



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CICLOS EN GRÁFICAS Y DIGRÁFICAS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:  
NARDA CORDERO MICHEL

DIRECTORA DE LA TESIS  
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DRA. MIKA OLSEN, PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA  
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA, FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2021.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi Alma Mater*

*A mi Mater Alma*

## Agradecimientos

Al Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias de la UNAM que me recibió entre sus estudiantes hace seis años, por todo lo aprendido. Al Instituto de Matemáticas por incluirme entre sus becarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca recibida para poder realizar mis estudios de posgrado. A los programas que me dieron apoyo para asistir a congresos: el Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado y el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación.

A mi bienamada, *la grande y felicísima* UNAM.

A Hortensia, mi mentora de vida, que me ha guiado por los sinuosos caminos de la investigación y la publicación, y me ha acompañado por los contrahechos senderos de la existencia. Querida Hortensia, te agradezco el paraíso prometido en el doctorado, ha sido mi mejor época, cuatro años dedicados al gozo.

A Ilán, por su continuo interés en mi formación. Te agradezco tus lecturas, que ya son varias, tus comentarios y tu apoyo fuera del trabajo escrito.

En fin, a mis dos oráculos, Hortensia e Ilán, por adoptarme en su pandilla.

Al cubículo 320, a su creadora y parroquianos, por el jolgorio innato de ese rincón urbano.

A mi comité tutor, Hugo Rincón y Mika Olsen, y a mis lectores: Juancho, Mucuy, Mika (otra vez), Ilán y Hortensia, por darse el tiempo para leer mi trabajo, por sus comentarios y por su respuesta tan alegre de saber que ya me doctoro.

A Lucía, María Inés y Tere, por desfacen entuertos. Mi entrada y permanencia en el programa se las debo en gran medida a ustedes.

A mis colegas de congreso, por la familiaridad en tierras extrañas. En especial a Germán, mi camarada en esta travesía del posgrado.

A aquella que un día del 2011 me invitó a su clase de gráficas con la entonces desconocida Hortensia, y a mi ingenuidad, que dijo: va.

A Lupe Lucio por compartir la geometría y la enseñanza conmigo.

A mi hermana Andrea, que siempre se enorgullece de mis logros.

A mis *fratellas* por elección, Ambriz y Naomi, por su preciada amistad.

A Briseida, que ya lo sabe.

A mi madre, la única constante de mis días.

*Salud y revolución social.*

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación (PAPIIT) de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) IN102320 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) FORDECYT-PRONACES CF-2019/39570.

# Índice general

|  |            |
|--|------------|
| <b>Prólogo</b>   | <b>1</b>   |
| <b>1. Generalidades</b>  | <b>5</b>   |
| 1.1. Definiciones . . . . .  | 5          |
| 1.1.1. Gráficas y multigráficas . . . . .                                  | 5          |
| 1.1.2. Digráficas . . . . .  | 8          |
| 1.2. Algunos teoremas clásicos . . . . .                                   | 11         |
| Referencias . . . . .  | 11         |
| <b>2. El número dicromático</b>  | <b>13</b>  |
| 2.1. Preliminares . . . . .  | 15         |
| 2.2. Resultados principales sobre el número dicromático . . . . .          | 25         |
| Referencias . . . . .  | 30         |
| <b>3. Panciclismo en digráficas</b>  | <b>33</b>  |
| 3.1. Preliminares . . . . .  | 35         |
| 3.2. Panciclismo local . . . . .   | 37         |
| 3.2.1. Resultados principales sobre panciclismo local . . . . .            | 45         |
| 3.3. Panciclismo . . . . .   | 46         |
| 3.3.1. Resultados principales sobre panciclismo . . . . .                  | 60         |
| 3.4. Problemas abiertos . . . . .  | 64         |
| Referencias . . . . .  | 65         |
| <b>4. Panciclismo alternante en gráficas bicoloreadas en aristas</b>       | <b>67</b>  |
| 4.1. Preliminares . . . . .  | 69         |
| 4.2. Panciclismo alternante local . . . . .                                | 72         |
| 4.2.1. Resultados principales sobre panciclismo alternante local . . . . . | 83         |
| 4.3. Panciclismo alternante . . . . .                                      | 84         |
| 4.3.1. Resultados principales sobre panciclismo alternante . . . . .       | 93         |
| Referencias . . . . .  | 100        |
| <b>Líneas de investigación</b>   | <b>103</b> |

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| <b>Anexo A. Algoritmo DFS</b> | <b>105</b> |
| Referencias . . . . .         | 106        |
| <b>Índice analítico</b>       | <b>107</b> |
| <b>Lista de abreviaturas</b>  | <b>111</b> |
| <b>Lista de símbolos</b>      | <b>113</b> |

# Prólogo

*Bienvenidos a mi tesis doctoral, un proyecto enteramente dedicado a los ciclos, donde les rehuimos y les dimos caza.*

En este texto, como su nombre lo indica, estudiamos ciclos en gráficas y digráficas. Comenzamos con lo que fue, en algún momento, mi proyecto de doctorado, que era encontrar un método ordenado de colorear los vértices de una digráfica de manera que no se formaran ciclos dirigidos monocromáticos. Obtuvimos así algunas cotas superiores para el número dicromático, una de las cuales mejora el resultado clásico de John A. Bondy que asegura que el número dicromático de una gráfica (o una digráfica) está acotado por la circunferencia, que es la longitud de un ciclo lo más largo posible. Cuando nuestra intuición empezó a fallar, este problema dejó de dar frutos, y volvimos a ideas ya descartadas que otra vez resultaban inútiles. Para lidiar con la frustración, Hortensia me propuso retomar la investigación que comenzamos en mi tesis de licenciatura, en la cual estudiamos ciclos Hamiltonianos dirigidos en las sumas generalizadas de digráficas, que son una familia de digráficas de las generalizaciones de torneos. En esta ocasión, la propuesta era considerar gráficas bicoloreadas en aristas, en lugar de digráficas, definir una suma generalizada de las mismas y encontrar condiciones suficientes para garantizar la existencia de ciclos hamiltonianos alternantes en dichas gráficas. La investigación marchó, con creces, pues no sólo pudimos dar con los ciclos que buscábamos, sino que pudimos encontrar condiciones suficientes para asegurar la existencia de ciclos alternantes de todas las longitudes posibles y, en algunos casos, de manera local, es decir, para cada vértice de la gráfica pudimos encontrar ciclos alternantes de cada longitud que pasan por él. Dada la abundancia de resultados en las gráficas bicoloreadas, decidimos volver a las sumas generalizadas de digráficas y buscamos, en ellas también, todos los ciclos que pudimos, dejando un par de problemas abiertos a nuestro paso.

Si el orden de los capítulos no corresponde al orden en que se estudiaron los

problemas, es porque me parece más fácil visualizar los patrones de aristas después de haber visto los de las flechas, pero no necesariamente es cierta mi impresión.

La riqueza de esta tesis se la debemos a los ciclos, sobre todo en las sumas generalizadas, por ello seguimos sin soltarlos y continuamos estudiándolos.

## Organización del texto

Este trabajo tiene cuatro capítulos. El primero es un capítulo introductorio, donde se definen las nociones básicas de la teoría de gráficas, se da la notación que se usa a lo largo del texto y se enuncian tres teoremas clásicos que se utilizan en algunas demostraciones. Los otros tres, comprenden la investigación que se realizó durante estos años misma que se divide, esencialmente, en dos partes: la evasión de ciclos monocromáticos en digráficas y la búsqueda de ciclos de cualquier longitud en digráficas y en gráficas bicoloreadas en aristas.

En el capítulo 2 estudiamos el número dicromático de una digráfica con una herramienta muy práctica que es el algoritmo de búsqueda en profundidad, mejor conocido como algoritmo DFS. El objetivo fue colorear los vértices de una digráfica fuertemente conexa de manera que no se produjeran ciclos monocromáticos, para ello nos basamos en un árbol generador proveído por el algoritmo DFS. Esta aproximación fue inspirada por un trabajo de Zsolt Tuza, en 1992, en el cual él utilizó la versión no dirigida del algoritmo DFS para colorear los vértices de una gráfica de manera que dos vértices adyacentes tuvieran distinto color. El uso del algoritmo DFS para colorear digráficas nos permitió dar con algunos resultados interesantes e inclusive mejorar algunas de las cotas superiores conocidas para el número dicromático. Dicho material fue publicado en un artículo en 2019:

- N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «New Bounds for the Dichromatic Number of a Digraph». *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* vol. 21 no. 1, ICGT 2018 (2019), págs. 1-14.

En los capítulos 3 y 4 se estudiaron los temas de panciclismo y panciclismo en vértices en la suma generalizada de digráficas y gráficas bicoloreadas. La suma generalizada de digráficas es una operación que fue introducida por Hortensia Galeana en 2012, con la cual ya habíamos trabajado, junto con Ilán Goldfeder, en mi tesis de licenciatura<sup>1</sup> donde se estudiaron ciclos hamiltonianos en sumas generalizadas de

---

<sup>1</sup>N. Cordero Michel. «Algunos resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos en la suma

digráficas, cuyo material fue publicado en 2016<sup>2</sup>. En el capítulo 3 profundizamos dicha investigación, ampliando la mira, de ciclos hamiltonianos a ciclos de todas las longitudes posibles, cuyo contenido fue recopilado en dos artículos:

- N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Pancyclism in the Generalized Sum of Digraphs». 2021+.
- N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Vertex-Pancyclism in the Generalized Sum of Digraphs». Aceptado en *Discrete Appl. Math.* 2021.

Además, dada la relación que existe entre las digráficas y las gráficas bicoloradas en aristas, en el capítulo 4 adaptamos la definición de suma generalizada a dichas gráficas y buscamos, en principio, ciclos hamiltonianos alternantes y, después, ciclos alternantes de todas las longitudes posibles. El material de panciclismo alternante fue publicado en dos artículos:

- N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Alternating-Pancyclism in 2-Edge-Colored Graphs». *Discuss. Math.* (2020). In press, págs. 1-22.
- N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Vertex Alternating-Pancyclism in 2-Edge-Colored Generalized Sums of Graphs». *Discrete Appl. Math.* 284 (2020), págs. 281-289.

Cabe mencionar que cada uno de los capítulos de investigación es independiente y cuenta con una breve introducción al tema, por lo cual se pueden leer en cualquier orden.

Para finalizar, incluimos un apartado en el que se plantean nuevas vías de investigación de la suma generalizada, proponiendo variantes de los problemas aquí estudiados.

Además, en el anexo A se explica el algoritmo DFS para digráficas, por si el lector no lo tuviera presente.

---

generalizada de digráficas». México, UNAM (2014).

<sup>2</sup>N. Cordero-Michel, H. Galeana-Sánchez e I.A. Goldfeder. «Some results on the existence of Hamiltonian cycles in the generalized sum of digraphs». *Discrete Math.* 339 (2016), págs. 1763-1770.



# Capítulo 1

## Generalidades de gráficas y digráficas

En este capítulo daremos las definiciones y notación que se usarán a lo largo de este texto<sup>1</sup>. Además, enunciaremos tres teoremas clásicos que nos serán de utilidad en las demostraciones de los capítulos subsiguientes.

### 1.1. Definiciones

#### 1.1.1. Gráficas y multigráficas

Una *multigráfica*  $G = (V(G), E(G))$  consiste de un conjunto finito y no vacío,  $V(G)$ , de objetos llamados *vértices* y un multiconjunto<sup>2</sup> finito,  $E(G)$ , de parejas de vértices diferentes a las que llamamos *aristas*; cuando una arista aparezca más de una vez en el multiconjunto  $E(G)$ , diremos que dicha arista es *múltiple*. El *orden* de  $G$  es el número de vértices de  $G$  y el *tamaño* de  $G$  es el número de aristas en  $G$ , incluyendo las repeticiones. Si el conjunto de aristas de  $G$  es vacío, diremos que  $G$  es *vacía*. Dos vértices  $u$  y  $v$  son *adyacentes* o *vecinos* si  $e = uv$  pertenece a  $E(G)$ . Además, diremos que  $e$  incide tanto en  $u$  como en  $v$  y que  $u$  y  $v$  son los extremos de  $e$ . Dos aristas  $e$  y  $f$  son *incidentes* si tienen un extremo común.

A una multigráfica  $G = (V(G), E(G))$  para la cual existe a lo más una arista entre cualesquiera dos vértices diferentes se le llama *gráfica*.

---

<sup>1</sup>Las definiciones se consultaron en [1] y [3].

<sup>2</sup>Un multiconjunto puede tener un elemento repetido varias veces.

En el capítulo 4 mencionaremos algunos resultados sobre panciclismo alternante en multigráficas, sin embargo, en este texto trabajaremos con gráficas, por lo que las siguientes definiciones serán descritas en términos de gráficas.

Sea  $G = (V(G), E(G))$  una gráfica y  $v \in V(G)$ . La *vecindad* de  $v$ , denotada por  $N_G(v)$ , es el conjunto de todos los vértices en  $G$  que son adyacentes a  $v$ . El *grado* de  $v$  en  $G$ , denotado por  $d_G(v)$ , es la cardinalidad de la vecindad de  $v$ , es decir,  $d_G(v) = |N_G(v)| = |\{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\}|$ . Denotaremos por  $\Delta(G)$  al *grado máximo* en  $G$ , es decir,  $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ . Cuando sea claro que hablamos de una gráfica en particular, omitiremos el parámetro  $G$ , es decir, denotaremos a la vecindad de  $u$  por  $N(v)$ , al grado de  $v$  en  $G$  por  $d(v)$  y al grado máximo en  $G$  por  $\Delta$ .

Diremos que  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $H$  y  $G$  son gráficas tales que  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$ . Si  $V(H) = V(G)$ , diremos que  $H$  es una *subgráfica generadora* o *factorización* de  $G$ . A una familia de subgráficas  $\mathcal{F} = \{H_1, \dots, H_s\}$  de  $G$  tales que  $V(G) = \bigcup_{i=1}^s V(H_i)$  y  $V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ , la llamaremos una *factorización* de  $G$ . Dado un subconjunto  $S$  de  $V(G)$ , la *subgráfica de  $G$  inducida por  $S$* , denotada por  $G\langle S \rangle$ , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G\langle S \rangle) = S$  y  $uv \in E(G\langle S \rangle)$  si y sólo si  $\{u, v\} \subset S$  y  $uv \in E(G)$ .

Un *xy-camino* en  $G$  es una sucesión de vértices  $W = x_0 x_1 x_2 \cdots x_r$ , donde  $x = x_0$  y  $y = x_r$ , tal que  $x_i x_{i+1} \in E(G)$  para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq r - 1$ . La *longitud* de  $W$ , denotada por  $l(W)$ , es  $r$ , es decir  $l(W) = r$ . Una *trayectoria* es un camino en el que no se repiten vértices. Un *camino cerrado* empieza y termina en el mismo vértice. Un *ciclo* o *k-ciclo* es un camino cerrado de longitud  $k$ , mayor que o igual a 3 (2 en multigráficas), en el que no se repiten vértices salvo el primer y el último vértices. Dado un camino (trayectoria, ciclo)  $W = x_0 x_1 x_2 \cdots x_r$  (donde  $x_0 = x_r$  si  $W$  es un ciclo), usaremos la notación:

$$x_i W x_j = x_i x_{i+1} \cdots x_j \text{ donde } 1 \leq i \leq j \leq r,$$

para referirnos a dicho camino contenido en  $W$ . Notemos que si  $W$  es una trayectoria o un ciclo y  $x_i \neq x_j$ , el camino  $x_i W x_j$  es una trayectoria, ya que  $x_h \neq x_l$  si  $h < l$  para  $i \leq h < l \leq j$ . En este caso diremos que  $x_i W x_j$  es una *subtrayectoria* de  $W$ . Además, si  $W' = y_0 y_1 \cdots y_s$  donde  $x_r = y_0$ , usaremos la notación:

$$W \cup W' = x_0 x_1 \cdots x_r \underset{y_0}{\parallel} y_1 y_2 \cdots y_s$$

para denotar a la concatenación de  $W$  y  $W'$ . Dados dos caminos  $W$  y  $W''$  en  $G$ , diremos que  $W$  y  $W''$  son *ajenos* si  $V(W) \cap V(W'') = \emptyset$ . Una trayectoria (respectivamente, ciclo)  $W$  es *hamiltoniana* (resp. *hamiltoniano*) si  $V(W) = V(G)$ . Una gráfica es *hamiltoniana* si contiene un ciclo hamiltoniano. Una gráfica  $G$  es *conexa* si y sólo si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $G$ , existe algún  $uv$ -camino.

Dada una gráfica  $G$ , un conjunto de vértices  $I \subset V(G)$  es *independiente* si no hay aristas con ambos extremos en  $I$ . Diremos que  $G$  es *k-partita* o *multipartita* si existe una partición de  $V(G)$  en  $k$  conjuntos independientes  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , a los que llamaremos *partes*. En el caso en el que  $k = 2$ , diremos que  $G$  es *bipartita*. Una gráfica  $G$  es *completa* si para cualesquiera  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  se tiene que  $uv \in E(G)$  y  $G$  es *k-partita completa* si es *k-partita* con partición  $V_1, V_2, \dots, V_k$  y para cualesquiera  $u \in V_i$  y  $v \in V_j$ , donde  $i \neq j$ , se tiene que  $uv \in E(G)$ .

Una *k-coloración en vértices* o, simplemente, una *k-coloración* de  $G$  es una función  $c$  del conjunto de vértices,  $V(G)$ , a un conjunto de  $k$  colores,  $\{1, 2, \dots, k\}$ . A los conjuntos  $V_i = \{v \in V(G) \mid C(v) = i\}$  los llamaremos las *clases de color* de  $G$ . Diremos que una *k-coloración* es *propia* si cualesquiera dos vértices adyacentes tienen distinto color, es decir, si cada clase de color es un conjunto de vértices independiente. Si  $G$  admite una *k-coloración* propia diremos que  $G$  es *k-coloreable*. El *número cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$  es el mínimo número natural  $k$  para el cual  $G$  es *k-coloreable*.

Una *k-coloración en aristas* de una (multi)gráfica  $G$  es una función  $c$  del conjunto de aristas,  $E(G)$ , a un conjunto de  $k$  colores,  $\{1, 2, \dots, k\}$ , y una (multi)gráfica  $G$  que tiene una *k-coloración en aristas* es una *(multi)gráfica coloreada* o *(multi)gráfica k-coloreada*, si queremos hacer hincapié en el número de colores. Si  $k = 2$ ,  $G$  es *2-coloreada en aristas* o *bicoloreada en aristas*. Diremos que una *k-coloración de aristas* es *propia* si en cada vértice incide a lo más una arista de cada color, es decir, no hay aristas incidentes del mismo color. En los textos que consultamos, cuando se habla de multigráficas *k-coloreadas en aristas*, la multiplicidad de cada arista es a lo más  $k$ , y cualesquiera dos aristas entre la misma pareja de vértices tienen distinto color. Así, en las multigráficas *bicoloreadas en aristas*, entre cualesquiera dos vértices hay a lo más una arista de color 1 (rojo) y a lo más una arista de color 2 (azul).

Sean  $H$  y  $G$  dos gráficas del mismo orden. Diremos que  $H$  y  $G$  son *isomorfas*, y lo denotaremos por  $H \cong G$ , si existe una biyección  $\varphi: V(H) \rightarrow V(G)$  tal que  $uv \in E(H)$  si y sólo si  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$ .

### 1.1.2. Digráficas

Una *digráfica*  $D = (V(D), A(D))$ , consiste de un conjunto finito y no vacío,  $V(D)$ , de objetos llamados *vértices* y un conjunto finito,  $A(D)$ , de parejas ordenadas de vértices diferentes a las que llamamos *flechas*. El *orden* de  $D$  es el número de vértices de  $D$  y el *tamaño* de  $D$  es el número de flechas en  $D$ . Diremos que  $f = (u, v)$  incide tanto en  $u$  como en  $v$ , que  $u$  es la *cola* de  $f$  y que  $v$  es la *cabeza* de  $f$ , que  $u$  es *adyacente hacia*  $v$  y que  $v$  es *adyacente desde*  $u$ , o bien, que  $u$  y  $v$  son *adyacentes*. A un par de flechas  $(u, v)$  y  $(v, u)$  en  $A(D)$  las llamaremos *flechas simétricas*. La *gráfica subyacente* de  $D$  es la gráfica  $G$  cuyo conjunto de vértices es  $V(G) = V(D)$  y cuyo conjunto de aristas es  $E(G) = \{uv \mid (u, v) \in A(D) \text{ o } (v, u) \in A(D)\}$ , es decir, es la gráfica que se obtiene a partir de  $D$  al reemplazar cada flecha  $(u, v)$  por una arista  $uv$ , tras eliminar las multiplicidades de aristas que aparezcan en el proceso.

Sea  $D = (V(D), A(D))$  una digráfica y  $v \in V(D)$ . La *invecindad* (resp. *exvecindad*) de  $v$ , denotada por  $N_D^-(v)$  (resp.  $N_D^+(v)$ ), es el conjunto de todos los vértices en  $D$  que son adyacentes hacia a  $v$  (resp. adyacentes desde  $v$ ). El *ingrado* (resp. *exgrado*) de  $v$  en  $D$ , denotado por  $d_D^-(v)$  (resp.  $d_D^+(v)$ ), es la cardinalidad de la invecindad de  $v$  (resp. exvecindad de  $v$ ), es decir,  $d_D^-(v) = |N_D^-(v)| = |\{u \in V(D) \mid (u, v) \in A(D)\}|$  (resp.  $d_D^+(v) = |N_D^+(v)| = |\{u \in V(D) \mid (v, u) \in A(D)\}|$ ). El *grado* de  $v$  en  $D$ , denotado por  $d_D(v)$ , es  $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$ . Cuando sea claro que nos referimos a una digráfica en particular, omitiremos el subíndice  $D$ , es decir, denotaremos al ingrado de  $v$  en  $D$  por  $d^-(v)$ , al exgrado de  $v$  en  $D$  por  $d^+(v)$ , al grado de  $v$  en  $D$  por  $d(v)$  y a la vecindad de  $u$  por  $N(v)$ . Además, denotaremos por  $\delta^+(D)$  (resp.  $\delta^-(D)$ ) al *mínimo exgrado* (resp. *mínimo ingrado*) en  $D$ , es decir,  $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(x) \mid x \in V(D)\}$  (resp.  $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(x) \mid x \in V(D)\}$ ).

Una digráfica  $H$  es *subdigráfica* de  $D$  si  $V(H) \subset V(D)$  y  $A(H) \subset A(D)$ , lo denotaremos por  $H \subset D$ . Si  $V(H) = V(D)$ , diremos que  $H$  es una *subdigráfica generadora* o *factorización* de  $D$ . A una familia de subdigráficas  $\mathcal{F} = \{H_1, \dots, H_s\}$  de  $D$  tales que  $V(D) = \bigcup_{i=1}^s V(H_i)$  y  $V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ , la llamaremos una *factorización* de  $D$ . Así, una *factorización en ciclos* de  $D$  es una colección  $\mathcal{F}$  de ciclos ajenos dos a dos en  $D$  tales que cada vértice de  $D$  pertenece a un elemento de  $\mathcal{F}$ . Una factorización en ciclos que consiste de  $k$  ciclos es una *k-factorización en ciclos* y denotamos a  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{F} = C_1 \cup \dots \cup C_k$ . La *subdigráfica inducida* por un conjunto de vértices  $S \subset V(D)$ , denotada por  $D\langle S \rangle$ , es la subdigráfica de  $D$  cuyo conjunto de vértices es  $S$  y  $(u, v) \in A(D')$  si y sólo si  $\{u, v\} \subset S$  y  $(u, v) \in A(D)$ ; y si  $H$  es una subdigráfica de  $D$ , la subdigráfica inducida por el conjunto de vértices  $V(H)$ , será

denotada simplemente por  $D\langle H \rangle$ .

Un  $xy$ -camino dirigido en  $D$  es una sucesión de vértices  $W = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_r)$ , donde  $x = x_0$  y  $y = x_r$ , tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$  para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$ . La longitud de  $W$ , denotada por  $l(W)$ , es  $r$ , es decir  $l(W) = r$ . Una trayectoria dirigida es un camino en el que no se repiten vértices. Un camino dirigido cerrado empieza y termina en el mismo vértice. Un ciclo dirigido o  $k$ -ciclo dirigido es un camino dirigido cerrado de longitud  $k$  mayor que o igual a 2, en el que no se repiten vértices salvo el primer y el último vértice. Es este texto no trabajaremos con otro tipo de caminos en digráficas, por lo que omitiremos la palabra *dirigido* cuando hablemos de caminos, trayectorias o ciclos. Dado un camino (trayectoria o ciclo)  $W = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_r)$  (donde  $x_0 = x_r$  si  $W$  es un ciclo), usaremos la notación:

$$(x_i, W, x_j) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j) \text{ donde } 1 \leq i \leq j \leq r,$$

para referirnos a dicho camino contenido en  $W$ . Notemos que si  $W$  es una trayectoria o un ciclo y  $x_i \neq x_j$ , el camino  $(x_i, W, x_j)$  es una trayectoria, ya que  $x_h \neq x_l$  si  $h < l$  para  $i \leq h < l \leq j$ . En este caso diremos que  $(x_i, W, x_j)$  es una *subtrayectoria* de  $W$ . Además, si  $W' = (y_0, y_1, \dots, y_s)$  donde  $x_r = y_0$ , usaremos la notación:

$$W \cup W' = (x_0, x_1, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$$

||  
y<sub>0</sub>

para denotar a la concatenación de  $W$  y  $W'$ . Dados dos caminos  $W$  y  $W''$  en  $D$ , diremos que  $W$  y  $W''$  son *ajenos* si  $V(W) \cap V(W'') = \emptyset$ . A una digráfica que no contiene ciclos, se le llama *acíclica*. En una digráfica  $D$  que contiene ciclos, llamaremos el  *cuello*  (resp. la *circunferencia*) de  $D$  a la longitud del ciclo más corto (resp. más largo) en  $D$ . Una trayectoria (resp. ciclo)  $W$  es *hamiltoniana* (resp. *hamiltoniano*) si  $V(W) = V(G)$ . Una digráfica es *hamiltoniana* si contiene un ciclo hamiltoniano. Una digráfica  $D$  es *conexa* si su gráfica subyacente es conexa y  $D$  es *fuertemente conexa* o *fuerte* si y sólo si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $D$ , existen algún  $uv$ -camino y algún  $vu$ -camino. Una subdigráfica  $H$  de una digráfica  $D$  se dice que es una *componente fuerte* de  $D$  si es fuertemente conexa y es máxima por contención con esta propiedad, es decir, si  $H'$  es una subdigráfica fuerte de  $D$  que contiene a  $H$ , entonces  $H = H'$ . Cabe señalar que una componente fuerte es siempre una subdigráfica inducida, como consecuencia de su definición.

Dada una digráfica  $D$ , un conjunto de vértices  $I \subset V(D)$  es *independiente* si no

hay flechas con ambos extremos en  $I$ . Diremos que  $D$  es  $k$ -partita o *multipartita* si existe una partición de  $V(D)$  en  $k$  conjuntos independientes  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , a los que llamamos *partes*. En el caso en el que  $k = 2$ , diremos que  $D$  es *bipartita*. Una digráfica multipartita  $D$  es una digráfica  $k$ -partita completa o *multipartita completa* si para cualesquiera dos vértices,  $x$  y  $y$ , en partes distintas, se satisface que  $(x, y) \in A(D)$  o  $(y, x) \in A(D)$ , o ambos. Se dice que una digráfica  $k$ -partita completa  $D$  es un *torneo  $k$ -partito* si  $D$  no contiene flechas simétricas. Una  $k$ -coloración en vértices o, simplemente, una  $k$ -coloración de  $D$  es una función  $c$  del conjunto de vértices,  $V(D)$ , a un conjunto de  $k$  colores,  $\{1, 2, \dots, k\}$ . A los conjuntos  $V_i = \{v \in V(D) \mid C(v) = i\}$  los llamaremos las *clases de color* de  $D$ . Una  $k$ -coloración propia de  $D$  es una  $k$ -coloración propia de su gráfica subyacente  $G$ , es decir, una coloración de  $V(D) = V(G)$  tal que cualesquiera dos vértices adyacentes tienen distinto color. El *número cromático* de  $D$ , denotado por  $\chi(D)$ , es el mínimo número natural  $k$  tal que  $D$  admite una  $k$ -coloración propia. Una  $k$ -coloración acíclica de  $D$  es una  $k$ -coloración de  $D$  de tal manera que cada clase de color induce una digráfica acíclica. El *número dicromático* de  $D$ , denotado por  $\chi_A(D)$ , es el mínimo número natural  $k$  tal que  $D$  admite una  $k$ -coloración acíclica.

Una digráfica  $D$  es un *torneo* si para cualesquiera dos vértices diferentes,  $u$  y  $v$ , en  $V(D)$  se tiene que  $(u, v) \in A(D)$  o  $(v, u) \in A(D)$ , pero no ambos y  $G$  es una digráfica *semicompleta* si para cualesquiera vértices diferentes,  $u$  y  $v$ , en  $V(D)$  se tiene que  $(u, v) \in A(D)$  o  $(v, u) \in A(D)$ .

Dados tres vértices diferentes,  $u, v$  y  $w$ , en una digráfica  $D$ , diremos que  $D$  es *transitiva*, si cada vez que  $\{(u, v), (v, w)\} \subset A(D)$  se tiene que  $(u, w) \in A(D)$ .

Sean  $H$  y  $D$  dos digráficas del mismo orden. Diremos que  $H$  y  $D$  son *isomorfas*, y lo denotaremos por  $H \cong D$ , si existe una biyección  $\varphi: V(H) \rightarrow V(D)$  tal que  $(u, v) \in A(H)$  si y sólo si  $(\varphi(u), \varphi(v)) \in A(D)$ .

Diremos que dos gráficas (resp. digráficas),  $H$  y  $H'$ , son *ajenas en vértices* o, simplemente, *ajenas* si  $V(H) \cap V(H') = \emptyset$ .

Sean  $k_1$  y  $k_2$  enteros no negativos, donde  $k_1 \leq k_2$ . Denotaremos por  $[k_1, k_2]$  al conjunto de enteros  $\{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$ . Sea  $k$  un entero positivo y  $A$  un conjunto de enteros. Denotaremos por  $kA$  al conjunto de productos  $\{ka \mid a \in A\}$ .

## 1.2. Algunos teoremas clásicos

En esta sección enunciaremos tres teoremas clásicos sobre torneos que utilizaremos en los capítulos 3 y 4.

El teorema 1.1 caracteriza los torneos acíclicos, los teoremas 1.2 y 1.3 nos hablan sobre la existencia de trayectorias y ciclos hamiltonianos en torneos y el corolario 1.4 es una consecuencia directa del teorema 1.3.

**Teorema 1.1.** *Un torneo es transitivo si, y sólo si, es acíclico.*

La prueba del teorema 1.1 se puede consultar en la sección 7.4 del libro de Chartrand, Lesniak y Zhang [3].

**Teorema 1.2** (Rédei [4]). *Todo torneo contiene una trayectoria hamiltoniana.*

**Teorema 1.3** (Camion [2]). *Todo torneo fuertemente conexo contiene un ciclo hamiltoniano.*

**Corolario 1.4.** *Todo torneo fuertemente conexo contiene un ciclo.*

## Referencias

- [1] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2.<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag London, Ltd, London: Springer Monographs in Mathematics, 2009. ISBN: 978-1-84800-997-4.
- [2] P. Camion. «Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets». En: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 249 (1959), págs. 2151-2152.
- [3] G. Chartrand, L. Lesniak y P. Zhang. *Graphs & Digraphs*. 6.<sup>a</sup> ed. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL: Chapman & Hall, 2016. ISBN: 978-1-4987-3580-3.
- [4] L. Rédei. «Ein kombinatorischer Satz». En: *Acta Litteraria Szeged* 7 (1934), págs. 39-43.



# Capítulo 2

## El número dicromático:

### Cotas construidas a partir del algoritmo DFS<sup>1</sup>

El número dicromático de una digráfica  $D$ , denotado por  $\chi_A(D)$ , es el mínimo entero positivo  $k$  tal que  $D$  admite una  $k$ -coloración acíclica de su conjunto de vértices. Este número fue introducido de manera independiente por Neumann-Lara en 1982 [14] y por Mohar *et al.* en dos artículos, en 2003 [13] y 2004 [2], como una generalización del número cromático de una gráfica, de la siguiente manera: Sea  $D$  una digráfica sin lazos tal que todas sus flechas son simétricas, *i.e.* si  $u$  y  $v$  son dos vértices adyacentes en  $D$ , entonces tanto  $(u, v)$  como  $(v, u)$  pertenecen a  $A(D)$ . Consideremos la gráfica  $G$  que se obtiene a partir de  $D$  al reemplazar cada pareja de flechas simétricas por una arista, entonces el número dicromático de  $D$  es igual al número cromático de  $G$ , ya que cada coloración acíclica en  $D$  es igual a una coloración propia en  $G$  y viceversa.

Cabe mencionar, que si una digráfica es acíclica, entonces su número dicromático es 1, pero si contiene al menos un ciclo su número dicromático debe ser al menos 2. Por lo cual siempre conocemos esta cota inferior y, como el número dicromático es un mínimo, estaremos buscando números que lo acoten superiormente.

Dado que el número dicromático de una digráfica es una generalización del número cromático de una gráfica, muchos autores han intentado generalizar resultados que se conocen sobre coloraciones propias en gráficas a coloraciones acíclicas en digráficas, por ejemplo [2, 10, 11, 12, 13]. En particular, en [5], Chen y sus colaboradores probaron que el problema de determinar si el número dicromático de una digráfica dada  $D$  es igual a 2 es *NP*-completo, aún cuando  $D$  es un torneo.

---

<sup>1</sup>El *algoritmo de búsqueda en profundidad*, se conoce como algoritmo DFS por sus siglas en inglés (*Depth First Search*). El anexo A está dedicado a dicho algoritmo.

En [3], Bondy probó que el número cromático de una digráfica  $D$  es a lo más su *circunferencia*, la longitud de un ciclo lo más largo posible. Notemos que cualquier coloración propia de una digráfica  $D$  le da colores diferentes a vértices adyacentes, y de esta manera la coloración resulta también acíclica. Por lo cual el número cromático de  $D$  es una cota superior para el número dicromático de  $D$ . Así, la circunferencia de  $D$  es una cota superior para  $\chi_A(D)$ .

En [14] Neumann-Lara demostró que para toda digráfica  $D$  se tiene que  $\chi_A(D) = \max\{\chi_A(H) \mid H \text{ es una componente fuerte de } D\}$ . Gracias a este hecho, podemos enfocar nuestra atención en digráficas fuertemente conexas únicamente. En este mismo artículo, el autor probó que para cualesquiera dos enteros fijos  $k$  y  $r$  tales que  $k \geq r \geq 2$ , si una digráfica  $D$  no contiene ciclos de longitud 0 o 1 módulo  $r$ , entonces  $\chi_A(D) \leq k$ . En esta dirección, los autores de [6] dieron un resultado más general. Demostraron, para dos enteros  $k$  y  $r$  con  $k \geq 2$  y  $k \geq r \geq 1$ , que: i) si una digráfica  $D$  no contiene ciclos de longitud 1 módulo  $k$ , entonces  $D$  se puede colorear con  $k$  colores de tal manera que cada clase de color es un conjunto independiente; ii) si una digráfica  $D$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $k$ , entonces  $D$  se puede colorear con  $k$  colores de tal manera que cada clase de color induce una subdigráfica acíclica en  $D$ ; y iii) si una gráfica  $G$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $k$ , entonces  $G$  es  $k$ -coloreable si  $r \neq 2$  y  $(k + 1)$ -coloreable en otro caso.

En [15], Tuza utilizó un árbol de búsqueda en profundidad de una gráfica para estudiar sus coloraciones propias, con él demostró que si una gráfica  $G$  tiene una orientación  $D$  tal que todo ciclo  $C$  de longitud 1 módulo  $k$  contiene al menos  $l(C)/k$  flechas en cada dirección, entonces  $\chi(G) \leq k$ ; y como consecuencia obtuvo que, si para algún entero positivo  $k$  ( $k \geq 2$ ), una gráfica  $G$  no contiene ciclos cuya longitud menos uno es un múltiplo de  $k$ , entonces  $G$  es  $k$ -coloreable. Más aún, usando el algoritmo DFS, si  $G$  tiene  $n$  vértices y  $m$  aristas, entonces una  $k$ -coloración propia puede encontrarse en  $c(n + m)$  pasos, para alguna constante  $c$  que es independiente del valor de  $k$ . Ahora usaremos la versión dirigida del algoritmo DFS para estudiar el número dicromático de una digráfica.

En este capítulo, dada una digráfica  $D$ , construiremos tres gráficas diferentes cuyos números cromáticos acotan superiormente al número dicromático de  $D$ . Demostraremos varias propiedades de un árbol obtenido a partir del algoritmo DFS,  $T$ , de una digráfica fuerte  $D$ , que nos permitirán partir el conjunto  $V(D)$  en conjuntos acíclicos y, así, probaremos: i) dados dos enteros  $k \geq 2$ ,  $s \geq 1$  y enteros  $r_1, \dots, r_s$  tales que  $k \geq r_i \geq 0$  y  $r_i \neq 1$  para cada  $i \in [1, s]$ , que si todos los ciclos de  $D$  tienen

longitud  $r$  módulo  $k$  para algún  $r \in \{r_1, \dots, r_s\}$ , entonces  $\chi_A(D) \leq 2s + 1$ ; ii) si  $D$  tiene  *cuello*   $g$ , la longitud de un ciclo lo más corto posible, y existen enteros  $k$  y  $p$ , donde  $k \geq g - 1 \geq p \geq 1$ , tales que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $\lceil \frac{k}{p} \rceil p$  para cada  $r \in \{-p + 2, \dots, 0, \dots, p\}$ , entonces  $\chi_A(D) \leq \lceil \frac{k}{p} \rceil$ ; y iii) si  $D$  tiene  *cuello*   $g$  y  *circunferencia*   $c$ , entonces  $\chi_A(D) \leq \lceil \frac{c-1}{g-1} \rceil + 1$ , lo cual mejora, sustancialmente, la cota propuesta por Bondy. Estos resultados fueron publicados en [7].

A lo largo de nuestras demostraciones usaremos el algoritmo DFS para obtener coloraciones acíclicas y, como dicho algoritmo es de tiempo polinomial, seremos capaces de colorear las digráficas de una manera eficiente y ordenada.

En este capítulo usaremos los dos teoremas siguientes sobre el número cromático:

**Teorema 2.1** (Brooks [4]). *Sea  $G$  una gráfica conexa con grado máximo  $\Delta$ . Si  $G$  no es una gráfica completa ni un ciclo de longitud impar, entonces  $\chi(G) \leq \Delta$ . En otro caso,  $\chi(G) = \Delta + 1$ .*

**Teorema 2.2** (Tuza [15]). *Sean  $G$  una gráfica,  $k$  un entero tal que  $k \geq 2$ . Si  $G$  no contiene ciclos de longitud 1 módulo  $k$ , entonces  $\chi(G) \leq k$ .*

## 2.1. Preliminares

Una digráfica conexa  $T$  es un  *exárbol*  si su gráfica subyacente es un árbol,  $T$  tiene un único vértice  $r$  cuyo ingrado es cero y cualquier otro vértice de  $T$  tiene ingrado uno. Al vértice  $r$  se le conoce como la  *raíz*  de  $T$ . Si un exárbol  $T$  es una subdigráfica generadora de una digráfica  $D$ , se dice que  $T$  es una  *exarborescencia* .

Dada una digráfica fuertemente conexa  $D$ , le llamaremos  *árbol DFS*  a una subdigráfica  $T$  tal que  $V(D) = V(T)$  obtenida a partir del algoritmo DFS, que es una exarborescencia enraizada en un vértice  $r$ . Al momento en el cual un vértice  $v \in V(T)$  es visitado por primera vez por el algoritmo DFS, lo denotaremos por  $f(v)$  y será la  *etiqueta DFS*  de  $v$ . Notemos que cada vértice tiene una única etiqueta DFS y que cualesquiera dos vértices distintos tienen etiquetas DFS diferentes. \*Cuando exista una  $uv$ -trayectoria en  $T$ , diremos que  $v$  es un  *descendiente*  de  $u$  y que  $u$  es un  *ancestro*  de  $v$ . Una flecha  $(u, v) \in A(D)$  es: (i) una  *flecha del árbol*  si  $(u, v) \in A(T)$ , (ii) una  *flecha hacia atrás*  si  $u$  es un descendiente de  $v$ , (iii) una  *flecha hacia adelante*  si  $u$  es un ancestro de  $v$  y (iv) una  *flecha cruzada*  si  $u$  no es un descendiente ni un ancestro de  $v$ . Para más detalles sobre la notación se puede consultar el libro [1] en las páginas 26-29.

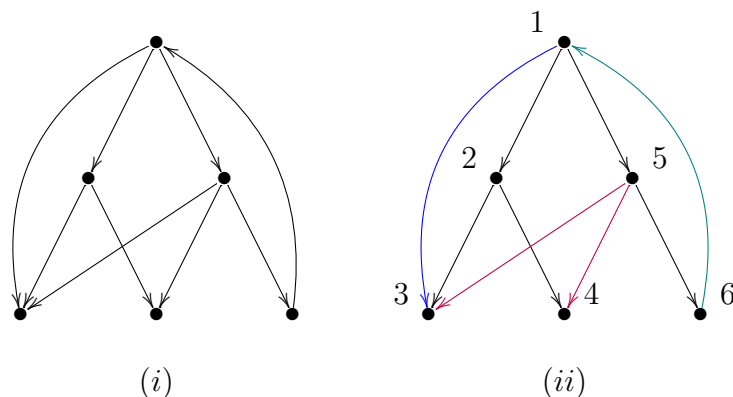


Figura 2.1: (i) Una digráfica  $D$ . (ii) Un árbol DFS de  $D$ , donde las etiquetas en cada vértice son sus etiquetas DFS, las flechas negras son las flechas del árbol, la azul es una flecha hacia adelante, la verde esmeralda es una flecha hacia atrás y las de color púrpura son las flechas cruzadas.

De aquí en adelante,  $D$  denotará una digráfica fuertemente conexa,  $T$  será un árbol DFS de  $D$  enraizado en un vértice  $r$  y  $V$  denotará el conjunto  $V(D) = V(T)$ .

A continuación veremos una serie de propiedades de una digráfica  $D$ , derivadas de la estructura de un árbol DFS de  $D$ , las cuales nos serán de utilidad en las pruebas de los teoremas principales.

Empezaremos con cuatro propiedades de un árbol DFS de una digráfica que se derivan de las definiciones. Después demostraremos el lema 2.7, que será la clave para construir conjuntos acíclicos de vértices en una digráfica y, así, dar particiones del conjunto de vértices de la misma en conjuntos acíclicos, cuya construcción está basada en un árbol DFS de la digráfica. Después, veremos algunas cotas simples para el número dicromático de una digráfica.

**Observación 2.3.** Se sigue de las definiciones que en  $D$  hay cuatro tipos de flechas: las flechas del árbol, las flechas hacia adelante, las flechas hacia atrás y las flechas cruzadas. Si  $(u, v)$  es: (i) una flecha del árbol, entonces  $f(u) < f(v)$ ; (ii) una flecha hacia adelante, entonces  $f(u) < f(v)$ ; (iii) una flecha hacia atrás, entonces  $f(u) > f(v)$ ; o (iv) una flecha cruzada, entonces la proposición 2.6 asegura que  $f(u) > f(v)$ .

Observemos que al haber únicamente cuatro tipos de flechas, si una flecha  $(u, v) \in A(D)$  satisface que  $f(u) < f(v)$ , entonces  $(u, v)$  es una flecha del árbol o bien una flecha hacia adelante; y si, por el contrario,  $f(u) > f(v)$ , entonces  $(u, v)$  es una

flecha hacia atrás o bien una flecha cruzada.

**Observación 2.4.** Si  $f(u) < f(v)$  y  $v$  es un exvecino de  $u$  en  $D$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria en  $T$ . Más aún, si  $f(u) < f(v)$  y  $v$  es un descendiente de  $u$ , entonces, para cada  $w \in V(D)$  tal que  $f(u) < f(w) < f(v)$ , se tiene que  $w$  es también un descendiente de  $u$ . Esto se debe a la definición del algoritmo DFS, ya que todos los vértices explorados por el algoritmo entre el momento en que  $u$  es visitado por primera vez,  $f(u)$ , y antes de que  $u$  sea completamente procesado son descendientes de  $u$  ([9], página 431).

**Observación 2.5.** Si existe una  $uv$ -trayectoria  $P$  en  $T$ , entonces esta es única en  $T$ ,  $u$  es un ancestro de  $v$  en  $T$  y  $f(u) < f(v)$ ; más aún, todo camino en  $T$  es una trayectoria.

La siguiente proposición afirma que cada flecha cruzada de  $D$  va de una rama explorada después a una rama explorada antes por el algoritmo DFS, se puede encontrar una prueba de esta proposición en la página 525 de [9].

**Proposición 2.6** (Gibbons [8]). *Sea  $f = (u, v) \in A(D)$  una flecha cruzada respecto de  $T$ . Entonces  $f(u) > f(v)$ .*

**Lema 2.7.** *Cada ciclo de  $D$  contiene al menos una flecha hacia atrás.*

*Demostración.* Sea  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$  un ciclo en  $D$ . En lo que sigue los índices se tomarán módulo  $k$ .

Consideremos el conjunto de etiquetas DFS de los vértices en  $C$ , este conjunto consiste de  $k$  números naturales diferentes, por lo que podemos elegir el mayor de ellos. Tomemos  $M \in [0, k-1]$  tal que  $f(u_M) > f(u_j)$  para todo  $j \neq M$ ,  $j \in [0, k-1]$ . Así,  $f(u_{M-1}) < f(u_M)$  y  $(u_{M-1}, u_M)$  debe ser una flecha del árbol o bien una flecha hacia adelante por la observación 2.3.

Notemos que existe un índice  $s \in [0, k-1]$  tal que  $f(u_{s-1}) > f(u_s)$ , ya que  $f(u_M) > f(u_{M+1})$ . Sea  $t$  el primer índice con esta propiedad empezando en  $M$  y avanzando en el orden inverso de  $C$ . De este modo,  $f(u_{t-1}) > f(u_t)$  y  $f(u_t) < f(u_{t+1}) < \dots < f(u_{M-1}) < f(u_M)$ .

Observemos que  $u_t$  es un ancestro de  $u_M$  pues  $(u_t, u_{t+1}), \dots, (u_{M-1}, u_M)$  son flechas de  $D$  que satisfacen  $f(u_i) < f(u_{i+1})$  para cada  $i = t, t+1, \dots, M-1$ , y así son flechas del árbol o flechas hacia adelante, por la observación 2.3.

*Afirmación 2.8.*  $t \neq M$ . Es claro que  $u_t$  y  $u_M$  son vértices distintos, ya que  $f(u_{M-1}) < f(u_M)$  y  $f(u_{t-1}) > f(u_t)$ , por las definiciones de  $M$  y  $t$ ; y, en consecuencia,  $t \neq M$ .

Caso 1:  $t = M + 1$ . Entonces  $u_t = u_{M+1}$  es un ancestro de  $u_M$ , y por tanto  $(u_M, u_{M+1})$  es una flecha hacia atrás, por \* en las definiciones.

Caso 2:  $t \neq M + 1$  (es decir,  $t - 1 \neq M$ ). Entonces  $u_{t-1}$ ,  $u_t$  y  $u_M$  son tres vértices distintos, mismos que satisfacen que  $f(u_t) < f(u_{t-1}) < f(u_M)$  y que  $u_t$  es un ancestro de  $u_M$ , por lo que la observación 2.4 asegura que  $u_t$  es un ancestro de  $u_{t-1}$  y de este modo  $(u_{t-1}, u_t) \in A(C)$  es una flecha hacia atrás.

□

**Definición 2.9.** A un ciclo  $C$  en  $D$  que contiene una flecha hacia atrás  $f = (u, v) \in A(C)$  tal que  $C - f$  es una  $vu$ -trayectoria contenida en  $T$ , lo llamaremos *ciclo elemental*.

Una consecuencia directa del lema 2.7 es que si  $c$  es una coloración de una digráfica fuerte  $D$ , tal que los extremos de cada flecha hacia atrás (con respecto a un árbol DFS) tienen distinto color, entonces  $c$  es una coloración acíclica de  $D$  ya que todos los ciclos de  $D$  contienen al menos una flecha hacia atrás y no hay flechas hacia atrás monocromáticas.

En lo que sigue, sacaremos partido de este hecho para obtener cotas superiores para el número dicromático.

**Definición 2.10.** Dada una subdigráfica conexa  $H$  de  $T$  definimos la gráfica  $G_H$  con el conjunto de vértices  $V(G_H) = V(H)$  y  $uv \in E(G_H)$  siempre que exista una flecha hacia atrás entre  $u$  y  $v$  en  $D$ . A  $G_H$  la llamaremos la *gráfica subyacente hacia atrás* de  $H$  relativa a  $T$ .

**Lema 2.11.** Sean  $D$  una digráfica fuerte,  $T$  un árbol DFS de  $D$  y  $H$  una subdigráfica conexa de  $T$  y  $G_H$  su gráfica subyacente hacia atrás relativa a  $T$ . Entonces  $\chi_A(D\langle H \rangle) \leq \chi(G_H)$ .

*Demostración.* Sea  $c: V(G_H) \rightarrow [1, \chi(G_H)]$  una coloración propia de  $V(G_H)$  con  $\chi(G_H)$  colores. Como  $c$  es propia, cada clase de color es un conjunto independiente.

Esta coloración en  $V(G_H) = V(H)$  es una coloración de  $D\langle H \rangle$  en la que los extremos de cada flecha hacia atrás tienen distinto color.

Por el lema 2.7, todo ciclo en  $D$  y en particular en  $D\langle H \rangle$  contiene una flecha hacia atrás, por lo tanto  $D\langle H \rangle$  no tiene ciclos monocromáticos con esta coloración. Así,  $\chi_A(D\langle H \rangle) \leq \chi(G_H)$ . □

Si, en particular, nos fijamos en la gráfica subyacente hacia atrás de un árbol DFS de  $D$ , obtenemos la primera cota:

**Corolario 2.12.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte,  $T$  un árbol DFS y  $G_T$  su gráfica subyacente hacia atrás relativa a  $T$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq \chi(G_T)$ .*

La siguiente proposición proporciona una segunda cota para del número cromático de una digráfica, en función de algunas de sus subdigráficas.

**Proposición 2.13.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte y  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $r$ . Sean  $x_1, \dots, x_k$  los exvecinos de  $r$  en  $T$ . Si  $T_1, \dots, T_k$  son los subárboles de  $T$  tales que  $x_i \in V(T_i)$ ,  $T = \bigcup_{i=1}^k T_i$  y  $V(T_i) \cap V(T_j) = \{r\}$  para cualesquier pareja de índices diferentes  $\{i, j\} \subset [1, k]$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq \max_{i \in [1, k]} \{\chi(G_{T_i})\}$  para todo  $i \in [1, k]$ .*

*Demostración.* Tomemos  $d = \max_{i \in [1, k]} \{\chi(G_{T_i})\}$ . Como  $\chi(G_{T_i}) \leq d$  para todo  $i \in [1, k]$ , podemos encontrar una coloración propia de  $G_{T_i}$  con  $d$  colores, digamos  $c_i: V(G_{T_i}) \rightarrow [1, d]$ , para cada  $i \in [1, k]$ .

Podemos suponer que  $c_i(r) = 1$  para cada  $i \in [1, k]$ , pues de no ser así, basta permutar dos colores para obtener una nueva coloración que sí lo satisfaga.

Definamos una función de color  $c: V \rightarrow [1, d]$  en  $D$  como sigue:  $c(v) = c_i(v)$  para todo  $v \in V(G_{T_i})$ . Notemos que  $V = \bigcup_{i=1}^k V(G_{T_i}) = \bigcup_{i=1}^k V(T_i)$ ,  $V(T_i) \cap V(T_j) = \{r\}$  si  $i \neq j$  y  $c_i(r) = 1$  para todo  $i \in [1, k]$ , por lo cual  $c$  está bien definida en  $D$ .

Sean  $U_1, \dots, U_d$  las clases de color en  $D$ . Probaremos por contradicción que  $D\langle U_s \rangle$  es acíclica para todo  $1 \leq s \leq d$ .

Supongamos que existe un ciclo  $C$  en  $D\langle U_s \rangle$  para algún  $s \in [1, k]$ . Por el lema 2.7,  $C$  contiene una flecha hacia atrás  $(u, v)$  y, dado que  $C$  es monocromático,  $c(u) = c(v)$ . Por la definición de flecha hacia atrás,  $u$  es un descendiente de  $v$  y así existe un índice  $i \in [1, k]$  tal que  $\{u, v\} \subset V(T_i) = V(G_{T_i})$  y  $uv \in E(G_{T_i})$ . Por lo tanto,  $c_i(u) = c(u) = c(v) = c_i(v)$ , lo cual es imposible ya que  $c_i$  es una coloración propia de  $G_{T_i}$ . En consecuencia,  $D\langle U_s \rangle$  es acíclica para todo  $s \in [1, k]$  y así  $\chi_A(D) \leq d$ .  $\square$

**Notación 2.14.** Dada una digráfica fuerte  $D$  y un árbol DFS,  $T$ , de  $D$  enraizado en  $r$ . Para cada vértice  $u \in V$ , denotaremos por  $P_u$  a la única  $ru$ -trayectoria contenida en  $T$ .

**Lema 2.15.** *Sean  $D$  una digráfica fuerte y  $T$  un árbol DFS enraizado en  $r$ . Si  $(u, v)$  es una flecha hacia atrás, entonces existe una única  $vu$ -trayectoria  $P$  en  $T$  tal que  $P_u = P_v \cup P$  y  $l(P_u) = l(P_v) + l(P)$ .*

*Demostración.* Sea  $(u, v)$  una flecha hacia atrás, de este modo  $u$  es un descendiente de  $v$ ; por \* en la definición del árbol DFS, existe una  $vu$ -trayectoria  $P$  en  $T$ . Por la observación 2.5,  $P$  es única.

Ahora,  $P_v \cup P$  es un  $ru$ -camino, el cual es una trayectoria (la única), por la observación 2.5, y así  $P_u = P_v \cup P$  donde  $l(P_u) = l(P_v) + l(P)$ .  $\square$

**Lema 2.16.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte y  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $r$ . Sea  $V_i = \{u \in V \mid l(P_u) = i\}$  para cada  $i \in [0, t]$ , donde  $t$  es la longitud de una trayectoria de longitud máxima en  $T$ . Las siguientes afirmaciones se cumplen: (i)  $V = \bigcup_{i=0}^t V_i$ , (ii)  $V_i \cap V_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  con  $\{i, j\} \subset [0, t]$  y (iii)  $D\langle V_i \rangle$  es acíclica.*

*Demostración.* Las afirmaciones (i) y (ii) se siguen de las definiciones de un árbol DFS y de los conjuntos  $V_i$  y de la observación 2.5.

Para probar (iii), supongamos por contradicción que  $D\langle V_i \rangle$  contiene un ciclo  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$ . Por el lema 2.7,  $C$  tiene al menos una flecha hacia atrás  $(u, u^+)$  (donde  $u \in V(C)$  y  $u^+$  es su sucesor en  $C$ ) y, por el lema 2.15, existe una  $u^+u$ -trayectoria  $P$  en  $T$ , tal que  $P_u = P_{u^+} \cup P$  y  $l(P_u) = l(P_{u^+}) + l(P) > l(P_{u^+})$ . Entonces  $i = l(P_u) > l(P_{u^+}) = i$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Definición 2.17.** Al conjunto  $V_i = \{u \in V \mid l(P_u) = i\}$  lo llamaremos la  $i$ -ésima generación o el  $i$ -ésimo nivel de  $T$ , para todo  $i \in [0, t]$ , donde  $t$  es la longitud de una trayectoria de longitud máxima en  $T$ ; y diremos que  $T$  tiene longitud  $t$ .

**Observación 2.18.** Si  $(u, v)$  es una flecha hacia atrás, entonces  $u \in V_i$  y  $v \in V_j$ , para algún  $\{i, j\} \subset [0, t]$  tal que  $i > j$ . Esto es una consecuencia directa del lema 2.15.

**Definición 2.19.** Sea  $D$  una digráfica fuerte y  $T$  un árbol DFS de longitud  $t \geq 1$  enraizado en  $r$  y sean  $V_0, \dots, V_t$  sus  $t + 1$  generaciones. Sea  $G^D$  la gráfica con el conjunto de vértices  $V(G^D) = \{V_0, \dots, V_t\}$  y tal que  $V_i V_j \in E(G^D)$  donde  $i > j$  si y sólo si existe una flecha hacia atrás  $(u, v) \in A(D)$  con  $u \in V_i$  y  $v \in V_j$ . A la gráfica  $G^D$  la llamaremos la *columna vertebral hacia atrás* de  $D$  relativa a  $T$ .

El número cromático de  $G^D$  es una cota superior para el número dicromático de  $D$ , como veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.20.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte,  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $r$  y  $G^D$  la columna vertebral hacia atrás de  $D$  relativa a  $T$ . Si  $c' : \{V_0, \dots, V_t\} \rightarrow [1, \chi(G^D)]$  es una coloración propia de  $G^D$ , entonces la asignación  $c : V \rightarrow [1, \chi(G^D)]$ ,*

definida como  $c(v) = c'(V_i)$  si  $v \in V_i$ , es una coloración acíclica de  $D$ . Más aún,  $\chi_A(D) \leq \chi(G^D)$ .

*Demostración.* Sea  $d = \chi(G^D)$ ,  $c': V(G^D) \rightarrow [1, d]$  una coloración propia de  $G^D$  y  $c: V \rightarrow [1, d]$  definida como en la hipótesis.

Primero,  $c$  está bien definida ya que los conjuntos  $V_0, \dots, V_t$  forman una partición de  $V$  y así  $c$  asigna un color único a cada vértice  $v \in V(D)$ .

Segundo,  $c$  es acíclica. Consideremos un ciclo arbitrario de  $D$ , digamos  $C$ , por el lema 2.7,  $C$  contiene una flecha hacia atrás  $(u, v)$ . Sea  $\{i, j\} \subset [0, t]$  tal que  $u \in V_i$  y  $v \in V_j$ , donde  $i > j$  por la observación 2.18. De este modo,  $V_i \neq V_j$ ,  $V_i V_j \in E(G^D)$  y  $c'(V_i) \neq c'(V_j)$ . Así,  $c(u) = c'(V_i) \neq c'(V_j) = c(v)$ , y por tanto  $C$  no es monocromático en  $D$ . Como no hay ciclos monocromáticos en  $D$ , la clase de color  $c^{-1}(i)$  es acíclica para cada  $i \in [1, d]$ . Más aún,  $c$  es una coloración acíclica de  $D$  con  $d = \chi(G^D)$  colores, por lo tanto  $\chi_A(D) \leq \chi(G^D)$ .  $\square$

**Corolario 2.21.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte y  $T$  un árbol DFS de longitud  $t$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq t + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $G^D$  la columna vertebral hacia atrás de  $D$  relativa a  $T$ . Entonces  $|V(G^D)| = t + 1$  y  $\Delta(G^D) \leq t$ , donde  $\Delta(G^D)$  denota el grado máximo en  $G^D$ . Por lo tanto, por el teorema 2.1 y la proposición 2.20,  $\chi_A(D) \leq \chi(G^D) \leq t + 1$ .

Más aún, si  $G^D$  no es una gráfica completa ni un ciclo de impar, entonces  $\chi_A(D) \leq \chi(G^D) \leq t$ .  $\square$

Si tenemos alguna información acerca de las longitudes de los ciclos de una digráfica  $D$ , podemos encontrar una cota para  $\chi_A(D)$  usando el lema 2.16, como se verá. En [6], los autores demostraron, dados dos enteros  $r$  y  $k$  donde  $k \geq 2$  y  $k \geq r \geq 1$ , que si una digráfica  $D$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $k$ , entonces  $\chi_A(D) \leq k$ . Aquí veremos otras cotas para  $\chi_A(D)$  en términos de las longitudes de los ciclos.

**Teorema 2.22.** [6] *Sean  $r$  y  $k$  dos enteros tales que  $k \geq 2$  y  $k \geq r \geq 1$ . Si una digráfica  $D$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $k$ , entonces  $\chi_A(D) \leq k$ .*

**Corolario 2.23.** *Sea  $D$  una digráfica de cuello  $g$  y circunferencia  $c$  con  $g - 1 \leq c - g + 2$ , es decir,  $g \leq \frac{c+3}{2}$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq c - g + 2$ .*

*Demostración.* Probemos que  $D$  no tiene ciclos de longitud  $g - 1$  módulo  $c - g + 2$ . Supongamos por contradicción, que  $C$  es un ciclo en  $D$  tal que  $l(C) \equiv g - 1 \pmod{c - g + 2}$  por lo cual  $l(C) = g - 1 + q(c - g + 2)$  para algún entero  $q \geq 0$ . Si

$q = 0$ , entonces  $l(C) = g - 1$  lo cual es imposible para una digráfica de cuello  $g$ . Por lo tanto,  $q \geq 1$  y así  $l(C) = g - 1 + q(c - g + 2) \geq g - 1 + c - g + 2 = c + 1$ , lo cual es una contradicción.

Ahora, como  $D$  no contiene ciclos de longitud  $g - 1$  módulo  $c - g + 2$ , por el teorema 2.22 se sigue que  $\chi_A(D) \leq c - g + 2$ .  $\square$

**Observación 2.24.** La cota propuesta en el corolario 2.23 es justa. Para toda digráfica  $D$  con al menos un ciclo se satisface que  $\chi_A(D) \geq 2$ . Tomemos  $D$  tal que todos sus ciclos tienen longitud 3, entonces  $\chi_A(D) \leq 2$ . De este modo la cota se alcanza.

**Lema 2.25.** *Sea  $k$  un entero tal que  $k \geq 2$ . Sea  $D$  una digráfica fuerte sin ciclos de longitud 1 módulo  $k$ ,  $T$  un árbol DFS de  $D$  de longitud  $t$  enraizado en  $r$  y  $V_0, \dots, V_t$  sus generaciones. Los conjuntos  $U_s = \bigcup_{i \equiv s \pmod{k}} V_i$  para cada  $s \in [0, k - 1]$  forman una partición de  $V$  en conjuntos acíclicos.*

*Demostración.* Sea  $U_s$  como en la hipótesis para cada  $s \in [0, k - 1]$ .

Primero,  $\bigcup_{s=0}^{k-1} U_s = \bigcup_{i=0}^t V_i = V$  y  $U_i \cap U_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  donde  $\{i, j\} \subset [0, k - 1]$ , por definición.

Segundo, procediendo por contradicción, supongamos que  $U_s$  no es acíclico para algún  $s \in [0, k - 1]$ , entonces existe un ciclo  $C$  en  $D$  tal que  $V(C) \subset U_s$ . Por el lema 2.7,  $C$  contiene una flecha hacia atrás  $(u, v)$ . Como  $\{u, v\} \subset U_s$ , tenemos que  $l(P_u) = i \equiv s \pmod{k}$  y que  $l(P_v) = j \equiv s \pmod{k}$ , por las definiciones de los conjuntos  $V_i$  y  $U_s$ . Además, por la observación 2.18, se sigue que  $i > j$  y, por el lema 2.15, existe una  $vu$ -trayectoria  $P$  en  $T$  que satisface  $l(P) = i - j \equiv 0 \pmod{k}$  y, de esta manera, el ciclo elemental  $P \cup (u, v)$  tiene longitud 1 módulo  $k$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Como consecuencia del lema 2.25 tenemos que, si una digráfica fuerte  $D$  no contiene ciclos congruentes con 1 módulo  $k$ , para algún  $k \geq 2$ , entonces  $D$  tiene una  $k$ -coloración cíclica, esto es,  $\chi_A(D) \leq k$ . Lo cual es la versión dirigida del teorema de Tuza [15] y un caso particular del teorema de Chen *et al.* [6].

En el siguiente lema veremos que cualesquiera  $g - 1$  niveles consecutivos en un árbol DFS inducen una digráfica acíclica, donde  $g$  es el cuello de  $D$ . Este hecho será de utilidad para construir coloraciones acíclicas.

**Lema 2.26.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de cuello  $g$ ,  $T$  un árbol DFS de  $D$  de longitud  $t$  enraizado en  $r$  y  $V_0, \dots, V_t$  son sus generaciones. Entonces, para cada  $0 \leq h \leq t - g + 2$ ,  $g - 1$  generaciones consecutivas de  $T$ ,  $V_h, V_{h+1}, \dots, V_{h+g-2}$ , inducen una*

digráfica acíclica en  $D$ , a saber  $D\langle \bigcup_{i=0}^{g-2} V_{h+i} \rangle$ . Más aún, no existen flechas hacia atrás con ambos extremos en  $\bigcup_{i=0}^{g-2} V_{h+i}$ .

*Demostración.* Sea  $h \in [0, t - g + 2]$ . Supongamos por contradicción que existe un ciclo  $C$  en  $D\langle \bigcup_{i=0}^{g-2} V_{h+i} \rangle$ . Por el lema 2.7,  $C$  contiene una flecha hacia atrás  $(u, v)$ . Entonces  $u \in V_{h+i}$  y  $v \in V_{h+j}$  para algunos  $0 \leq j < i \leq g - 2$ . Observemos que existe una  $vu$ -trayectoria,  $P$ , en  $T$  tal que  $C' = P \cup (u, v)$  es un ciclo elemental en  $D$  y  $l(P_u) = l(P_v) + l(P)$ , por el lema 2.15. De aquí tenemos por un lado que  $l(P) = l(C') - 1 \geq g - 1$  y por otro lado que  $l(P) = l(P_u) - l(P_v) = (h + i) - (h + j) = i - j$ ; de donde,  $i - j \geq g - 1$ , lo cual es una contradicción puesto que  $0 \leq j < i \leq g - 2$  y así  $0 < i - j \leq g - 2 < g - 1$ .

De este modo,  $D\langle \bigcup_{i=0}^{g-2} V_{h+i} \rangle$  es acíclica y no existen flechas hacia atrás con ambos extremos en  $\bigcup_{i=0}^{g-2} V_{h+i}$ .  $\square$

**Lema 2.27.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de cuello  $g$ ,  $T$  un árbol DFS de  $D$  de longitud  $t$  enraizado en  $r$  y  $V_0, \dots, V_t$  sus generaciones,  $k = \left\lceil \frac{t+1}{g-1} \right\rceil$ , y  $U_h = \bigcup_{j=0}^{g-2} V_{h(g-1)+j}$  para cada  $h \in [0, k-1]$ , donde  $V_{(k-1)(g-1)+j} = \emptyset$  si  $(k-1)(g-1) + j > t$ . Entonces los conjuntos  $U_0, \dots, U_{k-1}$  forman una partición de  $V$  en conjuntos acíclicos. Más aún, para cada  $h \in [0, k-1]$ , no existen flechas hacia atrás con ambos extremos en  $U_h$ .*

*Demostración.* En primer lugar, como  $V_0, \dots, V_t$  forman una partición de  $V$  y  $t < t + 1 = \frac{t+1}{g-1}(g-1) \leq \left\lceil \frac{t+1}{g-1} \right\rceil (g-1) = k(g-1)$ , se sigue que todo  $i \in [0, t]$  satisface  $i \leq t \leq k(g-1) - 1 = (k-1)(g-1) + g - 2$  y así, por el algoritmo de la división existen enteros únicos  $h \in [0, k-1]$  y  $j \in [0, g-2]$  tales que  $i = h(g-1) + j$  y  $V_i \subseteq U_h$  y, por la unicidad de  $h$  tenemos que  $U_h \cap U_{h'} = \emptyset$  si  $h \neq h'$ . En consecuencia, los conjuntos  $U_0, \dots, U_{k-1}$  forman una partición de  $V$ .

En segundo lugar, tenemos, por el lema 2.26, que la digráfica inducida  $D\langle U_h \rangle$  es acíclica para cada  $h \in [0, k-1]$  y no hay flechas hacia atrás con ambos extremos en  $U_h$  para todo  $h \in [0, k-1]$ .  $\square$

El siguiente corolario es consecuencia del lema 2.27.

**Corolario 2.28.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de cuello  $g$ ,  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $r$  y  $G^D$  la columna vertebral hacia atrás de  $D$  relativa a  $T$ . Entonces los conjuntos  $\{V_{h(g-1)+j}\}_{j=0}^{g-2}$  son independientes en  $G^D$  para cada  $h \in [0, k-1]$ , donde  $V_{(k-1)(g-1)+j} = \emptyset$  si  $(k-1)(g-1) + j > t$ .*

*Demostración.* Del lema 2.27, los conjuntos  $U_h = \bigcup_{j=0}^{g-2} V_{h(g-1)+j}$  son acíclicos para cada  $h \in [0, k-1]$ , donde  $V_{(k-1)(g-1)+j} = \emptyset$  si  $(k-1)(g-1) + j > t$ ; y por el lema 2.27, no hay flechas hacia atrás con ambos extremos en  $U_h = \bigcup_{j=0}^{g-2} V_{h(g-1)+j}$  y así, por la definición de columna vertebral hacia atrás, no existen aristas en  $G^D$  con ambos extremos en  $\{V_{h(g-1)+j}\}_{j=0}^{g-2}$  para cada  $h \in [0, k-1]$ , como se quería.  $\square$

La siguiente proposición de una cota para  $\chi_A(D)$ , puede no ser muy buena para una gráfica arbitraria, pero es mejor cuando  $D$  es fuerte y la razón de la longitud de una trayectoria de longitud máxima entre el cuello es pequeña.

**Proposición 2.29.** *Sean  $D$  una digráfica fuerte y  $l_u$  la longitud de una trayectoria que inicia en  $u$  lo más larga posible, para cada  $u \in V$ . Sea  $l = \min_{u \in V} \{l_u\}$  y sea  $g$  el cuello de  $D$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq \left\lceil \frac{l+1}{g-1} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Sea  $r$  un vértice en  $D$  tal que  $l_r = l$  y sea  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $r$ , entonces  $T$  tiene longitud  $t \leq l$ . Sean  $V_0, \dots, V_t$  las generaciones de  $T$ .

Dividiremos  $V$  en  $k = \left\lceil \frac{l+1}{g-1} \right\rceil$  conjuntos, de la misma manera que en el lema 2.27, es decir,  $U_h = \bigcup_{j=0}^{g-2} V_{h(g-1)+j}$  para cada  $h \in [0, k-1]$ , donde  $V_{h(g-1)+j} = \emptyset$  si  $h(g-1) + j > t$ .

Entonces  $c: V \rightarrow [0, k-1]$  dada por  $c(v) = h$  si  $v \in U_h$  es una  $k$ -coloración en  $D$  tal que cada clase de color es acíclica, por el lema 2.27. Por lo tanto,  $\chi_A(D) \leq k$ .  $\square$

**Corolario 2.30.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de orden  $n$  y cuello  $g$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq \left\lceil \frac{n}{g-1} \right\rceil$ .*

*Demostración.* La longitud de una trayectoria de longitud máxima en  $D$  es a lo más  $n-1$ . Entonces  $\chi_a(D) \leq \left\lceil \frac{n}{g-1} \right\rceil$  por la proposición 2.29.  $\square$

A continuación, definimos la última de las tres gráficas que anunciamos al inicio del capítulo.

**Definición 2.31.** Sean  $D, T$  y  $U_0, \dots, U_{k-1}$  como en el lema 2.27. Definimos la *gráfica de condensación de  $D$  relativa a  $T$*  como la gráfica,  $H$ , con el conjunto de vértices  $V(H) = \{U_0, \dots, U_{k-1}\}$  y  $U_i U_j \in E(H)$  si  $i > j$  y existe una flecha hacia atrás  $(u, v) \in A(D)$  tal que  $u \in U_i$  y  $v \in U_j$ .

**Proposición 2.32.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte,  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $r$  y  $H$  la gráfica de condensación de  $D$  relativa a  $T$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq \chi(H)$ .*

*Demostración.* Sean  $d = \chi(H)$  y  $c: V(H) \rightarrow [1, d]$  una coloración propia de  $H$ . Definimos la coloración  $c': V \rightarrow [1, d]$  en  $D$  como sigue  $c'(v) = c(U_h)$  si  $v \in U_h$ .

Como los conjuntos  $U_0, \dots, U_{k-1}$  forman una partición de  $V$ ,  $c'$  está bien definida y, por el lema 2.27, cada clase de color es acíclica pues cada flecha hacia atrás  $(u, v) \in A(D)$  satisface que  $u \in U_i, v \in U_j, i > j$  y  $U_i U_j \in E(H)$ , por lo cual  $c'(u) = c(U_i) \neq c(U_j) = c'(v)$ , ya que  $c$  es propia. Por lo tanto, por el lema 2.7, no hay ciclos monocromáticos en  $D$ .  $\square$

## 2.2. Resultados principales sobre el número dicromático

Ahora veremos una cota para  $\chi_A(D)$  cuando todos los ciclos en  $D$  tienen longitud  $r$  módulo  $k$ . Para ello requeriremos el lema 2.25.

**Teorema 2.33.** *Sean  $k$  y  $s$  dos enteros tales que  $s \geq 1$ , sean  $r_1, \dots, r_s$  enteros tales que  $k \geq r_i \geq 0$  para cada  $i \in [1, s]$  y  $D$  una digráfica fuerte tal que todo ciclo en  $D$  tiene longitud  $r$  módulo  $k$  para algún  $r \in \{r_1, \dots, r_s\}$ . Si  $r_i \neq 1$  para cada  $i \in [1, s]$ , entonces  $\chi_A(D) \leq 2s + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol DFS de  $D$  enraizado en  $\hat{r}$  de longitud  $t$  y  $V_0, \dots, V_t$  sus generaciones.

Como  $r_i \neq 1$  para cada  $i \in [1, s]$  y todo ciclo en  $D$  tiene longitud  $r$  módulo  $k$  para algún  $r \in \{r_1, \dots, r_s\}$ , entonces  $D$  no contiene ciclos de longitud 1 módulo  $k$ . Así, por el lema 2.25, los conjuntos  $U_s = \bigcup_{i \equiv s \pmod{k}} V_i$  para cada  $s \in [0, k-1]$  forman una partición de  $V$  en conjuntos acíclicos.

Consideremos la gráfica  $H$  con el conjunto de vértices  $V(H) = \{U_0, U_1, U_2, \dots, U_{k-1}\}$  y  $U_i U_j \in E(H)$  si y sólo si existen vértices  $u \in U_i$  y  $v \in U_j$  tales que  $(u, v)$  o  $(v, u)$  es una flecha hacia atrás en  $D$ .

Sea  $U_i U_j \in E(H)$ , entonces existen vértices  $u \in U_i$  y  $v \in U_j$  tales que  $l(P_u) \equiv i \pmod{k}, l(P_v) \equiv j \pmod{k}$  y existe una flecha hacia atrás entre  $u$  y  $v$ .

Caso 1:  $(u, v)$  es una flecha hacia atrás en  $D$ . De donde, existe una  $vu$ -trayectoria  $P$  en  $T$ , tal que  $P \cup (u, v)$  es un ciclo elemental en  $D$ . Dado que  $l(C) \equiv r_l \pmod{k}$  para algún  $l \in [1, s]$ , tenemos por un lado que  $l(P) \equiv r_l - 1 \pmod{k}$  y por otro lado que  $l(P) = l(P_u) - l(P_v) \equiv i - j \pmod{k}$ ; y así  $i - j \equiv r_l - 1 \pmod{k}$  o, equivalentemente,  $i \equiv j + r_l - 1 \pmod{k}$  donde  $\{i, j, r_l\} \subset [0, k-1]$ .

Caso 2:  $(v, u)$  es una flecha hacia atrás en  $D$ . De donde, existe una  $uv$ -trayectoria  $P'$  en  $T$ , tal que  $P' \cup (v, u)$  es un ciclo elemental en  $D$ . Como  $l(C) \equiv r_{l'} \pmod{k}$  para algún  $l' \in [1, s]$ , tenemos por una parte que  $l(P') \equiv r_{l'} - 1 \pmod{k}$  y por otra parte que  $l(P') = l(P_v) - l(P_u) \equiv j - i \pmod{k}$ ; y así  $j - i \equiv r_{l'} - 1 \pmod{k}$  o, equivalentemente,  $i \equiv j - (r_{l'} - 1) \pmod{k}$  donde  $\{i, j, r_l\} \subset [0, k - 1]$ .

De esta manera,  $U_i$  es adyacente a  $U_j$  en  $H$  si y sólo si  $i \equiv j + (r_l - 1) \pmod{k}$  o  $i \equiv j - (r_l - 1) \pmod{k}$  para algún  $l \in [1, s]$ .

Como no hay flechas hacia atrás con ambos extremos en el mismo  $U_j$ , o de otro modo  $D$  tendría un ciclo de longitud 1 módulo  $k$ , tenemos que  $H$  no tiene lazos y la vecindad de un vértice  $U_j$  en  $H$  satisface  $N_H(U_j) \subset \bigcup_{l=1}^s \{U_{j-(r_l-1)}, U_{j+r_l-1}\}$ , donde los subíndices se toman módulo  $k$ ; y así  $d_H(U_j) \leq 2s$  para cada  $0 \leq j \leq k - 1$ . Por lo tanto, el grado máximo en  $H$  satisface  $\Delta(H) \leq 2s$ . Por el teorema 2.1,  $H$  es  $(2s + 1)$ -coloreable.

Sea  $c' : V(H) \rightarrow [1, 2s + 1]$  una coloración propia en  $H$ , entonces  $c : V \rightarrow [1, 2s + 1]$  definida como  $c(v) = c'(U_j)$  siempre que  $v \in U_j$  es una coloración acíclica en  $D$ .

La asignación  $c$  asigna un color único a cada vértice  $v \in V$ , ya que los conjuntos  $U_1, \dots, U_{k-1}$  forman una partición de  $V$ , por lo que  $c$  está bien definida.

La asignación  $c$  es acíclico: sea  $C$  un ciclo arbitrario en  $D$  y  $(u, v) \in A(C)$  una flecha hacia atrás, entonces existe una pareja de índices distintos  $\{i, j\} \subset [0, k - 1]$  tal que  $u \in U_i, v \in U_j$  y, así,  $U_i U_j \in E(H)$ , de esta manera  $c(u) = c'(U_i) \neq c'(U_j) = c(v)$  puesto que  $c'$  es propia. De aquí se sigue que  $C$  no es monocromático.

Por lo tanto,  $\chi_A(D) \leq 2s + 1$ . □

Si restringimos  $s$  en el último teorema, podemos mejorar el resultado del teorema 2.22.

**Corolario 2.34.** Sean  $k$  y  $s$  dos enteros tales que  $s < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , sean  $r_1, \dots, r_s$  enteros tales que  $k \geq r_i \geq 0$  para cada  $i \in [1, s]$  y  $D$  una digráfica fuerte tal que cada ciclo en  $D$  tiene longitud  $r$  módulo  $k$  para algún  $r \in \{r_1, \dots, r_s\}$ . Si  $r_i \neq 1$  para cada  $i \in [1, s]$ , entonces  $\chi_A(D) \leq 2s + 1 < k$ .

**Corolario 2.35.** Sean  $k$  y  $r$  dos enteros tales que  $k \geq r \geq 0$  y sea  $D$  una digráfica fuerte tal que todo ciclo en  $D$  tiene longitud  $r$  módulo  $k$ . Si  $r \neq 1$ , entonces  $\chi_A(D) \leq 3$ .

Supongamos que  $k$  y  $r$  satisfacen las hipótesis del corolario 2.35 y tomemos el peor escenario posible en la prueba del teorema 2.33, donde  $N_H(U_j) = \{U_{j-(r-1)}, U_{j+r-1}\}$  para cada  $0 \leq j \leq k-1$ , donde los índices se toman módulo  $k$ . Entonces  $H$  es la unión de  $d = \text{mcd}(r-1, k)$  ciclos ajenos dos a dos, de longitud  $b = \frac{k}{d}$  y de la forma  $C_j = U_j U_{j+r-1} U_{j+2(r-1)} \cdots U_{j+(b-1)(r-1)} U_j$  para cada  $0 \leq j < r-1$ .\*\* Si  $b$  es par entonces, por el teorema 2.1,  $H$  debe ser 2-coloreable.

\*\* Aclaremos esta afirmación: consideremos la asignación biyectiva  $\phi: V(H) \rightarrow \mathbb{Z}_k$  dada por  $U_j \mapsto \bar{j}$ , donde  $\bar{j}$  es el residuo de  $j$  módulo  $k$ .

Sabemos que todas las flechas hacia atrás cuya cabeza está en  $U_j$  tienen cola en  $U_{j+r-1}$ , por el caso 1 en la prueba del teorema 2.33, y todas las flechas hacia atrás cuya cola está en  $U_j$  tienen cabeza en  $U_{j-(r-1)}$ , por el caso 2 en la prueba del teorema 2.33. Así, se tienen saltos de  $r-1$  índices en la dirección contraria a la del ciclo, desde  $U_j$  hasta  $U_{j+r-1}$ . Si consideramos los mismos saltos en  $\mathbb{Z}_k$  obtenemos el automorfismo<sup>2</sup>  $\psi$  en  $\mathbb{Z}_k$  dado por  $\psi(\bar{n}) = \overline{n + (r-1)}$ . De este modo,  $U_j$  y  $U_l$  son adyacentes en  $H$  si y sólo si  $\psi(\bar{j}) = \bar{l}$  o  $\psi(\bar{l}) = \bar{j}$ .

Notemos que,  $\psi$  tiene  $d$  órbitas que son mutuamente ajenas, cíclicas y tienen cardinalidad  $b$ . Además, cada órbita corresponde a precisamente un ciclo en  $H$ . La relación entre  $H$  y el automorfismo  $\psi$  en  $\mathbb{Z}_k$  es clara ahora.

Por lo que, determinar un grupo del mismo orden que nuestra gráfica (digráfica) y un automorfismo en ella que represente las adyacencias puede ayudarnos a colorear los vértices de la gráfica (digráfica), vía sus órbitas, mismas que son siempre cíclicas y mutuamente ajenas. Sin embargo, si una gráfica (digráfica) tiene más aristas (resp. flechas) que aquellas en los ciclos determinados por las órbitas esta herramienta puede ser inútil.

**Corolario 2.36.** *Sean  $k$  y  $r$  dos enteros tales que  $k \geq r \geq 0$  y sea  $D$  una digráfica fuerte tal que todos los ciclos en  $D$  tienen longitud congruente con  $r$  módulo  $k$ . Si  $r \neq 1$  y  $\frac{k}{d}$  es par, donde  $d = \text{mcd}(r-1, k)$ , entonces  $\chi_A(D) \leq 2$ .*

*Demostración.* Esta afirmación se sigue de la demostración del teorema 2.33 y de la explicación en \*\*, notando que las órbitas de  $\phi$ , vistas como ciclos en  $H$ , tienen longitud par  $b = \frac{k}{d}$ . Por lo cual son 2-coloreables y así podemos colorear los vértices de  $D$  con 2 colores de la misma manera que se hizo en la demostración del teorema 2.33. □

---

<sup>2</sup>Un automorfismo de grupos es una función de un grupo  $(G, *)$  en sí mismo,  $f: G \rightarrow G$ , que es biyectiva y que satisface  $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$  para cualesquiera dos elementos,  $g_1$  y  $g_2$ , de  $G$ .

**Teorema 2.37.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de cuello  $g$ ,  $k$  y  $p$  dos enteros tales que  $k \geq g - 1 \geq p \geq 1$ . Si  $D$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $\hat{k} = \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil p$  para todo  $r \in \{-p + 2, \dots, 0, \dots, p\}$ , entonces  $\chi_A(D) \leq \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol DFS de  $D$  de longitud  $t$  enraizado en  $\hat{r}$  y  $V_0, \dots, V_t$  sus generaciones.

Sean  $k' = \left\lceil \frac{t+1}{p} \right\rceil$  y  $U_h = \bigcup_{j=0}^{g-2} V_{hp+j}$  para cada  $h \in [0, k' - 1]$ , donde  $V_{(k'-1)p+j} = \emptyset$  si  $(k' - 1)p + j > t$ . En el lema 2.26 se demostró que cada  $U_h$  es acíclico pues consiste de  $p \leq g - 1$  generaciones consecutivas y que no hay flechas hacia atrás con ambos extremos en  $U_h$ , para cada  $h \in [0, k' - 1]$ .

Estos conjuntos forman una partición de  $V$ , pues los conjuntos  $V_i$  forman una partición de  $V$  y, por el algoritmo de la división, cada  $i \in [0, t]$  se puede escribir de manera única como  $i = hp + j$  para algunos  $h \geq 0$  y  $0 \leq j \leq p - 1$ , por lo cual  $V_i \subset U_h$  y  $V_i \cap U_{h'} = \emptyset$  si  $h' \neq h$ .

Definamos  $c: V \rightarrow [0, d - 1]$ , donde  $d = \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil = \frac{\hat{k}}{p}$ , de la siguiente manera:  $c(v) = i$  si  $v \in U_h$  y  $h \equiv i \pmod{d}$ . Entonces  $c$  es una coloración acíclica de  $D$ . Primero, los conjuntos  $U_h$  forman una partición de  $V$ , por lo cual cada vértice  $v \in V$  tiene exactamente un color asignado. Segundo, las clases de color son acíclicas. Supongamos por contradicción que existe un ciclo monocromático  $C$  en  $D$ . Por el lema 2.7, existe una flecha hacia atrás  $(u, v) \in A(C)$  y esta es monocromática. Sea  $\{h_1, h_2\} \subset [0, k' - 1]$  e  $i \in [0, d - 1]$  tales que  $u \in U_{h_1}$ ,  $v \in U_{h_2}$  y  $h_1 \equiv h_2 \equiv i \pmod{d}$ .

Como no hay flechas hacia atrás con ambos extremos en el mismo conjunto  $U_h$ , se sigue que  $h_1 \neq h_2$ . Por la definición de los conjuntos  $U_h$  tenemos que  $u \in V_{h_1 p + j_1}$  para algún  $j_1 \in [0, p - 1]$ ,  $v \in V_{h_2 p + j_2}$  para algún  $j_2 \in [0, p - 1]$ ,  $l(P_u) = h_1 p + j_1$ ,  $l(P_v) = h_2 p + j_2$  y, como  $u$  es un descendiente de  $v$ ,  $h_1 p + j_1 > h_2 p + j_2$ , donde  $\{h_1, h_2\} \subset [0, k' - 1]$ ,  $\{j_1, j_2\} \subset [0, p - 1]$  y  $h_1 > h_2$ .

Ahora, sea  $P$  la  $vu$ -trayectoria en  $T$ . De esta manera  $l(P) = l(P_u) - l(P_v) = (h_1 p + j_1) - (h_2 p + j_2) = (h_1 - h_2)(g - 1) + (j_1 - j_2)$ . Dado que  $h_1 \equiv h_2 \pmod{d}$  y  $h_1 > h_2$ , se sigue que  $h_1 - h_2 = qd$  para algún  $q \geq 1$  y, así,  $l(P) = (h_1 - h_2)p + (j_1 - j_2) = qdp + j_1 - j_2 = q\hat{k} + j_1 - j_2 \equiv j_1 - j_2 \pmod{\hat{k}}$ , donde  $|j_1 - j_2| \leq p - 1$  pues  $\{j_1, j_2\} \subset [0, p - 1]$ .

Por lo tanto, el ciclo  $\gamma = P \cup (u, v)$  satisface  $l(\gamma) = l(P) + 1 \equiv j_1 - j_2 + 1 \pmod{\hat{k}}$ , donde  $-(p - 1) + 1 \leq j_1 - j_2 + 1 \leq (p - 1) + 1$ , o equivalentemente,  $-p + 2 \leq j_1 - j_2 + 1 \leq p$ , lo cual contradice la hipótesis.

Entonces,  $c$  es una coloración acíclica y  $\chi_A(D) \leq d$ . □

Como consecuencia del teorema 2.37 obtenemos los dos corolarios siguientes:

**Corolario 2.38.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de cuello  $g$ ,  $k$  y  $p$  dos enteros tales que  $k \geq g - 1 \geq p \geq 1$  y  $p \mid k$ . Si  $D$  no contiene ciclos de longitud  $r$  módulo  $k$  para cada  $r \in \{-p + 2, \dots, 0, \dots, p\}$ , entonces  $\chi_A(D) \leq \frac{k}{p}$ .*

El siguiente es un resultado de Tuza en [15], puesto que el número dicromático de una digráfica en la que todas las flechas son simétricas (y por tanto tiene cuello  $g = 2$ ) es igual al número cromático de una gráfica no dirigida:

**Corolario 2.39.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte de cuello  $g = 2$ ,  $k$  un entero tal que  $k \geq 1$ . Si  $D$  no contiene ciclos de longitud 1 módulo  $k$ , entonces  $\chi_A(D) \leq k$ .*

Para finalizar el capítulo, el tercer teorema principal.

**Teorema 2.40.** *Sea  $D$  una digráfica con al menos un ciclo, de circunferencia  $c$  y cuello  $g$ . Entonces  $\chi_A(D) \leq \left\lceil \frac{c-1}{g-1} \right\rceil + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol DFS de  $D$  de longitud  $t$  enraizado en un vértice  $r$  y sean  $V_0, \dots, V_t$  sus generaciones. Partiremos el conjunto  $V$  en  $k = \left\lceil \frac{c-1}{g-1} \right\rceil + 1$  conjuntos acíclicos de la siguiente manera.

Paso 1: Sean  $k' = \left\lceil \frac{t+1}{g-1} \right\rceil$  y  $U_{h'} = \bigcup_{j=0}^{g-2} V_{h'(g-1)+j}$  para cada  $h' \in [0, k' - 1]$ , donde el conjunto  $V_{(k'-1)(g-1)+j} = \emptyset$  si  $(k' - 1)(g - 1) + j > t$ . En el lema 2.27 se vio que los conjuntos  $U_0, \dots, U_{k'-1}$  forman una partición de  $V$  en conjuntos acíclicos.

Paso 2: Demos color  $h \in [0, k - 1]$  a los vértices en  $U_{h'}$  si  $h' \equiv h \pmod{k}$ , donde  $h' \in [0, k' - 1]$ . La coloración está bien definida pues los conjuntos  $U_0, \dots, U_{k'-1}$  forman una partición de  $V$  y  $h'$  es congruente con exactamente un  $h \in [0, k - 1]$  módulo  $k$ ; así, cada vértice  $v \in V$  tiene asignado exactamente un color.

Veremos que cada clase de color es acíclica. Supongamos por contradicción que existe un ciclo monocromático  $C$ . Por el lema 2.7,  $C$  contiene una flecha hacia atrás  $(u, v)$ . Como  $C$  es monocromático, hay un índice  $h \in [0, k - 1]$  y una pareja de índices  $\{i_1, i_2\} \subset [1, k']$  tales que  $u \in U_{i_1}$ ,  $v \in U_{i_2}$  e  $i_1 \equiv i_2 \equiv h \pmod{k}$ .

Observemos que  $u \in V_{i_1(g-1)+j_1}$  y  $v \in V_{i_2(g-1)+j_2}$  para algún  $\{j_1, j_2\} \subset [0, g - 2]$ , por la definición de  $U_{i_1}$  y  $U_{i_2}$ . De donde,  $l(P_u) = i_1(g - 1) + j_1$  y  $l(P_v) = i_2(g - 1) + j_2$ .

Más aún, como  $(u, v)$  es una flecha hacia atrás se sigue que  $i_1(g-1)+j_1 > i_2(g-1)+j_2$ , donde  $\{i_1, i_2\} \subset [0, k' - 1]$  y  $\{j_1, j_2\} \subset [0, g - 2]$ ; y, así,  $i_1 \geq i_2$ . Si  $i_1 = i_2$ , entonces  $\{u, v\} \subset U_{i_1}$ , lo cual es imposible por el lema 2.27. Por lo tanto,  $i_1 > i_2$ . Recordemos que  $i_1 \equiv i_2 \pmod{k}$ , de donde  $i_1 - i_2 = qk$  para algún  $q \geq 1$ .

Ahora, sea  $P$  la  $vu$ -trayectoria en  $T$ . Se sigue que  $l(P) = l(P_u) - l(P_v) = (i_1(g-1) + j_1) - (i_2(g-1) + j_2) = (i_1 - i_2)(g-1) + (j_1 - j_2)$ . Por un lado, como  $i_1 \equiv i_2 \pmod{k}$ , tenemos que  $l(P) \equiv j_1 - j_2 \pmod{k}$  donde  $|j_1 - j_2| < g - 1$  ya que  $\{j_1, j_2\} \subset [0, g - 2]$ ; por otro lado, como  $i_1 - i_2 = qk$  con  $q \geq 1$ , tenemos que  $l(P) = (i_1 - i_2)(g-1) + (j_1 - j_2) = qk(g-1) + (j_1 - j_2) \geq k(g-1) + (j_1 - j_2)$ .

Consideremos el ciclo  $\gamma = P \cup (u, v)$ , entonces  $g \leq l(\gamma) \leq c$  y  $l(\gamma) = l(P) + 1$ ; y de esta manera  $g - 1 \leq l(P) \leq c - 1$ .

Sin embargo,  $l(P) \geq k(g-1) + (j_1 - j_2) = \left(\left\lceil \frac{c-1}{g-1} \right\rceil + 1\right)(g-1) + (j_1 - j_2) \geq \left(\frac{c-1}{g-1} + 1\right)(g-1) + (j_1 - j_2) = (c-1+g-1) + (j_1 - j_2) > (c+g-2) - (g-1) = c-1$ , lo cual es imposible, por lo cual podemos concluir que las clases de color son acíclicas y obtenemos el resultado.  $\square$

La cota obtenida en el último teorema se alcanza de manera trivial por los ciclos dirigidos que no contienen flechas simétricas y por las digráficas completas (aquellas en las que cualquier pareja de vértices induce un ciclo de longitud 2). Además, dicha cota proporciona una mejora al resultado clásico de Bondy, siempre que  $g \geq 3$ .

## Referencias

- [1] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2.<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag London, Ltd, London: Springer Monographs in Mathematics, 2009. ISBN: 978-1-84800-997-4.
- [2] D. Bokal y col. «The circular chromatic number of a digraph». En: *J. Graph Theory* 46 (2004), págs. 227-240.
- [3] J.A. Bondy. «Disconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas». En: *J. London Math. Society* 14 (1976), págs. 277-282.
- [4] R.L. Brooks. «On coloring the nodes of a network». En: *Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society* 37.2 (1941), págs. 194-197.
- [5] X. Chen, X. Hu y W. Zang. «A min-max theorem on tournaments». En: *SIAM J. Comput.* 37 (2007), págs. 923-937.

- [6] Z. Chen, J. Ma y W. Zang. «Coloring digraphs with forbidden cycles». En: *J. Comb. Theory Ser. B* 115 (2015), págs. 210-223.
- [7] N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «New Bounds for the Dichromatic Number of a Digraph». En: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* vol. 21 no. 1, ICGT 2018 (2019), págs. 1-14. URL: <https://dmtcs.episciences.org/5505>.
- [8] A. Gibbons. *Algorithmic graph theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. ISBN: 0-521-24659-8.
- [9] J. L. Gross y J. Yellen. *Graph Theory and Its Applications*. 3.<sup>a</sup> ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019. ISBN: 978-1-4822-4948-4.
- [10] A. Harutyunyan y B. Mohar. «Gallai's Theorem for list coloring of digraphs». En: *SIAM J. Discrete Math.* 25 (2011), págs. 170-180.
- [11] A. Harutyunyan y B. Mohar. «Two results on the digraph chromatic number». En: *Discrete Math.* 312 (2012), págs. 1823-1826.
- [12] P. Keevash y col. «Digraph girth via chromatic number». En: *SIAM J. Discrete Math.* 27 (2013), págs. 693-696.
- [13] B. Mohar. «Circular colorings of edge-weighted graphs». En: *J. Graph Theory* 43 (2003), págs. 107-116.
- [14] V. Neumann-Lara. «The Dichromatic Number of a Digraph». En: *J. Comb. Theory Ser. B* 33 (1982), págs. 265-270.
- [15] Z. Tuza. «Graph coloring in linear time». En: *J. Comb. Theory Ser. B* 55 (1992), págs. 236-243.



# Capítulo 3

## Panciclismo en digráficas

Una digráfica  $D$  de orden  $n \geq 3$  es *pancíclica* si, para cada  $l \in [3, n]$ ,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$ ;  $D$  es *pancíclica en vértices* o *pancíclica local* si, para cada  $v \in V(D)$  y cada  $l \in [3, n]$ ,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  que pasa por  $v$ .

Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de digráficas ajenas por pares. La *suma generalizada* (s.g.) de  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , denotada por  $\oplus_{i=1}^k D_i$  o por  $D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_k$ , es la colección de todas las digráficas  $D$  tales que: (i)  $V(D) = \bigcup_{i=1}^k V(D_i)$ , (ii)  $D \langle V(D_i) \rangle \cong D_i$  para  $i \in [1, k]$ , y (iii) entre cada par de vértices en sumandos distintos de  $D$ , existe exactamente una flecha con una dirección arbitraria y fija. A una digráfica  $D$  en  $\oplus_{i=1}^k D_i$  la llamaremos una *suma generalizada* (s.g.) de  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , y diremos que una flecha  $f$  de  $D$  es *exterior* si  $f \in (A(D) \setminus \bigcup_{i=1}^k A(D_i))$ . Al conjunto de las flechas exteriores de  $D$  lo denotaremos por  $E_{\oplus}$ .

Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de digráficas hamiltonianas ajenas por pares, en este capítulo daremos condiciones suficientes (simples) para determinar si una digráfica  $D \in \oplus_{i=1}^k D_i$  es pancíclica o pancíclica en vértices.

El problema de determinar si una digráfica es pancíclica o pancíclica local ha sido estudiado por varios autores, por ejemplo en [1, 2, 3, 9, 11, 12, 13].

Un *k-hipertorneo*  $H$  de  $n$  vértices, donde  $2 \leq k \leq n$ , es un par  $H = (V_H, A_H)$ , donde  $V_H$  es el conjunto de vértices de  $H$  y  $A_H$  es un conjunto de  $k$ -tuplas de vértices tal que, para todo conjunto  $S \subset V_H$  con  $|S| = k$ ,  $A_H$  contiene exactamente una permutación de  $S$ . En [11], Moon demostró que todo torneo fuerte es pancíclico local; en [2], Bang-Jensen y Gutin afirman que este resultado es también válido para digráficas semicompletas fuertemente conexas; y en [10], Li *et al.* extendieron el resultado de Moon para  $k$ -hipertorneos de  $n$  vértices, donde  $3 \leq k \leq n - 2$ .

Algunos resultados sobre panciclismo dan condiciones de suficiencia en función

de los grados de los vértices. Por ejemplo, en [12], Randerath *et al.* demostraron que toda digráfica  $D$  de orden  $n \geq 3$  en la cual  $\min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} \geq \frac{n+1}{2}$  es pancíclica local. En [13], Thomassen probó que si  $D$  es una digráfica fuerte de orden  $n$  en la cual se satisface la desigualdad  $d(x) + d(y) \geq 2n$ , para cualesquiera dos vértices no adyacentes  $x$  y  $y$ , entonces  $D$  satisface una de las siguientes afirmaciones: (i)  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$ , para cada  $l \in [2, n]$ , o (ii)  $D$  es un torneo y, en este caso,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$ , para cada  $l \in [3, n]$ , o bien, (iii)  $n$  es par y  $D$  es isomorfa a una digráfica bipartita completa cuya partición consiste de dos conjuntos con  $n/2$  vértices. Continuando en esta dirección, en [1], Bang-Jensen y Guo demostraron que toda digráfica  $D$  que no contiene flechas simétricas, de orden  $n \geq 9$ , con grado mínimo mayor que o igual a  $n - 2$  y tal que, para cualquier pareja de vértices no adyacentes  $x$  y  $y$ , la desigualdad  $d_D^+(x) + d_D^-(y) \geq n - 3$  se satisface, es pancíclica local.

Una digráfica  $D$  es una digráfica  $k$ -partita completa o *multipartita* si existe una partición de su conjunto de vértices en  $k$  conjuntos independientes, a los que llamamos *partes*, y para cualesquiera dos vértices diferentes,  $x$  y  $y$ , en partes distintas, se satisface que  $(x, y) \in A(D)$  o  $(y, x) \in A(D)$ , o ambas. Una digráfica multipartita completa  $D$  es *ordinaria* si, para cada pareja  $\{X, Y\}$  de conjuntos de su partición, el conjunto de las flechas con ambos extremos en  $X \cup Y$  coincide con  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ , o  $Y \times X$ , o bien,  $(X \times Y) \cup (Y \times X)$ .

A una digráfica  $k$ -partita completa ordinaria  $D$  se le dice *digráfica zigzag*, si tiene al menos cinco vértices,  $k \geq 3$ , y los conjuntos de su partición,  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_k$ , satisfacen:  $A(V_2, V_1) = A(V_i, V_2) = A(V_1, V_i) = \emptyset$ , para cada  $i \in [3, k]$ , y  $|V_1| = |V_2| = |V_3| + |V_4| + \dots + |V_k|$ .

En [9], Gutin dio una caracterización de las digráficas  $k$ -partitas completas ordinarias que son pancíclicas y las que son pancíclicas en vértices:

**Teorema 3.1** (Gutin [9]). (1) *Una digráfica  $k$ -partita completa ordinaria ( $k \geq 3$ )  $D$  es pancíclica si, y sólo si:*

- (i)  *$D$  es fuertemente conexa,*
- (ii)  *$D$  tiene una factorización en ciclos (ajenos dos a dos),*
- (iii)  *$D$  no es isomorfa a una digráfica zigzag ni a un torneo 4-partito con al menos cinco vértices.*

(2) *Una digráfica pancíclica  $k$ -partita completa ordinaria ( $k \geq 3$ )  $D$  es pancíclica en vértices si, y sólo si, se satisface una de las afirmaciones siguientes:*

- (i)  $k > 3$  o
- (ii)  $k = 3$  y  $D$  contiene dos ciclos de longitud 2,  $Z_1$  y  $Z_2$ , tales que  $V(Z_1) \cup V(Z_2)$  contiene vértices en exactamente tres conjuntos de la partición.

Notemos que una suma generalizada de digráficas vacías, en la que todas las flechas exteriores entre dos sumandos tienen la misma dirección, es una digráfica multipartita ordinaria. En nuestros resultados trabajamos con una partición del conjunto de vértices de una digráfica, pero en lugar de pedir que cada parte sea un conjunto independiente, lo que pedimos es que la digráfica inducida por cada parte sea una digráfica hamiltoniana; además, permitimos que las flechas entre dos de las partes tengan cualquier dirección y prohibimos que haya flechas simétricas entre partes distintas. De esta manera, nuestro problema tiene algunas similitudes con el de Gutin pero son diferentes. Los resultados obtenidos en este capítulo fueron recopilados en dos artículos [5] y [6].

En [3], Bang-Jensen y Huang dieron una caracterización de las digráficas cuasi-transitivas que son pancíclicas y las que son pancíclicas locales.

En [14], Yeo probó que todo torneo  $k$ -partito regular con  $k \geq 5$  es pancíclico en vértices y, en [15], demostró que todo torneo 4-partito regular de orden al menos 13918 es pancíclico en vértices.

### 3.1. Preliminares

En esta sección daremos la notación que se usa a lo largo del capítulo y demostraremos algunos resultados que simplifican las pruebas de los siguientes apartados.

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de vértices o dos subdigráficas de una digráfica  $D$ , se define el conjunto de flechas  $(A, B)$ , como el conjunto de todas las flechas en  $D$  cuya cola está en  $A$  (o en el conjunto de vértices de  $A$ ) y cuya cabeza está en  $B$  (o en el conjunto de vértices de  $B$ ). Si  $A = \{a\}$  o  $B = \{b\}$ , usamos la notación  $(a, B)$  o  $(A, b)$ , respectivamente, en lugar de  $(A, B)$ . Cuando ocurra, para cada  $a$  en  $A$  y cada  $b$  en  $B$ , que  $(a, b) \in A(D)$ , se denota por  $A \rightarrow B$ , y si ocurre que  $A \rightarrow B$  y  $(B, A)$  es vacío, entonces se denota por  $A \mapsto B$ . Si  $A = \{a\}$  o  $B = \{b\}$ , usamos la notación  $a \rightarrow B$  o  $A \rightarrow b$ , respectivamente, en lugar de  $A \rightarrow B$  y  $a \mapsto B$  o  $A \mapsto b$ , respectivamente, en lugar de  $A \mapsto B$ . Así, cuando usemos la notación  $u \rightarrow v$ , significa que  $(u, v) \in A(D)$ .

**Observación 3.2** (C. M., Galeana-Sánchez y Goldfeder [4]). Es claro que una s.g. de dos digráficas ajenas está bien definida y es conmutativa. Sean  $D_1, D_2, D_3$  tres

digráficas ajenas por pares. Es fácil demostrar que los conjuntos  $(D_1 \oplus D_2) \oplus D_3$  definido como  $\bigcup_{D \in D_1 \oplus D_2} D \oplus D_3$  y  $D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3)$  definido como  $\bigcup_{D' \in D_2 \oplus D_3} D_1 \oplus D'$  satisfacen lo siguiente  $\bigoplus_{i=1}^3 D_i = (D_1 \oplus D_2) \oplus D_3 = D_1 \oplus (D_2 \oplus D_3)$ , por lo cual la suma generalizada de tres digráficas está bien definida y es asociativa. Por medio de un proceso inductivo se puede probar que la s.g. de  $k$  digráficas mutuamente ajenas está bien definida.

**Observación 3.3** (C.M., Galeana-Sánchez y Goldfeder [4]). Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de digráficas ajenas dos a dos,  $D \in \bigoplus_{i=1}^k D_i$  y  $J \subset [k]$ . La subdigráfica inducida en  $D$  por  $\bigcup_{j \in J} V(D_j)$ ,  $H = D \langle \bigcup_{j \in J} V(D_j) \rangle$ , pertenece a  $\bigoplus_{j \in J} D_j$ .

**Definición 3.4.** Sean  $D$  una digráfica y dos ciclos ajenos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , en  $D$ . Un par de flechas  $(x_s, y_r), (y_{r-1}, x_{s+1})$  con  $s \in [0, n-1], r \in [0, m-1]$  (donde los subíndices se toman módulo  $n$  y  $m$ , respectivamente), es un *par bueno de flechas* (figura 3.1).

Cuando exista un par bueno de flechas entre dos ciclos ajenos,  $C_1$  y  $C_2$ , diremos, simplemente, que existe un par bueno entre ellos.

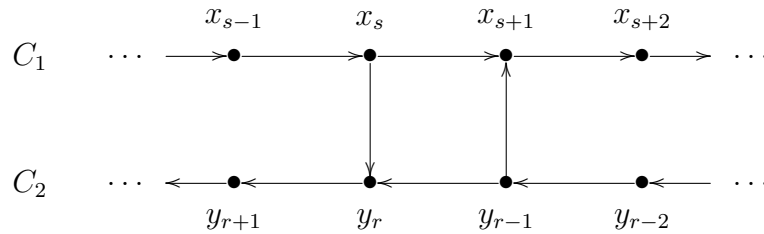


Figura 3.1: Un par bueno de flechas

Ahora, dada una colección de digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas, veremos qué propiedades tiene una digráfica fuertemente conexa en su s.g., con lo cual podremos encontrar ciclos de varias longitudes en tal suma.

**Proposición 3.5** (Galeana-Sánchez y Goldfeder [8]). Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos ciclos ajenos en una digráfica  $D$ . Si existe un par bueno con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ , entonces existe un ciclo en  $D$  cuyo conjunto de vértices es  $V(C_1) \cup V(C_2)$  (figura 3.2).

En lo que resta del capítulo, los índices en un ciclo  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  (resp. en  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ ) se toman módulo  $n$  (resp. módulo  $m$ ).

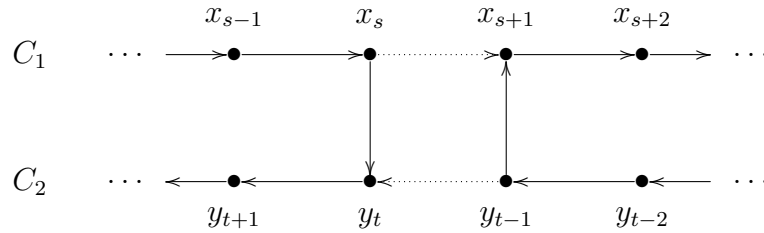


Figura 3.2: Un ciclo construido con un par bueno

## 3.2. Panciclismo local

En esta sección veremos que, si una suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas, no contiene pares buenos entre tales ciclos, entonces dicha s.g. es pancíclica local. Para lo cual, demostraremos que cuando no hay pares buenos es posible encontrar sucesiones de flechas exteriores que nos permiten formar ciclos de diversas longitudes. Para finalizar la sección, daremos una generalización de este resultado para una suma de  $k$  digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas.

**Definición 3.6.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  una suma generalizada. Para una flecha exterior  $x_s \rightarrow y_t$  (respectivamente,  $y_t \rightarrow x_s$ ), definimos la *clase paralela* de  $x_s \rightarrow y_t$  (resp.  $y_t \rightarrow x_s$ ), denotada por  $P_{x_s \rightarrow y_t}$  (resp.  $P_{y_t \rightarrow x_s}$ ), como sigue:  $P_{x_s \rightarrow y_t} = \{(x_{s+i}, y_{t-i}) \mid 0 \leq i \leq l-1\}$  (resp.  $P_{y_t \rightarrow x_s} = \{(y_{t+i}, x_{s-i}) \mid 0 \leq i \leq l-1\}$ ), donde  $l = \text{mcm}(n, m)$ ; y diremos que dos flechas exteriores  $a_1, a_2$  son *paralelas* si existe una flecha exterior  $z \rightarrow w$  tal que  $\{a_1, a_2\} \subset P_{z \rightarrow w}$ .

**Observación 3.7.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y sea  $D \in D_1 \oplus D_2$  una suma generalizada. Si  $D$  no contiene pares buenos entre  $C_1$  y  $C_2$ , entonces para cada flecha exterior  $x_s \rightarrow y_t$  (resp.  $y_t \rightarrow x_s$ )<sup>1</sup>, con  $x_s \in V(C_1)$  y  $y_t \in V(C_2)$ , la clase paralela  $P_{x_s \rightarrow y_t}$  (resp.  $P_{y_t \rightarrow x_s}$ ) existe y está contenida en  $A(D)$ .

*Demostración.* Si  $x_s \rightarrow y_t$ , construimos una sucesión de flechas exteriores de la siguiente manera: (i) Como  $(x_s, y_t) \in A(D)$ , los vértices  $x_{s+1}$  y  $y_{t-1}$  son adyacentes en

<sup>1</sup>Recordemos que, por definición, existe exactamente una flecha entre  $x_s$  y  $y_t$ . Así, no puede ocurrir simultáneamente que  $x_s \rightarrow y_t$  y  $y_t \rightarrow x_s$ .

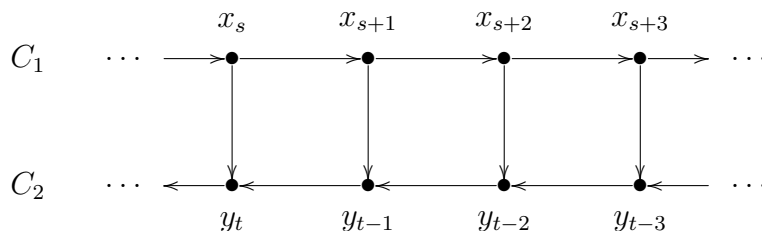


Figura 3.3: La clase paralela de  $(x_s, y_t)$

$D$  y  $D$  no contiene pares buenos entre  $C_1$  y  $C_2$ , se sigue que  $(x_{s+1}, y_{t-1}) \in A(D)$ . (ii) Supongamos que las flechas  $(x_s, y_t), (x_{s+1}, y_{t-1}), \dots, (x_{s+i}, y_{t-i})$  en  $A(D)$  ya fueron obtenidas. (iii) Ahora, como  $D$  no contiene pares buenos, tenemos que  $(x_{s+(i+1)}, y_{t-(i+1)}) \in A(D)$ . (iv) La sucesión se termina la primera vez que  $(x_{s+k}, y_{t-k}) = (x_s, y_t)$ , es decir, cuando  $k = \text{mcm}(n, m)$ . Así,  $P_{x_s \rightarrow y_t} \subset A(D)$ .

Si  $y_t \rightarrow x_s$ , construimos una sucesión de flechas exteriores de la siguiente manera: (i) Como  $(y_t, x_s) \in A(D)$ , los vértices  $y_{t+1}$  y  $x_{s-1}$  son adyacentes en  $D$  y  $D$  no contiene pares buenos entre  $C_1$  y  $C_2$ , se sigue que  $(y_{t+1}, x_{s-1}) \in A(D)$ . (ii) Supongamos que las flechas  $(y_t, x_s), (y_{t+1}, x_{s-1}), \dots, (y_{t+i}, x_{s-i})$  en  $A(D)$  ya fueron obtenidas. (iii) Ahora, como  $D$  no contiene pares buenos, tenemos que  $(y_{t+(i+1)}, x_{s-(i+1)}) \in A(D)$ . (iv) La sucesión se termina la primera vez que  $(y_{t+k}, x_{s-k}) = (y_t, x_s)$ , es decir, cuando  $k = \text{mcm}(n, m)$ . Así,  $P_{y_t \rightarrow x_s} \subset A(D)$ . □

**Observación 3.8.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y sea  $D$  una digráfica sin pares buenos entre  $C_1$  y  $C_2$  en  $D_1 \oplus D_2$ . Como consecuencia de la definición 3.6 y la observación 3.7, para toda flecha exterior  $(u, v) \in E_\oplus$ , se satisfacen las siguientes afirmaciones: (i)  $(u, v) \in P_{u \rightarrow v}$ ; (ii)  $|P_{u \rightarrow v}| = \text{mcm}(n, m)$ ; (iii) si  $P_{u \rightarrow v} \cap P_{w \rightarrow z} \neq \emptyset$ , entonces  $P_{u \rightarrow v} = P_{w \rightarrow z}$ ; y (iv) si  $u \in V(D_i)$  y  $v \in V(D_{3-i})$ , entonces  $P_{u \rightarrow v} \subset (D_i, D_{3-i})$ .

Observemos que, cuando  $n \neq m$ , puede haber dos o más flechas en  $P_{u \rightarrow v}$  que incidan en  $u$  (o en  $v$ ). Además, para cada vértice  $w \in V(C_1) \cup V(C_2)$  y cada  $(u, v) \in E_\oplus$ , existe al menos una flecha en la clase paralela  $P_{u \rightarrow v}$  que incide en  $w$ .

Los siguientes tres resultados nos ayudarán a demostrar el teorema 3.13, el cual asegura que, si  $D$  es una digráfica fuerte en la s.g. de dos digráficas hamiltonianas aje-

nas,  $D_1$  y  $D_2$ , y  $D$  no contiene pares buenos entre sus ciclos hamiltonianos, entonces  $D$  es pancíclica en vértices.

**Lema 3.9.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Si  $D$  es fuerte y no contiene pares buenos entre  $C_1$  y  $C_2$ , entonces existen índices  $r \in [0, m-1]$  y  $s \in [0, n-1]$  tales que  $(x_0, y_r, y_{r+1}, x_0)$  y  $(y_0, x_s, x_{s+1}, y_0)$  son 3-ciclos.*

*Demostración.* Dado que  $D$  es fuerte, tanto  $(D_1, D_2)$  como  $(D_2, D_1)$ , son no vacíos. Sean  $(u_0, v_0) \in (D_1, D_2)$  y  $(z_0, w_0) \in (D_2, D_1)$ . Como  $D$  no contiene pares buenos, la observación 3.7 asegura que  $P_{u_0 \rightarrow v_0} \subset A(D)$  y  $P_{z_0 \rightarrow w_0} \subset A(D)$ . Además, para cada  $w \in V(D)$  y cada clase paralela  $P_{u \rightarrow v}$ , existe una flecha  $(u', v') \in P_{u \rightarrow v}$  que incide en  $w$ . En particular, esto se satisface para el vértice  $x_0$ , y las clases paralelas  $P_{u_0 \rightarrow v_0}$  y  $P_{z_0 \rightarrow w_0}$ . Así, existen flechas  $(u', v') \in P_{u_0 \rightarrow v_0}$  y  $(z', w') \in P_{z_0 \rightarrow w_0}$ , que inciden en  $x_0$ . Por la observación 3.8 (iv), se tiene que  $(u', v') \in (D_1, D_2)$  y  $(z', w') \in (D_2, D_1)$  ya que  $(u_0, v_0) \in (D_1, D_2)$  y  $(z_0, w_0) \in (D_2, D_1)$ . Entonces  $(u', v') = (x_0, y_a)$  y  $(z', w') = (y_b, x_0)$  para algunos  $\{a, b\} \subset [0, m-1]$ .

De esta manera, el conjunto  $\{j \in [1, m-1] \mid (y_{a+j}, x_0) \in A(D)\}$  es no vacío (pues  $(y_b, x_0) \in A(D)$ ). Sea  $t = \min\{j \in [1, m-1] \mid (y_{a+j}, x_0) \in A(D)\}$ , de donde  $(y_{a+t}, x_0) \in A(D)$  y  $(y_{a+t-1}, x_0) \notin A(D)$ , puesto que  $x_0$  y  $y_{a+t-1}$  son adyacentes en  $D$ , se sigue que  $(x_0, y_{a+t-1}) \in A(D)$  y, así,  $(x_0, y_{a+t-1}, y_{a+t}, x_0)$  es un 3-ciclo en  $D$ .

De manera similar, se puede demostrar la existencia del otro 3-ciclo.  $\square$

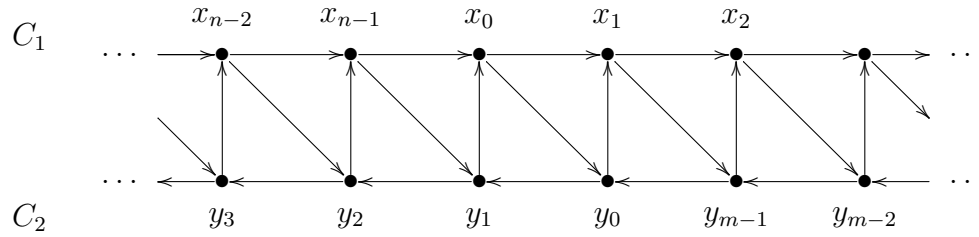
**Proposición 3.10.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Si  $D$  es fuerte y no contiene pares buenos entre  $C_1$  y  $C_2$ , entonces, para cada  $v \in V(G)$  y cada  $t \in [3, 2m_1]$ , existe un ciclo de longitud  $t$  que pasa por  $v$ , donde  $m_1 = \min\{n, m\}$ .*

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $n \geq m$  y sea  $l = \text{mcm}(n, m)$ . Primero mostraremos la existencia de los ciclos de longitud impar y después la de los ciclos de longitud par.

Por el lema 3.9, existe un índice  $j \in [0, m-1]$  tal que  $(x_0, y_j, y_{j+1}, x_0)$  es un 3-ciclo. Supongamos s.p.g. que  $j = 0$ , así  $(x_0, y_0, y_1, x_0)$  es un 3-ciclo en  $D$ .

Por la observación 3.7,  $P_{x_0 \rightarrow y_0} \subset A(D)$  y  $P_{y_1 \rightarrow x_0} \subset A(D)$  (figura 3.4).

*Afirmación 3.11.* Para cada  $j \geq 0$ , la flecha  $(y_{-j}, x_{j+1})$  pertenece a  $P_{y_1 \rightarrow x_0}$ .

Figura 3.4: Clases paralelas de  $(x_0, y_0)$  y  $(y_1, x_0)$ 

*Demostración de la afirmación 3.11.* Por la definición 3.6,  $P_{y_1 \rightarrow x_0} = \{(y_{1+i}, x_{-i}) \mid 0 \leq i \leq l-1\}$ .

Caso 1:  $j \leq l-1$ . Tomemos  $i = l-1-j$ . Como  $1 \leq 1+j \leq l$ , se tiene que  $0 \leq i = l-1-j \leq l-1$ . Por lo cual,  $(y_{1+i}, x_{-i}) = (y_{1+(l-1-j)}, x_{-(l-1-j)}) = (y_{-j}, x_{1+j})$  es una flecha en  $P_{y_1 \rightarrow x_0}$ .

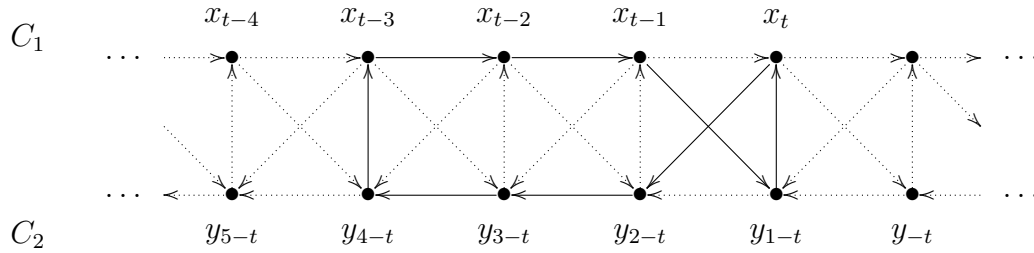
Caso 2:  $j \geq l$ . Por el algoritmo de la división de Euclides, existen enteros  $q$  y  $r'$ ,  $q' \geq 0$  y  $r' \in [0, l-1]$ , tales que  $j = q'l + r'$ . Entonces  $(y_{-j}, x_{j+1}) = (y_{-(q'l+r')}, x_{q'l+r'+1}) = (y_{-r'}, x_{r'+1})$ , pues  $l = \text{mcm}(n, m)$ . Dado que  $0 \leq r' \leq l-1$  se sigue que  $(y_{-r'}, x_{r'+1}) \in P_{y_1 \rightarrow x_0}$ , por el caso 1. ■

Para cada  $t \in [0, n-1]$  y cada  $h \in [0, m-2]$ , consideremos el ciclo  $\alpha_h^t = (x_t, y_{-t}) \cup (y_{-t}, C_2, y_{-t+h+1}) \cup (y_{-t+h+1}, x_{t-h}) \cup (x_{t-h}, C_1, x_t)$ .

Para cada  $h \in [0, m-2]$ ,  $D$  contiene al ciclo  $\alpha_h^t$  que tiene longitud  $l(\alpha_h^t) = 1 + (h+1) + 1 + h = 2h+3$ . Por lo tanto, para cada  $t \in [0, n-1]$  y cada longitud impar entre 3 y  $2(m-2)+3 = 2m-1$ , existe un ciclo de dicha longitud que pasa por  $x_t$  y  $y_{-t}$ . Recordemos que  $n \geq m$  y los índices se toman módulo  $n$  y módulo  $m$ , así, hemos demostrado que para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud impar en  $[3, 2m-1]$ , existe un ciclo de dicha longitud que pasa por  $v$ .

Caso 1:  $(x_0, y_2) \in A(D)$ . Entonces  $P_{x_0 \rightarrow y_2} \subset A(D)$ , donde  $P_{x_0 \rightarrow y_2} = \{(x_i, y_{2-i}) \mid 0 \leq i \leq l-1\}$ .

Para cada  $t \in [0, n-1]$  y cada  $h \in [0, m-2]$ , consideremos el ciclo  $\beta_h^t = (x_t, y_{2-t}) \cup (y_{2-t}, C_2, y_{2-t+h}) \cup (y_{2-t+h}, x_{-1+t-h}) \cup (x_{-1+t-h}, C_1, x_{t-1}) \cup (x_{t-1}, y_{-t+1}, x_t)$  (figura 3.5).

Figura 3.5: Un ciclo  $\beta_2^t$  en  $D$ 

Para cada  $h \in [0, m - 2]$ ,  $D$  contiene al ciclo  $\beta_h^t$  que tiene longitud  $l(\beta_h^t) = 1 + h + 1 + h + 2 = 2h + 4$ . Por lo tanto, para cada  $t \in [0, n - 1]$  y cada longitud par entre 4 y  $2(m - 2) + 4 = 2m$ , existe un ciclo de dicha longitud que pasa por  $x_t$  y  $y_{2-t}$ . Hemos demostrado que para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud par en  $[4, 2m]$  existe un ciclo en  $D$  de dicha longitud que pasa por  $v$ .

Caso 2:  $(y_2, x_0) \in A(D)$ . Entonces  $P_{y_2 \rightarrow x_0} \subset A(D)$ , donde  $P_{y_2 \rightarrow x_0} = \{(y_{2+i}, x_{-i}) \mid 0 \leq i \leq l - 1\}$ .

Para cada  $t \in [0, n - 1]$  y cada  $h \in [0, m - 3]$ , consideremos el ciclo  $\gamma_h^t = (x_t, y_{-t}) \cup (y_{-t}, C_2, y_{-t+h+2}) \cup (y_{-t+h+2}, x_{t-h}) \cup (x_{t-h}, C_1, x_t)$ .

Para cada  $h \in [0, m - 3]$ ,  $D$  contiene al ciclo  $\gamma_h^t$  que tiene longitud  $l(\gamma_h^t) = 1 + (h + 2) + 1 + h = 2h + 4$ . Por lo tanto, para cada  $t \in [0, n - 1]$  y cada longitud par entre 4 y  $2(m - 3) + 4 = 2m - 2$ , existe un ciclo de dicha longitud que pasa por  $x_t$  y  $y_{-t}$ . Hemos demostrado que para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud par en  $[4, 2m - 2]$  existe un ciclo en  $D$  de dicha longitud que pasa por  $v$ .

Finalmente, probaremos que para cada  $v \in V(D)$  existe un ciclo de longitud  $2m$  que pasa por  $v$ .

Para cada  $t \in [0, n - 1]$ , tomemos  $\varepsilon^t = (y_{-(t-1)}, x_t, y_{-t}, x_{t+1}, y_{-(t+1)}, x_{t+2}, \dots, y_{-(t+m-2)}, x_{t+m-1}, y_{-(t+m-1)})$ , este camino en  $D$  es un ciclo ya que  $y_{-(t+m-1)} = y_{-(t-1)}$ , más aún,  $l(\varepsilon^t) = 2m$ .

Por lo tanto, para cada  $t \in [0, n - 1]$ , existe un ciclo de longitud  $2m$  que pasa por  $x_t$  y  $y_{-(t-1)}$ . Entonces, para cada  $v \in V(D)$ , existe un ciclo de longitud  $2m$  que pasa por  $v$ .  $\square$

**Proposición 3.12.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Si  $D$  es fuertemente conexa y no contiene pares buenos, entonces, para cada vértice  $v \in V(G)$  y cada longitud  $h$  en  $[m_1 + 2, n + m]$ , existe un ciclo de longitud  $h$  que pasa por  $v$ , donde  $m_1 = \min\{n, m\}$ .

*Demostración.* Si  $n = m$ , entonces la proposición 3.10 asegura que, para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud  $h$  en  $[3, 2m] = [3, n + m]$ , existe un ciclo de longitud  $h$  que pasa por  $v$ . Por lo tanto, podemos suponer que  $n \neq m$ . Supongamos s.p.g. que  $n > m$  y sea  $l$  el mínimo común múltiplo de  $n$  y  $m$ ,  $l = \text{mcm}(n, m)$ .

Por el lema 3.9, existe un índice  $j \in [0, m - 1]$  tal que  $(x_0, y_j, y_{j+1}, x_0)$  es un 3-ciclo en  $D$ . Vamos a asumir s.p.g. que  $j = 0$ , es decir,  $(x_0, y_0, y_1, x_0)$  es un 3-ciclo en  $D$ .

Por la observación 3.7,  $P_{x_0 \rightarrow y_0} \subset A(D)$  y  $P_{y_1 \rightarrow x_0} \subset A(D)$ , donde  $P_{x_0 \rightarrow y_0} = \{(x_i, y_{-i}) \mid 0 \leq i \leq l - 1\}$  y  $P_{y_1 \rightarrow x_0} = \{(y_{1+i}, x_{-i}) \mid 0 \leq i \leq l - 1\}$  (figura 3.4) y, por la afirmación 3.11 en la prueba de la proposición 3.10, tenemos que, para cada  $t \in [0, n - 1]$ , la flecha  $y_{-t} \rightarrow x_{t+1}$  pertenece a  $P_{y_1 \rightarrow x_0}$ .

Para cada  $t \in [0, n - 1]$  y cada  $j \in [1, m - 1]$ , definimos la trayectoria  $P_j^t$  de la siguiente manera:  $P_j^t = (y_{-t}, x_{t+1}, y_{-(t+1)}, x_{t+2}, \dots, y_{-(t+j)}, x_{t+j+1}) \cup (x_{t+j+1}, C_1, x_{t+m})$ . Dicha trayectoria tiene longitud  $l(P_j^t) = (2j + 1) + (m - j - 1) = m + j$ .

Como  $n > m$  se sigue, por el algoritmo de la división, que existen enteros  $q \geq 1$  y  $r \in [0, m - 1]$  tales que  $n = qm + r$ .

Para cada  $t \in [0, n - 1]$ , consideremos las flechas de la forma  $x_{t+im} \rightarrow y_{-(t+im)}$  en  $P_{x_0 \rightarrow y_0}$ , donde  $1 \leq i \leq q$ . Dado que  $C_2$  tiene longitud  $m$  y los índices se toman módulo  $m$ , para cada  $i \in [1, q]$ ,  $y_{-(t+im)} = y_{-t}$ , más aún, como  $n = qm + r$  donde  $q \geq 1$  y  $r \in [0, m - 1]$ , se sigue que los vértices  $x_{t+m}, x_{t+2m}, \dots, x_{t+qm}$  son  $q$  vértices diferentes en  $C_1$  y, así, las flechas  $x_{t+m} \rightarrow y_{-t}, \dots, x_{t+qm} \rightarrow y_{-t}$  son  $q$  flechas diferentes en  $P_{x_0 \rightarrow y_0}$ .

Ahora, para cada  $t \in [0, n - 1]$ , cada  $i \in [1, q]$  y cada  $j \in [1, m - 1]$ , definimos el ciclo  $\beta_{i,j}^t$  como sigue:  $\beta_{i,j}^t = P_j^t \cup (x_{t+m}, C_1, x_{t+im}) \cup (x_{t+im}, y_{-t})$ . Dicho ciclo tiene longitud  $l(\beta_{i,j}^t) = (j + m) + (im - m) + 1 = im + j + 1$  y pasa por los vértices  $y_{-t}$  y  $x_{t+1}$ . Notemos que, como  $n > m$  y  $0 \leq t \leq n - 1$ , se tiene que para cada  $v \in V(D)$  y cada  $h \in [m + 2, (q + 1)m] = [m + 2, n - r + m]$ , existe un ciclo de longitud  $h$  que pasa por  $v$ .

Finalmente, para cada  $t \in [0, n - 1]$  y cada  $j \in [1, m - 1]$ , definimos el ciclo  $\gamma_j^t$  de la siguiente manera:  $\gamma_j^t = P_j^t \cup (x_{t+m}, C_1, x_t) \cup (x_t, y_{-t})$  cuya longitud es

$l(\gamma_j^t) = (m + j) + (n - m) + 1 = n + j + 1$  y pasa por los vértices  $y_{-t}$  y  $x_{t+1}$ . Como  $n > m$ ,  $0 \leq t \leq n - 1$  y los índices se toman módulo  $m$  y  $n$ , respectivamente, se tiene que para cada  $v \in V(D)$  y cada  $h \in [n + 2, n + m]$  existe un ciclo de longitud  $h$  que pasa por  $v$ , lo cual concluye la prueba.  $\square$

Como consecuencia directa de las proposiciones 3.10 y 3.12 tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.13.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Si  $D$  es fuertemente conexa y no contiene pares buenos, entonces  $D$  es pancíclica local.*

Como consecuencia de la proposición 3.5 y el teorema 3.13, obtenemos el siguiente resultado de [7]:

**Corolario 3.14.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Si  $D$  es fuertemente conexa, entonces  $D$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos ciclos hamiltonianos en  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente. Si existe un par bueno de flechas entre ellos, entonces  $D$  es hamiltoniana, por la proposición 3.5. Si, por el contrario, no existen pares buenos de flechas entre  $C_1$  y  $C_2$ , entonces  $D$  es pancíclica local, por el teorema 3.13. En particular,  $D$  es hamiltoniana.  $\square$

En la sección 3.2.1, extenderemos el teorema 3.13 para una digráfica fuerte  $D$  en la s.g. de  $k$  digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas. Para ello probaremos el lema 3.15, después definiremos un ciclo antidirigido y veremos que un par bueno es un 4-ciclo antidirigido con algunas propiedades.

**Lema 3.15.** *Sean  $D_1, D_2, D_3$  tres digráficas mutuamente ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1, C_2, C_3$ , respectivamente, y  $D \in \bigoplus_{i=1}^3 D_i$ . Si existe una sucesión  $\{i_j\}_{j=1}^3$  tal que  $D_{i_1} \mapsto D_{i_2}$ ,  $D_{i_2} \mapsto D_{i_3}$  y  $D_{i_3} \mapsto D_{i_1}$  en  $D$ , entonces  $D$  es pancíclica local.*

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $D_1 \mapsto D_2$ ,  $D_2 \mapsto D_3$  y  $D_3 \mapsto D_1$  en  $D$ .

Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ ,  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  y  $C_3 = (w_0, w_1, \dots, w_{t-1}, w_0)$  unos ciclos hamiltonianos en  $D_1, D_2$  y  $D_3$ , respectivamente.

Dado que  $D_1 \mapsto D_2$ ,  $D_2 \mapsto D_3$  y  $D_3 \mapsto D_1$  en  $D$ , tenemos que, para cada  $x \in V(C_1)$ , cada  $y \in V(C_2)$  y cada  $w \in V(C_3)$  se satisface que  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow w$  y  $w \rightarrow x$ .

Para cada  $i \in [0, n-1]$ , cada  $j \in [0, m-1]$ , cada  $h \in [0, t-1]$  y cada  $g \in [0, t-1]$ , consideremos el ciclo  $\alpha(i, j, h, g) = (x_i, y_j, w_h) \cup (w_h, C_3, w_{h+g}) \cup (w_{h+g}, x_i)$ . Dicho ciclo tiene longitud  $l(\alpha(i, j, h, g)) = 2 + g + 1 = g + 3$  y pasa por  $x_i, y_j$  y  $w_h$ . Entonces, para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud  $l$  en  $[3, t+2]$ , existe un ciclo de longitud  $l$  que pasa por  $v$ .

Para cada  $i \in [0, n-1]$ , cada  $j \in [0, m-1]$  y cada  $g' \in [0, m-1]$ , consideremos el ciclo  $\beta(i, j, g') = (x_i, y_j) \cup (y_j, C_2, y_{j+g'}) \cup (y_{j+g'}, w_0) \cup (w_0, C_3, w_{t-1}) \cup (w_{t-1}, x_i)$ ;  $\beta(i, j, g')$  tiene longitud  $l(\beta(i, j, g')) = 1 + g' + 1 + (t-1) + 1 = g' + t + 2$  y pasa por  $x_i, y_j$  y por cada  $w \in V(C_3)$ . Entonces, para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud  $l$  en  $[t+2, m+t+1]$ , existe un ciclo de longitud  $l$  que pasa por  $v$ .

Para cada  $i \in [0, n-1]$  y cada  $g'' \in [0, n-1]$ , consideremos el ciclo  $\gamma(i, g'') = (x_i, C_1, x_{i+g''}) \cup (x_{i+g''}, y_0) \cup (y_0, C_2, y_{m-1}) \cup (y_{m-1}, w_0) \cup (w_0, C_3, w_{t-1}) \cup (w_{t-1}, x_i)$ ; dicho ciclo tiene longitud  $l(\gamma(i, g'')) = g'' + 1 + (m-1) + 1 + (t-1) + 1 = g'' + m + t + 1$  y pasa por  $x_i$ , por cada  $y \in V(C_2)$  y por cada  $w \in V(C_3)$ . Entonces, para cada  $v \in V(D)$  y cada longitud  $l$  en  $[m+t+1, n+m+t]$ , existe un ciclo de longitud  $l$  que pasa por  $v$ .

Por lo tanto,  $D$  es pancíclica local.  $\square$

**Definición 3.16.** Sea  $D$  una digráfica. Una sucesión de vértices  $\mathcal{C} = v_0 v_1 \cdots v_{t-1} v_0$  es un  $t$ -ciclo antidirigido si  $v_i \neq v_j$  para cada  $i \neq j$ ,  $t \geq 4$  es par y, para cada  $i \equiv 0$  (mód 2),  $\{(v_i, v_{i+1}), (v_i, v_{i-1})\} \subset A(D)$  o  $\{(v_{i+1}, v_i), (v_{i-1}, v_i)\} \subset A(D)$ .

Podemos suponer que cualquier ciclo antidirigido comienza con una flecha en la dirección correcta, es decir,  $v_0 \rightarrow v_1$ , de otro modo, podemos volver a etiquetar los subíndices del ciclo.

De las definiciones de par bueno y ciclo antidirigido, tenemos la siguiente observación:

**Observación 3.17.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas,  $\alpha_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_0)$  y  $\alpha_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{q-1}, v_0)$  dos ciclos en  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente, y sea  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Si  $u_s \rightarrow v_r$  y  $v_{r-1} \rightarrow u_{s+1}$  forman un par bueno de flechas, entonces  $\mathcal{C} = u_s v_r v_{r-1} u_{s+1} u_s$  es un 4-ciclo antidirigido cuyas flechas pertenecen, alternativamente, a  $E_\oplus$  y  $A(\alpha_1) \cup A(\alpha_2)$ , a saber  $\{(u_s, v_r), (v_{r-1}, u_{s+1})\} \subset E_\oplus$ ,  $(u_s, u_{s+1}) \in A(\alpha_1)$  y  $(v_{r-1}, v_r) \in A(\alpha_2)$ .

**Definición 3.18.** Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de digráficas ajenas por pares, y  $D \in \oplus_{i=1}^k D_i$ . A un 4-ciclo antidirigido  $\mathcal{C} = v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$  en  $D$  lo llamamos *ciclo bueno*

si al menos una de las condiciones siguientes se satisface:  $\{(v_0, v_1), (v_2, v_3)\} \subset E_{\oplus}$  o  $\{(v_2, v_1), (v_0, v_3)\} \subset E_{\oplus}$ .

### 3.2.1. Resultados principales sobre panciclismo local

En este apartado generalizamos el teorema 3.13 para una digráfica fuertemente conexa  $D$  en la suma generalizada de  $k$  digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas.

**Teorema 3.19.** *Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de  $k \geq 2$  digráficas ajenas por pares con ciclos hamiltonianos,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y  $D \in \bigoplus_{i=1}^k D_i$ . Si  $D$  es fuertemente conexa y no contiene ciclos buenos, entonces  $D$  es pancíclica local.*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $k$ .

Supongamos que  $k = 2$ . Como  $D$  no contiene ciclos buenos, se tiene que  $D$  no contiene pares buenos con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ . De otro modo, por la observación 3.17,  $D$  contendría un ciclo bueno. Entonces  $D$  satisface las hipótesis del teorema 3.13 y, así,  $D$  es pancíclica local.

Ahora, supongamos que la afirmación del teorema se satisface para cada  $k' \in [2, k - 1]$ . Vamos a demostrar que la afirmación se satisface para  $k$ .

Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de  $k$  digráfica ajenas por pares con ciclos hamiltonianos,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y consideremos una digráfica fuerte sin ciclos buenos,  $D$ , en  $\bigoplus_{i=1}^k D_i$ .

Caso 1: Existen dos índices diferentes  $\{j, j'\} \subset [1, k]$  tales que  $(D_j, D_{j'}) \neq \emptyset$  y  $(D_{j'}, D_j) \neq \emptyset$  (por lo tanto,  $D_0 = D\langle V(D_j) \cup V(D_{j'}) \rangle$  es fuerte).

Como  $D_0$  es una subdigráfica de  $D$ , no contiene ciclos buenos. Por lo cual,  $D_0$  satisface la base de inducción y, así,  $D_0$  es pancíclica local. En particular,  $D_0$  contiene un ciclo hamiltoniano, digamos  $C_0$ .

Sea  $J = [0, k] \setminus \{j, j'\}$ . Observemos que  $\{D_i\}_{i \in J}$  es una colección de  $k - 1$  digráficas hamiltonianas ajenas por pares. Además,  $D \in \bigoplus_{i \in J} D_i$  (ya que  $D$  satisface la definición de una s.g.).

Entonces, por la hipótesis de inducción, se tiene que  $D$  es pancíclica local.

Caso 2: Para cada par de índices diferentes  $\{i, j\} \subset [1, k]$ , se tiene que  $D_i \mapsto D_j$ , o bien,  $D_j \mapsto D_i$  en  $D$ .

Definimos una digráfica  $H$  con el conjunto de vértices  $V(H) = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$  y  $(D_i, D_j) \in A(H)$  si y sólo si  $D_i \mapsto D_j$  en  $D$ . Claramente  $H$  es un

torneo fuerte y, así, para cada  $t \in [3, k]$ ,  $H$  contiene un ciclo  $\alpha_t$  de longitud  $t$  (Moon [11]).

Si  $k = 3$ , entonces  $\alpha_t$  es un ciclo hamiltoniano en  $H$ . Por lo tanto,  $D$  satisface las hipótesis del lema 3.15 y, así,  $D$  es pancíclica local.

Si  $k \geq 4$ , entonces  $H$  contiene un ciclo que no es hamiltoniano. Sea  $\alpha_t = (D_{i_0}, D_{i_1}, \dots, D_{i_{t-1}}, D_{i_0})$  un ciclo en  $H$  de longitud  $t$ , para algún  $t \in [3, k-1]$ .

Recordemos que  $D_i$  contiene un ciclo hamiltoniano  $C_i$ , para cada  $i \in [1, k]$ . Para cada  $j \in [0, t-1]$ , tomemos una trayectoria hamiltoniana en  $D_{i_j}$ , a saber  $T_{i_j}$ . Llamemos  $u_j$  al vértice inicial y  $v_j$  al vértice final de  $T_{i_j}$ . Como  $T_{i_j} \mapsto T_{i_{j+1}}$  para cada  $j \in [0, t-1]$ , tenemos que  $(v_j, u_{j+1}) \in A(D)$  para cada  $j \in [0, t-1]$ , donde los índices se toman módulo  $t$ .

Por lo tanto,  $\gamma = T_{i_0} \cup (v_0, u_1) \cup T_{i_1} \cup (v_1, u_2) \cup \dots \cup T_{i_{t-1}} \cup (v_{t-1}, u_0)$  es un ciclo con  $V(\gamma) = \bigcup_{j=0}^{t-1} V(D_{i_j})$ .

Sean  $D_0 = D \langle \bigcup_{j=0}^{t-1} V(D_{i_j}) \rangle$  y  $J = [0, k] \setminus \{i_0, i_1, \dots, i_{t-1}\}$ , entonces  $D \in \bigoplus_{i \in J} D_i$  (ya que  $\bigoplus$  es asociativa y  $D$  satisface la definición de una s.g.).

Observemos que  $\{D_i\}_{i \in J}$  es una colección de  $|J| = k + 1 - t$  digráficas hamiltonianas ajenas por pares, donde  $2 \leq k + 1 - t < k$ , y  $D \in \bigoplus_{i \in J} D_i$  es fuerte y no contiene ciclos buenos, pues el conjunto de flechas exteriores de  $D$  como s.g. de  $\{D_i\}_{i \in J}$  está contenido en el conjunto de flechas exteriores de  $D$  como s.g. de  $D_1, D_2, \dots, D_k$ . Por lo tanto, por la hipótesis de inducción,  $D$  es pancíclica local. □

En esta sección se consideraron sumas generalizadas de digráficas hamiltonianas que no contienen vértices singulares<sup>2</sup> ni pares buenos (o su generalización, ciclos buenos) y se obtuvieron condiciones fáciles de verificar para determinar si una s.g. es pancíclica local. En la siguiente sección consideraremos el caso en el que sí hay vértices singulares o pares buenos.

### 3.3. Panciclismo

En esta sección daremos una clasificación de las digráficas en la suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas,  $D_1$  y  $D_2$ , que resultan pancíclicas, pancíclicas locales

<sup>2</sup>La definición de vértice singular está en la sección 3.3

o que contienen ciclos de todas las longitudes posibles en el conjunto  $[3, |V(D_j)| + 1] \cup \{|V(D_1)| + |V(D_2)|\}$ , donde  $|V(D_j)| = \max\{|V(D_1)|, |V(D_2)|\}$ .

A continuación, dada una digráfica  $D$  en la suma de dos digráficas hamiltonianas ajenas, veremos que cuando  $D$  no contiene ciclos de una longitud dada, sus flechas exteriores cumplen algunos patrones.

**Lema 3.20.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Sea  $l$  un entero fijo en  $[3, n + 1]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ . Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  (figura 3.6) y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'}, x_{s'+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  (recordemos que los subíndices siempre se toman módulo  $n$  para las  $x_i$  y módulo  $m$  para las  $y_i$ ).*

*Demostración.* Primero veremos que si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $(x_{s-j(l-2)}, y_r) \in A(D)$  para cada  $j \geq 0$ . La demostración se hará por inducción sobre  $j$ .

Por hipótesis,  $(x_s, y_r) \in A(D)$ . Supongamos que  $(x_{s-j(l-2)}, y_r) \in A(D)$ , entonces  $(x_{s-(j+1)(l-2)}, y_r) \in A(D)$ . De otro modo,  $(y_r, x_{s-(j+1)(l-2)}) \in A(D)$  pues  $y_r$  y  $x_{s-(j+1)(l-2)}$  son adyacentes. Así, el ciclo  $(x_{s-(j+1)(l-2)}, C_1, x_{s-j(l-2)}) \cup (x_{s-j(l-2)}, y_r, x_{s-(j+1)(l-2)})$  está contenido en  $D$  y tiene longitud  $l$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $\{(x_{s-j(l-2)}, y_r) \mid j \geq 0\} \subset A(D)$ .

A continuación veremos que  $\{(x_{s-j(l-2)}, y_r) \mid j \geq 0\} = \{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\}$ .

Sea  $L_n = \frac{\text{mcm}(n, l-2)}{l-2}$  y consideremos una flecha  $(x_{s-j(l-2)}, y_r)$  para algún  $j \geq 0$ . Por el algoritmo de la división, existen dos enteros no negativos,  $p$  y  $q$ , tales que  $j = pL_n + q$ , donde  $0 \leq q < L_n$ . Sea  $i = L_n - q \geq 0$ , entonces  $s - j(l-2) = s - (pL_n + q)(l-2) \equiv s - q(l-2) \equiv s + (L_n - q)(l-2) = s + i(l-2)$  (mód  $n$ ) y, así,  $(x_{s-j(l-2)}, y_r) = (x_{s+i(l-2)}, y_r) \in \{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\}$ . Por lo tanto,  $\{(x_{s-j(l-2)}, y_r) \mid j \geq 0\} \subset \{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\}$ .

Ahora, si consideramos una flecha  $(x_{s+i'(l-2)}, y_r)$  para algún  $i' \geq 0$ , sabemos que existen enteros no negativos  $p'$  y  $q'$ , tales que  $i' = p'L_n + q'$ , donde  $0 \leq q' < L_n$ . Sea  $j' = L_n - q' \geq 0$ , entonces  $s + i'(l-2) = s + (p'L_n + q')(l-2) \equiv s + q'(l-2) \equiv s - (L_n - q')(l-2) = s - j'(l-2)$  (mód  $n$ ) y, así,  $(x_{s+i'(l-2)}, y_r) = (x_{s-j'(l-2)}, y_r) \in \{(x_{s-j(l-2)}, y_r) \mid j \geq 0\}$ . De donde,  $\{(x_{s-j(l-2)}, y_r) \mid j \geq 0\} \supset \{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\}$ . De ambas contenciones se sigue la igualdad deseada.

Para finalizar, veremos que si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $(y_{r'}, x_{s'+i(l-2)}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . La demostración se hará por inducción sobre  $i$ .

Por hipótesis,  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ . Supongamos que  $(y_{r'}, x_{s'+i(l-2)}) \in A(D)$ , entonces  $(x_{s'+(i+1)(l-2)}, y_{r'}) \in A(D)$ . De otro modo,  $(y_{r'}, x_{s'+(i+1)(l-2)}) \in A(D)$  pues

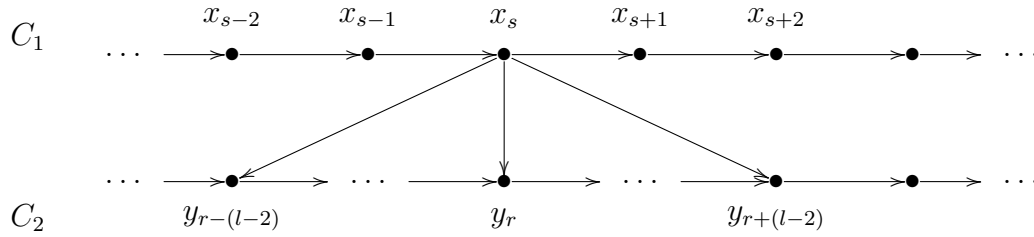


Figura 3.6: Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$

$y_{r'}$  y  $x_{s'+(i+1)(l-2)}$  son adyacentes. Entonces, el ciclo  $(x_{s'+i(l-2)}, C_1, x_{s'+(i+1)(l-2)}) \cup (x_{s'+(i+1)(l-2)}, y_{r'}, x_{s'+i(l-2)})$  está contenido en  $D$  y tiene longitud  $l$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $\{(y_{r'}, x_{s'+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .  $\square$

**Lema 3.21.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Sea  $l$  un entero fijo en  $[3, n+1]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ . Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid k \geq 0, i \geq 0\} \subset A(D)$  y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid k \geq 0, i \geq 0\} \subset A(D)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $(x_s, y_r) \in A(D)$ . Veremos, por inducción sobre  $k$ , que  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Si  $k = 0$ , entonces  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} = \{(x_{s+i(l-2)}, y_r) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ , por el lema 3.20.

Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , tenemos que  $(x_{s-(l-3)}, y_{r+1}) \in A(D)$ . De no ser así,  $(y_{r+1}, x_{s-(l-3)}) \in A(D)$ , por lo cual  $(x_{s-(l-3)}, C_1, x_s) \cup (x_s, y_r, y_{r+1}, x_{s-(l-3)})$  es un ciclo de longitud  $l$  en  $D$ , lo cual es imposible.

Del lema 3.20, se sigue que  $(x_{s-(l-3)+i(l-2)}, y_{r+1}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . En particular, cuando  $i = 1$ ,  $(x_{s-(l-3)+(l-2)}, y_{r+1}) = (x_{s+1}, y_{r+1})$ . Entonces, por el lema 3.20, tenemos que  $\{(x_{s+1+i(l-2)}, y_{r+1}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

Supongamos que  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ , entonces  $(x_{s+k}, y_{r+k}) \in A(D)$ . Además,  $(x_{s+k-(l-3)}, y_{r+k+1}) \in A(D)$  pues, de otro modo, se tiene que  $(y_{r+k+1}, x_{s+k-(l-3)}) \in A(D)$  y, de esta manera, el ciclo  $(x_{s+k-(l-3)}, C_1, x_{s+k}) \cup (x_{s+k}, y_{r+k}, y_{r+k+1}, x_{s+k-(l-3)})$  está contenido en  $D$  y tiene longitud  $l$ , lo cual es imposible.

Se sigue, del lema 3.20, que  $(x_{s+k-(l-3)+i(l-2)}, y_{r+k+1}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . En particular, cuando  $i = 1$ ,  $(x_{s+k-(l-3)+(l-2)}, y_{r+k+1}) = (x_{s+k+1}, y_{r+k+1})$ . Por el

lema 3.20, tenemos que  $\{(x_{s+k+1+i(l-2)}, y_{r+k+1}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ . Por lo tanto,  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Ahora supongamos que  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ . Para demostrar que  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ , primero veremos que  $\{(y_{r'-k}, x_{s'-k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ . Dicha demostración se hará por inducción sobre  $k$ .

Si  $k = 0$ , entonces  $\{(y_{r'-k}, x_{s'-k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'}, x_{s'+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ , por el lema 3.20.

Como  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , se sigue que  $(y_{r'-1}, x_{s'+(l-3)}) \in A(D)$ . De no ser así,  $(x_{s'+(l-3)}, y_{r'-1}) \in A(D)$  y, en consecuencia, el ciclo  $(x_{s'}, C_1, x_{s'+(l-3)}) \cup (x_{s'+(l-3)}, y_{r'-1}, y_{r'}, x_{s'})$  está contenido en  $D$  y tiene longitud  $l$ , una contradicción. Por el lema 3.20,  $(y_{r'-1}, x_{s'+(l-3)+i(l-2)}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . En particular, cuando  $i = \frac{\text{mcm}(n, l-2)}{l-2} - 1$ ,  $(y_{r'-1}, x_{s'+(l-3)+i(l-2)}) = (y_{r'-1}, x_{s'-1})$ . Del mismo lema se sigue que  $\{(y_{r'-1}, x_{s'-1+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

Supongamos ahora que  $\{(y_{r'-k}, x_{s'-k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ . En particular, para  $i = \frac{\text{mcm}(n, l-2)}{l-2} - 1 \geq 0$ , se tiene que  $(y_{r'-k}, x_{s'-k+i(l-2)}) = (y_{r'-k}, x_{s'-k-(l-2)}) \in A(D)$  y, de esta manera,  $(y_{r'-k-1}, x_{s'-k-(l-2)+(l-3)}) = (y_{r'-k-1}, x_{s'-k-1}) \in A(D)$ . De no ser así,  $(x_{s'-k-1}, y_{r'-k-1}) \in A(D)$ , lo cual implica que  $(x_{s'-k-(l-2)}, C_1, x_{s'-k-1}) \cup (x_{s'-k-1}, y_{r'-k-1}, y_{r'-k}, x_{s'-k-(l-2)})$  es un ciclo de longitud  $l$  en  $D$ , lo cual es imposible. Así,  $(y_{r'-k-1}, x_{s'-k-1}) = (y_{r'-(k+1)}, x_{s'-(k+1)}) \in A(D)$ . Por el lema 3.20,  $(y_{r'-(k+1)}, x_{s'-(k+1)+i(l-2)}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . Por lo tanto,  $\{(y_{r'-k}, x_{s'-k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Ahora demostraremos que para cada  $k \geq 0$  existe un entero  $k' \geq 0$  tal que  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'-k'}, x_{s'-k'+j(l-2)}) \mid j \geq 0\}$ .

Sea  $L = \text{mcm}(n, m)$ . Por el algoritmo de la división sabemos que existen dos enteros no negativos  $p$  y  $q$  tales que  $k = pL + q$ , donde  $0 \leq q < L$ . Tomemos  $k' = L - q > 0$  y consideremos los conjuntos de flechas  $F = \{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\}$  y  $F' = \{(y_{r'-k'}, x_{s'-k'+j(l-2)}) \mid j \geq 0\}$ .

*Afirmación 3.22.*  $F = F'$ .

*Demostración de la afirmación 3.22.* Sea  $(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \in F$  para algún  $i \geq 0$ . Como  $k = pL + q$ , se sigue que  $(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) = (y_{r'+(pL+q)}, x_{s'+(pL+q)+i(l-2)})$ . Observemos que  $r' + (pL+q) \equiv r' + q \equiv r' - L + q = r' - (L - q) = r' - k'$  (mód  $m$ ), ya que  $m$  divide a  $L$ , y  $s' + (pL+q) + i(l-2) \equiv s' + q \equiv s' - L + q = s' - (L - q) = s' - k'$  (mód  $n$ ) ya que  $n$  divide a  $L$ . Entonces,  $(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) = (y_{r'-k'}, x_{s'-k'+i(l-2)}) \in F'$ , por lo cual  $F \subset F'$

Sea  $(y_{r'-k'}, x_{s'-k'+j(l-2)}) \in F'$  para algún  $j \geq 0$ . Como  $k' = L - q$ , se sigue que  $(y_{r'-k'}, x_{s'-k'+j(l-2)}) = (y_{r'-(L-q)}, x_{s'-(L-q)+j(l-2)})$ . Observemos que  $r' - (L - q) \equiv r' + q \equiv r' + pL + q = r' + k$  (mód  $m$ ) pues  $m$  divide a  $L$  y  $s' - (L - q) + j(l - 2) \equiv s' + q \equiv s' + pL + q = s' + k$  (mód  $n$ ) pues  $n$  divide a  $L$ . Así,  $(y_{r'-k'}, x_{s'-k'+j(l-2)}) = (y_{r'+k}, x_{s'+k+j(l-2)}) \in F$ , en consecuencia  $F' \subset F$ . ■

Por lo tanto,  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ . □

**Lema 3.23.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Sea  $l$  un entero fijo en  $[3, n + 1]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ , y sea  $d = \text{mcd}(n, l - 2)$ . Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid k \geq 0, i \geq 0\} \subset A(D)$  y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid k \geq 0, i \geq 0\}$ . Más aún,  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} = \{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}$  y  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\}$  para cada  $k \geq 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(x_s, y_r) \in A(D)$ .

Por el lema 3.21, se tiene que  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Como  $d = \text{mcd}(n, l - 2)$  se sigue que  $l - 2 = hd$  para algún  $h \geq 1$  y, así, tenemos que  $(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) = (x_{s+k+ihd}, y_{r+k})$ , para cada  $i \geq 0$  y cada  $k \geq 0$ . Entonces  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} \subset \{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}$ , para cada  $k \geq 0$ . Dado un entero fijo  $k \geq 0$ , vamos a demostrar que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, a saber  $n' = \frac{\text{mcm}(n, l-2)}{l-2} = \frac{n(l-2)}{d(l-2)} = \frac{n}{d}$ .

Sea  $k \geq 0$  un entero fijo. Consideremos los conjuntos  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}$  y  $\{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}$ .

Como  $n' = \frac{n}{d}$ , se sigue que  $\{x_{s+k+i(l-2)} \mid i \geq 0\} = \{x_{s+k+i(l-2)} \mid i \in [0, n' - 1]\}$ , pues: (i)  $s + k, s + k + (l - 2), \dots, s + k + (n' - 1)(l - 2)$  son  $n'$  índices distintos módulo  $n$ ; (ii)  $s + k + n'(l - 2) \equiv s + k + \text{mcm}(n, l - 2) \equiv s + k$  (mód  $n$ ); y (iii) todos los índices mayores que  $s + k + n'(l - 2)$  son, también, equivalentes a alguno en el conjunto  $\{s + k, s + k + (l - 2), \dots, s + k + (n' - 1)(l - 2)\}$ . Es decir,  $|\{x_{s+k+i(l-2)} \mid i \geq 0\}| = n'$  y, así,  $|\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}| = n'$ . Además,  $\{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} = \{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \in [0, n' - 1]\}$  pues: (i)  $s + k, s + k + d, \dots, s + k + (n' - 1)d$  son  $n'$  índices distintos módulo  $n$ ; (ii)  $s + k + n'd = s + k + n \equiv s + k$  (mód  $n$ ); y (iii) todos los índices mayores que  $s + k + n'd$  también son equivalentes a alguno en el conjunto  $\{s + k, s + k + d, \dots, s + k + (n' - 1)d\}$ . Entonces,  $|\{x_{s+k+id} \mid i \geq 0\}| = n'$  y, así,  $|\{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}| = n'$ . Lo cual implica que  $\{(x_{s+k+i(l-2)}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} = \{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\}$  y  $\{(x_{s+k+id}, y_{r+k}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Ahora supongamos que  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ . Por el lema 3.21, tenemos que  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Recordemos que  $l - 2 = hd$  para algún  $h \geq 1$ . Entonces  $(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) = (y_{r'+k}, x_{s'+k+ihd})$ , para cada  $i \geq 0$  y cada  $k \geq 0$ . De aquí se sigue que  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} \subset \{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\}$ , para cada  $k \geq 0$ . Dado un entero fijo  $k \geq 0$ , veremos que ambos conjuntos tienen  $n'$  elementos.

Sea  $k \geq 0$  un entero fijo. Consideremos los conjuntos  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\}$  y  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\}$ .

Dado que  $n' = \frac{n}{d}$ , se sigue que  $\{x_{s'+k+i(l-2)} \mid i \geq 0\} = \{x_{s'+k+i(l-2)} \mid i \in [0, n' - 1]\}$ , pues: (i)  $s' + k, s' + k + (l - 2), \dots, s' + k + (n' - 1)(l - 2)$  son  $n'$  índices distintos módulo  $n$ ; (ii)  $s' + k + n'(l - 2) \equiv s' + k + \text{mcm}(n, l - 2) \equiv s' + k \pmod{n}$ ; y (iii) todos los índices mayores que  $s' + k + n'(l - 2)$  son equivalentes a algún índice en el conjunto  $\{s' + k, s' + k + (l - 2), \dots, s' + k + (n' - 1)(l - 2)\}$ . Es decir,  $|\{x_{s'+k+i(l-2)} \mid i \geq 0\}| = n'$  y, de esta manera,  $|\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\}| = n'$ . Más aún,  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid 0 \leq i \leq n' - 1\}$  pues: (i)  $s' + k, s' + k + d, \dots, s' + k + (n' - 1)d$  son  $n'$  índices distintos módulo  $n$ ; (ii)  $s' + k + n'd = s' + k + n \equiv s' + k \pmod{n}$ ; y (iii) todos los índices mayores que  $s' + k + n'd$  son, también, equivalentes a algún índice en  $\{s' + k, s' + k + d, \dots, s' + k + (n' - 1)d\}$ . Entonces,  $|\{x_{s'+k+id} \mid i \geq 0\}| = n'$  y, así,  $|\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\}| = n'$ . Por lo tanto,  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\}$  y  $\{(y_{r'+k}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .  $\square$

Notemos que, en los lemas 3.20, 3.21 y 3.23, se pueden intercambiar los roles de  $C_1$  y  $C_2$  pidiendo que  $l$  sea un entero fijo en  $[3, m + 1]$ , con lo cual obtenemos lo siguiente:

**Lema 3.24.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D \in D_1 \oplus D_2$ . Sea  $l$  un entero fijo en  $[3, m + 1]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ , y sea  $d = \text{mcd}(m, l - 2)$ . Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+k}, y_{r+k+id}) \mid k \geq 0, i \geq 0\} \subset A(D)$  y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'+k+id}, x_{s'+k}) \mid k \geq 0, i \geq 0\} \subset A(D)$ . Más aún,  $\{(x_{s+k}, y_{r+k+i(l-2)}) \mid i \geq 0\} = \{(x_{s+k}, y_{r+k+id}) \mid i \geq 0\}$  y  $\{(y_{r'+k+i(l-2)}, x_{s'+k}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'+k+id}, x_{s'+k+id}) \mid i \geq 0\}$  para cada  $k \geq 0$ .*

En los primeros lemas de esta sección vimos que si una digráfica  $D$  en la suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas,  $D_1$  y  $D_2$ , no contiene ciclos de longitud  $l$

para un  $l \in [3, |V(D_i)|]$ , entonces dada una flecha exterior de  $D$ , podemos encontrar una sucesión de flechas exteriores en  $D$ . Ahora veremos cómo son las sucesiones de flechas exteriores, si la longitud prohibida  $l$  está en el conjunto  $[|V(D_i)| + 2, |V(D_i)| + |V(D_{3-i})|]$ .

**Lema 3.25.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ . Sea  $l$  un entero fijo en  $[n + 2, n + m]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ . Tomemos  $h = l - (n + 1)$ , si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+i}, y_{r+ih}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

*Demostración.* Como  $l \in [n + 2, n + m]$ , se sigue que  $h = l - (n + 1) \in [1, m - 1]$ .

Supongamos que  $(x_s, y_r) \in A(D)$ . Veremos, por inducción sobre  $i$ , que  $(x_{s+i}, y_{r+ih}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ .

Supongamos que  $(x_{s+i}, y_{r+ih}) \in A(D)$ , entonces  $(x_{s+(i+1)}, y_{r+(i+1)h}) \in A(D)$ . De otro modo se tiene que  $(y_{r+(i+1)h}, x_{s+(i+1)}) \in A(D)$  pues dichos vértices son adyacentes. Entonces  $(x_{s+(i+1)}, C_1, x_{s+i}) \cup (x_{s+i}, y_{r+ih}) \cup (y_{r+ih}, C_2, y_{r+(i+1)h}) \cup (y_{r+(i+1)h}, x_{s+(i+1)})$  es un ciclo en  $D$  cuya longitud es  $(n - 1) + 1 + h + 1 = l$ , lo cual es imposible. Así,  $\{(x_{s+i}, y_{r+ih}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

Supongamos ahora que  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ . Probaremos que  $(y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . Para ellos, veremos primero que  $(y_{r'-ih}, x_{s'-i}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . La demostración se hará por inducción sobre  $i$ .

Supongamos que  $(y_{r'-ih}, x_{s'-i}) \in A(D)$ , entonces  $(y_{r'-(i+1)h}, x_{s'-(i+1)}) \in A(D)$ . De no ser así,  $(x_{s'-(i+1)}, y_{r'-(i+1)h}) \in A(D)$  pues  $x_{s'-(i+1)}$  y  $y_{r'-(i+1)h}$  son adyacentes. De donde  $(x_{s'-i}, C_1, x_{s'-(i+1)}) \cup (x_{s'-(i+1)}, y_{r'+(i+1)h}) \cup (y_{r'-(i+1)h}, C_2, y_{r'-ih}) \cup (y_{r'-ih}, x_{s'-i})$  es un ciclo en  $D$  cuya longitud es  $(n - 1) + 1 + h + 1 = l$ , lo cual es imposible. Así,  $\{(y_{r'-ih}, x_{s'-i}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

Vamos a demostrar que  $\{(y_{r'-jh}, x_{s'-j}) \mid j \geq 0\} = \{(y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \mid i \geq 0\}$ .

Sea  $M = \text{mcm}\left(n, \frac{\text{mcm}(m, h)}{h}\right)$ . Tomemos una flecha de la forma  $(y_{r'-jh}, x_{s'-j})$ , para algún  $j \geq 0$ . Por el algoritmo de la división, existen dos enteros no negativos  $p$  y  $q$ , tales que  $j = pM + q$ , donde  $0 \leq q < M$ . Sea  $i = M - q \geq 0$ . Se tiene que:

- (i)  $s' - j = s' - (pM + q) \equiv s' - q \equiv s' + (M - q) = s' + i$  (mód  $n$ ) y, así,  
 $x_{s'-j} = x_{s'+i}$ , y
- (ii)  $r' - jh = r' - (pM + q)h \equiv r' - qh \equiv r' + (M - q)h = r' + ih$  (mód  $m$ ) y, así,  
 $y_{r'-jh} = y_{r'+ih}$ .

Entonces,  $(y_{r'-jh}, x_{s'-j}) = (y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \in \{(y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \mid i \geq 0\}$ .

Ahora, si tomamos una flecha de la forma  $(y_{r'+i'h}, x_{s'+i'})$  para algún  $i' \geq 0$ , sabemos que existen dos enteros no negativos  $p'$  y  $q'$ , tales que  $i' = p'M + q'$ , donde  $0 \leq q' < M$ . Sea  $j' = M - q' \geq 0$ . Se tiene que:

$$(i) \quad s' + i' = s' + (p'M + q') \equiv s' + q' \equiv s' - (M - q') = s' - j' \pmod{n} \text{ y, así,} \\ x_{s'+i'} = x_{s'-j'}, \text{ y}$$

$$(ii) \quad r' + i'h = r' + (p'M + q')h \equiv r' + q'h \equiv r' - (M - q')h = r' - j'h \pmod{m} \text{ y,} \\ \text{así, } y_{r'+i'h} = y_{r'-j'h}.$$

Entonces,  $(y_{r'+i'h}, x_{s'+i'}) = (y_{r'-j'h}, x_{s'-j'}) \in \{(y_{r'-jh}, x_{s'-j}) \mid j \geq 0\}$ .

Por lo tanto,  $\{(y_{r'-jh}, x_{s'-j}) \mid j \geq 0\} = \{(y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .  $\square$

**Lema 3.26.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ . Sea  $l$  un entero fijo en  $[n+2, n+m]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+id}, y_r) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'}, x_{s'+id}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(x_s, y_r) \in A(D)$ . El lema 3.25, implica que  $\mathcal{A} = \{(x_{s+i}, y_{r+ih}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  donde  $h = l - (n+1)$ .

Consideremos el conjunto  $\{(x_{s+im}, y_{r+(im)h}) \mid i \geq 0\} \subset \mathcal{A}$ . Como  $y_{r+(im)h} = y_r$ , se tiene que  $\{(x_{s+im}, y_{r+(im)h}) \mid i \geq 0\} = \{(x_{s+im}, y_r) \mid i \geq 0\}$ .

Sean  $n' = n/d$ ,  $m' = m/d$  y  $L = \text{mcm}(n, m) = \frac{nm}{d} = n'm'$ . Como  $m = m'd$ , se sigue que  $\{x_{s+im} \mid i \geq 0\} \subset \{x_{s+id} \mid i \geq 0\}$  y, de ahí,  $|\{x_{s+im} \mid i \geq 0\}| \leq |\{x_{s+id} \mid i \geq 0\}|$ . Más aún,  $|\{x_{s+im} \mid i \geq 0\}| = \frac{L}{m} = n'$  y  $|\{x_{s+id} \mid i \geq 0\}| = n'$ . Entonces,  $\{x_{s+im} \mid i \geq 0\} = \{x_{s+id} \mid i \geq 0\}$  y, así,  $\{(x_{s+id}, y_r) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

Ahora, supongamos que  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ . El lema 3.25 asegura que  $\mathcal{B} = \{(y_{r'+ih}, x_{s'+i}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

Consideremos el conjunto  $\{(y_{r'+(im)h}, x_{s'+im}) \mid i \geq 0\} \subset \mathcal{B}$ . Como  $y_{r'+(im)h} = y_{r'}$ , se tiene que  $\{(y_{r'+(im)h}, x_{s'+im}) \mid i \geq 0\} = \{(y_{r'}, x_{s'+im}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ . Además, ya vimos que  $\{x_{s+im} \mid i \geq 0\} = \{x_{s+id} \mid i \geq 0\}$ . Entonces  $\{(y_{r'}, x_{s'+id}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .  $\square$

Notemos que en los lemas 3.25 y 3.26 se pueden intercambiar los roles de  $C_1$  y  $C_2$ , pidiendo que  $l$  sea un entero fijo en  $[m+2, n+m]$  y  $h = l - (m+1)$ . Entonces se tiene lo siguiente:

**Lema 3.27.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, y  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ . Sean  $d = \text{mcd}(n, m)$ ,  $l$  un entero fijo en  $[m+2, n+m]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ . Tomemos  $h = l - (m+1)$ , si  $(x_s, y_r) \in A(D)$ , entonces  $\{(x_{s+ih}, y_{r+i}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  y  $\{(x_s, y_{r+id}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ ; y si  $(y_{r'}, x_{s'}) \in A(D)$ , entonces  $\{(y_{r'+i}, x_{s'+ih}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$  y  $\{(y_{r'+id}, x_{s'}) \mid i \geq 0\} \subset A(D)$ .

En lo que queda de la sección, dada una digráfica  $D$  en la s.g. de dos digráficas hamiltonianas ajenas, determinaremos intervalos de enteros contenidos en  $[3, |V(D)|]$  para los cuales  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l$  en el intervalo.

**Definición 3.28.** Sea  $\mathcal{F}' = \{G, H\}$  una factorización de una digráfica  $D$ , donde  $G$  y  $H$  son dos subdigráficas cualesquiera. Diremos que un vértice  $v \in V(G)$  es *insingular* (*exsingular*) con respecto a  $H$  si  $H \mapsto v$  ( $v \mapsto H$ ); y diremos que  $v$  es *singular* con respecto a  $H$ , si es insingular o exsingular con respecto a  $H$ .

A continuación veremos que una digráfica fuertemente conexa  $D$  en la s.g. de dos digráficas hamiltonianas,  $D_1$  y  $D_2$ , es pancíclica si, para algún  $i \in \{1, 2\}$ ,  $D_i$  contiene un vértice singular con respecto a  $D_{3-i}$ .

**Lema 3.29.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas ajenas, y  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ . Si para algún  $i \in \{1, 2\}$ ,  $D_i$  contiene un vértice singular con respecto a  $D_{3-i}$  en  $D$ , entonces  $D$  es pancíclica.

*Demostración.* Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_1$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_2$ .

Supongamos s.p.g. que  $D_1$  contiene un vértice singular con respecto a  $D_2$  en  $D$  y que dicho vértice es  $x_0$ .

Caso 1:  $x_0$  es exsingular con respecto a  $D_2$ . Entonces  $x_0 \mapsto D_2$  en  $D$  y, así,  $x_0 \rightarrow y_j$  para cada  $j \in [0, m-1]$  y  $(D_2, x_0) = \emptyset$ . Como  $D$  es fuertemente conexa,  $(D_2, D_1) \neq \emptyset$ . Es decir, el conjunto  $\{i \in [1, n-1] \mid (D_2, x_i) \neq \emptyset\}$  es no vacío, por lo cual podemos encontrar un número máximo en ese conjunto, digamos  $d = \text{máx}\{i \in [1, n-1] \mid (D_2, x_i) \neq \emptyset\}$ . Por la manera en la que elegimos a  $d$ , se sigue que:  $(D_2, x_d) \neq \emptyset$  y  $(D_2, x_{d+1}) = \emptyset$ , lo cual implica que  $x_{d+1} \mapsto D_2$  y, así,  $x_{d+1}$  es exsingular con respecto a  $D_2$ .

Sea  $y_t \in V(D_2)$  tal que  $(y_t, x_d) \in A(D)$ . Como  $(x_{d+1}, y) \in A(D)$  para cada  $y \in V(C_2)$ , se tiene que  $\alpha_h = (x_d, x_{d+1}, y_{t-h}) \cup (y_{t-h}, C_2, y_t) \cup (y_t, x_d)$  es

un ciclo en  $D$  de longitud  $l(\gamma_h) = h + 3$  para cada  $h \in [0, m - 1]$ . De esta manera,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, m + 2]$ .

Ahora veremos que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l(C_2) + h = m + h$  para cada  $h \in [3, n]$ . Consideremos un número  $h$  en  $[3, n]$ .

Observemos que si  $(D_2, x_{d+1-(h-1)}) \neq \emptyset$ , entonces  $(y_t, x_{d+1-(h-1)}) \in A(D)$  para algún  $t \in [0, m - 1]$  y, de esta manera,  $(x_{d+1}, y_{t+1}) \cup (y_{t+1}, C_2, y_t) \cup (y_t, x_{d+1-(h-1)}) \cup (x_{d+1-(h-1)}, C_1, x_{d+1})$  es un ciclo de longitud  $1 + (m - 1) + 1 + (h - 1) = m + h$  en  $D$ , como se quería. De otro modo,  $x_{d+1-(h-1)}$  es exsingular con respecto a  $D_2$ . Supongamos que este es el caso.

Si  $(D_2, x_{d+1-2(h-1)}) \neq \emptyset$ , entonces  $(y_t, x_{d+1-2(h-1)}) \in A(D)$  para algún  $t \in [0, m - 1]$  y, así,  $(x_{d+1-(h-1)}, y_{t+1}) \cup (y_{t+1}, C_2, y_t) \cup (y_t, x_{d+1-2(h-1)}) \cup (x_{d+1-2(h-1)}, C_1, x_{d+1-(h-1)})$  es un ciclo de longitud  $1 + (m - 1) + 1 + (h - 1) = m + h$ , como se quería. De no ser así,  $x_{d+1-2(h-1)}$  es exsingular con respecto a  $D_2$ .

Argumentando de esta manera, podemos obtener un ciclo de longitud  $m + h$ , o bien, una sucesión de vértices en  $D_1$  que son exsingulares con respecto a  $D_2$ , a saber  $\{x_{d+1-i(h-1)} \mid i \geq 0\}$ . Supongamos que estamos en la segunda situación. Notemos que: los primeros  $l = \frac{\text{mcm}(n, h-1)}{h-1}$  elementos de la sucesión son todos distintos; cuando  $i = l$ ,  $x_{d+1-i(h-1)} = x_{d+1}$ ; y la sucesión se repite a partir de ese punto. Por lo cual,  $\{x_{d+1-i(h-1)} \mid i \geq 0\} = \{x_{d+1-i(h-1)} \mid i \in [0, l - 1]\}$  es un conjunto de  $l$  vértices exsingulares diferentes.

Si  $\text{mcd}(n, h - 1) = 1$ , entonces la sucesión tiene  $n$  vértices exsingulares diferentes en  $D_1$ , donde  $|V(D_1)| = n$ . En consecuencia,  $D_1 \mapsto D_2$  en  $D$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\text{mcd}(n, h - 1) > 1$  y  $V(D) \setminus \{x_{d+1-i(h-1)} \mid i \in [0, l - 1]\}$  es no vacío.

Notemos que  $x_{d+1-(l-1)(h-1)} = x_{d+h}$  pues  $d+1-(l-1)(h-1) \equiv d+1+h-1 = d+h \pmod{n}$ . La trayectoria  $P = (x_d, x_{d+1}, \dots, x_{d+h})$  tiene longitud  $h$ . Además,  $(D_2, x_d) \neq \emptyset$  y  $x_{d+h}$  es exsingular con respecto a  $D_2$ .

Sea  $(y_t, x_d) \in (D_2, x_d)$ . Entonces  $\alpha = (y_t, x_d) \cup P \cup (x_{d+h}, y_{t+2}) \cup (y_{t+2}, C_2, y_t)$  es un ciclo en  $D$  de longitud  $l(\alpha) = 1 + h + 1 + m - 2 = m + h$ , como se quería.

Caso 2:  $x_0$  es insingular con respecto a  $D_2$ . En este caso  $D_2 \mapsto x_0$ , es decir  $y_j \rightarrow x_0$  para cada  $j \in [0, m - 1]$  y  $(x_0, D_2) = \emptyset$ . Como  $D$  es fuertemente conexa,  $(D_1, D_2) \neq \emptyset$ . De ahí, se sigue que  $\{i \in [1, n - 1] \mid (x_i, D_2) \neq \emptyset\}$  es no

vacío y podemos encontrar un número mínimo en ese conjunto, digamos  $a = \min\{i \in [1, n-1] \mid (x_i, D_2) \neq \emptyset\}$ . Por la manera en la que elegimos a  $a$ , tenemos que:  $(x_{a-1}, D_2) = \emptyset$  y  $(x_a, D_2) \neq \emptyset$ , por lo cual  $D_2 \mapsto x_{a-1}$ , es decir,  $x_{a-1}$  es insingular con respecto a  $D_2$ .

Sea  $y_s \in V(D_2)$  tal que  $(x_a, y_s) \in A(D)$ . Dado que  $(y, x_{a-1}) \in A(D)$  para cada  $y \in V(C_2)$ , se tiene que  $\gamma_h = (x_{a-1}, x_a, y_s) \cup (y_s, C_2, y_{s+h}) \cup (y_{s+h}, x_{a-1})$  es un ciclo en  $D$  de longitud  $l(\gamma_h) = h + 3$  para cada  $h \in [0, m-1]$ . Entonces,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, m+2]$ .

Ahora veremos que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l(C_2) + h = m + h$  para cada  $h \in [3, n]$ . Consideremos un número  $h \in [3, n]$ .

Observemos que, si  $(x_{a-1+(h-1)}, D_2) \neq \emptyset$ , entonces  $(x_{a-1+(h-1)}, y_t) \in A(D)$  para algún  $t \in [0, m-1]$  y, así,  $(x_{a-1}, C_1, x_{a-1+(h-1)}) \cup (x_{a-1+(h-1)}, y_t) \cup (y_t, C_2, y_{t-1}) \cup (y_{t-1}, x_{a-1})$  es un ciclo de longitud  $(h-1) + 1 + (m-1) + 1 = m + h$ . De otro modo,  $x_{a-1+(h-1)}$  es insingular con respecto a  $D_2$ . Supongamos que este es el caso.

Si  $(x_{a-1+2(h-1)}, D_2) \neq \emptyset$ , entonces  $(x_{a-1+2(h-1)}, y_t) \in A(D)$  para algún  $t \in [0, m-1]$  y, de esta manera,  $(x_{a-1+(h-1)}, C_1, x_{a-1+2(h-1)}) \cup (x_{a-1+2(h-1)}, y_t) \cup (y_t, C_2, y_{t-1}) \cup (y_{t-1}, x_{a-1+(h-1)})$  es un ciclo de longitud  $m + h$ . De no ser así,  $x_{a-1+2(h-1)}$  es insingular con respecto a  $D_2$ .

Argumentando de esta manera, podemos obtener un ciclo de longitud  $m + h$ , o bien, una sucesión de vértices en  $D_1$  que son insingulares con respecto a  $D_2$ , a saber  $\{x_{a-1+i(h-1)} \mid i \geq 0\}$ . Supongamos que estamos en la segunda situación. Notemos que: los primeros  $l = \frac{\text{mcm}(n, h-1)}{h-1}$  elementos de dicha sucesión son todos diferentes; cuando  $i = l$ ,  $x_{a-1+i(h-1)} = x_{a-1}$ ; y la sucesión se repite a partir de este punto. Por lo cual,  $\{x_{a-1+i(h-1)} \mid i \geq 0\} = \{x_{a-1+i(h-1)} \mid i \in [0, l-1]\}$  es un conjunto de  $l$  vértices insingulares diferentes.

Si  $\text{mcd}(n, h-1) = 1$ , entonces la sucesión tiene  $n$  vértices insingulares diferentes en  $D_1$ , donde  $|V(D_1)| = 1$ . En consecuencia,  $D_2 \mapsto D_1$  en  $D$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\text{mcd}(n, h-1) > 1$  y  $V(D) \setminus \{x_{a-1+i(h-1)} \mid i \in [0, l-1]\}$  es no vacío.

Notemos que la trayectoria  $P' = (x_{a-1-(h-1)}, x_{a-1-(h-2)}, \dots, x_{a-1}, x_a)$  tiene longitud  $h$ ,  $x_{a-1-(h-1)}$  es insingular con respecto a  $D_2$  y  $(x_a, D_2) \neq \emptyset$ .

Sea  $(x_a, y_t) \in (x_a, D_2)$ . Entonces,  $\beta = P' \cup (x_a, y_t) \cup (y_t, C_2, y_{t-2}) \cup (y_{t-2}, x_{a-1-(h-1)})$  es un ciclo en  $D$  de longitud  $h + 1 + (m - 2) + 1 = m + h$ , como se quería.

De ambos casos se tiene el resultado. □

En las dos proposiciones siguientes vamos a ver que, si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa en la s.g. de dos digráficas hamiltonianas,  $D_1$  y  $D_2$ , entonces  $D$  contiene al menos un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, \max\{|V(D_1)|, |V(D_2)|\} + 1]$ .

**Proposición 3.30.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas ajenas de orden  $n$  y  $m$ , respectivamente, y sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ , entonces  $D$  contiene un ciclo de longitud  $h$  para cada  $h \in \{l \in [3, n + 1] \mid \text{mcd}(n, l - 2) = 1\} \cup \{l \in [3, m + 1] \mid \text{mcd}(m, l - 2) = 1\}$ .*

*Demostración.* Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_1$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_2$ .

Como  $D$  es fuerte, si para algún  $i \in \{1, 2\}$ , en  $D_i$  existe un vértice singular con respecto a  $D_{3-i}$ , entonces el lema 3.29 asegura que  $D$  es pancíclica.

Supongamos entonces que  $D_i$  no tiene vértices singulares con respecto a  $D_{3-i}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

En particular  $y_0$  no es singular con respecto a  $C_1$  y, así, existen flechas  $(y_0, x_s) \in A(D)$  y  $(x_{s'}, y_0) \in A(D)$  para algunos  $s$  y  $s'$  en  $[0, n - 1]$ . Supongamos s.p.g. que  $(y_0, x_0) \in A(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $h$  para algún  $h \in \{l \in [3, n + 1] \mid \text{mcd}(n, l - 2) = 1\}$ .

Por el lema 3.23, se tiene que  $(y_k, x_{k+i}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$  y cada  $k \geq 0$ , pues  $\text{mcd}(n, h - 2) = 1$ . Consideremos el caso  $k = 0$ , entonces  $(y_0, x_i) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . Por lo cual,  $y_0 \mapsto D_1$ , es decir,  $y_0$  es un vértice singular con respecto a  $D_1$ , contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $h$  para cada  $h \in \{l \in [3, n + 1] \mid \text{mcd}(n, l - 2) = 1\}$ , como se quería.

Ahora supongamos por contradicción que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $h$  para algún  $h \in \{l \in [3, m + 1] \mid \text{mcd}(m, l - 2) = 1\}$ .

Como  $(y_0, x_0) \in A(D)$  y  $\text{mcd}(m, h - 2) = 1$ , se sigue del lema 3.24 que  $(y_{k+i}, x_k) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$  y cada  $k \geq 0$ . Consideremos el caso  $k = 0$ , entonces  $(y_i, x_0) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . De esta manera,  $D_2 \mapsto x_0$  y, así,  $x_0$  es un vértice singular

con respecto a  $D_2$ , contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $h$  para cada  $h \in \{l \in [3, m+1] \mid \text{mcd}(m, l-2) = 1\}$ .  $\square$

**Proposición 3.31.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas ajenas de orden  $n$  y  $m$ , respectivamente, y sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ , entonces  $D$  contiene un ciclo de longitud  $h$  para cada  $h \in \{l \in [3, n+1] \mid \text{mcd}(n, l-2) > 1\} \cup \{l \in [3, m+1] \mid \text{mcd}(m, l-2) > 1\}$ .*

*Demostración.* Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_1$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_2$ .

Como  $D$  es fuertemente conexa, si en  $C_i$  existe un vértice singular con respecto a  $C_{3-i}$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$ , entonces el lema 3.29 asegura que  $D$  es pancíclica.

Supongamos que  $C_i$  no contiene vértices singulares con respecto a  $C_{3-i}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

En particular  $y_0$  no es singular con respecto a  $C_1$  y, así, existen dos índices diferentes,  $i$  e  $i'$ , en  $[0, m-1]$  tales que  $x_i \rightarrow y_0$  y  $y_0 \rightarrow x_{i'}$ . Como  $C_1$  es un ciclo que contiene tanto a  $x_i$  como a  $x_{i'}$ , podemos encontrar dos vértices consecutivos en  $C_1$ ,  $x_s$  y  $x_{s+1}$ , tales que  $x_s \rightarrow y_0$  y  $y_0 \rightarrow x_{s+1}$ . Supongamos s.p.g. que  $\{(x_{n-1}, y_0), (y_0, x_0)\} \subset A(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$  para algún  $l \in [3, n+1]$  tal que  $\text{mcd}(n, l-2) = d$  con  $d > 1$ .

Como  $\{(x_{n-1}, y_0), (y_0, x_0)\} \subset A(D)$  tenemos que  $(x_{-1+k+id}, y_k) \in A(D)$  y que  $(y_k, x_{k+id}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$  y cada  $k \geq 0$ , por el lema 3.23. Consideremos el caso  $i = 0$ , entonces  $(x_{k-1}, y_k) \in A(D)$  y  $(y_k, x_k) \in A(D)$  para cada  $k \geq 0$ .

Notemos que el índice  $n - (l-2)$  puede escribirse como  $n - (l-2) = n'd$  para algún  $n' \geq 1$ , pues  $d = \text{mcd}(n, l-2)$  y  $l-2 \in [1, n-1]$  (así,  $n - (l-2) \geq 1$ ). Entonces, si tomamos  $k = 2$  e  $i = n'$ , tenemos que  $(y_k, x_{k+id}) = (y_2, x_{n'd+2}) = (y_2, x_{n-(l-2)+2}) \in A(D)$ .

Así, el camino  $\alpha = (x_0, y_1, x_1, y_2, x_{n-(l-2)+2}) \cup (x_{n-(l-2)+2}, C_1, x_0)$  es un ciclo de longitud  $4 + ((l-2) - 2) = l$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, n+1]$  tal que  $\text{mcd}(n, l-2) = d > 1$ .

La existencia de los ciclos de  $l$ , para cada  $l \in [3, m+1]$  tales que  $\text{mcd}(m, l-2) = d > 1$ , se puede demostrar de manera similar considerando el vértice  $x_0$ , que no es singular con respecto a  $C_2$ , y dos vértices  $y_r$  y  $y_{r'}$  en  $C_2$  tales que  $x_0 \rightarrow y_r$  y  $y_{r'} \rightarrow x_0$ .  $\square$

Como consecuencia de las proposiciones 3.30 y 3.31 tenemos el siguiente resultado.

**Lema 3.32.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas ajenas de orden  $n$  y  $m$ , respectivamente, donde  $n \geq m$ . Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ , entonces  $D$  contiene un ciclo de longitud  $h$  para cada  $h \in [3, n+1]$ .

**Lema 3.33.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas ajenas de orden  $n$  y  $m$ , respectivamente,  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$  y sea  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Entonces  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$ , para cada  $l \in \{n + id \mid 1 \leq i \leq m/d\} \cup \{m + id \mid 1 \leq i \leq n/d\}$ .

*Demostración.* Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_1$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_2$ .

Podemos suponer que  $D_i$  no contiene vértices singulares con respecto a  $D_{3-i}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ . De otro modo, el lema 3.29 asegura que  $D$  es pancíclica, y se tiene el resultado.

También podemos suponer que  $D$  contiene al menos un par bueno. De no ser así, el teorema 3.13 asegura que  $D$  es pancíclica local.

Como  $D$  tiene un par bueno de flechas,  $D$  contiene un ciclo hamiltoniano, por la proposición 3.5. La longitud de dicho ciclo es  $n + m = n + (m/d)d = (n/d)d + m$ .

Sea  $m' = m/d$ . Supongamos por contradicción que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ , para algún  $l \in \{n + id \mid 0 \leq i < m'\}$ .

Ahora, supongamos s.p.g. que  $(x_{n-1}, y_1), (y_0, x_0)$  es un par bueno de flechas entre en  $D$ .

Como  $y_0 \rightarrow x_0$ , se tiene que  $y_{id} \rightarrow x_0$  para cada  $i \geq 0$ , por el lema 3.26. Entonces,  $\gamma_i = (x_{n-1}, y_1) \cup (y_1, C_2, y_{id}) \cup (y_{id}, x_0) \cup (x_0, C_1, x_{n-1})$  es un ciclo de longitud  $l(\gamma_i) = 1 + (id - 1) + 1 + (n - 1) = n + id$  en  $D$  para cada  $i \in [0, m' - 1]$ , contradiciendo nuestra suposición.

De manera similar se puede demostrar que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in \{m + id \mid 0 \leq i \leq n'\}$ .  $\square$

**Lema 3.34.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas hamiltonianas ajenas de orden  $n$  y  $m$ , respectivamente,  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$  y sea  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Si  $d \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es pancíclica.

*Demostración.* Sean  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_1$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D_2$ .

Si  $D$  no contiene pares buenos, entonces el teorema 3.13 asegura que  $D$  es pancíclica local. Por lo cual podemos suponer que  $D$  contiene al menos un par bueno. Supongamos s.p.g. que  $x_0 \rightarrow y_0$  y  $y_{m-1} \rightarrow x_1$  forman un par bueno.

Si en  $D_i$  existe un vértice singular con respecto a  $D_{3-i}$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es pancíclica, por el lema 3.29. Entonces podemos suponer que en  $D_i$  no existen vértices singulares con respecto a  $D_{3-i}$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

Supongamos s.p.g. que  $n \geq m$ . Por el lema 3.32, se tiene que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, n+1]$ .

Supongamos por contradicción que  $D$  no es pancíclica. Entonces existe un entero  $l \in [n+2, n+m]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ .

Como  $x_0 \rightarrow y_0$ , se sigue que  $x_{id} \rightarrow y_0$  para cada  $i \geq 0$ , por el lema 3.26.

Caso 1:  $d = 1$ . Entonces  $x_i \rightarrow y_0$  para cada  $i \geq 0$  y, así,  $y_0$  es un vértice singular con respecto a  $D_1$ , lo cual contradice nuestra suposición.

Caso 2:  $d = 2$ . Entonces  $x_{2i} \rightarrow y_0$  para cada  $i \geq 0$ . Como  $y_0$  no es singular con respecto a  $D_1$ , existe un vértice  $x_s \in V(C_1) \setminus \{x_{2i} \mid i \geq 0\}$  tal que  $y_0 \rightarrow x_s$ . Así,  $V(C_1) \setminus \{x_{2i} \mid i \geq 0\} \neq \emptyset$ , por lo cual  $n$  debe ser par, pues los índices se toman módulo  $n$ . Además,  $s = 2t + 1$  para algún  $t \in [0, \frac{n}{2} - 1]$ .

Por el lema 3.26, se sigue que  $(y_0, x_{2t+1+2i}) \in A(D)$  para cada  $i \geq 0$ . En particular, para  $i = \frac{n}{2} - t$ , se tiene que  $(y_0, x_{2t+1+2(\frac{n}{2}-t)}) = (y_0, x_1) \in A(D)$ . Ahora, por el lema 3.27, se sigue que  $y_{2j} \rightarrow x_1$  para cada  $j \geq 0$ .

Recordemos que  $y_{m-1} \rightarrow x_1$ , entonces  $y_{m-1+2j} \rightarrow x_1$  para cada  $j \geq 0$ , por el lema 3.27. Donde  $(y_{m-1+2j}, x_1) = (y_{-1+2j}, x_1)$ , para cada  $j \geq 0$ , pues los índices se toman módulo  $m$  para vértices en  $C_2$ .

Por lo tanto,  $x_1$  es un vértice singular con respecto a  $C_2$ , lo cual contradice nuestra suposición.

De ambos casos se sigue que  $D$  es pancíclica. □

### 3.3.1. Resultados principales sobre panciclismo

En esta sección, dadas dos digráficas hamiltonianas ajenas,  $D_1$  y  $D_2$ , de orden  $n$  y  $m$ , respectivamente, y una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ , veremos que es posible decidir si  $D$  es pancíclica, pancíclica en vértices o determinar un conjunto de enteros  $I \subset [3, n+m]$  tal que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in I$ .

**Definición 3.35.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente,  $D$  una digráfica en  $D_1 \oplus D_2$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Sean  $X_i = \{x_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$  y  $Y_i = \{y_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$ , para cada  $i \in [0, d-1]$ . Un vértice  $x_s$  (respectivamente,  $y_r$ ) es  $d$ -singular con respecto a  $C_2$  (resp.  $C_1$ ) si, para cada  $i \in [0, d-1]$ ,  $x_s \mapsto Y_i$ , o bien,  $Y_i \mapsto x_s$  (resp.  $y_r \mapsto X_i$ , o bien,  $X_i \mapsto y_r$ ).

**Teorema 3.36.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente,  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Si para algún  $i \in \{1, 2\}$ , en  $C_i$  existe al menos un vértice que no es  $d$ -singular con respecto a  $C_{3-i}$ , entonces  $D$  es pancíclica.

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $n \geq m$ . Como  $D$  es fuerte, se sigue del lema 3.32 que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$ , para cada  $l \in [3, n+1]$ .

Supongamos por contradicción que existe un entero  $l \in [n+2, n+m]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de  $l$ . Veremos que todos los vértices en  $C_1$  son  $d$ -singulares con respecto a  $C_2$  y que todos los vértices en  $C_2$  son  $d$ -singulares con respecto a  $C_1$ .

Sean  $X_i = \{x_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$  y  $Y_i = \{y_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$ , para cada  $i \in [0, d-1]$ . Consideremos un vértice  $x_s \in V(C_1)$  y un índice  $r \in [0, d-1]$ .

Si  $x_s \rightarrow y_r$ , entonces  $x_s \rightarrow y_{r+jd}$  para cada  $j \geq 0$ , por el lema 3.26. Consideremos un índice  $i \in [0, m-1]$  tal que  $i \equiv r \pmod{d}$ , entonces se tiene que  $i = qd + r$  para algún  $q \geq 0$  y, así,  $x_s \rightarrow y_i$ . Como  $i$  es un índice congruente con  $r$  módulo  $d$  arbitrario, se sigue que  $x_s \mapsto Y_r$ .

Si, por el contrario,  $y_r \rightarrow x_s$ , entonces  $y_{r+jd} \rightarrow x_s$  para cada  $j \geq 0$ , por el lema 3.27. Consideremos un índice  $i \in [0, m-1]$  tal que  $i \equiv r \pmod{d}$ , entonces tenemos que  $i = qd + r$  para algún  $q \geq 0$  y, así,  $y_i \rightarrow x_s$ . Como  $i$  es un índice congruente con  $r$  módulo  $d$  arbitrario, se sigue que  $Y_r \mapsto x_s$ .

Como tomamos  $x_s$  y  $r$  de manera arbitraria, se sigue que  $x_i$  es un vértice  $d$ -singular con respecto a  $C_2$ , para cada  $i \in [0, n-1]$ .

Se puede demostrar de manera similar que todos los vértices en  $C_2$  son  $d$ -singulares con respecto a  $C_1$ .

En consecuencia, cada vértice en  $C_i$  es  $d$ -singular con respecto a  $C_{3-i}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ , contradiciendo la hipótesis del teorema. Entonces,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [n+2, n+m]$ . Por lo tanto  $D$  es pancíclica.  $\square$

**Definición 3.37.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente,  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Un vértice  $x_s$  (respectivamente,  $y_r$ ) es  $d^*$ -singular con respecto a  $C_2$  (resp.  $C_1$ ) si existe un índice  $i \in [0, m-1]$  (resp.  $i \in [0, n-1]$ ), tal que  $x_s \rightarrow y_{i+j}$  para cada  $j \in [0, d-1]$ , o bien,  $y_{i+j} \rightarrow x_s$  para cada  $j \in [0, d-1]$  (resp.  $y_r \rightarrow x_{i+j}$  para cada  $j \in [0, d-1]$ , o bien,  $x_{i+j} \rightarrow y_r$  para cada  $j \in [0, d-1]$ ).

**Teorema 3.38.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente,  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Si para algún  $i \in \{1, 2\}$ , en  $C_i$  existe al menos un vértice  $d^*$ -singular con respecto a  $C_{3-i}$ , entonces  $D$  es pancíclica.

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $n \geq m$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, tenemos que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, n+1]$ , por el lema 3.32.

Supongamos por contradicción que existe un entero  $l \in [n+2, n+m]$  tal que  $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$ .

Supongamos s.p.g. que  $C_1$  contiene un vértice  $d^*$ -singular con respecto a  $C_2$  y que dicho vértice es  $x_0$ . Entonces existe un índice  $j \in [0, m-1]$  tal que  $(x_0, y_{i+j}) \in A(D)$  para cada  $i \in [0, d-1]$ , o bien,  $(y_{i+j}, x_0) \in A(D)$  para cada  $i \in [0, d-1]$ . Supongamos s.p.g. que  $j = 0$ .

Caso 1:  $x_0 \rightarrow y_i$  para cada  $i \in [0, d-1]$ . Como  $D$  es fuerte y no contiene ciclos de longitud  $l$ , tenemos que  $(x_0, y_{i+jd}) \in A(D)$  para cada  $j \geq 0$  y cada  $i \in [0, d-1]$ , por el lema 3.27. Entonces,  $x_0 \mapsto C_2$  y, así,  $x_0$  es un vértice singular con respecto a  $C_2$ . En consecuencia,  $D$  es pancíclica, por el lema 3.29. Lo cual contradice nuestra suposición.

Caso 2:  $y_i \rightarrow x_0$  para cada  $i \in [0, d-1]$ . Como  $D$  es fuerte y no contiene ciclos de longitud  $l$ , tenemos que  $(y_{i+jd}, x_0) \in A(D)$  para cada  $j \geq 0$  y cada  $i \in [0, d-1]$ , por el lema 3.27. Entonces,  $C_2 \mapsto x_0$  y, así,  $x_0$  es un vértice singular con respecto a  $C_2$ . De esta manera,  $D$  es pancíclica, por el lema 3.29. Lo cual contradice nuestra suposición.

Por lo tanto,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [n+2, n+m]$ .  $\square$

El siguiente teorema de clasificación es consecuencia de los lemas 3.29, 3.32, 3.33 y 3.34; y de los teoremas 3.13, 3.36 y 3.38.

**Teorema 3.39.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, donde  $n \geq m$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa en  $D_1 \oplus D_2$ . Entonces se satisface al menos una de las siguientes afirmaciones:*

- (i)  $D$  pancíclica en vértices;
- (ii)  $D$  pancíclica;
- (iii)  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, n+1] \cup \{n+id \mid 0 \leq i \leq m/d\} \cup \{m+id \mid 0 \leq i \leq n/d\}$ .

El teorema 3.39 nos da una clasificación de las digráficas fuertemente conexas en la suma de dos digráficas hamiltonianas ajenas. Dicho resultado no lo pudimos generalizar a una suma de  $k$  digráficas mutuamente ajenas, sin embargo, es posible dar un intervalo de enteros  $I$  tal que para cada  $l \in I$  y cada digráfica fuertemente conexa  $D$  en la s.g. de dichas digráficas, existe un ciclo de longitud  $l$  en  $D$ , como veremos a continuación.

**Teorema 3.40.** *Sea  $D_1, D_2, \dots, D_k$  una colección de digráficas mutuamente ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, donde  $n_i = |V(D_i)|$  para cada  $i \in [1, k]$ . Si  $D$  es una digráfica en  $\oplus_{i=1}^k D_i$  tal que  $D\langle V(D_i) \cup V(D_j) \rangle$  es fuertemente conexa para cualquier pareja de índices distintos  $\{i, j\} \subset [1, k]$ , entonces  $D$  es hamiltoniana y contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, (\sum_{i \in S} n_i) + 1]$ , para cada  $S \subset [1, k]$  con  $k-1$  elementos.*

*Demostración.* La demostración se hará por inducción sobre  $k$ .

Si  $k = 2$ , entonces el lema 3.32 asegura que, para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, n_i + 1]$  y, por el corolario 3.14,  $D$  contiene un ciclo hamiltoniano.

Supongamos que la afirmación se satisface para  $k' = k - 1$ . Es decir, si  $D_1, D_2, \dots, D_{k'}$  son  $k'$  digráficas mutuamente ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1, C_2, \dots, C_{k'}$ , respectivamente,  $n_i = |V(D_i)|$  para cada  $i \in [1, k']$  y  $D'$  es una digráfica en  $\oplus_{i=1}^{k'} D_i$  tal que  $D\langle V(D_i) \cup V(D_j) \rangle$  es fuertemente conexa para cada par de índices distintos  $\{i, j\} \in [1, k']$ . Entonces  $D'$  es hamiltoniana y contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, (\sum_{i \in S'} n_i) + 1]$  y cada  $S' \subset [1, k']$  con  $k' - 1 = k - 2$  elementos.

Sean  $D$  una digráfica como en la hipótesis del teorema y  $S \subset [1, k]$  tal que  $|S| = k - 1$ . Consideremos la digráfica  $D' = D \langle \bigcup_{i \in S} V(D_i) \rangle$ . Por la observación 4.2,  $D' \in \bigoplus_{i \in S} D_i$  y satisface que la digráfica inducida,  $D' \langle V(D_i) \cup V(D_j) \rangle$ , es fuertemente conexa para cada par de índices distintos  $\{i, j\} \in S$ . Se sigue, de la hipótesis de inducción que  $D'$  contiene un ciclo hamiltoniano cuya longitud es  $\sum_{i \in S} n_i$ .

Sea  $r$  el único índice en  $[1, k] \setminus S$ . Entonces  $D \in D' \oplus D_r$ , pues  $D$  satisface la definición de una s.g. de  $D'$  y  $D_r$ . Más aún,  $D'$  y  $D_r$  son digráficas hamiltonianas y como  $D$  es una digráfica fuerte,  $D$  contiene un ciclo hamiltoniano, por el corolario 3.14. Además,  $D$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para cada  $l \in [3, (\sum_{i \in S} n_i) + 1]$ , por el lema 3.32.  $\square$

### 3.4. Problemas abiertos

En la sección anterior se demostró que, bajo ciertas condiciones, se puede determinar si una digráfica fuertemente conexa en la suma generalizada de dos digráficas hamiltonianas es pancíclica o pancíclica local. Sin embargo, el siguiente problema queda abierto:

**Problema 3.41.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas ajenas con ciclos hamiltonianos,  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0)$ , respectivamente, donde  $n \geq m$  y  $d = \text{mcd}(n, m)$ . ¿Toda digráfica fuertemente conexa  $D$  en  $D_1 \oplus D_2$  es pancíclica?

De acuerdo a los resultados que obtuvimos en este capítulo (los lemas 3.29, 3.32, 3.33 y 3.34; y los teoremas 3.13, 3.36 y 3.38), sabemos que si una digráfica  $D \in D_1 \oplus D_2$  no es pancíclica entonces  $D$  debe satisfacer las siguientes condiciones:

- $d \geq 3$ ,
- ningún vértice es singular,
- todos los vértices son  $d$ -singulares,
- ningún vértice es  $d^*$ -singular,
- hay un par bueno y
- $D$  no contiene ciclos de longitud  $l$  para algún  $l \in [n + 2, n + m - 1] \setminus (\{n + id \mid 0 \leq i \leq m/d\} \cup \{m + id \mid 0 \leq i \leq n/d\})$

Si podemos dar respuesta al problema 3.41, queda la siguiente pregunta:

**Problema 3.42.** ¿Bajo qué condiciones una digráfica fuertemente conexa en la s.g. de  $k$  digráficas hamiltonianas es pancíclica? y ¿es posible caracterizarlas?

## Referencias

- [1] J. Bang-Jensen e Y. Guo. «A note on vertex pancyclic oriented graphs». En: *J. Graph Theory* 31 (1999), págs. 313-318.
- [2] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2.<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag London, Ltd, London: Springer Monographs in Mathematics, 2009. ISBN: 978-1-84800-997-4.
- [3] J. Bang-Jensen y J. Huang. «Quasi-transitive digraphs». En: *J. Graph Theory* 20(2) (1995), págs. 141-161.
- [4] N. Cordero-Michel. «Algunos resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos en la suma generalizada de digráficas». Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
- [5] N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Pancyclism in the Generalized Sum of Digraphs». Enviado. 2021+.
- [6] N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Vertex-Pancyclism in the Generalized Sum of Digraphs». Aceptado en *Discrete Appl. Math.* 2021.
- [7] N. Cordero-Michel, H. Galeana-Sánchez e I.A. Goldfeder. «Some results on the existence of Hamiltonian cycles in the generalized sum of digraphs». En: *Discrete Math.* 339 (2016), págs. 1763-1770.
- [8] H. Galeana-Sánchez e I.A. Goldfeder. «Hamiltonian cycles in a generalization of bipartite tournaments with a cycle-factor». En: *Discrete Math.* 315–316 (2014), págs. 135-143.
- [9] G. Gutin. «Characterizations of vertex pancyclic and pancyclic ordinary complete multipartite digraphs». En: *Discrete Math.* 141(1–3) (1995), págs. 153-162.
- [10] H. Li y col. «On the vertex-pancyclicity of hypertournaments». En: *Discrete Appl. Math.* 161(16-17) (2013), págs. 2749-2752.
- [11] J.W. Moon. «On subtournaments of a tournament». En: *Can. Math. Bull.* 9 (1966), págs. 297-301.

- [12] B. Randerath y col. «Vertex pancyclic graphs». En: *Discrete Appl. Math.* 120(1-3) (2002), págs. 219-237.
- [13] C. Thomassen. «An Ore-type condition implying a digraph to be pancyclic». En: *Discrete Math.* 19(1) (1977), págs. 85-92.
- [14] A. Yeo. «Diregular  $c$ -partite tournaments are vertex-pancyclic when  $c \geq 5$ ». En: *J. Graph Theory* 32 (1999), págs. 137-152.
- [15] A. Yeo. «Paths and cycles containing given arcs, in close to regular multipartite tournaments». En: *J. Graph Theory Ser. B* 97(6) (2007), págs. 949-963.

## Capítulo 4

# Panciclismo alternante en gráficas bicoloreadas en aristas

Un *ciclo alternante* en una gráfica coloreada en aristas es un ciclo en el que cualesquiera dos aristas consecutivas tienen distinto color. Un ciclo alternante que pasa por todos los vértices de la gráfica es un ciclo *hamiltoniano alternante*. A una gráfica coloreada en aristas que contiene un ciclo hamiltoniano alternante la llamaremos *hamiltoniana alternante*.

Sea  $G_1, \dots, G_k$  una colección de gráficas coloreadas en aristas y ajenas por pares. La *suma generalizada coloreada* (suma g.c.) de  $G_1, \dots, G_k$ , denotada por  $\oplus_{i=1}^k G_i$  o por  $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k$ , es la colección de todas las gráficas  $G$ , coloreadas en aristas, tales que: (i)  $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ , (ii)  $G \langle V(G_i) \rangle \cong G_i$  para cada  $i \in [1, k]$ , donde  $G \langle V(G_i) \rangle$  tiene la misma coloración que  $G_i$ , y (iii) entre cada pareja de vértices en sumandos distintos de  $G$  existe exactamente una arista, con un color arbitrario pero fijo. A una gráfica  $G$  en  $\oplus_{i=1}^k G_i$  la llamaremos una *suma generalizada coloreada* (suma g.c.) y diremos que una arista  $e$  de  $G$  es *exterior* si  $e \in (E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(G_i))$ . Al conjunto de las aristas exteriores de  $G$  lo denotaremos por  $E_{\oplus}$ .

Una gráfica coloreada en aristas, con al menos tres colores, de orden  $n \geq 3$  se dice que es *pancíclica alternante* si, para cada  $l \in [3, n]$ , existe un ciclo alternante en  $G$  de longitud  $l$ ; y se dice que  $G$  es *pancíclica alternante en vértices* o *pancíclica alternante local* si, para cada vértice  $v$  en  $G$  y para cada  $l \in [3, n]$ , existe un ciclo alternante en  $G$  de longitud  $l$  que pasa por  $v$ . Una gráfica bicoloreada en aristas  $G$ , de orden  $2n$ , es una gráfica *pancíclica alternante* si, para cada  $l \in [2, n]$ ,  $G$  contiene un ciclo alternante de longitud  $2l$ ; y  $G$  es una gráfica *pancíclica alternante en vértices* o *pancíclica alternante local* si, para cada vértice  $v$  de  $G$  y para cada ara

cada  $l \in [2, n]$ ,  $G$  contiene un ciclo alternante de longitud  $2l$  que pasa por  $v$ . Los temas de panciclismo alternante y panciclismo alternante local han sido estudiados extensamente, en especial, la existencia de ciclos alternantes en gráficas bicoloreadas en aristas ha sido de gran interés por sus múltiples aplicaciones. En este capítulo daremos condiciones suficientes, sencillas, para asegurar que una gráfica en la suma g.c. de una colección de gráficas bicoloreadas en aristas y hamiltonianas alternantes, sea pancíclica alternante local, pancíclica alternante o hamiltoniana. Los resultados que obtuvimos fueron publicados en dos artículos [5] y [6].

Una noción más amplia que la de ciclo alternante es la de *camino alternante*, que es un camino en el que cualesquiera dos aristas consecutivas tienen distinto color. El estudio sobre la existencia de este tipo de caminos en las multigráficas coloreadas en aristas ha proliferado, ya que estas multigráficas se han utilizado para modelar problemas en distintas áreas y el estudio de las aplicaciones está a la orden del día. Según los autores de [1], las publicaciones sobre este tema comenzaron con [15] y, de ahí en adelante, han recorrido los campos de estudio de la genética [8, 9, 10, 16], de los problemas de transporte y conectividad [13, 18], de las ciencias sociales [3] y de resolución de conflictos basados en modelos con gráficas [19, 20, 21], como se señala en [4].

En [12], los autores demostraron que dada una gráfica coloreada en aristas, determinar si esta contiene un ciclo hamiltoniano alternante, o bien, una trayectoria hamiltoniana alternante, son ambos problemas  $NP$ -completos, aún cuando el número de colores es 2; en consecuencia, decidir si una gráfica coloreada en aristas es pancíclica alternante o pancíclica alternante local, es tan difícil como los problemas anteriores. Por esta razón, muchos investigadores han estudiado los caminos alternantes, en un intento de resolver estos problemas al menos de manera parcial.

En [7], Das dio una caracterización de las multigráficas bipartitas completas bicoloreadas en aristas que son pancíclicas alternantes en vértices y, en [2], Bang-Jensen y Gutin caracterizaron las multigráficas completas bicoloreadas en aristas que son pancíclicas alternantes en vértices

En otras publicaciones, como [11] y [17], los autores estudiaron la existencia de ciclos alternantes de longitudes específicas en términos de los grados de los vértices.

## 4.1. Preliminares

En la definición de ciclo alternante, se pide que cualesquiera dos aristas consecutivas tengan distinto color. Cuando se tienen tres colores o más, pueden existir ciclos de cualquier longitud que satisfagan dicha propiedad. Sin embargo, cuando las aristas de una gráfica están coloreadas únicamente con dos colores, los ciclos alternantes únicamente pueden tener longitud par. Por eso, tenemos variantes en las definiciones de una gráfica pancíclica alternante y una gráfica pancíclica en vértices, cuando la gráfica es bicoloreada:

Una gráfica bicoloreada en aristas  $G$ , de orden  $2n$ , es una gráfica *pancíclica alternante* si, para cada  $l \in [2, n]$ ,  $G$  contiene un ciclo alternante de longitud  $2l$ ; y  $G$  es una gráfica *pancíclica alternante en vértices* o *pancíclica alternante local* si, para cada vértice  $v$  de  $G$  y para cada  $l \in [2, n]$ ,  $G$  contiene un ciclo alternante de longitud  $2l$  que pasa por  $v$ .

**Observación 4.1.** Es claro que la suma generalizada coloreada de dos gráficas ajenas en vértices está bien definida y es conmutativa. Sean  $G_1, G_2, G_3$  tres gráficas bicoloreadas en aristas y ajenas en vértices dos a dos. Se puede demostrar fácilmente que los conjuntos  $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$  definido como  $\bigcup_{G \in G_1 \oplus G_2} G \oplus G_3$  y  $G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$  definido como  $\bigcup_{G' \in G_2 \oplus G_3} G_1 \oplus G'$  son iguales entre sí e iguales a  $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$  en la definición de suma g.c., por lo cual  $\bigoplus_{i=1}^3 G_i = (G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$  está bien definida y es asociativa. Por medio de un proceso inductivo es fácil ver que la suma g.c. de  $k$  gráficas bicoloreadas en aristas ajenas por pares está bien definida, es conmutativa y es asociativa.

**Observación 4.2.** Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de gráficas 2-coloreadas en aristas y ajenas en vértices dos a dos;  $\bigoplus_{i=1}^k G_i$ ; y  $J \subset [k]$ . La subgráfica inducida por el conjunto de vértices  $\bigcup_{j \in J} V(G_j)$ ,  $H = G \langle \bigcup_{j \in J} V(G_j) \rangle$ , pertenece a la c.g.s. de la colección  $\{G_j\}_{j \in J}$ .

*Demostración.* Dado que  $\{G_j\}_{j \in J}$  es una subcolección de  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , estas gráficas preservan la propiedad de ser mutuamente ajenas. Además,  $H = G \langle \bigcup_{j \in J} V(G_j) \rangle$  satisface: (i)  $V(H) = \bigcup_{j \in J} V(G_j)$ ; (ii) como  $H$  es una subgráfica inducida de  $G$ , se tiene que  $H \langle V(G_j) \rangle = G \langle V(G_j) \rangle \cong G_j$  para cada  $j \in J$ , donde  $H \langle V(G_j) \rangle$  tiene la misma coloración que  $G_j$ ; y (iii) entre cualesquiera dos vértices  $u \in V(G_j)$  y  $v \in V(G_{j'})$ , donde  $\{j, j'\} \subset J$  y  $j \neq j'$ , hay exactamente una arista en  $G$  y por tanto en  $H$  al ser esta una subgráfica inducida que contiene tanto a  $u$  como a  $v$ .

Por lo tanto  $H \in \bigoplus_{j \in J} G_j$ . □

En el estudio de ciclos alternantes de longitud par, el caso más general es el de dos colores: Si tenemos una partición de las aristas en dos clases de color  $E_1$  y  $E_2$ , y subdividimos a  $E_1$  en  $F_1^1, F_2^1, \dots, F_r^1$  y a  $E_2$  en  $F_1^2, F_2^2, \dots, F_s^2$ , obtenemos una nueva partición de  $E(G)$  en  $r + s$  conjuntos tales que cualquier camino alternante en la 2-coloración en aristas de  $G$  es un camino alternante en la  $(r + s)$ -coloración en aristas de  $G$ . Esto se debe a que cualesquiera dos aristas consecutivas en el camino original deben estar una en  $E_1$  y otra en  $E_2$  por lo que en la nueva coloración una está en  $F_i^1$  para algún  $i \in [1, r]$  y la otra está en  $F_j^2$  para algún  $j \in [1, s]$ , y estos conjuntos son ajenos por herencia de la partición original.

**Notación 4.3.** De aquí en adelante  $G$  denotará una gráfica bicoloreada en aristas y  $c: E(G) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  denotará su coloración de aristas; dado un ciclo alternante  $C$  en  $G$  y dos vértices distintos,  $u$  y  $v$ , en  $C$ , denotaremos por  $uC^b v$  a la  $uv$ -trayectoria alternante contenida en  $C$  que inicia en una arista azul y por  $uC^r v$  a la  $uv$ -trayectoria alternante contenida en  $C$  que inicia en una arista roja.

Además, abreviaremos *bicoloreada en aristas* como b.a.

**Notación 4.4.** Sea  $C = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  un ciclo alternante. Para cada  $v \in V(C)$ , denotaremos por  $v_C^r$  (resp.  $v_C^b$ ) al vértice en  $C$  tal que  $vv_C^r \in E(C)$  y  $vv_C^r$  es una arista roja (resp.  $vv_C^b \in E(C)$  y  $vv_C^b$  es una arista azul). A  $v_C^r$  (resp.  $v_C^b$ ) le llamaremos el *vecino rojo* (resp. el *vecino azul*) de  $v$  en  $C$ . Notemos que si  $v = x_i$  entonces  $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} = \{v^r, v^b\}$ .

Cuando sea claro de qué ciclo hablamos omitiremos el índice  $C$ , es decir, escribiremos  $v^r$  (resp.  $v^b$ ) en lugar de  $v_C^r$  (resp.  $v_C^b$ ).

**Definición 4.5.** Sean  $G$  una gráfica y dos ciclos alternantes ajenos,  $C_1$  y  $C_2$ , contenidos en  $G$ . Sea  $vw$  una arista en  $G$  con  $v \in V(C_1)$  y  $w \in V(C_2)$ . Si  $c(vw) = \text{rojo}$  (resp.  $c(vw) = \text{azul}$ ) diremos que  $vw, v^r w^r$  (resp.  $vw, v^b w^b$ ) es un *par bueno de aristas* si  $c(v^r w^r) = \text{rojo}$  (resp.  $c(v^b w^b) = \text{azul}$ ).

Cuando exista un par bueno de aristas entre dos ciclos alternantes  $C_1$  y  $C_2$ , simplemente diremos que existe un *par bueno*.

**Observación 4.6.** Notemos que si  $vw, v^r w^r$  (resp.  $vw, v^b w^b$ ) es un par bueno, entonces  $vv^r w^r wv$  (resp.  $vv^b w^b wv$ ) es un 4-ciclo monocromático.

**Observación 4.7.** Sean  $G$  una gráfica b.a. y dos ciclos alternantes ajenos,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , contenidos en  $G$ . Un par bueno de aristas

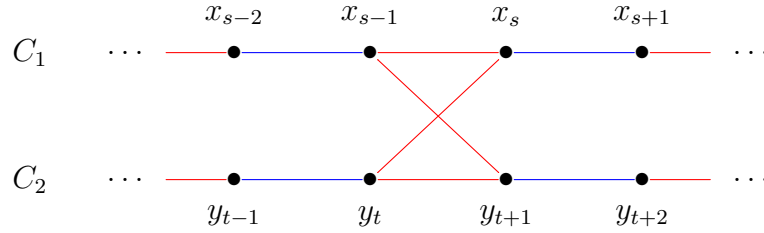


Figura 4.1: Un par bueno de aristas

$x_s y_t, x_{s'} y_{t'}$  con  $s \in [0, 2n - 1]$ ,  $s' \in \{s - 1, s + 1\}$ ,  $t \in [0, 2m - 1]$ ,  $t' \in \{t - 1, t + 1\}$ , donde los índices se toman módulo  $2n$  y módulo  $2m$ , respectivamente, es un par bueno si  $x_s x_{s'} y_{t'} y_t x_s$  es un 4-ciclo monocromático (figura 4.1). Esto es consecuencia de la definición de par bueno y de la notación 4.4.

De aquí en adelante, los índices de los vértices en  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  se toman módulo  $2n$  y los índices de los vértices en  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$  se toman módulo  $2m$ .

**Proposición 4.8.** *Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos ciclos alternantes ajenos en vértices contenidos en una gráfica b.a.,  $G$ . Si existe un par bueno de aristas entre  $C_1$  y  $C_2$ , entonces existe un ciclo alternante cuyo conjunto de vértices es  $V(C_1) \cup V(C_2)$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica como en la hipótesis y sean,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , dos ciclos alternantes y ajenos en  $G$ .

Consideremos un par bueno de aristas entre  $C_1$  y  $C_2$ , digamos  $x_s y_r$  y  $x_{s'} y_{r'}$ . Supongamos sin perder generalidad que  $x_s x_{s'} y_{r'} y_r x_s$  es un ciclo monocromático rojo de longitud 4.

Hay cuatro posibilidades para las aristas. Probaremos el caso en el que  $x_{s'} = x_{s-1}$  y  $y_{r'} = y_{r+1}$ . Los otros casos se demuestran de manera similar.

Dado que  $x_{s-1} x_s$  y  $y_r y_{r+1}$  son rojas y que los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  son alternantes, se tiene que las cuatro aristas  $x_{s-2} x_{s-1}$ ,  $x_s x_{s+1}$ ,  $y_{r-1} y_r$  y  $y_{r+1} y_{r+2}$  deben ser azules. Como  $x_{s-1} y_{r+1}$  y  $y_r x_s$  son rojas, podemos construir el ciclo  $C = x_s C_1^b x_{s-1} \cup x_{s-1} y_{r+1} \cup y_{r+1} C_2^b y_r \cup y_r x_s$  que es un ciclo alternante tal que  $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$ , como se quería (figura 4.2).  $\square$

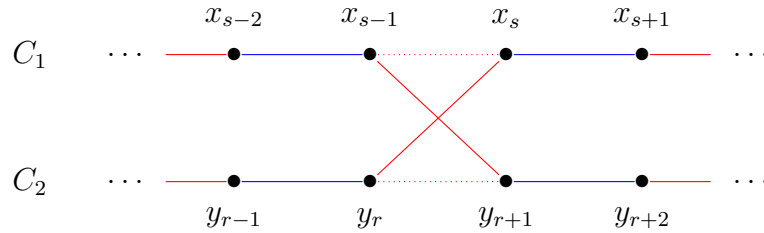


Figura 4.2: Un ciclo construido a partir de un par bueno

## 4.2. Panciclismo alternante local

En esta sección veremos que, si una suma g.c. de dos gráficas b.a., que contienen ciclos hamiltonianos alternantes, no contiene pares buenos entre tales ciclos, entonces dicha suma g.c. es pancíclica alternante local. Para ello, veremos que cuando no hay pares buenos, se pueden encontrar patrones en las aristas exteriores que nos permiten formar ciclos alternantes de varias longitudes. Para finalizar la sección, generalizaremos el resultado para una suma de  $k$  gráficas b.a. hamiltonianas alternantes mutuamente ajenas.

Cabe mencionar que las demostraciones de esta sección tienen implícito un algoritmo para la construcción de los ciclos alternantes.

**Definición 4.9** (Clase paralela). Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas, con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente; y  $G \in G_1 \oplus G_2$  una suma g.c. sin pares buenos. Para cada arista exterior  $u_0 v_0$ , con  $u_0 \in V(C_1)$  y  $v_0 \in V(C_2)$ , construiremos una sucesión de aristas de la siguiente manera:

Paso i: Si  $u_0 v_0$  es roja (azul), sean  $u_1 \in V(C_1)$  y  $v_1 \in V(C_2)$  tales que,  $u_0 u_1 \in E(C_1)$  es roja (azul) y  $v_0 v_1 \in E(C_2)$  es roja (azul). Dado que  $G$  no contiene pares buenos, tenemos que  $u_1 v_1$  es azul (roja). Observemos que  $u_0 v_0$  y  $u_1 v_1$  tienen distinto color.

Paso ii: Supongamos que  $u_0 v_0, u_1 v_1, \dots, u_i v_i$  fueron construidas de modo que  $\{u_0, u_1, \dots, u_i\} \subset V(C_1)$ ,  $\{v_0, v_1, \dots, v_i\} \subset V(C_2)$ ,  $c(u_j v_j) \neq c(u_{j+1} v_{j+1})$ ,  $c(u_j v_{j+1}) = c(v_j v_{j+1}) = c(u_j v_j)$  para cada  $j$ , con  $0 \leq j \leq i-1$ , y la sucesión  $u_0 u_1 \cdots u_i$  (resp.  $v_0 v_1 \cdots v_i$ ) es un camino contenido en  $C_1$  (resp.

$C_2$ ) que recorre  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) en su misma dirección o en la contraria y, así, las aristas consecutivas tienen distinto color.

Paso iii: Ahora construiremos  $u_{i+1}v_{i+1}$ . Si  $u_i v_i$  es roja (azul), sean  $u_{i+1} \in V(C_1)$  y  $v_{i+1} \in V(C_2)$  tales que  $u_i u_{i+1} \in E(C_1)$  es roja (azul) y  $v_i v_{i+1} \in E(C_2)$  es roja (azul). Dado que  $G$  no contiene pares buenos, tenemos que  $u_{i+1}v_{i+1}$  es azul (roja).

Paso iv: La sucesión termina la primera vez que  $u_k v_k = u_0 v_0$ . Esto es, cuando  $k = \text{mcm}(2n, 2m)$ . Notemos que  $u_i v_i$  y  $u_{i+1} v_{i+1}$  tienen distinto color (y son aristas diferentes) y, así,  $c(u_i v_i) = c(u_j v_j)$  si y sólo si  $i \equiv j \pmod{2}$ .

La *clase paralela* de  $u_0 v_0$ , denotada por  $P_{u_0 v_0}$ , es el conjunto  $\{u_i v_i \mid 0 \leq i \leq k-1\}$ . Dos aristas exteriores  $e_1$  y  $e_2$  serán *paralelas* cuando exista una arista exterior  $zw$  tal que  $\{e_1, e_2\} \subset P_{zw}$ .

Observemos que, al ser  $k$  un múltiplo de  $2n$  y  $2m$ , todo vértice  $w \in V(C_i)$  es incidente con al menos una arista en  $P_{u_0 v_0}$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

**Observación 4.10.** Como consecuencia de la definición 4.9 se tiene que para cada  $uv \in E_{\oplus}$ : (i)  $|P_{u_0 v_0}| = \text{mcm}(2n, 2m) = 2 \text{mcm}(n, m)$ ; (ii)  $P_{u_0 v_0}$  tiene  $\text{mcm}(n, m)$  aristas rojas y  $\text{mcm}(n, m)$  aristas azules; (iii) si  $P_{uv} \cap P_{wz} \neq \emptyset$ , entonces  $P_{uv} = P_{wz}$ .

Observemos que, cuando  $n \neq m$  puede haber más de una arista en  $P_{uv}$  incidente con  $u$  o con  $v$ .

**Observación 4.11.** Notemos que, en vista de la observación 4.10, el conjunto de las clases paralelas,  $\mathcal{P} = \{P_{uv} \mid uv \in E_{\oplus}\}$ , es una partición de  $E_{\oplus}$ .

**Notación 4.12.** Sea  $C$  un ciclo alternante con una descripción arbitraria  $C = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$ . Diremos que dos vértices,  $x$  y  $y$ , en  $V(C)$  son *congruentes módulo 2*, si sus subíndices en  $C$  son congruentes módulo 2, y lo denotaremos por  $x \equiv_C y \pmod{2}$  (o por  $x \equiv y \pmod{2}$ ) si es claro de qué ciclo alternante se está hablando).

**Notación 4.13.** Sea  $G$  una gráfica bicolorada en aristas. Para cada  $v \in V(G)$ , denotaremos por  $d_r(v)$  (resp.  $d_b(v)$ ) al número de aristas exteriores rojas (resp. azules) de  $G$  que inciden en  $v$ .

**Lema 4.14.** Sean  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$  dos ciclos alternantes ajenos y sea  $G$  una gráfica en  $C_1 \oplus C_2$  que no contiene pares buenos. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

- (i) Hay exactamente  $2mn$  aristas exteriores de cada color en  $G$ .
- (ii) Sea  $P_{uv}$  una clase paralela, cada vértice  $w \in V(C_i)$  es incidente con  $\frac{\text{mcm}(n, m)}{n}$  aristas en  $P_{uv}$  si  $i = 1$ ;  $\frac{\text{mcm}(n, m)}{m}$  aristas en  $P_{uv}$  si  $i = 2$ , y todas ellas tienen el mismo color. Más aún, dados dos vértices,  $w$  y  $x$ , en  $V(C_i)$ , las aristas en  $P_{uv}$  que inciden con  $w$  tienen el mismo color que aquellas que inciden con  $x$  si y sólo si  $w \equiv x \pmod{2}$ .
- (iii) Para cada vértice  $w \in V(C_i)$ , si  $d_r(w) = t$  y  $d_b(w) = |V(C_{3-i})| - t$ , entonces  $d_r(x) = |V(C_{3-i})| - t = d_b(w)$  y  $d_b(x) = t = d_r(w)$  para cada  $x \in \{w^r, w^b\}$ . Más aún, si  $\{w, x\} \subset V(C_i)$  entonces

$$d_r(x) = \begin{cases} d_r(w) & \text{si } w \equiv x \pmod{2} \\ |V(C_{3-i})| - d_r(w) & \text{si } w \not\equiv x \pmod{2}. \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica como en la hipótesis.

- (i) Esta afirmación se sigue directamente de la observación 4.10 ya que  $G$  tiene  $4mn$  aristas exteriores.
- (ii) Recordemos, de la definición 4.9, que existe alguna arista en  $P_{uv}$  que incide en  $w$ , digamos  $wz$ . Entonces,  $P_{wz} \cap P_{uv} \neq \emptyset$  y, por la observación 4.10,  $P_{wz} = P_{uv}$ . Sea  $P_{wz} = \{wz = w_0z_0, w_1z_1, \dots, w_{k-1}z_{k-1}\}$ , donde  $k = \text{mcm}(2n, 2m)$ , por la definición 4.9 se tienen las siguientes aseveraciones:
- (a)  $c(w_jz_j) = c(w_0z_0)$  sii  $j \equiv 0 \pmod{2}$ ;
- (b)  $k = \text{mcm}(2n, 2m) = 2 \text{mcm}(n, m)$  (y así  $k$ ,  $2n$  y  $2m$  son números pares);
- (c)  $w_0 = w_j$  sii  $j \equiv 0 \pmod{l(C_i)}$ .

De aquí se sigue que las aristas de  $P_{wz}$  que inciden en  $w = w_0$  son  $\frac{\text{mcm}(n, m)}{n}$  si  $i = 1$ ,  $\frac{\text{mcm}(n, m)}{m}$  si  $i = 2$ ; y todas ellas tienen el mismo color.

Claramente (a) y (b) implican la última aseveración en (ii).

- (iii) Notemos que  $\mathcal{P} = \{P_{uv} \mid uv \in E_{\oplus}\}$  es una partición de  $E_{\oplus}$  y, del enunciado (ii) en este lema, en cada clase paralela  $P_{uv}$  el número de aristas que inciden en  $w$ ,  $w^r$  y  $w^b$  es  $\frac{2 \text{mcm}(n, m)}{l(C_i)}$  ya que  $\{w, w^r, w^b\} \subset V(C_i)$ , y  $w^r \equiv w^b \pmod{2}$ . Por lo tanto, si  $d_r(w) = t$  entonces  $d_b(w) = |V(C_{3-i})| - t$ ,  $d_r(x) = d_b(w)$  y  $d_b(x) = d_r(w)$  para cada  $x \in \{w^r, w^b\}$ .

La última afirmación en (iii) se sigue directamente de lo anterior, pues  $C_i$  es alternante para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

□

**Definición 4.15.** Sea  $\mathcal{F} = \{C, H\}$  una factorización de una gráfica  $G$  tal que  $C$  es un ciclo alternante. Un vértice  $v \in V(C)$  es *singular rojo* (*singular azul*) con respecto a  $H$  si  $\{vu \mid u \in V(H)\}$  es no vacío y todas las aristas en  $\{vu \mid u \in V(H)\}$  son rojas (azules);  $v$  es *singular* con respecto a  $H$  si es singular rojo o singular azul con respecto a  $H$ . En otro caso, diremos que  $v$  es *no singular* con respecto a  $H$ .

Al color de las aristas exteriores que inciden con un vértice singular  $v$ , lo llamaremos la *singularidad* de  $v$  con respecto a  $H$  y lo denotaremos por  $s_H(v)$ .

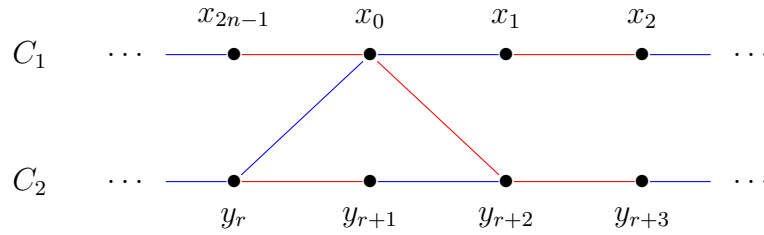
Ahora demostraremos un lema que nos será de utilidad en las demostraciones de las proposiciones 4.17 y 4.21, las cuales proporcionan condiciones suficientes para que una suma g.c. de dos gráficas b.a. hamiltonianas alternantes sea una gráfica pancíclica alternante en vértices.

**Lema 4.16.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si no existe un par bueno y para cada  $i \in \{1, 2\}$ , en  $C_i$  existe un vértice no singular con respecto a  $C_{3-i}$ . Entonces existen índices  $r \in [0, 2m-1]$  y  $s \in [0, 2n-1]$  tales que  $x_0 y_r y_{r+1} y_{r+2} x_0$  y  $y_0 x_s x_{s+1} x_{s+2} y_0$  son 4-ciclos alternantes (figura 4.3).

*Demostración.* Por hipótesis, existen vértices  $u \in V(C_1)$  y  $v \in C_2$  que son no singulares con respecto a  $C_2$  y  $C_1$ , respectivamente. Así, hay una arista exterior roja y una arista exterior azul que inciden en  $u$  y hay una arista exterior roja y una arista exterior azul que inciden en  $v$ . De donde  $d_r(u) \geq 1$ ,  $d_b(u) \geq 1$ ,  $d_r(v) \geq 1$ ,  $d_b(v) \geq 1$ . Como no hay pares buenos, por el lema 4.14 (ii),  $d_r(w) \geq 1$ ,  $d_b(w) \geq 1$  para todo  $w \in V(C_1) \cup V(C_2) = V(G)$ . Por lo tanto,  $G$  no tiene vértices singulares.

Procediendo por contradicción, supongamos que no existe un índice  $r \in [0, 2m-1]$  tal que el ciclo  $x_0 y_r y_{r+1} y_{r+2} x_0$  es alternante.

Consideremos una arista exterior azul que incida en  $x_0$ , a saber  $x_0 y_h$ . Alguna de las aristas  $y_h y_{h+1}$  o  $y_h y_{h-1}$  es roja, supongamos s.p.g. que  $y_h y_{h+1}$  es roja y fijemos  $h$ , donde  $h \in [0, 2m-1]$ . Nuestra hipótesis asegura que  $x_0 y_{h+2}$  es azul, de otro modo  $x_0 y_h y_{h+1} y_{h+2} x_0$  sería un 4-ciclo alternante. Ahora, considerando  $x_0 y_{h+2}$ , podemos argumentar de la misma manera y obtenemos que  $x_0 y_{h+4}$  es azul. Si continuamos de esta manera, podemos concluir que  $x_0 y_{h+2j}$  es azul para todo  $j \in [0, m-1]$ . Como

Figura 4.3: Un 4-ciclo alternante  $x_0 y_r y_{r+1} y_{r+2} x_0$ 

$G$  no tiene vértices singulares, existe una arista exterior roja  $x_0 y_{h+2t+1}$  que incide en  $x_0$ , para algún  $t \in [0, m-1]$ . Dado que  $y_{h+2t+1} y_{h+2t+2}$  es azul, argumentando como antes obtenemos que  $x_0 y_{h+2t+1}$  es roja para todo  $t \in [0, m-1]$ .

Recordemos que  $G$  no tiene pares buenos. Entonces, por el lema 4.14 (ii) todas las aristas en la clase paralela de  $x_0 y_{h+2j}$  que tienen a  $y_h$  como extremo deben ser azules y todas las aristas en la clase paralela de  $x_0 y_{h+2j+1}$  que tienen a  $y_h$  como extremo deben ser azules también, pues  $y_h \equiv y_{h+2j} \pmod{2}$  y  $y_h \not\equiv y_{h+2j+1} \pmod{2}$ , y esto es cierto para todo  $j \in [0, m-1]$ . Por lo que  $y_h$  es un vértice singular azul, lo cual es una contradicción.

Para probar la existencia del índice  $s \in [0, 2n-1]$  tal que  $y_0 x_s x_{s+1} x_{s+2} y_0$  es un 4-ciclo alternante, basta cambiar los roles de  $C_1$  y  $C_2$  en la prueba para  $r$ .  $\square$

En las siguientes dos proposiciones, dada una gráfica  $G$  en la suma g.c. de dos gráficas b.a. hamiltonianas alternantes,  $G_1$  y  $G_2$ , construiremos, para cada  $v \in V(G)$  y cada longitud par  $2l$  en  $[4, |V(G_1)| + |V(G_2)|]$ , un ciclo alternante de longitud  $2l$  que pase por  $v$ .

**Proposición 4.17.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $G$  no contiene pares buenos y, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , en  $C_i$  existe un vértice no singular con respecto a  $C_{3-i}$ . Entonces, para cada vértice  $v \in V(G)$  y cada longitud par  $2l$  en  $[4, 4m_1] \cup [2M_2, 2n + 2m]$ , existe un ciclo alternante de longitud  $2l$  que pasa por  $v$ , donde  $m_1 = \min\{n, m\}$  y  $M_2 = \max\{n, m\}$ .

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $n \geq m$ .

Por el lema 4.16, existe un índice  $r \in [0, 2m-1]$  tal que  $x_0 y_r y_{r+1} y_{r+2} x_0$  es un 4-ciclo alternante.

Supongamos s.p.g. que  $x_0y_r$  es azul, entonces  $y_r y_{r+1}$  y  $x_0y_{r+2}$  son rojas y  $y_{r+1}y_{r+2}$  es azul. Como  $C_2$  es un ciclo alternante  $y_{r+2j}y_{r+2j+1}$  es roja para todo  $j \in [0, m-1]$  y  $y_{r+2j+1}y_{r+2j+2}$  es azul para todo  $j \in [0, m-1]$ .

Podemos suponer que  $x_0x_1$  es roja. Dado que  $G$  no tiene pares buenos, las siguientes afirmaciones son consecuencia de la definición 4.9 y del lema 4.14 (ii) (figura 4.4):

- $x_{2n-2j}y_{r-2j}$  es una arista exterior azul para todo  $j \in [0, l-1]$ , donde  $l = \text{mcm}(n, m)$ , (i.e.  $x_{2j}y_{r+2j}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, l-1]$ ).
- $x_{2n-2j-1}y_{r-2j-1}$  es una arista exterior roja para todo  $j \in [0, l-1]$  (i.e.  $x_{2j+1}y_{r+2j+1}$  es una arista exterior roja para todo  $j \in [0, l-1]$ ).
- $x_{2j}y_{r+2j+2}$  es una arista exterior roja para todo  $j \in [0, l-1]$ .
- $x_{2j+1}y_{r+2j+3}$  es una arista exterior azul para todo  $j \in [0, l-1]$ .

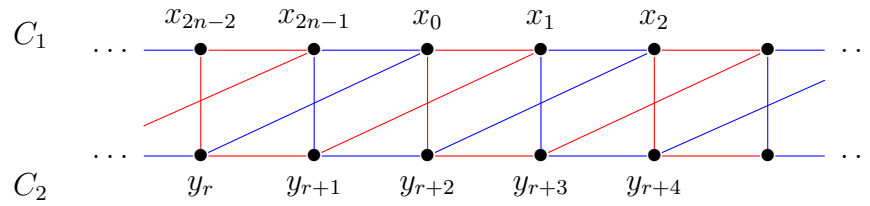


Figura 4.4: Clases paralelas de  $x_0y_r$  y  $x_0y_{r+2}$

Sean  $t \in [0, 2n-1]$  y  $h \in [0, 2m-3]$ . Consideremos el ciclo  $\alpha_h^t = x_t y_{r+t} y_{r+t+1} \cdots y_{r+t+h+2} x_{t+h} x_{t+h-1} \cdots x_t$ .

*Afirmación 4.18.* El ciclo  $\alpha_h^t$  es alternante para todo  $t \in [0, 2n-1]$  y todo  $h \in [0, 2m-3]$ .

*Demostración de la afirmación 4.18.* Tenemos cuatro combinaciones posibles de las paridades de  $t$  y  $h$ .

Caso 1:  $t$  es par. Entonces  $x_t y_{r+t}$  es azul,  $x_t y_{r+t+2}$  es roja,  $y_{r+t} y_{r+t+1}$  es roja.

Caso 1.1:  $h$  es par. Así,  $y_{r+t} y_{r+t+1} \cdots y_{r+t+h+2}$  es una trayectoria alternante cuya primera arista es roja y cuya última arista es azul,  $x_{t+h} y_{r+t+h+2}$  es roja,  $x_{t+h} x_{t+h-1} \cdots x_t$  es una trayectoria alternante cuya primera arista es azul y cuya última arista es roja.

Caso 1.2:  $h$  es impar. Así,  $y_{r+t} y_{r+t+1} \cdots y_{r+t+h+2}$  es una trayectoria alternante que inicia y termina en aristas rojas,  $x_{t+h} y_{r+t+h+2}$  es azul,  $x_{t+h} x_{t+h-1} \cdots x_t$  es una trayectoria alternante que inicia y termina en aristas rojas.

Caso 2:  $t$  es impar. Entonces  $x_t y_{r+t}$  es roja,  $x_t y_{r+t+2}$  es azul,  $y_{r+t} y_{r+t+1}$  es azul.

Caso 2.1:  $h$  es par. Así,  $y_{r+t} y_{r+t+1} \cdots y_{r+t+h+2}$  es una trayectoria alternante cuya primera arista es azul y cuya última arista es roja,  $x_{t+h} y_{r+t+h+2}$  es azul,  $x_{t+h} x_{t+h-1} \cdots x_t$  es una trayectoria alternante cuya primera arista es roja y cuya última arista es azul.

Caso 2.2:  $h$  es impar. Así,  $y_{r+t} y_{r+t+1} \cdots y_{r+t+h+2}$  es una trayectoria alternante que inicia y termina en aristas azules,  $x_{t+h} y_{r+t+h+2}$  es roja,  $x_{t+h} x_{t+h-1} \cdots x_t$  es una trayectoria alternante que inicia y termina en aristas azules.

Por lo tanto, el ciclo  $\alpha_h^t$  es alternante para todo  $t \in [0, 2n - 1]$  y todo  $h \in [0, 2m - 3]$ . ■

El ciclo  $\alpha_h^t$  tiene longitud  $l(\alpha_h^t) = 1 + (h + 2) + 1 + h = 2h + 4$  para cada  $h \in [0, 2m - 3]$ . De donde, existen ciclos alternantes de longitud  $l$  para cada entero par  $l$ ,  $4 \leq l \leq 4m$  que contienen a  $x_t$  y a  $y_{r+t}$  para cada  $t \in [0, 2n - 1]$ . Recordemos que  $n \geq m$ , entonces hasta ahora hemos probado que para cada vértice de  $G$  existen ciclos alternantes de todas las longitudes pares entre 4 y  $4m_1$  que lo contienen.

Sea  $t \in [0, 2n - 1]$ . El ciclo  $\beta^t = x_t y_{r+t+2} x_{t+2} x_{t+3} \cdots x_t$  es alternante ya que lo obtenemos a partir de  $C_1$  al reemplazar la subtrayectoria alternante  $x_t x_{t+1} x_{t+2}$  de  $C_1$  por la trayectoria también alternante  $x_t y_{r+t+2} x_{t+2}$ ; notemos que  $c(x_t x_{t+1}) = c(x_t y_{r+t+2})$  y que  $c(x_{t+1} x_{t+2}) = c(y_{r+t+2} x_{t+2})$ , donde  $c$  es la coloración de aristas de  $G$ .

Por lo tanto, para todo  $t \in [0, 2n - 1]$ ,  $\beta^t$  es un ciclo alternante de longitud  $2n$  que contiene a  $x_t$  y a  $y_{r+t+2}$ . Así, para cada vértice de  $G$  existe algún ciclo alternante de longitud  $2n$  que lo contiene.

Finalmente, sean  $t \in 2[0, n - 1]$  y  $k \in [0, m - 1]$ . Consideremos ahora el ciclo  $\gamma_h^t = x_t y_{r+t+2} y_{r+t+1} x_{t+1} x_{t+2} y_{r+t+4} y_{r+t+3} x_{t+3} \cdots x_{t+2h} y_{r+t+2h+2} y_{r+t+2h+1} x_{t+2h+1} x_{t+2h+2} \cdots x_t$   
*Afirmación 4.19.* El ciclo  $\gamma_h^t$  es alternante para todo  $t \in 2[0, n - 1]$  y todo  $h \in [0, m - 1]$ .

*Demostración de la afirmación 4.19.*

Como  $t$  es par, se sigue que  $x_{t+2j}y_{r+t+2j+2}$  es roja,  $y_{r+t+2j+2}y_{r+t+2j+1}$  es azul,  $y_{r+t+2j+1}x_{t+2j+1}$  es roja y  $x_{t+2j+1}x_{t+2j+2}$  es roja para todo  $j \in [0, m-1]$  y  $x_{t-1}x_t$  es azul. De donde,  $\gamma_h^t$  es alternante para todo  $t \in 2[0, n-1]$  y todo  $h \in [0, m-1]$  (figura 4.5.)

■

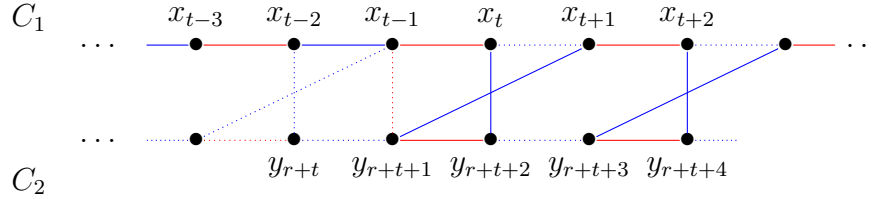


Figura 4.5: Un ciclo alternante  $\gamma_h^t$  en  $G$

Ahora, el ciclo  $\gamma_h^t$  tiene longitud  $l(\gamma_h^t) = 2n + 2h + 2$  para todo  $h \in [0, m-1]$  y de aquí se sigue que hay ciclos alternantes de longitud  $l$  para cada entero par  $l$ ,  $2n + 2 \leq l \leq 2n + 2m$ , que contienen a  $x_t$ , a  $x_{t+1}$ , a  $y_{r+t+1}$  y a  $y_{r+t+2}$  para todo  $t \in [0, 2n-1]$ . Dado que  $n \geq m$  tenemos que, para cada vértice de  $G$ , existen ciclos alternantes de todas las longitudes pares entre  $2M_2 + 2$  y  $2n + 2m$  que lo contienen. Esto concluye la prueba. □

**Definición 4.20.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de enteros y  $k$  un entero positivo. Diremos que  $A$  es un *conjunto módulo  $k$*  si satisface que  $a_1 \not\equiv a_2 \pmod{k}$ , para cada par de elementos diferentes,  $a_1$  y  $a_2$ , en  $A$ . Además, diremos que  $A$  y  $B$  son *iguales módulo  $k$*  si ambos son conjuntos módulo  $k$  y existe una función biyectiva  $\sigma: A \rightarrow B$  tal que  $a \equiv \sigma(a) \pmod{k}$ , para cada  $a \in A$ .

**Proposición 4.21.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $G$  no contiene pares buenos y, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , en  $C_i$  existe un vértice no singular con respecto a  $C_{3-i}$ , entonces, para cada vértice  $v \in V(G)$  y cada longitud par  $2l$  en  $[4m_1, 2M_2]$ , existe un ciclo alternante de longitud  $2l$  que pasa por  $v$ , donde  $m_1 = \min\{n, m\}$  y  $M_2 = \max\{n, m\}$ .

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $n \geq m$ .

Por el lema 4.16, existe un índice  $s \in [0, 2n-1]$  tal que  $y_0 x_s x_{s+1} x_{s+2} y_0$  es un 4-ciclo alternante.

Asumamos s.p.g. que  $y_0x_s$  es azul, entonces  $x_sx_{s+1}$  y  $y_0x_{s+2}$  son rojas y  $x_{s+1}x_{s+2}$  es azul. Como  $C_1$  es un ciclo alternante  $x_{s+2i}x_{s+2i+1}$  es roja para cada  $i \in [0, n-1]$  y  $x_{s+2i+1}x_{s+2i+2}$  es azul para cada  $i \in [0, n-1]$ .

Podemos suponer, además, que  $y_0y_1$  es roja. Dado que  $G$  no tiene pares buenos, las siguientes afirmaciones se siguen directamente de la definición 4.9 (de clase paralela) y del lema 4.14 (ii):

- $y_{2m-2j}x_{s-2j}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, l-1]$ , donde  $l = \text{mcm}(n, m)$ , (i.e.  $y_{2j}x_{s+2j}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, l-1]$ ).
- $y_{2m-2j-1}x_{s-2j-1}$  es una arista exterior roja para cada  $j \in [0, l-1]$  (i.e.  $y_{2j+1}x_{s+2j+1}$  es una arista exterior roja para cada  $j \in [0, l-1]$ ).
- $y_{2j}x_{s+2j+2}$  es roja para cada  $j \in [0, l-1]$ .
- $y_{2j+1}x_{s+2j+3}$  es azul para cada  $j \in [0, l-1]$ .

Más aún, como  $y_{2j}x_{s+2j}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, l-1]$  tenemos, en particular, que  $y_{2mj}x_{s+2mj}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, \frac{l}{m}-1]$ , donde  $y_{2mj} = y_0$  pues  $2mj \equiv 0 \pmod{2m}$ .

Consideremos  $d = \text{mcd}(n, m)$ , como  $ld = mn$  entonces  $l/m = n/d = n'$ . Así,  $y_0x_{s+2mj}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, n'-1]$ .

*Afirmación 4.22.* Los conjuntos de índices  $\{s+2mj\}_{j=0}^{n'-1}$  y  $\{s+2dj\}_{j=0}^{n'-1}$  son iguales módulo  $2n$ .

*Demostración Claim.* Sea  $m' = m/d$ . Para empezar, probemos que ambos conjuntos tienen  $n'$  elementos: Tomemos  $\{i, j\} \subset [0, n'-1]$ . Si  $s+2mj \equiv s+2mi \pmod{2n}$ , entonces  $2n$  divide a  $s+2mj - (s+2mi) = 2m(j-i) = 2dm'(j-i)$ , lo cual implica que  $n'$  divide a  $m'(j-i)$ , pues  $n = dn'$ . Como  $\text{mcm}(n', m') = 1$ , se sigue que  $n'$  divide a  $j-i$  y esto es cierto si y sólo si  $j-i = 0$ . Usando un argumento similar se puede ver que  $s+2dj \equiv s+2di \pmod{2n}$  si y sólo si  $j = i$ .

Ahora, para cada  $j \in [0, n'-1]$  consideremos el número  $m'j$ . Por el algoritmo de la división, sabemos que existen dos enteros únicos,  $q \geq 0$  y  $j' \in [0, n'-1]$ , tales que  $m'j = n'q + j' \equiv j' \pmod{n'}$ . Tomemos la función  $\sigma: \{s+2mj\}_{j=0}^{n'-1} \rightarrow \{s+2dj\}_{j=0}^{n'-1}$  dada por  $\sigma(s+2mj) = s+2dj'$ . Observemos que  $s+2mj = s+2dm'j = s+2d(n'q + j') = s+2nq + 2dj' \equiv s+2dj' \pmod{2n}$ , entonces  $s+2mj \equiv \sigma(s+2mj) \pmod{2n}$  para cada índice en  $\{s+2mj\}_{j=0}^{n'-1}$ . Ahora veremos que  $\sigma$  es inyectiva: Sean  $s+2mj$  y  $s+2mi$  dos índices distintos en  $\{s+2mj\}_{j=0}^{n'-1}$ , entonces  $i \neq j$  y  $s+2mj \not\equiv s+2mi \pmod{2n}$ , por lo anterior. Por la manera en que definimos  $\sigma$ , tenemos que  $s+2mj \equiv$

$\sigma(s + 2mj) = s + 2dj'$  (mód  $2n$ ) y que  $s + 2mi \equiv \sigma(s + 2mi) = s + 2di'$  (mód  $2n$ ) para algunos  $j'$  e  $i'$  en  $[0, n' - 1]$ . Entonces,  $s + 2dj' \equiv s + 2mj \not\equiv s + 2mi \equiv s + 2di'$  (mód  $2n$ ) y, así,  $s + 2dj'$  y  $s + 2di'$  son dos índices distintos en  $\{s + 2dj\}_{j=0}^{n'-1}$ . De esta manera,  $\sigma$  es una función inyectiva entre un par de conjuntos finitos con el mismo número de elementos, por lo que podemos concluir que  $\sigma$  es biyectiva. Lo cual concluye la prueba de la afirmación. ■

Como  $\{s + 2mj\}_{j=0}^{n'-1}$  y  $\{s + 2dj\}_{j=0}^{n'-1}$  son iguales módulo  $2n$ , tenemos que  $\{x_{s+2mj}\}_{j=0}^{n'-1} = \{x_{s+2dj}\}_{j=0}^{n'-1}$ . Entonces,  $\{y_0 x_{s+2mj}\}_{j=0}^{n'-1} = \{y_0 x_{s+2dj}\}_{j=0}^{n'-1}$  y, así,  $y_0 x_{s+2dj}$  es una arista exterior azul para cada  $j \in [0, n' - 1]$ .

Entonces, por la definición 4.9 y el lema 4.14 (ii), tenemos que  $y_{2i} x_{s+2dj+2i}$  es una arista exterior azul para cada  $i \in [0, l - 1]$  y cada  $j \in [0, n' - 1]$  y  $y_{2i+1} x_{s+2dj+2i+1}$  es una arista exterior roja para cada  $i \in [0, l - 1]$  y cada  $j \in [0, n' - 1]$ .

Sea  $r \in [1, n' - 1]$ ,  $h \in [0, d - 1]$  y  $t \in [0, l - 1]$ . Consideremos el ciclo  $\xi(r, h, t) = y_{2t} x_{s+2t} x_{s+2t+1} \cdots x_{s+2t+2dr+h} y_{2t+h} y_{2t+h-1} \cdots y_{2t}$ .

*Afirmación 4.23.*  $\xi(r, h; t)$  es alternante para cada  $r \in [1, n' - 1]$ , cada  $h \in [0, d - 1]$  y cada  $t \in [0, l - 1]$ .

*Demostración de la afirmación 4.23.* Sabemos que la arista  $y_{2t} x_{s+2t}$  es azul. Como  $x_{s+2i} x_{s+2i+1}$  es roja para cada  $i \in [0, n - 1]$  y  $x_{s+2i+1} x_{s+2i+2}$  es azul para cada  $i \in [0, n - 1]$ , se sigue que la trayectoria alternante  $x_{s+2t} x_{s+2t+1} \cdots x_{s+2t+2dr+h}$  empieza en una arista roja y, dependiendo de la paridad de  $h$ , termina en una arista azul si  $h$  es par y termina en una arista roja si  $h$  es impar.

Más aún, dado que  $y_{2j} x_{s+2j+2}$  es roja para cada  $j \in [0, l - 1]$  y  $y_{2j+1} x_{s+2j+3}$  es azul para cada  $j \in [0, l - 1]$ ; tenemos que  $x_{s+2t+2dr+h} y_{2t+h}$  es roja si  $h$  es par y es azul si  $h$  es impar.

Como  $y_0 y_1$  es roja y  $C_2$  es alternante, se sigue que  $y_{2i} y_{2i+1}$  es roja para cada  $i \in [0, m - 1]$  y  $y_{2i+1} y_{2i+2}$  es azul para cada  $i \in [0, m - 1]$ . De esta manera, la trayectoria alternante  $y_{2t+h} y_{2t+h-1} \cdots y_{2t}$ , empieza en una arista azul si  $h$  es par, empieza en una arista roja si  $h$  es impar y, en cualquier caso, termina en una en una arista roja.

Por lo tanto, para cada  $r \in [1, n' - 1]$ , cada  $h \in [0, d - 1]$  y cada  $t \in [0, l - 1]$ , el ciclo  $\xi(r, h; t)$  es alternante y tiene longitud  $l(\xi(r, h; t)) = 1 + (2dr + h) + 1 + h = 2 + 2dr + 2h$ . ■

Entonces, para cada  $t \in [0, l - 1]$ , existen ciclos de cada longitud par en  $[2 + 2d, 2 + 2d(n' - 1) + 2(d - 1)] = [2 + 2d, 2n]$  que pasan por  $y_{2t}$  y por  $x_{s+2t}$ .

Ahora, tomemos  $r \in [1, n' - 1]$ ,  $h \in [0, d - 1]$  y  $t \in [0, l - 1]$ , y consideremos el ciclo  $\xi'(r, h, t + 1) = y_{2t+1} x_{s+2t+1} x_{s+2t+2} \cdots x_{s+2t+1+2dr+h} y_{2t+1+h} y_{2t+h} \cdots y_{2t+1}$ .

De manera similar, se puede probar, para cada  $t \in [0, l - 1]$ , que  $\xi'(r, h, t + 1)$  es alternante, tiene longitud  $2 + 2dr + 2h$  y pasa por  $y_{2t+1}$  y  $x_{s+2t+1}$ .

Por lo tanto, para cada  $w \in V(G)$  y cada longitud par  $l$  en  $[2 + 2d, 2n]$ , existe un ciclo alternante de longitud  $l$  en  $G$  que pasa por  $w$ . Dado que  $d = \text{mcd}(n, m)$  se sigue que  $2 + 2d \leq 4m$  y, así, tenemos el resultado.  $\square$

Como consecuencia de las proposiciones 4.17 y 4.21 tenemos el siguiente teorema, que no requiere demostración.

**Teorema 4.24.** *Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $G$  no contiene pares buenos y, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , en  $C_i$  existe un vértice no singular con respecto a  $C_{3-i}$ , entonces  $G$  es pancíclica alternante en vértices.*

Consideremos la siguiente construcción: Dada una gráfica bipartita completa bicoloreada en aristas  $G$ , cuya partición de vértices está dado por los conjuntos  $X$  y  $Y$ , se construye una gráfica completa bicoloreada en aristas  $H$  a partir de  $G$ , añadiendo todas las aristas posibles entre los vértices de  $X$  de color rojo y todas las aristas posibles entre los vértices de  $Y$  de color azul. Así, la subgráfica inducida en  $H$  por  $X$  es una gráfica completa monocromática roja y la subgráfica inducida en  $H$  por  $Y$  es una gráfica completa monocromática azul. De esta manera,  $H$  es una gráfica completa bicoloreada en aristas tal que cada ciclo alternante en  $H$  es también un ciclo alternante en  $G$ , pues ningún ciclo alternante en  $H$  contiene aristas en  $H \langle X \rangle$ , ni en  $H \langle Y \rangle$ ; por lo tanto,  $H$  es pancíclica alternante (en vértices) si, y sólo si,  $G$  es pancíclica alternante (en vértices). Esta construcción fue introducida, primero, por Das en [7] y, después, por Häggkvist y Manoussakis en [14], se le conoce como construcción DHM [2].

Ahora veremos un ejemplo que muestra por qué no podemos usar una construcción similar para demostrar nuestros resultados. Consideremos la gráfica en la figura 4.6. Una construcción tipo DHM añadiría aristas a la gráfica hasta obtener una gráfica completa, el objetivo de dicha construcción es que la gráfica completa tenga el mismo conjunto de ciclos alternantes que la gráfica original. Sin embargo, esto no se puede hacer con la gráfica propuesta (si se intenta añadir la arista  $x_0 x_2$ , en cualquier color, esta produce ciclos alternantes nuevos). Notemos que la gráfica de

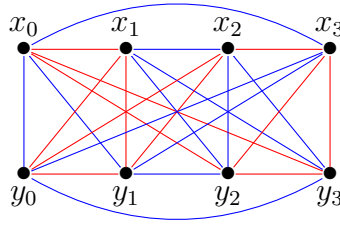


Figura 4.6: Gráfica  $G \in C_1 \oplus C_2$  que no admite una construcción tipo DHM

la figura 4.6 satisface las hipótesis del teorema 4.24 y, así, es una gráfica pancíclica alternante local.

Este ejemplo muestra que las afirmaciones que aquí se demostraron se satisfacen para una familia de gráficas diferente de las completas y las bipartitas completas bicoloradas en aristas.

### 4.2.1. Resultados principales sobre panciclismo alternante local

En este apartado vamos a generalizar el teorema 4.24 para una gráfica  $G$  en la suma g.c. de  $k$  gráficas b.a. hamiltoniana alternantes ajenas por pares. Para ello definiremos un *ciclo bueno*.

De la definición de par bueno de aristas y de las observaciones 4.6 y 4.7, se tiene lo siguiente:

**Observación 4.25.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas,  $\alpha_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $\alpha_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$  dos ciclos alternantes en  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $x_s y_t$  y  $y_{t'} x_{s'}$  forman un par bueno de aristas, entonces  $\mathcal{C} = x_s x_{s'} y_{t'} y_t x_s$  es un 4-ciclo monocromático cuyas aristas pertenecen, alternadamente, a  $E_\oplus$  y a  $E(\alpha_1) \cup E(\alpha_2)$ , es decir,  $\{x_{s'} y_{t'}, y_t x_s\} \subset E_\oplus$ ,  $x_s x_{s'} \in E(\alpha_1)$  y  $y_{t'} y_t \in E(\alpha_2)$ .

**Definición 4.26.** Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de gráficas b.a. ajenas por pares y  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$ . A un 4-ciclo monocromático  $\mathcal{C} = v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$  en  $G$ , lo llamaremos *ciclo bueno* si  $\{v_0 v_1, v_2 v_3\} \subset E_\oplus$ , o  $\{v_1 v_2, v_3 v_0\} \subset E_\oplus$ , o ambas. Es decir, si dos aristas opuestas de  $\mathcal{C}$  son exteriores.

**Teorema 4.27.** Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de  $k \geq 2$  gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$ . Si

no hay ciclos buenos en  $G$  y, para cada par de índices diferentes  $\{i, j\} \subset [1, k]$ , en  $C_i$  existe un vértice no singular con respecto a  $C_j$ . Entonces  $G$  es pancíclica alternante en vértices.

*Demostración.* Demostraremos el resultado por inducción sobre  $k$ .

Si  $k = 2$ , como  $G$  no contiene ciclos buenos,  $G$  tampoco tiene pares buenos con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ . De no ser así, si  $G$  contiene un par bueno, la observación 4.25 asegura que  $G$  contiene un ciclo bueno, lo cual es imposible. Entonces,  $G$  satisface las hipótesis del teorema 4.24 y, por lo tanto,  $G$  es pancíclica alternante local.

Supongamos que la afirmación del teorema cumple para  $k' = k - 1$ .

Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y sea  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$  tal que  $G$  no contiene ciclos buenos.

Consideremos  $G_0 = G \langle V(G_{k-1}) \cup V(G_k) \rangle$ . Por hipótesis, existen vértices  $v \in V(C_{k-1}) \subset V(G_0)$  y  $w \in V(C_k) \subset V(G_0)$  tales que  $v$  es no singular respecto a  $C_k$  y  $w$  es no singular respecto a  $C_{k-1}$ .

Además, como  $G_0$  es una subgráfica de  $G$ , no contiene ciclos buenos. Por lo cual,  $G_0$  satisface la base de inducción y, así,  $G_0$  es pancíclica alternante local, en particular  $G_0$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante,  $C_0$ .

Observemos que  $G_0, G_1, \dots, G_{k-2}$  es una colección de  $k - 1$  gráficas b.a. hamiltonianas alternantes ajenas y, por la observación 4.2,  $G \in \bigoplus_{i=0}^{k-2} G_i$ .

Más aún,  $G \in \bigoplus_{i=0}^{k-2} G_i$  no contiene ciclos buenos y, para cada par de índices diferentes  $\{i', j'\} \subset [0, k - 2]$ , en  $C_{i'}$  existe un vértice no singular con respecto a  $C_{j'}$ . Entonces, por hipótesis de inducción,  $G$  es pancíclica alternante local.  $\square$

En esta sección consideramos sumas g.c. de gráficas b.a. hamiltonianas alternantes que no contienen pares buenos (a su generalización, ciclos buenos) y tienen, en cada sumando, al menos un vértice no singular con respecto a cada uno de los otros; de esta manera, obtuvimos condiciones que son fáciles de revisar para saber si una suma g.c. es pancíclica alternante local. En la siguiente sección veremos qué ocurre cuando hay pares buenos o vértices singulares.

### 4.3. Panciclismo alternante

En esta sección daremos una clasificación completa de las gráficas en la suma g.c. de dos gráficas b.a. hamiltonianas alternantes. Daremos condiciones para determinar

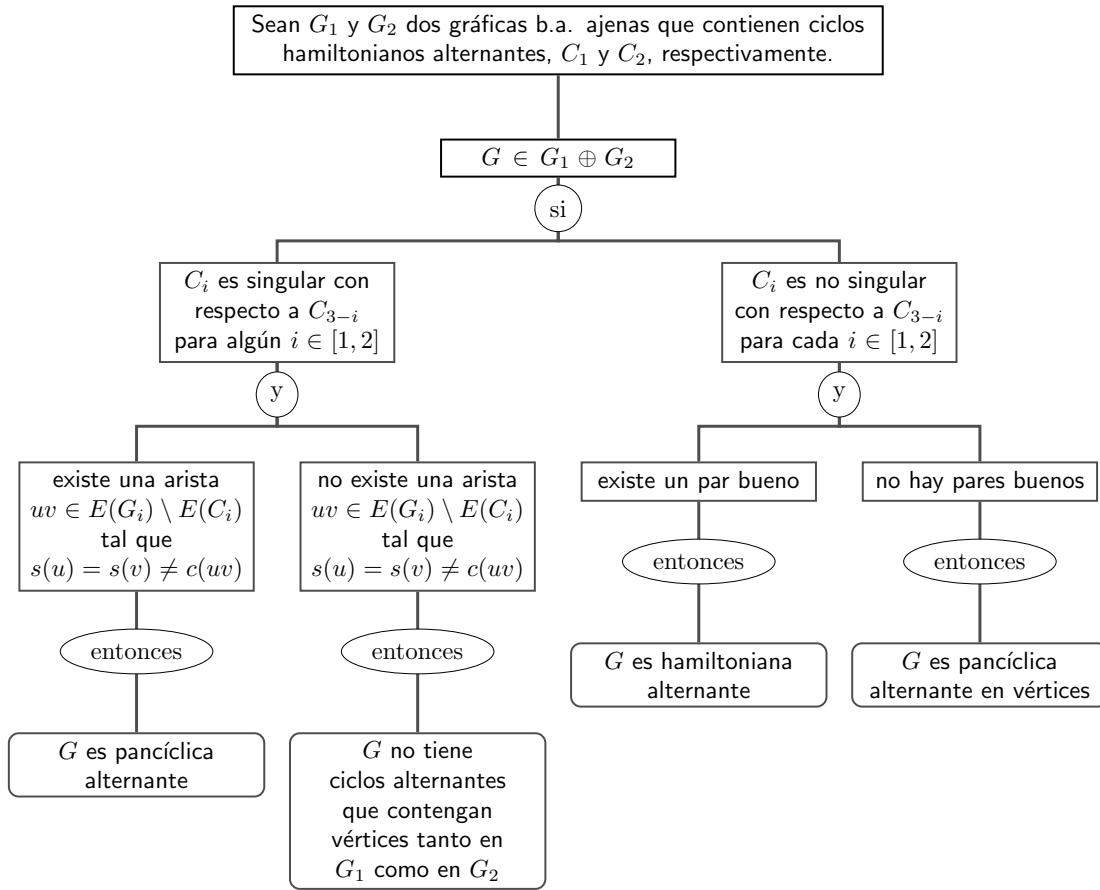


Figura 4.7: Teorema 4.38

si una gráfica es pancíclica alternante, pancíclica alternante local o, simplemente, hamiltoniana alternante (figura 4.7).

Además, daremos una extensión de estos resultados, la cual proporciona condiciones suficientes para que una gráfica en la suma g.c. de  $k$  gráficas b.a. hamiltonianas alternantes sea hamiltoniana alternante o pancíclica alternante.

**Definición 4.28.** Sea  $G$  una gráfica y sean  $C$  y  $H$  dos subgráficas de  $G$  mutuamente ajenas, donde  $C$  es un ciclo alternante. El ciclo  $C$  es *singular* con respecto a  $H$ , si los vértices de  $C$  son singulares con respecto a  $H$  y alternan color: un singular rojo, un singular azul. En otro caso, diremos que  $C$  es *no singular* con respecto a  $H$ .

**Observación 4.29.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a.,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dos ciclos alternantes en  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si, para algún  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\alpha_i$  es singular

con respecto a  $G_{3-i}$  en  $G$ , entonces  $\alpha_{3-i}$  es no singular con respecto a  $G_i$ .

**Lema 4.30.** Sean  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$  dos ciclos alternantes ajenos y  $G \in C_1 \oplus C_2$ . Entonces  $C_i$  es singular con respecto a  $G_{3-i}$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$ , si y sólo si  $C_i$  tiene al menos un vértice singular con respecto a  $G_{3-i}$  y  $G$  no contiene pares buenos.

*Demostración.* Asumiremos s.p.g. que  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$ . Supongamos por contradicción que existe un par bueno  $x_s y_r, x_{s'} y_{r'}$  con  $s \in [0, 2n-1]$ ,  $s' \in \{s-1, s+1\}$ ,  $r \in [0, 2m-1]$ ,  $r' \in \{r-1, r+1\}$  y donde  $C = x_s x_{s'} y_{r'} y_r x_s$  es un 4-ciclo monocromático (s.p.g. rojo). Así,  $d_r(x_s) \geq 1$  y  $d_r(x_{s'}) \geq 1$ , contradiciendo la singularidad de  $C_1$ , ya que  $x_s$  y  $x_{s'}$  son vértices consecutivos en  $C_1$ .

El regreso se sigue directamente del lema 4.14 (iii).  $\square$

Dadas dos gráficas b.a. pancíclicas alternantes,  $G_1$  y  $G_2$ , una gráfica  $G \in G_1 \oplus G_2$  no necesariamente es hamiltoniana alternante, ya no digamos pancíclica alternante. De hecho se puede construir una familia de ejemplos de sumas g.c. de dos gráficas pancíclicas alternantes que consiste de gráficas que no son hamiltonianas alternantes. Para probarlo usaremos la siguiente proposición.

**Proposición 4.31.** Sean  $G_1$  una gráfica con un ciclo hamiltoniano alternante,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$ ,  $G_2$  una gráfica ajena a  $G_1$  y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$  en  $G$  y si para cada arista  $x_i x_l \in E(G_1) \setminus E(C_1)$  tal que  $i \equiv l \pmod{2}$  se satisface que  $c(x_i x_l) = s_{G_2}(x_i)$ , donde  $c$  es la coloración de aristas de  $G$ . Entonces  $G$  no contiene ciclos alternantes que contengan vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ .

*Demostración.* Supongamos por contradicción que existe un ciclo alternante  $\gamma$  en  $G$  tal que  $V(\gamma) \cap V(G_1) \neq \emptyset$  y  $V(\gamma) \cap V(G_2) \neq \emptyset$ .

Observemos que  $\gamma$  contiene una subtrayectoria de longitud al menos 1 que está contenida en  $G_1$ : Tomemos  $u \in V(\gamma) \cap V(G_1)$ . Como  $u$  es singular con respecto a  $G_2$  y  $\gamma$  es alternante al menos un vértice en  $\{u_\gamma^r, u_\gamma^b\}$  pertenece a  $G_1$ .

Sea  $P$  la subtrayectoria alternante más larga de  $\gamma$  contenida en  $G_1$ . Sea  $P = u_0 u_1 \cdots u_r$ . Entonces, el predecesor de  $u_0$ ,  $v_0$ , y el sucesor de  $u_r$ ,  $v_r$ , en  $\gamma$  pertenecen a  $G_2$ . Observemos que tanto  $P' = v_0 u_0 u_1 \cdots u_r$  como  $P'' = u_0 u_1 \cdots u_r v_r$  son subtrayectorias de  $\gamma$  y, por lo tanto, son alternantes.

Podemos suponer s.p.g. que  $u_0$  es singular rojo y así, la arista  $v_0 u_0$  es roja y la arista  $u_0 u_1$  es azul. Dado que  $P$  es alternante, para cada  $i \in [0, r-1]$ ,  $u_i u_{i+1}$  es azul si  $i$  es par y es roja si  $i$  es impar.

Por hipótesis, si dos índices,  $i$  y  $l$ , satisfacen  $i \equiv_{C_1} l \pmod{2}$  entonces  $c(x_i x_l) = s_{G_2}(x_i)$ , lo cual indica que si hay una arista entre dos vértices singulares rojos de  $C_1$ , esta es roja y si hay una arista entre dos vértices singulares azules de  $C_1$ , esta es azul. Como  $u_0$  es singular rojo y  $u_0 u_1$  es azul, tenemos que  $u_1$  es un vértice singular azul, y como  $u_1 u_2$  es roja, se sigue que  $u_2$  es singular rojo. Argumentando de esta forma obtenemos que, para cada  $i \in [0, r-1]$ :  $u_{i+1}$  es singular azul y  $u_i u_{i+1}$  es azul si  $i$  es par; y  $u_{i+1}$  es singular rojo y  $u_i u_{i+1}$  es roja si  $i$  es impar.

Caso 1:  $r$  es par. Entonces  $r-1$  es impar, así  $u_r$  es singular rojo y  $u_{r-1} u_r$  es roja. Como  $u_r$  es singular rojo,  $u_r v_r$  es roja, lo cual contradice que  $P''$  es alternante.

Caso 2:  $r$  es impar. Entonces  $r-1$  es par, así  $u_r$  es singular azul y  $u_{r-1} u_r$  es azul. Como  $u_r$  es singular azul,  $u_r v_r$  es azul, lo cual contradice que  $P''$  es alternante.

Por lo tanto,  $G$  no tiene ciclos alternantes que contengan vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ .  $\square$

Para construir el ejemplo de una suma g.c. de dos gráficas b.a. pancíclicas alternantes que no resulte pancíclica alternante, definiremos una familia de gráficas completas como sigue: Sea  $\mathcal{AP}_{2n}$ , donde  $n \geq 2$ , la familia de gráficas b.a. completas  $G$ , tal que  $V(G) = V_{2n} = \{x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}\}$  y  $E(G)$  satisface: (i)  $E(C_{2n}) \subset E(G)$ ; (ii)  $G\langle\{x_i \mid i \equiv 0 \pmod{2}\}\rangle$  es una gráfica completa de color rojo y  $G\langle\{x_i \mid i \equiv 1 \pmod{2}\}\rangle$  es una gráfica completa de color azul, es decir, una arista  $x_i x_j \in E(G)$  es roja si  $i \equiv j \equiv 0 \pmod{2}$  y es azul si  $i \equiv j \equiv 1 \pmod{2}$ ; (iii)  $x_0 x_{2i+1}$  es azul, para cada  $i \in [1, n-1]$ ; (iv) las aristas restantes tienen cualquier color.

El conjunto  $\mathcal{AP}_{2n}$  es no vacío para cada  $n \geq 2$  y consiste de gráficas b.a. pancíclicas alternantes ya que, para cada  $i \in [1, n-1]$ , la sucesión  $x_0 x_1 \cdots x_{2i+1} x_0$  es un ciclo alternante de longitud  $2i+2$ . Sea  $\mathcal{AP} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{AP}_{2n}$ ,  $\mathcal{AP}$  es una familia numerable de gráficas b.a. pancíclicas alternantes que tiene al menos una gráfica de orden  $2n$  para cada  $n \geq 2$  (figura 4.8).

**Observación 4.32.** Sean  $G_1 \in \mathcal{AP}$  de orden  $2n$ ,  $G_2$  una gráfica b.a. pancíclica alternante y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $C_{2n}$  es singular con respecto a  $G_2$  en  $G$  y  $s_{G_2}(x_0) = \text{rojo}$ , entonces  $G$  no contiene ciclos alternantes con vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ . En consecuencia,  $G$  no es pancíclica alternante.

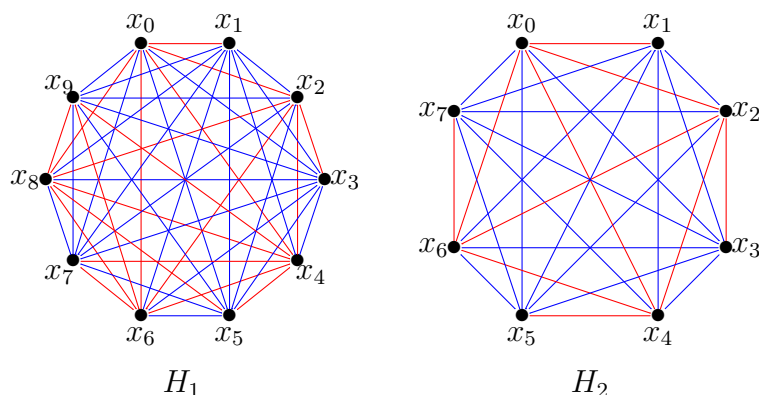


Figura 4.8: Ejemplos de gráficas en  $\mathcal{AP}$ :  $H_1 \in \mathcal{AP}_{10}$  y  $H_2 \in \mathcal{AP}_8$

*Demostración.* Notemos que  $G$  satisface las hipótesis de la proposición 4.31:  $C_{2n}$  es un ciclo hamiltoniano alternante en  $G_1$  que es singular con respecto a  $G_2$ ; dado que  $x_0$  es singular rojo, para cada  $i \in [0, 2n-1]$ ,  $x_i$  es singular rojo si  $i$  es par y es singular azul si  $i$  es impar; cada arista  $x_i x_l \in E(G) \setminus E(C_{2n})$  que satisface  $i \equiv l \pmod{2}$  es roja si  $i$  es par y es azul si  $i$  es impar, por la manera en que definimos  $\mathcal{AP}_{2n}$ , entonces  $c(x_i x_l) = s_{G_2}(x_i)$ . Por lo tanto,  $G$  no tiene ciclos alternantes que contengan vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ .  $\square$

Como consecuencia de la proposición 4.31, tenemos lo siguiente: dados dos ciclos alternantes ajenos,  $C_1$  y  $C_2$ , y  $G \in C_1 \oplus C_2$ . Si  $C_i$  es singular con respecto a  $C_{3-i}$  en  $G$ , entonces  $G$  no tiene ciclos alternantes con vértices tanto en  $C_1$  como en  $C_2$ , en particular  $G$  no tiene un ciclo hamiltoniano alternante. En la siguiente proposición veremos que, si agregamos un tipo particular de arista entre dos vértices de  $C_i$ , entonces  $G$  resultará pancíclica alternante.

**Proposición 4.33.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$  y existe una arista  $x_s x_t \in E(G_1)$  tal que  $s \equiv t \pmod{2}$  y  $c(x_s x_t) \neq s_{G_2}(x_s)$ , donde  $c$  es la coloración de aristas de  $G$ . Entonces  $G$  es pancíclica alternante. Más aún, para cada longitud par  $2l$  en  $[4, 2n+2m]$  y cada  $j \in [0, 2m-1]$ , existe un ciclo alternante de longitud  $2l$  que pasa por  $x_s x_t$  y  $y_j$ .

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que  $x_s x_t$  es roja.

Como  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$  y  $s \equiv t \pmod{2}$ , se sigue que  $x_s$  y  $x_t$  tienen la misma singularidad, esto es  $s_{G_2}(x_s) = s_{G_2}(x_t)$ . Dado que rojo =  $c(x_s x_t) \neq s_{G_2}(x_s)$ , tenemos que  $x_s$  y  $x_t$  son singulares azules.

Asumamos s.p.g. que  $y_0 y_1$  es roja, entonces  $y_{2j} y_{2j+1}$  es roja y  $y_{2j+1} y_{2j+2}$  es azul, para cada  $j \in [0, m-1]$ . Así, para cada  $h \in [0, m]$  y cada  $j \in [0, m-1]$ , la trayectoria alternante  $\rho_h^j = y_{2j} y_{2j+1} \cdots y_{2j+2h+1}$  tiene longitud impar  $2h+1$  y, así, empieza y termina en aristas rojas. Entonces, para cada  $h \in [0, m]$  y cada  $j \in [0, m-1]$ , el ciclo  $\alpha_h^j = \rho_h^j \cup y_{2j+2h+1} x_s x_t y_0$  es alternante, tiene longitud  $l(\alpha_h^j) = 2h+4$ ,  $x_s x_t \in E(\alpha_h^j)$  y  $\{y_{2j}, y_{2j+1}\} \subset V(\alpha_h^j)$ . De donde, para cada longitud par  $2l$  en  $[4, 2m+2]$  y cada  $j \in [0, 2m-1]$ ,  $G$  contiene un ciclo de longitud  $2l$  que contiene a  $x_s x_t$  y  $y_j$ .

Supongamos s.p.g. que  $s < t$ . Sean  $P_1$  y  $P_2$  las dos subtrayectorias alternantes de  $C_1$  determinadas por  $x_s$  y  $x_t$ , a saber  $P_1 = x_s x_{s+1} \cdots x_t$  y  $P_2 = x_t x_{t+1} \cdots x_s$ . Como  $s \equiv t \pmod{2}$ , se sigue que  $P_1$  y  $P_2$  tienen longitud par e inician en aristas del mismo color. Así, podemos suponer s.p.g. que  $c(x_s x_{s+1}) = c(x_t x_{t+1}) = \text{azul}$  y, de esta manera, se tiene que:

- $x_{s+2i} x_{s+2i+1}$  es azul para cada  $i \in [0, \frac{t-s}{2} - 1]$ ,
- $x_{s+2i-1} x_{s+2i}$  es roja para cada  $i \in [1, \frac{t-s}{2}]$ ,
- $x_{t+2i} x_{t+2i+1}$  es azul para cada  $i \in [0, n - \frac{t-s}{2} - 1]$ ,
- $x_{t+2i-1} x_{t+2i}$  es roja para cada  $i \in [1, n - \frac{t-s}{2}]$ ,
- $x_{s+2i-1}$  es singular rojo para cada  $i \in [1, \frac{t-s}{2}]$  y
- $x_{t+2i-1}$  es singular rojo para cada  $i \in [1, n - \frac{t-s}{2}]$ .

Ahora, sea  $\rho = y_1 y_2 \cdots y_{2m-1} y_0$  la trayectoria alternante de longitud  $2m-1$  obtenida a partir de  $C_2$  al quitar la arista roja  $y_0 y_1$ ; y consideremos, para cada  $i \in [1, \frac{t-s}{2}]$  y cada  $j \in [1, n - \frac{t-s}{2}]$ , las trayectorias alternantes  $\sigma_i = x_{s+2i-1} x_{s+2i-2} \cdots x_{s+1} x_s$  y  $\tau_j = x_t x_{t+1} \cdots x_{t+2j-1}$ . Cada una de estas trayectorias tiene longitud impar y sus aristas de inicio y término son azules; las  $\sigma_i$  inician en vértices singulares rojos y terminan en vértices singulares azules, y las  $\tau_j$  inician en vértices singulares azules y terminan en vértices singulares rojos (figura 4.9).

Entonces, para cada  $i \in [1, \frac{t-s}{2}]$  y cada  $j \in [1, n - \frac{t-s}{2}]$ , el ciclo  $\beta(\sigma_i, \tau_j) = \rho \cup y_0 x_{s+2i-1} \cup \sigma_i \cup x_s x_t \cup \tau_j \cup x_{t+2j-1} y_1$  es alternante, tiene longitud  $l(\beta(\sigma_i, \tau_j)) = (2m-1) + 1 + (2i-1) + 1 + (2j-1) + 1 = 2m + 2i + 2j$ , contiene a  $x_s x_t$  y a cada  $y \in V(G_2)$ , lo cual concluye la prueba.  $\square$

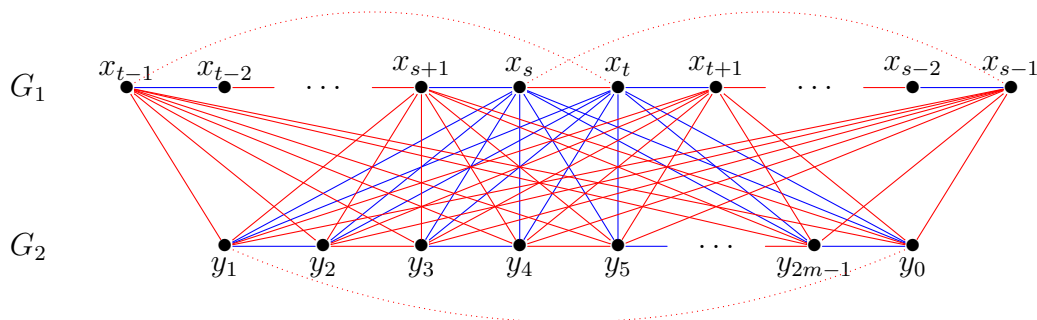


Figura 4.9: La gráfica  $G$  de la demostración de la proposición 4.33

**Corolario 4.34.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$  y, para cada  $x_s \in V(C_1)$ , existe una arista  $x_s x_t \in E(G_1)$  tal que  $s \equiv t \pmod{2}$  y  $c(x_s x_t) \neq s_{G_2}(x_s)$ , donde  $c$  es la coloración de aristas de  $G$ . Entonces  $G$  es una gráfica pancíclica alternante local.

Como consecuencia directa de las proposiciones 4.31 y 4.33 se tiene el siguiente resultado:

**Corolario 4.35.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$  y  $E(G_1) \setminus E(C_1) \neq \emptyset$ , entonces  $G$  no tiene ciclos alternantes que contengan vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ , o bien,  $G$  es pancíclica alternante.

*Demostración.* Si existe una arista  $x_s x_t \in E(G_1) \setminus E(C_1)$  tal que  $s \equiv t \pmod{2}$  y  $c(x_s x_t) \neq s_{G_2}(x_s)$  entonces, por la proposición 4.33,  $G$  es pancíclica alternante.

Si no existe tal arista, por la proposición 4.31,  $G$  no tiene ciclos alternantes que contengan vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ .  $\square$

Si  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas b.a. hamiltonianas alternantes ajenas y  $G \in G_1 \oplus G_2$  tiene un par bueno, entonces sabemos, por la proposición 4.8, que  $G$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante. Sin embargo, podemos decir más cuando existen dos vértices especiales en  $G_1$  y  $|V(G_1)| = 2^s p$ , donde  $s$  es un entero positivo y  $p$  un número primo:

**Proposición 4.36.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, donde  $2n = 2^s p$  para un entero positivo  $s$  y un número primo  $p$ , y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $C_1$  es no singular con respecto a  $G_2$  y existen dos vértices singulares  $x, w \in V(C_1)$  tales que  $xw \in E(G_1) \setminus E(C_1)$ ,  $s_{C_2}(x) = s_{C_2}(w)$  y  $c(xw) \neq s_{C_2}(x)$ , donde  $c$  es la coloración de aristas de  $G$ , entonces:

- (i)  $G$  contiene ciclos alternantes de todas las longitudes pares en  $[4, 2n + 2m] \setminus \{2m + jp + 1 \mid j \in [2^s] \text{ y } j \text{ es impar}\}$ , si  $p$  es impar.
- (ii)  $G$  es pancíclica alternante, si  $p = 2$ .

*Demostración.* Primero notemos que  $G$  no tiene pares buenos. De no ser así, el lema 4.30 y el hecho de que  $x$  es singular con respecto a  $G_2$  implican que  $C_1$  es singular con respecto a  $G_2$ , lo cual es una contradicción. Por la proposición 4.8, tenemos que  $G$  contiene un ciclo cuyo conjunto de vértices es  $V(C_1) \cup V(C_2) = V(G)$ .

Ahora, supongamos s.p.g. que  $x$  y  $w$  son vértices singulares rojos con respecto a  $G_2$  y que  $y_0 y_1$  es azul.

Para cada  $i \in [1, m]$ , la trayectoria  $P_i = y_0 y_1 \cdots y_{2i-1}$  es alternante, tiene longitud impar  $2i - 1$  y, dado que  $y_0 y_1$  es azul,  $P_i$  inicia y termina en aristas azules. De donde, el ciclo  $\gamma_i = xy_0 \cup P_i \cup y_{2i-1} wx$  es alternante y tiene longitud  $1 + (2i - 1) + 2 = 2i + 2$ .

Falta verificar que existen ciclos alternantes de longitud  $2m + 4, \dots, 2n + 2m - 2$ . Sea  $L = 2[2, n - 1]$ , esto es,  $L$  es el conjunto de todos los enteros pares ente 4 y  $2n - 2$ , y sea  $L_p = \{jp + 1 \mid j \in [1, 2^s] \text{ y } j \text{ es impar}\}$ . Observemos que, si  $p = 2$  el conjunto  $L_p$  es un conjunto de enteros impares, así  $L \setminus L_p = L$  y si  $p$  es impar  $L_p$  es un conjunto de enteros pares con  $2^{s-1}$  elementos.

Probaremos que, para cada  $h \in L \setminus L_p$ ,  $G$  contiene un ciclo alternante de longitud  $2m + h$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un número  $h \in L \setminus L_p$  tal que  $G$  no contiene un ciclo alternante de longitud  $2m + h$ .

Supongamos s.p.g. que  $x = x_0$  y que  $x_0 x_1$  es azul. Dado que  $h$  es par y  $C_1$  es alternante, la trayectoria  $Q_1 = x_0 x_1 \cdots x_{h-1}$  es alternante, tiene longitud impar  $h - 1$  y, por lo tanto, inicia y termina en aristas azules. Probaremos que  $x_{h-1}$  es singular azul con respecto a  $G_2$ .

Si existe un vértice  $y \in C_2$  tal que  $x_{h-1} y$  es roja, entonces tomando  $R_1$ , la  $yy^r$ -subtrayectoria de  $C_2$  obtenida a partir de  $C_2$  al quitar la arista roja  $yy^r$ , podemos

construir el ciclo  $\alpha_1 = Q_1 \cup x_{h-1}y \cup R_1 \cup y^r x_0$ , que es alternante y tiene longitud  $l(\alpha_1) = (h-1) + 1 + (2m-1) + 1 = 2m+h$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $x_{h-1}$  es singular azul con respecto a  $G_2$ .

Ahora,  $x_{h-1}x_h$  es roja. Entonces la trayectoria alternante  $Q_2 = x_{h-1}x_h \cdots x_{2(h-1)}$  tiene longitud impar  $h-1$ , e inicia y termina en aristas rojas. Probaremos que  $x_{2(h-1)}$  es singular rojo con respecto a  $G_2$ .

Si existe un vértice  $y \in C_2$  tal que  $x_{2(h-1)}y$  es azul, entonces tomando  $R_2$ , la  $yy^b$ -subtrayectoria de  $C_2$  obtenida a partir de  $C_2$  al quitar la arista azul  $yy^b$ , podemos construir el ciclo  $\alpha_2 = Q_2 \cup x_{2(h-1)}y \cup R_2 \cup y^b x_{h-1}$  que es alternante y tiene longitud  $l(\alpha_2) = (h-1) + 1 + (2m-1) + 1 = 2m+h$ , una contradicción. De donde,  $x_{2(h-1)}$  es un vértice singular rojo con respecto a  $G_2$ .

Argumentando de la misma manera, obtenemos una sucesión,  $\{x_{t(h-1)}\}_{t \geq 0}$ , de vértices singulares en  $C_1$ , tales que  $x_{t(h-1)}$  es singular rojo si  $t$  es par y es singular azul si  $t$  es impar.

Observemos que, si  $l_h = \frac{\text{mcm}(2^s p, h-1)}{h-1}$ , entonces  $x_0, x_{h-1}, \dots, x_{(l_h-1)(h-1)}$  son vértices diferentes. Recordemos que  $h \in L \setminus L_p$  y así  $h$  es par y  $h \not\equiv 1 \pmod{p}$ , por lo cual  $h-1$  es impar y  $p \nmid h-1$ . Así,  $\text{mcm}(2^s p, h-1) = 2^s p(h-1)$  y  $l_h = 2^s p$ . En consecuencia,  $x_0, x_{h-1}, \dots, x_{(l_h-1)(h-1)}$  son  $l_h = 2^s p$  vértices singulares diferentes en  $C_1$ , tales que  $x_{t(h-1)}$  es singular rojo si  $t$  es par y es singular azul si  $t$  es impar. Como  $h-1$  es impar,  $x_{t(h-1)}$  es singular rojo si  $t(h-1)$  es par y singular azul si  $t(h-1)$  es impar. Esto es,  $C_1$  es singular con respecto a  $C_2$ , una contradicción.

Por lo tanto,  $G$  contiene ciclos alternantes de longitud  $2m+h$ , para todo  $h \in L \setminus L_p$ , lo cual concluye la prueba.  $\square$

Ahora veremos una proposición que simplificará la prueba del teorema 4.41, que es uno de nuestros teoremas principales.

**Proposición 4.37.** *Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de gráficas b.a. ajenas dos a dos, que contienen ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$ . Si existe una sucesión  $\{i_j\}_{j=1}^k$  tal que  $C_{i_j}$  tiene un vértice singular rojo con respecto a  $C_{i_{j+1}}$  para cada  $j \in [1, k]$ , donde  $C_{i_{k+1}} = C_{i_1}$ , entonces  $G$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante.*

*Demostración.* Supongamos s.p.g. que, para cada  $i \in [1, k]$ ,  $C_i$  contiene un vértice singular rojo con respecto a  $C_{i+1}$ , donde  $C_{k+1} = C_1$ .

Para cada  $i \in [1, k]$ , sea  $v_i \in V(C_i)$  un vértice singular rojo con respecto a  $C_{i+1}$ . Recordemos que  $v_i^r$  denota al vértice de  $C_i$  tal que  $v_i v_i^r \in E(C)$  es roja.

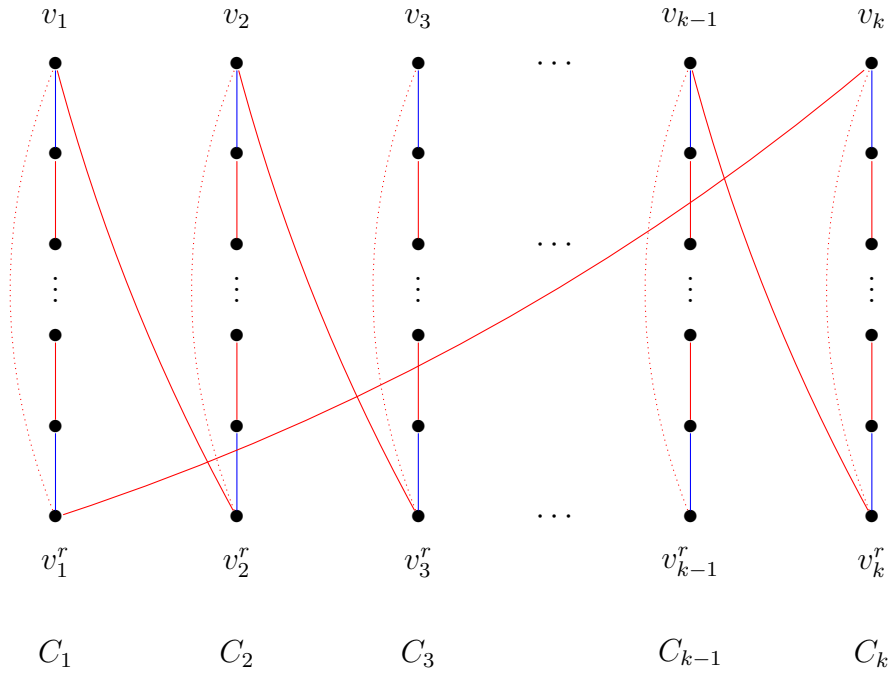


Figura 4.10: El ciclo  $\gamma$  en la demostración de la proposición 4.37

Consideremos, para cada  $i \in [1, k]$ , la trayectoria que resulta de quitar la arista  $v_i v_i^r$  del ciclo  $C_i$ , a saber  $P_i = v_i^r C v_i$ , que inicia y termina en aristas azules. Las trayectorias  $P_i$  son  $k$  trayectorias alternantes que forman una factorización de  $G$ .

Dado que  $v_i \in V(C_i)$  es singular rojo con respecto a  $C_{i+1}$ , tenemos, para cada  $i \in [1, k]$ , que  $e_i = v_i v_{i+1}^r$  es roja, donde  $v_{k+1}^r = v_1^r$ . Por lo tanto,  $\gamma = P_1 \cup e_1 \cup P_2 \cup e_2 \cup \dots \cup e_{k-1} \cup P_k \cup e_k$  es un ciclo hamiltoniano alternante en  $G$  (figura 4.10).  $\square$

Observemos que la afirmación de la proposición 4.37 también se cumple si cambiamos la hipótesis sobre los vértices singulares rojos a vértices singulares azules y la prueba es análoga.

### 4.3.1. Resultados principales sobre panciclismo alternante

En este apartado veremos qué gráficas en la suma g.c. de dos gráficas b.a. hamiltonianas alternantes ajenas son pancíclicas alternantes locales, pancíclicas alternantes o, simplemente, hamiltonianas alternantes.

El resultado principal de esta sección es el teorema 4.38, mismo que es consecuencia de las proposiciones 4.31 y 4.33; y del teorema 4.24. Ahora enunciaremos y demostraremos el teorema 4.38, que fue ilustrado en la figura 4.7.

**Teorema 4.38.** *Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$  y  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Entonces algunas de las siguientes afirmaciones se cumple:*

- (i)  $C_i$  es singular con respecto a  $G_{3-i}$  para algún  $i \in \{1, 2\}$  y
  - (a)  $G$  no contiene ciclos alternantes con vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ ; o bien,
  - (b)  $G$  es una gráfica pancíclica alternante;
- (ii)  $C_i$  es no singular con respecto a  $C_{3-i}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,
  - (a) existe un par bueno en  $G$  y  $G$  es una gráfica hamiltoniana alternante; o bien,
  - (b) no hay pares buenos en  $G$  y  $G$  es una gráfica pancíclica alternante en vértices.

*Demostración.* (i) Supongamos que  $C_i$  es singular con respecto a  $G_{3-i}$  para algún  $i \in \{1, 2\}$ . Por el corolario 4.35,  $G$  es pancíclica alternante, o bien,  $G$  no contiene ciclos alternantes con vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ .

- (ii) Supongamos que  $C_i$  es no singular con respecto a  $G_{3-i}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ . Si existe un par bueno de aristas en  $G$ , se sigue, de la proposición 4.8, que  $G$  contiene un ciclo cuyo conjunto de vértices es  $V(C_1) \cup V(C_2)$ , mismo que es hamiltoniano en  $G$ . Si, por el contrario,  $G$  no contiene pares buenos, entonces, para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $C_i$  contiene un vértice no singular con respecto a  $G_{3-i}$ . De no ser así, cada vértice  $v \in V(C_i)$  es singular con respecto a  $G_{3-i}$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$  y, por el lema 4.14 (iii), para cada  $v \in V(C_i)$ , las aristas exteriores que inciden en  $v$  tienen un color diferente a las aristas exteriores que inciden en  $v^r$  y en  $v^b$ . Así,  $C_i$  debe ser singular con respecto a  $C_{3-i}$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $G$  satisface las hipótesis del teorema 4.24 y, de aquí, se sigue que  $G$  es pancíclica alternante local.

□

Observemos que en el teorema 4.38, tres de las cuatro posibilidades implican que  $G$  es una gráfica hamiltoniana alternante, y dos de ellas aseguran que  $G$  es pancíclica alternante. Así, tenemos el corolario 4.39. En el último teorema de este apartado, extenderemos los resultados del corolario 4.39 para una suma g.c. de  $k$  sumandos.

**Corolario 4.39.** *Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ .*

(i) *Si  $G$  no contiene pares buenos y existe un ciclo alternante  $\gamma$  en  $G$ , tal que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $G$  es una gráfica pancíclica alternante.*

(ii)  *$G$  contiene un ciclo alternante  $\gamma$  tal que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2\}$  si, y sólo si,  $G$  es una gráfica hamiltoniana alternante.*

A continuación, probaremos un resultado que es una herramienta útil para la siguientes demostraciones. Es consecuencia del teorema 4.24, las proposiciones 4.8 y 4.31, y el lema 4.30.

**Corolario 4.40.** *Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, y  $G \in G_1 \oplus G_2$ . Si  $G$  no contiene un ciclo hamiltoniano alternante, entonces, para algún  $i \in \{1, 2\}$ ,  $C_i$  es singular con respecto a  $C_{3-i}$ .*

*Demostración.* La demostración se hará por contrapositiva. Supongamos, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , que  $C_i$  es no singular con respecto a  $C_{3-i}$ .

Si existe un par bueno en  $G$ , entonces la proposición 4.8 asegura que  $G$  contiene un ciclo cuyo conjunto de vértices es  $V(C_1) \cup V(C_2) = V(G)$ , es decir,  $G$  es hamiltoniana alternante.

Así, podemos suponer que  $G$  no contiene pares buenos. Observemos que, para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $C_i$  no tiene vértices singulares, por el lema 4.30. Entonces, para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $C_i$  contiene un vértice no singular con respecto a  $C_{3-i}$ . Se tiene, del teorema 4.24, que  $G$  es pancíclica alternante local, en particular  $G$  contiene un ciclo hamiltoniano.  $\square$

Ahora, probaremos una extensión del corolario 4.39 para una suma g.c. de  $k$  sumandos. Necesitaremos la definición de *ciclo bueno* que se dio en el apartado 4.2.1.

**Teorema 4.41.** *Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de  $k$  gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$ .*

- (i) Si  $G$  no contiene ciclos buenos y existe un ciclo alternante  $\gamma$  en  $G$ , tal que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in [1, k]$ , entonces  $G$  es pancíclica alternante.
- (ii)  $G$  contiene un ciclo alternante  $\gamma$  tal que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in [1, k]$  si, y sólo si,  $G$  es una gráfica hamiltoniana alternante.

*Demostración.* (i) La prueba se hará por inducción sobre  $k$ . Primero demostraremos la afirmación para  $k = 2, 3$ .

Supongamos que  $k = 2$ . Si  $C_i$  es singular con respecto a  $C_{3-i}$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces, por el teorema 4.38, tenemos que  $G$  no contiene ciclos alternantes con vértices tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ , o bien,  $G$  es pancíclica alternante. Como existe un ciclo alternante  $\gamma$  tal que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ , se sigue que  $G$  es pancíclica alternante.

Si  $C_i$  es no singular con respecto a  $C_{3-i}$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces, por el teorema 4.38, se sigue que  $G$  contiene un par bueno y, así,  $G$  es hamiltoniana alternante, o bien,  $G$  no contiene pares buenos y  $G$  es pancíclica alternante local. Dado que  $G$  no contiene ciclos buenos,  $G$  no contiene pares buenos con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ . De no ser así,  $G$  contiene un ciclo bueno por la observación 4.25, lo cual es imposible. Por lo tanto,  $G$  es pancíclica alternante.

Supongamos que  $k = 3$ . Si existen dos índices diferentes  $\{i, j\} \subset [1, 3]$ , que satisfacen que la gráfica inducida  $H_{ij} = G\langle V(G_i) \cup V(G_j) \rangle$  contiene un ciclo alternante  $\alpha$  tal que  $V(\alpha) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  y  $V(\alpha) \cap V(G_j) \neq \emptyset$ . Entonces, por el caso base  $k = 2$ ,  $H_{ij}$  es una gráfica pancíclica alternante, puesto que  $H_{ij}$  no contiene ciclos buenos al ser una subgráfica de  $G$  y contiene a  $\alpha$ . Así,  $H_{ij}$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante. Notemos que  $G \in G_h \oplus H_{ij}$ , donde  $h \in [1, 3] \setminus \{i, j\}$ , cada sumando es una gráfica hamiltoniana alternante y  $G$  no contiene ciclos buenos. Por lo tanto,  $G$  es pancíclica alternante, por el caso base  $k = 2$ .

Si, por el contrario, para cada par de índices diferentes  $\{i, j\} \subset [1, 3]$ , la gráfica inducida  $H_{ij} = G\langle V(G_i) \cup V(G_j) \rangle$  no contiene ciclos alternantes con vértices tanto en  $G_i$  como en  $G_j$ , en particular,  $H_{ij}$  no contiene un ciclo hamiltoniano alternante. Entonces, por el corolario 4.40,  $C_i$  es singular con respecto a  $C_j$ , o bien,  $C_j$  es singular con respecto a  $C_i$ . Hay dos casos (s.p.g.).

Sean  $C_1 = x_0 x_1 \cdots x_{2n-1} x_0$ ,  $C_2 = y_0 y_1 \cdots y_{2m-1} y_0$  y  $C_3 = w_0 w_1 \cdots w_{2l-1} w_0$  ciclos hamiltonianos alternantes en  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ , respectivamente, y supongamos s.p.g. que  $x_0 x_1$ ,  $y_0 y_1$  y  $w_0 w_1$  son azules; así,  $x_i x_{i+1}$ ,  $y_i y_{i+1}$  y  $w_i w_{i+1}$  son azules si  $i \equiv 0 \pmod{2}$  y son rojas si  $i \equiv 1 \pmod{2}$ .

Caso 1:  $C_i$  es singular con respecto a  $C_{i+1}$  para cada  $i \in [1, 3]$ , donde  $C_4 = C_1$ . Supongamos s.p.g. que  $x_0, y_0$  y  $w_0$  son singulares rojos con respecto a  $C_2, C_3$  y  $C_1$ , respectivamente.

Entonces  $x_i, y_i$  y  $w_i$  son singulares rojos con respecto a  $C_2, C_3$  y  $C_1$ , respectivamente, si  $i \equiv 0 \pmod{2}$  y son singulares azules en otro caso.

Caso 2:  $C_i$  es singular con respecto a  $C_j$  si  $1 \leq i < j \leq 3$ . Sea  $v_1 \in V(C_1)$ . Tenemos, para cada  $i \in \{2, 3\}$ , que  $v_1$  es singular con respecto a  $C_i$ . Si  $s_{C_2}(v_1) = s_{C_3}(v_1)$ , entonces  $v_1$  es singular con respecto a  $G_0 = G\langle V(G_2) \cup V(G_3) \rangle$  y, así,  $C_1$  es singular con respecto a  $G_0$ , pues  $C_1$  es singular con respecto a  $C_i$  para cada  $i \in \{2, 3\}$  y los colores de las singularidades de los vértices en  $C_1$  alternan.

Como  $G \in G_1 \oplus G_0$  y existe un ciclo alternante  $\gamma$  en  $G$  tal que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in [1, 3]$ , tenemos, por la contrapositiva de la proposición 4.31, que existe una arista  $xy \in E(G_1) \setminus E(C_1)$  tal que  $x \equiv y \pmod{2}$  en  $C_1$  y  $c(xy) \neq s_{G_0}(x)$ . Por lo tanto,  $G\langle V(G_1) \cup V(G_2) \rangle$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante, por la proposición 4.33, lo cual contradice nuestra suposición.

Entonces,  $s_{C_2}(v_1) \neq s_{C_3}(v_1)$ . Supongamos s.p.g. que  $x_0$  y  $y_0$  son vértices singulares rojos con respecto a  $C_2$  y  $C_3$ , respectivamente. Así,  $x_0$  es singular azul con respecto a  $C_3$ ;  $x_i$  y  $y_i$  son vértices singulares rojos con respecto a  $C_2$  y  $C_3$ , respectivamente, si  $i \equiv 0 \pmod{2}$  y son singulares azules en otro caso;  $x_i$  es singular azul con respecto a  $C_3$  si  $i \equiv 0 \pmod{2}$  y es singular rojo en otro caso.

En cualquier caso,  $x_{2n-2p}y_{2t}$  es azul para cada  $p \in [1, n]$  y cada  $t \in [0, m-1]$ ,  $y_0w_{2l-1}$  es roja,  $w_{2l-2s}x_{2n-1}$  es roja para cada  $s \in [1, l]$ ; las trayectorias alternantes  $w_{2l-1}w_{2l-2} \cdots w_{2l-2s}$  y  $x_{2n-1}x_{2n-2} \cdots x_{2n-2p}$  inician y terminan en aristas azules; y las trayectorias alternantes  $y_{2t}y_{2t-1} \cdots y_0$  inician en una arista roja y terminan en una arista azul.

Por lo tanto, para cada  $s \in [1, l]$ , el ciclo  $\beta_s = x_{2n-1}y_0w_{2l-1}w_{2l-2} \cdots w_{2l-2s}x_{2n-1}$  es alternante, tiene longitud  $l(\beta_s) = 1 + 1 + (2s - 1) + 1 = 2 + 2s$ ; para cada  $t \in [1, m-1]$ , el ciclo  $\delta_t = x_{2n-1}y_{2t}y_{2t-1} \cdots y_0w_{2l-1}w_{2l-2} \cdots w_0x_{2n-1}$  es alternante, tiene longitud  $l(\delta_t) = 1 + 2t + 1 + (2l - 1) + 1 = 2 + 2l + 2t$ ; y, para cada  $p \in [1, n]$ , el ciclo  $\eta_p = x_{2n-1}x_{2n-2} \cdots x_{2n-2p}y_{2m-1}y_{2m-2} \cdots y_0w_{2l-1}w_{2l-2} \cdots w_0x_{2n-1}$  es alternante y tiene longitud  $l(\eta_p) = (2p - 1) + 1 + (2m - 1) + 1 + (2l - 1) + 1 = 2l + 2m + 2p$ .

De lo anterior,  $G$  es pancíclica alternante.

Ahora, supongamos que la afirmación del teorema se cumple para cada  $k' \leq k-1$ . Haremos la prueba para  $k \geq 4$ .

Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de  $k \geq 4$  gráficas b.a. ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes,  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente, y sea  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$  como en la hipótesis del teorema.

*Afirmación 4.42.* Existe un ciclo alternante  $\beta$  en  $G$  tal que  $V(\beta) \subset \bigcup_{j \in J} V(G_j)$  para algún  $J \subset [1, k]$  tal que  $2 \leq |J| \leq k-1$  y, para cada  $j \in J$ ,  $V(\beta) \cap V(G_j) \neq \emptyset$ .

*Demostración de la afirmación 4.42.* Supongamos por contradicción que no existe un ciclo como el descrito. Entonces, cada ciclo alternante  $\beta$  en  $G$ , satisface una de las siguientes posibilidades:  $V(\beta) \subset V(G_i)$  para algún  $i \in [1, k]$ , o bien,  $V(\beta) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in [1, k]$ .

De esta manera, para cada par de índices diferentes  $\{i, j\} \subset [1, k]$ , la gráfica  $H_{ij} = G \langle V(G_i) \cup V(G_j) \rangle$  no contiene un ciclo hamiltoniano alternante y, por la contrapositiva del corolario 4.40, se sigue que  $C_i$  es singular con respecto a  $C_j$ , o bien,  $C_j$  es singular con respecto a  $C_i$ , pero no ambos, por la observación 4.29.

Definamos una digráfica  $T$  de orden  $k$  con el conjunto de vértices  $V(T) = \{G_i \mid i \in [1, k]\}$  y  $(G_i, G_j)$  es una flecha de  $T$  si, y sólo si,  $C_i$  es singular con respecto a  $C_j$  en  $H_{ij}$  (y, por tanto, en  $G$ ).

De lo anterior, entre cada pareja de sumandos distintos de  $G$ ,  $G_i$  y  $G_j$ , el ciclo hamiltoniano alternante de uno es singular con respecto al otro, pero no ambos. Por lo tanto, entre cualesquiera dos dos vértices de  $T$  existe exactamente una flecha, es decir,  $T$  es un torneo.

*Afirmación 4.43.*  $T$  es un torneo acíclico.

*Demostración de la afirmación 4.43.* Supongamos por contradicción que  $T$  contiene un ciclo, a saber  $\alpha = (G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_s}, G_{i_1})$  donde  $3 \leq s \leq k-1$ . Este ciclo en  $T$  proporciona una secuencia de índices  $\{i_j\}_{j=1}^s$  tales que  $C_{i_j}$  es singular con respecto a  $C_{i_{j+1}}$  en  $G$  (así,  $C_{i_j}$  contiene un vértice singular rojo con respecto a  $C_{i_{j+1}}$  en  $G$ ) para cada  $j \in [1, s]$ , donde  $C_{i_{s+1}} = C_{i_1}$ . De donde, por la proposición 4.37, se tiene que  $G_0 = G \langle \bigcup_{j=1}^s V(G_{i_j}) \rangle$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante  $C_0$ . Entonces  $V(C_0) \cap V(G_{i_j}) \neq \emptyset$  para cada  $j \in [1, s]$ , lo cual contradice nuestra suposición.

Ahora, supongamos por contradicción que  $T$  contiene un ciclo hamiltoniano, a saber  $\alpha = (G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}, G_{i_1})$ . Como  $G_{i_1}$  y  $G_{i_3}$  son adyacentes, se sigue que  $(G_{i_1}, G_{i_3}) \in A(T)$ , o bien,  $(G_{i_3}, G_{i_1}) \in A(T)$ . Si  $(G_{i_1}, G_{i_3}) \in A(T)$ , entonces  $(G_{i_1},$

$G_{i_3}, \dots, G_{i_k}, G_{i_1}$ ) es un ciclo en  $T$  de longitud  $k - 1$ , lo cual es una contradicción. Si  $(G_{i_3}, G_{i_1}) \in A(T)$ , entonces  $(G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, G_{i_1})$  es un ciclo en  $T$  de longitud 3, lo cual es una contradicción. ■

Como  $T$  es acíclico, sabemos que  $T$  es transitivo, por el teorema 1.1. Además, por el corolario 1.4,  $T$  contiene una trayectoria hamiltoniana  $\tau = (G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k})$  que satisface que  $(G_{i_j}, G_{i_{j'}})$  es una flecha de  $T$  si, y sólo si,  $1 \leq j < j' \leq k$ .

Si cada vértice  $v \in V(G_{i_1})$  es singular con respecto a  $H = G\langle \bigcup_{j=2}^k V(G_{i_j}) \rangle$ , es decir, si todas las aristas exteriores que inciden en  $v$  tienen el mismo color, entonces  $C_{i_1}$  es singular con respecto a  $H$ , pues  $C_{i_1}$  es singular con respecto a  $C_{i_j}$  para cada  $j \in [2, k]$ . Notemos que  $G \in G_{i_1} \oplus H$ ;  $C_{i_1}$  es un ciclo hamiltoniano alternante en  $G_{i_1}$ , el cual es singular con respecto a  $H$ ; y  $G$  contiene al ciclo alternante  $\gamma$ , el cual tiene vértices tanto en  $G_{i_1}$  como en  $H$ . Por la proposición 4.31, se sigue que existe una arista  $xy \in E(G_{i_1}) \setminus E(C_{i_1})$  tal que  $x \equiv y \pmod{2}$  en  $C_{i_1}$  y  $c(xy) \neq s_H(x)$ . Así,  $H_{i_1 i_2} = G\langle V(G_{i_1}) \cup V(G_{i_2}) \rangle$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante, por la proposición 4.33, lo cual contradice nuestra suposición.

Por lo tanto, existe un vértice  $v_1 \in V(G_{i_1})$  tal que  $d_r(v_1) \geq 1$  y  $d_b(v_1) \geq 1$ , *i.e.*, existen una arista exterior roja y una arista exterior azul que inciden en  $v_1$ . Dado que  $C_{i_1}$  es singular con respecto a  $C_{i_j}$ , para cada  $j \in [2, k]$ , se tiene que  $v_1$  es singular con respecto a  $C_{i_j}$ , para cada  $j \in [2, k]$ . Como  $d_r(v_1) \geq 1$  y  $d_b(v_1) \geq 1$ , existen índices distintos  $\{j, j'\} \subset [2, k]$ , tales que  $v_1$  es singular rojo con respecto a  $C_{i_j}$  y  $v_1$  es singular azul con respecto a  $C_{i_{j'}}$ . Podemos suponer s.p.g. que  $v_1$  es singular rojo con respecto a  $C_{i_2}$  y sea  $s$  el mínimo índice en  $[3, k]$  tal que  $v_1$  es singular azul con respecto a  $C_{i_s}$ . Entonces  $v_1$  es singular rojo con respecto a  $C_{i_{s-1}}$ ,  $V_1$  es singular azul con respecto a  $C_{i_s}$  y  $v_1^r$ , el vecino rojo de  $v_1$  en  $C_{i_1}$ , es singular rojo con respecto a  $C_{i_s}$ , por la definición de ciclo singular.

Tomemos  $v_{s-1} \in V(C_{i_{s-1}})$  tal que  $v_{s-1}$  es singular rojo con respecto a  $C_{i_s}$  y  $v_s \in V(C_{i_s})$ .

Consideremos las aristas exteriores rojas  $v_1 v_{s-1}^r$ ,  $v_{s-1} v_s^r$  y  $v_s v_1^r$ ; y, para cada  $j \in \{1, s-1, s\}$ , la  $v_j^r v_j$ -trayectoria alternante,  $P_j$ , que se obtiene a partir de  $C_{i_j}$  al quitar la arista roja  $v_j v_j^r$ . Por lo tanto,  $C = P_1 \cup v_1 v_{s-1}^r \cup P_{s-1} \cup v_{s-1} v_s^r \cup P_s \cup v_s v_1^r$  es un ciclo alternante en  $H' = G\langle V(G_{i_1}) \cup V(G_{i_{s-1}}) \cup V(G_{i_s}) \rangle$  con  $V(C) = V(G_{i_1}) \cup V(G_{i_{s-1}}) \cup V(G_{i_s})$ , contradiciendo nuestra hipótesis (pues  $k \geq 4$  y  $C$  es un ciclo alternante que tiene vértices en exactamente tres sumandos). ■

Sea  $\beta$  un ciclo alternante como en la hipótesis de la afirmación 4.42. Entonces  $G_0 = G \langle \bigcup_{j \in J} V(G_j) \rangle$  es una gráfica en  $\bigoplus_{j \in J} G_j$  que contiene a  $\beta$  y  $G_0$  no tiene ciclos buenos (pues  $G_0$  es una subgráfica de  $G$ ). Por hipótesis de inducción, se sigue que  $G_0$  es pancíclica alternante, en particular,  $G_0$  contiene un ciclo hamiltoniano alternante  $C_0$ .

Observemos que  $\{G_i\}_{i \in [0, k] \setminus J}$  es una colección de  $k + 1 - |J| \leq k - 1$  gráficas hamiltonianas alternantes y  $G \in \bigoplus_{i \in [0, k] \setminus J} G_i$  pues  $G$  satisface tres propiedades de la definición de una suma g.c. de  $\{G_i\}_{i \in [0, k] \setminus J}$ . Además,  $G$  contiene al ciclo alternante  $\gamma$  que satisface que  $V(\gamma) \cap V(G_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in [0, k] \setminus J$  y  $G$  no tiene ciclos buenos (pues el conjunto de aristas exteriores de  $G$  como suma g.c. de  $\{G_i\}_{i \in [0, k] \setminus J}$  está contenido en el conjunto de aristas exteriores de  $G$  como suma g.c. de  $\{G_i\}_{i=1}^k$ ). Así, por hipótesis de inducción, tenemos que  $G$  es pancíclica alternante.

(ii) La demostración de este inciso es similar a la del inciso (i). Sin embargo, en la base de inducción, obtenemos que  $G$  es una gráfica hamiltoniana alternante, por el corolario 4.39 (a diferencia de obtener que  $G$  es pancíclica alternante, pues aquí no tenemos la hipótesis sobre los ciclos buenos). Por lo cual, el proceso inductivo nos asegura que una gráfica  $G \in \bigoplus_{i=1}^k G_i$  debe ser hamiltoniana alternante.

El recíproco es inmediato. □

Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una colección de  $k$  gráficas bicoloreadas en aristas ajenas con ciclos hamiltonianos alternantes  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , respectivamente. En el teorema 4.41 caracterizamos las gráficas en  $\bigoplus_{i=1}^k G_i$  que son hamiltonianas alternantes, dimos condiciones suficientes para que una gráfica en  $\bigoplus_{i=1}^k G_i$  sea pancíclica alternante y, en el teorema 4.27 publicado en [6], dimos condiciones suficientes para que una gráfica en  $\bigoplus_{i=1}^k G_i$  sea pancíclica alternante en vértices. Dichas condiciones puede que no sean necesarias pues, en los ciclos que construimos, usamos a lo más una arista en  $E(G_i) \setminus E(C_i)$ , para cada  $i \in [1, k]$ , y si no tenemos más información sobre las demás aristas en esos conjuntos, no podemos saber si hay ciclos alternantes que pasan por ellas.

## Referencias

- [1] J. Bang-Jensen y G. Gutin. «Alternating cycles and paths in edge-coloured multigraphs: A survey». En: *Discrete Math.* 165/166 (1997). Graphs and combinatorics (Marseille, 1995), págs. 39-60.

- [2] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2.<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag London, Ltd, London: Springer Monographs in Mathematics, 2009. ISBN: 978-1-84800-997-4.
- [3] W.S. Chou y col. «Paths through fixed vertices in edge-colored graphs». En: *Math. Inform. Sci. Hum.* 127 (1994), págs. 49-58.
- [4] A. Contreras-Balbuena, H. Galeana-Sánchez e I.A. Goldfeder. «A new sufficient condition for the existence of alternating Hamiltonian cycles in 2-edge-colored multigraphs». En: *Discrete Appl. Math.* 229 (2017), págs. 55-63.
- [5] N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Alternating-Pancyclism in 2-Edge-Colored Graphs». En: *Discuss. Math.* (2020). In press, págs. 1-22.
- [6] N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez. «Vertex Alternating-Pancyclism in 2-Edge-Colored Generalized Sums of Graphs». En: *Discrete Appl. Math.* 284 (2020), págs. 281-289.
- [7] P. Das. «Pan-alternating cyclic edge-partitioned graphs». En: *Ars Combin.* 14 (1982), págs. 105-114.
- [8] D. Dorninger. «Hamiltonian circuits determining the order of chromosomes». En: *Discrete Appl. Math.* 50.2 (1994), págs. 159-168.
- [9] D. Dorninger. «On permutations of chromosomes». En: *Conference on General Algebra Salzburg*. Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 1987, págs. 95-103.
- [10] D. Dorninger y W. Timischl. «Geometrical constraints on Bennett's predictions of chromosome order». En: *Heredity* 58 (1987), págs. 321-325.
- [11] S. Fujita y C. Magnant. «Properly colored paths and cycles». En: *Discrete Appl. Math.* 159 (2011), págs. 1391-1397.
- [12] A. Gorbenko y V. Popov. «The Hamiltonian alternating path problem». En: *IAENG Int. J. Appl. Math.* 42.4 (2012), págs. 204-213.
- [13] L. Gourvès y col. «The minimum reload s-t path, trail and walk problems». En: *Discrete Appl. Math.* 158.13 (2010), págs. 1404-1417.
- [14] R. Häggkvist e Y Manoussakis. «Cycles and paths in bipartite tournaments with spanning configurations». En: *Combinatorica* 9.1 (1989), págs. 33-38.
- [15] J. Petersen. «Die Theorie der regulären graphs». En: *Acta Math.* 15 (1891), págs. 193-220.

- [16] P.A. Pevzner. «DNA physical mapping and properly edge-colored eulerian cycles in colored graphs». En: *Algorithmica* 13 (1995), págs. 77-105.
- [17] G. Wang y H. Li. «Color degree and alternating cycles in edge-colored graphs». En: *Discrete Math.* 309 (2009), págs. 4349-4354.
- [18] H.C. Wirth y J. Steffan. «Reload cost problems: minimum diameter spanning tree». En: *Discrete Appl. Math.* 113 (2001), págs. 73-85.
- [19] H. Xu y col. «A matrix approach to status quo analysis in the graph model for conflict resolution». En: *Appl. Math. Comput.* 212.2 (2009), págs. 470-480.
- [20] H. Xu y col. «A matrix-based approach to searching colored paths in a weighted colored multidigraph». En: *Appl. Math. Comput.* 215.1 (2009), págs. 353-366.
- [21] H. Xu y col. «Using matrices to link conflict evolution and resolution in a graph model». En: *European J. Oper. Res.* 207.1 (2010), págs. 318-329.

# Líneas de investigación

En los capítulos 3 y 4 trabajamos con la operación de suma generalizada y nos dedicamos a los temas de panciclismo y panciclismo alternante, respectivamente. En el capítulo 3 buscamos ciclos dirigidos en digráficas, mientras que en el capítulo 4 buscamos ciclos alternantes en gráficas bicoloradas en aristas. Sin embargo, existen otros tipos de ciclos en digráficas y ciclos alternantes en gráficas con otras coloraciones de aristas que se pueden estudiar.

Este año comenzamos a estudiar, junto con Ilán A. Goldfeder, los ciclos antidirigidos en las sumas generalizadas de digráficas. Recordemos que un ciclo antidirigido es uno en el que cualesquiera dos flechas consecutivas tienen diferente orientación, por lo que estos ciclos son siempre de longitud par. En este sentido, el problema de los ciclos antidirigidos parece asemejarse al caso alternante bicolor, sin embargo los patrones de flechas no se parecen a los expuestos en el capítulo 4. Es cierto que se puede definir una noción parecida a la de un par bueno, que permite construir un ciclo antidirigido a partir de dos ciclos antidirigidos ajenos, que pasa por cada uno de los vértices de ambos, sólo que en este caso, dada una flecha puede haber más de un candidato para formar un par bueno, como se puede apreciar en la figura i. Sin embargo, cuando suponemos que no existen pares así, no obtenemos mucha información sobre las demás flechas entre los ciclos, cosa que sí ocurría en el caso bicolorado. Por lo cual el problema requiere abordarse de manera diferente, y eso lo hace interesante.

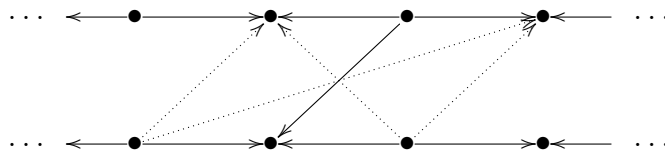


Figura i: Posibilidades para formar un par bueno entre dos ciclos antidirigidos, dada una flecha entre ellos con la orientación “adecuada”.

Considerando ciclos antidirigidos se puede, además, intentar mezclarlos de manera que se produzca un ciclo dirigido o uno antidirigido, o bien, suponer que en una suma generalizada alguno de los sumandos tiene un ciclo dirigido hamiltoniano y otro sumando tiene un ciclo antidirigido hamiltoniano e investigar bajo qué condiciones dicha s.g. contiene ciclos dirigidos o antidirigidos de ciertas longitudes.

Otra línea de investigación que nos queda por explorar es la de los ciclos alternantes en gráficas  $H$ -coloreadas. Dada una gráfica  $k$ -coloreada en vértices  $H$ , es decir, con una asignación de color  $c: V(H) \rightarrow [k]$  donde cada vértice tiene asignado exactamente un color, una gráfica  $G$  proveída de una coloración de aristas con los vértices de  $H$ ,  $c': E(G) \rightarrow V(H)$ , se dice que es  $H$ -coloreada y que  $c'$  es una  $H$ -coloración de  $G$ . Un camino  $W = v_0v_1 \cdots v_s$  en  $G$  es un  $H$ -camino si para cualesquiera dos aristas consecutivas  $v_jv_{j+1}$  y  $v_{j+1}v_{j+2}$  de  $W$ , donde  $0 \leq j \leq s-2$ , existen vértices  $x, y \in V(H)$  (no necesariamente distintos) tales que  $c(x) = c'(v_jv_{j+1})$ ,  $c(y) = c'(v_{j+1}v_{j+2})$  y  $xy \in E(H)$ . Es decir, podemos avanzar de una arista a otra en  $G$ , si la coloración de  $H$  lo permite.

Observemos que si  $H$  no tiene lazos y su coloración es propia, entonces todos los  $H$ -caminos en  $G$  son caminos alternantes.

Nuestro plan es ver qué sucede con los ciclos alternantes en la suma generalizada coloreada de gráficas  $H$ -coloreadas, donde  $H$  pertenece a una familia de gráficas coloreadas en vértices. Este nuevo problema está íntimamente relacionado con nuestro trabajo, pues si  $H \cong K_2$  y sus dos vértices están coloreados, uno rojo y uno azul, entonces la s.g.c. de dos gráficas  $H$ -coloreadas coincide justamente con la s.g.c. de dos gráficas 2-coloreadas en aristas y sus  $H$ -ciclos serán los ciclos alternantes.

En este problema, igual que sucede en el de los ciclos antidirigidos, dada una arista podría existir más de una opción para formar un par bueno y cuando se considera que no existen tales pares, tampoco se producen patrones de aristas como los que se encontraron en el capítulo 4. Entonces, aquí también, tenemos que pensar en nuevas estrategias y, con algo de suerte, nuevos ciclos vendrán a nuestro encuentro.

# Anexo A

## Algoritmo DFS

El algoritmo de búsqueda en profundidad DFS (consultado en [1] y [2]) es un algoritmo que sirve para explorar los vértices de una digráfica  $D = (V(D), A(D))$ , construyendo un *bosque generador*  $F$ , es decir, el algoritmo construye una subdigráfica  $F$  de  $D$  tal que  $V(F) = V(D)$  y cada componente conexa de  $F$  es un árbol.

Dada una digráfica  $D = (V(D), A(D))$ , el algoritmo inicia en un vértice arbitrario de  $D$  y, en cada etapa del mismo, se *visita* un vértice  $x$  de  $D$ . Si  $x$  tiene un exvecino que *no ha sido visitado*, digamos  $y$ , entonces visitamos al vértice  $y$  (si hay más de un exvecino de  $x$  sin visitar, elegimos uno arbitrariamente). A la flecha  $x \rightarrow y$  la llamamos una *flecha del árbol*. Si todos los exvecinos de  $x$  ya fueron visitados, etiquetamos a  $x$  como vértice *explorado* y regresamos al vértice predecesor de  $x$ ,  $\text{pred}(x)$ , que es el vértice desde el cual se llegó a  $x$ . Si  $x$  no tiene predecesor, se busca un vértice en  $D$  que no haya sido visitado y se procede a explorar como antes. Cuando no quedan más vértices sin visitar, el algoritmo se detiene.

El algoritmo intenta avanzar lo más posible en la digráfica antes de retroceder, de ahí el nombre de búsqueda en profundidad. Al momento en que un vértice  $v$  es visitado por primera vez,  $\text{tvisit}(v)$ , se le conoce como *etiqueta-DFS* de  $v$ .

Observemos que, cuando la digráfica  $D$  es fuertemente conexa, el bosque obtenido por el algoritmo 1 tiene una única componente conexa, por lo cual  $F$  es una exarborescencia de  $D$ .

---

**Algoritmo 1:** Búsqueda en profundidad DFS

---

**Entrada:** una digráfica  $D = (V(D), A(D))$  y un vértice inicial  $r \in V(D)$   
**para cada** vértice  $v \in V(D)$  **hacer**  
  | establece  $\text{pred}(v) = \text{nulo}$ ,  $\text{tvisit}(v) = 0$ ,  $\text{texpl}(v) = 0$  ;  
**fin**  
establece  $\text{tiempo} = 0$ ;  
inicia el bosque  $F$  como el vértice  $r$ ;  
**para cada** vértice  $v \in V(D)$  **hacer**  
  | **si**  $\text{tvisit}(v) = 0$  **entonces**  
    | realiza DFS-PROC( $v$ );  
    | **inicio**  
      |  $\text{tiempo} \leftarrow \text{tiempo} + 1$ ;  
      |  $\text{tvisit}(v) = \text{tiempo}$ ;  
      | **para cada**  $u \in N_D^+(v)$  **hacer**  
      |  | **si**  $\text{tvisit}(u) = 0$  **entonces**  
      |  |  |  $\text{pred}(u) = v$ ;  
      |  |  | añade el vértice  $u$  y la flecha  $v \rightarrow u$  al bosque  $F$ ;  
      |  |  | realiza DFS-PROC( $u$ );  
      |  |  | **fin**  
      |  |  $\text{tiempo} \leftarrow \text{tiempo} + 1$ ;  
      |  |  $\text{texpl}(v) = \text{tiempo}$ ;  
      |  | **fin**  
    | **fin**  
  | **fin**  
**fin**  
**devolver**  $T$   
**Salida:**  $\text{pred}(v)$ ,  $\text{tvisit}(v)$  y  $\text{texpl}(v)$  para cada  $v \in V(D)$  y un bosque generador  $F$  de  $D$  que consiste de exárboles.

---

## Referencias

- [1] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2.<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag London, Ltd, London: Springer Monographs in Mathematics, 2009. ISBN: 978-1-84800-997-4.
- [2] J. L. Gross y J. Yellen. *Graph Theory and Its Applications*. 3.<sup>a</sup> ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019. ISBN: 978-1-4822-4948-4.

# Índice analítico

## A

acíclica, 9  
adyacente, 5, 8  
adyacente desde, 8  
adyacente hacia, 8  
ajena (ajenas en vértices), 10  
alternante, 67, 69  
ancestro, 15  
árbol DFS, 15  
arista, 5  
arista exterior, 67

## B

bicoloreada en aristas, 7  
bipartita, 7, 10

## C

cabeza de una flecha, 8  
camino ( $xy$ -camino), 6, 9  
camino alternante, 68  
camino cerrado, 6, 9  
camino dirigido, 9  
camino dirigido cerrado, 9  
ciclo ( $k$ -ciclo), 6, 9  
ciclo alternante, 67, 69  
ciclo antidirigido, 44  
ciclo bueno, 45, 83

ciclo dirigido, 9  
ciclo elemental, 18  
ciclo hamiltoniano, 7, 9  
ciclo hamiltoniano alternante, 67  
ciclo singular, 85  
circunferencia, 9, 14  
clase paralela, 37, 72, 73  
cola de una flecha, 8  
coloración acíclica, 10  
coloración de aristas, 7  
coloración de aristas propia, 7  
coloración de vértices, 7, 10  
coloración propia, 7, 10  
coloreable, 7  
columna vertebral, 20  
completa, 7  
componente fuerte, 9  
conexa, 7, 9  
cuello, 9, 15

## D

descendiente, 15  
digráfica, 8  
digráfica transitiva, 10  
digráfica zigzag, 34

**E**

etiqueta DFS, 15  
 exárbol, 15  
 exarborescencia, 15  
 exgrado, 8  
 exterior, 33, 67  
 extremo de una arista, 5  
 exvecindad, 8

**F**

factorización, 6, 8  
 factorización en ciclos, 8  
 flecha, 8  
 flecha cruzada, 15  
 flecha del árbol, 15  
 flecha exterior, 33  
 flecha hacia adelante, 15  
 fuerte (fuertemente conexa), 9

**G**

generación de un árbol, 20  
 gráfica, 5  
 gráfica de condensación, 24  
 gráfica hamiltoniana, 7  
 gráfica subyacente, 8  
 gráfica subyacente hacia atrás, 18  
 grado, 6, 8

**H**

$H$ -coloración, 104  
 hamiltoniana, 7, 9  
 hamiltoniana alternante, 67  
 hamiltoniano, 7, 9  
 hamiltoniano alternante, 67

**I**

incidente, 5

independiente, 7, 9

ingrado, 8

invecindad, 8

isomorfa, 7, 10

**K**

$k$ -partita, 7, 10

$k$ -partita completa, 7, 10, 34

**L**

longitud de un árbol, 20

longitud de un camino, 6, 9

**M**

multigráfica, 5

multipartita, 7, 10, 34

multipartita completa, 10

**N**

número cromático, 7, 10

número dicromático, 10, 13

nivel de un árbol, 20

**O**

orden, 5, 8

**P**

pancíclica, 33

pancíclica alternante, 67, 69

pancíclica alternante en vértices, 67,  
 69

pancíclica alternante local, 67, 69

pancíclica en vértices, 33

pancíclica local, 33

par bueno, 36, 70

par bueno de aristas, 70

par bueno de flechas, 36

paralela, 73

parte, 7, 10

**R**

raíz, 15

**S**

semicompleta, 10

singular, 75, 85

singular azul, 75

singular rojo, 75

singularidad, 75

subdigráfica, 8

subdigráfica generadora, 8

subdigráfica inducida, 8

subgráfica, 6

subgráfica generadora, 6

subgráfica inducida, 6

subyacente, 8

subyacente hacia atrás, 18

suma generalizada coloreada, 67, 69

suma generalizada de digráficas, 33

**T**

tamaño, 5, 8

torneo, 10

torneo  $k$ -partito, 10

transitiva, 10

trayectoria, 6

trayectoria dirigida, 9

**V**

vértice, 5, 8

vértices congruentes módulo 2, 73

vecindad, 6

vecino azul, 70

vecino rojo, 70

vecinos, 5



# Lista de abreviaturas

**b.a.** bicoloreada en aristas.

**g.c.** generalizada coloreada.

**mcd** máximo común divisor.

**mcm** mínimo común múltiplo.

**s.g.** suma generalizada.

**s.g.c.** suma generalizada coloreada.

**s.p.g.** sin pérdida de generalidad.



# Lista de símbolos

| <b>Símbolo</b>          | <b>Descripción</b>  | <b>Páginas</b> |
|-------------------------|---|----------------|
| $\bigoplus_{i=1}^k G_i$ | suma generalizada de $G_1, \dots, G_k$                                      | 67, 69         |
| $A(D)$                  | conjunto de flechas de $D$  | 8              |
| $uC^b v$                | $uv$ -trayectoria alternante contenida en $C$ que inicia en una arista azul | 70             |
| $uC^r v$                | $uv$ -trayectoria alternante contenida en $C$ que inicia en una arista roja | 70             |
| $\Delta(G)$             | grado máximo en $G$   | 6              |
| $D$                     | digráfica   | 8, 33          |
| $d_D^+(v)$              | exgrado de $v$ en $D$   | 8              |
| $d_b(v)$                | número de aristas exteriores azules que inciden en $v$                      | 73             |
| $d_D(v)$                | grado de $v$ en $D$   | 8              |
| $d_G(v)$                | grado de $v$ en $G$   | 6              |
| $d_r(v)$                | número de aristas exteriores rojas que inciden en $v$                       | 73             |
| $d_D^-(v)$              | ingrado de $v$ en $D$   | 8              |
| $E_{\oplus}$            | conjunto de aristas o flechas exteriores                                    | 33, 67         |
| $E(G)$                  | conjunto de aristas de $G$  | 5              |
| $G$                     | gráfica   | 5              |

| <b>Símbolo</b>         | <b>Descripción</b>  | <b>Páginas</b> |
|------------------------|---|----------------|
| $[k_1, k_2]$           | conjunto de enteros $\{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$              | 10             |
| $kA$                   | conjunto de enteros $\{ka \mid a \in A\}$                       | 10             |
| $N_D^+(v)$             | exvecindad de $v$ en $D$  | 8              |
| $N_D^-(v)$             | invecindad de $v$ en $D$  | 8              |
| $N_G(v)$               | vecindad de $v$ en $G$  | 6              |
| $\mathcal{P}$          | familia de clases paralelas $\{P_{uv} \mid uv \in E_{\oplus}\}$ | 73             |
| $P_u$                  | $ru$ -trayectoria en un exárbol enraizado en $r$                | 19             |
| $P_{uv}$               | clase paralela de $uv$  | 73             |
| $s_H(v)$               | singularidad de $v$ con respecto a $H$                          | 75             |
| $v_C^b$                | vecino azul de $v$ en el ciclo alternante $C$                   | 70             |
| $V(D)$                 | conjunto de vértices de $D$                                     | 8              |
| $V(G)$                 | conjunto de vértices de $G$                                     | 5              |
| $v_C^r$                | vecino rojo de $v$ en el ciclo alternante $C$                   | 70             |
| $W \cup W'$            | concatenación de los caminos $W$ y $W'$                         | 6, 9           |
| $x \equiv_C y$ (mód 2) | vértices congruentes módulo 2 en $C$                            | 73             |
| $\chi(D)$              | número cromático de una digráfica $D$                           | 10             |
| $\chi(G)$              | número cromático de una gráfica $G$                             | 7              |
| $\chi_A(D)$            | número dicromático de una digráfica $D$                         | 10, 13, 14     |

**¡Goya!**