos.

Ejemplo 2.4.3. Dado un entero positivo d , el conjunto de hipersuperficies $Y \subset \mathbb{P}^r$ de grado d admite una estructura natural de espacio proyectivo como sigue. Una hipersuperficie H está determinada por un polinomio

$$F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_r]_d \setminus \{0\}$$

donde $[x_0 : \dots : x_r]$ son las coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^r y $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r]_d$ el subespacio vectorial de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r]$ de polinomios homogéneos de grado d . Dos polinomios determinan la misma hipersuperficie si y sólo si uno es un múltiplo escalar del otro. Es decir, existe un isomorfismo natural

$$\mathcal{H}ilb_{\mathbb{P}^r}^{p_d} \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r]_d)$$

donde

$$p_d(m) := p_H(m) = \binom{m+r}{r} - \binom{m-d+r}{r}$$

es el polinomio de Hilbert de $H \subset \mathbb{P}^r$. La familia universal $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}ilb_{\mathbb{P}^r}^{p_d} \times \mathbb{P}^r$ consiste de parejas (Y, x) de una hipersuperficie Y y un punto $x \in Y$. \triangleleft

Observacion 2.4.4. En el capítulo anterior denotamos a $\mathcal{H}ilb_{\mathbb{P}^r}^{p_d}$ por V_d^r . \triangleleft

Ejemplo 2.4.5. Supongamos que $Z \subset X$ consiste de n puntos distintos. En este caso, cualquier gavilla localmente libre de Z de rango constante r es isomorfa a \mathcal{O}_Z^r . Por lo tanto

$$\begin{aligned} p_Z(m) &:= \chi(\mathcal{O}_X(m)|_Z) \\ &= h^0(Z, \mathcal{O}_X(m)|_Z) \\ &= h^0(Z, \mathcal{O}_Z) \\ &= n. \end{aligned}$$

En particular, un subesquema $Z \subset X$ con polinomio de Hilbert $p_Z \equiv 1$ es lo mismo que un punto (cerrado) $x \in X$. Por lo tanto $\text{Hilb}_X^1 = X$ (si X es suave) y su familia universal $\mathcal{U} \subset X \times X$ es simplemente la diagonal. \triangleleft

Ejemplo 2.4.6. Si consideramos el polinomio $p(m) := m + 1$, un subesquema $Y \subset \mathbb{P}^r$ con polinomio de Hilbert $p_Y = p$ es una curva de grado 1 y género 0; es decir, una recta. En este caso

$$\text{Hilb}_{\mathbb{P}^r}^{m+1} \cong \mathbb{G}(1, r)$$

es la variedad grassmanniana de rectas en \mathbb{P}^r . Su familia universal es el *haz tautológico* $U \subset \mathbb{G}(1, r) \times \mathbb{C}^{r+1}$. \triangleleft

Ejemplo 2.4.7. Consideremos el esquema de Hilbert $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^r}^{3m+1}$ que parametriza curvas $C \subset \mathbb{P}^3$ de grado 3 y género 0. Este esquema tiene dos componentes irreducibles: una de dimensión 12, cuyos puntos parametrizan de manera genérica una cúbica normal racional (ver la Proposición 1.7); y otra de dimensión 15, cuyos puntos parametrizan de manera genérica la unión de una cúbica plana y un punto. \triangleleft

Observación 2.4.8. En los ejemplos anteriores los esquemas en cuestión resultan ser variedades algebraicas relativamente sencillas. Sin embargo, la geometría de los esquemas Hilb_X^p suele ser muy complicada en general y estos presentan comportamientos altamente patológicos. Un trabajo en esta dirección es el segundo ejemplo en [33], el cual muestra que el esquema de Hilbert de curvas en \mathbb{P}^3 de grado 14 y género 24 tiene una componente que no es reducida en ningún punto. \triangleleft

2.2. Esquema de Hilbert de puntos

Hemos visto en el ejemplo 2.4.5 que si $Z = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ consiste de n puntos distintos entonces

$$p_Z \equiv n$$

es un polinomio constante.

Definición 2.5. El esquema

$$X^{[n]} := \text{Hilb}_X^n$$

es conocido como el *esquema de Hilbert de n puntos* en X .

Dedicaremos esta sección a entender la geometría de $X^{[n]}$. Si $Z := \{x_1, \dots, x_n\} \in X$ son n puntos distintos, podemos asociar a Z el punto $(x_1, \dots, x_n) \in X \times \dots \times X$. Este punto está bien definido por Z , salvo un reordenamiento de los puntos x_1, \dots, x_n . Al deshacernos de esta redundancia obtenemos un esquema que puede pensarse como una primera aproximación de $X^{[n]}$.

Definición 2.6. Dada una variedad X y un entero positivo n , el grupo simétrico en n letras S_n actúa en el producto $X^n := X \times \dots \times X$ permutando los factores. El *producto simétrico* de X se define como el cociente

$$X^{(n)} := X^n / S_n.$$

Al punto en $X^{(n)}$ correspondiente a $(x_1, \dots, x_n) \in X \times \dots \times X$ lo denotaremos por $x_1 + \dots + x_n$.

El punto genérico de $X^{(n)}$ corresponde a n puntos distintos en X , pero $X^{(n)}$ también admite puntos donde algunos de los x_i son iguales entre sí. Podemos pensar en estos últimos como colecciones de puntos en X con ciertas multiplicidades especificadas.

Asimismo, $X^{[n]}$ admite elementos que parametrizan colecciones de n puntos distintos en X , y elementos que parametrizan subesquemas $Z \subset X$ no reducidos.

Ejemplo 2.6.1. Consideremos los esquemas $\mathbb{P}^{2(2)}$ y $\mathbb{P}^{2[2]}$ y el punto $p := [0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2$. En el producto simétrico $\mathbb{P}^{2(2)}$ el punto $2p := p + p$ corresponde a p con multiplicidad 2.

Por otro lado, para cada $t \in \mathbb{C}$ consideremos el subesquema $Z_t \subset \mathbb{P}^2$ determinado por el ideal

$$I_t := (x + ty, y^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z].$$

El esquema Z_t también corresponde a p con multiplicidad 2. Sin embargo, todos los esquemas Z_t son distintos entre sí.

Geoméricamente, $2p \in \mathbb{P}^{2(2)}$ sólo tiene la información del punto p con multiplicidad 2, pero el esquema Z_t corresponde al punto p junto con la dirección tangente $x + ty$. \triangleleft

A pesar de que los esquemas $X^{(n)}$ y $X^{[n]}$ no son iguales en general, dado un subesquema $Z \subset X$ con polinomio de Hilbert constante n y un punto $p \in Z$ podemos definir la *multiplicidad* de Z en p como

$$\text{mult}_p(Z) := \dim \mathcal{O}_{Z,p}.$$

Se cumple entonces que

$$\sum_{p \in Z} \text{mult}_p(Z) = n,$$

lo que permite dar la siguiente definición.

Definición 2.7. El *morfismo de Hilbert-Chow* es el morfismo

$$\begin{aligned} ch_n : X^{[n]} &\rightarrow X^{(n)} \\ Z &\mapsto \sum_{p \in Z} \text{mult}_p(Z) \cdot p. \end{aligned}$$

El morfismo de Hilbert-Chow no es un isomorfismo en general (ver el ejemplo 2.6.1), pero sí lo es en un caso particular.

Teorema 2.8. Si X es una curva suave entonces el morfismo de Hilbert-Chow $ch_n : X^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$ es un isomorfismo para toda n .

Según [1, capítulo 1, sección 3] el producto simétrico $X^{(n)}$ es suave siempre que X sea una curva suave. Para probar este teorema bastará demostrar que el morfismo de Hilbert-Chow es, en el caso de una curva suave, una biyección.

Lema 2.9. Si $Z \subset X$ es un subesquema cerrado con soporte en un punto $x \in X$ y con polinomio de Hilbert $p_Z \equiv k$ entonces

$$\mathcal{I}_Z = \mathcal{O}_X(-k \cdot x).$$

Demostración. Sea t una función racional en X con un cero simple en x . El anillo $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo de valuación discreta y t es un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_{X,x}$. En particular, el ideal $\mathcal{I}_{Z,x}$ está generado por t^r para algún entero $r \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} r &= \dim \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{I}_{Z,x} \\ &= \dim \mathcal{O}_{Z,x} \\ &= k. \end{aligned}$$

Como la ecuación $t = 0$ determina localmente al ideal $\mathcal{O}_X(-x)$ entonces $\mathcal{I}_Z = \mathcal{O}_X(-k \cdot x)$. \blacksquare

Corolario 2.10. El morfismo de Hilbert-Chow $ch_n : X^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$ es una biyección.

Demostración. Por el lema anterior, para cada elemento $Z \in X^{[n]}$ podemos escribir el ideal de Z como $\mathcal{I}_Z = \mathcal{O}_X(-ch_n(Z))$. \blacksquare

2.3. Puntos en una superficie

A lo largo de esta sección S denotará una superficie suave y proyectiva. Enunciaremos algunos resultados sobre el esquema de Hilbert de n puntos $S^{[n]}$ (ver 2.5). Como $S^{[1]} \cong S$, supondremos que $n \geq 2$. La mayoría de los resultados que enunciaremos se encuentran en [14] y [15].

Teorema 2.11. [14, teorema 2.4] $S^{[n]}$ es una variedad suave, irreducible y proyectiva de dimensión $2n$.

Observacion 2.11.1. En el ejemplo 2.8 vimos que $X^{[n]}$ y el producto simétrico $X^{(n)}$ coinciden para el caso de una curva X . También vimos un argumento en el ejemplo 2.6.1 de porqué $\mathbb{P}^{2(2)}$ y $\mathbb{P}^{2[2]}$ no son isomorfos. Retomaremos este caso a continuación.

La inclusión abierta $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ induce una inclusión abierta de los productos simétricos

$$\mathbb{C}^{2(2)} \subset \mathbb{P}^{2(2)}.$$

Sea $V \subset \mathbb{C}^3$ la variedad dada por la ecuación $xz = y^2$. La función

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{2(2)} &\rightarrow \mathbb{C}^2 \times V \\ (a, b) + (c, d) &\mapsto (a + c, b + d) \times ((a - b)^2, (a - b)(c - d), (c - d)^2) \end{aligned}$$

determina un isomorfismo de esquemas. En particular, esto prueba que $\mathbb{P}^{2(2)}$ es singular a lo largo de un subesquema de dimensión 2 localmente isomorfo a \mathbb{C}^2 . En vista del teorema 2.11, las variedades $\mathbb{P}^{2(2)}$ y $\mathbb{P}^{2[2]}$ no pueden ser isomorfas. \triangleleft

Teorema 2.12. [15, corolario 6.3] Supongamos que S es una superficie tal que

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0. \quad (2.3.1)$$

Se tiene entonces que

$$\text{Pic}(S^{[n]}) \cong \text{Pic}(S) \times \mathbb{Z}.$$

Observacion 2.12.2. En el artículo [15] se calcula el grupo de Picard $\text{Pic}(S^{[n]})$ para cualquier superficie S . Nosotros no necesitaremos este resultado en toda su generalidad, pero probablemente sea prudente un comentario al respecto. Para una superficie cualquiera el grupo de Picard de $S^{[n]}$ tiene la forma

$$\text{Pic}(S^{[n]}) \cong \text{Pic}(S) \times \mathbb{Z} \times C_s(S)$$

donde $C_s(S)$ es cierto subgrupo del grupo

$$\text{Hom}(A(S), \text{Pic}(S)).$$

Aquí, $A(S)$ denota a la *variedad de Albanese* de S , cuya dimensión es precisamene $h^1(S, \mathcal{O}_S)$. En particular, la condición 2.3.1 asegura que $C_s(S) = 0$. \triangleleft

En el caso $S = \mathbb{P}^2$, el resultado anterior demuestra que $\text{Pic}(\mathbb{P}^{2[n]})$ es un grupo libre abeliano de rango 2. Los generadores de este grupo se pueden describir explícitamente:

- i) Un generador es la clase del divisor H dado como la familia de subesquemas $Z \subset \mathbb{P}^2$ cuyo soporte interseca a una recta fija $\ell \subset \mathbb{P}^2$.
- ii) El segundo generador es la clase del divisor $\Delta/2$ donde Δ consta de aquellos $Z \subset \mathbb{P}^2$ no reducidos: es decir, subesquemas soportados en menos de n puntos.

2.4. Divisor de Brill-Noether

En esta sección X denotará una variedad suave y proyectiva para la cual $X^{[n]}$ sea de nuevo suave, proyectiva e irreducible de la dimensión esperada $n \cdot \dim X$. Hemos visto que algunos ejemplos de esto son curvas y superficies suaves. De hecho, puede demostrarse que estos son todos los ejemplos que hay.

Sea E un haz vectorial sobre X que satisface interpolación para n puntos. Si $W \subset H^0(X, E)$ es un subespacio lineal de dimensión $n \cdot \text{rank } E$ general entonces, para $Z \in X^{[n]}$ general, se cumple que

$$H^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z) \cap W = 0$$

donde $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$ es la gavilla de ideales de Z . El objetivo de esta sección es construir un divisor efectivo $D_{E,W} \subset X^{[n]}$ que, intuitivamente, parametriza las configuraciones Z para las cuales

$$H^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z) \cap W \neq 0.$$

Sea

$$u : \mathcal{Z} \rightarrow X^{[n]}$$

la familia universal de $X^{[n]}$ (ver la observación 2.4.2). Esta familia universal forma parte del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{i} & X^{[n]} \times X \xrightarrow{\pi_2} X \\ \downarrow u & \swarrow \pi_1 & \\ X^{[n]} & & \end{array}$$

donde i es un encaje cerrado y π_1, π_2 son las proyecciones a los factores $X^{[n]}$ y X , respectivamente. Sea

$$E_{\mathcal{Z}} := (\pi_2 \circ i)^* E.$$

$E_{\mathcal{Z}}$ es una gavilla localmente libre sobre \mathcal{Z} de rango $\text{rank } E_{\mathcal{Z}} = \text{rank } E$.

Observación 2.12.1. Hacemos énfasis en el formalismo de que $E_{\mathcal{Z}}$ es una gavilla localmente libre en lugar de un haz vectorial. La razón es que el espacio total \mathcal{Z} de la familia universal no es suave (ni siquiera reducido) en general, incluso cuando $X^{[n]}$ lo es. \triangleleft

Proposición 2.13. *El morfismo inducido*

$$i^* \circ \pi_2^* = (\pi_2 \circ i)^* : H^0(X, E) \rightarrow H^0(\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}})$$

es *inyectivo*.

Demostración. Primero analicemos el morfismo

$$\pi_2^* : H^0(X, E) \rightarrow H^0(X^{[n]} \times X, \pi_2^* E).$$

Si $s : X \rightarrow E$ es una sección entonces $\pi_2^*(s)$ completa el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X^{[n]} \times X & & & & \\ & \searrow \pi_2^*(s) & \xrightarrow{s \circ \pi_2} & & E \\ & & \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\ & & \pi_2^* E & \longrightarrow & E \\ & \searrow id & \downarrow & & \downarrow \\ & & X^{[n]} \times X & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

Notemos que el espacio total de $\pi_2^* E$ es simplemente $X^{2[n]} \times E$ con las operaciones en la segunda entrada. Por lo tanto, la sección $\pi_2^*(s)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \pi_2^*(s) : X^{2[n]} \times X &\rightarrow X^{2[n]} \times E \\ (Z, x) &\mapsto (Z, s(x)). \end{aligned}$$

Es claro entonces que

$$\pi_2^* : H^0(X, E) \rightarrow H^0(X^{[n]} \times X, \pi_2^* E)$$

es *inyectiva*, pues $s \in \ker \pi_2^*$ si y sólo si $s(x) = 0$ para cualquier $x \in X$.

Además, si $\pi_2^*(s)$ se anula a lo largo de $\mathcal{Z} \subset X^{2[n]} \times X$ entonces en particular se anula en los puntos de la forma (Z, x) , donde $Z \subset X$ consiste de n puntos distintos y $x \in Z$. Esto sólo ocurre si $s = 0$. Por lo tanto, la restricción

$$i^* : H^0(X^{2[n]} \times X, \pi_2^* E) \rightarrow H^0(\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}})$$

es *inyectiva* en $\pi_2^* H^0(X, E)$. ■

La proposición anterior nos permite considerar de manera natural a W como un subespacio lineal

$$W \subset H^0(\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}}) = H^0(X^{[n]}, u_*E_{\mathcal{Z}}).$$

Afirmamos que $u_*E_{\mathcal{Z}}$ es un haz vectorial de rango $n \cdot \text{rank } E$ sobre $X^{[n]}$. Para ver esto, consideremos un abierto $V \subset X^{[n]}$ y el abierto $W := u^{-1}(V) \subset \mathcal{Z}$. Tenemos entonces un isomorfismo natural

$$(u_*E_{\mathcal{Z}})|_V = (u|_W)_*(E_{\mathcal{Z}}|_W).$$

Podemos reemplazar a $X^{[n]}$ por un abierto afín $\text{Spec}(A) = V \subset X^{[n]}$ y a \mathcal{Z} por $V' := u^{-1}(V)$. Notemos que $V' = \text{Spec}(B)$ es afín por [19, ejercicio 5.17(b)]. Probar que $u_*E_{\mathcal{Z}}$ es localmente libre se reduce de esta manera al siguiente lema.

Lema 2.14. *Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos finito y M es un B -módulo localmente libre, entonces M es un A -módulo localmente libre.*

Observacion 2.14.2. Existen al menos dos formas en las que uno podría definir que M sea un B -módulo localmente libre:

- 1) para cada primo $\mathfrak{q} \subset B$, el $B_{\mathfrak{q}}$ -módulo $M_{\mathfrak{q}}$ sea libre, o bien
- 2) existe un subconjunto $S \subset B$ tal que, para cada $f \in S$, el B_f -módulo M_f es libre; y tal que

$$\{D(f) : f \in S\}$$

es una cubierta abierta de $\text{Spec}(B)$.

Ambas nociones aparecen en la literatura y *no son equivalentes en general*. En nuestro contexto resultan ser equivalentes, como muestra el siguiente lema. \triangleleft

Lema 2.15. *Si B es un anillo noetheriano y M es un B -módulo finito entonces 1) y 2) son equivalentes.*

Demostración. Es claro que 2) implica 1) pues si $\mathfrak{q} \in D(f)$ para algún $f \in S$ y $M_f \cong B_f^r$ es libre como B_f módulo entonces

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{q}} &\cong M_f \otimes_{B_f} B_{\mathfrak{q}} \\ &\cong B_f^r \otimes_{B_f} B_{\mathfrak{q}} \\ &\cong B_{\mathfrak{q}}^r \end{aligned}$$

es libre. Para probar el recíproco, consideremos un primo $\mathfrak{q}_0 \subset B$ fijo. Sean $x_1, \dots, x_r \in M$ tales que sus imágenes son una base de $M_{\mathfrak{q}_0}$ como $B_{\mathfrak{q}_0}$ -módulo. Definimos $U \subset \text{Spec}(B)$ como el conjunto de primos \mathfrak{q} para los cuales las imágenes de x_1, \dots, x_r son una base de $M_{\mathfrak{q}}$. Consideremos el morfismo $p : B^r \rightarrow M$ determinado por los x_1, \dots, x_r . Como B es noetheriano, existe una sucesión exacta

$$B^s \xrightarrow{T} B^r \xrightarrow{p} M \rightarrow N \rightarrow 0$$

donde T está determinado por una matriz $(t_{ij}) \in B^{r \times s}$. Notemos que $\mathfrak{q} \in U$ si y sólo si p se convierte en un isomorfismo al localizar en \mathfrak{q} . Como localizar en \mathfrak{q} es exacto entonces $\mathfrak{q} \in U$ si y sólo si

- a) $N_{\mathfrak{q}} = 0$, y
- b) $t_{ij}/1 = 0$ en $B_{\mathfrak{q}}$ para cada i, j .

Empecemos analizando la condición b). Si $t = t_{ij} \in B$ entonces $t/1 = 0$ en $B_{\mathfrak{q}}$ si y sólo si $b \cdot t = 0$ para algún $b \in B \setminus \mathfrak{q}$; es decir, si y sólo si $\text{Ann}_B(t) \not\subset \mathfrak{q}$, donde $\text{Ann}_B(t)$ es el *ideal aniquilador* de t . Por lo tanto, b) es equivalente a

$$\mathfrak{q} \in \bigcap_{i,j} (\text{Spec}(B) \setminus V(\text{Ann}(t_{ij}))) = \text{Spec}(B) \setminus \bigcup_{i,j} V(\text{Ann}(t_{ij})).$$

Éste es un conjunto abierto en $\text{Spec}(B)$ pues cada $V(\text{Ann}(t_{ij}))$ es cerrado y estos son un número finito.

De manera análoga, si y_1, \dots, y_k es un conjunto de generadores de N entonces a) es equivalente a

$$\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B) \setminus \bigcup_{j=1}^k V(\text{Ann}(y_j)),$$

el cual es un conjunto abierto.

Hemos probado entonces que $U \subset \text{Spec}(B)$ es un conjunto abierto que contiene a \mathfrak{q}_0 . Por lo tanto, existe un abierto principal $\mathfrak{q}_0 \in D(f) \subset U$. Basta observar que esto implica

a') que $N_f = 0$ y

b') que $t_{ij}/1 = 0$ en B_f para cada pareja i, j .

Por lo tanto, x_1, \dots, x_r determinan una base de M_f como B_f -módulo. \blacksquare

Antes de probar el lema 2.14 recordemos el siguiente teorema.

Teorema 2.16. [31, teorema 7.10] Si M es un B -módulo finito y $\mathfrak{q} \subset B$ es un primo, entonces $M_{\mathfrak{q}}$ es un $B_{\mathfrak{q}}$ -módulo libre.

demostración del Lema 2.14. M es un A -módulo finito: si x_1, \dots, x_r son generadores de M como B -módulo y b_1, \dots, b_n son generadores de B como A -módulo, entonces $\{b_i \cdot x_j\}$ es un conjunto de generadores de M como A -módulo. Por el teorema 2.16, $M_{\mathfrak{p}}$ será un $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo libre para cualquier primo $\mathfrak{p} \subset A$. El resultado sigue del lema 2.15. \blacksquare

Observación 2.16.3. Si tomamos a $\mathfrak{p} := \eta$ como el punto genérico de $X^{[n]}$ en la demostración del lema 2.14, entonces A_{η} es el campo de funciones racionales de $X^{[n]}$ y B_{η} es un A_{η} -espacio vectorial de dimensión $\deg(u) = n$. Esto prueba que el rango de M como A -módulo es

$$\begin{aligned} \text{rank}_A(M) &= \dim_{A_{\eta}}(M_{\eta}) \\ &= n \cdot \text{rank}_B(M). \end{aligned}$$

En otras palabras, u_*E_Z es una gavilla localmente libre de rango $n \cdot \text{rank } E$. \triangleleft

Hemos visto que W se puede identificar de manera natural con un subespacio de secciones del haz vectorial u_*E_Z . Además

$$\dim W = n \cdot \text{rank } E = \text{rank } u_*E_Z.$$

Si s_1, \dots, s_{nr} es una base de W entonces

$$s := s_1 \wedge \dots \wedge s_{nr}$$

es una sección del haz lineal $\det(u_*E_Z)$. La sección s está determinada por W hasta por un múltiplo escalar. Por lo tanto, su divisor asociado $D_{E,W} := \text{div}(s)$ depende únicamente de W .

Definición 2.17. La clase $D_E := [D_{E,W}] \in \text{Pic } X^{[n]}$ es el *divisor de Brill-Noether* asociado a E .

Observación 2.17.4. La clase D_E no depende de W , pues cualesquiera dos subespacios $W, W' \subset H^0(X, E)$ de dimensión $n \cdot \text{rank } E$ se pueden conectar a través de una curva racional dentro de la variedad grassmaniana $G(W, H^0(X, E))$. Esto determina una equivalencia racional entre $D_{E,W}$ y $D_{E,W'}$. \triangleleft

A continuación probaremos que $D_{E,W}$ en efecto parametriza configuraciones $Z \in X^{[n]}$ que fallan en imponer condiciones lineales independientes en W .

Proposición 2.18. El esquema $Z \in X^{[n]}$ está en el soporte de $D_{E,W}$ si y sólo si $H^0(X, E \otimes \mathcal{I}_Z) \cap W \neq 0$.

Demostración. Dado $Z \in X^{[n]}$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{Z\} & \xrightarrow{j} & Z \xrightarrow{\pi_2 \circ i} X \\ \downarrow v & & \downarrow u \\ \{Z\} & \xrightarrow{i} & X^{[n]} \end{array}$$

donde el cuadrado es cartesiano. Por la definición del divisor $D_{E,W}$, se tiene que $Z \in D_{E,W}$ si y sólo si existe una sección $s \in W$ tal que

$$(\pi_2 \circ i)^*(s) \in H^0(Z, E_Z) = H^0(X^{[n]}, u_*E_Z)$$

es 0 en el punto $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$. Observemos que $\pi_2 \circ i \circ j$ no es otra cosa que la inclusión del subsquema cerrado $Z \rightarrow X$. Por lo tanto,

$$(\pi_2 \circ i \circ j)^*E = E|_Z.$$

Ahora bien, una gavilla coherente sobre el espacio $\{Z\}$ de un punto es simplemente un \mathbb{C} -espacio vectorial; y en particular, $v_*(E|_Z)$ corresponde al espacio vectorial $H^0(Z, E|_Z)$.

Es claro que i es plano (pues es una inclusión cerrada) y u es separado y de tipo finito (de hecho es finito). Por lo tanto, $v_*E|_Z$ es isomorfo de manera natural a $i^*u_*E_Z$ (ver [19, proposición III.9.3]). Dado que i es la inclusión de un punto $\{Z\} \rightarrow X^{[n]}$, $i^*u_*E_Z$ no es más que la fibra de u_*E_Z sobre Z . En particular esto muestra que una sección $s \in W$ es 0 en el punto $Z \in X^{[n]}$ si y sólo si $s|_Z$ es 0 en $H^0(Z, E|_Z)$; es decir, si $s \in H^0(X, \mathcal{I}_Z \otimes E)$. ■

Ejemplo 2.18.5. Si $n = \binom{d+2}{2}$ entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ satisface interpolación para n puntos. El divisor $D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}$ parametriza subesquemas $Z \subset \mathbb{P}^2$ contenidos en una curva de grado d . ◁

Antes de ver el último ejemplo enunciaremos un teorema de Gaeta (ver [11, capítulo 3, ejercicio 12]).

Teorema 2.19. [17, §8] Sea

$$n = \binom{r+1}{2} + s$$

con $0 \leq s \leq r$ (todo entero positivo n admite una única expresión de esta forma). Entonces el ideal de una colección general Z de n puntos en \mathbb{P}^2 admite una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-2)^s \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^{r-2s} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

si $r \geq 2s$, o bien

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-2)^s \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^{2s-r} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

si $r \leq 2s$.

Proposición 2.20. Sea $n = 2s(s+1)$ con $s \geq 1$. Entonces el haz $T\mathbb{P}^2(2s-2)$ satisface interpolación para n puntos. Además, el divisor de Brill-Noether $D_{T\mathbb{P}^2(2s-2)}$ parametriza esquemas $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ para los cuales el morfismo multiplicación

$$m_{2s} : H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(2s)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(2s+1))$$

no es suprayectivo.

Demostración. Recordemos que para cada entero m se tiene que

$$h^i(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2(m)) = \begin{cases} (m+2)(m+4) & \text{si } i=0 \text{ y } m \geq -1, \\ -1 & \text{si } i=1 \text{ y } m = -3, \\ (m+2)(m+4) & \text{si } i=2 \text{ y } m \leq -5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este hecho se puede deducir de la sucesión de Euler

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^3 \rightarrow T\mathbb{P}^2 \rightarrow 0$$

y del isomorfismo

$$(T\mathbb{P}^2)^\vee \cong T\mathbb{P}^2(-3).$$

En particular vemos que

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2(2s-2)) &= (2s-2+2)(2s-2+4) \\ &= 4s^2 + 4s \\ &= n \cdot \text{rank } T\mathbb{P}^2(2s-2). \end{aligned}$$

Para ver que $T\mathbb{P}^2(2s-2)$ satisface interpolación para n puntos usamos el teorema 2.19, notando que

$$n = \binom{2s+1}{2} + s,$$

para obtener una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2s-2)^s \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2s)^{s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Tras realizar el producto tensorial con el haz $T\mathbb{P}^2(2s-2)$ obtenemos una nueva sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow T\mathbb{P}^2(-4)^s \rightarrow T\mathbb{P}^2(-2)^{s+1} \rightarrow T\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Usando que todos los grupos de cohomología de $T\mathbb{P}^2(m)$ son 0 para $m = -2, -4$ vemos que

$$H^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2(2s-2) \otimes \mathcal{I}_Z) = 0.$$

Es decir, $T\mathbb{P}^2(2s-s)$ satisface interpolación para $n = 2s(s+1)$ puntos.

Ahora consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow T\mathbb{P}^2(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow 0$$

obtenida de dualizar la sucesión de Euler. Si $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ es arbitrario, al realizar el producto tensorial por $\mathcal{I}_Z(2s+1)$ obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \otimes T\mathbb{P}^2(2s-2) \rightarrow \mathcal{I}_Z(2s) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \rightarrow \mathcal{I}_Z(2s+1) \rightarrow 0.$$

Al considerar la sucesión larga de cohomología correspondiente vemos que $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z \otimes T\mathbb{P}^2(2s-2))$ es el kernel del morfismo multiplicación m_{2s} . ■

Observacion 2.20.6. Una descripción alternativa del divisor $D_{T\mathbb{P}^2(2s-2)}$ es que es el complemento del abierto en el que se satisface el teorema 2.19. El elemento general $Z \in D_{T\mathbb{P}^2(2s-2)}$ admite una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2s-2)^s \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2s-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2s-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2s)^{s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

<

Capítulo 3

Generalidades de clases efectivas en $\text{Pic } \mathbb{P}^2[n]$

Según el teorema 2.12 todo elemento $D \in \text{Pic } \mathbb{P}^2[n]$ tiene la forma

$$D = aH - \frac{b}{2}\Delta$$

donde a y b son dos enteros. La pregunta central de este capítulo y del siguiente es: ¿para qué valores de a y b la clase D está representada por una familia dentro de $\mathbb{P}^2[n]$? En otras palabras, ¿cuáles son las clases de divisores efectivos en $\mathbb{P}^2[n]$? Las primeras tres secciones tratarán sobre conceptos generales. Se recomienda como referencia el libro [19] para la primera sección y [8] para las otras dos.

3.1. Invariantes numéricos de un haz vectorial

En lo que resta de este trabajo de tesis utilizaremos varios invariantes numéricos que pueden ser asociados a un haz vectorial E sobre una variedad X . Por simplicidad discutiremos únicamente el caso $X = \mathbb{P}^n$ en esta sección. Una familia de invariantes que han sido mencionados en el capítulo 1 son las dimensiones

$$h^i(\mathbb{P}^n, E) := \dim H^i(\mathbb{P}^n, E).$$

A partir de estos números podemos definir la *característica de Euler* de E

$$\chi(E) := \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(\mathbb{P}^n, E)$$

y, más generalmente, la *función de Hilbert* de E

$$h_E(m) := \chi(E(m)).$$

Otros invariantes pueden ser definidos considerando el *anillo de Chow* $A(\mathbb{P}^n)$, el cual es un anillo graduado cuya parte homogénea de grado $A^k(\mathbb{P}^n)$ consta de ciclos de codimensión k en \mathbb{P}^n . El anillo de Chow puede ser definido para una variedad general X , pero en el caso de $X = \mathbb{P}^n$ éste puede ser descrito fácilmente como

$$A(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{C}[\ell]/(\ell^{n+1}).$$

La clase ℓ representa a un hiperplano en $A(\mathbb{P}^n)$ y el producto en $A(\mathbb{P}^n)$ se interpreta de manera geométrica como la intersección. Por ejemplo, la clase ℓ^k puede ser representada como un subespacio lineal de \mathbb{P}^n de codimensión k , el cual se obtiene como intersección de k hiperplanos generales en \mathbb{P}^n .

Un 0-ciclo en \mathbb{P}^n es simplemente una suma formal de puntos $\sum_i x_i$ de modo que haremos la identificación

$$\begin{aligned} A^0(\mathbb{P}^n) &\cong \mathbb{Z} \\ \sum_i a_i x_i &\mapsto \sum_i a_i. \end{aligned}$$

Si $c_k \in A^k(\mathbb{P}^n)$ es una clase homogénea de grado k entonces $a_k = c_k \cdot \ell^{n-k} \in A^0(\mathbb{P}^n)$ es un número entero y $c_k = a_k \ell^k$.

A un haz vectorial E sobre \mathbb{P}^n podemos asociarle varias clases $c_k(E) \in A^k(\mathbb{P}^n)$ llamadas las *clases de Chern* de E . La definición formal de las clases de Chern puede consultarse en [19, apéndice A]. A la clase (no homogénea)

$$c(E) := c_0(E) + c_1(E) + \dots + c_n(E) \in A(\mathbb{P}^n)$$

la llamaremos la *clase total de Chern* de E .

Ejemplo 3.0.1. Para $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ se tiene que

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 1 + d\ell.$$

◁

El ejemplo anterior y la siguiente propiedad nos permiten calcular las clases de Chern de cualquier haz E a partir de una resolución de E .

Teorema 3.1. Si

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de haces vectoriales entonces

$$c(F) = c(E) \cdot c(G).$$

Corolario 3.2. Si

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^k E_i$$

entonces

$$c(E) = \prod_{i=1}^k c(E_i).$$

Ejemplo 3.2.2. Recordemos que el haz tangente $T\mathbb{P}^n$ forma parte de la sucesión de Euler

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \rightarrow T\mathbb{P}^n \rightarrow 0.$$

Del teorema anterior obtenemos que

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1} = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cdot c(T\mathbb{P}^n).$$

Por un lado

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1} = (1 + \ell)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ell^k.$$

Por otro lado $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1$. Por lo tanto

$$c_k(T\mathbb{P}^n) = \binom{n}{k} \ell^k.$$

◁

Observacion 3.2.3. Si E es un haz vectorial con presentación

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-b_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a_i) \rightarrow E \rightarrow 0$$

sigue que $c_0(E) = 1$. Nosotros estaremos interesados en haces vectoriales sobre \mathbb{P}^2 ; estos haces siempre admiten una resolución como la anterior. ◁

Nos será útil tener presentes las siguientes interpretaciones geométricas. Consideremos un haz vectorial globalmente generado E de rango $r \geq 2$ sobre \mathbb{P}^n . Si $s_1, \dots, s_r \in H^0(\mathbb{P}^n, E)$ son r secciones generales entonces $s_1(x), \dots, s_r(x) \in E_x$ son r vectores linealmente independientes para el punto genérico $x \in \mathbb{P}^n$. Los puntos $x \in \mathbb{P}^n$ para los cuales esto es falso determinan una subvariedad de codimensión 1 que representa a $c_1(E)$. Por otro lado, los puntos en los que una sección general $s \in H^0(\mathbb{P}^n, E)$ se anula determinan un ciclo de codimensión n que representa a $c_n(E)$.

Ahora nos concentraremos en el caso de haces sobre \mathbb{P}^2 .

Definición 3.3. Dado un haz vectorial E sobre \mathbb{P}^2 definimos el *segundo caracter de Chern* como

$$ch_2(E) := \frac{c_1(E)^2 - 2c_2(E)}{2}.$$

Definimos el *grado* de E como el número $c_1(E) \cdot \ell$, la *pendiente* de E como

$$\mu(E) := \frac{c_1(E) \cdot \ell}{\text{rank } E}$$

y el *discriminante* de E como

$$\Delta(E) := \frac{\mu(E)^2}{2} - \frac{ch_2(E)}{\text{rank } E}.$$

Observación 3.3.4. En general se pueden definir los caracteres de Chern $ch_k(E)$ con $1 \leq k \leq n$ para un haz vectorial E sobre \mathbb{P}^n . En el caso de \mathbb{P}^2 se tiene que $ch_1(E) = c_1(E)$ y $ch_0(E) = \text{rank } E$. \triangleleft

Notemos que conocer el rango y la clase total de Chern de un haz E sobre \mathbb{P}^2 es equivalente a conocer alguna de las ternas $(ch_0(E), ch_1(E), ch_2(E))$ o $(\text{rank } E, \mu(E), \Delta(E))$. La terna $(\text{rank } E, \mu(E), \Delta(E))$ puede pensarse como el logaritmo de la clase total de Chern $c(E)$ en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 3.4. Si E y F son dos haces vectoriales entonces

$$\begin{aligned} \text{rank } E \otimes F &= (\text{rank } E) + (\text{rank } F) \\ \mu(E \otimes F) &= \mu(E) + \mu(F) \\ \Delta(E \otimes F) &= \Delta(E) + \Delta(F). \end{aligned}$$

El teorema de Riemann-Roch relaciona los dos tipos de invariantes que hemos discutido hasta ahora.

Teorema 3.5 (Riemann-Roch). Denotemos por

$$P(m) = \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$$

a la función de Hilbert de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$. Si E es un haz vectorial sobre \mathbb{P}^2 entonces

$$\chi(E) = (\text{rank } E)(P(\mu(E)) - \Delta(E)).$$

Ejemplo 3.5.5. De las definiciones vemos que

$$\begin{aligned} ch_2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) &= \frac{m^2}{2} \\ \mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) &= m \\ \Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) &= 0. \end{aligned}$$

Por la proposición 3.4 se tiene que para un haz vectorial E

$$\begin{aligned} \mu(E(m)) &= \mu(E) + m \\ \Delta(E(m)) &= \Delta(E). \end{aligned}$$

El teorema de Riemann-Roch puede usarse entonces para calcular la función de Hilbert de E como

$$\chi(E(m)) = (\text{rank } E)(P(\mu(E) + m) - \Delta(E)).$$

\triangleleft

3.2. Cono efectivo: definición y propiedades

Consideremos una variedad suave e irreducible X y un subesquema cerrado $Z \subset X^n$. El subesquema Z determina la clase de un divisor en X de la forma

$$\sum_i n_i \cdot [Z_i] \in \text{Pic } X$$

donde las Z_i son las componentes irreducibles de Z de codimensión 1 y n_i es la multiplicidad de Z_i en Z . Un divisor obtenido de esta forma cumple que todos los números n_i son enteros no negativos, pero también podemos considerar sumas formales

$$\sum_i n_i \cdot [Z_i] \quad (3.2.1)$$

donde los $Z_i \subset X$ son subesquemas irreducibles y reducidos de codimensión 1 y los n_i son números reales arbitrarios. Estas sumas formales son elementos del espacio vectorial real

$$\text{Pic}_{\mathbb{R}} X := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Pic } X.$$

Definición 3.6. Diremos que una clase en $\text{Pic}_{\mathbb{R}} X$ es *efectiva* si tiene una expresión como en (3.2.1) donde los n_i son números reales no negativos. El *cono de divisores efectivos*, o simplemente *cono efectivo*, de X es el conjunto $\text{Eff } X \subset \text{Pic}_{\mathbb{R}} X$ de clases efectivas. Diremos que una clase efectiva D es *extremal* si siempre que

$$D = D_1 + D_2,$$

con D_1 y D_2 efectivas, se tiene que $D_i = \lambda_i D$ para algún número real $\lambda_i \geq 0$. Diremos que el rayo $\{\lambda \cdot D : \lambda \geq 0\}$ generado por una clase extremal es un *rayo extremal*.

Observación 3.6.1. Notemos que $\text{Eff } X$ es de hecho un cono convexo con ápice en el origen, pues si

$$D_1 = \sum_i a_i \cdot [Z_i], \quad D_2 = \sum_i b_i \cdot [Z_i]$$

son dos clases efectivas y α, β son números reales no negativos, entonces

$$\alpha \cdot D_1 + \beta \cdot D_2 = \sum_i (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) \cdot [Z_i]$$

es de nuevo una clase efectiva. ◁

Ejemplo 3.6.2. Si $X = \mathbb{P}^n$ es el espacio proyectivo, entonces

$$\text{Pic } \mathbb{P}^n \cong \mathbb{Z} \cdot [H]$$

está generado por la clase de un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$. En este caso

$$\text{Pic}_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^n \cong \mathbb{R}$$

y $\text{Eff } \mathbb{P}^n$ corresponde al semirayo de números no negativos. ◁

Ejemplo 3.6.3. Si $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ entonces

$$\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}^2$$

está generado por las clases de los divisores

$$H_1 = \mathbb{P}^1 \times \{pt\}, \quad H_2 = \{pt\} \times \mathbb{P}^1$$

de modo que

$$\text{Pic}_{\mathbb{R}} X \cong \mathbb{R}^2.$$

El cono efectivo $\text{Eff } X$ corresponde al cuadrante positivo. Es decir, H_1 y H_2 son los rayos extremales de $\text{Eff } X$. ◁

Observación 3.6.4. En los dos ejemplos anteriores el cono efectivo resulta ser un conjunto cerrado. Esto no siempre es así, y en general es muy difícil determinar cuándo es el caso, incluso cuando X es una superficie. Un ejemplo de variedades para las cuales el cono efectivo es cerrado son los llamados *espacios soñados de Mori*, introducidos por primera vez en [24, definición 1.10]. McKernan en [32, corolario 4.9] da un criterio para demostrar que una variedad dada es un espacio soñado de Mori utilizando el resultado principal de [3]. Este último trabajo le valió la medalla *Fields*, en 2018, al matemático Iraní Caucher Birkar. Aplicando este criterio al esquema de Hilbert de puntos $\mathbb{P}^{2[n]}$ se deduce el teorema que enunciamos a continuación.

Nosotros no necesitaremos dar la definición de espacio soñado de Mori; solamente necesitaremos dos consecuencias de que un espacio lo sea. La primera es que su cono de divisores efectivos es un conjunto cerrado. La segunda aparecerá en el corolario 5.5. ◁

Teorema 3.7. [25, proposición 3.4] $\mathbb{P}^{2[n]}$ es un espacio soñado de Mori. En particular, su cono de divisores efectivos es un conjunto cerrado.

Como consecuencia de este teorema y del teorema 2.12 determinar el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ equivale a determinar los dos rayos extremales que conforman su frontera.

3.3. Producto de intersección en $\mathbb{P}^{2[n]}$

Antes de poder dar ejemplos de divisores extremales en $\mathbb{P}^{2[n]}$ debemos hablar del producto de intersección $D \cdot C$ entre una clase $D \in \text{Pic}_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^{2[n]}$ y una curva $C \subset \mathbb{P}^{2[n]}$. Necesitaremos dos hechos fundamentales sobre el producto de intersección. El primero, que es una versión simplificada de [27, capítulo VI, teorema 2.8], es el siguiente.

Teorema 3.8. Si D es el divisor definido por un subesquema $Z \subset \mathbb{P}^{2[n]}$ de codimensión 1 y C es una curva irreducible no contenida en Z , entonces

$$D \cdot C = \sum_{p \in Z \cap C} m_p(Z, C)$$

donde $m_p(Z, C)$ es el índice de intersección de Z y C en p . Si f es una ecuación que define a Z alrededor de p entonces el índice de intersección de Z y C en p está definido como

$$m_p(Z, C) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,p}/(f).$$

En particular, si Z y C se intersectan de manera transversal entonces $D \cdot C$ es simplemente el número de puntos en $Z \cap C$.

La segunda propiedad que necesitamos es que podemos usar el producto de intersección para determinar a la clase de un divisor. Para ver esto, consideremos las siguientes curvas:

- i) Consideremos $n - 1$ puntos generales $Z' \subset \mathbb{P}^2$ y una recta general $\ell \subset \mathbb{P}^2$. La curva γ_1 se define como la familia de todos los esquemas de la forma $Z = Z' \cup \{p\} \subset \mathbb{P}^2$ con $p \in \ell$.
- ii) Consideremos $n - 1$ puntos generales $Z' \subset \mathbb{P}^2$ y un punto distinguido $p \in Z'$. La curva γ_2 se define como la familia de todos los esquemas $Z \subset \mathbb{P}^2$ soportados en Z' y con multiplicidad en p igual a 2.

Las dos curvas anteriores son racionales: la primera está parametrizada por la recta ℓ sobre la cual se mueve el punto p ; en la segunda todo el soporte de Z está fijo y lo que se mueve es la dirección tangente de Z en p (ver el Ejemplo 2.6.1).

Teorema 3.9. [25, teorema 3.2] Con la notación anterior

$$\begin{aligned} H \cdot \gamma_1 &= 1 & H \cdot \gamma_2 &= 0 \\ \Delta \cdot \gamma_1 &= 0 & \Delta \cdot \gamma_2 &= -2 \end{aligned}$$

Según el teorema 2.12, todo divisor $D \in \text{Pic}_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^{2[n]}$ tiene la forma

$$D = aH - \frac{b}{2}\Delta$$

para algunos números $a, b \in \mathbb{R}$. Del teorema anterior concluimos que

$$a = D \cdot \gamma_1 \quad b = D \cdot \gamma_2$$

Por lo tanto, podemos recuperar a la clase de un divisor D a partir de su número de intersección con γ_1 y γ_2 .

Ejemplo 3.9.1. Hemos visto (corolario 1.3) que si $n = \binom{d+2}{2}$ entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ satisface interpolación para n puntos. Por lo tanto, $D := D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}$ es un divisor de $\mathbb{P}^{2[n]}$ que parametriza esquemas de longitud n contenidos en una curva de grado d . Consideremos $n - 1$ puntos generales $Z' \subset \mathbb{P}^2$, de modo que existe una única curva C de grado d que contiene a Z' ; consideremos también una recta general $\ell \subset \mathbb{P}^2$, de

modo que $C \cap \ell$ consta de d puntos distintos. Esto determina una curva de la forma γ_1 y el elemento $Z' \cup \{p\} \in \gamma_1$ pertenece a D si y sólo si $p \in \ell \cap C$. Por lo tanto

$$D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)} \cdot \gamma_1 = d.$$

De manera similar, consideremos $n-1$ puntos generales $Z \subset \mathbb{P}^2$ y pensemos en la curva γ_2 que se obtiene al variar la dirección tangente en el punto $p \in Z$. Denotemos por Z_t a los miembros de γ_2 . De nuevo tenemos que existe una única curva C de grado d que contiene a Z . Para que C contenga al esquema Z_t se requiere que la dirección tangente de Z_t en p sea la recta tangente a C en p . En consecuencia

$$D \cdot \gamma_2 = 1.$$

Concluimos entonces que

$$D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)} = dH - \Delta/2.$$

◁

Podemos aplicar estas mismas ideas para calcular la clase de D_E asociada a un haz vectorial E de rango r que satisface interpolación para n puntos. Para hacer esto, consideremos un subespacio $W \subset H^0(\mathbb{P}^2, E)$ de dimensión

$$\dim W = nr.$$

Fijemos $n-1$ puntos $Z' \subset \mathbb{P}^2$ generales. Como E satisface interpolación para n puntos, tendremos que

$$\dim W \cap H^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_{Z'}) = r.$$

Si s_1, \dots, s_r es una base de este espacio vectorial obtenemos una curva C de grado $\deg E$ definida como el lugar de ceros de la sección

$$s_1 \wedge \dots \wedge s_r \in H^0(\mathbb{P}^2, \Lambda^r E).$$

Para calcular $D_{E,W} \cdot \gamma_1$ consideremos una recta general ℓ y un punto p moviéndose sobre ℓ . Notemos que $Z' \cup \{p\}$ falla en imponer condiciones independientes en W si y sólo si

$$s_1(p) \wedge \dots \wedge s_r(p) = 0.$$

Concluimos que

$$D_{E,W} \cdot \gamma_1 = C \cdot \ell = \deg E.$$

Ahora consideremos un punto $p \in Z'$. Si U es una vecindad de p que trivializa a E entonces podemos pensar a la sección s_i alrededor de p como una función

$$s_i = (s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(r)}) : U \rightarrow \mathbb{C}^r.$$

De esta forma, $s_1 \wedge \dots \wedge s_r$ está dada localmente por el determinante de la matriz $(s_i^{(j)})_{i,j}$. Ahora bien, cada sección s_i se anula en p , así que $s_1 \wedge \dots \wedge s_r$ se anulará en p con orden r . Si consideramos una curva γ_2 de esquemas con soporte en Z' y con un punto doble en p , entonces un miembro de γ_2 fallará en imponer condiciones independientes en W si y sólo si está contenido en la curva C ; esto es equivalente a que la dirección tangente de Z' en p sea una de las r tangentes de C en p . Por lo tanto:

$$D_{E,W} \cdot \gamma_2 = r.$$

De estos calculos obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.10. [25, proposición 4.8] *Sea E un haz vectorial sobre \mathbb{P}^2 de rango r y grado d . Si E satisface interpolación para n puntos entonces la clase del divisor de Brill-Noether D_E es*

$$D_E = d \cdot H - \frac{r}{2} \Delta.$$

Ahora fijaremos nuestra atención a una familia especial de curvas en $\mathbb{P}^{2[n]}$.

Definición 3.11. Sea d un entero positivo y sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva suave de grado d . Supongamos que tenemos en C un pincel de grado n libre de puntos base. Es decir, supongamos que existe un morfismo $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grado n . Para cada $t \in \mathbb{P}^1$, $\pi^*(t)$ es un divisor de grado n en C , el cual determina un único subesquema de longitud n contenido en $C \subset \mathbb{P}^2$ (ver teorema 2.8). Diremos que la imagen del morfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^{2[n]} \\ t &\mapsto \pi^*(t) \end{aligned}$$

es una curva de tipo α_d en $\mathbb{P}^{2[n]}$.

Consideremos una curva de tipo α_d en $\mathbb{P}^{2[n]}$ dada por un morfismo $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ y un representante del divisor H determinado por una recta general $\ell \subset \mathbb{P}^2$. Notemos que $\alpha_d(t) \in H$ si y sólo si t está en la imagen de $C \cap \ell$ bajo el pincel $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. Si ℓ es general, $C \cap \ell$ consta de d puntos distintos que van a parar a d puntos distintos bajo π . Asumiendo que α_d y H se intersectan de manera transversal, esto implica que

$$H \cdot \alpha_d = d.$$

Para calcular $\Delta \cdot \alpha_d$, notemos que $\alpha_d(t)$ se vuelve no reducido justo cuando t es un punto rama del morfismo π . Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz a π obtenemos que

$$2 - 2g(C) = 2n - B$$

donde

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

es el género de C y B es el número de ramificación de π . Asumiendo que α_d y $\Delta/2$ se intersectan de manera transversal se tiene que $B = (\Delta/2) \cdot \gamma$. De esta manera obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.12. *Consideremos una curva de tipo α_d en $\mathbb{P}^{2[n]}$. Se tiene que*

$$\begin{aligned} H \cdot \alpha_d &= d \\ \frac{\Delta}{2} \cdot \alpha_d &= n - 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \end{aligned}$$

Las curvas de tipo α_d nos permitirán calcular las clases de varios divisores $D \in \text{Pic } \mathbb{P}^{2[n]}$, así que es de nuestro interés saber para qué valores de d existen.

Proposición 3.13. *Si*

$$\binom{d-1}{2} < n < \binom{d+2}{2}$$

entonces el elemento general de $\mathbb{P}^{2[n]}$ pertenece a una curva de tipo α_d .

Demostración. La condición

$$n < \binom{d+2}{2} = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$$

asegura que n puntos generales $Z \subset \mathbb{P}^2$ están contenidos en una curva suave C de grado d . Considerando a Z como un divisor en C y aplicando la fórmula de Riemann-Roch obtenemos

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(Z)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - Z)) + n + 1 - g(C). \quad (3.3.1)$$

Recordemos que

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C)) = 2g(C) - 2 = \binom{d-1}{2} < n = \deg(Z). \quad (3.3.2)$$

Dado que los n puntos $Z \subset C$ son generales y $\mathcal{O}_C(K_C)$ satisface interpolación para $2g(C) - 2$ puntos, la desigualdad (3.3.2) implica que $h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - Z)) = 0$. Sustituyendo en (3.3.1) obtenemos

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(Z)) = n + 1 - g(C) \geq 2.$$

Esto prueba que el sistema lineal $|Z|$ en C tiene dimensión al menos 1, por lo que podemos considerar un pincel general que pase por Z . Lo único que debemos verificar es que el sistema lineal $|Z|$ es libre de puntos base. Claramente un punto $x \in C \setminus Z$ no puede ser un punto base de $|Z|$, así que consideremos un punto $x \in Z$. Aplicando el teorema de Riemann-Roch de nuevo obtenemos que

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(Z - x)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - Z + x)) + n - g(C).$$

De manera similar vemos que $h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - Z + x)) = 0$ así que

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(Z - x)) = n - g(C) = h^0(C, \mathcal{O}_C(Z)) - 1.$$

Esto completa la prueba. ■

Ejemplo 3.13.2. Retomemos el caso $n = \binom{d+2}{2}$. Consideremos un elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$. Notemos que

$$\binom{(d+1)-1}{2} < n < \binom{(d+1)+2}{2}.$$

La proposición 3.13 prueba que por Z pasa una curva de tipo α_{d+1} . Se cumple entonces que

$$\begin{aligned} H \cdot \alpha_{d+1} &= d+1 \\ (\Delta/2) \cdot \alpha_{d+1} &= n-1 + \frac{d(d-1)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)} \cdot \alpha_{d+1} = d(d+1) - n + 1 - \frac{d(d-1)}{2} = 0.$$

◁

3.4. Divisores extremales

En esta sección utilizaremos los cálculos anteriores sobre el producto de intersección para encontrar clases de divisores extremales en $\mathbb{P}^{2[n]}$. La herramienta principal de esta sección será la siguiente.

Corolario 3.14 (del teorema 3.8). *Consideremos una curva $\gamma \subset \mathbb{P}^{2[n]}$ y una clase efectiva $D \in \text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. Supongamos que $D \cdot \gamma < 0$. Entonces γ está contenida en el lugar base de D .*

Demostración. Consideremos un representante

$$D = \sum_i n_i \cdot [Z_i]$$

donde cada $Z_i \subset \mathbb{P}^{2[n]}$ es un subesquema irreducible y $n_i \geq 0$. Sigue que $[Z_i] \cdot \gamma < 0$ para al menos un índice i . Por el teorema 3.8, si $\gamma \not\subset Z_i$ entonces

$$[Z_i] \cdot \gamma = \sum_{p \in Z_i \cap \gamma} m_p(Z_i, \gamma) \geq 0.$$

Luego, $\gamma \subset Z_i$. ■

Proposición 3.15. *Para cualquier $n \geq 2$ la clase del divisor Δ genera un rayo extremal de $\text{Pic } \mathbb{P}^{2[n]}$.*

Demostración. Es claro que Δ es efectivo. Para probar que genera un rayo extremal, bastará probar que la clase

$$\Delta - \varepsilon H$$

no es efectiva para ningún $\varepsilon > 0$.

Supongamos, a modo de contradicción, que este divisor es efectivo. Consideremos una curva del tipo γ_1 (ver teorema 3.9). Se tiene entonces que

$$(\Delta - \varepsilon H) \cdot \gamma_1 = \Delta \cdot \gamma_1 - \varepsilon H \cdot \gamma_1 = -\varepsilon < 0.$$

Por el corolario anterior, γ_1 está contenida en el lugar base de $\Delta - \varepsilon H$. Como existen curvas de tipo γ_1 que pasan por cualquier elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ sigue que el lugar base de $\Delta - \varepsilon H$ es todo $\mathbb{P}^{2[n]}$. Esto es una contradicción. ■

Observación 3.15.1. Llamaremos al rayo generado por Δ el *rayo extremal trivial* de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. Al otro rayo extremal lo llamaremos el *rayo extremal no trivial*. Éste está generado por una clase de la forma

$$D := \mu H - \frac{1}{2} \Delta$$

con $\mu > 0$. Por lo tanto, el problema de calcular el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ es equivalente a calcular el mínimo valor de μ para el cual D es efectiva. ◁

El punto crucial de la prueba anterior es el hecho de que existe un familia de curvas cuyo producto de intersección con Δ es 0 y que pasan por el elemento general de $\mathbb{P}^{2[n]}$. Aplicando un argumento similar obtenemos el siguiente resultado (ver el ejemplo 3.13.2).

Proposición 3.16. *Si*

$$n = \binom{d+2}{2}$$

entonces

$$D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)} = dH - \Delta/2$$

genera al rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

La estrategia que utilizaremos para determinar $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ consiste de los siguientes dos pasos:

- i) Demostrar que $\mu H - \Delta/2$ es efectivo encontrando un haz vectorial de pendiente μ que satisfice interpolación para n puntos.
- ii) Encontrar una familia de curvas de tipo α_d cuya unión sea un subconjunto denso de $\mathbb{P}^{2[n]}$ y tales que $(\mu H - \Delta/2) \cdot \alpha_d = 0$.

Para ilustrar estos pasos cerraremos este capítulo determinando el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ para otras familias de enteros positivos n .

Proposición 3.17. 1) *Si $n = \binom{d+2}{2} - 1$ entonces $dH - \Delta/2$ genera un rayo extremal de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.*

2) *Si $n = 2s(s+1)$ entonces $\frac{4s-1}{2}H - \Delta/2$ genera un rayo extremal de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.*

Demostración. 1) Sabemos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ satisfice interpolación para n puntos, así que $dH - \Delta/2$ es efectivo.

La proposición 3.13 implica que el elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ pertenece a una curva de tipo α_d . Por último, vemos que

$$(dH - \Delta/2) \cdot \alpha_d = d^2 - n + 1 - \binom{d-1}{2} = 0.$$

2) Vimos en la proposición 2.20 que $T\mathbb{P}^2(2s-2)$ satisfice interpolación para $n = 2s(s+1)$ puntos. Notemos que $T\mathbb{P}^2(2s-2)$ tiene pendiente

$$\mu(T\mathbb{P}^2(2s-2)) = \frac{4s-1}{2}.$$

Esto prueba que $\frac{4s-1}{2}H - \Delta/2$ es efectivo. La proposición 3.13 muestra que el elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ pertenece a una curva de tipo α_{2s} . Por último, vemos que

$$\left(\frac{4s-1}{2}H - \Delta/2\right) \cdot \alpha_{2s} = s(4s-1) - n + 1 - \binom{2s-1}{2} = 0.$$

■

Capítulo 4

El cono efectivo de $\mathbb{P}^2[n]$

Este capítulo está basado principalmente en [25]. El objetivo es determinar el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^2[n]$ para una familia infinita de valores de n . Específicamente, consideremos el conjunto

$$\Phi := \{\alpha > \varphi^{-1}\} \cup \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \dots \right\}$$

donde

$$\varphi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

denota a la razón áurea y las fracciones son cocientes de números de Fibonacci consecutivos. Asimismo, escribimos

$$n = \binom{r+1}{2} + s$$

con $0 \leq s \leq r$ (ver teorema 2.19). El teorema 4.15 determina el cono efectivo de $\mathbb{P}^2[n]$ para los valores de n tales que $s/r \in \Phi$ o $1 - (s+1)/(r+2) \in \Phi$.

Ningún resultado presentado en este capítulo es nuevo. Sin embargo, el teorema 4.6 es una adaptación de [25, proposición 2.5] que necesitaremos para probar el teorema 5.1 en el siguiente capítulo.

La manera de obtener clases efectivas en $\mathbb{P}^2[n]$ es a través de haces vectoriales que satisfacen interpolación para n puntos, así que comenzaremos estudiando una familia particular de haces vectoriales.

4.1. Haces de Steiner en el plano

Consideremos dos enteros positivos s, r . Un morfismo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{s+r}$$

está determinado por una matriz M de tamaño $(s+r) \times r$ con entradas en el espacio vectorial $\mathbb{C}[x, y, z]_1$ de formas lineales. Decimos que éste es un *morfismo general* si la matriz $M \in \mathbb{C}[x, y, z]_1^{(s+r) \times r}$ es general.

Proposición 4.1. *Si*

$$M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^s \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{s+r}$$

es general y $r \geq 2$ entonces M es inyectivo y, por lo tanto, el cokernel es un haz vectorial de rango r . Similarmente, el morfismo general

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{s+r}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^s$$

es suprayectivo y su kernel es un haz vectorial de rango r siempre que $r \geq 2$.

Lema 4.2. *Denotemos por*

$$P_d := \mathbb{P}\mathbb{C}[x, y, z]_d$$

al espacio proyectivo de curvas de grado d en \mathbb{P}^2 . Si $n \geq 3$ entonces el conjunto

$$\{(f_1, \dots, f_n) \in P_d^n : f_1 \cap \dots \cap f_n = \emptyset\} \subset P_d^n$$

es un abierto de Zariski no vacío.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} := \{(f_1, \dots, f_n, p) \in V_d^n \times \mathbb{P}^2 : f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0\} \subset P_d^n \times \mathbb{P}^2.$$

Este conjunto es claramente un cerrado de $P_d^n \times \mathbb{P}^2$. Notemos que la proyección

$$\begin{aligned} \pi : P_d^n \times \mathbb{P}^2 &\rightarrow P_d^n \\ (f_1, \dots, f_n, p) &\mapsto (f_1, \dots, f_n) \end{aligned}$$

es un morfismo proyectivo, de modo que

$$\pi(\mathcal{F}) = \{(f_1, \dots, f_n) : f_1 \cap \dots \cap f_n \neq \emptyset\}$$

es un conjunto cerrado.

Si $n \geq 3$ entonces el punto $(x^d, y^d, z^d, 0, \dots, 0)$ pertenece al complemento de $\pi(\mathcal{F})$, lo que prueba que éste es un abierto no vacío. ■

Demostración de la proposición 4.1. Las dos partes del enunciado son equivalentes una a la otra así que nos concentraremos en el primer caso. Observemos que la matriz M determina un morfismo inyectivo si y sólo si sus menores de tamaño $s \times s$ no tienen ceros comunes en \mathbb{P}^2 . Consideremos la función racional

$$\psi : \mathbb{C}[x, y, z]_1^{(s+r) \times s} \rightarrow P_s^{\binom{s+r}{s}}$$

que asigna a una matriz M el vector formado por sus menores de tamaño s . El lema anterior muestra que el conjunto de matrices M tales que las entradas de $\psi(M)$ no tienen ningún cero en común es un abierto. Bastará construir una matriz que cumpla esta propiedad para probar que este abierto es no vacío.

Notemos que podemos asumir que $r = 2$, pues dada una matriz M de tamaño $(s+r) \times s$, los menores de $s \times s$ de cualquier submatriz de tamaño $(s+2) \times s$ también son menores de M . Una matriz de tamaño $(s+2) \times s$ que cumple la propiedad que buscamos es

$$M_s := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ z & y & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & y & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

En efecto, el determinante formado por los primeros (resp. últimos) s renglones es x^s (resp. z^s). Por otro lado, si omitimos el primero y último renglón de M_s obtenemos una matriz que tiene y en la diagonal y $0, x$ o z en las demás entradas. Por lo tanto, este determinante tiene la forma $y^s + xF + zG$. Claramente $(x^s, z^s, y^s + xF + zG)$ no tienen ceros comunes en \mathbb{P}^2 . ■

Definición 4.3. Un haz obtenido como un cokernel de esta forma se llama un *haz de Steiner*.

A lo largo de este capítulo nos interesará determinar cuándo un haz de Steiner E satisface interpolación para cierto número n de puntos. La técnica que usaremos será demostrar que la restricción de E a ciertas curvas racionales satisface interpolación para n puntos y, de este hecho, deducir la misma propiedad para E . Para esto será útil considerar la siguiente pregunta: si E es un haz de Steiner dado por

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{s+r} \rightarrow E \rightarrow 0$$

y $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es un morfismo general de grado d , ¿cuál es el tipo de isomorfismo de f^*E ? A continuación describimos una posible estrategia para responder a esta pregunta. Notemos que bastará con conocer la función

$$\phi(m) := h^0(\mathbb{P}^1, (f^*E)^\vee(m)).$$

En efecto, tenemos que

$$f^*E \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$$

para algunos enteros a_i y determinar el tipo de isomorfismo de f^*E es lo mismo que determinar estos enteros. Observemos además que

$$\begin{aligned}\phi(m) &= \sum_{i:a_i \leq m} h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m - a_i)) \\ &= \sum_{i:a_i \leq m} m - a_i + 1.\end{aligned}$$

De aquí deducimos la identidad

$$\phi(m) - \phi(m - 1) = \#\{i : a_i \leq m\}. \quad (4.1.1)$$

Como $\phi(m) = 0$ si m es suficientemente negativo, esto nos permite calcular de manera recursiva el número de enteros a_i iguales a m para cada m .

Por otro lado, notemos que $(f^*E)^\vee$ admite la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow (f^*E)^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{s+r} \xrightarrow{f^*M^t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)^s \rightarrow 0.$$

Si denotamos por

$$S_k := H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) \cong \mathbb{C}[u, v]_k$$

al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado k en las variables u, v , sigue que $H^0(\mathbb{P}^1, (f^*E)^\vee(m))$ es el kernel del morfismo

$$S_m^{s+r} \xrightarrow{f^*M^t} S_{m+d}^s.$$

Si asumimos que este morfismo tiene el máximo rango posible podemos estimar la función ϕ como

$$\phi(m) = \begin{cases} r(m+1) - sd & \text{si } m \geq \frac{sd}{r} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

En efecto, la condición $m \geq \frac{sd}{r} - 1$ es equivalente a la condición $\dim S_m^{s+r} \geq S_{m+d}^s$ y el número $r(m+1) - sd$ es la diferencia entre estas dos dimensiones, que será igual a $\phi(m)$ si f^*M^t es de rango máximo. Denotemos por $m_0 := \lceil \frac{sd}{r} - 1 \rceil$. De (4.1.2) y de la identidad (4.1.1) obtenemos que

$$\#\{i : a_i = m_0\} = r(m_0 + 1) - sd$$

y que

$$\begin{aligned}\#\{i : a_i \leq m_0 + 1\} &= \phi(m_0 + 1) - \phi(m_0) \\ &= r(m_0 + 2) - sd - (r(m_0 + 1) - sd) \\ &= r.\end{aligned}$$

Como r es el rango de f^*E , esto implicaría que

$$f^*E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_0)^{r(m_0+1)-sd} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_0+1)^{sd-rm_0}. \quad (4.1.3)$$

A continuación estudiaremos el problema de cuándo el morfismo

$$S_m^{s+r} \xrightarrow{f^*M^t} S_{m+d}^s$$

es de rango máximo.

4.2. Multiplicación de polinomios

En la sección anterior, la matriz que determina al morfismo f^*M^t tiene la siguiente descripción. El morfismo $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ está determinado por un subespacio $V \subset S_d$ de dimensión 3. Si g_0, g_1, g_2 son una base para V entonces podemos escribir a f como

$$\begin{aligned}f : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [u : v] &\mapsto [g_0(u, v) : g_1(u, v) : g_2(u, v)].\end{aligned}$$

Recordemos que M es una matriz de tamaño $(s+r) \times s$ con entradas generales en $\mathbb{C}[x, y, z]_1$. La matriz f^*M se obtiene entonces de realizar la sustitución $(x, y, z) = (g_0, g_1, g_2)$ en las entradas de M y f^*M^t es su transpuesta. Por lo tanto, podemos interpretar a f^*M^t como una matriz general con entradas en $V \subset S_d$. Necesitaremos un par de definiciones preliminares antes de enunciar el siguiente teorema.

Definición 4.4. Sea $V \subset S_d$ un subespacio de dimensión $N + 1$ y sea $W \subset S_m$ un subespacio no vacío. Definimos

$$\mu_V(W) := \frac{\dim(V \cdot W)}{\dim(W)}$$

donde $V \cdot W \subset S_{m+d}$ es el subespacio generado por los productos $F \cdot G$ con $F \in V$ y $G \in W$.

Definición 4.5. Dado un entero $N \geq 2$ consideremos la función

$$\rho_N(x) = \frac{1}{N - 1 + \frac{1}{1+x}}.$$

Denotemos por

$$\phi_N = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_N^i(0) = \frac{\sqrt{\frac{N+3}{N-1}} - 1}{2}.$$

Definimos el conjunto

$$\Phi_N := \{\alpha > \phi_N\} \cup \{\rho_N^i(0) : i \geq 0\} \subset \mathbb{Q}.$$

Observación 4.5.1. Para $N = 2$ se tiene que

$$\phi_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-1}$$

es el recíproco de la *razón áurea* y

$$\{\rho_2^0(0), \rho_2^1(0), \dots\} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \dots \right\}$$

son cocientes de números de Fibonacci consecutivos. Por lo tanto, $\Phi_2 = \Phi$ es el conjunto definido al inicio de este capítulo. \triangleleft

Teorema 4.6. [25, teorema 2.1] Supongamos que $\frac{m+1}{d} \in \Phi_N$ y sea $V \subset S_d$ un subespacio general de dimensión $N + 1$. Entonces

$$\mu_V(W) \geq \frac{d + m + 1}{m + 1}$$

para cada subespacio no vacío $W \subset S_m$.

A continuación enunciaremos una versión de [25, proposición 2.5]. Originalmente este teorema está enunciado de forma que resulte en un isomorfismo. La demostración que presentamos aquí sigue exactamente los mismos argumentos, pero la reproducimos para adaptarla al contexto ligeramente más general en que M es un morfismo inyectivo. Como mencionamos al inicio de este capítulo, esta adaptación será necesaria para probar el teorema 5.1.

Teorema 4.7. [25, proposición 2.5] Consideremos un espacio general $V \subset S_d$ y una matriz M de tamaño $kt \times ks$ con entradas generales en V . Supongamos que

$$s(m + 1) \leq t(m + d + 1)$$

y que $\frac{m+1}{d} \in \Phi_N$. Entonces el morfismo

$$S_m^{ks} \xrightarrow{M} S_{m+d}^{kt}$$

es inyectivo para k suficientemente grande.

Observación 4.7.2. La condición $s(m + 1) \leq t(m + d + 1)$ es claramente necesaria, pues $ks(m + 1) = \dim S_m^{ks}$ y $kt(m + d + 1) = \dim S_{m+d}^{kt}$. \triangleleft

Demostración. Primero reduciremos el problema al caso en que d y $m + 1$ son primos relativos. Para ello, supongamos que $d = \delta \cdot d'$ y $m + 1 = \delta(m' + 1)$, de modo que

$$\frac{m' + 1}{d'} = \frac{m + 1}{d} \in \Phi_N.$$

Notemos que $S_m \cong S_{m'}^\delta$, donde el i -ésimo factor está generado por los monomios $u^j v^{m-j}$ tales que $j \equiv i \pmod{\delta}$. Del mismo modo, $S_{m+d} \cong S_{m'+d'}^\delta$. Consideremos la transformación

$$\begin{aligned} \tau : S_{d'} &\rightarrow S_d \\ u^j v^{d'-j} &\mapsto u^\delta v^\delta u^{d'-j}. \end{aligned}$$

Esta transformación es inyectiva, así que un subespacio $V' \subset S_{d'}$ de dimensión $N+1$ da lugar a un subespacio $V := \tau(V') \subset S_d$ de dimensión $N+1$ también, de modo que si M' es una matriz con entradas generales en V' entonces $M := \tau(M')$ es una matriz con entradas generales en V . Además, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_m^{ks} & \xrightarrow{M} & S_{m+d}^{kt} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ (S_{m'}^{ks})^\delta & \xrightarrow{\oplus M'} & (S_{m'+d'}^{kt})^\delta \end{array}$$

es conmutativo, donde el morfismo de abajo corresponde a actuar con M' en cada una de las δ entradas. Si M' es inyectiva para k suficientemente grande entonces M también lo será.

Supongamos entonces que $m+1$ y d son primos relativos. Consideremos un subespacio $V \subset S_d$ que cumpla la conclusión del teorema 4.6. Sea $Mat_{kt \times ks}(V)$ la variedad que parametriza matrices de tamaño $kt \times ks$ con entradas en V , y sea

$$\Sigma := \{(M, G) : MG = 0\} \subset Mat_{kt \times ks}(V) \times \mathbb{P}S_m^{ks}.$$

Denotemos por α y β a las proyecciones de Σ a cada uno de los dos factores. Notemos que la imagen de α consta precisamente de las matrices $M \in Mat_{kt \times ks}(V)$ que no determinan un morfismo inyectivo. Bastará entonces probar que

$$\dim \Sigma < \dim Mat_{kt \times ks}(V) = (N+1)k^2 st.$$

Para cada $G \in \mathbb{P}S_m^{ks}$ denotemos por $W_G \subset S_m$ al subespacio generado por las entradas de G . Si

$$X_\ell := \{G \in \mathbb{P}S_m^{ks} : \dim W_G \leq \ell\}$$

entonces

$$\Sigma = \bigcup_{\ell=1}^{m+1} \beta^{-1}(X_\ell \setminus X_{\ell-1}).$$

Si $W \subset S_m$ es un subespacio de dimensión ℓ entonces el elemento general

$$G \in \mathbb{P}(W^{ks}) \cong \mathbb{P}^{ks\ell-1}$$

cumple que $W = W_G$. Si $Gr(\ell, S_m)$ denota a la variedad grassmanniana de ℓ -espacios en S_m entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \dim X_\ell \setminus X_{\ell-1} &= \dim Gr(\ell, S_m) + \dim \mathbb{P}^{ks\ell-1} \\ &= \ell(m+1-\ell) + ks\ell - 1. \end{aligned}$$

Ahora acotaremos la dimensión de la fibra $\beta^{-1}(G)$ para un elemento arbitrario $G \in X_\ell \setminus X_{\ell-1}$. Si $G = (g_1, \dots, g_{sk})$ entonces una matriz M cumple que $MG = 0$ si y sólo si cada fila de M está en el kernel del morfismo

$$\begin{aligned} V^{ks} &\rightarrow S_{m+d} \\ (f_1, \dots, f_{sk}) &\mapsto \sum_{i=1}^{ks} f_i g_i. \end{aligned}$$

La imagen de este morfismo es $V \cdot W_G$, así que el kernel tiene dimensión $(N+1)ks - \dim(V \cdot W_G)$. Sigue que

$$\dim \beta^{-1}(G) = ((N+1)ks - \dim(V \cdot W_G)) kt$$

pues M consta de kt filas, cada una en el kernel del morfismo anterior. Seleccionemos $W \in Gr(\ell, S_m)$ de manera que $\dim(V \cdot W)$ es mínima. Sigue que

$$\dim \beta^{-1}(X_\ell \setminus X_{\ell-1}) \leq ((N+1)ks - \dim(V \cdot W))kt + \ell(m+1-\ell) + ksl - 1.$$

Probar que esta cantidad es estrictamente menor que $(N+1)k^2st$ es equivalente a probar que

$$\ell(m+1-\ell) \leq k(\dim(V \cdot W)t - s\ell).$$

Si $\dim W = \ell = m+1$ entonces el lado izquierdo es 0; además, el teorema 4.7 implica que

$$\dim(V \cdot W) \geq (\dim W) \frac{d+m+1}{m+1} = d+m+1$$

y por hipótesis

$$(d+m+1)t - s(m+1) \geq 0.$$

Si $\ell < m+1$ entonces la desigualdad

$$\frac{\dim(V \cdot W)}{\dim W} = \mu_V(W) \geq \frac{d+m+1}{m+1}$$

es estricta, pues el lado izquierdo tiene denominador menor que $m+1$ y el lado derecho es una fracción reducida a su mínima expresión. Sigue que

$$\dim(V \cdot W)t - s\ell > \frac{\ell}{m+1} ((d+m+1)t - s(m+1)) \geq 0$$

de modo que la desigualdad

$$\ell(m+1-\ell) \leq k(\dim(V \cdot W)t - s\ell)$$

será cierta si k es suficientemente grande. ■

Del teorema anterior y la discusión de la sección 4.1 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.8. *Sea E un haz de Steiner en el plano dado por*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{ks} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{k(s+r)} \rightarrow E \rightarrow 0$$

y sea $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ un morfismo general de grado d . Sea $m_0 := \lceil \frac{sd}{r} - 1 \rceil$, y supongamos que

$$\frac{m_0}{d}, \frac{m_0+1}{d}, \frac{m_0+2}{d} \in \Phi_2.$$

Si k es suficientemente grande entonces

$$f^*E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_0)^{k(r(m_0+1)-sd)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{k(sd-rm_0)}(m_0+1).$$

Observacion 4.8.3. Para obtener el isomorfismo (4.1.3) necesitamos tres condiciones: que $\phi(m_0-1) = 0$ y que $\phi(m_0), \phi(m_0+1)$ coincidan con la fórmula (4.1.2). Estas tres condiciones corresponden, según el teorema 4.7 a las tres condiciones $\frac{m_0}{d}, \frac{m_0+1}{d}, \frac{m_0+2}{d} \in \Phi_2$ en el corolario anterior.

Estas condiciones se cumplen, por ejemplo, si

$$\frac{sd-r}{rd} > \phi_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

pues en este caso

$$\frac{m_0+2}{d} > \frac{m_0+1}{d} > \frac{m_0}{d} \geq \frac{\frac{sd}{r}-1}{d} = \frac{sd-r}{rd} > \phi_2.$$

◁

El siguiente resultado, que es una versión simplificada de [25, teorema 1.5], es un caso especial en el que sólo necesitamos invocar al teorema 4.7 una vez.

Corolario 4.9. Sea E un haz de Steiner general dado por una resolución de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{ks} \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{k(s+r)} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Supongamos que

$$\mu(E) = \frac{s}{r} \in \Phi_2.$$

Si $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es un morfismo general de grado r y k es suficientemente grande entonces

$$f^*E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s)^{kr}.$$

Similarmente, si F es un haz de Steiner general dado por una resolución de la forma

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{k(2r-s+3)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{k(r-s+1)} \rightarrow 0$$

con $1 - \frac{s+1}{r+2} \in \Phi_2$ entonces dado un morfismo general $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ grado $r+2$ se tiene que

$$f^*F \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s-r-1)^{k(r+2)}.$$

Demostración. Notemos que las dos partes del teorema son equivalentes. En efecto, si F admite una resolución como en la segunda parte del teorema entonces su dual admite una resolución de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{kS} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{k(S+R)} \rightarrow F^\vee \rightarrow 0$$

donde

$$S := r - s + 1; R := r + 2.$$

Notemos que

$$\frac{S}{R} = 1 - \frac{s+1}{r+2} \in \Phi_2.$$

Sigue que

$$f^*F \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(S)^{kR})^\vee = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s-r-1)^{k(r+2)}.$$

Para probar la primera parte, consideremos un haz E como en el enunciado y supongamos que f^*E se descompone como

$$f^*E \cong \bigoplus_{i=1}^{kr} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i).$$

De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, (f^*E)^\vee(s-1)) \rightarrow S_{s-1}^{k(s+r)} \rightarrow S_{r+s-1}^{ks}$$

y del teorema 4.7 obtenemos que

$$H^0(\mathbb{P}^1, (f^*E)^\vee(s-1)) = 0.$$

En efecto, las hipótesis del teorema en este caso son $s/r \in \Phi_2$, que se tiene por hipótesis, y $s(s+r) \leq (s+r)s$, que se cumple trivialmente. Esto muestra que $a_i \geq s$ para cada $1 \leq i \leq kr$. Notemos además que

$$\sum_{i=1}^{kr} a_i = \deg(f^*E) = \deg(f) \cdot \deg(E) = krs.$$

La única manera en la que kr enteros $a_i \geq s$ pueden sumar krs es si todos son iguales a s . Esto completa la prueba. ■

4.3. Determinando el cono efectivo

Durante toda esta sección, $n \geq 2$ será un entero fijo. Podemos escribir de manera única

$$n = \binom{r+1}{2} + s$$

donde $0 \leq s \leq r$.

Proposición 4.10. [26, proposición 4.3] Consideremos un haz de Steiner de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-2)^{ks} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-1)^{k(s+r)} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Si k es suficientemente grande, E satisface interpolación para n puntos siempre que $s/r \in \Phi_2$.

Similarmente, supongamos que F es un haz de Steiner general de la forma

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r)^{k(2r-s+3)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r+1)^{k(r-s+1)} \rightarrow 0.$$

Si k es suficientemente grande entonces F satisface interpolación para n puntos siempre que $1 - \frac{s+1}{r+2} \in \Phi_2$.

Demostración. Consideremos un morfismo general $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ de grado r . La imagen $C = f(\mathbb{P}^1)$ es una curva de grado r con $\binom{r-1}{2}$ nodos simples. Consideremos ahora la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

Al realizar el producto tensorial por E obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow E(-r) \rightarrow E \rightarrow E|_C \rightarrow 0.$$

Notemos que $E(-r)$ admite la resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^{ks} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{k(s+r)} \rightarrow E(-r) \rightarrow 0.$$

De esto vemos que

$$H^0(\mathbb{P}^2, E(-r)) = H^1(\mathbb{P}^2, E(-r)) = 0.$$

Por lo tanto, el morfismo restricción

$$H^0(\mathbb{P}^2, E) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E|_C)$$

es un isomorfismo. Bastará entonces demostrar que existen n puntos sobre C tales que ninguna sección de $E|_C$ se anula simultáneamente en cada uno de ellos. Notemos que

$$n = \binom{r+1}{2} + s > \binom{r-1}{2}.$$

Por lo tanto, podemos considerar un divisor D sobre C consistente de los $\binom{r-1}{2}$ nodos y $n - \binom{r-1}{2} = 2r + s - 1$ puntos generales. Una sección de $E|_C(-D)$ es entonces una sección de $E|_C$ que se anula en cada punto de D , que es lo mismo que una sección de $f^*(E|_C)$ que se anula en cada preimagen de los puntos de D . Es decir, tenemos un isomorfismo

$$H^0(C, E|_C(-D)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, f^*(E|_C)(-f^*D)).$$

Según el corolario 4.9 tenemos que

$$f^*(E|_C) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r^2 - r + s)^{kr}.$$

Además, cada nodo de C tiene dos preimágenes bajo f mientras que un punto general tiene sólo una. Por lo tanto

$$\deg(f^*D) = 2 \binom{r-1}{2} + 2r + s - 1 = r^2 - r + s + 1$$

de donde

$$f^*(E|_C)(-f^*D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{kr}.$$

Concluimos que $H^0(C, E|_C(-D)) = 0$.

La demostración de la segunda parte es similar: si $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es un morfismo de grado $r+2$ general con imagen C entonces

$$H^0(\mathbb{P}^2, F) \rightarrow H^0(C, F|_C)$$

es un isomorfismo. Si D es un divisor sobre C consistente de los $\binom{r+1}{2}$ nodos junto con $n - \binom{r+1}{2} = s$ puntos generales, entonces

$$H^0(C, F|_C(-D)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, (f^*F)(-f^*D)).$$

El divisor f^*D tiene grado

$$\deg(f^*D) = 2 \binom{r+1}{2} + s = r^2 + r + s$$

mientras que

$$f^*(F|_C) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r^2 + r + s - 1)^{k(r+2)}.$$

Sigue que $H^0(C, F|_C(-D)) = 0$. ■

Teorema 4.11. *Sea*

$$n = \binom{r+1}{2} + s$$

con $0 \leq s \leq r$.

I) si $s/r \in \Phi_2$ entonces la clase

$$\frac{r^2 - r + s}{r}H - \frac{\Delta}{2}$$

genera al rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$;

II) si $1 - \frac{s+1}{r+2} \in \Phi_2$ y $s \geq 1$ entonces la clase

$$\frac{r^2 + r + s - 1}{r+2}H - \frac{\Delta}{2}$$

genera al rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

Demostración. I) Según la proposición 4.10 un haz general de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-2)^{ks} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-1)^{k(s+r)} \rightarrow E \rightarrow 0$$

satisface interpolación para n puntos. Notemos que

$$\mu(E) = \frac{(r-1)k(s+r) - (r-2)ks}{k(s+r) - ks} = \frac{r^2 - r + s}{r}.$$

Esto prueba que la clase

$$D_E = \frac{r^2 - r + s}{r}H - \frac{\Delta}{2}$$

es efectiva. Para demostrar que esta clase es extremal notemos que las desigualdades

$$\binom{r-1}{2} < n = \binom{r+2}{2} - (r-s+1) < \binom{r+2}{2}$$

se satisfacen. Por lo tanto la proposición 3.13 implica que el elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ pertenece a una curva de tipo α_r . Tenemos que

$$\left(\frac{r^2 - r + s}{r}H - \frac{\Delta}{2} \right) \cdot \alpha_r = \frac{r^2 - r + s}{r}r - n + 1 - \frac{(r-1)(r-2)}{2} = 0.$$

Esto prueba que el rayo generado por la clase D_E es extremal.

II) Por la proposición 4.10 el haz general de la forma

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r)^{k(2r-s+3)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r+1)^{k(r-s+1)} \rightarrow 0$$

satisface interpolación para n puntos. Notemos que

$$\mu(F) = \frac{rk(2r-s+3) - (r+1)k(r-s+1)}{k(2r-s+3) - k(r-s+1)} = \frac{r^2 + r + s - 1}{r+2}.$$

Esto prueba que la clase

$$D_F = \frac{r^2 + r + s - 1}{r+2}H - \frac{\Delta}{2}$$

es efectiva. Además las desigualdades

$$\binom{(r+2)-1}{2} < n = \binom{r+1}{2} + s < \binom{r+2}{2}$$

se satisfacen pues $s \geq 1$. Por lo tanto, según la proposición 3.13, el elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ pertenece a una curva de tipo α_{r+2} . Por último, notemos que

$$\left(\frac{r^2 + r + s - 1}{r + 2} H - \frac{\Delta}{2} \right) \cdot \alpha_{r+2} = \frac{r^2 + r + s - 1}{r + 2} (r + 2) - n + 1 - \frac{(r + 1)r}{2} = 0.$$

Esto prueba que el rayo generado por D_F es extremal. ■

4.4. Interpolación y estabilidad de haces vectoriales

Recordemos que un haz vectorial E sobre \mathbb{P}^2 se dice *semiestable* si, para cada subhaz $0 \neq F \subset E$, se tiene que $\mu(F) \leq \mu(E)$.

Observación 4.11.1. En general uno puede hablar de estabilidad de una gavilla coherente E sobre X respecto a un haz lineal amplio H considerando todas las subgavillas coherentes de E . Cuando E es un haz vectorial y $\dim X \leq 2$ basta considerar los subhaces de E (ver [16, corolario 21 y proposición 25]). \triangleleft

A continuación presentamos tres resultados que sugieren una fuerte relación entre la semiestabilidad de un haz vectorial y el hecho de que éste satisfaga interpolación. Empecemos estudiando el caso de haces vectoriales sobre curvas.

Proposición 4.12. *Sea C una curva suave y proyectiva y sean E, F dos haces vectoriales sobre C . Supongamos que*

$$H^0(C, E \otimes F) = H^1(C, E \otimes F) = 0.$$

Entonces E es semiestable.

Demostración. Denotemos por r_E y r_F a los rangos de E y F , respectivamente. Si $g = g(C)$ es el género de C entonces el teorema de Riemann-Roch para haces vectoriales implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \chi(E \otimes F) \\ &= \deg(E \otimes F) + (1 - g) \cdot \text{rank}(E \otimes F) \\ &= \text{rank}(E \otimes F) \cdot (\mu(E) + \mu(F) + 1 - g). \end{aligned}$$

Sigue que

$$\mu(E) + \mu(F) = g - 1.$$

Supongamos que E no es semiestable, de modo que existe un subhaz $0 \neq E' \subset E$ con $\mu(E') > \mu(E)$. Aplicando el teorema de Riemann-Roch una vez más obtenemos que

$$h^0(C, E' \otimes F) \geq \chi(E' \otimes F) = \text{rank}(E' \otimes F) \cdot (\mu(E') + \mu(F) + 1 - g) > 0.$$

Ahora bien, $E' \otimes F$ es un subhaz de $E \otimes F$, así que $H^0(C, E' \otimes F) \subset H^0(C, E \otimes F) = 0$. Esto es una contradicción. ■

Observación 4.12.2. En [13] se muestra el recíproco de esta proposición: si un haz E sobre una curva C es semiestable entonces existe un haz F tal que $H^0(C, E \otimes F) = H^1(C, E \otimes F) = 0$. \triangleleft

Corolario 4.13. *Si E es un haz de rango r sobre una curva C tal que*

1. $h^0(C, E) = rn$,
2. $h^1(C, E) = 0$ y
3. E satisface interpolación para n puntos

entonces E es semiestable.

Demostración. Si $D \subset C$ es el divisor determinado por n puntos generales en C entonces

$$h^0(C, E(-D)) = 0.$$

El teorema de Riemann-Roch implica que

$$\begin{aligned} h^1(C, E(-D)) &= h^0(C, E(-D)) + \chi(E(-D)) \\ &= \chi(E) - r \deg(D) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $F := \mathcal{O}_C(-D)$ cumple que $H^0(C, E \otimes F) = H^1(C, E \otimes F)$. ■

A continuación presentamos un resultado sobre estabilidad de haces de Steiner en el plano.

Teorema 4.14. [25, teorema 4.1] *Sea E un haz de Steiner general de la forma*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-2)^{ks} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-1)^{k(s+r)} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Entonces E es semiestable si y sólo si $\mu(E) = s/r \in \Phi_2$.

Observación 4.14.3. En 4.10 vimos que esto es equivalente, para k suficientemente grande, a satisfacer interpolación para $n = \binom{r+1}{2} + s$ puntos. ◁

Por último, el siguiente es el teorema principal de [26].

Teorema 4.15. [26, teorema 1.4] *Sea n un entero positivo y sea μ la mínima pendiente de un haz vectorial estable E en \mathbb{P}^2 tal que*

$$\frac{\chi(E)}{\text{rank } E} \geq n.$$

Si E es general y de rango suficientemente grande entonces $h^0(\mathbb{P}^2, E) = rn$ y E satisface interpolación para n puntos. Además, la clase

$$\mu H - \frac{\Delta}{2}$$

genera un rayo extremal del cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

Observación 4.15.4. Los casos cubiertos en el teorema 4.11 son precisamente los casos en los que E se puede realizar como un haz de Steiner.

Intuitivamente, el teorema 4.15 nos hace pensar que la razón por la cual una clase de la forma $\mu H - \frac{\Delta}{2} \in \text{Pic}_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^{2[n]}$ sería efectiva es porque existe un haz vectorial estable E de pendiente μ y con $n \cdot \text{rank } E$ secciones. Esta idea jugará un papel importante en el capítulo 5. ◁

Dedicaremos lo que resta de este capítulo a explicar cómo calcular la mínima pendiente μ del teorema anterior para cada valor de n .

4.5. Haces excepcionales

El objetivo de esta sección y de lo que resta del capítulo es hacer un recuento de la clasificación de haces estables en \mathbb{P}^2 desarrollada por J.-M. Drézet y J. LePotier. Este material está basado en [28], [10] y [9].

Específicamente, dados tres números (r, μ, Δ) , queremos determinar bajo qué condiciones el espacio móduli $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ de gavillas estables de rango r , pendiente μ y discriminante Δ es no vacío. La respuesta a esta pregunta se da en el teorema 4.33. Si $F \in \mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ entonces el espacio vectorial

$$\text{Ext}^1(F, F)$$

se identifica de manera natural con el espacio tangente de $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ en el punto F . Juegan un papel especialmente importante aquellas gavillas (estables) F para las cuales $\text{Ext}^1(F, F) = 0$; es decir, aquellas gavillas para las cuales $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ consta de un único punto.

Observación 4.15.1. Hasta este punto hemos utilizado el símbolo Δ para denotar a una clase en $\text{Pic } \mathbb{P}^{2[n]}$. Durante estas secciones lo usaremos para denotar al discriminante de una gavilla. Ambas notaciones aparecen en la literatura. En ninguna ocasión ocurre una expresión matemática que involucre ambos usos del símbolo Δ al mismo tiempo, de modo que esto no debería causar confusión. ◁

Proposición 4.16. Sea F una gavilla coherente estable en \mathbb{P}^2 . Los siguientes son equivalentes:

- I) $Ext^1(F, F) = 0$;
- II) $\Delta(F) < \frac{1}{2}$;
- III) $\chi(F, F) > 0$.

Demostración. Dado que F es estable, el teorema de dualidad de Serre implica que

$$Ext^2(F, F) \cong Ext^0(F, F(-3)) = Hom(F, F(-3)) = 0.$$

Además, los únicos endomorfismos $F \rightarrow F$ están dados como multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, el teorema de Riemann-Roch implica las identidades

$$1 - ext^1(F, F) = \chi(F, F) = (\text{rank } F)^2(1 - 2\Delta(F))$$

de donde se deduce la proposición. ■

Definición 4.17. Una gavilla estable F se llama *excepcional* si $Ext^1(F, F) = 0$.

Ejemplo 4.17.2. El haz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$ es excepcional para toda m . ◁

Ejemplo 4.17.3. Es bien conocido que el haz tangente $T\mathbb{P}^2$ es estable. De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3 \rightarrow T\mathbb{P}^2 \rightarrow 0$$

podemos calcular

$$\begin{aligned} \text{rank } T\mathbb{P}^2 &= 2 \\ c_1(T\mathbb{P}^2) &= 1 \\ c_2(T\mathbb{P}^2) &= 1. \end{aligned}$$

Sigue que

$$\Delta(T\mathbb{P}^2) = \frac{1}{2}\mu(T\mathbb{P}^2) - \frac{c_1(T\mathbb{P}^2)^2 - 2c_2(T\mathbb{P}^2)}{2 \cdot \text{rank } T\mathbb{P}^2} = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $T\mathbb{P}^2$ es excepcional. ◁

Proposición 4.18. Dado un número $\alpha \in \mathbb{Q}$ existe a lo más una gavilla excepcional de pendiente α . Su rango es el mínimo entero positivo r tal que $\alpha \cdot r \in \mathbb{Z}$. Su discriminante es

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right).$$

Demostración. Sea F una gavilla excepcional de pendiente α y sean (r, c_1, c_2) sus clases de Chern. El teorema de Riemann-Roch implica que

$$1 = \chi(F, F) = (r - 2c_2) \cdot r + (r - 1) \cdot c_1^2 = r^2(1 - 2\Delta(F)).$$

Esto implica que c_1 y r son primos relativos, así que $\alpha = c_1/r$ los determina de manera única. Despejando obtenemos la fórmula para $\Delta(F)$.

Ahora supongamos que existen dos gavillas excepcionales F y F' de pendiente α . Por el teorema de dualidad de Serre

$$Ext^2(F, F') \cong Ext^0(F', F(-3)) = 0$$

de modo que

$$\dim Hom(F, F') = ext^0(F, F') \geq \chi(F, F') = 1.$$

Dado que F' es estable, esto implica que $F \cong F'$. ■

Corolario 4.19. Una gavilla excepcional es localmente libre.

Demostración. Si $A \in Aut(\mathbb{P}^2)$ entonces A^*E_α es de nuevo una gavilla excepcional de pendiente α . Sigue que $A^*E_\alpha \cong E_\alpha$. Como E_α es invariante bajo la acción de $Aut(\mathbb{P}^2)$, sigue que E_α es localmente libre. ■

Definición 4.20. Utilizaremos el término *haz excepcional* en lugar de gavilla excepcional para enfatizar que éstas son localmente libres. Denotaremos por E_α al único haz excepcional de pendiente α , siempre que éste exista.

Corolario 4.21. *Si E_α es un el haz excepcional de pendiente α entonces*

$$\begin{aligned} E_\alpha^\vee &\cong E_{-\alpha} \\ E_\alpha(1) &\cong E_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

A continuación buscamos describir el conjunto de pendientes α para las cuales existe un haz excepcional E_α . Hacemos la siguiente definición en analogía a la proposición 4.18

Definición 4.22. Dado un número racional α denotaremos por r_α al menor entero positivo tal que $r_\alpha \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$. Asimismo, definimos

$$\Delta_\alpha := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2} \right)$$

y

$$\chi_\alpha := r_\alpha(P(\alpha) - \Delta_\alpha)$$

donde

$$P(m) := h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$$

es la función de Hilbert de la gavilla estructural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$.

La siguiente definición, que se hace de manera recursiva, es más técnica, pero nos será de utilidad después. Es de notarse que en [9] hay un error de signo en el denominador de $\alpha.\beta$. En [26] se señala este hecho, pero el mismo error aparece en el Lema 2.1 (2).

Definición 4.23. Dados dos números racionales α y β tales que $\beta - \alpha \neq 3$ definimos

$$\alpha.\beta := \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}.$$

Diremos que una pareja (α, β) es *admisibile* si cumple las siguientes propiedades:

- I) $0 < \beta - \alpha < 3$;
- II) $P(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta$;
- III) Los números χ_α, χ_β son enteros.

Observacion 4.23.4. Si $n \in \mathbb{Z}$ entonces la pareja $(n, n + 1)$ es admisible. ◁

Lema 4.24. *Sea (α, β) una pareja admisible y sean*

$$\begin{aligned} r &:= r_\alpha r_\beta (3 + \alpha - \beta) \\ \Delta &:= P(\alpha - \alpha.\beta) - \Delta_\alpha \\ &= P(\alpha.\beta - \beta) - \Delta_\beta. \end{aligned}$$

Se cumple entonces que

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right).$$

Demostración. En vista de que $P(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta$ obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned}
\Delta &= P\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \frac{1}{2}(\Delta_\alpha + \Delta_\beta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3 + \alpha - \beta}\right)^2 \\
&= P\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \frac{1}{2}P(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3 + \alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3 + \alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} + \frac{(\Delta_\alpha + \Delta_\beta - 1)^2 - (1 - 2\Delta_\alpha)(1 - 2\Delta_\beta)}{2(3 + \alpha + \beta)^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} + \frac{(P(\alpha - \beta) - 1)^2 - (1 - 2\Delta_\alpha)(1 - 2\Delta_\beta)}{2(3 + \alpha + \beta)^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(1 - 2\Delta_\alpha)(1 - 2\Delta_\beta)}{2(3 + \alpha + \beta)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

■

Lema 4.25. *Con la notación del lema anterior, sean*

$$\begin{aligned}
c_1 &:= r \cdot \alpha \cdot \beta \\
\chi &= r(P(\alpha, \beta) - \Delta).
\end{aligned}$$

Estos números son enteros.

Demostración. Notemos que

$$\chi_{-\beta} = r_\beta(P(-\beta) - \Delta_\beta) = \chi_\beta - 3r_\beta\beta$$

es un número entero, pues χ_β y $r_\beta\beta$ lo son. Expandiendo vemos que

$$c_1 = r_\beta\chi_\alpha - r_\alpha\chi_{-\beta}$$

es un entero. Ahora bien, utilizando la igualdad $\Delta = P(\alpha, \beta) - \Delta_\beta$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\chi}{r} &= P(\alpha, \beta) - \Delta \\
&= P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta - \beta) + \Delta_\beta \\
&= 1 + \beta \cdot (\alpha, \beta) - (P(-\beta) - \Delta_\beta) \\
&= 1 + \beta(\alpha, \beta) - \frac{\chi_{-\beta}}{r_\beta}.
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Usando que $\Delta = P(\alpha - \alpha, \beta) - \Delta_\alpha$ obtenemos de manera similar la igualdad

$$\frac{\chi}{r} = 1 + (\alpha + 3)(\alpha, \beta) - \frac{\chi_\alpha}{r_\alpha}. \tag{4.5.2}$$

Utilizamos (4.5.1) y (4.5.2) para eliminar α, β y despejando obtenemos que

$$\chi = r - (3 + \alpha)r_\alpha\chi_{-\beta} + \beta r_\beta\chi_\alpha$$

es un entero. ■

Proposición 4.26. *Si (α, β) es una pareja admisible, entonces*

a) $\alpha < \alpha, \beta < \beta$;

b) el número α, β tiene denominador

$$r_{\alpha, \beta} = r_\alpha r_\beta (3 + \alpha - \beta);$$

c) las parejas (α, α, β) y (α, β, β) son admisibles.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}\alpha.\beta - \alpha &= \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta} \\ \beta - \alpha.\beta &= \frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}.\end{aligned}$$

Dado que $\beta - \alpha$ y $3 + \alpha - \beta$ son ambos positivos, mostrar a) es equivalente a mostrar que

$$|\Delta_\beta - \Delta_\alpha| < \frac{(\beta - \alpha)(3 + \alpha - \beta)}{2} = 1 - P(a - b) = 1 - \Delta_\alpha - \Delta_\beta.$$

Ambos lados son no negativos pues $\Delta_\alpha, \Delta_\beta < 1/2$, de modo que la desigualdad es equivalente a

$$(\Delta_\beta - \Delta_\alpha)^2 = |\Delta_\beta - \Delta_\alpha|^2 < (1 - \Delta_\alpha - \Delta_\beta)^2.$$

A su vez, esta desigualdad es equivalente a

$$0 < (1 - \Delta_\alpha - \Delta_\beta)^2 - (\Delta_\beta - \Delta_\alpha)^2 = (1 - 2\Delta_\alpha)(1 - 2\Delta_\beta)$$

que es cierta en vista de que $\Delta_\alpha, \Delta_\beta < 1/2$.

Con la notación de los lemas anteriores, hemos visto que $c_1 = r(\alpha.\beta)$ es un entero. Tenemos que

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) = \Delta = P(\alpha.\beta) - \frac{\chi}{r}.$$

Despejando obtenemos

$$\begin{aligned}1 &= r^2 + 2r\chi - 2r^2P(\alpha.\beta) \\ &= r^2 + 2r\chi - c_1^2 - 3rc_1 - 2r^2 \\ &= (2\chi - r) \cdot r - (3r + c_1) \cdot c_1.\end{aligned}$$

De aquí vemos que r y c_1 son primos relativos, lo que prueba b). Para probar c) sólo resta notar que $\Delta = \Delta_{\alpha.\beta}$ y $\chi = \chi_{\alpha.\beta}$ por b). ■

La proposición anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición 4.27. Denotemos por $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$ a los *enteros diádicos*. Un elemento en este anillo tiene la forma

$$\frac{p}{2^q}$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}$. Si $p \neq 0$, esta expresión es única si insistimos en que p sea impar. Definimos la función

$$\epsilon : \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \rightarrow \mathbb{Q}$$

como $\epsilon(n) = n$ si $n \in \mathbb{Z}$, y de manera recursiva como

$$\epsilon \left(\frac{2p+1}{2^{q+1}} \right) := \epsilon \left(\frac{p}{2^q} \right) \cdot \epsilon \left(\frac{p+1}{2^q} \right).$$

Lema 4.28. La función ϵ es estrictamente creciente. Dado $p/2^q \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$ se cumplen las identidades

$$\begin{aligned}\epsilon \left(\frac{p}{2^q} + 1 \right) &= \epsilon \left(\frac{p}{2^q} \right) + 1 \\ \epsilon \left(-\frac{p}{2^q} \right) &= -\epsilon \left(\frac{p}{2^q} \right).\end{aligned}$$

Demostración. Notemos que la proposición 4.26 c) implica que la pareja

$$\left(\epsilon \left(\frac{p}{2^q} \right), \epsilon \left(\frac{p+1}{2^q} \right) \right)$$

es admisible siempre que p sea impar. Por lo tanto, ϵ es creciente. Lo que resta del lema claramente es cierto si $p/2^q = n$ es un entero. Para completar la prueba, procederemos por inducción, suponiendo que $p/2^q$ y $(p+1)/2^q$ satisfacen las identidades. Denotemos por

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}} + 1\right) &= \epsilon\left(\frac{2(p+2^q)+1}{2^{q+1}}\right) \\ &= \epsilon\left(\frac{p+2^q}{2^q}\right) \cdot \epsilon\left(\frac{p+2^q+1}{2^q}\right) \\ &= (\alpha+1) \cdot (\beta+1) \\ &= \frac{\alpha+1+\beta+1}{2} + \frac{\Delta_{\beta+1} - \Delta_{\alpha+1}}{3 + (\alpha+1) - (\beta+1)} \\ &= \alpha \cdot \beta + 1. \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} \epsilon\left(-\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) &= \epsilon\left(\frac{2(-p-1)+1}{2^{q+1}}\right) \\ &= \epsilon\left(\frac{-p-1}{2^q}\right) \cdot \epsilon\left(\frac{-p-1+1}{2^q}\right) \\ &= (-\beta) \cdot (-\alpha) \\ &= \frac{-\beta - \alpha}{2} + \frac{D_\alpha - D_\beta}{3 - \beta + \alpha} \\ &= -(\alpha \cdot \beta). \end{aligned}$$

■

Observacion 4.28.5. Estas identidades son idénticas a las propiedades del conjunto \mathcal{E} descritas en el corolario 4.21. Esto no es coincidencia, como lo muestra el siguiente teorema. \triangleleft

Teorema 4.29. [28, teorema 16.3.4] *La imagen \mathcal{E} de ϵ es el conjunto de pendientes α para las cuales existe un haz excepcional E_α de pendiente α .*

Para terminar esta sección probaremos algunos lemas concernientes al conjunto \mathcal{E} de pendientes excepcionales que nos serán de utilidad después.

Lema 4.30. *Sea*

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^q}\right)$$

una pendiente excepcional. Entonces $r_\alpha \geq 2^q$.

Demostración. El resultado es claro si $q \leq 0$. Procederemos por inducción, suponiendo que el resultado es válido para $1, \dots, q$. Notemos que si

$$\gamma := \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \cdot \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) = \alpha \cdot \beta$$

entonces alguno de p y $p+1$ debe ser impar. Además, $|\alpha - \beta| \leq 1$ dado que $q \geq 0$. Por lo tanto, $3 + \alpha - \beta \geq 2$. Por la proposición 4.26 vemos que

$$r_\gamma = r_\alpha r_\beta (3 + \alpha - \beta) \geq 2r_\alpha r_\beta \geq 2^{q+1}.$$

■

Observación 4.30.6. Aunque servirá para nuestros propósitos, en general esta cota suele ser muy mala. Por ejemplo, para $q = 5$ la cota predice denominadores $r_\alpha \geq 32$, mientras que

$$\epsilon\left(\frac{22}{2^5}\right) = \frac{22095}{37666}.$$

◁

Lema 4.31. Dado $\mu \in \mathbb{Q}$ existen $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ tales que $\alpha \leq \mu \leq \beta$, y tales que el intervalo (α, β) no contiene pendientes excepcionales $\gamma \in \mathcal{E}$ con $r_\gamma < r_\mu$.

Demostración. Sea q un entero tal que $2^{q+1} \geq r_\mu$. Según el lema anterior, el conjunto

$$\mathcal{E}_q := \left\{ \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) : p \in \mathbb{Z} \right\}$$

contiene a todas las pendientes excepcionales α tales que $r_\alpha < r_\mu$. Este conjunto es discreto, así que podemos definir

$$\begin{aligned} \alpha &:= \max\{\gamma \in \mathcal{E}_q : \gamma \leq \mu\} \\ \beta &:= \min\{\gamma \in \mathcal{E}_q : \gamma \geq \mu\}. \end{aligned}$$

■

Lema 4.32. Si (α, β) es una pareja admisible entonces

$$\alpha.\beta = \alpha + \frac{1}{r_\alpha^2(3 + \alpha - \beta)} = \beta - \frac{1}{r_\beta^2(3 + \alpha - \beta)}.$$

Demostración. Como (α, β) es admisible, sigue que

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\alpha + \Delta_\beta}{3 + \alpha - \beta} - \frac{2\Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{P(\alpha - \beta) - 1}{3 + \alpha - \beta} + \frac{1}{r_\alpha^2(3 + \alpha - \beta)} \\ &= a + \frac{1}{r_\alpha^2(3 + \alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

La otra igualdad es similar. ■

4.6. Clasificación de haces vectoriales estables

El papel que juegan los haces excepcionales en la clasificación de gavillas estables se ilustra en el siguiente teorema.

Teorema 4.33. [28, teorema 16.2.1] Denotemos por

$$P(m) := \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$$

a la función de Hilbert de la gavilla estructural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$. Sea r un entero y sean μ y Δ dos números racionales. Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que exista una gavilla estable de rango r , pendiente μ y discriminante Δ en \mathbb{P}^2 .

- I) Los números $r\mu$ y $r(P(\mu) - \Delta)$ son enteros;
- II) para cada $\alpha \in \mathcal{E}$ tal que $r_\alpha < r$ y $|\mu - \alpha| < 3$ se tiene que

$$\Delta + \Delta_\alpha \geq P(-|\mu - \alpha|).$$

Demostración. Probar que las condiciones del teorema son suficientes es bastante complicado y no lo haremos aquí, pero probar que las condiciones son necesarias es relativamente sencillo. La primera condición significa únicamente que el grado y la característica de Euler de una gavilla son números enteros.

Para probar la segunda, consideremos una gavilla estable F con invariantes (r, μ, Δ) . Sea $\alpha \in \mathcal{E}$ una pendiente excepcional y supongamos que $\alpha < \mu < \alpha + 3$, siendo el caso $\alpha - 3 < \mu < \alpha$ similar. Dado que F y E_α son estables, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Ext}^0(F, E_\alpha) &= 0 \\ \text{Ext}^2(F, E_\alpha) &\cong \text{Ext}^0(E_\alpha, F(-3)) = 0. \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Sigue que

$$0 \geq \chi(F, E_\alpha) = rr_\alpha(P(\alpha - \mu) - \Delta - \Delta_\alpha)$$

lo cual es equivalente a

$$\Delta + \Delta_\alpha \geq P(\alpha - \mu) = P(-|\alpha - \mu|).$$

El único caso que resta probar es cuando $\alpha = \mu$. Si $F \cong E_\alpha$ entonces la desigualdad $r_\alpha < r$ es falsa, así que no debemos verificar nada. Si $F \not\cong E_\alpha$ entonces las identidades en (4.6.1) siguen siendo válidas y la conclusión es la misma. ■

El teorema anterior es muy interesante desde el punto de vista teórico, pero *a priori* no es claro cómo determinar de manera práctica si el espacio $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ es no vacío para valores específicos de r, μ, Δ . En la práctica bastará verificar la condición II) para un único valor de α .

Definición 4.34. Denotemos por

$$\delta(\mu) := \sup_{\alpha \in \mathcal{E}: |\mu - \alpha| < 3} P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha.$$

Corolario 4.35. *El número $\delta(\mu)$ es el mínimo discriminante de una gavilla estable no excepcional con pendiente μ .*

Demostración. Que existen gavillas estables de pendiente μ y discriminante $\delta(\mu)$ es una consecuencia directa del teorema: la condición II) se satisface inmediatamente y la condición I) se satisface si elegimos a r como un múltiplo el denominador común de μ y $P(\mu) - \delta(\mu)$. Por otro lado, si E es una gavilla estable no excepcional de pendiente μ la demostración del teorema muestra que $\Delta(E) \geq P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{E}$ tal que $|\mu - \alpha| < 3$: la condición $r_\alpha < r = \text{rank } E$ sólo fue necesaria en caso de que E fuese excepcional. ■

Dada $\alpha \in \mathcal{E}$ definamos

$$x_\alpha := \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{r_\alpha^2}}.$$

Lema 4.36. *Dado $\mu \in \mathbb{Q}$, supongamos que existe $\beta \in \mathcal{E}$ tal que $|\mu - \beta| < x_\beta$. Entonces*

$$\delta(\mu) = \sup_{\alpha \in \mathcal{E}: |\mu - \alpha| < x_\alpha} P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha. \tag{4.6.2}$$

Demostración. Es fácil verificar que, para $\alpha \in \mathcal{E}$, la condición $P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha > \frac{1}{2}$ es equivalente a que se cumpla una de las siguientes dos condiciones:

- a) $|\alpha - \mu| < x_\alpha$;
- b) $|\alpha - \mu| > \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{r_\alpha^2}} = 3 - x_\alpha$.

En particular, β satisface la condición a) por hipótesis. Supongamos que existe $\alpha \in \mathcal{E}$, con $|\mu - \alpha| < 3$, tal que

$$P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha > P(-|\beta - \mu|) - \Delta_\beta > \frac{1}{2}.$$

Si α cumple la condición a) entonces no hay nada que demostrar, pues en ese caso α es considerada al calcular $\delta(\mu)$ según la fórmula (4.6.2). En otro caso, α cumple la condición b).

Supongamos por el momento que $\mu < \alpha$. Entonces las condiciones b) y $|\mu - \alpha| < 3$ se traducen en las desigualdades

$$\alpha - 3 < \mu < \alpha - (3 - x_\alpha). \quad (4.6.3)$$

En este caso, $\alpha - 3$ es otra pendiente excepcional tal que $|(\alpha - 3) - \mu| < x_{\alpha-3}$. En efecto, (4.6.3) puede reescribirse como

$$0 < \mu - (\alpha - 3) < x_\alpha = x_{\alpha-3}.$$

Además se cumple que

$$\begin{aligned} P(-|(\alpha - 3) - \mu|) - \Delta_{\alpha-3} &= P(-3 - (\mu - \alpha)) - \Delta_{\alpha-3} \\ &= P(\mu - \alpha) - \Delta_\alpha \\ &= P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto, a pesar de que no se considera a α al calcular $\delta(\mu)$ siguiendo la fórmula (4.6.2), sí se considera a $\alpha - 3$ y, al tomar el supremo, da el mismo resultado. \blacksquare

Observacion 4.36.1. Dados $\mu \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathcal{E}$, notemos que

$$3 - x_\alpha \geq \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, si $P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha > 1/2$ entonces se cumple alguna de las condiciones a) o b); y si además se cumple la desigualdad

$$|\alpha - \mu| < \frac{3}{2}$$

entonces la condición b) es imposible y, automáticamente, $|\alpha - \mu| < x_\alpha$. \triangleleft

La siguiente proposición implica que, dado $\mu \in \mathbb{Q}$, existe una única pendiente excepcional α tal que $|\alpha - \mu| < x_\alpha$.

Proposición 4.37. *Los intervalos*

$$I_\alpha := (\alpha - x_\alpha, \alpha + x_\alpha); \quad \alpha \in \mathcal{E}$$

son ajenos a pares y cubren a todos los números racionales.

Demostración. Para probar que estos intervalos son ajenos a pares, consideremos dos pendientes excepcionales $\alpha < \beta$. Escribimos

$$\alpha = \epsilon \left(\frac{p}{2^q} \right), \beta = \epsilon \left(\frac{p'}{2^q} \right)$$

donde p o p' podrían ser pares. Notemos entonces que

$$\alpha \leq \epsilon \left(\frac{p''}{2^q} \right) \leq \beta$$

siempre que $p \leq p'' \leq p'$. Basta entonces demostrar que $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ cuando $p' = p + 1$. Ahora bien, dado que $\alpha < \alpha.\beta < \beta$, bastaría probar que $\alpha.\beta \notin I_\alpha \cup I_\beta$. Notemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \epsilon \left(\frac{2p}{2^{q+1}} \right) \\ \alpha.\beta &= \epsilon \left(\frac{2p+1}{2^{q+1}} \right) \\ \beta &= \epsilon \left(\frac{2p+2}{2^{q+1}} \right). \end{aligned}$$

Sigue entonces que

$$\begin{aligned} P(-|\alpha - \alpha.\beta|) - \Delta_\alpha &= P(\alpha - \alpha.\beta) - \Delta_\alpha \\ &= \Delta_{\alpha.\beta} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y similarmente

$$P(-|\beta - \alpha, \beta|) - \Delta_\beta = \Delta_{\alpha, \beta} \leq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, α, β no puede pertenecer a I_α ni a I_β .

Para probar que estos intervalos cubren a \mathbb{Q} consideremos un número $\mu \in \mathbb{Q}$. Si $\mu \in \mathcal{E}$ es una pendiente excepcional entonces $\mu \in I_\mu$ y no hay nada que probar. Supongamos que $\mu \notin \mathcal{E}$ y tomemos dos pendientes excepcionales $\alpha < \mu < \beta$ tales que el intervalo (α, β) no contiene pendientes excepcionales de rango menor a r_μ (ver lema 4.31). Por cómo fueron construídas, estas pendientes son de la forma

$$\alpha = \varepsilon \left(\frac{p}{2^q} \right), \beta = \epsilon \left(\frac{p+1}{2^q} \right)$$

con p no necesariamente impar. Como $r_{\alpha, \beta} \geq r_\mu$ se cumple por hipótesis, entonces $\alpha, \beta \neq \mu$ y $r_{\alpha, \beta} r_\mu (\mu - \alpha, \beta)$ es un entero no nulo, de modo que

$$|\mu - \alpha, \beta| \geq \frac{1}{r_{\alpha, \beta} r_\mu} \geq \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2}.$$

Por lo tanto, bastará probar las desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha, \beta - \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2} &< \alpha + x_\alpha \\ \alpha, \beta + \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2} &> \beta - x_\beta \end{aligned}$$

pues en este caso, $\mu \in I_\alpha$ o $\mu \in I_\beta$ dependiendo de si $\mu < \alpha, \beta$ o $\mu > \alpha, \beta$. Las dos desigualdades son similares, así que nos concentraremos en la primera. Notemos que

$$\frac{3}{2} > \alpha, \beta - \alpha > \alpha, \beta - \alpha - \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2} = \frac{1}{r_\alpha^2 (3 + \alpha - \beta)} - \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2} > 0.$$

Por la observación 4.36.1, bastará mostrar que

$$P\left(\alpha - \alpha, \beta + \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} P\left(\alpha - \alpha, \beta + \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2}\right) &= P(\alpha - \alpha, \beta) + P\left(\frac{1}{r_{\alpha, \beta}}\right) + \frac{\alpha - \alpha, \beta}{r_{\alpha, \beta}^2} - 1 \\ &= \Delta_\alpha + \Delta_{\alpha, \beta} + P\left(\frac{1}{r_{\alpha, \beta}}\right) + \frac{\alpha - \alpha, \beta}{r_{\alpha, \beta}^2} - 1 \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2} - \frac{1}{r_{\alpha, \beta}}\right) + \frac{1 + \alpha - \alpha, \beta}{r_{\alpha, \beta}^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r_{\alpha, \beta}^2} - \frac{1}{r_{\alpha, \beta}}\right). \end{aligned}$$

La función

$$f(r) := \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$$

alcanza su máximo en $r = 2$ y converge de manera estrictamente decreciente a $1/2$ cuando $r \rightarrow \infty$. Esto nos da la conclusión deseada. \blacksquare

Corolario 4.38. *La función δ restringida al intervalo I_α con $\alpha \in \mathcal{E}$ tiene la forma*

$$\delta(\mu) = P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha.$$

En particular, $\delta(\mu) > 1/2$ para todo $\mu \in \mathbb{Q}$.

Corolario 4.39. *No existen gavillas estables en el plano de discriminante $\Delta = 1/2$.*

En vista de la proposición anterior podemos dar la siguiente definición.

Definición 4.40. Dado $\mu \in \mathbb{Q}$, la única pendiente excepcional $\alpha \in \mathcal{E}$ tal que $\mu \in I_\alpha$ se llama la *pendiente excepcional asociada* a μ .

El último ingrediente que necesitamos para poder determinar de manera práctica cuándo el espacio $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ es no vacío es, dado $\mu \in \mathbb{Q}$, poder determinar su pendiente excepcional asociada. El lema 4.30 nos da una manera de hacer esto, encontrando un q tal que $2^q \geq r_\mu$; sin embargo, hemos visto que la cota que proporciona el lema es muy burda, así que este método puede resultar ineficiente en la práctica.

Una manera eficiente de hacer esto es utilizar *búsqueda binaria*. El algoritmo consistirá de los siguientes pasos.

- 1) Definimos $\alpha := \lfloor \mu \rfloor$ y $\beta := \alpha + 1$. Verificamos si $\mu \in I_\alpha$ o $\mu \in I_\beta$, en cuyo caso el algoritmo termina y el resultado es α o β según sea el caso.
- 2) Verificamos si $\mu \in I_{\alpha, \beta}$, en cuyo caso el algoritmo termina y el resultado es α, β .
- 3) Reemplazamos la pareja (α, β) por

$$\begin{aligned} &(\alpha, \alpha, \beta) \quad \text{si } \mu < \alpha, \beta \\ &(\alpha, \beta, \beta) \quad \text{si } \mu > \alpha, \beta \end{aligned}$$

y volvemos al paso 2).

Ejemplo 4.40.2. Consideremos $\mu = \frac{191}{500}$. A continuación llevamos a cabo el algoritmo.

Paso 1): Hacemos

$$(\alpha, \beta) = (0, 1)$$

y vemos que

$$\begin{aligned} |\alpha - \mu| &= \frac{191}{500} > 0,381966\dots = x_\alpha \\ |\beta - \mu| &= \frac{305}{500} > 0,381966\dots = x_\beta. \end{aligned}$$

Paso 2): Tenemos que $\alpha, \beta = \frac{1}{2}$ y

$$|\mu - \alpha, \beta| = \frac{59}{500} > 0,085786\dots = x_{\alpha, \beta}.$$

Paso 3): Dado que $\mu < \alpha, \beta$ hacemos

$$(\alpha, \beta) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

y volvemos al paso 2). Paso 2): Tenemos que $\alpha, \beta = \frac{2}{5}$ y

$$|\mu - \alpha, \beta| = \frac{9}{500} > 0,013393\dots = x_{\alpha, \beta}.$$

Paso 3): Dado que $\mu < \alpha, \beta$ hacemos

$$(\alpha, \beta) = \left(0, \frac{2}{5}\right)$$

y volvemos al paso 2). Paso 2): Tenemos que $\alpha, \beta = \frac{5}{13}$ y

$$|\mu - \alpha, \beta| = \frac{17}{6500} > 0,001973\dots = x_{\alpha, \beta}.$$

Paso 3): Dado que $\mu < \alpha, \beta$ hacemos

$$(\alpha, \beta) = \left(0, \frac{5}{13}\right)$$

y volvemos al paso 2). Paso 2): Tenemos que $\alpha, \beta = \frac{13}{34}$ y

$$|\mu - \alpha, \beta| = \frac{3}{8500} > 0,000288\dots = x_{\alpha, \beta}.$$

Paso 3): Dado que $\mu < \alpha.\beta$ hacemos

$$(\alpha, \beta) = \left(0, \frac{13}{34}\right)$$

y volvemos al paso 2). Paso 2): Tenemos que $\alpha.\beta = \frac{34}{89}$ y

$$|\mu - \alpha.\beta| = \frac{1}{44500} < 0,000042\dots = x_{\alpha.\beta}.$$

El algoritmo termina aquí por lo que concluimos que

$$\frac{191}{500} \in I_{\frac{34}{89}}.$$

Por lo tanto

$$\delta\left(\frac{191}{500}\right) = P\left(-\left|\frac{34}{89} - \frac{191}{500}\right|\right) - \Delta_{\frac{34}{89}} = \frac{22251309}{44500000} = 0,500029415730337\dots$$

es el mínimo discriminante de un haz vectorial estable con pendiente $\frac{191}{500}$. \triangleleft

4.7. Cono efectivo: el caso general

En esta sección veremos cómo usar estos resultados para calcular el cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ para toda n . Según el teorema 4.15, debemos encontrar la mínima pendiente μ de un haz estable E con

$$P(\mu) - \Delta = \frac{\chi(E)}{\text{rank } E} \geq n.$$

Notemos que si $\Delta' \geq \Delta$ entonces

$$P(\mu) - \Delta' \leq P(\mu) - \Delta.$$

Recordando que $\delta(\mu)$ es el mínimo discriminante de un haz estable, no excepcional, de pendiente μ , vemos que

$$\gamma(\mu) := P(\mu) - \delta(\mu)$$

es la máxima característica de Euler de un haz estable, no excepcional, de pendiente μ .

Proposición 4.41. [25, proposición 4.1, teorema 4.2] *La función γ se extiende de manera continua a una función*

$$\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tal que

- 1) $\gamma(0) = 0$,
- 2) es estrictamente creciente;
- 3) es lineal a pedazos en el intervalo I_α para cada $\alpha \in \mathcal{E}$;
- 4) es no acotada.

En particular, γ tiene una inversa. Además se cumple que

- 5) $\gamma : \mathbb{Q}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ es una biyección.

Observación 4.41.1. La propiedad 2) es fácil de verificar, pues en I_α la función δ está dada por

$$\delta(\mu) = P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha.$$

Por lo tanto, en el intervalo I_α la función γ tiene la forma

$$\gamma(\mu) = P(\mu) - P(-|\alpha - \mu|) + \Delta_\alpha = \begin{cases} \alpha(\mu + 3) + 1 + \Delta_\alpha - P(\alpha) & \text{si } \mu \leq \alpha \\ (\alpha + 3)\mu + 1 + \Delta_\alpha - P(\alpha) & \text{si } \mu \geq \alpha. \end{cases}$$

\triangleleft

En vista de la proposición anterior, dado un entero positivo n , estamos interesados en calcular $\mu = \gamma^{-1}(n)$; este número será la mínima pendiente de un haz no excepcional tal que $\chi/r \geq n$.

Proposición 4.42. *Sea $n \in \mathbb{Q}_{>0}$. Si α es la pendiente excepcional asociada a $\gamma^{-1}(n)$ entonces*

$$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5 + 8n}) \in I_\alpha.$$

Demostración. Sea α la pendiente excepcional asociada de $\gamma^{-1}(n)$. Supongamos por el momento que $\alpha \neq 0$. Sigue que I_α está completamente contenido en los reales positivos; como γ es creciente en I_α , tenemos que

$$\gamma(\alpha - x_\alpha) < \gamma(\gamma^{-1}(n)) = n < \gamma(\alpha + x_\alpha).$$

De la primera desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} + 2n &> \frac{5}{4} + 2\gamma(\alpha - x_\alpha) \\ &= \frac{5}{4} + 2\alpha(\alpha - x_\alpha + 3) + 2 + 2\Delta_\alpha - 2P(\alpha) \\ &= \alpha^2 - 2\alpha x_\alpha + 3\alpha + \frac{9}{4} - \frac{1}{r_\alpha^2} \\ &= \left(\alpha - x_\alpha + \frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5 + 8n}) = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + 2n} > -\frac{3}{2} + \alpha - x_\alpha + \frac{3}{2} = \alpha - x_\alpha.$$

Similarmente, de la segunda desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} + 2n &< \frac{5}{4} + 2\gamma(\alpha + x_\alpha) \\ &= \frac{5}{4} + 2(\alpha + 3)(\alpha + x_\alpha) + 2 + 2\Delta_\alpha - 2P(\alpha) \\ &= \alpha^2 + 2\alpha x_\alpha + 3\alpha + 6x_\alpha + \frac{9}{4} - \frac{1}{r_\alpha^2} \\ &= \left(\alpha + x_\alpha + \frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5 + 8n}) < \alpha + x_\alpha.$$

Ahora bien, si $\alpha = 0$, como $n \geq 0$ entonces $\gamma^{-1}(n) < x_0$. La desigualdad

$$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5 + 8n}) < 0 + x_0$$

se demuestra con el mismo argumento de antes. Por otro lado

$$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5 + 8n}) > \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}) = -x_0.$$

■

Por último, necesitamos discernir cuándo existe un haz excepcional de pendiente $\alpha < \gamma^{-1}(n)$ con χ_α/r_α .

Lema 4.43. *Si $\alpha \geq 0$ es una pendiente excepcional entonces*

$$\gamma(\alpha) < \frac{\chi_\alpha}{r_\alpha} < \gamma(\alpha + x_\alpha).$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{\chi_\alpha}{r_\alpha} - \gamma(\alpha) = P(\alpha) - \Delta_\alpha - \alpha(\alpha + 3) - 1 - \Delta_\alpha + P(\alpha) = \frac{1}{r_\alpha^2} > 0.$$

Por otro lado

$$\gamma(\alpha + x_\alpha) - \frac{\chi_\alpha}{r_\alpha} = (\alpha + 3)(\alpha + x_\alpha) + 1 + \Delta_\alpha - P(\alpha) - P(\alpha) + \Delta_\alpha = (\alpha + 3)x_\alpha - \frac{1}{r_\alpha^2}.$$

Que esta última cantidad sea positiva es equivalente a

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{(3 + \alpha)r_\alpha^2} > \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{r_\alpha^2}}$$

que a su vez es equivalente a

$$\frac{1}{r_\alpha^2} + \alpha(3 + \alpha) > 0. \quad \blacksquare$$

Proposición 4.44. Sea $n \geq 0$ y sea α la pendiente excepcional asociada a $\gamma^{-1}(n)$. Si $0 \leq \beta < \alpha$ es otra pendiente excepcional entonces $\chi_\beta/r_\beta < n$.

Demostración. Por el lema tenemos que

$$\frac{\chi_\beta}{r_\beta} < \gamma(\beta + x_\beta).$$

Como $\beta + x_\beta < \alpha - x_\alpha < \gamma^{-1}(n)$ y γ es creciente, sigue que $\gamma(\beta + x_\beta) < n$. \blacksquare

Todo esto junto nos da un algoritmo para calcular el rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. Los pasos a seguir son:

- 1) Calculamos la pendiente excepcional asociada a $\frac{1}{2}(-3\sqrt{5+8n})$ y la llamamos α .
- 2) Calculamos $\mu := \gamma^{-1}(n)$ utilizando la expresión descrita en la observación 4.41.1.
- 3) Si $\chi_\alpha/r_\alpha \geq n$ y $\alpha < \mu$, el algoritmo termina y la respuesta es α . Si no, el algoritmo termina y la respuesta es μ .

Ejemplo 4.44.2. El primer valor no cubierto por el teorema 4.11 es $n = 17$. La pendiente excepcional asociada a $\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5 + 8 \cdot 17})$ es $\alpha = \frac{9}{2}$. Como $17 < 69/4 = \gamma(9/2)$ entonces $\mu := \gamma^{-1}(17) < 9/2$, por lo que

$$17 = \gamma(\mu) = \frac{9}{2}(\mu + 3) + 1 + \Delta_{\frac{9}{2}} - P\left(\frac{9}{2}\right)$$

de donde despejamos

$$\mu = \frac{40}{9}.$$

Como $40/9 < 9/2$ concluimos que el rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[17]}$ está generado por

$$\frac{40}{9}H - \frac{\Delta}{2}.$$

\triangleleft

Terminamos este capítulo con una implementación en *Macaulay2* de la función `effectiveCone`, la cual recibe un parámetro n y calcula la pendiente μ de la clase extremal no trivial $\mu H - \Delta/2 \in \text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ utilizando este procedimiento.

Observación 4.44.3. Utilizar este método en una computadora personal para los valores $2 \leq n \leq 10^6$ toma aproximadamente 32 segundos. La siguiente tabla muestra los valores correspondientes a $2 \leq n \leq 100$. \triangleleft

n	Mínima pendiente μ	n	Mínima pendiente μ	n	Mínima pendiente μ
2	1	35	7	68	133/13
3	1	36	7	69	134/13
4	3/2	37	36/5	70	135/13
5	2	38	73/10	71	220/21
6	2	39	37/5	72	95/9
7	12/5	40	15/2	73	117/11
8	8/3	41	61/8	74	118/11
9	3	42	31/4	75	119/11
10	3	43	63/8	76	120/11
11	10/3	44	8	77	11
12	7/2	45	8	78	11
13	15/4	46	90/11	79	78/7
14	4	47	91/11	80	157/14
15	4	48	92/11	81	79/7
16	30/7	49	144/17	82	159/14
17	40/9	50	197/23	83	263/23
18	23/5	51	26/3	84	23/2
19	24/5	52	79/9	85	336/29
20	5	53	80/9	86	35/3
21	5	54	9	87	47/4
22	21/4	55	9	88	71/6
23	43/8	56	55/6	89	143/12
24	11/2	57	37/4	90	12
25	17/3	58	28/3	91	12
26	35/6	59	179/19	92	182/15
27	6	60	19/2	93	61/5
28	6	61	48/5	94	184/15
29	56/9	62	97/10	95	37/3
30	19/3	63	49/5	96	62/5
31	84/13	64	99/10	97	312/25
32	125/19	65	10	98	389/31
33	47/7	66	10	99	164/13
34	48/7	67	132/13	100	165/13

```

P = x -> (x^2+3*x+2)/2

eDiscriminant = a -> (1/2)*(1 - 1/(denominator(a/1))^2)

eRadius = a -> 3/2 - sqrt(9/4 - 1/(denominator(a/1))^2)

eProduct = (a, b) -> (a+b)/2 + (eDiscriminant(b) - eDiscriminant(a))/(3+a-b)

eTest = (mu, a) -> (eRadius(a))^2 > (mu-a)^2

associatedExceptionalSlope = mu ->
{
  aAux = floor mu;
  bAux = aAux + 1;
  if eTest(mu, aAux) == true then return aAux
  else if eTest(mu, bAux) == true then return bAux;
  cAux = eProduct(aAux, bAux);
  while eTest(mu, cAux) == false do
  {
    if mu < cAux then bAux = cAux else aAux = cAux;
    cAux = eProduct(aAux, bAux)
  };
  return cAux
}

effectiveCone = n ->
{
  a = associatedExceptionalSlope((-3+sqrt(5+8*n))/2);
  Da = eDiscriminant a;
  if n == P(a) - Da then return a
  else if n <= P(a) + Da - 1 then return (n + P(a) - Da - 3*a - 1)/a
  else return (n + P(a) - Da - 1)/(a+3)
}

```

Capítulo 5

Descomposición por lugar base estable

En este capítulo hablaremos de la *descomposición por lugar base estable*, o SBLD por sus siglas en inglés, del cono efectivo $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$. La SBLD descompone a $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ en muros y cámaras. Uno puede pensar en el rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ como el primer muro de la SBLD, de modo que calcular la SBLD es en cierto sentido una generalización del problema discutido en el capítulo 4. Durante la primera sección de este capítulo definiremos qué es la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ y los conceptos necesarios para entender el siguiente teorema que, junto con los cálculos presentados al final, constituye la aportación de este trabajo de tesis al entendimiento del esquema de Hilbert $\mathbb{P}^{2[n]}$.

Teorema 5.1. Sea $n = \binom{d+2}{2}$ y sea

$$D_1 := \frac{d^2 + 1}{d}H - \frac{1}{2}\Delta.$$

El cono $[D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}, D_1]$ es una cámara de la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

Este teorema es interesante pues es un resultado general sobre una familia infinita de valores de n cuya demostración requiere únicamente técnicas elementales. Más aún, este teorema y su demostración sugieren que es posible seguir una estrategia constructiva, como la descrita al final de la siguiente sección, para calcular la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ para cualquier valor de n dado.

5.1. Una estrategia para calcular la descomposición por lugar base estable

Definición 5.2. Sea D un divisor efectivo en una variedad X . Denotamos por $\text{BL}(D)$ al lugar base de D . Definimos el *lugar base estable* de D como

$$\text{SBL}(D) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{BL}(nD).$$

Ejemplo 5.2.1. Un divisor D se llama *semiample* si $\text{SBL}(D) = \emptyset$. Todo divisor ample es semiample. \triangleleft

Corolario 5.3 (del corolario 3.14). Si $\gamma \subset X$ es una curva tal que $D \cdot \gamma < 0$ entonces $\gamma \subset \text{SBL}(D)$.

Demostración. Para toda $n \geq 1$ se tiene que $(nD) \cdot \gamma = n(D \cdot \gamma) < 0$. \blacksquare

Observación 5.3.2. Notemos que $\text{SBL}(D) = \text{SBL}(nD)$ para $n > 0$. Por lo tanto, tiene sentido hablar del *lugar base estable* del rayo generado por D . \triangleleft

Pensemos en dos clases $D_i = \mu_i - \frac{1}{2}\Delta; i = 1, 2$ en el plano (Δ, H) . Si $0 < \mu_1 < \mu_2$ diremos que D_1 está a la izquierda de D_2 y escribiremos $D_1 < D_2$. Del mismo modo diremos que $D_2 < H < \Delta$. Si $D < D'$ denotaremos por $[D, D']$ al cono generado por D y D' . Asimismo, usaremos la notación $[D, D'), (D, D']$ y (D, D') para denotar a $[D, D']$ sin el rayo generado por D' , por D y sin ambos rayos. Por ejemplo, si $D = \mu H - \frac{1}{2}\Delta$ genera al rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ entonces $[D, \Delta] = \text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

Definición 5.4. Si D es una clase efectiva no contenida en ningún rayo extremal de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ diremos que D genera un *muro* de la descomposición por lugar base estable (SBLD) de $\mathbb{P}^{2[n]}$ si

$$\text{SBL}(D - \varepsilon\Delta) \neq \text{SBL}(D + \varepsilon\Delta)$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. De igual manera llamaremos muros a los dos rayos extremales. Si $D < D'$ generan dos muros de la SBLD, diremos que $[D, D']$ es una *cámara* de la SBLD si (D, D') no contiene a ningún otro muro.

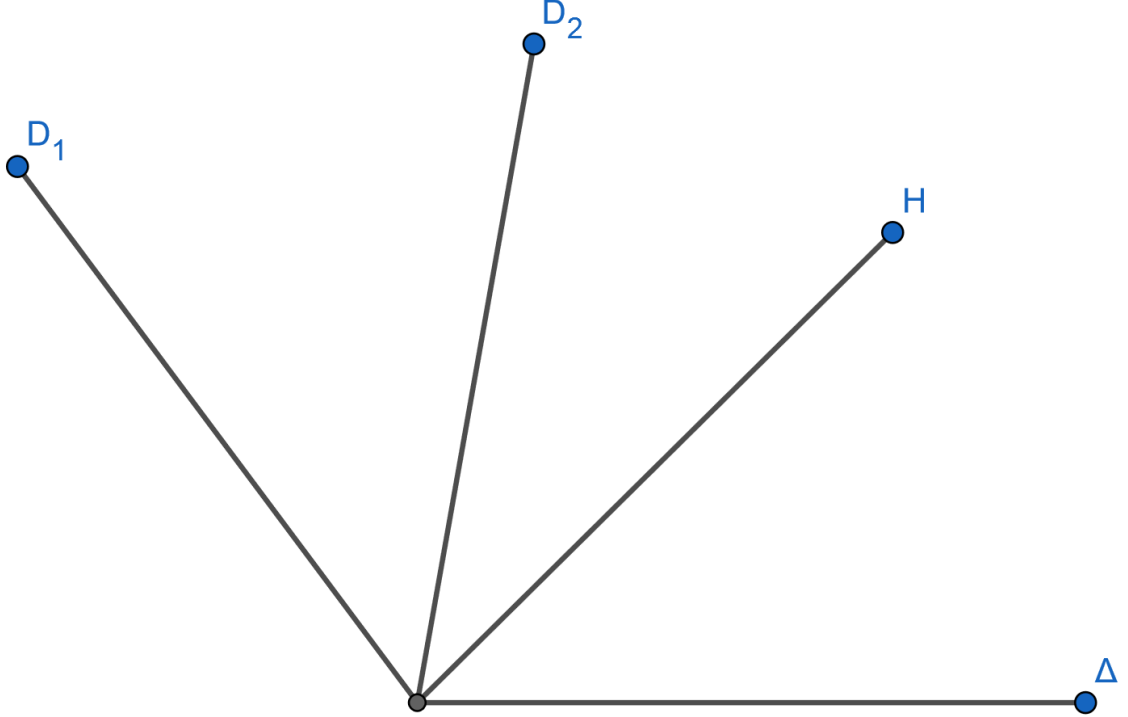


Figura 5.1: $D_1 < D_2 < H < \Delta$.

Hemos mencionado que $\mathbb{P}^{2[n]}$ es un *espacio soñado de Mori*. Una consecuencia de este hecho es la siguiente propiedad.

Corolario 5.5 (del teorema 3.7). *Existen sólo un número finito de muros en la SBLD de $\mathbb{P}^{2[n]}$.*

A continuación veremos que $[H, \Delta]$ siempre es una cámara.

Lema 5.6. *Si D_1, D_2 son dos divisores efectivos y D_2 es semiample entonces*

$$\text{SBL}(D_1 + D_2) \subset \text{SBL}(D_1).$$

Demostración. Sea $Z \in \text{SBL}(D_1 + D_2)$ y sea n suficientemente grande para que $Z \notin \text{BL}(nD_2)$. Entonces existe $D'_2 \sim nD_2$ que no pasa por Z . Como $Z \in \text{SBL}(D_1 + D_2)$, si $D'_1 \sim nD_1$ entonces $D'_1 + D'_2$ pasa por Z ; es decir, D'_1 pasa por Z . ■

Proposición 5.7. *En $\mathbb{P}^{2[n]}$ se tiene que $\text{SBL}(H) = \emptyset$ y $\text{SBL}(\mu H + \Delta) = \Delta$ si $\mu \geq 0$.*

Demostración. Si $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$, podemos tomar una recta $\ell \subset \mathbb{P}^2$ que no intersekte al soporte de Z . Esto nos da un representante de H que no contiene a Z , de modo que $Z \notin \text{SBL}(H)$.

Por el lema anterior, $\text{SBL}(\mu H + \Delta) \subset \text{SBL}(\Delta) \subset \Delta$ para $\mu \geq 0$. Por otro lado, el elemento general en Δ pertenece a una curva de tipo γ_2 según la notación del teorema 3.9. Notemos que $(\mu H + \Delta) \cdot \gamma_2 = -2 < 0$, de modo que $\Delta \subset \text{SBL}(\mu H + \Delta)$. ■

Corolario 5.8. *El cono $[H, \Delta] \subset \text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ es una cámara de la SBLD de $\mathbb{P}^{2[n]}$.*

Corolario 5.9. *Si $0 < \mu \leq \mu'$ entonces $\text{SBL}(\mu'H - \frac{1}{2}\Delta) \subset \text{SBL}(\mu H - \frac{1}{2}\Delta)$, (siempre que ambas clases sean efectivas).*

Demostración. Podemos escribir

$$\mu'H - \frac{1}{2}\Delta = \left(\mu H - \frac{1}{2}\Delta \right) + (\mu' - \mu)H$$

con $(\mu' - \mu)H$ semiample. ■

Si denotamos por $D_0 = \mu_0 H - \frac{1}{2}\Delta$ al generador del rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$, calcular la SBLD de $\mathbb{P}^{2[n]}$ consiste en encontrar todos los valores $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_N$ tales que $D_i = \mu_i H - \frac{1}{2}\Delta$ genera un muro. Con esta notación, las cámaras de la SBLD serán $[D_0, D_1], [D_1, D_2], \dots, [D_{N-1}, D_N], [D_N, H]$ y $[H, \Delta]$. De ser posible, nos gustaría describir también el lugar base estable de un divisor $D \in (D_{i-1}, D_i)$.

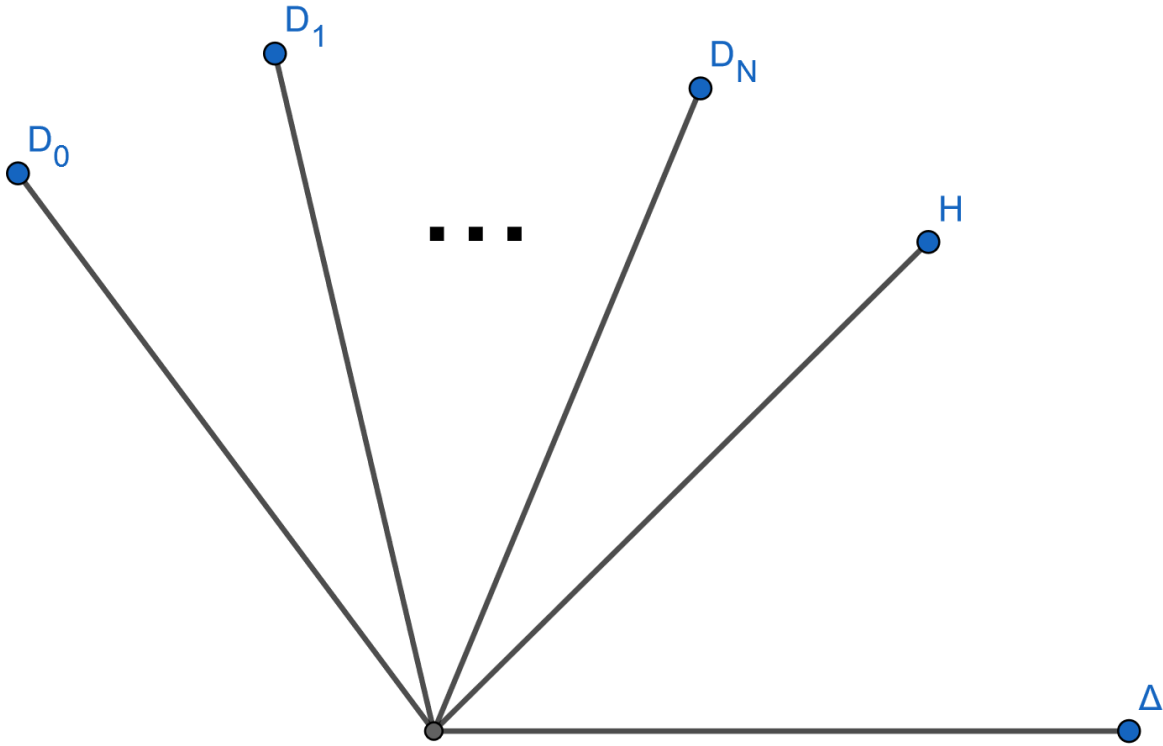


Figura 5.2: Descomposición por lugar base estable de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

El siguiente resultado es una adaptación del corolario 5.3.

Proposición 5.10. *Supongamos que $D \in \text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ genera un muro de la SBLD, con $D < H$. Sea*

$$\text{SBL}(D) = \bigcup_{i=1}^k C_i$$

la descomposición por componentes irreducibles de $\text{SBL}(D)$. Supongamos que para cada $1 \leq i \leq k$ existe una familia de curvas Γ_i y un divisor $D_i \in (D, H)$ tales que

- 1) para cada $\gamma_i \in \Gamma_i$, $D_i \cdot \gamma_i = 0$ y $H \cdot \gamma_i > 0$;
- 2) el elemento general $Z \in C_i$ pertenece a una de las curvas $\gamma_i \in \Gamma_i$;

3) $C_i \not\subset \text{SBL}(D_i)$.

Entonces cada D_i genera un muro de la SBLD. Si suponemos además que $D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_k$ entonces $[D, D_1]$ es una cámara de la SBLD.

Demostración. Escribamos

$$D_i = \mu_i H - \frac{1}{2} \Delta.$$

Fijemos i y consideremos una clase $D' := \mu' H - \frac{1}{2} \Delta$ tal que $D' < D_i$; es decir, tal que $\mu' < \mu_i$. Si $\gamma_i \in \Gamma_i$ entonces

$$D' \cdot \gamma_i = D_i \cdot \gamma_i - (\mu_i - \mu') H \cdot \gamma_i < 0.$$

Por lo tanto, $C_i \subset \text{SBL}(D')$. Como $C_i \not\subset \text{SBL}(D_i)$, esto prueba que D_i genera un muro. Si $D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_k$ entonces para cada $D' \in (D, D_1)$ tenemos que

$$\text{SBL}(D) = \bigcup_{i=1}^k C_i \subset \text{SBL}(D').$$

Por lo tanto, el lugar base estable es constante en $[D, D_1)$, de modo que $[D, D_1]$ es una cámara. \blacksquare

La demostración anterior sugiere una posible estrategia para calcular la SBLD cuyos pasos se explican a continuación.

- 1) Empezar con un muro de la SBLD generado por una clase D (por ejemplo, el rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$).
- 2) Calcular el lugar base estable de D y la descomposición en componentes irreducibles

$$\text{SBL}(D) = \bigcup_{i=1}^k C_i.$$

- 3) Para cada i calcular una familia de curvas Γ_i cuya unión pase por el punto general de C_i .
- 4) Dada una curva $\gamma_i \in \Gamma_i$ calcular los números de intersección $H \cdot \gamma_i$ y $\Delta \cdot \gamma_i$ y verificar que $H \cdot \gamma_i > 0$. Utilizando estos números, calcular la clase D_i tal que $D_i \cdot \gamma_i = 0$.
- 5) Si $D_i = \mu_i H - \frac{1}{2} \Delta$, encontrar un haz E_i de pendiente μ_i tal que, si $Z \in C_i$ es un elemento general, entonces

$$h^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) = h^0(\mathbb{P}^2, E) - n \cdot (\text{rank } E).$$

- 6) Reordenar a los D_i 's para que $D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_k$.

Al finalizar estos pasos, $[D, D_1]$ será una cámara de la SBLD y podemos repetir el proceso haciendo $D = D_1$ para obtener sucesivamente cada una de las cámaras de la SBLD. Este proceso terminará cuando $\text{SBL}(D) = \emptyset$, en cuyo caso $[D, H]$ es una cámara.

Observación 5.10.3. Esta estrategia es la parte central del capítulo 5. Tanto el teorema 5.1 como los cálculos al final de este capítulo están basados en ella. \triangleleft

5.2. Curvas en familias conocidas

A continuación definimos algunas familias dentro del esquema de Hilbert $\mathbb{P}^{2[n]}$ que típicamente aparecen como componentes de $\text{SBL}(D)$ para varias clases $D \in \text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$.

Definición 5.11. Dados dos enteros positivos k, d consideremos todos los esquemas reducidos $Z = Z' \cup Z'' \in \mathbb{P}^{2[n]}$ que consisten de k puntos Z' contenidos en una curva suave de grado d y $n - k$ puntos Z'' fuera de esta curva. Denotaremos por $\mathcal{C}_n(k, d)$ a la cerradura de esta familia. Si $k = n$ omitiremos el subíndice y escribiremos $\mathcal{C}(n, d) := \mathcal{C}_n(n, d)$.

Observación 5.11.1. Si $k < \binom{d+2}{2}$ entonces $\mathcal{C}_n(k, d) = \mathbb{P}^{2[n]}$. Asimismo, $\mathcal{C}_n(k, d) = \emptyset$ si $k > n$. En cualquier otro caso $\mathcal{C}_n(k, d)$ es una familia propia de $\mathbb{P}^{2[n]}$. \triangleleft

Ejemplo 5.11.2. Si $n = \binom{d+1}{2}$ entonces $\mathcal{C}(n, d)$ es el soporte del divisor $D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}$. \triangleleft

A continuación consideremos al espacio proyectivo $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}\mathbb{C}[x, y, z]_d$ que parametriza curvas planas de grado d (con $N = \binom{d+2}{2} - 1$) y al abierto $U \subset \mathbb{P}^N$ correspondiente a las curvas suaves. Definimos la variedad de incidencia

$$\Sigma := \{(C, p_1, \dots, p_n) \in U \times (\mathbb{P}^2)^n : p_1, \dots, p_n \in C\}.$$

Si consideramos la proyección natural $\Sigma \rightarrow U$ entonces la fibra sobre una curva $C \in U$ es isomorfa a $C^k \times (\mathbb{P}^2)^{n-k}$. Por lo tanto, Σ es una familia plana sobre U con fibra general irreducible; en particular, Σ es irreducible. Además, la dimensión de Σ es

$$\begin{aligned} \dim \Sigma &= \dim U + \dim C^k \times (\mathbb{P}^2)^{n-k} = \binom{d+2}{2} - 1 + k + 2(n-k) \\ &= \binom{d+2}{2} + 2n - k - 1. \end{aligned}$$

Ahora bien, k puntos p_1, \dots, p_k sobre una curva suave C junto con $n-k$ puntos *distintos* en $\mathbb{P}^2 \setminus \{p_{k+1}, \dots, p_n\}$ determinan de manera única un elemento en $\mathcal{C}_n(k, d)$. Esto define una función racional dominante

$$\Sigma \rightarrow \mathcal{C}_n(k, d) \subset \mathbb{P}^{2[n]}.$$

Lema 5.12. Supongamos que $\binom{d+2}{2} \leq k \leq n$. Sea $Z = Z' \cup Z'' \in \mathcal{C}_n(k, d)$ donde Z' es un esquema general de longitud k sobre una curva suave $C \in U$ y $Z'' \subset \mathbb{P}^2 \setminus Z'$ es un esquema general de longitud $n-k$ en \mathbb{P}^2 . Entonces la fibra de la función racional $\Sigma \rightarrow \mathcal{C}_n(k, d)$ consiste de un sólo punto.

Demostración. El lema es equivalente a la afirmación de que la única curva de grado d que intersecta a Z en al menos k puntos es C . Para ver esto, consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) \rightarrow \mathcal{O}_C(d) \rightarrow 0$$

y la sucesión inducida en cohomología

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(d)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0.$$

Vemos de esto que $h^0(C, \mathcal{O}_C(d)) = \binom{d+2}{2} - 1$. Dado que $\mathcal{O}_C(d)$ satisface interpolación para cualquier número de puntos, hasta $\binom{d+2}{2} - 1$, esto prueba que dados k' puntos generales $\Gamma \subset C$, con $k' \leq \binom{d+2}{2} - 1$, se tiene que

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(d)) = \binom{d+2}{2} - k'.$$

Por supuesto, si $\Gamma \subset C$ es de longitud $k' \geq \binom{d+2}{2}$ entonces

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(d)) = 1$$

pues la única curva de grado d que contiene a Γ es C misma. Consideremos entonces un subesquema $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma'' \subset Z$ de longitud k con $\Gamma' \subset Z'$ de longitud k' y $\Gamma'' \subset Z''$ de longitud $k - k'$. Si $k' \leq \binom{d+2}{2} - 1$ entonces $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Gamma'}(d)) = \binom{d+2}{2} - k' \leq k - k'$, de modo que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(d)) = 0$. Por otro lado, si $k' \geq \binom{d+2}{2}$ entonces $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Gamma'}(d)) = 1$ así que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(d)) = 0$ excepto si $\Gamma'' \subset C$; esto ocurre únicamente si $\Gamma'' = \emptyset$, de donde $k = k'$ y $\Gamma = Z'$.

En resumen, la única curva de grado d que intersecta a Z en al menos k puntos es C . \blacksquare

Como consecuencia del lema anterior obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.13. Si $\binom{d+2}{2} \leq k \leq n$ entonces $\mathcal{C}_n(k, d)$ es una familia irreducible de dimensión

$$\dim \mathcal{C}_n(k, d) = \binom{d+2}{2} + 2n - k - 1.$$

Las familias $\mathcal{C}(k, d)$ admiten una generalización directa de las proposiciones 3.12 y 3.13 que enunciaremos a continuación.

Definición 5.14. Consideremos un pincel $\{Z'_t : t \in \mathbb{P}^1\}$ de grado k sobre una curva suave de grado d en \mathbb{P}^2 y un esquema general $Z'' \subset \mathbb{P}^2$ de grado $n - k$. Diremos que la curva definida por $Z_t := Z'_t \cup Z'' \in \mathbb{P}^{2[n]}$ es una *curva de tipo* $\alpha_{k,d}$.

Ejemplo 5.14.3. Si hacemos $k = d = 1$ en la definición anterior, obtenemos una curva de tipo $\alpha_{1,1} \subset \mathbb{P}^{2[n]}$, que no es otra cosa que mantener $n - 1$ puntos fijos y mover el n -ésimo sobre una recta. \triangleleft

Proposición 5.15. Si $\binom{d-1}{2} < k$ entonces el elemento general en $\mathcal{C}_n(k, d)$ pertenece a una curva de tipo $\alpha_{k,d}$. Además, dada una curva general de tipo $\alpha_{k,d}$ se cumple que

$$\begin{aligned} H \cdot \alpha_{k,d} &= d \\ \frac{\Delta}{2} \cdot \alpha_{k,d} &= k - 1 + \binom{d-1}{2}. \end{aligned}$$

Demostración. La demostración es idéntica a la de las proposiciones 3.12 y 3.13. \blacksquare

Corolario 5.16. Supongamos que $\binom{d-1}{2} < k$. Si la clase D , con

$$D < \frac{k - 1 + \binom{d-1}{2}}{d} H - \frac{\Delta}{2},$$

es una clase efectiva entonces $\mathcal{C}_n(k, d) \subset \text{SBL}(D)$.

Demostración. El elemento general de $\mathcal{C}_n(k, d)$ está contenido en una curva de tipo $\alpha_{k,d}$ y $D \cdot \alpha_{k,d} = 0$. \blacksquare

5.3. Resoluciones minimales de puntos y degeneraciones

En esta sección estudiaremos otra colección de familias dentro de $\mathbb{P}^{2[n]}$ que a menudo ocurren como componentes del lugar base estable de una clase efectiva. Iniciaremos recordando brevemente qué es la *resolución minimal* de una gavilla coherente sobre \mathbb{P}^2 .

Observemos que el grupo

$$\Gamma_*(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m))$$

es isomorfo al anillo graduado $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ identificando a $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m))$ con la parte homogénea S_m . El producto en S corresponde a la multiplicación de secciones en $\Gamma_*(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$. De este modo, dada una gavilla coherente \mathcal{F} sobre \mathbb{P}^2 obtenemos un S -módulo finitamente generado

$$\Gamma_*(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}) := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}(m))$$

donde nuevamente la el producto escalar corresponde a la multiplicación de secciones. Recíprocamente, un S -módulo graduado finitamente generado M determina una gavilla coherente \widetilde{M} . Esta correspondencia entre gavillas coherentes y S -módulos finitamente generados no es biyectiva, pero se cumple que

$$\Gamma_*(\widetilde{\Gamma_*(\mathbb{P}^2, \mathcal{F})}) \cong \mathcal{F}.$$

Ver [19, p. 116]) para una discusión detallada.

Ejemplo 5.16.1. La gavilla $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$ da lugar al módulo $S(m) := \Gamma_*(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m))$ que es simplemente S pero con la graduación dada por

$$S(m)_d = S_{m+d}.$$

Diremos que un módulo es *libre graduado* si es una suma directa finita de módulos de la forma $S(m)$. \triangleleft

Una sucesión exacta de S -módulos induce una sucesión exacta en las correspondientes gavillas coherentes, pero no al revés.

Ejemplo 5.16.2. La gavilla $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ está generada por secciones globales, lo que significa que el morfismo evaluación

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$$

es suprayectivo. Sin embargo, en la categoría de S -módulos finitamente generados el cokernel del morfismo correspondiente es

$$S/(x, y, z) \cong \mathbb{C}.$$

\triangleleft

Definición 5.17. Consideremos un morfismo

$$\bigoplus_{j=1}^r S(-b_j) \xrightarrow{m} \bigoplus_{i=1}^s S(-a_i).$$

Esto es lo mismo que una matriz m de tamaño $s \times r$ cuya entrada m_{ij} es un polinomio homogéneo de grado $b_j - a_i$. Diremos que el morfismo m es *minimal* si $m_{ij} = 0$ siempre que $a_i = b_j$.

Dado un S -módulo graduado finitamente generado M , una *resolución minimal* de M es una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde cada F_i es libre graduado y cada morfismo $F_{i+1} \rightarrow F_i$ es minimal. Una *resolución minimal* de una gavilla coherente \mathcal{F} es la sucesión exacta inducida por una resolución minimal de $\Gamma_*(\mathbb{P}^2, \mathcal{F})$.

Observacion 5.17.3. Es fácil demostrar que toda resolución minimal de M se obtiene mediante el siguiente proceso.

- 1) El primer paso consiste en elegir un conjunto minimal de generadores homogéneos $\{x_1, \dots, x_r\}$ de $M_0 := M$ con grados $\deg(x_i) = a_i$ y definir

$$F_0 := \bigoplus_{i=1}^r S(-a_i)$$

junto con el morfismo $F \rightarrow M$ determinado por mandar el i -ésimo generador a x_i .

- 2) En el segundo paso elegimos un conjunto minimal de generadores homogéneos para $M_1 := \ker(F_0 \rightarrow M)$, lo cual determina un módulo libre graduado F_1 y un morfismo $F_1 \rightarrow F_0$.
- 3) De manera similar, en el i -ésimo paso elegimos un conjunto minimal de generadores homogéneos para $M_{i-1} := \ker(F_{i-1} \rightarrow F_{i-2})$, lo cual determina un módulo libre graduado F_i y un morfismo $F_i \rightarrow M_{i-1} \subset F_{i-1}$.

Una consecuencia directa de este hecho es que la resolución minimal de un S -módulo M es única salvo un isomorfismo de complejos de S -módulos (ver [11, teorema 1.6]). \triangleleft

El teorema 2.19 describe la resolución minimal de un elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$. A continuación estudiaremos qué sucede con los esquemas $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ que no satisfacen dicho teorema. En general queremos estudiar gavillas coherentes que tienen una resolución minimal de la forma

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b_i) \xrightarrow{M} \bigoplus_{i=1}^{t+r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a_i) \rightarrow E \rightarrow 0$$

para algunas colecciones de números $a = (a_1, \dots, a_{t+r})$ y $b = (b_1, \dots, b_t)$.

Definición 5.18. Sean $a = (a_1, \dots, a_{t+r})$ y $b = (b_1, \dots, b_t)$ dos vectores de enteros. Diremos que la pareja (a, b) es *admisibile* si

- 1) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{t+r}$ y $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_t$.
- 2) Para cada $1 \leq i \leq t$, $a_i < b_i$.

Diremos que una gavilla E admite una *resolución minimal de tipo* (a, b) si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b_i) \xrightarrow{M} \bigoplus_{i=1}^{t+r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a_i) \rightarrow E \rightarrow 0$$

con M minimal.

Teorema 5.19. Si E es un haz vectorial o $E = \mathcal{I}_Z$ para algún $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ entonces E admite una resolución minimal de tipo (a, b) para una única pareja admisibile (a, b) .

Demostración. El caso en que E es un haz vectorial sigue de [4, proposición 1.4]. Para el caso en que $E = \mathcal{I}_Z$ es una gavilla de ideales, notemos que una resolución minimal

$$\dots F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow \mathcal{I}_Z$$

induce una resolución minimal de \mathcal{O}_Z

$$\dots F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Como la resolución minimal de \mathcal{O}_Z tiene longitud a lo más 3 (ver [11, teorema 1.1]) sigue que $F_2 = 0$. La unicidad de la pareja (a, b) sigue de [11, teorema 1.6]. ■

Observación 5.19.4. Si E admite una resolución minimal de tipo (a, b) entonces

$$\begin{aligned} \text{rank } E &= r \\ \text{deg } E &= \sum_{i=1}^t b_i - \sum_{i=1}^{t+r} a_i \\ \chi(E(m)) &= \sum_{i=1}^{t+r} P(m - a_i) - \sum_{i=1}^t P(m - b_i). \end{aligned}$$

◁

Corolario 5.20. Si E admite una resolución minimal de tipo (a, b) entonces

$$\Delta(E) = \frac{1}{2r} \left(\sum_{i=1}^t b_i^2 - \sum_{i=1}^{t+r} a_i^2 \right) + \frac{1}{2} \mu(E)^2.$$

Demostración. Utilizando el teorema de Riemann-Roch vemos que

$$\begin{aligned} r(P(\mu(E)) - \Delta(E)) &= \chi(E) \\ &= \sum_{i=1}^{t+r} P(-a_i) - \sum_{i=1}^t P(-b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{t+r} \frac{a_i^2 - 3a_i + 2}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{b_i^2 - 3b_i + 2}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^t b_i - \sum_{i=1}^{t+r} a_i \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^t b_i^2 - \sum_{i=1}^{t+r} a_i^2 \right) + r \\ &= \frac{3}{2} \text{deg } E + r - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^t b_i^2 - \sum_{i=1}^{t+r} a_i^2 \right). \end{aligned}$$

Despejando obtenemos la fórmula deseada. ■

Corolario 5.21. Si el ideal \mathcal{I}_Z de un esquema $Z \in \mathbb{P}^{2[m]}$ admite una resolución minimal de tipo (a, b) entonces

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ \sum_{i=1}^{t+1} a_i &= \sum_{i=1}^t b_i \\ \sum_{i=1}^t b_i^2 - \sum_{i=1}^{t+1} a_i^2 &= 2n. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que la función de Hilbert de \mathcal{I}_Z es

$$\chi(\mathcal{I}_Z(m)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) - \chi(\mathcal{O}_Z(m)) = \binom{m+2}{2} - n.$$

Además, \mathcal{I}_Z es de rango 1. Del teorema de Riemann-Roch obtenemos las identidades $\mu(\mathcal{I}_Z) = 0$ y $\Delta(\mathcal{I}_Z) = n$. ■

Proposición 5.22. *Si el ideal \mathcal{I}_Z de un esquema $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ admite una resolución minimal de tipo (a, b) entonces*

$$\begin{aligned} t &\leq a_{t+1} \\ a_1 &\leq n - \binom{a_{t+1}}{2} \\ b_1 &\leq a_1 + a_{t+1} + 1 - t. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Demostración. Se tiene que

$$a_{t+1} = \sum_{i=1}^t b_i - a_i \geq \sum_{i=1}^t 1 = t.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} 2n + a_{t+1}^2 &= \sum_{i=1}^t b_i^2 - a_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^t (b_i - a_i)(b_i + a_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^t (b_i - a_i)(2a_i + 1) \\ &= (2a_1 + 1) + (b_1 - a_1 - 1)(2a_1 + 1) + \sum_{i=2}^t (b_i - a_i)(2a_i + 1) \\ &\geq (2a_1 + 1) + \left(-1 + \sum_{i=1}^t b_i - a_i\right) (2a_{t+1} + 1) \\ &= (2a_1 + 1) + (a_{t+1} - 1)(2a_{t+1} + 1) \\ &= 2a_1 + 2a_{t+1}^2 - a_{t+1}. \end{aligned}$$

Despejando obtenemos que

$$a_1 \leq n - \binom{a_{t+1}}{2}.$$

Por último

$$b_1 = a_1 + a_{t+1} - \sum_{i=2}^t (b_i - a_i) \leq a_1 + a_{t+1} + 1 - t.$$

■

Observación 5.22.5. Las cotas en (5.3.1) son óptimas. Por ejemplo, para la resolución minimal general de $n = \binom{r+1}{2}$ puntos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^r \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r+1}$$

las tres desigualdades en (5.3.1) son, de hecho, igualdades. ◁

Corolario 5.23. *Existe un número finito de parejas admisibles (a, b) correspondientes a ideales de n puntos.*

Teorema 5.24. [11, teorema 3.13] *Si (a, b) es una pareja admisible que cumple las condiciones del corolario 5.21 entonces el morfismo minimal general*

$$\bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b_i) \xrightarrow{M} \bigoplus_{i=1}^{t+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a_i)$$

es inyectivo y el cokernel de M es el ideal de un esquema reducido $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$.

De acuerdo al teorema anterior cada pareja admisible da lugar a una familia dentro del esquema de Hilbert $\mathbb{P}^{2[n]}$.

Definición 5.25. Denotaremos por $\mathcal{M}(a, b)$ al conjunto de gavillas estables que admiten una resolución de tipo (a, b) . Éste es un subconjunto de $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ para algunos valores de r, μ, Δ . Denotaremos por $\overline{\mathcal{M}(a, b)}$ a la cerradura de $\mathcal{M}(a, b)$ dentro de $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$. Si $(r, \mu, \Delta) = (1, 0, n)$ de modo que $\mathcal{M}(r, \mu, \Delta) = \mathbb{P}^{2[n]}$ entonces usaremos la notación $\mathbb{P}^{2[n]}(a, b) := \overline{\mathcal{M}(a, b)}$.

Observación 5.25.6. Si (a, b) es una pareja admisible, denotemos por

$$A := \bigoplus_{i=1}^{t+r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a_i), \quad B := \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b_i).$$

Tenemos entonces una función racional dominante

$$\begin{aligned} \text{Hom}^{\min}(A, B) &\rightarrow \mathcal{M}(a, b) \\ M &\mapsto \text{coker} M \end{aligned}$$

donde $\text{Hom}^{\min}(A, B)$ denota al espacio vectorial de morfismos minimales $A \rightarrow B$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(a, b)$ es uniracional y, en particular, irreducible. \triangleleft

Teorema 5.26. [4, proposición 3.3] Sea (a, b) una pareja admisible correspondiente a una gavilla estable. Entonces se cumple la fórmula

$$\dim \mathcal{M}(a, b) = \dim \text{Hom}(A, B) + \dim \text{Hom}(B, A) - \dim \text{End}(A) - \dim \text{End}(B) + 1 - \#\{(i, j) : a_i = b_j\}.$$

Como una aplicación de este teorema mostraremos a continuación que en muchos casos $\mathcal{C}(n, d) = \mathbb{P}^{2[n]}(a, b)$ para alguna pareja admisible (a, b) adecuada.

Proposición 5.27. Sea n un entero positivo.

1) El elemento general $Z \in \mathcal{C}(n, 1)$ admite una resolución minimal de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-n-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

de modo que $\mathcal{C}(n, 1) = \mathbb{P}^{2[n]}((n, 1), (n+1))$.

2) Si $n = 2k$ con $k \geq 2$, el elemento general $Z \in \mathcal{C}(n, 2)$ admite una resolución minimal de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

de modo que $\mathcal{C}(2k, 2) = \mathbb{P}^{2[2k]}((k, 2), (k+2))$.

3) Si $n = 2k - 1$ con $k \geq 3$, el elemento general $Z \in \mathcal{C}(n, 2)$ admite una resolución minimal de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k-1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

de modo que $\mathcal{C}(2k-1, 2) = \mathbb{P}^{2[2k-1]}((k, k, 2), (k+1, k+1))$.

Demostración. Las tres partes se demuestran de manera similar así que demostraremos 3). Es claro que la pareja $((k, k, 2), (k+1, k+1))$ es admisible y produce ideales de

$$\frac{2(k+1)^2 - 2k^2 - 2^2}{2} = 2k - 1 = n$$

puntos sobre una cónica. Por lo tanto $\mathbb{P}^{2[2k-1]}((k, k, 2), (k+1, k+1)) \subset \mathcal{C}(2k-1, 2)$, así que bastará ver que estas dos familias son de la misma dimensión. Por un lado, el teorema 5.26

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{P}^{2[2k-1]}((k, k, 2), (k+1, k+1)) &= 4 \binom{(k+1) - k + 2}{2} + 2 \binom{(k+1) - 2 + 2}{2} \\ &\quad - 4 \binom{(k+1) - (k+1) + 2}{2} - 4 \binom{k - k + 2}{2} \\ &\quad - \binom{2 - 2 + 2}{2} - 2 \binom{k - 2 + 2}{2} + 1 \\ &= 2k + 4. \end{aligned}$$

Por otro lado, la proposición 5.13 muestra que

$$\dim \mathcal{C}(n, 2) = \binom{2+2}{2} + 2n - n - 1 = 2k + 4.$$

■

A menudo las familias $\mathcal{C}_n(k, d)$ tienen una descripción de la forma $\mathbb{P}^{2[n]}(a, b)$ para alguna pareja admisible (a, b) , pero éste no siempre es el caso.

Ejemplo 5.27.7. El elemento general $Z \in \mathcal{C}_7(6, 2)$ consiste de seis puntos Z' sobre una cónica suave $C \subset \mathbb{P}^2$ junto con un punto general $p \in \mathbb{P}^2 \setminus C$. Es claro que $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(2)) = 0$; además, el ideal de Z' tiene resolución minimal

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \rightarrow \mathcal{I}_{Z'} \rightarrow 0$$

de modo que

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(3)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(3)) - 1 = 3.$$

Usando la notación de la proposición 5.22 esto prueba que para el ideal de Z

$$3 \leq t \leq a_{t+1} = 3.$$

Es fácil deducir a partir de esto que la resolución minimal de Z tiene la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)^3 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Según el teorema 2.19 el elemento general en $\mathbb{P}^{2[7]}$ tiene la misma forma, de modo que la contención $\mathcal{C}_7(6, 2) \subsetneq \mathbb{P}^{2[7]}((3, 3, 3), (4, 5))$ es estricta en este caso.

Por otro lado, dos de las tres cúbicas en \mathcal{I}_Z tienen la forma $q_i := C \cdot \ell_i, i = 1, 2$, donde C es la cónica que contiene a Z' y ℓ_i es una recta que pasa por p . Estas dos cúbicas satisfacen la relación lineal

$$\ell_2 \cdot q_1 + (-\ell_1) \cdot q_2 = 0.$$

Por lo tanto, la matriz M puede tomarse de la forma

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & \ell_2 \\ * & -\ell_1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que si un ideal admite una resolución minimal con una matriz M de esta forma entonces pertenece a $\mathcal{C}_7(6, 2)$. ◁

Observacion 5.27.8. El ejemplo anterior muestra cómo podemos producir distintas familias en $\mathbb{P}^{2[n]}$ a partir de una pareja admisible (a, b) considerando matrices M con algunas de sus entradas iguales a 0. A menudo estas familias tienen una descripción de la forma $\mathcal{C}_n(k, d)$ y viceversa.

A lo largo de este trabajo llamaremos a estas familias *degeneraciones* de $\mathbb{P}^{2[n]}(a, b)$; las familias descritas en las secciones 5.6 y 5.7 tienen todas esta forma. ◁

5.4. Teorema de Gaeta para haces vectoriales

Fijemos un entero positivo

$$n = \binom{r+1}{2} + s$$

con $0 \leq s \leq r$. Una manera en la que uno puede anticipar la resolución del teorema 2.19 es la siguiente. Primero calculamos la dimensión del espacio vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m), \mathcal{I}_Z)$ para un elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$:

$$m_d := \dim \text{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m), \mathcal{I}_Z) = \dim H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(m)) = \begin{cases} \binom{m+2}{2} - n & \text{si } m \geq r \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De aquí deducimos que el primer grado que aparece en los generadores de la resolución minimal de \mathcal{I}_Z es r y que el número de generadores de este grado es $\binom{r+2}{2} - n = r - s + 1$. Es decir, los primeros términos de la resolución minimal de \mathcal{I}_Z son

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Podemos usar esta resolución parcial para estimar

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) \approx 3(r-s+1).$$

El valor verdadero de esta dimensión es $\binom{r+3}{2} - n$, así que debemos corregir con

$$\binom{r+3}{2} - n - 3(r-s+1) = 2s - r$$

generadores de grado $r+1$. Es decir, los primeros términos de la resolución minimal de \mathcal{I}_Z serían

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^{2s-r} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Si $2s - r < 0$ debemos interpretar esto como agregar $r - 2s$ relaciones de grado $r+1$, de modo que los primeros términos serían

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^{r-2s} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

En cualquier caso podemos usar esta resolución parcial para estimar

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+2)) \approx 6(r-s+1) + 3(2s-r) = 3r+6.$$

De nuevo, la diferencia con el valor real es

$$\binom{r+4}{2} - n - (3r+6) = -s.$$

Este número siempre es negativo, así que lo interpretamos como s relaciones de grado $r+2$. Llegamos entonces a la resolución

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-2)^s \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^{2s-r} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

en caso de que $2s - r \geq 0$, y a la resolución

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-2)^s \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1)^{r-2s} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)^{r-s+1} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0$$

si $r - 2s \geq 0$. En ambos casos vemos que esta resolución calcula el valor correcto de $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+m))$ para $m \geq 3$ así que ya no es necesario hacer más correcciones. Las resoluciones del siguiente teorema se ven mucho más complicadas pero pueden ser deducidas aplicando el mismo razonamiento (ver [28, p. 214-215]).

Teorema 5.28. *Sea (r, μ, Δ) el carácter de una gavilla estable en \mathbb{P}^2 . Si denotamos por*

$$m_0 := \min\{m \geq -\mu : P(m+\mu) \geq \Delta\}$$

entonces el elemento general $E \in \mathcal{M}(r, \mu, \Delta)$ admite una resolución de una de las siguientes dos formas

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m_0-2)^{r \binom{\Delta - \frac{(\mu+m_0)(\mu+m_0+1)}{2}}{2}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m_0-1)^{r(2\Delta - (\mu+m_0)(\mu+m_0+2))} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m_0)^{r(P(\mu+m_0) - \Delta)}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m_0-2)^{r \binom{\Delta - \frac{(\mu+m_0)(\mu+m_0+1)}{2}}{2}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m_0-1)^{r((\mu+m_0)(\mu+m_0+2) - 2\Delta)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m_0)^{r(P(\mu+m_0) - \Delta)}$$

dependiendo de si $2\Delta - (\mu+m_0)(\mu+m_0+2)$ es positivo o negativo.

Ejemplo 5.28.1. Hemos visto en el ejemplo 4.44.2 que el rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^2[17]$ está generado por el divisor de Brill-Noether de un haz E de pendiente $\mu = 40/9$. Si buscamos que

$$17 = \frac{\chi(E)}{\text{rank } E} = P\left(\frac{40}{9}\right) - \Delta$$

obtendremos que

$$\Delta = \frac{44}{81}.$$

El mínimo rango para el cual $r\mu$ y $r(P(\mu) - \Delta)$ son enteros es $r = 9$. En este caso $m_0 = -4$, así que el haz E tiene resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)^{11} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Ejemplo 5.28.2. Podemos utilizar este resultado para describir al único haz excepcional de pendiente $\alpha \in \mathcal{E}$. Por ejemplo, los haces de pendiente $\alpha = 2/5$ y $\alpha = 3/5$ tienen resoluciones

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^6 \rightarrow E_{\frac{2}{5}} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^8 \rightarrow E_{\frac{3}{5}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

<

Ejemplo 5.28.3. En muchas ocasiones podemos utilizar este procedimiento para construir haces inestables. Por ejemplo, hemos visto que no existen haces estables con discriminante $\Delta = 1/2$. Si insistimos en producir un haz con caracter de Chern $(r, \mu, \Delta) = (2, 0, 1/2)$ llegaremos a la resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

<

5.5. Demostración del Teorema 5.1

En esta sección demostraremos el teorema 5.1 utilizando la estrategia descrita en la primera sección. Consideremos un número de la forma

$$n = \binom{d+2}{2}.$$

Hemos visto en la proposición 3.16 que en este caso el rayo extremal no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^{2[n]}$ está generado por

$$D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)} = dH - \frac{1}{2}\Delta$$

así que podemos empezar el paso 1) con esta clase e intentar calcular el siguiente muro de la SBLD de $\mathbb{P}^{2[n]}$.

Por cómo está definida, un representante efectivo de la clase $D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}$ está dado por la familia $\mathcal{C}(n, d)$. En este caso esperamos que $\text{SBL}(D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(dn)}) = \mathcal{C}(n, d)$, pero para probar esto necesitaremos trabajar primero en los pasos 3) y 4). Notemos que en la prueba de la proposición 3.13, la condición

$$n < \binom{d+2}{2}$$

sólo es necesaria para garantizar la existencia de una curva de grado d que contiene a Z . En este caso $n = \binom{d+2}{2}$, así que el elemento general $Z \in \mathbb{P}^{2[n]}$ no pertenece a una curva de tipo α_d ; sin embargo, el elemento general $Z \in \mathcal{C}(n, d)$ sí pertenece a una curva de tipo α_d . Según la proposición 3.12 obtenemos que

$$\begin{aligned} H \cdot \alpha_d &= d \\ \frac{\Delta}{2} \cdot \alpha_d &= n - 1 + \binom{d-1}{2} = d^2 + 1. \end{aligned}$$

Definimos

$$D_1 := (d^2 + 1)H - \frac{d}{2}\Delta$$

de modo que $D_1 \cdot \alpha_d = 0$. Notemos que $d < (d^2 + 1)/d$, así que $D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)} < D_1$. Esto muestra que $\mathcal{C}(n, d)$ está contenido en el lugar base estable de cualquier $D \in [D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}, D_1]$. En particular

$$\text{SBL}(D_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)}) = \mathcal{C}(n, d)$$

tiene una única componente irreducible. Esto concluye los pasos 2), 3) y 4). Para el paso 5) consideremos un haz E de Steiner dado por

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-2)^{k(d+1)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-1)^{k(2d+1)} \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{rank } E &= kd \\ \text{deg } E &= k(d^2 + 1) \\ h^0(\mathbb{P}^2, E) &= kdn. \end{aligned}$$

Bastará entonces probar que $h^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$ para algún $Z \in \mathcal{C}(n, d)$, para lo cual reproduciremos los argumentos de la proposición 4.10. Consideremos un morfismo general $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ de grado d . Notemos que en la notación del corolario 4.9 $s = d + 1$ y $r = d$. Como $s/r > 1 > \varphi^{-1}$, sigue que

$$f^*(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d^2 + 1)^{kd}$$

si k es suficientemente grande. Si $C = f(\mathbb{P}^1)$ entonces las sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E(-d) \rightarrow E \rightarrow E|_C \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^{k(d+1)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{k(2d+1)} \rightarrow E(-d) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

muestran que el morfismo de restricción $H^0(\mathbb{P}^2, E) \rightarrow H^0(C, E|_C)$ es un isomorfismo. Consideremos un subesquema reducido $Z \subset C \subset \mathbb{P}^2$ consistente de los $\binom{d-1}{2}$ nodos de C junto con $n - \binom{d-1}{2} = 3d$ puntos generales de C . Tenemos entonces los isomorfismos

$$H^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) \cong H^0(C, E|_C(-Z)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, (f^*E)(-f^*Z)).$$

Como f^*Z tiene grado

$$\deg f^*Z = 2 \binom{d-1}{2} + 3d = d^2 + 2$$

sigue que

$$H^0(\mathbb{P}^1, (f^*E)(-f^*Z)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{kd} = 0,$$

lo que completa la demostración.

5.6. Descomposición por lugar base estable de $\text{Eff } \mathbb{P}^2[8]$

Ahora ejemplificaremos la estrategia descrita en la sección 5.1 para calcular la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^2[8]$. El paso 2) es el más difícil: aunque suele ser relativamente sencillo describir familias contenidas en el lugar base estable de un divisor D , las técnicas descritas en este trabajo de tesis no nos permiten probar que éstas determinan todo el lugar base estable de D . Por lo tanto, los argumentos aquí presentados sólo muestran que cada clase listada en el Cuadro 5.1 es un muro y que el lugar base estable entre cualquiera de estos dos divisores contiene a lo que mostramos en la tabla. A priori podría suceder que existan muros que no estemos listando en el Cuadro 5.1 o que los divisores en alguna de las cámaras tengan un lugar base estable más grande del listado. Sin embargo, en [2] aparecen cálculos explícitos de la SBLD de $\text{Eff } \mathbb{P}^2[n]$ para $2 \leq n \leq 9$ utilizando métodos distintos y la tabla que obtenemos aquí resulta ser correcta.

Observacion 5.28.1. Aunque elegimos el caso $n = 8$ como ejemplo para esta tesis, la misma estrategia resulta en la SBLD correcta para $2 \leq n \leq 9$. \triangleleft

Primero listamos las distintas resoluciones minimales de esquemas de 8 puntos en \mathbb{P}^2 junto con las degeneraciones que admiten.

a) La resolución general de 8 puntos en \mathbb{P}^2 es

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)^2.$$

Ésta admite dos degeneraciones:

a-1) La familia $\mathcal{C}(4, 1)$ correspondiente a matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

a-2) La familia $\mathcal{C}(6, 2)$ correspondiente a matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La resolución minimal

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)^2$$

que corresponde a la familia $\mathcal{C}(7, 2)$.

c) La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)^3$$

que corresponde a la familia $\mathcal{C}(5, 1)$.

d) La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$$

correspondiente a la familia $\mathcal{C}(8, 2)$.

e) La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$$

que parametriza esquemas de 5 puntos colineales junto con otros 3 puntos colineales. La denotaremos por $\mathcal{L}_{5,3}$.

f) La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$$

que corresponde a la familia $\mathcal{C}(6, 1)$.

g) La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-8) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^2$$

que corresponde a la familia $\mathcal{C}(7, 1)$.

h) La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-9) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-8) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$$

que corresponde a la familia $\mathcal{C}(8, 1)$.

Comenzamos el paso 1) de la estrategia calculando el rayo no trivial de $\text{Eff } \mathbb{P}^2[8]$. Éste está generado por la clase

$$D_1 := \frac{8}{3}H - \frac{\Delta}{2}.$$

Un haz general de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^5 \rightarrow F_1 \rightarrow 0$$

satisface interpolación y genera a la clase D_1 . Según el corolario 5.16 tenemos que $\mathcal{C}(4, 1) \cup \mathcal{C}(7, 2) \subset \text{SBL}(D_1)$. Idealmente nos gustaría probar que esto es una igualdad. Si F_1 es un haz general como el descrito arriba y $Z \in \mathcal{C}(6, 2)$ es general entonces $H^0(\mathbb{P}^2, F_1 \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$, lo cual nos hace pensar que esta igualdad es cierta. Suponiendo que éste es el caso, esto termina con el paso 2). Las curvas del paso 3) son las obvias y ambas dan lugar a la clase

$$D_2 := 3H - \frac{\Delta}{2}$$

para el paso 4). Un haz general de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^2 \rightarrow F_2 \rightarrow 0$$

satisface interpolación y genera a la clase de D_2 y el paso 5) se verifica numéricamente. No hay nada que hacer en el paso 6) pues sólo obtuvimos una clase en el paso 4).

Repetimos el procedimiento empezando el paso 1) con $D = D_2$. El Corolario 5.16 indica que $\mathcal{C}(5, 1) \cup \mathcal{C}(8, 2) \subset \text{SBL}(D_2)$ y supondremos que esta contención es una igualdad para el paso 2). En el paso 3) las curvas son las obvias; éstas determinan las clases

$$D_3 := \frac{7}{2}H - \frac{\Delta}{2}$$

$$D_4 := 4H - \frac{\Delta}{2}$$

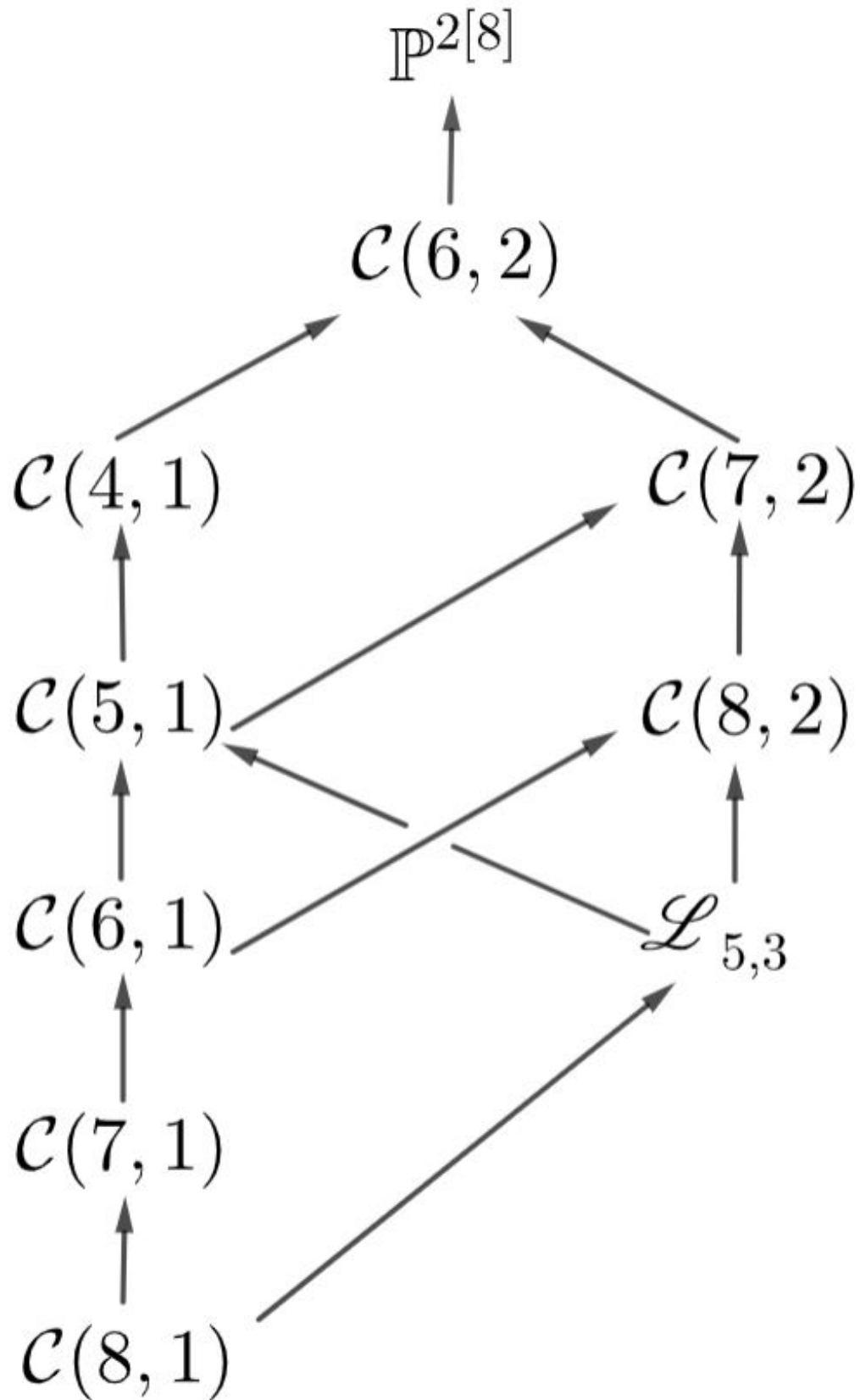


Figura 5.3: Relaciones de contención entre familias en $\mathbb{P}^2[8]$ que aparecen en la SBLD.

Cuadro 5.1: SBLD de Eff $\mathbb{P}^2[8]$

Muro	Presentación	Lugar base estable estimado
$\frac{8}{3}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^5$	$\mathcal{C}(4, 1) \cup \mathcal{C}(7, 2)$
$3H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^2$	$\mathcal{C}(5, 1) \cup \mathcal{C}(8, 2)$
$\frac{7}{2}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^5 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^7$	$\mathcal{C}(5, 1)$
$4H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^6$	$\mathcal{C}(6, 1)$
$5H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^6 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^4$	$\mathcal{C}(7, 1)$
$6H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{10} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{10} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2$	$\mathcal{C}(8, 1)$
$7H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{14} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{16}$	\emptyset
H	-	Δ
Δ	-	

para las familias $\mathcal{C}(8, 2)$ y $\mathcal{C}(5, 1)$ respectivamente. Notemos que $D_3 < D_4$ y que un haz general de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^5 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^7 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$$

satisface interpolación y genera a la clase D_3 . Comprobamos numéricamente que $H^0(\mathbb{P}^2, F_3 \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$ para un elemento general $Z \in \mathcal{C}(8, 2)$, así que esperamos que $\text{SBL}(D_3) = \mathcal{C}(5, 1)$.

Ahora repetimos el paso 1) con $D = D_3$. Esta vez obtendremos a la clase D_4 en el paso 4) únicamente, la cual está determinada por un haz general de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^6 \rightarrow F_4 \rightarrow 0.$$

Comprobamos numéricamente que $H^0(\mathbb{P}^2, F_4 \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$ para un elemento general $Z \in \mathcal{L}_{5,3}$, así que esperamos la igualdad $\text{SBL}(D_4) = \mathcal{C}(6, 1)$. Continuando con este proceso obtenemos dos cámaras más, como se muestra en el Cuadro 5.1.

5.7. Descomposición por lugar base estable de Eff $\mathbb{P}^2[12]$

Ahora presentamos una tabla de la SBLD de Eff $\mathbb{P}^2[12]$. Así como en la sección anterior, nuestros métodos no nos permiten concluir con certeza cuál es el lugar base estable de una clase dada; sin embargo, esta vez no podemos comparar nuestros resultados con los que aparecen en [2]. Por lo tanto, la columna titulada Lugar base estable* en el Cuadro 5.2 podría estar incompleta. A continuación discutimos qué partes de la tabla son correctas con certeza y marcamos con (*) aquellas que podrían no serlo. Para completar esta tabla sería necesario probar que un esquema que no pertenece a las familias listadas en la tercera columna impone condiciones independientes en las secciones del haz correspondiente. Podemos pensar en este paso faltante como un problema generalizado de interpolación.

Denotaremos por $J \subset \mathbb{P}^2[12]$ a la cerradura de la familia de esquemas Z que admiten una resolución minimal de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)^3 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

De la proposición 3.17 sabemos que la clase de J es el rayo extremal no trivial de Eff $\mathbb{P}^2[12]$ así que empecemos calculando $\text{SBL}(J)$.

Proposición 5.29. *Si $J \leq D < \frac{25}{7}H - \frac{1}{2}\Delta$ entonces $J \subset \text{SBL}(D)$. En particular, $\text{SBL}(J) = J$.*

Cuadro 5.2: SBLD de Eff \mathbb{P}^2 ^[12]

Muro	Presentación	Lugar base estable*
$\frac{7}{2}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)^3$	J
$\frac{25}{7}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)^9$	$\mathcal{C}(5, 1) \cup \mathcal{C}(11, 3)$ (*)
$\frac{11}{3}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)^3$	$\mathcal{C}(5, 1) \cup \mathcal{C}(9, 2) \cup \mathcal{C}(12, 3)$ (*)
$4H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^6$	$\mathcal{C}(6, 1) \cup \mathcal{C}(10, 2)$ (*)
$\frac{9}{2}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^4$	$\mathcal{C}(6, 1) \cup \mathcal{C}(11, 2)$ (*)
$5H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^6 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^6 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^2$	$\mathcal{C}(7, 1) \cup \mathcal{C}(12, 2)$
$\frac{11}{2}H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^9 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{11}$	$\mathcal{C}(7, 1)$
$6H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^6 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{10}$	$\mathcal{C}(8, 1)$
$7H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^6 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^8$	$\mathcal{C}(9, 1)$
$8H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{10} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^6 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^6$	$\mathcal{C}(10, 1)$
$9H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{14} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{12} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^4$	$\mathcal{C}(11, 1)$
$10H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{18} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{18} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^2$	$\mathcal{C}(12, 1)$
$11H - \frac{\Delta}{2}$	$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{22} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{24}$	\emptyset
H	-	Δ
Δ	-	

La idea de la demostración es encontrar una curva de grado 7 que pase por un elemento general $Z \in J$ y tenga un nodo en un punto x . Este punto no puede ser arbitrario; lo primero que haremos será determinarlo.

Lema 5.30. *Sea $Z \in J$ un elemento general. El ideal generado por la parte homogénea de grado 4 de \mathcal{I}_Z determina un esquema $\Gamma \supset Z$ de dimensión 0 y longitud 13.*

Demostración. Denotemos por $f, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ al generador de grado 5, y a los generadores de grado 4, del ideal \mathcal{I}_Z . De la resolución minimal de Z vemos que estos polinomios tienen tres relaciones lineales: una en grado 5 (que no involucra a f) y dos en grado 6. Haciendo tal vez un cambio lineal de base podemos escribir estas relaciones de la forma

$$\begin{aligned} xg_1 + yg_2 + zg_3 &= 0 \\ a_1g_1 + a_2g_2 + a_3g_3 &= \ell f \\ b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 &= \ell' f \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ son polinomios de grado 2 generales y ℓ, ℓ' son polinomios de grado 1 generales. Notemos entonces que se cumple la relación

$$(\ell'a_1 - \ell b_1)g_1 + (\ell'a_2 - \ell b_2)g_2 + (\ell'a_3 - \ell b_3)g_3 = 0.$$

Además, esta relación es independiente de $xg_1 + yg_2 + zg_3 = 0$ pues los a_i y b_j son generales. Si denotamos por \mathcal{I}_Γ al ideal generado por g_1, g_2, g_3 , lo anterior muestra que su resolución minimal es de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)^3 \rightarrow \mathcal{I}_\Gamma \rightarrow 0.$$

Calculando vemos que Γ es un esquema de dimensión 0 y longitud 13, como esperábamos. \blacksquare

Demostración de la proposición 5.29. Sea $Z \in J$ general y definamos $\Gamma \supset Z$ como en el lema. Escribimos $\Gamma = Z \cup \{x\}$ y consideremos una curva $C' \subset \mathbb{P}^2$ de grado 7 que pase por Z y con un nodo en x . Denotemos por $\pi : C \rightarrow C'$ al morfismo de normalización y por $D := \pi^*Z$. Notemos que

$$\begin{aligned} h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) &= h^0(C, K_C(-D)) + \deg(D) + 1 - g(C) \\ &= h^0(C, K_C(-D)) - 1. \end{aligned}$$

El grupo de cohomología $H^0(C, \mathcal{O}_C(-D))$ es isomorfo de manera natural al espacio de cuárticas en \mathbb{P}^2 que pasan por Z y por el nodo de C' . Es decir

$$\begin{aligned} h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) &= h^0(C, K_C(-D)) - 1 \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(4)) - 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Esto prueba que $D = \pi^*Z$ se mueve en un pincel sobre C ; un cálculo similar muestra que este pincel es libre de puntos base. Por lo tanto, podemos definir una curva $\Gamma \subset \mathbb{P}^{2[12]}$ que pasa por Z utilizando este pincel. Utilizando la fórmula de Riemann-Hurwitz de manera similar a las ocasiones anteriores obtenemos las identidades

$$\begin{aligned} H \cdot \gamma &= 7 \\ \frac{\Delta}{2} \cdot \gamma &= 25. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $J \leq D < \frac{25}{7}H - \frac{1}{2}\Delta$ entonces $D \cdot \gamma < 0$. \blacksquare

Observación 5.30.1. Si realizamos el producto tensorial por $T\mathbb{P}^2(2)$ en la resolución minimal de Γ obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow T\mathbb{P}^2(-5) \oplus T\mathbb{P}^2(-3) \rightarrow T\mathbb{P}^2(-2)^3 \rightarrow \mathcal{I}_\Gamma \otimes T\mathbb{P}^2(2) \rightarrow 0.$$

Usando el hecho de que todos los grupos de cohomología de $T\mathbb{P}^2(-2)$ son 0 obtenemos la igualdad

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma \otimes T\mathbb{P}^2(2)) = h^1(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2(-5)) + h^1(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2(-3)) = 1.$$

Esto prueba que la única sección s de $T\mathbb{P}^2(2)$ que se anula a lo largo de un elemento general $Z \in J$ entonces también se anula en el punto $x \in \Gamma \setminus Z$. Uno puede demostrar (por ejemplo, con un cálculo de clases de Chern) que, de hecho, Γ puede ser definido como el esquema de ceros de la sección s . \triangleleft

La proposición 5.29 muestra que la primera cámara de la SBLD tiene el lugar base estable correcto. A continuación discutimos las últimas cámaras.

De acuerdo a [2, proposición 4.16] el lugar base estable de un divisor en $[kH - \frac{\Delta}{2}, (k+1)H - \frac{\Delta}{2})$ es $\mathcal{C}(k+2, 1)$ si $k \geq 6$. Además, si $D \in [5H - \frac{\Delta}{2}, 6H - \frac{\Delta}{2})$ la misma proposición prueba que $\mathcal{C}(7, 1) \subset \text{SBL}(D) \subset \mathcal{C}(7, 1) \cup \mathcal{C}(12, 2)$.

Del corolario 5.16 vemos que $\text{SBL}(D) = \mathcal{C}(7, 1) \cup \mathcal{C}(12, 2)$ si $D \in [5H - \frac{\Delta}{2}, \frac{11}{2}H - \frac{\Delta}{2})$. Por último, de [2, lema 10.2] vemos que si $Z \in \mathcal{C}(12, 2) \setminus \mathcal{C}(7, 1)$ entonces

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z \otimes T\mathbb{P}^2(4)) = 0.$$

Como $D_{T\mathbb{P}^2(4)} = \frac{11}{2}H - \frac{\Delta}{2}$ sigue que el lugar base estable de divisores en $[\frac{11}{2}H - \frac{\Delta}{2}, 6H - \frac{\Delta}{2})$ es justamente $\mathcal{C}(7, 1)$. Esto prueba que la tabla que hemos presentado es correcta al menos a partir de $5H - \frac{\Delta}{2}$.

Bibliografía

- [1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths, and Joseph Harris. *Geometry of Algebraic Curves, I. Grundlehren 267 (1985)*. Springer.
- [2] Daniele Arcara, Aaron Bertram, Izzet Coskun, and Jack Huizenga. The minimal model program for the Hilbert scheme of points on \mathbb{P}^2 and Bridgeland stability. *Advances in Mathematics*, 235:580–626, 2013.
- [3] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D Hacon, and James McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *Journal of the American Mathematical Society*, 23(2):405–468, 2010.
- [4] Guntram Bohnhorst and Heinz Spindler. The stability of certain vector bundles on \mathbb{P}^n . In *Complex algebraic varieties*, pages 39–50. Springer, 1992.
- [5] Arthur Cayley. On the triple tangent planes of surfaces of the third order. *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, 4:118–132, 1849.
- [6] Dawei Chen and Izzet Coskun. Towards Mori’s program for the moduli space of stable maps. *American journal of mathematics*, 133(5):1389–1419, 2011.
- [7] Izzet Coskun, Jack Huizenga, and Matthew Woolf. The effective cone of the moduli space of sheaves on the plane. *arXiv preprint arXiv:1401.1613*, 2014.
- [8] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Jean-Marc Drézet. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1987(380):14 – 58, 1987.
- [10] Jean-Marc Drézet and Joseph Le Potier. Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur \mathbb{P}^2 . *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 4e série, 18(2):193–243, 1985.
- [11] David Eisenbud. *The geometry of syzygies: a second course in algebraic geometry and commutative algebra*, volume 229. Springer Science & Business Media, 2005.
- [12] David Eisenbud and Joe Harris. *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press, 2016.
- [13] Gerd Faltings. Stable G-bundles and projective connections. *J. Algebraic Geom*, 2(3):507–568, 1993.
- [14] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *American Journal of Mathematics*, 90(2): 511–521, 1968.
- [15] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface, II, the Picard scheme of the punctual Hilbert scheme. *American Journal of Mathematics*, 95(3):660–687, 1973.
- [16] Robert Friedman. *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] Federico Gaeta. Nuove ricerche sulle curve sghembe algebriche di residuale finito e sui gruppi di punti del piano. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 31(1):1–64, 1950.
- [18] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théoremes d’existence en géométrie algébrique. iv. les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, 6(221):249–276, 1960.

- [19] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] Robin Hartshorne and André Hirschowitz. Droites en position générale dans l'espace projectif. In *Algebraic geometry*, pages 169–188. Springer, 1982.
- [21] Brendan Hassett. Classical and minimal models of the moduli space of curves of genus two. In *Geometric methods in algebra and number theory*, pages 169–192. Springer, 2005.
- [22] Brendan Hassett and Donghoon Hyeon. Log canonical models for the moduli space of curves: the first divisorial contraction. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(8):4471–4489, 2009.
- [23] Brendan Hassett and Donghoon Hyeon. Log minimal model program for the moduli space of stable curves: the first flip. *Annals of Mathematics*, pages 911–968, 2013.
- [24] Yi Hu, Sean Keel, et al. Mori dream spaces and GIT. *The Michigan Mathematical Journal*, 48(1): 331–348, 2000.
- [25] Jack Huizenga. Restrictions of steiner bundles and divisors on the Hilbert scheme of points in the plane. *International Mathematics Research Notices*, 2013(21):4829–4873, 2013.
- [26] Jack William Huizenga. Effective divisors on the Hilbert scheme of points in the plane and interpolation for stable bundles. *Journal of Algebraic Geometry*, 25(1):19–75, 2016.
- [27] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32. Springer Science & Business Media, 1999.
- [28] Joseph Le Potier. *Lectures on vector bundles*. Cambridge University Press, 1997.
- [29] Chunyi Li and Xiaolei Zhao. The mmp for deformations of hilbert schemes of points on the projective plane. *arXiv preprint arXiv:1312.1748*, 2013.
- [30] César Lozano Huerta. Birational geometry of the space of complete quadrics. *International Mathematics Research Notices*, 2015(23):12563–12589, 2015.
- [31] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8. Cambridge university press, 1989.
- [32] James McKernan. Mori dream spaces. *Japanese Journal of Mathematics*, 5(1):127–151, 2010.
- [33] David Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *American Journal of Mathematics*, 84 (4):642–648, 1962.
- [34] Bartel L Van der Waerden. Zur algebraischen geometrie. II. *Mathematische Annalen*, 108(1):253–259, 1933.