



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

Equivalencia en lenguajes de programación modales para S_4

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

Presenta:
Ximena Estrada Zavaleta

Tutor:
Dr. Favio Ezquiel Miranda Perea
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

Ciudad de México, febrero 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Deducción Natural para Lógica Modal	1
1.1. Deducción Natural para la Lógica Modal	4
1.2. Pruebas Formales	7
1.3. Pseudopruebas	15
2. El sistema de secuentes \mathcal{IS}_4	18
2.1. Derivaciones Formales	21
2.2. Pruebas Bidireccionales	22
2.3. Reglas Estructurales	31
3. El sistema de secuentes \mathcal{KT}_4	38
3.1. Reglas Estructurales	45
3.2. Equivalencia de \mathcal{IS}_4 y \mathcal{KT}_4	49
3.2.1. Reglas Admisibles	49
3.3. El sistema \mathcal{KT}_4 y el sistema \mathcal{DN} son equivalentes.	50
3.3.1. $\mathcal{DN} \implies \mathcal{KT}_4$	51
3.3.2. $\mathcal{KT}_4 \implies \mathcal{DN}$	56
4. Lenguajes de Programación Modales	60
4.1. El lenguaje modal $\lambda_{\mathcal{IS}_4}$	60
4.2. El lenguaje modal $\lambda_{\mathcal{KT}_4}$	68
4.3. Equivalencia de los lenguajes modales	75
4.3.1. $\lambda_{\mathcal{IS}_4} \implies \lambda_{\mathcal{KT}_4}$	75
4.3.2. $\lambda_{\mathcal{KT}_4} \implies \lambda_{\mathcal{IS}_4}$	76
5. Conclusiones y trabajo futuro	79
5.1. Conclusiones	79
5.2. Trabajo a futuro	80
Bibliografía	81

Agradecimientos

A lo largo de mi camino en la maestría me encontré en más de una ocasión fuera de una zona de comodidad a la que suelo estar acostumbrada, fuera de la clase de personas con las que suelo entenderme fácilmente y en muchos aspectos en un entorno muy desconocido, por ello como muchos sabrán en los últimos dos años me topé con baches de diversas índoles y aunque en ningún momento dudé poder concluir esta etapa, fue una gran dicha recibir muestras de apoyo y ánimo.

Agradezco profundamente a mis papás por el apoyo que me dan en todo momento y la perseverancia con la que constantemente forzan mis límites para hacer que crezca cada día más y darme una educación que me hace consiente de no detenerme en ningún momento.

A mi hermana, a quien todo lo que pueda escribir se queda corto para agradecerle, quien ha sido mi mayor confidente, quien ha estado ahí en cada uno de mis momentos y en todos ellos me ha apoyado y ha buscado de una u otra forma hacerme ver el lado bueno de las cosas.

A mi tío Carlos, por el apoyo y ejemplo que me brinda a mí y a mi familia.

A Favio, por ser un gran asesor, por el voto de confianza que tomó cuando aceptó ser mi asesor, por todo el apoyo brindado y buscar siempre lo mejor. Por todo el tiempo que trabajamos juntos y enseñarme todo lo que sé en este ámbito académico. Por el gran profesor que es.

A Javier Páez, por todas sus enseñanzas fuera del ámbito académico, por recordarme que si estás a la mitad de un río, es más fácil llegar al otro lado que regresar lo ya andado.

A Lulú, porque sus comentarios siempre que estuvo presente en las discusiones de este trabajo, me ayudaron a ir abriendo camino.

A Kike, por ser mi amigo en la maestría y muy pronto una de mis personas más cercanas. Por todos los momentos buenos que tuvimos y ser una de las personas más especiales que he conocido.

A Moy, por ser un apoyo constante, motivarme a iniciar esta aventura y no dudar en apoyarme en todo momento que lo requerí.

A Oksana Sekatskaja, por darme un sueño y un rumbo en la vida. Porque gracias a ella encontré algo que me hace feliz y que me levanta cada mañana.

A Nathalie, por leerme y apoyarme a la distancia, porque a pesar de los baches en los que se ha encontrado, nunca ha dejado de tener un momento para estar para mí.

Por último pero no por eso menos importante, a Sandra, por todos los buenos momentos con los que ha llenado mi vida, por estar a mi lado apoyándome de manera constante, por no dejarme rendir, echarme porras en cada paso que doy y ser uno de los pilares más importantes para mí.

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Universidad Nacional Autónoma de México en el marco del proyecto:

Lógicas no clásicas: Aspectos deductivos de la computación a la filosofía.

Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida.

También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me otorgó de 2018 a 2020.

Introducción

Para entender el concepto de lógica modal se necesita mencionar brevemente el concepto de modalidades. Una expresión u operador modal se usa para caracterizar la verdad de un juicio o una actitud proposicional. El término lógica modal es utilizado para referirse a cada uno de los miembros de una familia de lógicas que comparten reglas de inferencia y que capturan el comportamiento de algún grupo de operadores modales. Los primeros operadores modales fueron introducidos para resolver los problemas de la implicación y para obtener lógicas que pudieran expresar la necesidad y posibilidad. De manera más precisa una lógica modal es un sistema formal que intenta capturar el comportamiento deductivo de distintas interpretaciones de las expresiones “es necesario” y “es posible”. Esto abrió camino a diferentes lógicas. La lógica temporal se presenta con las modalidades “eventualmente”. La lógica alética con modalidades de necesidad y posibilidad. La lógica deóntica permite modalidades como “se permite” o “es obligatorio”. En la lógica epistémica se hace uso de modalidades como “se sabe que”, ya sea para un agente o grupos de agentes. La notación que se ocupará en este trabajo es tomar alguna fórmula φ de la lógica proposicional y anteponer el símbolo \Box , de modo que el significado de $\Box\varphi$ se traduce como “La proposición φ es necesaria” o simplemente “ φ es necesaria”. Dentro de la lógica modal también se trabajó la noción de posibilidad, cuya notación corresponde a anteponer el símbolo de \Diamond a la proposición y el significado es “La proposición φ es posible”, sin embargo en este trabajo sólo nos enfocaremos en el significado de necesidad. Finalmente, aunque las lógicas modales son por lo general extensiones de la lógica clásica, en este trabajo se hablará de la lógica modal constructiva o más precisamente minimal, es decir, sin negación.

Existen diferentes concepciones formales de la lógica como la sintáctica, la semántica y la estructural. La primera es la que constituye lo que se conoce como teoría de la demostración, la segunda conforma la teoría de modelos y la tercera es un enfoque que pretende caracterizar un sistema formal por medios de las reglas estructurales que cumplen. Este último enfoque está inspirado en los trabajos de consecuencia lógica de Tarski y aquellos sobre deducción natural de Gentzen.

La deducción natural fue introducida por Gerhard Gentzen con la motivación de capturar formalmente la estructura lógica que tienen las argumentaciones deductivas que se llevan a cabo en el razonamiento que se realiza en las demostraciones matemáticas. Ésta es usada para intentar probar que un razonamiento es correcto, lo cual formalmente se traduce en verificar la validez de un secuento. Si uno dice “En verano hace calor, y ahora es verano, entonces ahora hace calor”, en este caso es posible verificar la validez del enunciado. Sin embargo, esto no es siempre tan sencillo,

consideremos el siguiente enunciado: “Si repruebas una materia, debes recursarla. Y si no estudias entonces repruebas. Ahora supón que no estás recursando. Entonces o estudias o estás recursando o ambas”. Este razonamiento no es tan sencillo de verificar, sin embargo es válido y puede ser probado con deducción natural.

Por otra parte el cálculo lambda ha sido empleado como fundamento conceptual de los lenguajes de programación, aportando una sintaxis básica, una semántica para el concepto de función como proceso de transformación de argumentos en resultados y un medio para definir primitivas de programación, el cálculo lambda tiene por objeto hacer explícito el concepto de cómputo que representa el empleo de funciones como medio de transformación de argumentos en resultados. En particular nos interesan los cálculos lambdas con tipos modales obtenidos a partir de las lógicas modales mediante la bien conocida correspondencia de Curry-Howard, que relaciona sistemas formales de tipos para algunos modelos de computación con ciertos sistemas formales de demostración. Esta correspondencia se divide en dos, la primera de ellas está al nivel de las fórmulas y tipos y la segunda al nivel de demostraciones y programas.

El artículo central que constituye el punto de origen de esta tesis es presentado por Clouston en [2], que desarrolla un cálculo lambda modal que se afirma captura el estilo de Fitch de la deducción natural. Sin embargo esta afirmación no se demuestra en dicho artículo por lo que nos propusimos aquí desarrollar toda la maquinaria necesaria para su demostración formal.

A grandes rasgos el estilo Fitch es un sistema de deducción natural diagramático que emplea un concepto de prueba subordinada para la implicación, sin embargo para la lógica modal es necesario extender las reglas diagramáticas de Fitch para poder aplicarlas a fórmulas que involucren operadores modales y no existe un consenso sobre cómo hacer esto, por lo que hay diversos sistemas para las lógicas modales, los cuales usan distintos conceptos de prueba subordinada modal. El cálculo lambda de Clouston presenta un elemento ajeno a lo usual, un candado \blacksquare que es usado para representar el hecho de que se ha abierto una prueba modal subordinada. Supongamos que se tiene una fórmula $\Box A$, entonces podemos abrir una prueba estrictamente subordinada en la cual eliminamos el operador \Box para obtener la premisa A , sin embargo el costo de hacer eso es que se agrega un candado para dejar huella de lo que se ha realizado. El cálculo de Clouston, llamado aquí $\lambda_{\mathcal{TS}_4}$ fue desarrollado principalmente para estudiar ciertos aspectos semánticos de la lógica modal en el ámbito de la teoría de las categorías, por lo que la lógica detrás de él no fue estudiada a detalle, cosa que hacemos en este trabajo. Si bien nuestro propósito inicial era estudiar más a detalle la expresividad y aplicaciones de este cálculo lambda, sobre todo al cómputo distribuido, en las líneas de [10], [13] y [12], el estudio de la lógica subyacente nos llevó a desarrollar detalles importantes de forma que la equivalencia de lenguajes modales (cálculos lambda propotípicos) se trata sólo de manera técnica en nuestro último capítulo.

De cualquier forma la contribución y relevancia de este trabajo recae en la posibilidad de la equivalencia de algunos formalismos, en lo que respecta a su expresividad, mediante el desarrollo de especificaciones y programas no triviales que involucren operadores modales, en este caso, mostrar la equivalencia de ciertos lenguajes. Por ello este trabajo es relevante no sólo para la inves-

tigación en lenguajes de programación sino para el desarrollo e inclusión de nuevas metodologías de programación en prototipos reales como el lenguaje *ML5* para programas distribuidos.

Este trabajo se centra en dar una equivalencia detallada entre el sistema de deducción natural al estilo Fitch y el sistema del cálculo de secuentes \mathcal{IS}_4 para la lógica modal constructiva S_4 , además de explorar también la equivalencia de los lenguajes de programación asociados bajo la correspondencia Curry-Howard.

El trabajo se divide en cinco capítulos. Dado que la mayoría de las cosas en este trabajo tienen que ver con la deducción natural y como ya se dijo, se sabe que hay variantes de este modo de realizar las pruebas, se dedica el primer capítulo a establecer las reglas para la deducción natural que se usarán. Mientras que en la deducción natural proposicional existen reglas bien conocidas y ya establecidas para realizar pruebas, que quizá tengan algunas variantes, pero que en esencia son las mismas reglas, se tiene que en la deducción natural modal no existe un único sistema de reglas, pues las variantes que se pueden encontrar difieren considerablemente y afectan al modo en que uno ha de realizar la prueba, por ello también se presentará el sistema de pruebas subordinado para la lógica modal con el cual se trabajará y con el cual se realizará la equivalencia. Cabe resaltar que en este capítulo fue necesario introducir no sólo las reglas gráficamente, sino dar una definición formal de prueba para no depender de la intuición visual, estas definiciones fueron presentadas por Van Westrhenen en [16] y si bien pueden resultar engorrosas son de considerable utilidad para escribir la equivalencia sin ambigüedades.

En el segundo capítulo se discuten a detalle las reglas del sistema de secuentes \mathcal{IS}_4 . Es importante resaltar que el candado evita que gran parte de las reglas estructurales sean válidas por lo que se probará en la segunda sección que se está trabajando con una lógica subestructural, de igual manera se irán descubriendo las problemáticas que causa el candado. En la tercera sección se presenta de manera formal el concepto de prueba bidireccional. Existen sistemas de secuentes en los que hacer un razonamiento “hacia atrás” nos da una prueba hacia adelante, esto no ocurre en este sistema, sin embargo hay información muy importante que se obtiene a través de este procedimiento y que facilitará el realizar los ejemplos.

Por razones que se discutirán a lo largo del trabajo en el tercer capítulo será necesario introducir un nuevo sistema de secuentes, el sistema \mathcal{KT}_4 . Éste sistema propone reglas más finas que permitirán escribir la equivalencia de forma mucho más clara, por ello todo el tercer capítulo estará dedicado a la discusión de las reglas, así como a enunciar las propiedades con las que cuenta, también serán realizados todos los ejemplos con los que se trabajó en los capítulos anteriores. Ya se mencionó que el objetivo central de este trabajo es probar la equivalencia entre el sistema de secuentes \mathcal{IS}_4 y el sistema de deducción natural modal, por lo que este capítulo concluye mostrando una primera equivalencia al nivel de la lógica entre el sistema \mathcal{IS}_4 y el sistema \mathcal{KT}_4 .

En el cuarto capítulo se hablará de ambos sistemas lógicos pero al nivel de cálculo lambda como prototipos de lenguajes de programación y se explorará la equivalencia de los sistemas $\lambda_{\mathcal{IS}_4}$ y $\lambda_{\mathcal{KT}_4}$. Como es de esperarse los resultados no serán tan directos como en la lógica debido a la presencia no sólo de las especificaciones (fórmulas o tipos) sino de los programas (términos lambda).

Por último en el quinto capítulo se discuten las conclusiones y se menciona el trabajo a futuro.

Capítulo 1

Deducción Natural para Lógica Modal

Cuando se habla de sistemas de deducción natural para la lógica proposicional y de predicados, éstos suelen tener reglas con quizá algunas variantes, sin embargo, en esencia son lo mismo. Dichos sistemas suelen ser presentados en dos estilos, el estilo Prawitz, que hace uso de árboles para presentar las pruebas y el estilo Fitch que tiene pruebas lineales donde cada renglón es una hipótesis, un supuesto o el resultado de alguna de las reglas de inferencia. Uno de los problemas que se presentaron al querer dar la equivalencia entre el sistema \mathcal{IS}_4 y el de deducción natural para la lógica modal es que existen muchos sistemas de deducción natural modal, pero a diferencia de la lógica proposicional, las variantes sí representan un cambio representativo en el modo que se debe trabajar, por ello es necesario explicar las reglas que serán usadas en este trabajo. Para hablar de reglas de deducción natural que se puedan usar en la lógica modal se debe comenzar primero por hablar de las reglas que se usan en la lógica no modal y después extender esta idea para introducir las nuevas reglas. Comencemos por mencionar que en este trabajo se hará una diferencia entre hipótesis y supuesto. Las hipótesis pertenecen a la prueba principal y serán colocadas siempre al inicio de una prueba, los supuestos son premisas temporales que se necesitan para probar algo y no pertenecen a la prueba principal. La deducción proposicional al estilo Fitch se centra en una construcción conocida como “prueba subordinada”. Ésta consiste en escribir una prueba como parte de otra prueba. Por ejemplo, para probar $A \rightarrow B$ se comienza una nueva prueba asumiendo A y termina cuando concluimos B , al hecho de iniciar una prueba asumiendo A es a lo que llamaremos comenzar con una prueba subordinada. Cuando se concluye la prueba subordinada se agrega $A \rightarrow B$ a la prueba principal. Esta es la primera regla para la deducción natural y gráficamente esto se ve del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \left| \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array} \right. \quad (\rightarrow I) \\ A \rightarrow B \\ \vdots \end{array}$$

Se puede observar que el uso de la fórmula A fue necesario para probar $A \rightarrow B$, no como una hipótesis general de la prueba, aquí recae la diferencia entre hipótesis y supuestos. A la fórmula A que inicia una prueba subordinada se le llamará supuesto y cada vez que se use un supuesto se iniciará una prueba subordinada, mientras que las hipótesis están dadas desde el inicio de la prueba.

En la representación gráfica, las pruebas subordinadas están posicionadas a la derecha de la prueba principal, es decir, a la derecha de la prueba de la cual son subordinadas. El supuesto que se encuentre más arriba dentro del nuevo nivel de la sangría, en este caso A , es el supuesto de la prueba subordinada. La sangría será usada para indicar que el supuesto A se conserva a lo largo de toda la prueba subordinada. Para hacer gráficamente visible que se ha iniciado una prueba subordinada se usará una línea a lo largo de la prueba subordinada. Esto ayudará de manera importante cuando introduzcamos las reglas para la deducción natural modal.

La siguiente regla es el modus ponens, la cual es enunciada normalmente del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 A \rightarrow B \\
 \vdots \quad (\text{MP}) \\
 A \\
 B
 \end{array}$$

Hay que mencionar que con todo rigor ésta no es la única forma de usar la regla, gráficamente pareciera que es necesario que aparezca primero $A \rightarrow B$, en algún momento posterior aparezca A lo cual no es cierto, el orden puede cambiar y se puede aplicar la regla, por lo tanto ésta debe ser enunciada como sigue:

$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 A \\
 \vdots \quad (\text{MP}) \\
 A \rightarrow B \\
 B
 \end{array}$$

Este último fue un detalle que quizá se podría considerar como exagerado, sin embargo ya entrando en detalles, no es tan exagerado notar que sigue habiendo huecos en ambas presentaciones de la regla, pues gráficamente se está diciendo que es necesario que las fórmulas con las cuales se va a aplicar el Modus Ponens se encuentren al mismo nivel, es decir, que si se cumplía A y después fue abierta una prueba subordinada tal que se pueda concluir a $A \rightarrow B$ entonces de entrada pareciera que no es posible aplicar el Modus Ponens, lo cual tampoco es cierto. Si bien ésta es una de las diferencias en que los sistemas de deducción natural no terminan de ponerse de acuerdo, no hay razón para pensar que es necesario aplicar algún tipo de reiteración a fin de que ambas fórmulas

se encuentren al mismo nivel, por tanto es válido lo siguiente

$$\left| \begin{array}{l} A \\ \vdots \\ A \rightarrow B \\ B \end{array} \right. \quad (\text{MP})$$

y lo siguiente

$$\left| \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \vdots \\ A \\ B \end{array} \right. \quad (\text{MP})$$

Quizá se empiece a sospechar que presentar las reglas de modo gráfico no sea lo más conveniente, recordemos que se pretende dar una equivalencia y depender de reglas cuya presentación es gráfica nos va a permitir escribir con toda la formalidad posible la prueba de dicha equivalencia, por ello después de presentar todas las reglas de un modo gráfico, nos ayudaremos de la intuición visual para dar definiciones de cada una de ellas. Veamos mientras tanto algunos ejemplos de lo que es posible realizar con las reglas que hemos presentado.

Ejemplo 1.1 $\vdash (A \rightarrow \Box B \rightarrow C) \rightarrow \Box B \rightarrow A \rightarrow C$

$$\left| \begin{array}{l} 1. A \rightarrow \Box B \rightarrow C \\ \left| \begin{array}{l} 2. \Box B \\ \left| \begin{array}{l} 3. A \\ 4. \Box B \rightarrow C \\ 5. C \end{array} \right. \\ 6. A \rightarrow C \end{array} \right. \\ 7. \Box B \rightarrow A \rightarrow C \\ 8. (A \rightarrow \Box B \rightarrow C) \rightarrow \Box B \rightarrow A \rightarrow C \end{array} \right. \begin{array}{l} (\text{SUP}) \\ (\text{SUP}) \\ (\text{SUP}) \\ (\text{MP}) 1,3 \\ (\text{MP}) 4,2 \\ (\rightarrow \text{I}) 3,5 \\ (\rightarrow \text{I}) 2,6 \\ (\rightarrow \text{I}) 1,7 \end{array}$$

Ejemplo 1.2 $\vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$$\left| \begin{array}{l} 1. P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ \left| \begin{array}{l} 2. P \rightarrow Q \\ \left| \begin{array}{l} 3. P \\ 4. Q \\ 5. Q \rightarrow R \\ 6. R \end{array} \right. \\ 7. P \rightarrow R \end{array} \right. \\ 8. (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \\ 9. P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \end{array} \right. \begin{array}{l} (\text{SUP}) \\ (\text{SUP}) \\ (\text{SUP}) \\ (\text{MP}) 4,3 \\ (\text{MP}) 1,3 \\ (\text{MP}) 5,4 \\ (\rightarrow \text{I}) 3,6 \\ (\rightarrow \text{I}) 2,7 \\ (\rightarrow \text{I}) 1,8 \end{array}$$

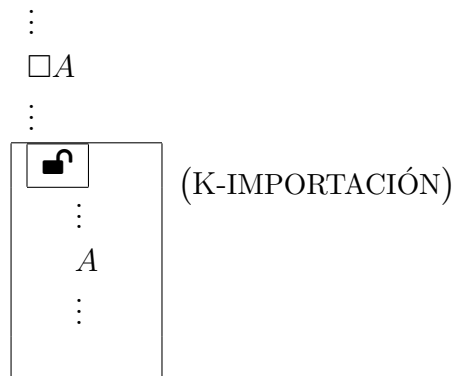
1.1. Deducción Natural para la Lógica Modal

Para extender este concepto a la lógica modal es necesario agregar un nuevo tipo de prueba subordinada, la cual llamaremos **prueba estrictamente subordinada**. Éstas se diferencian de las pruebas subordinadas por dos cosas:

- Una prueba estrictamente subordinada puede ser iniciada en cualquier punto de la prueba, no requiere un supuesto.
- Una prueba estrictamente subordinada estará indicada por un \blacksquare al inicio de la prueba.

Ahora se puede comenzar a hablar de las reglas que se usarán para realizar una prueba cuando hay fórmulas modales involucradas. Las pruebas estrictamente subordinadas pueden ser escritas como parte de otra prueba de modo que puede haber una cantidad arbitraria de anidamientos de pruebas subordinadas y estrictamente subordinadas. Comencemos con la primera regla.

- **K-IMPORTACIÓN.** Una fórmula A puede ocurrir en una prueba estrictamente subordinada si $\Box A$ ocurre en algún momento previo de la prueba subordinada, lo cual gráficamente se puede ver de la siguiente manera:



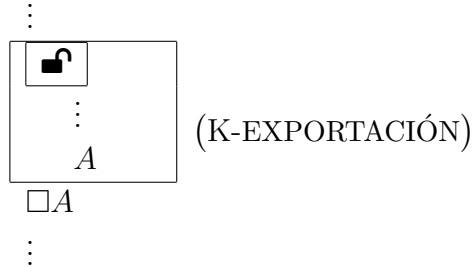
Notación 1.3 Para abreviar el nombre de la fórmula normalmente se le denotará simplemente por $(K-I)$.

Observación 1.4 Una de las diferencias que se pueden encontrar en los diferentes sistemas de deducción natural modal es que en algunos se exige que la fórmula A sea introducida inmediatamente después de haber iniciado una prueba estrictamente subordinada, sin embargo en este caso como bien lo indican los puntos suspensivos, eso no será necesario.

Observación 1.5 Una vez dada esta definición el lector se puede preguntar si es posible realizar el modus ponens de dos fórmulas cuando una se encuentra fuera de la prueba estrictamente subordinada, la respuesta es que no es posible, pero dejaremos esos detalles para cuando se dé una definición formal.

De modo un tanto análogo se presenta una regla para indicar el procedimiento opuesto.

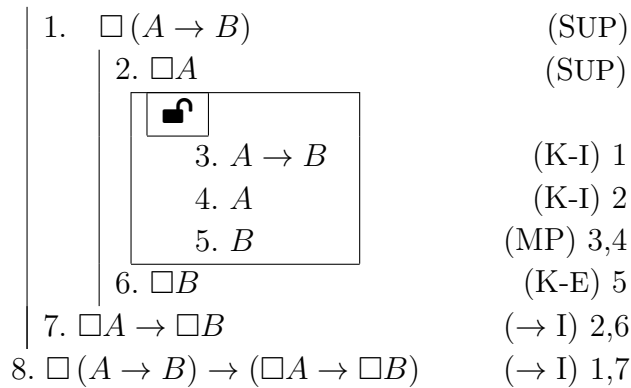
- **K-EXPORTACIÓN.** Si una fórmula A aparece dentro de una prueba estrictamente subordinada entonces $\Box A$ puede ocurrir inmediatamente después de concluir la prueba subordinada.



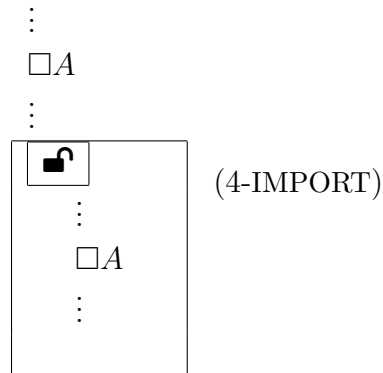
Notación 1.6 Para abreviar el nombre de la fórmula normalmente se le denotará simplemente por $(K-E)$.

Con estas dos nuevas reglas podemos hacer la prueba de uno de los axiomas.

Ejemplo 1.7 (Axioma K) $\vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.



- **4-IMPORT.** Una fórmula modal $\Box A$ puede aparecer en una prueba estrictamente subordinada si ya ocurría en algún paso anterior.



Notación 1.8 Para abreviar el nombre de la fórmula normalmente se le denotará simplemente por $(4-I)$.

1.2. Pruebas Formales

Hasta ahora hemos ilustrado todas las reglas y hecho las observaciones necesarias e incluso realizado algunos ejemplos, sin embargo todas ellas carecen por ahora de una definición formal. Como ya se mencionó es necesario formalizar el concepto de prueba y todas las reglas pues esto ayudará a escribir la equivalencia sin ambigüedades. A continuación se presenta una definición formal del sistema de deducción natural al estilo Fitch para la lógica modal. El sistema será presentado en términos de esquema de prueba e intervalos.

Definición 1.13 *Se define como PROP al conjunto de fórmulas proposicionales modales bien fundadas.*

Definición 1.14 *Un esquema de prueba es una estructura matemática que consiste en:*

1. Un intervalo $D = [1, n]$, donde $D \subset \mathbb{N}$
2. Una función $F : D \rightarrow PROP$
3. Una colección I de subintervalos de D tal que para cada intervalo $[i, j] \in I$ se tiene que $i \leq j$ y para cada par de intervalos distintos $[i, j], [k, l] \in I$ se tiene que
 - a) $i \leq k < l \leq j$ ó,
 - b) $k \leq i < j \leq l$ ó,
 - c) $[i, j] \cap [k, l] = \emptyset$.

La colección \mathbf{I} de subintervalos es la unión de dos subcolecciones disjuntas a las que llamaremos \mathbf{H} y \mathbf{M} las cuales definiremos de la siguiente manera:

La colección \mathbf{H} estará conformada por intervalos asociados a supuestos. Si $D \notin \mathbf{H}$, entonces D será llamado el intervalo nulo. Si $[k, l] \in \mathbf{H}$ entonces la fórmula $F(k)$ será llamada el supuesto del intervalo $[k, l]$.

La colección \mathbf{M} será aquella conformada por intervalos modales. D no puede ser un elemento de \mathbf{M} . Si $[k, l] \in \mathbf{M}$ entonces la fórmula $F(k)$ no es necesariamente un supuesto de $[k, l]$.

Notación 1.15 *A la fórmula $F(i)$, es decir, la fórmula que se encuentre en el i -ésimo renglón se le denotará como F_i .*

Es necesario mencionar que la definición de esquema de prueba no es usual y puede resultar engorrosa para algo que es visualmente intuitivo, sin embargo es necesaria pues es la única forma de formalizar el concepto de deducción natural sin depender “demasiado” de la intuición visual, la cual normalmente resulta ambigua y no permite dejar en claro las reglas.

Antes de ver un ejemplo, es necesario hacer algunas observaciones respecto a la definición. En la deducción natural al estilo Fitch para lógica no modal ocurre que $\mathbf{I} = \mathbf{H}$, es decir, todo subintervalo

Si $i \in I$ para algún intervalo $I \in \mathbf{I} \cup \{D\}$ y no existe un $J \in \mathbf{I}$ tal que $i \in J \subset I$, entonces diremos que la fórmula F_i cae en I , lo cual se denotará como $F_i \in I$. Un intervalo I cae en un intervalo $J \in \mathbf{I} \cup \{D\}$ si $I \subset J$ y no existe $K \in \mathbf{I}$ tal que $I \subset K \subset J$.

Retomando el ejemplo anterior se tiene que $F_4 \in M_2$ pues no existe un $J \in \mathbf{I}$ tal que $i \in J \subset M_2$, además $M_2 \subset H_2$ pues no existe un K tal que $M_2 \subset K \subset H_2$.

Definición 1.18 El grado de una fórmula F_i , denotado como $gr(i)$, se define como un par ordenado de números naturales cuyas entradas cumplen lo siguiente

$$gr(i) = (\text{card} \{I \in M \mid i \in I\}, \text{card} \{I \in H' \mid i \in I\})$$

donde $H' = \{I \in H \mid i \in I \wedge \nexists J \in M \text{ tal que } i \in J \subset I\}$.

Lo que la definición anterior quiere decir es que el grado de una fórmula F_i será un par ordenado donde la primera entrada indica la cantidad de intervalos modales a la izquierda de F_i y la segunda entrada representa el número de intervalos “ordinarios” a la derecha de F_i con respecto al intervalo modal del cual F_i es elemento.

Veamos un ejemplo para ayudar a entender todo lo que se dijo en la definición.

Ejemplo 1.19 $\cdot \vdash \Box (\Box A \rightarrow \Box (\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box (\Box (\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow \Box C))$

1. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C))$	(SUP)													
<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table> </td> <td>12. C</td> <td>(T-E) 11</td> </tr> </table> </td> <td>13. $\Box C$</td> <td>(K-E) 12</td> </tr> </table> </td> <td>14. $\Box A \rightarrow \Box C$</td> <td>$(\rightarrow I)$ 3,13</td> </tr> </table>		<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table> </td> <td>12. C</td> <td>(T-E) 11</td> </tr> </table> </td> <td>13. $\Box C$</td> <td>(K-E) 12</td> </tr> </table>	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table> </td> <td>12. C</td> <td>(T-E) 11</td> </tr> </table>	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table>	11. C	(K-I) 10	12. C	(T-E) 11	13. $\Box C$	(K-E) 12	14. $\Box A \rightarrow \Box C$	$(\rightarrow I)$ 3,13	15. $\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$	(K-E) 14
<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table> </td> <td>12. C</td> <td>(T-E) 11</td> </tr> </table> </td> <td>13. $\Box C$</td> <td>(K-E) 12</td> </tr> </table>	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table> </td> <td>12. C</td> <td>(T-E) 11</td> </tr> </table>	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table>	11. C	(K-I) 10	12. C	(T-E) 11	13. $\Box C$	(K-E) 12	14. $\Box A \rightarrow \Box C$	$(\rightarrow I)$ 3,13				
<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table> </td> <td>12. C</td> <td>(T-E) 11</td> </tr> </table>	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table>	11. C	(K-I) 10	12. C	(T-E) 11	13. $\Box C$	(K-E) 12							
<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>11. C</td> <td>(K-I) 10</td> </tr> </table>	11. C	(K-I) 10	12. C	(T-E) 11										
11. C	(K-I) 10													

 16. $\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ | $(\rightarrow I)$ 2,15 | 17. $\Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ | (K-E) 16 || 18. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ | $(\rightarrow I)$ 1,17 |

Veamos el grado de cada fórmula.

- $gr(F_1) = (0, 1)$ pues a la izquierda no existe ningún intervalo modal.
- $gr(F_2) = (1, 1)$ dado que ocurre después de un intervalo modal y es un supuesto.
- $gr(F_3) = (2, 1)$ dado que ocurre después de dos intervalos modales y es un supuesto
- $gr(F_4) = (2, 1)$ dado que ocurre después de dos intervalos modales, sin embargo el grado de anidamiento de los intervalos ordinarios no cambia pues se encuentra al mismo nivel que F_3 . De hecho $gr(F_5) = gr(F_6) = gr(F_7) = (2, 1)$ pues aparecen dos intervalos modales a la izquierda y aparece un sólo intervalo ordinario.
- $gr(F_8) = (3, 0)$ pues hay tres intervalos modales a la izquierda y no es un supuesto, de hecho $gr(F_9) = gr(F_{10}) = (3, 0)$ por las mismas razones.
- $gr(F_{11}) = (4, 0)$ dado que existen cuatro intervalos modales situados a la izquierda de F_{11} y en este intervalo modal no existen supuestos.

- $gr(F_{12}) = (3,0)$ dado que existen tres intervalos modales situados a la izquierda de F_{12} y en este intervalo modal no existen supuestos.
- $gr(F_{13}) = (2,1)$ dado que existen dos intervalos modales situados a la izquierda de F_{12} lo que determina la primera entrada del par ordenado y F_3 es un supuesto lo cual determina la segunda entrada.
- $gr(F_{14}) = (2,0)$ dado que existen dos intervalos modales situados a la izquierda de F_{12} y no existe ningún supuesto, por lo cual la segunda entrada debe ser cero.
- $gr(F_{15}) = (1,1)$ dado que existe un intervalo modal a la izquierda de F_{15} por lo que la primera entrada debe ser uno y F_2 es un supuesto por lo cual la segunda entrada también es uno.
- $gr(F_{16}) = (1,0)$ dado que existe un intervalo modal a la izquierda de F_{16} y no existen supuestos.
- $gr(F_{17}) = (0,1)$ dado que ya no hay intervalos modales por lo cual la primera entrada es cero y F_1 es un supuesto por cual la segunda entrada debe ser uno.
- $gr(F_{18}) = (0,0)$ dado que ya se han cerrado todos los intervalos modales y ordinarios. No existen intervalos modales a la izquierda y no hay supuestos a la derecha.

Ya se tienen todas las definiciones necesarias para finalmente dar una definición formal de todas las reglas que fueron ilustradas.

Definición 1.20 *Dado un esquema de prueba D con $D = [1, n]$, fórmulas F_1, \dots, F_n e intervalos I . Una fórmula E es el resultado de una aplicación de la regla de deducción R si E es la conclusión de R , las premisas de R preceden a E en el esquema de prueba y se debe cumplir una de las siguientes condiciones.*

1. $R = (\rightarrow I)$

Debe existir un subintervalo ordinario $[k, l] \in H$ tal que $F_k = A$ y $F_l = B$ de modo que $E = A \rightarrow B$. Además E y $[k, l]$ deben caer en el mismo subintervalo.

2. $R = (\text{Modus Ponens})$

En este caso deben existir $F_k = A \rightarrow B$ y $F_l = A$ tal que F_k y $F_l \in M$ con $M \in \mathbf{M}$, es decir, en el mismo subintervalo modal, tal que $E = B$.

3. $R = (K\text{-IMPORTACIÓN})$

Esto quiere decir que existe $F_l = \Box A$ tal que cae en un subintervalo $I \in \mathbf{I}$ y la conclusión es la fórmula $F_m = A$ y cae en un $J \in \mathbf{M}$.

4. $R = (K\text{-EXPORTACIÓN})$

Debe ocurrir que la premisa sea de la forma $F_l = A \in M \in \mathbf{M}$ y $F_m = \Box A$ cae en un subintervalo $J \in \mathbf{I}$ tal que no existe un $M \subset K \subset J$.

5. $R = (\text{4-IMPORTACIÓN})$

Se tiene que la premisa fue una fórmula modal $F_l = \Box A \in M \in \mathbf{M}$ y $F_m = \Box A$ cae en un subintervalo $J \in \mathbf{I}$ tal que no existe un K tal que $M \subset K \subset J$.

6. $R = (\text{T-EXPORTACIÓN})$

Como premisa se tiene $F_l = A \in M \in \mathbf{M}$ y $F_m = A$ cae en un $J \in \mathbf{I}$ tal que no existe un K tal que $M \subset K \subset J$.

Definición 1.21 Una prueba sin hipótesis de una fórmula A es un esquema de prueba $D = [1, n]$ y fórmulas F_1, \dots, F_n que cumplen las siguientes condiciones:

- $F_n = A$,
- $gr(F_n) = (0, 0)$ y
- toda fórmula F_i con $(1 \leq i \leq n)$ es un supuesto ó el resultado de una aplicación de alguna regla de deducción aplicada a F_j con $j < i$.

Notación 1.22 Al hecho de que se esté trabajando con una prueba sin hipótesis se denotará como $\cdot \vdash A$.

Definición 1.23 Una prueba con hipótesis de una fórmula A a partir de las fórmulas P_1, \dots, P_m , $m \geq 1$ es un esquema de prueba $D = [1, n]$ con $n > m$ y fórmulas F_1, \dots, F_n que satisface las siguientes condiciones:

- $F_i = P_i$ es una hipótesis para $1 \leq i \leq m$ tal que $gr(F_i) = (0, i)$,
- $F_n = A$ y tanto A como P_m caen en el mismo intervalo donde $gr(F_n) = (0, m)$
- toda fórmula F_i , $1 \leq i \leq n$ es una hipótesis o el resultado de la aplicación de una regla de deducción a alguna F_j con $j < i$.

Notación 1.24 Al hecho de trabajar con una prueba con hipótesis se le denotará como $\Gamma \vdash A$ donde en Γ se encuentran todas las hipótesis.

Definición 1.25 Diremos que una fórmula A es derivable si existe una prueba de A .

Veamos las pruebas de algunos ejemplos, mismos que serán usados en las secciones posteriores.

Ejemplo 1.26 El ejemplo $\cdot \vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$.

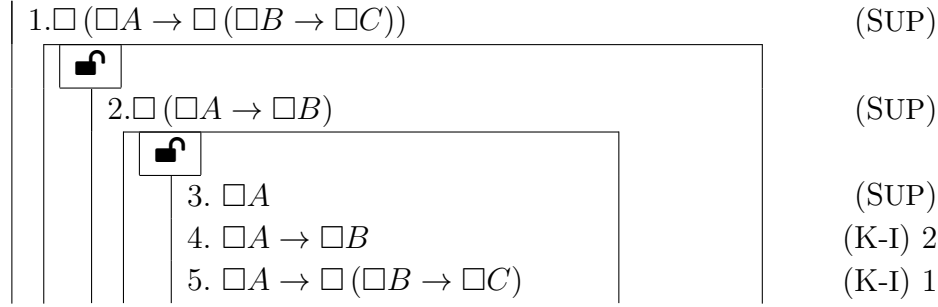
1. $\Box(A \rightarrow B)$	(SUP)
2. $\Box(B \rightarrow C)$	(SUP)
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> \blacksquare </div> </div>	
3. A	(SUP)
4. $A \rightarrow B$	(K-I) 1
5. $B \rightarrow C$	(K-I) 2
6. B	(MP) 4 3
7. C	(MP) 5 6
8. $A \rightarrow C$	(\rightarrow I) 3 7
9. $\Box(A \rightarrow C)$	(K-E) 8
10. $\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$	(\rightarrow I) 2,9
11. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$	(\rightarrow I) 1,10

Ejemplo 1.27 $\vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$

1. $\Box(A \rightarrow B)$	(SUP)
2. $\Box\Box A$	(SUP)
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> \blacksquare </div> </div>	
3. $\Box A$	(K-I) 2
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> \blacksquare </div> </div>	
4. A	(K-I) 3
5. $A \rightarrow B$	(K-I) 1
6. B	(MP) 5 4
7. $\Box B$	(K E) 6
8. $\Box\Box B$	(K E) 7
9. $\Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$	(\rightarrow I) 2,8
10. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box\Box A \rightarrow \Box\Box B)$	(\rightarrow I) 1,9

Ejemplo 1.28 $\vdash \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$

- Una pseudoprueba de $\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$



Esta definición es quizá demasiado general, pues si bien es cierto que no se puede hablar de que la fórmula se encuentre en un intervalo modal o un intervalo ordinario sería conveniente poder identificar que una prueba subordinada o estrictamente subordinada fue iniciada. En el ejemplo anterior no es posible decir que F_4 cae dentro de un intervalo de algún tipo. Para poder identificar este tipo de detalles se presentan las siguientes definiciones.

Definición 1.32 *Dada una pseudoprueba, diremos que una fórmula F_k cae en el pseudosubintervalo ordinario generado por F_j si*

- F_j es supuesto,
- $gr(F_j) = (m, n) = gr(F_k)$ y
- $gr(F_{j-1}) = (m, n - 1)$.

Notación 1.33 *Al hecho de que F_k caiga en el pseudointervalo generado por F_j se le denotará como $F_k \in [F_j, \infty)$.*

De modo similar es necesario tener una definición para los intervalos modales, ésta presenta algunas dificultades pues como ya fue mencionado, la primera fórmula que aparece dentro de un intervalo modal no es necesariamente un supuesto y de serlo no se relaciona con el hecho de haber iniciado una prueba estrictamente subordinada, por ello la definición es un poco engorrosa, aún así será necesaria.

Definición 1.34 *Dada una pseudoprueba, diremos que una fórmula F_k cae en el subintervalo modal iniciado por F_m si*

- existe F_l tal que $gr(F_l) = (m - 1, n)$,
- $gr(F_k) = (m, n)$ y
- F_m es la primera fórmula de la pseudoprueba tal que $gr(F_m) = (m, n)$.

Notación 1.35 *Al hecho de que F_k caiga en el pseudointervalo iniciado por F_m se le denotará como $F_k \in [F_m, \infty)$.*

Usando las definiciones y la notación se tiene que en el ejemplo se puede decir que existe una pseudoprueba tal que $F_4 = \Box A \rightarrow \Box B$ cae en el pseudointervalo modal iniciado por F_2 , de modo que $F_4 \in [F_2, \infty)$. Por otra parte existe una pseudoprueba tal que $F_5 = \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ de modo que F_5 cae en el pseudointervalo ordinario generado por F_3 , por lo que $F_5 \in [F_3, \infty)$.

En este capítulo hemos presentado a detalle el sistema de deducción natural modal que se usará para probar la equivalencia, además se ha discutido la razón de ser de todas las reglas, el siguiente paso es presentar el sistema \mathcal{IS}_4 .

Capítulo 2

El sistema de secuentes \mathcal{IS}_4

En el artículo [2], Ranald Clouston presenta el sistema de tipos \mathcal{IS}_4 y dentro de su trabajo, menciona que este sistema es equivalente al sistema de deducción natural modal. En este capítulo se presentará y estudiará la lógica subyacente de él usando deducción natural con secuentes.

Comenzaremos por definir los contextos de este sistema, éstos están definidos por la siguiente gramática

$$\Gamma \triangleq \cdot \mid \Gamma, A \mid \Gamma, \blacksquare$$

donde A es una fórmula de la lógica modal intuicionista y a \blacksquare se le llamará candado. El candado abierto es un símbolo que será usado para indicar que se ha accedido al contenido de una prueba subordinada.

Normalmente en los sistemas de secuentes es válido usar conjuntos o multiconjuntos, en este sistema es necesario que Γ sea una lista debido al candado. Como ya se mencionó, el candado servirá para representar que se ha accedido a una caja, esto significa que una vez cerrada la prueba no es posible acceder al contenido de la prueba, por ello no será posible que el orden en que aparecen tanto las hipótesis como los candados del contexto sea alterado.

El hecho de que no sea posible realizar intercambios dentro del contexto Γ permite sospechar que la ley de intercambio de hipótesis no es válida en este sistema, lo cual puede llevar a preguntarse si a causa del candado existen otras reglas estructurales que no sean válidas. A lo largo de esta sección se irá justificando que no sólo la ley del intercambio no es válida, tampoco será posible usar contracción de hipótesis o debilitamiento para fórmulas, lo cual nos lleva a decir que la lógica que estamos presentando es una lógica subestructural al no cumplir ninguna de las reglas estructurales con las que se suele contar.

Presentemos las reglas del sistema.

- **Regla de Hipótesis**, la primer regla que se presenta es la regla general para el uso de hipótesis.

$$\frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A} \blacksquare \notin \Gamma' \text{ (HYP)}$$

-
- **Introducción a la implicación**, se dirá que $A \rightarrow B$ es válido, si de suponer A válido se tiene que B también es válido, así pues, es posible presentar la regla como sigue:

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B} \quad (\rightarrow \text{I})$$

- **Modus Ponens**, la regla del modus ponens, se presenta como aditivo (del cual hablaremos un poco más a fondo más adelante), es decir con el mismo contexto en ambas premisas, esto es, si sabemos que $A \rightarrow B$ es válido bajo un contexto Γ y sabemos que bajo ese mismo contexto Γ es posible inferir A , entonces podemos inferir a B .

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} B} \quad (\text{MP}_+)$$

- **Regla SHUT**, esta regla es la primera regla que explica cómo lidiar cuando aparece un candado en el contexto. Retomando la noción de que un candado significa que una prueba fue abierta, el descargar un candado del contexto tiene el significado de que la prueba ha sido cerrada y ya no es posible acceder al contenido de la caja asociado a dicha prueba.

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \square A} \quad (\text{SHUT})$$

- **Regla OPEN_{IS₄}**, finalmente una regla para poder lidiar con un secuente cuando aparece una fórmula modal. Se presenta de la siguiente manera:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \square A}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A} \quad (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4})$$

Antes de realizar derivaciones con estas reglas, debemos recalcar algunos detalles. La regla de hipótesis afirma que es posible derivar la hipótesis A si no existen candados a la derecha de A . Recordemos que el candado representa una caja abierta, así que en el futuro no nos será posible inferir a A si existen candados abiertos a su derecha, esto debido a que el candado denota que hay una prueba abierta que no depende de todo lo que se encuentre a la izquierda. Esto muestra que dado un contexto Γ , en general, no es tan sencillo inferir una hipótesis, por lo que hay que construir a Γ con cierto cuidado cuando se realiza una prueba. Mientras que en los sistemas de secuentes que usan conjuntos o multiconjuntos es posible inferir cualquier hipótesis del contexto, en este caso, a causa del candado que fue introducido, se tiene que sólo es válida la hipótesis inmediata.

Respecto a la ley de introducción de la implicación generalizada el lector se puede preguntar, dado que los contextos son listas, si es posible probar la ley de introducción generalizada, es decir,

preguntarse si es válido

$$\frac{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B}$$

Sin embargo, es sencillo notar que esta ley no es válida en este sistema. La regla de introducción generalizada permitiría descargar cualquier hipótesis de Γ' y hay dos razones por las cuales esto no puede ocurrir. La primera es que como ya se mencionó los contextos serán listas ya que nos importa preservar el orden en que aparecen las hipótesis y la segunda razón es que no es posible saltar el candado.

El modus ponens que se presentó se llama aditivo pues para aplicarlo es necesario que los contextos sean iguales, sin embargo esto no coincide con nuestra intuición de lo que se realiza en la deducción natural. Lo más intuitivo sería hacer una recolección de hipótesis y candados, esto hace pensar en un modus ponens multiplicativo, es decir que las premisas puedan depender de un contexto distinto como lo indica la siguiente regla:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B \quad \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B} \text{ (MP}_\bullet\text{)}$$

lo cual de hecho suena muy sensato, pues tanto $A \rightarrow B$ como A podrían depender, en principio, de un contexto completamente diferente, sin embargo debido al candado fue imposible probar que se podía usar un modus ponens multiplicativo. De hecho es posible probar que el modus ponens multiplicativo es inválido en el sistema y no está de menos decir que esta imposibilidad trajo consigo muchas dificultades para probar la equivalencia.

La regla (SHUT) permite observar con mayor formalidad que no es válido saltar los candados. Observemos que si fuese posible saltar los candados en la lista se podría concluir que $\vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow \Box B$. Si de $\Gamma = [B, \blacksquare]$ se pudiese tener que B fuese válida se tendría que $B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, aplicando la regla (SHUT) seguido de la regla de introducción a la implicación se concluiría que el seciente $\vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow \Box B$ es válido, sin embargo tal seciente no es válido en ninguna semántica conocida.

Por último, la regla (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) afirma que para retirar el prefijo modal es necesario cargar un Γ' que no tiene ninguna restricción, por lo que puede ser vacío ó algo conveniente como se verá en los ejemplos, sin embargo, es necesario recalcar desde ahora que esta regla es demasiado liberal, ya que permite agregar absolutamente todo lo que se desee.

En resumen las reglas del cálculo de secientes para \mathcal{IS}_4 serán las siguientes:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A} \blacksquare \notin \Gamma' \text{ (HYP)} \quad \frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B} (\rightarrow \text{I}) \\ \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} B} \text{ (MP}_+\text{)} \\ \\ \frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A} \text{ (SHUT)} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A} \text{ (OPEN}_{\mathcal{IS}_4}\text{)} \end{array}$$

2.1. Derivaciones Formales

Para poner en práctica las reglas recién presentadas, es necesario definir lo que es una derivación de modo formal.

Definición 2.1 Una derivación Π de un juicio $J =_{def} \Gamma \vdash A$ es una secuencia finita de juicios $\Pi = \langle J_1, \dots, J_k \rangle$ tal que $J_k = J$ y para cada $1 \leq i \leq k$ se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- J_i es una instancia de (HYP)
- J_i es la conclusión de una instancia de alguna de las reglas de inferencia cuyas premisas son J_{l_1}, \dots, J_{l_n} con $l_1, \dots, l_n \leq i$.

Diremos que un juicio J es derivable si existe una derivación de J .

Antes de hablar de las reglas estructurales del sistema veamos algunos ejemplos de juicios que son posibles derivar en \mathcal{IS}_4 .

Ejemplo 2.2 (Axioma T) El juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow A$ es derivable.

1. $\Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
2. $\Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot]$
3. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow A$ (\rightarrow I) 2

Ejemplo 2.3 (Axioma 4) El juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box \Box A$ es derivable.

1. $\Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
2. $\Box A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box A, \blacksquare]$
3. $\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (SHUT) 2
4. $\Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box \Box A$ (SHUT) 3
5. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (\rightarrow I) 4

Ejemplo 2.4 (Axioma K) El juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$.

1. $\Box (A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box (A \rightarrow B), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box A, \blacksquare]$
3. $\Box (A \rightarrow B), \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
4. $\Box (A \rightarrow B), \Box A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare]$
5. $\Box (A \rightarrow B), \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ (MP $_+$) 2,4
6. $\Box (A \rightarrow B), \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (SHUT) 5
7. $\Box (A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 6
8. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 7

Quizá sea posible entrever que debe haber algún modo de realizar las pruebas no tan a ciegas. Observemos que la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) deja mucha libertad para agregar lo que sea, por tanto se puede preguntar si hay alguna forma de saber de antemano qué agregar. Nos enfocaremos en esta cuestión en la siguiente sección. También es posible ver que las derivaciones no usan reglas estructurales porque como se verá al final de este capítulo no son válidas en general debido a la presencia del candado.

2.2. Pruebas Bidireccionales

Las pruebas bidireccionales son una herramienta en la cual se realiza un procedimiento que detallaremos hacia atrás para obtener el contexto Γ y después con él se construye la prueba hacia adelante. Ya que se ha hablado de las reglas del sistema y sus restricciones, enfrentemos la cuestión de cómo se realizarán las pruebas. Se mencionó al final de la primera sección que en los ejemplos era posible notar que la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) es muy liberal en cuanto a lo que debe ser agregado, el problema que se tiene cuando uno empieza a hacer ejemplos con este sistema es que quizá no sea claro de antemano qué es conveniente agregar, si bien es posible agregar lo que se desee, es muy probable que sea inconveniente agregar siempre lo que sea sin tener cuidado. Recordemos que la regla (MP_+) requiere que los contextos tengan el mismo contexto si se desea usarla, entonces agregar “lo que sea” puede complicar una prueba, veamos dos derivaciones del siguiente ejemplo para resaltar esta problemática.

Ejemplo 2.5 *El juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ del ejemplo 1.16 es derivable.*

1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box(A \rightarrow B), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box A, \blacksquare]$
3. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
4. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare]$
5. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ (MP_+) 2,4
6. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (SHUT) 6
7. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 7
8. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (SHUT) 8
9. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (\rightarrow I) 9

Ejemplo 2.6 *Una segunda derivación del juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$.*

1.	$\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B)$	(HYP)
2.	$\Box(A \rightarrow B), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$	(OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
		$\Gamma' = [\blacksquare, \Box A, \blacksquare, \blacksquare]$
3.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$	(HYP)
4.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$	(OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 3
		$\Gamma'' = [\blacksquare, \blacksquare]$
5.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$	(MP $_+$) 2,4
6.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$	(SHUT) 5
7.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$	(OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 6
		$\Gamma''' = [\cdot]$
8.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$	(SHUT) 7
9.	$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B$	(\rightarrow I) 7
10.	$\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$	(SHUT) 8
11.	$\vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$	(\rightarrow I) 9

En los ejemplos se ve que debido a que la regla (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) da demasiada libertad a lo que puede ser agregado cuando se usa, es posible dar muchas derivaciones para un seciente, sin embargo, es posible que el lector se pregunte si hay alguna forma previa de saber el Γ' que se tiene que agregar para realizar la prueba no tan a ciegas y de preferencia en una cantidad no tan grande de pasos. También es posible observar que la prueba se hizo de tal modo que el modus ponens aditivo fuese posible de aplicar. Esto nos lleva a presentar las pruebas bidireccionales, en ellas se muestra un proceso hasta ahora no mencionado y que no se ve cuando se realiza la derivación, y que sin embargo, es útil para realizar las pruebas.

A pesar de que hay muchas posibles pruebas para realizar una derivación de un juicio, recordemos que un primer objetivo de este trabajo es mostrar la equivalencia con el sistema de deducción natural modal, por ello nos centraremos en un modo de hacer las pruebas. Es posible observar en los ejemplos presentados que el contexto Γ que se usa juega un papel importante y es poco probable que sea claro cuál es el contexto a escoger si se quisieran realizar las pruebas, por ello es necesario introducir de manera formal el concepto de ir hacia atrás en una prueba, el cual ha sido y será usado en todas las pruebas con secientes.

Con esto en mente se presenta en esta sección el concepto de “Basta”. Esta forma de pensar está inspirada en la forma en la que uno enfrenta un problema y hace referencia a lo que basta probar a fin de realizar una prueba, de modo que usaremos esta técnica aplicando las reglas hacia atrás hasta que no sea posible aplicar ninguna de las reglas. En los teoremas 2.21 y 2.22 será probado que las reglas (\rightarrow I) y (SHUT) son invertibles, por lo que pueden ser mencionadas las siguientes dos reglas:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B} (\rightarrow \text{I} \uparrow) \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A}{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A} (\text{SHUT} \uparrow)$$

Estas dos reglas son suficientes para realizar el razonamiento hacia atrás lo que nos permitirá descubrir el Γ con el que debemos trabajar y hará menos misteriosa la forma en que se pruebe un

secuente.

El proceso de construir una prueba hacia atrás dado un secuente S consiste en la búsqueda de una regla de inferencia R cuya conclusión sea S y a continuación repetir el procedimiento ahora buscando una regla de inferencia R_1 cuya conclusión sea S_1 , donde S_1 es la premisa para obtener a S y continuar de ese modo hasta que ya no sea posible aplicar ninguna de las dos reglas hacia atrás, es decir, hasta que se tenga en el consecuente a una variable. A esta lectura hacia atrás de las reglas se le llama táctica¹. Una prueba hacia atrás es una secuencia particular de tácticas. Formalicemos toda esta idea.

Definición 2.7 Una meta \mathcal{G} es cualquier secuente de la forma $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$. $GSeq$ es el conjunto de secuencias finitas de metas que se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} ::= [\cdot] : \mathcal{S}$$

donde $[\cdot]$ denota la meta vacía. Además si S_1 y $S_2 \in GSeq$ entonces $S_1; S_2$ significa la concatenación de S_1 con S_2 .

Ahora definamos el sistema de transiciones de tácticas correspondiente a la búsqueda hacia atrás.

Definición 2.8 El sistema de tácticas de transición de \mathcal{GIS}_4 se define de la siguiente manera:

- El conjunto no vacío de estados es el conjunto de metas $GSeq$.
- Un estado inicial es de la forma $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$.
- Un estado terminal es una variable, es decir una fórmula no modal.
- La relación transición $\triangleright \subseteq GSeq \times GSeq$ está definida inductivamente por las reglas invertibles donde una transición $S_1 \triangleright S_2$ puede ser leída como "para probar el secuente S_1 es suficiente probar el secuente S_2 ".

Las tácticas usadas serán:

$$\begin{array}{ll} \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B \triangleright \Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B & \text{Intro A} \\ \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \triangleright \Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A & \text{Intro Shut} \end{array}$$

Finalmente la definición formal de prueba hacia atrás.

Definición 2.9 Una prueba hacia atrás de $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ es una secuencia finita de estados S_1, \dots, S_k tales que

¹La palabra táctica es usada principalmente en asistentes de prueba como COQ. La función principal de una táctica es ordenar al asistente de pruebas que realice una serie de pasos.

- S_1 es $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$.
- Para todo $1 \leq i < k$ se tiene que $S_i \triangleright S_{i+1}$.
- S_k es una variable.

Veamos un ejemplo con el cual ya se ha trabajado y seguirá apareciendo a lo largo de este trabajo.

Ejemplo 2.10 Consideremos el juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$

Lo primero que se quiere probar es una implicación, por ello usaremos la regla $(\rightarrow I \uparrow)$ con lo que se obtiene que basta probar que

$$\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B).$$

Ahora podemos aplicar la regla $(SHUT \uparrow)$ por lo que podemos concluir que bastaría probar:

$$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B.$$

Ahora queremos probar una implicación, por tanto aplicamos nuevamente la regla $(\rightarrow I \uparrow)$ para obtener lo siguiente:

$$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B.$$

Por último aplicamos la regla $(SHUT \uparrow)$ hacia atrás, y obtenemos que para probar el seciente basta probar que

$$\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B.$$

Llegando a este punto ya no es posible aplicar ninguna de las reglas, por lo tanto el procedimiento termina aquí. De este modo podemos rescatar el contexto Γ que en este caso es $\Gamma = [\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$, de este contexto debe ser posible derivar a B para a continuación descargar todo el contexto y obtener el resultado. Realicemos ahora la prueba hacia adelante con este contexto Γ en mente.

1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box(A \rightarrow B), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$ ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box A, \blacksquare]$
3. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
4. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare]$
5. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ (MP_+) 2,4
6. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (SHUT) 6
7. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ $(\rightarrow I)$ 7
8. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (SHUT) 8
9. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ $(\rightarrow I)$ 9

Esta prueba es la misma realizada anteriormente, sin embargo, ahora resulta menos misterioso saber cuáles son los contextos Γ' que se agregan usando la regla ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) que hasta ahora habían sido agregados sin dar explicación. En este ejemplo queda claro que el truco que estamos usando es completar el contexto asociado a los pasos de los que se infiere una hipótesis usando a continuación la regla ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$), que como se ha dicho en repetidas ocasiones, permite que sea agregado todo lo que se desee, en este caso nuestro deseo es agregar todo lo necesario para tener a Γ , pues cuando sea necesario usar el modus ponens, se requiere que los contextos sean iguales, por ello es sumamente conveniente conocer el contexto que uno requiere.

Sigue siendo necesario hacer notar que incluso usando el razonamiento hacia atrás la prueba de un juicio no es única pues al momento de usar la regla ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) la forma en que se escoge a Γ' es completamente libre. Hasta este momento se esclarece un poco qué es lo más conveniente, sin embargo el modo de escoger a Γ' puede variar sin que esto signifique que sea imposible concluir lo deseado.

Analicemos otro ejemplo haciendo uso del razonamiento hacia atrás.

Ejemplo 2.11 *El juicio del ejemplo 1.26 $\vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$ es derivable.*

1. $\vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$
2. $\triangleright \Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$ ($\rightarrow I \uparrow$) 1
3. $\triangleright \Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow C)$ ($\rightarrow I \uparrow$) 2
4. $\triangleright \Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow C$ (SHUT \uparrow) 3
5. $\triangleright \Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ ($\rightarrow I \uparrow$) 4

Por lo tanto se busca $\Gamma = [\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A]$

1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box(A \rightarrow B), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$ ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A]$
3. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(B \rightarrow C)$ (HYP)
4. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow C$ ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) 4
 $\Gamma'' = [\blacksquare, A]$
5. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (HYP)
6. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ (MP_+) 2,5
7. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ (MP_+) 4,6
8. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow C$ ($\rightarrow I$) 7
9. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow C)$ (SHUT) 8
10. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$ ($\rightarrow I$) 9
11. $\vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$ ($\rightarrow I$) 10

Ejemplo 2.12 El juicio $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F))$ del ejemplo 1.29 es derivable. Comencemos realizando el razonamiento hacia atrás a partir del juicio que queremos probar.

1. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F))$
2. $\triangleright \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F)) \quad (\rightarrow I \uparrow) 1$
3. $\triangleright \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F)) \quad (\text{SHUT} \uparrow) 2$
4. $\triangleright \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box F) \quad (\rightarrow I \uparrow) 3$
5. $\triangleright \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box D \rightarrow \Box F \quad (\text{SHUT} \uparrow) 4$
6. $\triangleright \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box F \quad (\rightarrow I \uparrow) 5$
7. $\triangleright \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} F \quad (\text{SHUT} \uparrow) 6$

Por lo tanto podemos concluir que queremos Γ de la siguiente manera:

$$\Gamma = [\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare]$$

y realizar la derivación con esto en mente.

1. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \quad (\text{HYP})$
2. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F) \quad (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}) 1$
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare, \blacksquare]$
3. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box E \quad (\text{HYP})$
4. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} E \quad (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}) 3$
 $\Gamma'' = [\blacksquare, \Box D, \blacksquare]$
5. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box E \quad (\text{SHUT}) 4$
6. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box D \quad (\text{HYP})$
7. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \Gamma''' \vdash_{\mathcal{IS}_4} D \quad (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}) 6$
 $\Gamma''' = [\blacksquare, \blacksquare]$
8. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box D \quad (\text{SHUT}) 7$
9. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box E \rightarrow \Box F) \quad (\text{MP}_+) 2,6$
10. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box E \rightarrow \Box F \quad (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}) 9$
 $\Gamma'''' = [\cdot]$
11. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box F \quad (\text{MP}_+) 10,5$
12. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} F \quad (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}) 11$
 $\Gamma'''' = [\cdot]$
13. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box F \quad (\text{SHUT}) 12$
14. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box D \rightarrow \Box F \quad (\rightarrow I) 13$
15. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box F) \quad (\text{SHUT}) 14$
16. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F) \quad (\rightarrow I) 15$
17. $\Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F)) \quad (\text{SHUT}) 16$
18. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F)) \quad (\rightarrow I) 17$

En los siguientes ejemplos ya no será mostrado todo el proceso del razonamiento hacia atrás

que se hizo de modo que podamos centrarnos en presentar la equivalencia que nos interesa. Para este trabajo se tiene mucho interés en realizar muchos ejemplos dado el interés de usar el lenguaje en un futuro de manera práctica para verificar especificaciones que involucren tipos modales.

Ejemplo 2.13 *El juicio del ejemplo 1.19*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$$

es derivable.

Con el razonamiento hacia atrás tenemos que se busca

$$\Gamma = [\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$$

1. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C))$ (HYP)
2. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$
3. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (HYP)
4. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare, \Box A, \blacksquare]$
5. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
6. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma', \Gamma''' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 5
 $\Gamma''' = [\blacksquare]$
7. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (SHUT) 6
8. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (MP $_+$) 2,7
9. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (MP $_+$) 4,7
10. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B \rightarrow \Box C$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 8
 $\Gamma'''' = [\cdot]$
11. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ (MP $_+$) 10,9
12. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma', \Gamma'''' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 9
 $\Gamma'''' = [\cdot]$
13. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ (SHUT) 12
14. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box C$ (\rightarrow I)13
15. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 14
16. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I)15
17. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ (SHUT) 16
18. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ (\rightarrow I)17

Aquí se presentan algunos otros ejemplos de juicios que es posible derivar.

Ejemplo 2.14 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$$

es derivable.

Con el razonamiento hacia atrás se puede concluir que se requiere Γ de la siguiente forma.

$$\Gamma = [\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B, \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$$

1. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C))$ (HYP)
2. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box B, \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$
3. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
4. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B, \blacksquare, \Box A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare, \blacksquare]$
5. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (SHUT) 4
6. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (MP $_+$) 2,5
7. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma', \Gamma''' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B \rightarrow \Box C$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 6
 $\Gamma''' = [\cdot]$
8. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (HYP)
9. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B, \Gamma'''' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 8
 $\Gamma'''' = [\blacksquare, \Box A, \blacksquare, \blacksquare]$
10. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (SHUT) 9
11. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ (MP $_+$) 7,10
12. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 11
 $\Gamma'''' = [\cdot]$
13. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ (SHUT) 12
14. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box C$ (\rightarrow I) 13
15. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box B \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 14
16. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I) 15
17. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box B \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ (SHUT) 16
18. $\vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ (\rightarrow I) 17

Ejemplo 2.15 El juicio

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \rightarrow \Box(\Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R))$$

es derivable.

Con el razonamiento hacia atrás concluimos que se busca

$$\Gamma = [\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P, \blacksquare]$$

1. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box Q)$ (HYP)
2. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box P \rightarrow \Box Q$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P, \blacksquare]$
3. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box Q \rightarrow \Box R)$ (HYP)
4. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box Q \rightarrow \Box R$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare, \Box P, \blacksquare]$
5. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box P$ (HYP)
6. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} P$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 5
 $\Gamma''' = [\blacksquare, \blacksquare]$
7. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box P$ (SHUT) 6
8. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box Q$ (MP_+) 2,7
9. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box R$ (MP_+) 4,8
10. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} R$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 9
 $\Gamma'''' = [\cdot]$
11. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box R$ (SHUT) 10
12. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box P \rightarrow \Box R$ (\rightarrow I) 11
13. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box R)$ (SHUT) 12
14. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R)$ (\rightarrow I) 13
15. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R))$ (SHUT) 14
15. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \rightarrow \Box(\Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R))$ (\rightarrow I) 15

Ejemplo 2.16 *El juicio visto en el ejemplo 1.27*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$$

es derivable.

1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 1
3. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box\Box A$ (HYP)
4. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma' = [\blacksquare]$
5. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 4
 $\Gamma'' = [\blacksquare]$
6. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ (MP_+) 2 5
7. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (SHUT) 6
8. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box\Box B$ (SHUT) 7
9. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$ (\rightarrow I) 8
10. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$ (\rightarrow I) 9

Ejemplo 2.17 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$$

es derivable.

Se busca $\Gamma = [\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$

1. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C))$ (HYP)
2. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$
3. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (HYP)
4. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare, \blacksquare, \Box A]$
5. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 4
 $\Gamma''' = [\blacksquare]$
6. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (HYP)
7. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 6
 $\Gamma'''' = [\blacksquare, \blacksquare]$
8. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ (SHUT) 7
9. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B$ (MP $_+$) 5,8
10. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (MP $_+$) 2,8
11. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box B \rightarrow \Box C$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 10
 $\Gamma''''' = [\cdot]$
12. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ (MP $_+$) 11,9
13. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 12
 $\Gamma'''''' = [\cdot]$
14. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ (SHUT) 13
15. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A \rightarrow \Box C$ (\rightarrow I) 14
16. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 15
17. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 16
18. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I) 17
19. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I) 18

2.3. Reglas Estructurales

Las reglas estructurales son reglas de inferencia que no hacen referencia a ningún conectivo lógico, pero opera directamente sobre el juicio o los secuentes. Las reglas estructurales más comunes son el debilitamiento (weakening), la contracción y el intercambio de premisas. Una lógica estructural es aquella que cumple todas estas reglas. Cuando una lógica no cumple alguna de estas reglas se le llama lógica subestructural y más adelante veremos que se está trabajando con una de ellas. En la primera sección se hizo hincapié en cierto tipo de detalles que eran necesarios debido a que el sistema introduce un candado, ahora se verá cómo afecta el candado a las reglas estructurales que normalmente se enuncian en un sistema de secuentes. Todos los resultados que aquí se verán, así como las pruebas de los mismos son un aporte nuevo.

Proposición 2.18 (*Debilitamiento para variables*) La siguiente regla es admisible

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}$$

Demostración. La prueba es análoga a la que se realizará para la misma propiedad en la proposición 4.7, la cual se encuentra en el último capítulo. ■

Proposición 2.19 (*Intercambio de variables*) La siguiente regla es admisible.

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}{\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}$$

Demostración. Por inducción sobre la estructura de derivación.

- **(HYP)** Si $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ es instancia de la regla de hipótesis entonces se presentan varios casos
 - $B = C$ entonces se cumple que si $\Gamma, A, C \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ entonces $\Gamma, C, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ pues A es una variable.
 - $A = C$ nuevamente se cumple que si $\Gamma, C, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ entonces $\Gamma, B, C \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
 - $\Gamma = \Gamma_1, C, \Gamma_2$ tal que $\blacksquare \notin \Gamma_2$ de modo que se tiene $\Gamma_1, C, \Gamma_2, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$, como A y B son variables entonces $\Gamma_1, C, \Gamma_2, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- **(\rightarrow I)** Como el juicio $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ es instancia de la regla de introducción a la implicación se tiene que $C = C_1 \rightarrow C_2$. Se sabe entonces que $\Gamma, A, B, C_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_2$, por hipótesis de inducción se tendría que $\Gamma, B, A, C_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_2$ y al aplicar la regla de (\rightarrow I) se tiene que $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_1 \rightarrow C_2$, esto es $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- **(MP₊)** Dado que el juicio $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ se obtuvo como instancia de la regla (MP₊) existe D tal que $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} D \rightarrow C$ y $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} D$, por la hipótesis de inducción aplicada a ambos secuentes se tiene que $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} D \rightarrow C$ y $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} D$. Al aplicar la regla (MP₊) se concluye que $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- **(SHUT)** Puesto que $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ es conclusión de la regla (SHUT) establecemos $C = \Box C_1$, se sabe entonces que

$$\Gamma, A, B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_1,$$

por hipótesis de inducción tendríamos $\Gamma, B, A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_1$ y aplicando la regla (SHUT) se concluye lo que se quería demostrar, es decir, $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.

- **(OPEN_{IS₄})** Al ser $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ conclusión de la regla (OPEN_{IS₄}) se tienen algunos casos para las premisas de la regla.

- Si se tenía que $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ entonces por hipótesis de inducción $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ es posible aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) donde $\Gamma = [\cdot]$ para concluir $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ entonces usando el debilitamiento de variables se tiene que $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ y por hipótesis de inducción $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ y aplicando nuevamente la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) donde $\Gamma' = [\cdot]$ se puede concluir $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ usando nuevamente debilitamiento de variables dos veces se tiene

$$\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C,$$

aplicando la hipótesis de inducción se tiene $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ por lo que basta aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) donde $\Gamma' = [\cdot]$ y es posible concluir $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.

■

Proposición 2.20 (*Contracción de Variables*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}$$

Demostración. Por inducción sobre la estructura de derivación.

- (**HYP**) Si $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ es instancia de la regla de hipótesis entonces se tienen dos casos:
 - $A = C$ entonces $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
 - $\Gamma = \Gamma_1, C, \Gamma_2$ donde $\blacksquare \notin \Gamma_2$ y A es una variable entonces $\Gamma_1, C, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$, aplicando el debilitamiento de variables se tiene $\Gamma_1, C, \Gamma_2, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- (\rightarrow I) Como el juicio $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ es instancia de la regla de introducción a la implicación se tiene que $C = C_1 \rightarrow C_2$. Se sabe entonces que $\Gamma, A, A, C_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_2$, por hipótesis de inducción se tendría que $\Gamma, A, C_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_2$ y al aplicar la regla de (\rightarrow I) se tiene que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_1 \rightarrow C_2$, esto es $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- (**MP₊**) Dado que el juicio $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ se obtuvo como instancia de la regla (**MP₊**) existe D tal que $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} D \rightarrow C$ y $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} D$, por la hipótesis de inducción aplicada a ambos secuentes se tiene que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} D \rightarrow C$ y $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} D$. Al aplicar la regla (**MP₊**) se concluye que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- (**SHUT**) Puesto que $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ es conclusión de la regla (**SHUT**) establecemos $C = \Box C_1$, se sabe entonces que $\Gamma, A, A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_1$, por hipótesis de inducción tendríamos $\Gamma, A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C_1$ y aplicando la regla (**SHUT**) se concluye lo que se quería demostrar, es decir, $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.
- (**OPEN_{IS4}**) Al ser $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ conclusión de la regla (**OPEN_{IS4}**) se tiene algunos posibles casos para la premisa de la regla.

- Si $\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ por hipótesis de inducción tenemos $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$, basta aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) considerando $\Gamma' = [\cdot]$.
- Si $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ basta aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) considerando $\Gamma' = [\cdot]$.
- Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$ se aplica la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) considerando $\Gamma' = [A]$.

■

Ahora bien, las reglas están siendo aplicadas a variables. Hemos enunciado las reglas estructurales como se suele hacer, sin embargo, estamos lidiando con un sistema de secuentes que cuenta con un candado, así que debemos preguntarnos si estas reglas siguen siendo válidas en el caso en que A ó B no son variables sino un candado. Antes de ver las reglas estructurales involucrando candados necesitamos algunas aplicaciones de ellas. El sistema cuenta con dos reglas invertibles:

Teorema 2.21 *La regla ($\rightarrow I$) es invertible.*

$$\text{Si } \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B, \text{ entonces } \Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B.$$

Demostración. Se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$, entonces, aplicando debilitamiento para variables se tiene que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow B$ y $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$, por modus ponens se puede concluir que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$ ■

Teorema 2.22 *La regla (SHUT) es invertible.*

$$\text{Si } \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A, \text{ entonces } \Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A.$$

Demostración. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$, podemos aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) con $\Gamma' = [\blacksquare]$ y obtener $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$. ■

Es posible generalizar todas las reglas anteriores y nuevamente se debe recalcar que sólo se está trabajando con variables.

Proposición 2.23 (*Debilitamiento generalizado para variables*) *La siguiente regla es admisible*

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}$$

Demostración. La prueba es análoga a la que se realizará en la proposición 4.8, la cual se encuentra en el último capítulo. ■

Proposición 2.24 (*Intercambio generalizado de variables*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}$$

Demostración. Por inducción sobre Γ' .

- El caso base cuando $\Gamma' = [\cdot]$ ya se realizó en la proposición 2.19.

- Supongamos que $\Gamma' = \Gamma_1 : A$ por lo que tenemos que $\Gamma, A, B, \Gamma_1, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$, aplicando la regla (\rightarrow I) se tiene que $\Gamma, A, B, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow C$, por hipótesis de inducción se cumple que $\Gamma, B, A, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} A \rightarrow C$, como la regla (\rightarrow I) es invertible se puede concluir que

$$\Gamma, B, A, \Gamma_1, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} C,$$

es decir $\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.

- Supongamos ahora que $\Gamma' = \Gamma_1 : \blacksquare$, aplicando la regla (SHUT) se tiene que $\Gamma, A, B, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$, nuevamente por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, B, A, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$, como la regla (SHUT) es invertible se puede concluir $\Gamma, B, A, \Gamma_1, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$.

■

Proposición 2.25 (*Contracción de variables generalizada*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} C}$$

Demostración. Por inducción sobre Γ' .

- El caso base cuando $\Gamma' = [\cdot]$ ya se realizó en la proposición 2.20.
- Supongamos que $\Gamma' = \Gamma_1 : B$ entonces se sabe que $\Gamma, A, A, \Gamma_1 : B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$, aplicando la regla (\rightarrow I) se tiene $\Gamma, A, A, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow C$, por hipótesis de inducción se tiene $\Gamma, A, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow C$, ya que la regla (\rightarrow I) es invertible entonces podemos concluir $\Gamma, A, \Gamma_1, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ que es lo que se quería concluir.
- Supongamos que $\Gamma' = \Gamma_1 : \blacksquare$, en este caso se sabe que $\Gamma, A, A, \Gamma_1 : \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$, se aplica la regla (SHUT) para quitar el candado y se obtiene $\Gamma, A, A, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$, por hipótesis de inducción tenemos $\Gamma, A, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box C$, nuevamente como la regla (SHUT) es invertible se puede concluir que $\Gamma, A, \Gamma_1, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} C$ que es lo que se quería.

■

Finalmente veamos cuáles son las reglas estructurales admisibles en las cuales se involucra al famoso candado. Estas reglas son admisibles gracias a la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$).

Proposición 2.26 (*Debilitamiento para Fórmulas Modales*). *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A}{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A}$$

Demostración. Se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$, por tanto se puede aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) haciendo $\Gamma' = [\blacksquare, \blacksquare]$ para obtener $\Gamma, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$, basta aplicar (SHUT) para concluir $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ que es lo que se quería probar. ■

Observación 2.27 *Es importante hacer notar que de hecho cuando el consecuente es una fórmula modal, es posible agregar la cantidad de candados que se desee. Nos enfocamos en esta situación pues el debilitamiento de variables es válido sin depender de cómo sea la fórmula, pero ya se aclaró que en principio no es posible agragar candados al gusto. Una combinación de la regla ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) y ($SHUT$) nos permite agregar todos los candados que se deseen, de modo que es posible presentar la regla de modo general.*

Proposición 2.28 (*Debilitamiento Generalizado para Fórmulas Modales*). *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A}$$

Demostración. Esta prueba se realizará por inducción sobre Γ' .

- El caso base es considerar a $\Gamma' = [\cdot]$ y el resultado se cumple.
- Supongamos que se tiene $\Gamma' = \Gamma_1, B$, por hipótesis de inducción sabemos que $\Gamma, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$, como el consecuente tiene un box podemos aplicar la regla ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) y agregar $[B, \blacksquare]$ de modo que se tiene $\Gamma, \Gamma_1, B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$ y ahora basta aplicar la regla ($SHUT$) para concluir $\Gamma, \Gamma_1, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ que es lo que se quería concluir.
- Ahora supongamos que $\Gamma' = \Gamma_1, \blacksquare$, entonces nuevamente sabemos que $\Gamma, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$ por lo que se puede aplicar la regla ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) agregando $[\blacksquare, \blacksquare]$ cuando sea aplicada, por tanto se tendría $\Gamma, \Gamma_1, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} A$, ahora se aplica la regla ($SHUT$) para concluir $\Gamma, \Gamma_1, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box A$.

■

Al inicio de la sección se mencionó que una lógica es subestructural cuando no cumple con alguna de las leyes estructurales, esta lógica, \mathcal{IS}_4 , sin embargo bien podría llamarse una lógica subestructural debido a que no cumple ninguna de las leyes, todo esto debido a la presencia del candado.

Proposición 2.29 *El sistema \mathcal{IS}_4 es una lógica subestructural.*

Demostración. Basta dar un contraejemplo de cada una de las reglas y de hecho el mismo contraejemplo sirve para todas las reglas.

- La regla de debilitamiento generalizada no es válida. Es decir la regla

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}$$

no es admisible.

Sabemos que se cumple siempre que $B \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, si la regla fuera válida, podríamos agregar cualquier cosa, en particular podríamos agregar un candado, de modo que se cumpliría que $B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, se aplica la regla ($SHUT$) y a continuación la regla de introducción a la implicación para obtener $\vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow \Box B$ el cual ya se ha dicho que no es válido.

- El intercambio de contextos generalizado no es válido. Es decir, la regla

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}{\Gamma', \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} A}$$

no es admisible.

Supongamos que $\blacksquare, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, aplicando la ley del intercambio tendríamos que $B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, al igual que en el caso de la regla del debilitamiento aplicando la regla (SHUT) y descargando la premisa B tendríamos $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow \Box B$ que no es válido.

- La regla de contracción generalizada no es válida. Es decir, la regla

$$\frac{\Gamma, A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} B}$$

no es admisible.

Si la regla fuera válida, se podría tener que $B, \blacksquare, B \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, aplicando la regla de contracción de variables se obtiene $B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} B$, como ya se ha mencionado en este trabajo en varias ocasiones, aplicando la regla (SHUT) y a continuación la regla de (\rightarrow I) se tiene que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} B \rightarrow \Box B$ el cual se sabe que no es válido.

■

Capítulo 3

El sistema de secuentes \mathcal{KT}_4

Como ya se dijo y se pudo observar en los ejemplos de la primera sección la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) del sistema \mathcal{IS}_4 es muy generosa, una vez que se tiene el razonamiento hacia atrás es más fácil realizar la prueba, pero si queremos lograr una equivalencia con el sistema de deducción natural modal la regla resulta demasiado misteriosa, así pues, como ya fue mencionado al final de la sección anterior a continuación se presentará el sistema de secuentes \mathcal{KT}_4 , el cual es un aporte nuevo, luego será necesario probar que es equivalente al sistema de secuentes \mathcal{IS}_4 . De este modo una vez entendidas las reglas de este nuevo sistemas podremos presentar la equivalencia entre \mathcal{KT}_4 y el sistema de deducción natural modal. Comencemos con las reglas de este nuevo sistema.

- **Regla de hipótesis**, la cual es idéntica a la regla presentada para \mathcal{IS}_4

$$\frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A} \blacksquare \notin \Gamma' \text{ (HYP)}$$

- **Regla de introducción a la implicación**, también idéntica a la presentada en el capítulo anterior.

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B} (\rightarrow \text{I})$$

- **Modus ponens**, el cual también debemos considerar aditivo.

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} B} (\text{MP}_+)$$

- **Regla Shut**

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A} \text{ (SHUT)}$$

- **Regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$)**, esta es la primera regla que es distinta. Ahora si en el secuente se tiene una fórmula modal entonces es posible quitarlo pero será necesario agregar de modo

obligatorio un candado y tanto a la derecha como a la izquierda será posible agregar tanto fórmulas como candados. Por supuesto Γ' y Γ'' también pueden ser vacíos.

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}$$

- **Regla (4-IMPORTACIÓN)** dice que si se tiene una fórmula modal en el antecedente entonces será posible conservar la fórmula modal en el consecuente y nuevamente es obligatorio agregar al menos un candado. También es posible agregar si se desea fórmulas y candados antes y después del candado agregado.

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}$$

Notación 3.1 Por comodidad se le denotará como $(4-I)$.

- **Regla (T-EXPORTACIÓN)** si el último elemento de un contexto es un candado, entonces es posible eliminarlo y no hace falta agregar nada.

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}$$

Notación 3.2 Por comodidad se le denotará como $(T-E)$.

Finalmente el sistema de secuentes \mathcal{KT}_4 está conformado por las reglas:

$$\frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A} \blacksquare \notin \Gamma' \text{ (HYP)} \quad \frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B} (\rightarrow I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} B} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} B} \text{ (MP}_+\text{)}$$

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A} \text{ (SHUT)} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A} \text{ (OPEN}_{\mathcal{KT}_4}\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A} \text{ (4-IMPORTACIÓN)} \quad \frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A} \text{ (T-EXPORTACIÓN)}$$

Es posible realizar algunos ejemplos para ver a estas nuevas reglas en acción. El razonamiento hacia atrás que fue usado para realizar las pruebas en \mathcal{IS}_4 se seguirá usando en este sistema de secuentes, esto es válido y no hace falta decir mucho más pues las únicas reglas usadas para ello son $(\rightarrow I)$ y $(SHUT)$, las cuales se conservan y son las únicas reglas invertibles. En la mayoría de

los ejemplos se puede ver que las pruebas se complican un poco más pues algunas reglas obligan a añadir candados, sin embargo es justo ese detalle lo que hará que la equivalencia con el sistema de deducción natural modal sea más directa. Comencemos con los axiomas.

Ejemplo 3.3 (*Axioma T*) $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow A$

1. $\Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (HYP)
2. $\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
3. $\Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ (T-E) 2
4. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow A$ (\rightarrow I) 3

Ejemplo 3.4 (*Axioma 4*) $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box \Box A$

1. $\Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (HYP)
2. $\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (4-I) 1
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
3. $\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
4. $\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (SHUT) 3
5. $\Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box \Box A$ (SHUT) 4
6. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (\rightarrow I) 5

Ejemplo 3.5 (*Axioma K*) $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$

1. $\Box (A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box (A \rightarrow B), \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (HYP)
3. $\Box (A \rightarrow B), \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
4. $\Box (A \rightarrow B), \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (A \rightarrow B)$ (4-I) 1
 $\Gamma' = [\Box A], \Gamma'' = [\cdot]$
5. $\Box (A \rightarrow B), \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (A \rightarrow B)$ (T-E) 4
6. $\Box (A \rightarrow B), \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 5
 $\Gamma' = [\cdot]$
7. $\Box (A \rightarrow B), \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$ (MP_+) 6,3
8. $\Box (A \rightarrow B), \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (SHUT) 7
9. $\Box (A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 8
10. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 9

Ahora podemos ver el resto de los ejemplos.

Ejemplo 3.6 *El juicio* $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow \Box B)$ *del ejemplo 1.16 es derivable.*

-
1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
 2. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (HYP)
 3. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
 4. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box A], \Gamma'' = [\cdot]$
 5. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$ (MP $_+$) 4,3
 6. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (SHUT) 5
 7. $\Box(A \rightarrow B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 6
 8. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (SHUT) 7
 9. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (\rightarrow I) 8

Ejemplo 3.7 El juicio $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$ del ejemplo 1.26 es derivable.

1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(B \rightarrow C)$ (HYP)
3. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), A \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ (HYP)
4. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box(B \rightarrow C)], \Gamma'' = [A]$
5. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B \rightarrow C$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
6. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$ (MP $_+$) 4,3
7. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ (MP $_+$) 5,6
8. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow C$ (\rightarrow I) 7
9. $\Box(A \rightarrow B), \Box(B \rightarrow C) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow C)$ (SHUT) 8
10. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$ (\rightarrow I) 9
11. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$ (\rightarrow I) 10

Ejemplo 3.8 El juicio

$$\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box(\Box D \rightarrow \Box F))$$

del ejemplo 1.29

-
1. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F))$ (HYP)
 2. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box E$ (HYP)
 3. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box D$ (HYP)
 4. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box E], \Gamma'' = [\Box D]$
 5. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box E \rightarrow \Box F)$ (MP $_+$) 4,3
 6. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box E \rightarrow \Box F$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 5
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
 7. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box E$ (4-I) 2
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box E], \Gamma'' = [\Box D, \blacksquare]$
 8. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box F$ (MP $_+$) 6,7
 9. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} F$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 8
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
 10. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} F$ (T-E) 9
 11. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare, \Box D \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box F$ (SHUT) 10
 12. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box D \rightarrow \Box F$ (\rightarrow I) 11
 13. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare, \Box E \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box D \rightarrow \Box F)$ (SHUT) 12
 14. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box E \rightarrow \Box(\Box D \rightarrow \Box F)$ (\rightarrow I) 13
 15. $\Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box E \rightarrow \Box(\Box D \rightarrow \Box F))$ (SHUT) 14
 16. $\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box D \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box(\Box E \rightarrow \Box(\Box D \rightarrow \Box F))$ (\rightarrow I) 15

Ejemplo 3.9 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$$

del ejemplo 1.19 es derivable.

Buscamos $\Gamma = [\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare]$

-
1. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C))$ (HYP)
 2. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (HYP)
 3. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (HYP)
 4. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A]$
 5. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\Box A]$
 6. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (MP $_+$) 4,3
 7. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (MP $_+$) 5,3
 8. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B \rightarrow \Box C$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 6
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
 9. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (4-I) 7
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
 10. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C$ (MP $_+$) 8,9
 11. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 10
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
 12. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ (T-E) 11
 13. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C$ (SHUT) 12
 14. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box C$ (\rightarrow I) 13
 15. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare, \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 14
 16. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I) 15
 17. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ (SHUT) 16
 18. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box C))$ (\rightarrow I) 17

Ejemplo 3.10 *El juicio*

$$\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \rightarrow \Box(\Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R))$$

del ejemplo 2.15 es derivable.

1. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box Q)$ (HYP)
2. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box Q \rightarrow \Box R)$ (HYP)
3. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box P$ (HYP)
4. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box P \rightarrow \Box Q$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R)], \Gamma'' = [\Box P]$
5. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box Q \rightarrow \Box R$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\Box P]$
6. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box Q$ (MP $_+$) 4,3
7. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box R$ (MP $_+$) 5,6
8. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} R$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 7
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
9. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare, \Box P \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box R$ (SHUT) 8
10. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box P \rightarrow \Box R$ (\rightarrow I) 9
11. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare, \Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box R)$ (SHUT) 10
12. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R)$ (\rightarrow I) 11
13. $\Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \vdash_{\mathcal{KT}_4} (\Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R))$ (SHUT) 12
14. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box P \rightarrow \Box Q) \rightarrow (\Box(\Box Q \rightarrow \Box R) \rightarrow \Box(\Box P \rightarrow \Box R))$ (\rightarrow I) 13

Ejemplo 3.11 *El juicio*

$$\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$$

del ejemplo 1.27 es derivable.

1. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box\Box A$ (HYP)
3. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
4. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box\Box A], \Gamma'' = [\blacksquare]$
5. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 3
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
6. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$ (MP $_+$) 4,5
7. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (SHUT) 6
8. $\Box(A \rightarrow B), \Box\Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box\Box B$ (SHUT) 7
9. $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$ (\rightarrow I) 8
10. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box\Box A \rightarrow \Box\Box B$ (\rightarrow I) 9

Ejemplo 3.12 *El juicio*

$$\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$$

del ejemplo 2.17 es derivable.

1. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C))$ (HYP)
2. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (HYP)
3. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
4. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ (HYP)
5. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare], \Gamma'' = [\Box A]$
6. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$ (MP $_+$) 5,4
7. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 3
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\Box A]$
8. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (MP $_+$) 7,4
9. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B \rightarrow \Box C$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 6
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
10. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box B$ (4-I) 8
11. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C$ (MP $_+$) 9,10
12. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 11
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
13. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ (T-E) 12
14. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare, \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C$ (SHUT) 13
15. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box C$ (\rightarrow I) 14
16. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B), \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 15
17. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (SHUT) 16
18. $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I) 17
19. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box\Box(\Box A \rightarrow \Box C)$ (\rightarrow I) 18

3.1. Reglas Estructurales

Veamos que las reglas estructurales que fueron probadas para el sistema \mathcal{IS}_4 siguen siendo válidas en este sistema. Ya que las reglas del sistema \mathcal{KT}_4 son admisibles en \mathcal{IS}_4 y de hecho algunas reglas son las mismas, las pruebas son similares, pero es necesario agregar los casos (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$), (4-IMPORTACIÓN) y (T-EXPORTACIÓN).

Proposición 3.13 (*Debilitamiento para variables*) *La siguiente regla es admisible*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}$$

Demostración. La prueba es análoga a la que se realizará para la misma propiedad en el último capítulo. ■

Proposición 3.14 (*Intercambio de variables*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{KT}_4} C}{\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} C}$$

Demostración. Por inducción sobre la estructura de derivación.

- **(HYP)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(\rightarrow I)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(MP₊)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(SHUT)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(OPEN _{\mathcal{KT}_4})** Al ser $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ conclusión de la regla (OPEN _{\mathcal{KT}_4}) y A y B son variables se tiene que necesariamente $\Gamma = \Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2$. Al tener que $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C$ entonces se aplica la regla (OPEN _{\mathcal{KT}_4}) con $\Gamma' = [\cdot]$ y $\Gamma'' = [\Gamma_2, B, A]$ por lo que se puede concluir $\Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2, B, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$.
- **(4-IMPORTACIÓN)** Si $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ es conclusión de la regla (4-I) entonces podemos establecer $C = \Box C_1$, nuevamente como A y B son variables se tiene que $\Gamma = \Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2$, de modo que si se tenía que $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C_1$ basta aplicar la regla (4-I) considerando $\Gamma' = [\cdot]$ y $\Gamma'' = [\Gamma_2, B, A]$ y concluir $\Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2, B, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box C_1$.
- **(T-EXPORTACIÓN)** Si $\Gamma, A, B \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ entonces se sabe que $\Gamma, A, B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$, aplicando la hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, B, A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$ y ahora es posible aplicar la regla para concluir $\Gamma, B, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} C$.

■

Proposición 3.15 (*Contracción de Variables*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} C}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} C}$$

Demostración. Por inducción sobre la estructura de derivación.

- **(HYP)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(\rightarrow I)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(MP₊)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .
- **(SHUT)** La prueba de este caso es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 .

- **(OPEN_{κ \mathcal{T}_4})** Al ser $\Gamma, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$ conclusión de la regla (OPEN_{κ \mathcal{T}_4}) y A es una variable se tiene que necesariamente $\Gamma = \Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2$. Si se tenía que $\Gamma_1 \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} \Box C$ entonces se aplica la regla (OPEN_{κ \mathcal{T}_4}) con $\Gamma' = [\cdot]$ y $\Gamma'' = [\Gamma_2, A]$ por lo que se puede concluir $\Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$.
- **(4-IMPORTACIÓN)** Si $\Gamma, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$ es conclusión de la regla (4-I) entonces podemos establecer $C = \Box C_1$, nuevamente como A es variable se tiene que $\Gamma = \Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2$, de modo que si se tenía que $\Gamma_1 \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} \Box C_1$ basta aplicar la regla (4-I) considerando $\Gamma' = [\cdot]$ y $\Gamma'' = [\Gamma_2, A]$ y concluir $\Gamma_1, \blacksquare, \Gamma_2, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} \Box C_1$.
- **(T-EXPORTACIÓN)** Si $\Gamma, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$ entonces se sabe que $\Gamma, A, A, \blacksquare \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$, aplicando la hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, A, \blacksquare \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$ y ahora es posible aplicar la regla para concluir $\Gamma, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C$.

■

Las reglas invertibles se conservan.

Teorema 3.16 *La regla ($\rightarrow I$) es invertible.*

$$\text{Si } \Gamma \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} A \rightarrow B, \text{ entonces } \Gamma, A \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} B.$$

Demostración. La prueba es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 . ■

Teorema 3.17 *La regla (SHUT) es invertible.*

$$\text{Si } \Gamma \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} \Box A, \text{ entonces } \Gamma, \blacksquare \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} A.$$

Demostración. Como $\Gamma \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} \Box A$, podemos aplicar la regla (OPEN_{κ \mathcal{T}_4}) con $\Gamma' = [\cdot]$ y $\Gamma'' = [\cdot]$ para obtener $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} A$. ■

Veamos que es posible generalizar las reglas bajo ciertas condiciones.

Proposición 3.18 *(Debilitamiento generalizado para variables) La siguiente regla es admisible*

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} B}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} B}$$

Demostración. La prueba es análoga a la que se realizará para la misma propiedad en el último capítulo. ■

Proposición 3.19 *(Intercambio generalizado de variables) La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash_{\kappa\mathcal{T}_4} C}$$

Demostración. La prueba es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 . ■

Proposición 3.20 (*Contracción de variables generalizada*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} C}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} C}$$

Demostración. La prueba es idéntica a la realizada en el sistema \mathcal{IS}_4 . ■

Respecto a las versiones de las reglas donde se involucra al candado que es posible probar no hay ningún cambio. Las demostraciones deben ser redactadas nuevamente, pero ya que todas las reglas se pueden inferir de la regla (OPEN \mathcal{IS}_4) no debería ser sorpresa que sean admisibles en este sistema.

Proposición 3.21 (*Debilitamiento para Fórmulas Modales*). *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}$$

Demostración. Se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$, por tanto se puede aplicar la regla (4-I) haciendo $\Gamma' = [\cdot]$ para obtener $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$. ■

Proposición 3.22 (*Debilitamiento Generalizado para Fórmulas Modales*) *La siguiente regla es admisible.*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}$$

Demostración. Esta prueba se realizará por inducción sobre Γ' .

- El caso base es considerar a $\Gamma' = \cdot$ y el resultado se cumple.
- Supongamos que se tiene $\Gamma' = \Gamma_1, B$, por hipótesis de inducción sabemos que $\Gamma, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$, podemos aplicar (4-I) considerando $\Gamma' = [B]$ y $\Gamma'' = [\cdot]$ de modo que se tiene

$$\Gamma, \Gamma_1, B, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A,$$

como el consecuente es una fórmula modal podemos aplicar la regla (T-E) para concluir $\Gamma, \Gamma_1, B \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$.

- Ahora supongamos que $\Gamma' = \Gamma_1, \blacksquare$, entonces nuevamente sabemos que $\Gamma, \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ y basta con aplicar la regla (4-I) considerando $\Gamma' = [\cdot]$ y $\Gamma'' = [\cdot]$ por lo que podría concluir $\Gamma, \Gamma_1, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$.

■

Aunque este sistema se acomoda mucho más a lo que necesitamos ya que las reglas son más finas, sigue contando con el candado, por lo tanto esta nueva lógica también es subestructural.

Proposición 3.23 *El sistema \mathcal{KT}_4 es una lógica subestructural.*

Demostración. Todos los contraejemplos son los mismos que ya se realizaron para el sistema \mathcal{IS}_4 .

- La regla de debilitamiento generalizada no es válida. Es decir la regla

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}$$

no es admisible.

- El intercambio de contextos no es válido. Es decir, la regla

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma', \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}$$

no es admisible.

- La regla de contracción no es válida. Es decir, la regla

$$\frac{\Gamma, A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} B}$$

no es admisible.

El mismo ejemplo con el que se justificó la propiedad en \mathcal{IS}_4 sirve como contraejemplo.

■

3.2. Equivalencia de \mathcal{IS}_4 y \mathcal{KT}_4

El objetivo de introducir el sistema \mathcal{KT}_4 es tener un sistema con reglas más finas que ayuden a probar la equivalencia deseada, para que esto tenga sentido hay que comenzar por probar que \mathcal{IS}_4 y \mathcal{KT}_4 son sistemas equivalentes, es decir que las reglas presentadas para \mathcal{KT}_4 son admisibles en \mathcal{IS}_4 y que las reglas de \mathcal{IS}_4 se pueden inferir de las reglas de \mathcal{KT}_4 .

3.2.1. Reglas Admisibles

Comencemos por probar que las reglas del sistema \mathcal{KT}_4 son admisibles, como se verá todas son posibles gracias a la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$).

Proposición 3.24 *La regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) se puede inferir en el sistema \mathcal{IS}_4 .*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}$$

Demostración. Es una aplicación directa de la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) considerando a $\Gamma', \blacksquare, \Gamma''$ como el contexto que se agrega al momento de aplicar la regla. ■

A continuación una regla que permite concluir lo mismo pero donde es necesario agregar al menos un candado.

Proposición 3.25 *La regla (4-IMPORTACIÓN) se puede inferir en el sistema \mathcal{IS}_4 .*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A}$$

Demostración. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$, aplicamos la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) agregando el contexto $\Gamma', \blacksquare, \Gamma'', \blacksquare$, de modo que se tendría que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'', \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$, después se concluye lo deseado aplicando la regla (SHUT). ■

Por último, una regla que permite eliminar el último candado que aparece en el contexto sin afectar la conclusión.

Proposición 3.26 *La regla (T-EXPORTACIÓN) se puede inferir en el sistema \mathcal{IS}_4 .*

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A}$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$, aplicando la regla (SHUT) tendríamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$ y por último aplicamos la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) considerando $\Gamma' = [\cdot]$. ■

Teorema 3.27 *Los sistemas \mathcal{IS}_4 y \mathcal{KT}_4 son equivalentes.*

Demostración. Basta demostrar que la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) es equivalente a las reglas ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$), (4-I) y (T-E), pues el resto de las reglas se conservan sin modificación. Con las proposiciones 3.24, 3.25 y 3.26 ya se probó que la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) implica a las reglas de \mathcal{KT}_4 . Lo único que hace falta es demostrar que de las reglas es posible concluir a la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) a partir de las reglas propuestas.

Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$, por la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) se tiene que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ con $\Gamma'' = [\cdot]$, ahora aplicamos la regla (T-E) y podemos concluir que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ que es lo que se quería concluir. Por lo tanto ambos sistemas son equivalentes. ■

Se ha presentado un sistema cuyas reglas rescatan con mayor exactitud la idea de una prueba subordinada y se ha probado que es equivalente al sistema \mathcal{IS}_4 que es el sistema con el que se comenzó, ahora probaremos la equivalencia prometida del sistema de secuentes \mathcal{KT}_4 y el sistema de deducción natural modal que se presentó en el capítulo I.

3.3. El sistema \mathcal{KT}_4 y el sistema \mathcal{DN} son equivalentes.

Cerremos este capítulo probando la tan mencionada equivalencia. En este capítulo probaremos lo siguiente:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{DN}} A \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A,$$

donde la notación $\Gamma \vdash_{\mathcal{DN}} A$ se usa para denotar que se tiene una prueba en la deducción natural para A . Para realizar esta equivalencia debemos observar que el sistema \mathcal{KT}_4 se maneja un cálculo de secuentes, mientras que en el sistema de pruebas subordinadas no existe ésta herramienta, por lo que se quieren probar dos cosas, por ello la prueba se subdivide en dos partes, primero dada una derivación es posible recrear una prueba en el cálculo de secuentes y dada una pseudopueba en el sistema de pruebas subordinado es posible tener una prueba en \mathcal{KT}_4 .

3.3.1. $\mathcal{DN} \implies \mathcal{KT}_4$

Se comenzará por suponer que se cuenta con una derivación en el sistema de pruebas subordinado y a partir de ahí concluir un secuente. Esta prueba se realiza por casos y cada caso se realiza por inducción fuerte. En cada paso de la prueba se recolectarán las hipótesis, supuestos e intervalos modales que hayan sido usados en la prueba, todos éstos formarán el contexto Γ de la prueba con secuentes. En caso de existir un intervalo modal en la derivación, éste se verá como un candado en el contexto que se irá formando. Esto se formaliza en el siguiente enunciado:

Proposición 3.28 *Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{DN}} A$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$.*

▪ **Regla (\rightarrow I)**

Supongamos que tenemos una derivación donde el paso $k + 1$ fue obtenido mediante la regla de introducción de la implicación, acorde a la definición vista en 1.20 si la conclusión es de la forma $A \rightarrow B$ entonces existe un intervalo $[l, k]$ tal que $F_l = A$, $F_k = B$ y entonces $F_{k+1} = A \rightarrow B$. Supongamos que $[l, k]$ está contenido en m intervalos modales con n intervalos ordinarios, esto significa que $gr(F_l) = (m, n) = (F_k)$ y $gr(F_{k+1}) = (m, n - 1)$ lo cual queda capturado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \left| \begin{array}{c} \text{l. } A \\ \vdots \\ \text{k. } B \end{array} \right. \\ \text{k+1. } A \rightarrow B \end{array}$$

Ya que el contexto está conformado por todas las hipótesis, supuestos y banderines que se hayan encontrado hasta el l -ésimo paso se tiene que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$, pues al ser $[k, l]$ un intervalo ordinario se tiene que F_k es el supuesto de este intervalo. Por otra parte el k -ésimo paso se refleja de la siguiente manera en el sistema \mathcal{KT}_4 , $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$. Gracias a la definición 1.20 podemos asegurar que no existe un $\Gamma' \neq \cdot$ tal que $\Gamma, A, \Gamma' \vdash B$ pues en Γ' solamente podría haber hipótesis, supuestos o banderines.

Es posible colocar a priori todas las hipótesis al inicio de la prueba, éstas no inician una prueba subordinada.

Si existiera otro supuesto A' entonces existiría $[k', l']$ que cae en $[k, l]$ cuya conclusión es B' de modo que $A' \rightarrow B'$ cae en $[k, l]$, y $gr(A' \rightarrow B') = (m, n)$, es decir, esa prueba subordinada estaría concluida.

Si existiera un candado, éste indicaría que se abrió una prueba estrictamente subordinada. En este caso se tendría un intervalo modal $[k', l']$ que tiene por primer fórmula A' y $gr(A') = (m + 1, n)$, como sabemos que $A \rightarrow B$ tiene grado $(m.n - 1)$ debe ocurrir que la prueba estrictamente subordinada fue concluida y la conclusión es una fórmula C cuyo grado es (m, n) .

Por lo tanto se tiene que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$, aplicando la regla (\rightarrow I) se puede concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \text{j. } \Gamma, A \vdash B \\ \vdots \\ \text{k. } \Gamma \vdash A \rightarrow B \end{array}$$

■ Regla (MP)

Ya que es posible aplicar la regla de diversas maneras, se tienen varios casos.

- Supongamos que F_{k+1} fue obtenido por medio de la regla del Modus Ponens y que las premisas se encontraban en el mismo intervalo ordinario, esto significa que existen $F_l = A \rightarrow B$ y $F_m = A$ donde por definición F_l y F_m se encuentran en el mismo intervalo modal

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \text{l. } A \rightarrow B \\ \vdots \\ \text{m. } A \\ \vdots \\ \text{k+1. } B \end{array}$$

Como se encuentran en el mismo intervalo ordinario y modal se tiene que el contexto del que podemos inferir $A \rightarrow B$ y A es el mismo en el sistema de secuentes, es decir, $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$, por lo que es posible aplicar el modus ponens en el sistema de secuentes y concluir $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$.

- Supongamos que F_{k+1} fue obtenido por medio de la regla del Modus Ponens y que las premisas se encontraban en el mismo intervalo ordinario, esto significa que existen $F_l = A$ y $F_m = A \rightarrow B$ donde por definición F_l y F_m se encuentran en el mismo intervalo

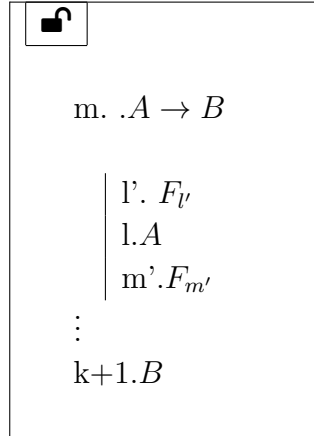
modal

\vdots
 l. A
 \vdots
 m. $A \rightarrow B$
 \vdots
 k+1. B

Como se encuentran en el mismo intervalo ordinario y modal se tiene que el contexto del que podemos inferir $A \rightarrow B$ y A es el mismo en el sistema de secuentes, es decir, $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$, por lo que es posible aplicar el modus ponens en el sistema de secuentes y concluir $\Gamma \vdash B$.

- Ahora supongamos que F_{k+1} fue obtenido por medio de la regla del Modus Ponens aplicada a las fórmulas $F_l = A \rightarrow B$ y $F_m = A$, por definición deben estar en el mismo intervalo modal, pero no necesariamente debe ocurrir que se encuentren en el mismo intervalo ordinario, por tanto asumamos que F_l y F_m se encuentran en distinto intervalo ordinario.

Supongamos que F_l y $F_m \in M \in \mathbf{M}$, $F_l \in [l', m']$ con $[l', m']$ un intervalo ordinario



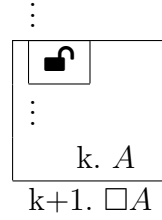
En el sistema de pruebas subordinadas es posible realizar el modus ponens de las fórmulas F_l y F_m para concluir F_{k+1} , pero veamos cuáles serían los contextos en el sistema \mathcal{KT}_4 .

Por una parte, por hipótesis de inducción tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$. Como F_l se encuentra en un intervalo ordinario entonces $F_{l'}$ es una hipótesis, por tanto en el sistema de secuentes se tendría que $\Gamma, F_{l'} \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$, como el Modus Ponens en \mathcal{KT}_4 requiere que los contextos sean iguales no sería posible usar inmediatamente la regla, sin embargo, recordemos que ya se probó la regla de debilitamiento para variables en \mathcal{KT}_4 , basta usar dicha regla al secuyente $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ para concluir $\Gamma, F_{l'} \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B$ de modo que ya sería posible aplicar el Modus Ponens y concluir $\Gamma, F_{l'} \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$.

- El caso en que F_l y $F_m \in M \in \mathbf{M}$, $F_m \in [l', m']$ con $[l', m']$ un intervalo ordinario es análogo.

■ **Regla (SHUT)**

Supongamos que tenemos una derivación tal que la conclusión se obtuvo por medio de la regla (K-E), es decir $F_{k+1} = \Box A$ y $F_k = A$. Esto queda representado por el siguiente esquema.

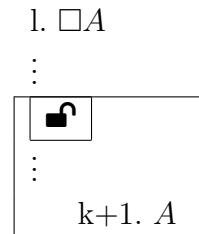


Por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, \text{ⓧ} \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$. Observemos que por las mismas razones que fueron explicadas en (\rightarrow I) podemos afirmar que no existe un $\Gamma' \neq \emptyset$ tal que $\Gamma, \text{ⓧ}, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$. Por lo tanto podemos aplicar la regla (SHUT) del sistema de secuentes y concluir $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$.

$$\begin{array}{c} \text{j. } \Gamma, \text{ⓧ} \vdash A \\ \vdots \\ \text{l. } \Gamma \vdash \Box A \\ \vdots \end{array}$$

■ **Regla (OPEN \mathcal{KT}_4)**

Supongamos que en F_{k+1} se obtuvo por medio de la regla (K-I), entonces $F_{k+1} = A$ donde $F_{k+1} \in [m, n]$ tal que $[m, n] \in \mathbf{M}$ y existe $F_l \notin [m, n]$ con $F_l = \Box A$. Esto se refleja en el siguiente esquema



Ahora en Γ se recolectan las hipótesis, supuestos y candados necesarios para concluir a $\Box A$, por tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$, aplicando la regla (K-I) en el sistema de secuentes se tiene que

$\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ que es lo que se quería demostrar.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \text{j. } \Gamma \vdash \Box A \\
 \vdots \\
 \text{m. } \Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash A \\
 \vdots
 \end{array}$$

■ **Regla (4-IMPORTACIÓN)**

Ahora supongamos que F_{k+1} fue obtenido por la regla (4-I), es decir, $F_{k+1} = \Box A$ donde $F_{k+1} \in [m, n]$ con $[m, n] \in \mathbf{M}$ y por lo tanto existe $F_l = \Box A$ tal que $F_l \notin [m, n]$, de modo que tenemos gráficamente lo siguiente

$$\begin{array}{c}
 \text{l. } \Box A \\
 \vdots \\
 \boxed{\begin{array}{c} \blacksquare \\ \vdots \\ \text{k+1. } \Box A \end{array}}
 \end{array}$$

Para realizar la recolección de hipótesis, supuestos y banderines se tiene por hipótesis de inducción se cumple que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$, aplicando la regla (4-I) podemos concluir $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A$.

■ **Regla (T-EXPORTACIÓN)**

Finalmente supongamos que $F_{k+1} = A$ fue obtenido por medio de la regla (T-E), entonces se tiene que existe $F_k = A$ tal que $F_k \in [m, n]$ con $[m, n] \in \mathbf{M}$ y podemos afirmar que si $gr(F_k) = (m', n')$ entonces $gr(F_{k+1}) = (m' - 1, n')$ por tanto en el sistema de secuentes se tiene que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ y aplicando la regla (T-E) de \mathcal{KT}_4 podemos concluir $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \boxed{\begin{array}{c} \blacksquare \\ \vdots \\ \text{k. } A \end{array}} \\
 \text{k+1. } A \\
 \vdots
 \end{array}$$

Con esto probamos la primera parte de la equivalencia, es bueno hacer énfasis que a pesar de tener de ayuda la intuición gráfica, fue de gran ayuda formalizar el concepto de esquema de prueba, el concepto de intervalos modales e intervalos ordinarios.

3.3.2. $\mathcal{KT}_4 \implies \mathcal{DN}$

Esta prueba se realizará por inducción fuerte, sin embargo, para esta parte de la equivalencia será necesario usar la definición de pseudoprueba. Intuitivamente esto ocurre pues se cuenta con una derivación en el sistema de secuentes, al realizar la inducción se tiene que hay una serie de pasos que permiten concluir hasta el paso k , sin embargo esto no significa que se tenga una prueba del paso k , ya que puede haber intervalos tanto ordinarios como modales abiertos, lo cual no entra dentro de la definición de derivación. En el sistema \mathcal{KT}_4 se tiene que existen secuentes y un contexto Γ el cual cuenta con un elemento candado del cual ya se ha hablado, en \mathcal{DN} se cuentan con derivaciones y no existe el candado, por tanto se hablará primero de cómo se irá transformando el contexto Γ . Se parte del hecho de que el contexto Γ está conformado por hipótesis, supuestos y candados, de las hipótesis y supuestos ya se ha hablado en la presentación de las reglas, sin embargo el candado es un elemento desconocido, sin embargo es usado para agregar o retirar el prefijo box a una fórmula modal, así que cada vez que se descargue un candado en \mathcal{KT}_4 se abrirá un intervalo modal en \mathcal{DN} . Esto lo formalizamos de la siguiente manera:

Proposición 3.29 *Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{DN}} A$.*

- **Regla (\rightarrow I)**

Supongamos que se cumple que en \mathcal{KT}_4 se obtuvo por medio de la regla (\rightarrow I) lo siguiente

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \text{k. } \Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B \\ \vdots \\ \text{k'.. } \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B \\ \vdots \end{array}$$

Recordemos que el contexto Γ está conformado por hipótesis, supuestos y candados de modo que si hay n supuestos y m candados en Γ entonces existen n pseudointervalos ordinarios y m pseudointervalos modales en \mathcal{DN} . Al ser A un supuesto se tendría que existe una pseudoprueba y un paso l tal que $F_l = A$ con $gr(A) = (m, n + 1)$ pues A está generando un pseudointervalo ordinario. Por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{KT}_4} B$ por lo que en la pseudoprueba se tiene que a partir del supuesto A se concluyo B , por lo tanto existe $F_m = B$ con $gr(B) = (m, n + 1)$, es decir en este caso podemos afirmar que tenemos un intervalo ordinario $[l, m]$ que cumple que $gr(F_l) = (m, n + 1) = gr(F_m)$ por lo que se puede aplicar la regla de introducción a la implicación y concluir $F_{m+1} = A \rightarrow B$ con $gr(A \rightarrow B) = (m, n)$, es decir tenemos una pseudoprueba de $A \rightarrow B$.

- **Regla (MP)**

Supongamos ahora que se tiene como resultado de aplicar la regla de Modus Ponens, se tiene

lo siguiente

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \text{l. } \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \rightarrow B \\
 \vdots \\
 \text{m. } \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \\
 \vdots \\
 \text{n. } \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} B
 \end{array}$$

donde Γ tiene una cierta cantidad de hipótesis y candados, digamos que hay m' candados y n' hipótesis, esto significa que tanto $gr(A \rightarrow B) = (m', n') = gr(A)$. No se sabe si el último elemento de Γ es un candado o una fórmula. En caso de ser un candado entonces se inició una pseudoprueba estrictamente subordinada y por lo tanto $A \rightarrow B$ como A se encuentran en el mismo pseudointervalo modal y si es una fórmula entonces $A \rightarrow B$ y A se encuentran en el mismo pseudointervalo ordinario, en ambos casos se cumple que no existe un pseudointervalo modal tal que $A \rightarrow B$ cae en él y A fuera de él ó que $A \rightarrow B$ cae fuera de él y A cae dentro de él, por lo que es posible realizar el modus ponens en el sistema de pruebas subordinado, de este modo existe una pseudoprueba que permite concluir $A \rightarrow B$.

■ **Regla (K-EXPORTACIÓN)**

Supongamos que el caso $k + 1$ es instancia de la regla (K-E), entonces se tiene lo siguiente

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \text{k. } \Gamma, \blacksquare \vdash A \\
 \vdots \\
 \text{k' } \Gamma \vdash \Box A
 \end{array}$$

nuevamente Γ tiene una cierta cantidad de hipótesis, supuestos y candados digamos (m, n) , como cada candado se refleja como haber iniciado una pseudoprueba modal, por hipótesis de inducción existe una pseudoprueba tal que $F_m = A$ cae en un pseudointervalo modal iniciado por alguna F_i con $i < m$, de modo que $gr(A) = (m + 1, n) = gr(F_i)$, como $A \in [F_i, \infty)$ es posible aplicar la fórmula (K-EXPORTACIÓN) con lo que se tendría que existe una pseudoprueba tal que $F_{m+1} = \Box A$ y $gr(\Box A) = (m, n)$.

■ **Regla (K-IMPORTACIÓN)**

Supongamos ahora que la conclusión es instancia de la regla (K-I), tenemos:

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \text{l. } \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \\
 \vdots \\
 \text{l'. } \Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} A
 \end{array}$$

por hipótesis de inducción se sabe que existe una pseudoprueba de $\Box A$ que depende de una cierta cantidad de hipótesis y supuestos fija, digamos n hipótesis y m candados, entonces $gr(\Box A) = (m, n)$. Tanto si lo último que aparece en Γ es un candado o una fórmula se tiene que existe una pseudoprueba de $\Box A$, es posible aplicar la regla, recordemos que la regla no impide que se abran otros pseudointervalos modales u ordinarios. Por ello se tiene que existe una pseudoprueba de A tal que $gr(A) = (m + i, n + j)$ con $1 \leq i < \infty$ y $0 \leq j < \infty$.

■ **Regla (4-IMPORTACIÓN)**

Supongamos ahora que la conclusión es instancia de la regla (4-I), tenemos que el k -ésimo, se ve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ l. \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \\ \vdots \\ l'. \Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \end{array}$$

por hipótesis de inducción se sabe que existe una pseudoprueba de $\Box A$ que depende de una cierta cantidad de hipótesis y supuestos fija, digamos n hipótesis y m candados, entonces $gr(\Box A) = (m, n)$. Tanto si lo último que aparece en Γ es un candado o una fórmula se tiene que existe una pseudoprueba de $\Box A$, es posible aplicar la regla, recordemos que la regla no impide que se abran otros pseudointervalos modales u ordinarios. Por ello se tiene que existe una pseudoprueba de $\Box A$ tal que $gr(\Box A) = (m + i, n + j)$ con $1 \leq i < \infty$ y $0 \leq j < \infty$.

■ **Regla (T-EXPORTACIÓN)**

.Supongamos que la conclusión es instancia de la regla (T-E) de modo que

$$\begin{array}{l} \vdots \\ l. \Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \\ \vdots \\ k+1. \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} A \end{array}$$

en este caso por hipótesis de inducción se cumple que existe una pseudoprueba de A donde se abrió un pseudointervalo modal y A cae en dicho pseudointervalo modal. Si en Γ hay n hipótesis y m candados entonces por hipótesis de inducción $gr(A) = (m + 1, n)$, por lo tanto se cumple lo necesario para aplicar la regla (T-E), es decir se tiene que hay una pseudoprueba tal que $F_{n+1} = A$ con $gr(A) = (m, n)$.

Con esta prueba podemos cerrar este capítulo. Es importante resaltar que aunque la prueba sí usa un poco de la intuición gráfica para no hacer tan técnica la prueba, usando sólo las definiciones que se dieron en el primer capítulo es posible entenderla sin que quede lugar a ambigüedades, debemos resaltar este hecho porque si bien en un principio se intentó evitar trabajar con definiciones

3.3. El sistema \mathcal{KT}_4 y el sistema \mathcal{DN} son equivalentes.

tan engorrosas, eventualmente fue mucho mejor desarrollarlas a intentar escribir la equivalencia sin ellas.

Capítulo 4

Lenguajes de Programación Modales

La correspondencia Curry-Howard es una correspondencia entre sistemas formales de tipos para ciertos modelos de computación y ciertos sistemas formales de demostración. Gracias a la correspondencia de Curry-Howard es posible trabajar con el sistema de tipos tanto del sistema \mathcal{IS}_4 y \mathcal{KT}_4 . En este capítulo se verá la equivalencia de los sistemas vistos como lenguajes modales, por lo tanto se analizarán las propiedades que cada lenguaje cumple para después realizar la equivalencia. Para este capítulo se tiene en mente la interpretación para programas distribuidos donde se piensa en una red ya sea de computadoras ó procesadores de modo los objetos con tipo $\Box A$ son cálculos que se ejecutan de forma segura en toda la red y se pueden transmitir a cualquier zona de ella.

4.1. El lenguaje modal $\lambda_{\mathcal{IS}_4}$

Este lenguaje es esencialmente el cálculo lambda de Clouston pero con una estrategia definida de evaluación, a saber la llamada por valor. Se mostrarán algunas propiedades que Clouston omite. Para este lenguaje se definen los programas de \mathcal{IS}_4 de la siguiente manera:

$$t ::= x \mid \lambda x.t \mid tt \mid \text{open } t \mid \text{shut } t$$

La semántica operacional se define de la siguiente manera para lo cual se seguirá la estrategia de evaluación de izquierda a derecha y la llamada por valor

$$\frac{t \rightarrow t'}{tu \rightarrow t'u} \text{ (E-APP1)} \quad \frac{u \rightarrow u'}{vu \rightarrow vu'} \text{ (E-APP2)}$$

$$\frac{t \rightarrow t'}{\text{open } t \rightarrow \text{open } t'} \text{ (E-OP)}$$

$$\text{open } (\text{shut } t) \rightarrow t$$

$$(\lambda x.r) v \rightarrow r [x := v]$$

Donde los valores serán:

$$v ::= \lambda x.t \mid shut\ t$$

Finalmente las reglas para el sistema de tipos estará conformado por las siguientes reglas:

$$\frac{}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} x : A} \blacksquare \notin \Gamma' \text{ (HYP)} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x.t : A \rightarrow B} (\rightarrow \text{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} tu : B} (\text{MP}_+)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ t : A} (\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}) \quad \frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ t : \Box A} (\text{SHUT})$$

- La regla de hipótesis dice que es posible derivar una hipótesis siempre y cuando no existan candados a la derecha de ella. El contexto representa la información disponible correspondiente a un punto particular de la red. Debido a que los contextos son listas, las posiciones de los elementos en el contexto no es modificable. El candado sirve para señalar un movimiento que se realizó a algún punto arbitrario de la red. Una vez que uno se haya movido a otro punto de la red, ya no es posible usar la información que se encuentra en Γ , razón por la cual ya no es posible derivar una hipótesis $x : A$ si aparece un candado a la izquierda de la hipótesis.
- Dado $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ significa que t es un programa móvil bien tipado, ya que su tipo es un box, entonces es posible recuperar el contexto en cualquier punto de la red. A esta operación se le denota como *open t*. El contexto Γ' representa la nueva información en un punto arbitrario de la red.
- Para tipar un programa t como un programa móvil en un punto particular de la red es suficiente tipar $t : A$ en un punto arbitrario de la red, esto se realiza con la operación *shut t*.

Con esto es posible realizar algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1 *Axioma T*

1. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ (HYP)
2. $t : \Box A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ t : A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot]$
3. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda t.open\ t : \Box A \rightarrow A$ ($\rightarrow \text{I}$) 2

El significado de este ejemplo sería que hay una función que recupera el contenido de un valor móvil.

Ejemplo 4.2 *Axioma 4*

1. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ (HYP)
2. $t : \Box A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\blacksquare, \blacksquare]$
3. $t : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut}(\text{open } t) : \Box A$ (SHUT) 2
4. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut}(\text{shut}(\text{open } t)) : \Box \Box A$ (SHUT) 3
5. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda t. \text{shut}(\text{shut}(\text{open } t)) : \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (\rightarrow I) 4

En este caso se tiene que el Axioma 4 es una función que garantiza que un valor móvil sea móvil.

Ejemplo 4.3 *Axioma K*

1. $t : \Box (A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box (A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $t : \Box (A \rightarrow B), \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\Box A, \blacksquare]$
3. $t : \Box (A \rightarrow B), u : \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : \Box A$ (HYP)
4. $t : \Box (A \rightarrow B), u : \Box A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } u : A$ (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) 3
 $\Gamma'' = [\blacksquare]$
5. $t : \Box (A \rightarrow B), u : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} (\text{open } t)(\text{open } u) : B$ (MP $_+$) 2,4
6. $t : \Box (A \rightarrow B), u : \Box A \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut}((\text{open } t)(\text{open } u)) : \Box B$ (SHUT) 5
7. $t : \Box (A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda u. \text{shut}((\text{open } t)(\text{open } u)) : \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 6
8. $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda t. \lambda u. \text{shut}((\text{open } t)(\text{open } u)) : \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 7

El axioma K es una función que toma una función móvil de valores ordinarios en valores ordinarios y regresa una función móvil de valores móviles en valores móviles.

A continuación se muestran algunos de los ejemplos trabajados anteriormente. Para no agobiar demasiado al lector con las pruebas se muestran sólo los resultados y su significado.

Ejemplo 4.4 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow \Box B).$$

del ejemplo 1.16.

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda t. \text{shut}(\lambda u. \text{shut}((\text{open } t)(\text{open } u))) : \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow \Box B)$$

Una función que transforma una función móvil entre valores ordinarios en una función móvil de valores móviles.

Ejemplo 4.5 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box (B \rightarrow C) \rightarrow \Box (A \rightarrow C)).$$

del ejemplo 1.26.

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda t. \lambda u. shut (\lambda v. (open u) ((open t) (v))) : \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box (B \rightarrow C) \rightarrow \Box (A \rightarrow C))$$

La función composición de funciones ordinarias móviles.

Ejemplo 4.6 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F)).$$

del ejemplo 1.29.

$$\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda u. shut (\lambda t. shut (\lambda r. shut (open (open ((open u) (r))) (shut (open t))))))$$

Una función que toma transforma una función móvil que a su vez transforma una función de valores móviles en una función móvil en una función móvil que toma un valor móvil en una función de valores móviles.

Finalmente hablemos sobre la seguridad del lenguaje. Cuando se define una semántica operacional es importante escoger el nivel correcto de abstracción

Lema 4.7 (*Debilitamiento de variables*) Si $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : B$, entonces $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : B$.

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre el término t .

- El caso base es cuando t es una variable y tendríamos que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} x : B$ donde $\blacksquare \notin \Gamma'$, podemos entonces agregar una hipótesis mientras no sea un candado, de modo conveniente se agrega $y : A$, así que concluimos $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} x : B$.
- Si $t = \lambda x. e$ tenemos $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x. e : B$ donde $B = B_1 \rightarrow B_2$, por tanto se sabe que $\Gamma, \Gamma', x : B_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_2$, por hipótesis de inducción, $\Gamma, y : A, \Gamma', x : B_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_2$, por último se aplica la regla (\rightarrow I) para obtener $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x. e : B_1 \rightarrow B_2$, por lo tanto $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x. e : B$.
- Si $t = e_1 e_2 : B$, se tiene $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : B$, y se sabe que existe B_2 tal que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : B_2 \rightarrow B$ y $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : B_2$, por el caso anterior y el caso base aplicados al primer y segundo secuento respectivamente, podemos concluir que $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : B_2 \rightarrow B$ y $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : B_2$. Como los contextos son iguales es posible aplicar la regla del modus ponens con lo que se tendría $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : B$ que es lo que se quería concluir.
- Si $t = open e$, como premisa tenemos que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} open e : B$ se tienen varios casos:

- Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : \Box B$ entonces aplicando la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) agregando $y : A, \Gamma'$ se tiene $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } e : B$
- Si $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : \Box B$ se aplica la hipótesis de inducción para tener $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : \Box B$ y basta aplicar ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) agregando el contexto vacío para concluir $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } e : B$
- Si $t = \text{shut } e$ se tiene que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut } e : B$ por lo que $B = \Box B_1$ de modo que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_1$, por hipótesis de inducción se tiene $\Gamma, y : A, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_1$, finalmente se aplica la regla (SHUT) y se tiene lo deseado $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut } e : B$.

■

Lema 4.8 (*Debilitamiento generalizado para fórmulas modales*)

$$\text{Si } \Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A \text{ entonces } \Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t' : \Box A.$$

Demostración. Por inducción sobre Γ' .

- Si $\Gamma' = \cdot$, el resultado es inmediato.
- Si $\Gamma' = \Gamma'' : (u : B)$, por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ y aplicando el debilitamiento de variables se puede concluir que $\Gamma, \Gamma'', u : B \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$.
- Si $\Gamma' = \Gamma'' : \blacksquare$, entonces se cumple que $\Gamma, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ por lo que es posible aplicar la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) donde lo más conveniente es agregar dos candados de modo que

$$\Gamma, \Gamma'', \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A,$$

ahora es posible aplicar la regla (SHUT) para concluir $\Gamma, \Gamma'', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut } (\text{open}) t : \Box A$.

■

Lema 4.9 (*Sustitución*) Si $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : B$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$ entonces $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t[u/x] : B$.

Demostración. Por inducción sobre el término t .

- Si $t = y$ entonces $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} y : B$ por lo que $y[u/x] = y$ si $y \neq x$, por lo tanto $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} y : B$.
- Si $t = \lambda y. e$ entonces $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda y. e : B$ con $B = B_1 \rightarrow B_2$, así se tiene que $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda y. e : B_1 \rightarrow B_2$, se sabe que $\Gamma, x : A, \Gamma', y : B_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_2$. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$, por el lema previo y porque sabemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$ se tiene $\Gamma, y : B_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$, aplicando la hipótesis de inducción $\Gamma, \Gamma', y : B_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e[u/x] : B_2$ por lo que podemos derivar y concluir $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda y. e[u/x] : B_1 \rightarrow B_2$ y $\lambda y. e[u/x] = \lambda y. (e[u/x])$.

- Si $t = e_1 e_2$ entonces $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : B$, de modo que existe B_2 tal que $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : B_2 \rightarrow B$ y $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : B_2$, por hipótesis de inducción se tiene $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 [u/x] : B_2 \rightarrow B$ y $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 [u/x] : B_2$ de aquí se puede derivar que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 [u/x] e_2 [u/x] : B$, como $e_1 [u/x] e_2 [u/x] = (e_1 e_2) [u/x]$ entonces $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} (e_1 e_2) [u/x] : B$.
- Si $t = \text{open } e$ se tiene $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } e : B$ entonces por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e [u/x] : \Box B$, aplicando la regla se tiene $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } e [u/x] : B$.
- Si $t = \text{shut } e$ se tiene $\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut } e : B$, por tanto $B = \Box B_1$ y se sabe que $\Gamma, x : A, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_1$, por hipótesis de inducción se cumple $\Gamma, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e [u/x] : B_1$, de aquí se deriva que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut } e [u/x] : \Box B_1$.

■

Proposición 4.10 (*Reemplazo de candado*) Si $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$ entonces $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$.

Demostración. Por inducción sobre $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$.

- (\rightarrow I) Se tiene $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x. e : A$ donde $A = A_1 \rightarrow A_2$ entonces se sabe que si $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'', x : A_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A_2$ y por hipótesis de inducción se tiene $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', x : A_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A_2$, finalmente aplicando la regla (\rightarrow I) se concluye que $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x. e : A_2$.
- (MP) Si $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : A$, por lo tanto debe existir A_1 tal que $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A_2$ y $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$ aplicando la hipótesis de inducción ambos secuentes se tiene

$$\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A_2$$

y

$$\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1,$$

por lo tanto es posible concluir $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : A$.

- (**OPEN** $_{\mathcal{IS}_4}$) Entonces $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$ con $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' = \Delta, \Delta'$ y $\Delta' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$, queremos probar que $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$.
 - Si $\Delta' = \Pi, \blacksquare, \Pi'$ entonces $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'', \Delta, \Pi, \blacksquare, \Pi'$ de modo que $\Gamma = \Delta, \Pi$ y $\Gamma'' = \Pi'$ que es lo que se quería demostrar pues $\Delta, \Pi, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$ entonces $\Delta \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$.
 - Si $\Delta = \Pi, \blacksquare, \Pi'$ entonces $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' = \Pi, \blacksquare, \Pi', \Delta'$ entonces $\Gamma = \Pi$ y $\Gamma'' = \Pi', \Delta'$. En este caso se quiere probar que $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$, pero esto significa que $\Pi, \Gamma', \Pi', \Delta' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$ con $\Delta' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$, es decir $\Pi, \blacksquare, \Pi' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$, por hipótesis de inducción $\Pi, \Gamma', \Pi' \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ entonces se puede concluir que $\Pi, \Gamma', \Pi', \Delta'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$.

- **(SHUT)** Se tiene que $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ t : A$ por lo tanto se sabe $A = \Box A_1$ y $\Gamma, \blacksquare, \Gamma'', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A_1$, se aplica la hipótesis de inducción seguida de la regla (SHUT) para concluir que

$$\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ t : A.$$

■

Teorema 4.11 (*Preservación de tipos*). Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$ y $t \rightarrow u$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$.

Demostración. Por inducción sobre $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$.

- **(HYP)** El lema se cumple por vacuidad.
- **(\rightarrow I)** Si $t = \lambda x.e$, como x es un valor entonces no se reduce, de modo que $t \rightarrow u$ no se cumple, por vacuidad es válido el lema.
- **(MP.)** Entonces se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : A$ entonces existe A_1 tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$, hay tres formas tales que $e_1 e_2 \rightarrow u$ pudo ser derivado. Realicemos los tres casos:

Tenemos $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$ y $e_1 e_2 \rightarrow u$, necesitamos $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$.

- Si $u = e'_1 e_2$ y $e_1 \rightarrow e'_1$. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$, por hipótesis de inducción se puede concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e'_1 : A_1 \rightarrow A$. Por lo tanto ahora se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e'_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$ y podemos derivar $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e'_1 e_2 : A$.
 - Si $u = e_1 e'_2$ y $e_2 \rightarrow e'_2$. En este caso como $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$, por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e'_2 : A_1$, como se tenía que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e'_2 : A$.
 - Si $e_1 = \lambda x.e_3$, $e_2 = v : A_1$ y $u = e_1 [v/x]$. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x.e_3 : A_1 \rightarrow A$ entonces $\Gamma, x : A_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_3 : A$, por el lema previo podemos concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_3 [e_2/x] : A$.
- **(OPEN $\kappa_{\mathcal{T}_4}$)** Se tiene dos casos:
 - Si fue usada la regla (E-OP) para derivar $t = open\ e \rightarrow u$. La regla afirma que $e \rightarrow e'$ entonces $open\ e \rightarrow open\ e'$ de modo que por hipótesis de inducción se cumple que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ e' : A$ por lo tanto se tiene $u = open\ e'$.
 - Si $t = open\ (shut\ e)$ y $e \rightarrow u$, recordemos que $open\ (shut\ e) \rightarrow e$ entonces se cumple que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ (shut\ e) : A$ por lo tanto se tienen varios casos:
 - Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : \Box A$, es decir se había aplicado la regla (OPEN $_{\mathcal{IS}_4}$) pero no se agregó nada. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : \Box A$ entonces $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$, usando el reemplazo de candados se puede afirmar que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$ y sabemos que $e \rightarrow u$ por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$.

- Si $\Gamma = \Pi, \Pi'$ y se tiene que $\Pi \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : \Box A$ entonces $\Pi, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$, aplicando el reemplazo de candados nuevamente se tiene que $\Pi, \Pi' \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$, como $u = e$ se puede concluir que $\Pi, \Pi' \vdash_{\mathcal{IS}_4} u : A$ que es lo que se quería demostrar.

- (SHUT) Si $t = shut\ e$ entonces es trivial pues t ya es un valor.

■

Teorema 4.12 (*Progreso*) Si $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$ entonces t es un valor ó existe t' tal que $t \rightarrow t'$.

Demostración. Por inducción sobre $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$.

- (HYP) Entonces el lema se cumple por vacuidad pues el tipado $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} x : A$ no es posible.
- (\rightarrow I) Entonces como $t = \lambda x.e$ el lema se cumple pues t ya es un valor.
- (MP.) Como se tiene $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : A$ entonces existe A_1 tal que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$, hay tres formas tales que $e_1 e_2 \rightarrow u$ pudo ser derivado. Realicemos los tres casos:
 - Si $u = e'_1 e_2$ y $e_1 \rightarrow e'_1$. Como $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$, por hipótesis de inducción se puede concluir que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e'_1 : A_1 \rightarrow A$.
 - Si $u = e_1 e'_2$ y $e_2 \rightarrow e'_2$. En este caso como $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$, por hipótesis de inducción $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e'_2 : A_1$, como se tenía que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ entonces $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e'_2 : A$.
 - Si $e_1 = \lambda x.e_3$, $e_2 = v : A_1$ y $u = e_1 [v/x]$. Como $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x.e_3 : A_1 \rightarrow A$ entonces $x : A_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_3 : A$, por el lema previo podemos concluir que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_3 [e_2/x] : A$.
- (OPEN $\kappa_{\mathcal{T}_4}$) Si $t = open\ e$ se tienen dos casos:
 - Si la regla (E-OP) fue usada para derivar $t = open\ e \rightarrow u$. La regla afirma que $e \rightarrow e'$ entonces $open\ e \rightarrow open\ e'$ de modo que por hipótesis de inducción se cumple que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ e' : A$ por lo tanto en efecto existe un $t' = open\ e'$.
 - Si ocurrió que $t = open\ (shut\ e)$ y $e \rightarrow t'$, recordemos que $open\ (shut\ e) \rightarrow e$ entonces se cumple que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ (shut\ e) : A$ por lo tanto se tiene que $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : \Box A$ y por lo tanto $\blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$, aplicando el reemplazo de candados podemos eliminar ese candado y agregar algún contexto que querramos, en particular podemos agregar vacío, por lo tanto $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$ y como $t \rightarrow t'$ entonces $\cdot \vdash_{\mathcal{IS}_4} t' : A$.
- (SHUT) Si $t = shut\ e$ entonces t ya es un valor.

■

Los teoremas de preservación y progreso garantizan la seguridad del lenguaje en el sentido de que un programa bien tipado y sin variables libres no causará errores de ejecución.

4.2. El lenguaje modal $\lambda_{\mathcal{KT}_4}$

Este cálculo lambda es al igual que la lógica asociada al sistema de secuentes \mathcal{KT}_4 , propuesta nuestra. Para este lenguaje se definen los programas de \mathcal{KT}_4 de la siguiente manera:

$$t ::= x \mid \lambda x.t \mid tt \mid \text{open } t \mid \text{shut } t$$

La semántica operacional se define de la siguiente manera para lo cual se seguirá la estrategia de evaluación de izquierda a derecha y la llamada por valor

$$\begin{array}{c} \frac{t \rightarrow t'}{tu \rightarrow t'u} \text{ (E-APP1)} \quad \frac{u \rightarrow u'}{vu \rightarrow vu'} \text{ (E-APP2)} \\ \\ \frac{t \rightarrow t'}{\text{open } t \rightarrow \text{open } t'} \text{ (E-OP)} \quad \frac{t \rightarrow t'}{\text{release } t \rightarrow \text{release } t'} \text{ (E-REL)} \\ \\ \text{open } (\text{shut } t) \rightarrow t \\ \\ \text{release } (\text{enter } t) \rightarrow t \\ \\ \text{enter } (\text{shut } t) \rightarrow t \\ \\ (\lambda x.r) v \rightarrow r [x := v] \end{array}$$

Los valores se definen de la siguiente manera:

$$v ::= \lambda x.t \mid \text{shut } t \mid \text{release } v \mid \text{enter } v$$

donde v ya es un valor.

Finalmente las reglas para el sistema de tipos estará conformado por las siguientes reglas:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} x : A} \blacksquare \notin \Gamma' \text{ (HYP)} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash_{S_4} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x.t : A \rightarrow B} (\rightarrow \text{I}) \\ \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} u : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} tu : B} \text{ (MP}_+\text{)} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } t : A} \text{ (OPEN}_{\mathcal{KT}_4}\text{)} \quad \frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } t : \Box A} \text{ (K-EXPORTACIÓN)} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{enter } t : \Box A} \quad (4\text{-IMPORTACIÓN}) \qquad \frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{release } t : A} \quad (\text{T-EXPORTACIÓN})$$

- La regla $(\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4})$ dice que un programa móvil puede ser importado y su contenido puede ser recuperado en cualquier punto de la red. Se debe aclarar este paso con el uso del candado.
- La regla (4-IMPORTACIÓN) dice que un programa móvil puede ser importado sin recuperar el contenido en cualquier punto de la red. Se debe aclarar este paso con el uso del candado.
- La regla (K-EXPORTACIÓN) menciona que si se tiene $t : A$ en algún punto de la red donde además el candado sea el último elemento del contexto entonces es posible encapsular a t como móvil y dar un paso hacia atrás en la red, lo cual está representado por Γ .
- La regla (T-EXPORTACIÓN) dice que si se encapsula $t : A$ es un punto arbitrario en la red es posible concluir que t es código móvil seguro, sin embargo aplicar esta regla te regresa al punto previo en la red.

Aprovechando que los axiomas 4, T y K tienen pruebas cortas, realizaremos su tipado paso a paso en el sistema \mathcal{KT}_4 que es con el que trabajaremos de aquí en adelante.

Ejemplo 4.13 (Axioma T) El juicio $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow A$.

1. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$ (HYP)
2. $t : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } t : A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
3. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{release } (\text{open } t) : A$ (T-E) 2
4. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. \text{release } (\text{open } t) : \Box A \rightarrow A$ (\rightarrow I) 3

Ejemplo 4.14 (Axioma 4) El juicio $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box A \rightarrow \Box \Box A$.

1. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$ (HYP)
2. $t : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{enter } t : \Box A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
3. $t : \Box A, \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } (\text{enter } t) : A$ ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
4. $t : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } (\text{open } (\text{enter } t)) : \Box A$ (K-E) 3
5. $t : \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } (\text{shut } (\text{open } (\text{enter } t))) : \Box \Box A$ (K-E) 4
6. $\vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. \text{shut } (\text{shut } (\text{open } (\text{enter } t))) : \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (\rightarrow I) 5

Ejemplo 4.15 (Axioma K) El juicio $\vdash_{S_4} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ es derivable.

1. $t : \Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} u : \Box A$ (HYP)
3. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } u : A$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
4. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } t : A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [\cdot]$
5. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box A, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} (\text{open } t) (\text{open } u) : B$ (MP $_+$) 3,4
6. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box A \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut} ((\text{open } t) (\text{open } u)) : \Box B$ (SHUT) 5
9. $t : \Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda u. \text{shut} ((\text{open } t) (\text{open } u)) : \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 8
10. $\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. \lambda u. \text{shut} ((\text{open } t) (\text{open } u)) : \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ (\rightarrow I) 9

Veamos algunos de los ejemplos mostrados en las primeras secciones realizando el tipado y la prueba de ellos en el sistema \mathcal{KT}_4 .

Ejemplo 4.16 *Continuando con el juicio del ejemplo ?? dado por*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$$

obtenemos el siguiente tipado:

1. $t : \Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box(A \rightarrow B)$ (HYP)
2. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box(B \rightarrow C) \vdash_{\mathcal{KT}_4} u : \Box(B \rightarrow C)$ (HYP)
3. $t : \Box(A \rightarrow B), u : \Box(B \rightarrow C), \blacksquare, v : A \vdash_{\mathcal{KT}_4} v : A$ (HYP)
4. $t, u, \blacksquare, v \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } t : A \rightarrow B$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 1
 $\Gamma' = [u : \Box(B \rightarrow C)], \Gamma'' = [\cdot]$
5. $t, u, \blacksquare, v \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } u : B \rightarrow C$ (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) 2
 $\Gamma' = [\cdot], \Gamma'' = [A]$
6. $t, u, \blacksquare, v \vdash_{\mathcal{KT}_4} (\text{open } t) (v) : B$ (MP $_+$) 4,3
7. $t, u, \blacksquare, v \vdash_{\mathcal{KT}_4} (\text{open } u) ((\text{open } t) (v)) : C$ (MP $_+$) 5,6
8. $t, u, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda v. (\text{open } u) ((\text{open } t) (v)) : A \rightarrow C$ (\rightarrow I) 7
9. $t, u \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut} ((\text{open } u) ((\text{open } t) (v))) : \Box(A \rightarrow C)$ (K-E) 8
10. $t \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda u. \text{shut} ((\text{open } u) ((\text{open } t) (v))) : \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$ (\rightarrow I) 9
11. $\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. \lambda u. \text{shut} ((\text{open } u) ((\text{open } t) (v))) : \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$ (\rightarrow I) 10

Por lo tanto se concluye que:

$$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. \lambda u. \text{shut} ((\text{open } u) ((\text{open } t) (v))) : \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))$$

Ejemplo 4.17 *El juicio*

$$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$$

del ejemplo 1.16.

$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. shut (\lambda u. shut ((open (release (enter t))) (open u))) : \Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow \Box B).$

Ejemplo 4.18 *El juicio*

$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \Box (\Box D \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box F)) \rightarrow \Box (\Box E \rightarrow \Box (\Box D \rightarrow \Box F))$

del ejemplo 1.29.

$\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda t. shut (\lambda u. shut (\lambda v. shut (release (open ((open ((open t) (v))) (enter (u))))))))$

Lema 4.19 (*Debilitamiento de variables*) Si $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : B$, entonces $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : B$.

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre el término t .

- El caso base es cuando t es una variable y tendríamos que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} x : B$ donde $\blacksquare \notin \Gamma'$, podemos entonces agregar una hipótesis mientras no sea un candado, de modo conveniente se agrega $y : A$, así que concluimos $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} x : B$.
- Si $t = \lambda x. e$ tenemos $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x. e : B$ donde $B = B_1 \rightarrow B_2$, por tanto se sabe que $\Gamma, \Gamma', x : B_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : B_2$, por hipótesis de inducción, $\Gamma, y : A, \Gamma', x : B_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : B_2$, por último se aplica la regla (\rightarrow I) para obtener $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x. e : B_1 \rightarrow B_2$, por lo tanto $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x. e : B$.
- Si $t = e_1 e_2 : B$, se tiene $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2 : B$, y se sabe que existe B_2 tal que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : B_2 \rightarrow B$ y $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2 : B_2$, por el caso anterior y el caso base aplicados al primer y segundo secuyente respectivamente, podemos concluir que $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : B_2 \rightarrow B$ y $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2 : B_2$. Como los contextos son iguales es posible aplicar la regla del modus ponens con lo que se tendría $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2 : B$ que es lo que se quería concluir.
- Si $t = open e$, como se tiene que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} open t : B$, por lo tanto se tienen varios casos:
 - Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : \Box B$ entonces aplicando la regla ($OPEN_{\mathcal{KT}_4}$) debemos agregar $y : A, \Gamma'$ y el contexto $\Gamma'' = \cdot$, por lo tanto se puede concluir $\Gamma, y : A, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} open t : B$, ahora aplicamos la regla (T-E) para obtener $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} release(shut t) : \Box B$.
 - Si $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : \Box B$ se puede aplicar la hipótesis de inducción para tener

$$\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : \Box B$$

y basta aplicar ($OPEN_{\mathcal{IS}_4}$) agregando el contexto vacío para concluir $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} open e : B$

- Si $t = shut\ e$ se tiene que $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : B$ por lo que $B = \Box B_1$ de modo que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_1$, por hipótesis de inducción se tiene $\Gamma, y : A, \Gamma', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : B_1$, finalmente se aplica la regla (K-E) y se tiene lo deseado $\Gamma, y : A, \Gamma' \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : B$.

■

El siguiente lema es una propiedad a la vista en el tercer capítulo cuando se hablaba de la lógica, aquí es posible notar que el término cambia.

Lema 4.20 (*Debilitamiento generalizado para fórmulas modales*)

$$Si\ \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A\ \text{entonces}\ \Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} t' : \Box A.$$

Demostración. Por inducción sobre Γ' .

- Si $\Gamma' = \cdot$, el resultado es inmediato.
- Si $\Gamma' = \Gamma'' : (u : B)$, por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$ y aplicando el debilitamiento de variables se puede concluir que $\Gamma, \Gamma'', u : B \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$.
- Si $\Gamma' = \Gamma'' : \blacksquare$, entonces se cumple que $\Gamma, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$ por lo que es posible aplicar la regla (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) donde lo más conveniente es agregar sólomente un candado de modo que $\Gamma, \Gamma'', \blacksquare, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} open\ t : A$, ahora es posible aplicar la regla (K-E) para concluir $\Gamma, \Gamma'', \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} shut\ (open)\ t : \Box A$.

■

Teorema 4.21 (*Preservación de tipos*) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A$ donde Γ tiene a lo más un candado, y $t \rightarrow t'$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t' : A$. Excepto cuando $t = release\ r : A$, $t' = release\ r' : A$ y $r \rightarrow r'$ donde se requiere $\blacksquare \notin \Gamma$.

Demostración. Por inducción sobre $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A$.

- (HYP) Sabemos que x no se reduce, por lo tanto el teorema se cumple.
- (\rightarrow I) Si $t = \lambda x.e$, como x es un valor entonces no se reduce, de modo que $t \rightarrow t'$ no se cumple, por vacuidad es válido el lema.
- (MP) Si $t = e_1 e_2 : B$ entonces

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2 : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2 : B}$$

Por lo tanto hay tres casos:

- Si $t = e'_1 e_2$ con $e_1 \rightarrow e'_1$ por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e'_1 : A \rightarrow B$ por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e'_1 e_2 : B$.

- Si $t' = e_1 e_2'$ con e_1 un valor y $e_2 \rightarrow e_2'$ entonces por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2' : A$ por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2' : B$.
- Si ocurre que e_1 y e_2 son valores entonces $e_1 = \lambda x.r$ y $t' = r[x := e_2]$ entonces queremos demostrar que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r[x := e_2] : B$. Como $e_1 = \lambda x.r$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x.r : A \rightarrow B$, como $(\rightarrow I)$ es invertible entonces $\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : B$, usando el lema de sustitución se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r[x := e_2] : B$.

■ (OPEN \mathcal{KT}_4)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } r : A}$$

donde $t = \text{open } r$ y $t \rightarrow t'$. Entonces se tienen dos casos

- Si $t' = \text{open } r'$ con $r \rightarrow r'$ entonces por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r' : \Box A$ donde $\blacksquare \notin \Gamma$, aplicando la regla (OPEN \mathcal{KT}_4) se tiene que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } r' : A$.
- Si $t' = s$ con $r = \text{shut } s$, queremos mostrar que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$ donde $\blacksquare \notin \Gamma, \Gamma', \Gamma''$. Tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } s : \Box A$, ya que la regla (K-E) es invertible se tiene que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$, aplicando el debilitamiento para variables se tiene $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$.

■ (K-EXPORTACIÓN) Se tiene que

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } r : A}$$

como $\text{shut } r$ ya es un valor entonces no se reduce, por lo tanto se cumple el teorema.

■ (4-IMPORTACIÓN) Entonces

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A}{\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{enter } r : \Box A}$$

donde $t = \text{enter } r$ y $t \rightarrow t'$. Entonces se tienen dos casos

- Si $t' = \text{enter } r'$ con $r \rightarrow r'$ entonces por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r' : \Box A$ donde $\blacksquare \notin \Gamma$, aplicando la regla (4-I) se tiene que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{enter } r' : \Box A$.
- Si $t' = s$ con $r = \text{shut } s$, queremos mostrar que $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$ donde $\blacksquare \notin \Gamma, \Gamma', \Gamma''$. Tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } s : \Box A$, ya que la regla (K-E) es invertible se tiene que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$, aplicando el debilitamiento para variables se tiene $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$.

■ (T-EXPORTACIÓN) Sea $t = \text{release } r$ entonces

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{release } r : A}$$

nuevamente hay dos casos:

- Si $t = \text{release } r'$ con $r \rightarrow r'$ entonces $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : A$, por la hipótesis de inducción se cumple que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} r' : A$ por lo tanto aplicando la regla (T-E) se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{release } r' : A$.
- Si $t = \text{release}(\text{enter } r)$ con $t' = r$ entonces

$$\frac{\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{enter } r : \Box A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{release}(\text{enter } r) : \Box A}$$

de modo que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A$.

■

Teorema 4.22 (Progreso) Si $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A$ y t no es de la forma $t = \text{release } r$ donde r no es un valor, entonces t es un valor ó existe t' tal que $t = t'$.

Demostración. Por inducción sobre $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A$.

- (HYP) El lema se cumple por vacuidad pues $\blacksquare \not\vdash_{\mathcal{KT}_4} x : A$.
- (\rightarrow I) Si $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x.r : A$ entonces se cumple pues $\lambda x.r$ ya es un valor.
- (MP) Sea $t = e_1 e_2$ entonces

$$\frac{\begin{array}{l} \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : A \rightarrow B \\ \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2 \end{array}}{\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2 : B}$$

por lo que tenemos dos hipótesis de inducción. Como $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : A \rightarrow B$ la primera hipótesis de inducción sería e_1 es un valor o $e_1 \rightarrow e'_1$ y como $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2$ la segunda hipótesis de inducción sería e_2 es un valor o $e_2 \rightarrow e'_2$, por lo tanto veamos los casos:

- Si e_1 es un valor y e_2 es un valor entonces $e_1 = \lambda x.r$ por lo tanto $e_1 e_2 = (\lambda x.r) e_2 \rightarrow r[x := e_2]$, de modo que sea $t' = r[x := e_2]$.
 - Si e_1 es un valor y $e_2 \rightarrow e'_2$ entonces $e_1 e_2 \rightarrow e_1 e'_2$ por lo tanto sea $t' = e_1 e'_2$.
 - Finalmente si $e_1 \rightarrow e'_1$ entonces $e_1 e_2 \rightarrow e'_1 e_2$.
- (OPEN \mathcal{KT}_4) Se tiene que

$$\frac{\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A}{\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } r : A}$$

donde $t = \text{open } r$ por lo tanto como $\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A$ entonces $r = \text{shut } s$ con $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$. Notemos que $t = \text{open } r = \text{open}(\text{shut } s) \rightarrow s$, de modo que sea $t' = s$.

- (K-EXPORTACIÓN) Si $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } r$ entonces $\text{shut } r$ ya es un valor.

- (4-IMPORTACIÓN) Se tiene que

$$\frac{\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A}{\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{enter } r : A}$$

Como $\cdot \vdash_{\mathcal{KT}_4} r : \Box A$ entonces $r = \text{shut } s$ con $\blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} s : A$. Notemos que $t = \text{enter } r = \text{enter } (\text{shut } s) \rightarrow s$, por lo tanto sea $t' = s$.

■

Este cálculo lambda no se comporta tan bien pues los teoremas de preservación y progreso tienen restricciones, esto se debe en gran medida al candado. Sin embargo se mostrará a continuación una equivalencia con el cálculo de Clouston.

4.3. Equivalencia de los lenguajes modales

4.3.1. $\lambda_{\mathcal{IS}_4} \implies \lambda_{\mathcal{KT}_4}$

Dado un término en \mathcal{IS}_4 es necesario probar que existe un término en \mathcal{KT}_4 , algunas reglas no representan ningún problema pues son iguales e incluso pudiera pensarse que no hay nada que hacer en esta sección pues las reglas de \mathcal{IS}_4 son un fragmento de las reglas del sistema \mathcal{KT}_4 , sin embargo la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) es distinta a ($\text{OPEN}_{\mathcal{KT}_4}$) ya que en una se agregó lo que sea pudiendo ser vacío dicho contexto agregado y en otra forzosamente se agregó un candado, por tanto es necesario escribir con cuidado la traducción en este caso.

Lema 4.23 Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : A$ entonces ${}^1\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \hat{t} : A$.

Demostración. Por inducción sobre el término t .

- Si $t = x$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} x : A$ por lo tanto $t = \hat{t}$.
- Si $t = \lambda x.e$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x.e : A$ de modo que $A = A_1 \rightarrow A_2$, por lo tanto se sabe $\Gamma, x : A_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A_2$, por hipótesis de inducción se tendría $\Gamma, x : A_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : A_2$ y al descargar se puede concluir $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x.e : A$ por lo tanto $t = \hat{t}$.
- Si $t = e_1 e_2$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : A$ por lo que existe $e_2 : A_1$ y se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$, por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2 : A_1$ y aplicando la regla se tiene $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2 : A$ por lo tanto $t = \hat{t}$.
- Si $t = \text{open } e$ entonces $\Gamma \star \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } e : A$ donde $\Gamma \star = \Gamma, \Gamma'$ y se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : \Box A$ de modo que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : \Box A$, ahora al aplicar la regla (K-IMPORTACIÓN) de \mathcal{KT}_4 se tendría $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } e : A$ con $\Gamma'' = [\cdot]$, de aquí es posible aplicar la regla

¹Para hacer una distinción entre los términos de \mathcal{IS}_4 y los términos de \mathcal{KT}_4 , se denotará a los términos de \mathcal{KT}_4 con un gorro de la siguiente manera \hat{t} .

(T-EXPORTACIÓN) para obtener $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{release}(\text{open } e) : A$, recordemos que $\text{release}(\text{open } t) \rightarrow t$ por tanto $\Gamma \star \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : A$, de modo que si $t = \text{open } e$ entonces

$$\widehat{t} = \text{release}(\text{open } e) \rightarrow e.$$

- Si $t = \text{shut } e$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{shut } e : A$ y $A = \Box A_1$, de modo que se sabe que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A_1$, por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : A_1$ y aplicando la regla (K-EXPORTACIÓN) se puede concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{shut } e : A$ por lo tanto $t = \widehat{t}$.

■

Por lo tanto se tiene que $(\widehat{\cdot}) : \mathcal{IS}_4 \rightarrow \mathcal{KT}_4$ donde

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= x \\ \widehat{\lambda x.e} &= \lambda x.\widehat{e} \\ \widehat{rs} &= \widehat{r}\widehat{s} \\ \widehat{\text{open } t} &= \text{open } \widehat{t} \\ \widehat{\text{shut } t} &= \text{shut } \widehat{t} \end{aligned}$$

Como todos los casos son homomorfos de hecho se tiene que $\widehat{t} = t$.

4.3.2. $\lambda_{\mathcal{KT}_4} \Rightarrow \lambda_{\mathcal{IS}_4}$

Nuevamente en esta prueba se tienen algunos casos sencillos ya que algunas reglas coinciden.

Lema 4.24 Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : A$ entonces ${}^2\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t^\# : A$.

Demostración. Por inducción sobre el término t .

- Si $t = x$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} x : A$, por lo tanto $t = t^\#$.
- Si $t = \lambda x.e$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} \lambda x.e : A$ de modo que $A = A_1 \rightarrow A_2$, por lo tanto se sabe $\Gamma, x : A_1 \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : A_2$, por hipótesis de inducción se tendría $\Gamma, x : A_1 \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A_2$ y al descargar se puede concluir $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} \lambda x.e : A$ por lo tanto $t = \widehat{t}$.
- Si $t = e_1 e_2$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 e_2 : A$ por lo que existe $e_2 : A_1$ y se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} e_2 : A_1$, por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 : A_1 \rightarrow A$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_2 : A_1$ y aplicando la regla se tiene $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} e_1 e_2 : A$ por lo tanto $t = \widehat{t}$.
- Si $t = \text{open } e$ se tiene que $\Gamma, \Gamma' \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} \text{open } t : A$ de modo que se sabe $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$, por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$, aplicando la regla (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) se tiene que podemos agregar contexto a cambio de retirar el prefijo box, por tanto podemos concluir $\Gamma, \Gamma' \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} \text{open } t : A$.

²Para hacer una distinción entre los términos de \mathcal{KT}_4 y los términos de \mathcal{IS}_4 , se denotará a los términos de \mathcal{IS}_4 con un #.

- Si $t = shut\ e$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} shut\ e : A$ y $A = \Box A_1$, de modo que se sabe que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : A_1$, por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A_1$ y aplicando la regla (K-EXPORTACIÓN) se puede concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : A$ por lo tanto $t = \hat{t}$.
- Si $t = enter\ e$ entonces se tiene $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{KT}_4} enter\ t : \Box A$ por lo que se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} t : \Box A$, por hipótesis de inducción se tiene $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} t : \Box A$ por lo que podemos aplicar la regla (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) agregando $\Gamma', \blacksquare, \Gamma'', \blacksquare$ para obtener $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'', \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} open\ t : A$ y finalmente aplicar la regla (K-EXPORTACIÓN) para concluir $\Gamma, \Gamma', \blacksquare, \Gamma'' \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut(open\ t) : A$ por lo tanto si $t = enter\ e$ entonces $t^\# = shut(open\ t)$.
- Si $t = release\ e$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{KT}_4} release\ e : A$ donde se sabe que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{KT}_4} e : A$, por hipótesis de inducción se tiene que $\Gamma, \blacksquare \vdash_{\mathcal{IS}_4} e : A$, aplicando la regla (K-EXPORTACIÓN) se obtiene $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} shut\ e : \Box A$, ahora basta aplicar la regla (OPEN $_{\mathcal{KT}_4}$) agregando $\Gamma' = [\cdot]$ para concluir $\Gamma \vdash_{\mathcal{IS}_4} open(shut\ e) : \Box A$, de modo que si $t = release\ e$ entonces $t^\# = open(shut\ e)$.

■ Por lo tanto se tiene $(\cdot)^\# = \mathcal{KT}_4 \rightarrow \mathcal{IS}_4$ donde

$$\begin{aligned}
 x^\# &= x \\
 (\lambda x.e)^\# &= \lambda x.e^\# \\
 (rs)^\# &= r^\# s^\# \\
 (open\ t)^\# &= open\ t^\# \\
 (shut\ t)^\# &= shut\ t^\# \\
 (release\ t)^\# &= t^\# \\
 (enter\ t)^\# &= shut\ (open\ t^\#)
 \end{aligned}$$

Para cerrar este trabajo veamos el siguiente teorema que resume la traducción de términos que es necesario realizar.

Teorema 4.25 *Dado t en \mathcal{IS}_4 existe \hat{t} en \mathcal{KT}_4 tal que*

$$Si\ r \rightarrow_{\mathcal{IS}_4} s\ entonces\ \hat{r} \rightarrow_{\mathcal{KT}_4}^+ \hat{s}$$

y viceversa, dado t en \mathcal{KT}_4 existe $t^\#$ en \mathcal{IS}_4 tal que

$$Si\ r \rightarrow_{\mathcal{KT}_4} s\ entonces\ r^\# \rightarrow_{\mathcal{IS}_4}^+ s^\#.$$

Demostración. Esta prueba se divide en dos partes, en ambas es necesario analizar con mayor cuidado las reglas que son distintas.

- Dado t en \mathcal{IS}_4 , sólo hay una regla que es distinta, la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) por tanto nos centramos en ella.
 - Si $r \neq \text{open } e$ entonces $t = \hat{t}$.
 - Si $r = \text{open } e$ y es tal que $r \rightarrow_{\mathcal{IS}_4} s$ se sabe que $e \rightarrow s_1$ por la regla (E-OP) se tiene que $\text{open } e \rightarrow \text{open } s_1$ por lo tanto sea $\hat{r} = \text{release } (\text{open } e)$, por las reglas de la semántica operacional sabemos que $\text{release } (\text{open } e) \rightarrow e$ por lo tanto en realidad $\hat{r} = e$.
- Dado t en \mathcal{KT}_4 se tiene tres reglas importantes a verificar los casos open, release y enter.
 - Si $r \neq \text{open } e$, $r \neq \text{release } e$ ó $r \neq \text{enter } e$ entonces $t = t^\#$.
 - Si $r = \text{open } e$, como $r \rightarrow_{\mathcal{KT}_4} s$ se sabe por la regla (E-OP) que $\text{open } e \rightarrow \text{open } s_1$ entonces sea $r^\# = \text{open } e$ y $s^\# = \text{open } s_1$
 - Si $r = \text{release } e$ tal que $r \rightarrow_{\mathcal{KT}_4} s$ entonces se sabe que $e \rightarrow s_1$ por la regla (E-RE) se tiene que $\text{release } e \rightarrow \text{release } s_1$ con s_1 en \mathcal{KT}_4 por lo tanto sea $r^\# = \text{open}(\text{shut}(e))$ y $s^\# = \text{open}(\text{shut}(s_1))$ en \mathcal{IS}_4 .
 - Si $r = \text{enter } e$ tal que $r \rightarrow_{\mathcal{KT}_4} s$ entonces se sabe que $e \rightarrow s_1$ por la regla (E-EN) se tiene que $\text{enter } e \rightarrow \text{enter } s_1$ con s_1 en \mathcal{KT}_4 por lo tanto sea $r^\# = \text{shut}(\text{open}(e))$ y $s^\# = \text{shut}(\text{open}(s_1))$.

■

Podemos concluir remarcando que la equivalencia es a dos niveles, en el tipado con los lemas 4.24, 4.23 y en el mecanismo de evaluación del teorema 4.25.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

La meta principal de este trabajo es ofrecer una prueba de que el sistema \mathcal{IS}_4 es equivalente al sistema de deducción natural modal propuesto por Randal Clouston, para ello fue necesario aclarar las reglas para la deducción natural modal. En un principio se evitó trabajar con la gran cantidad de definiciones que surgen como la de intervalo modal, intervalo ordinario ó el grado de una fórmula, pues se buscaba que la prueba fuera intuitiva. Sin embargo uno de los mayores problemas es que era mucho más complicado escribir una prueba de lo que se quería si sólo se usaba la intuición pues se dependía por completo de la intuición gráfica, la cual no abarca todos los casos, por ello se introdujeron todos los conceptos ya mencionados y se adaptaron de modo que funcionaran acorde a lo que se buscaba.

En el segundo capítulo se discutieron las reglas del sistema \mathcal{IS}_4 y se observó en repetidas ocasiones que la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) es demasiado liberal, lo cual difícilmente captura la esencia del sistema de deducción natural modal, sin embargo se dedicó todo el segundo capítulo a probar las reglas que el sistema permite y las versiones débiles de muchas que no permite en su presentación usual. También se introdujeron las tácticas de las pruebas bidireccionales, mismas que ayudaron en el resto del trabajo a probar cada uno de los secuentes. Como ya se mencionó, la regla ($\text{OPEN}_{\mathcal{IS}_4}$) por sí sola no deja ver cómo se relaciona el sistema \mathcal{IS}_4 con el sistema de deducción natural, así que fue necesario introducir un nuevo sistema. El tercer capítulo está dedicado a presentar y discutir porqué el sistema \mathcal{KT}_4 es un mejor sistema para el objetivo de este trabajo. Se mostraron reglas que se adecuaban mejor y también fueron aclaradas las reglas lógicas y estructurales con las que cuenta. Por último se ofrece una prueba de que el sistema \mathcal{KT}_4 y el sistema \mathcal{IS}_4 son equivalentes y concluye con la tan esperada equivalencia usando todas las definiciones del primer capítulo y el sistema \mathcal{KT}_4 . La prueba está dividida en dos partes. En la primera parte se considera un secuyente y se supone que se tiene una prueba con la deducción natural y con ella se rescata una prueba en el sistema \mathcal{KT}_4 y en la segunda parte se supone que tiene una derivación para un secuyente y con ello se rescata la prueba en deducción natural modal. Para lograr esta equivalencia de forma óptima

se tuvo que echar mano de una noción de prueba y pseudopruera en el estilo Fitch definida como una estructura matemática precisa que captura de manera concisa el razonamiento diagramático usual.

Finalmente en el cuarto capítulo se explora en qué sentido los sistemas de cálculo lambda correspondientes a \mathcal{IS}_4 y \mathcal{KT}_4 , considerados como lenguajes de programación, son equivalentes. Se aclara el significado de cada una de las reglas ahora desde un punto de vista al nivel del cálculo λ y teniendo en mente el cómputo. También se prueban para ambos sistemas propiedades relevantes como el progreso y la preservación de tipos.

5.2. Trabajo a futuro

Finalmente, mencionamos algunas cuestiones para trabajo futuro. Uno de los objetivos iniciales de este proyecto era la formalización en COQ de la equivalencia del sistema \mathcal{IS}_4 y el sistema de deducción natural modal. Esta formalización ya no se llevó a cabo debido a que el estudio detallado de los sistemas lógicos nos tomó más tiempo del previsto debido a la gran cantidad de detalles ausentes en el trabajo de Clouston que hubo que determinar, sin embargo pensando en la formalización en COQ es muy útil haber usado la definición técnica de derivación en \mathcal{DN} pues el razonamiento diagramático no puede implementarse directamente. La búsqueda y diseño de diversos ejemplos nos interesa pues pensamos en el uso práctico de los formalismos propuestos en la verificación y desarrollo de especificaciones y programas que involucran tipos modales.

Otro tema de interés consiste en estudiar a profundidad el cálculo $\lambda_{\mathcal{KT}_4}$ de modo que las restricciones en los teoremas de preservación de tipos y progreso puedan ser eliminados. Esto va a requerir del estudio de distintas reglas de reducción, como la η -reducción o expansión entre los operadores *shut*, *open*, *release* y *enter* las cuales son claras al nivel categórico discutido por Clouston pero no al nivel de semánticas operacionales de lenguajes de programación. Finalmente nos interesa conectar a los sistemas aquí propuestos con otros sistemas para la lógica modal S_4 , en particular con contextos duales estudiados en [7] y [6].

Bibliografía

- [1] Borguis, T., 1994, Coming to terms with modal logic: On the interpretation of modalities in typed lambda calculus, Ph. D. Thesus, Eindhoven University of Technology.
- [2] Clouston, R. (2018). *Fitch-style modal lambda calculi*. In C. Baier & U. Dal Lago (Eds.), *Foundation of software science and computation structures* (pp. 258-275).
- [3] Benjamin C. Pierce, *Types and Programming Languages*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, xxi.
- [4] Ferrari, M., Fiorentini, C. (2015). *Proof- Search in Natural Deduction Calculus for Classical Propositional Logic*. Springer International Publishing Switzerland.
- [5] Fitch, F.B.: *Symbolic logic, an introduction*. Ronald Press Co. (1952).
- [6] L. del Carmen González-Huesca, F. E. Miranda-Perea, and P. S. Linares-Arévalo. *Axiomatic and dual systems for constructive necessity, a formally verified equivalence*. Journal of Applied Non-Classical Logics, 29(3):255-287, 2019.
- [7] F. E. Miranda-Perea, L. del Carmen González Huesca, and P.S. Linares-Arévalo. *On interactive proof-search for constructive search for constructive modal necessity*. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 354:107-127, 2020.
- [8] von Plato, J. (2014). *Elements of logical reasoning*. Cambridge University Press.
- [9] Kavvos, G. A. (2016). *The many worlds of Modal λ - Calculi: I. Curry-Howard for necessity, possibility and time*.
- [10] Limin Jia, David Walker, (2003). *Modal proofs as distributed programs*. 13th European Symposium on Programming.
- [11] Linares Arévalo, P. S. (2015). *Deducción natural en lógica modal: una implementación en COQ*. Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación, IIMAS, UNAM.
- [12] L. Dordal Peter. (2020). *An introduction to computer networks*. Department of computer science. Loyola University Chicago.

-
- [13] Moody Jonathan. (2005). *Logical Mobility and Locality Types*. Carnegie Mellon University. LNCS 3573, pp. 69-84,2005.
 - [14] Pfenning, F., & Davies, R. (2001). *A judgmental reconstruction of modal logic*. Mathematical Structures in Comp. Sci., 11(4), 511-540.
 - [15] Prawitz, D. (2006). *Natural deduction: A proof-theoretical study*. Dover Publications.
 - [16] Van Westrhenen, S.C., Sommerhalder, R, and Tonino, J.F.M., 1993, LOGICA: Een Inleiding met Toepassingen in de Informatica, Schoonhoven: Academic Service.