



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

EXISTENCIA DE RESONANCIAS EN EL MODELO DE PAULI-FIERZ CON  
DIVERGENCIA INFRARROJA CRÍTICA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
DIEGO ALEJANDRO INIESTA MIRANDA

DIRECTOR DE LA TESIS  
MIGUEL ARTURO BALLESTEROS MONTERO  
IIMAS-UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
RENATO CARLOS CALLEJA CASTILLO  
IIMAS-UNAM

FRANCISCO JAVIER TORRES AYALA  
FACULTAD DE CIENCIAS-UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2021.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

---

La investigación que condujo a los resultados de esta tesis contó con diversos apoyos. En muestra de mi profundo agradecimiento, aquí su mención:

Proyecto apoyado por el FORDECYT-PRONACES, PRONACES 429825/2020.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108818.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN101621.

Así mismo, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) la beca otorgada para mis estudios de posgrado.

\*\*\*

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por el extraordinario nivel de educación al que nos da acceso y por ofrecer una gran cantidad de actividades académicas, culturales y deportivas que junto a la comunidad universitaria hacen de la UNAM un lugar próspero para el conocimiento. Agradezco al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas por facilitarme un lugar para realizar mis estudios de posgrado y a su comunidad por hacer de este espacio un ambiente propicio para aprender. Con mucho afecto reconozco la importante labor de la Coordinación del Posgrado en Ciencias Matemáticas y aprecio su apoyo durante estos años.

\*\*\*

De manera muy especial quiero expresar mis agradecimientos,

A mi asesor, el Dr. Miguel Ballesteros, por su papel tan importante en mi formación académica y como persona. Por su paciencia, su comprensión y el apoyo que me ha brindado a lo largo de los últimos años.

A los miembros de mi comité tutor, Dr. Renato Calleja y Dr. Francisco Torres, por su apoyo y sus enseñanzas y consejos.

A los miembros del jurado que evaluó mi trabajo de tesis: Dr. Miguel Ballesteros, Dra. Elena Kaikina, Dr. Luis Silva, Dra. Judith Campos y Dr. Francisco Torres, por sus valiosos comentarios.

A los Profesores: Dr. Volker Bach, Dr. Alessandro Pizzo, Dr. Dirk Deckert y Dr. Miguel Ballesteros, por recibirme en sus grupos de trabajo y por las colaboraciones académicas que estamos realizando.

Al Dr. Dirk Deckert por haberme invitado a Ludwig-Maximilians-Universität (Múnich, Alemania) para hacer una estancia de investigación y por brindarme apoyo económico para realizarla.

A todos los profesores y ayudantes de profesor que me han guiado adecuadamente a lo largo de mi educación.

\*\*\*

Con mucho cariño agradezco a mi familia, a Montserrat y a mis amigos, por todo su amor, su tiempo y su soporte incondicional. Finalmente, quiero agradecer a las personas que ya no están aquí, quienes me brindaron su apoyo, su afecto y que, con sus palabras y acciones, son un ejemplo por seguir en la vida.

# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Herramientas Matemáticas de la Teoría de Campos Cuánticos</b>	<b>5</b>
2.1 Conceptos Básicos de la Teoría de Operadores en Espacios de Hilbert . . . . .	5
2.2 Perturbación de Eigenvalores . . . . .	10
2.3 Producto Tensorial y Suma Directa de Espacios de Hilbert . . . . .	13
2.4 Espacios de Fock y Segunda Cuantización . . . . .	14
<b>3 Resonancias en el Modelo de Pauli-Fierz con divergencia infrarroja crítica</b>	<b>19</b>
3.1 Definición del Modelo y Descripción del Problema . . . . .	19
3.1.1 Definición del Hamiltoniano de Pauli-Fierz . . . . .	19
3.1.2 El Espectro del Hamiltoniano . . . . .	23
3.1.3 El Hamiltoniano de Pauli-Fierz Transformado . . . . .	25
3.2 Resultado Principal y Estrategia de la Prueba . . . . .	27
3.2.1 Método de escalas múltiples . . . . .	28
3.2.2 Resultados Preliminares . . . . .	29
3.2.3 Comparación con el Modelo Regular . . . . .	31
3.2.4 El mapeo de Feshbach-Schur . . . . .	33
3.2.5 Resonancias del Hamiltoniano sin corte infrarrojo . . . . .	34
<b>4 A New Method of Construction of Resonances that applies to Critical Models</b>	<b>35</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

El propósito de esta tesis es estudiar propiedades espectrales de operadores Hamiltonianos que describen la energía de átomos acoplados al campo electromagnético (en segunda cuantización). Específicamente, se estudia la existencia de resonancias en el modelo de Pauli-Fierz con interacciones singulares, también conocido como el *Modelo estándar de la electrodinámica cuántica no relativista*. Dicho modelo describe la interacción entre la luz y la materia, en particular sirve para modelar procesos como la absorción y la emisión de fotones por átomos, moléculas y materia, en general. Los resultados obtenidos en esta investigación son consecuencia de la colaboración con Miguel Ballesteros (IIMAS, UNAM), Volker Bach (Universidad Técnica de Braunschweig, Alemania) y Alessandro Pizzo (Universidad de Roma Tor Vergata, Italia). Recientemente, el artículo en el que se reportan los resultados de la investigación fue aceptado para su publicación en la revista *Journal of Functional Analysis*, bajo el título *A New Method of Construction of Resonances that Applies to Critical Models* (ver [7]).

La teoría de la electrodinámica cuántica es la teoría de la física que describe la dinámica de electrones y fotones. Uno de los modelos matemáticos más exitosos que ha atraído atención en las últimas décadas es la electrodinámica cuántica no relativista (NR-QED) que describe átomos no relativistas que interactúan con un campo de bosones. En modelos de NR-QED con bosones sin masa (fotones) e interacciones singulares, estudiar los estados fundamentales y las resonancias es un problema complicado. El destino de los eigenvalores del Hamiltoniano del átomo después de acoplarse con el campo electromagnético no es fácil de analizar: las características del campo electromagnético y de la interacción implican que el eigenvalor del estado fundamental (en caso de que exista) se encuentra ahora inmerso en el espectro continuo y los eigenvalores de los estados excitados desaparecen del eje real, convirtiéndose en resonancias. Provisionalmente definimos a una resonancia como un eigenvalor de una continuación analítica del operador Hamiltoniano que se encuentra en la cercanía de un eigenvalor correspondiente a un estado excitado. Para la definición precisa de resonancia ver la Sección 3.1.3. Las técnicas empleadas para estudiar eigenvalores aislados, como la teoría de perturbaciones [26, 30], no son aplicables en este caso al menos no directamente y se requieren estrategias más sofisticadas.

En años recientes, los avances en algunas ramas de las matemáticas han permitido el desarrollo de la teoría NR-QED. Nuevos métodos se han implementado para estudiar la teoría espectral, la evolución temporal y la teoría de dispersión

en modelos de la electrodinámica cuántica a bajas energías. En el contexto de la teoría espectral, han prosperado técnicas que sirven para estudiar modelos singulares, entre ellas, se encuentran la renormalización espectral [8, 9, 10] y el método de escalas múltiples [27], el cual es mucho más sencillo. Ambas se han empleado para analizar varios modelos en la presencia de divergencias del tipo infrarroja o ultravioleta, ver por ejemplo [5, 18, 21, 22, 32] y [3, 4, 6, 13, 19]), y para estudiar la conexión entre las resonancias y la teoría de dispersión [14, 15, 16, 17]. En particular, [6] ofrece una prueba de la existencia de resonancias para el modelo de Pauli-Fierz con una regularización infrarroja. Nosotros estudiamos la existencia de resonancias para el modelo de Pauli-Fierz con interacciones singulares, el cual es más complicado, pero de mayor relevancia desde el punto de vista físico y matemático. En [32] se utilizó el método de renormalización espectral para probar resultados similares.

Desde el punto de vista matemático, los sistemas de la mecánica cuántica son descritos por operadores y vectores en un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$ . Cada vector de norma unitaria  $\psi(t)$  en  $\mathcal{H}$  representa un estado físico del sistema en un tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . A cada observable se le asocia un operador auto-adjunto actuando en un subconjunto denso contenido en  $\mathcal{H}$ . El operador auto-adjunto  $H = H^*$  que genera la dinámica es conocido como el Hamiltoniano del sistema y es el operador correspondiente al observable clásico de la energía. La dinámica del sistema, partiendo de un estado inicial  $\psi(0) \in \mathcal{H}$  a otro estado en un tiempo arbitrario  $t > 0$ , está determinada por la ecuación de Schrödinger,

$$\dot{\psi}(t) = -iH\psi(t), \quad (1.1)$$

para todo  $t > 0$ . Esta ecuación es resuelta por  $\psi(t) = e^{-iHt}\psi(0)$ , mostrando que la información de la Ecuación (1.1) está contenida en la descomposición espectral de  $H$ . Si  $\psi(0)$  es un vector propio de  $H$  correspondiente a un valor propio  $E$ , la dinámica deja sin cambios a  $\psi(0)$ , salvo la multiplicación por un factor de fase, es decir,  $\psi(t) = e^{-iEt}\psi(0)$ .

Como la ecuación de Schrödinger sólo multiplica por un factor de fase a los vectores propios de  $H$ , ésta no explica ciertos fenómenos físicos. Uno de ellos es la radiación atómica, fenómeno que se da, por ejemplo, cuando un átomo se encuentra en un estado excitado y que después de un lapso de tiempo decae al estado fundamental emitiendo un fotón. Este proceso no está descrito por la ecuación de Schrödinger, pero se puede analizar con ayuda de las resonancias de  $H$ . Para tratar adecuadamente el problema es necesario recurrir al enfoque de la teoría de campos cuánticos, en la que se puede modelar la interacción entre la materia y el campo electromagnético mediante la absorción y emisión de fotones. Nosotros abordamos el problema de la existencia de resonancias en el modelo de Pauli-Fierz, usando el formalismo matemático de los espacios de Fock, los operadores en segunda cuantización y los operadores de creación y aniquilación.

El contenido de esta tesis está organizado de la siguiente manera:

En el segundo capítulo se presentan algunos de los conceptos y herramientas matemáticas empleadas a lo largo del trabajo. En la Sección 2.1 se muestran los elementos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert y se utilizan para enunciar adecuadamente algunos resultados importantes sobre la perturbación de operadores y la teoría espectral. A continuación, en la Sección 2.2 se introducen algunos conceptos de la teoría de perturbaciones (en el marco de este trabajo), la cual describe el comportamiento de los eigenvalores de un Hamiltoniano libre cuando éste es perturbado. En la sección 2.3 se expone una construcción breve del producto tensorial y suma directa de espacios de Hilbert que nos sirven para definir a los espacios de Fock y a los operadores en segunda cuantización en la Sección 2.4. El contenido de este capítulo se basa principalmente en [2, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 33].

En el tercer capítulo presentamos de manera resumida el contenido de [7]. Utilizando las herramientas del capítulo anterior, en la Sección 3.1 se define detalladamente el modelo de Pauli-Fierz, se describe su espectro y la necesidad de aplicar ciertas transformaciones al operador Hamiltoniano con el objetivo de facilitar su análisis. En la primera parte de la Sección 3.2 se presenta el método de escalas múltiples que es la técnica que permite construir la resonancia y el respectivo estado resonante del modelo mediante un esquema inductivo. Enseguida, se presentan algunos resultados previos, entre los que se encuentra (el resultado que conduce a) la base de inducción del método de escalas múltiples. Posteriormente, se compara el problema aquí estudiado con la versión regular, lo que posibilita identificar las herramientas que permiten obtener las estimaciones clave para realizar el paso inductivo del método de escalas múltiples y concluir la existencia de las resonancias para el caso de la interacción crítica.

En el cuarto capítulo se presenta el artículo [7] en el que se reportan los resultados de la investigación. Finalmente, se incluye una lista de símbolo que proporciona los principales símbolos empleados en la tesis y el lugar donde se encuentra su definición. Consideramos que dicha lista puede ser de utilidad para el lector.



## CAPÍTULO 2

# Herramientas Matemáticas de la Teoría de Campos Cuánticos

---

En este capítulo presentamos parte de la notación y resultados empleados en los capítulos 3 y 4. En la Sección 2.1 introducimos las herramientas básicas de la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Enseguida, en la Sección 2.2 presentamos algunos conceptos de la teoría de perturbaciones que describe el comportamiento de los eigenvalores de un Hamiltoniano libre cuando éste es perturbado. En la Sección 2.3 se expone una construcción breve del producto tensorial y suma directa de espacios de Hilbert que nos sirven para definir a los espacios de Fock y a los operadores en segunda cuantización en la Sección 2.4. El contenido de este capítulo se basa principalmente en [2, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 33].

### 2.1 Conceptos Básicos de la Teoría de Operadores en Espacios de Hilbert

Decimos que un espacio vectorial  $V$  con la norma

$$\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

es un *espacio de Banach* si es completo con respecto a  $\|\cdot\|_V$ . Si, además,  $\mathfrak{h}$  tiene un producto interior (lineal en la segunda entrada)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

y es completo respecto a la norma inducida  $\|\cdot\|_{\mathfrak{h}}^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}$  decimos que  $\mathfrak{h}$  es un *espacio de Hilbert*. Generalmente, omitimos el subíndice referente al espacio en la norma y el producto interior a menos que exista alguna ambigüedad. Un *operador acotado*  $A$  es una transformación lineal definida entre dos espacios de Hilbert,  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , que satisface la desigualdad

$$\|A\psi\|_{\mathfrak{h}_2} \leq C\|\psi\|_{\mathfrak{h}_1}, \tag{2.3}$$

para todo  $\psi \in \mathfrak{h}_1$  y alguna constante  $C \geq 0$ . La condición en (2.3) es equivalente a que el operador  $A$  sea una transformación lineal continua. El valor más chico

de  $C$  es llamada la norma de  $A$ , y se denota por  $\|A\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)}$  o simplemente por  $\|A\|$ . Observamos que

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)} = \sup_{\|\psi\|_{\mathfrak{h}_1}=1} \|A\psi\|_{\mathfrak{h}_2}. \quad (2.4)$$

El conjunto de operadores acotados  $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ , con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)}$ , es un espacio de Banach. En caso de que  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ , escribimos  $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1)$  en vez de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1)$ . Para dos elementos  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  se define el producto  $AB : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  mediante la composición

$$[AB]\psi = A[B\psi], \quad (2.5)$$

para todo  $\psi \in \mathfrak{h}$ . La norma del producto de dos operadores satisface la desigualdad

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \quad (2.6)$$

También existen transformaciones lineales que no son acotadas en el sentido de (2.4). Decimos que una transformación lineal,  $A$ , es un *operador* si

$$A : D(A) \rightarrow \mathfrak{h} \quad (2.7)$$

donde su dominio  $D(A)$  es un subespacio lineal de  $\mathfrak{h}$ . Es importante mencionar que no se ha supuesto que  $A$  sea un operador continuo. Si  $A$  es continuo, puede ser extendido a todo  $\mathfrak{h}$  y  $A$  es la restricción a  $D(A)$  de algún elemento en  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . En este contexto, dados dos operadores  $A$  y  $B$ , decimos que  $B$  es una extensión de  $A$  si se satisface que  $D(A) \subset D(B)$  y  $B\psi = A\psi$ , para todo  $\psi \in D(A)$ .

Nos referimos al operador  $A$ , actuando en  $\mathfrak{h}$ , como *densamente definido* si su dominio  $D(A)$  es denso en  $\mathfrak{h}$ . Para un operador  $A$  densamente definido es posible construir el *operador adjunto*  $A^*$ . Primero definimos el conjunto  $D(A^*)$  formado por los vectores  $\varphi \in \mathfrak{h}$  para los cuales existe  $\eta \in \mathfrak{h}$  tal que

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle,$$

con  $\psi$  un elemento arbitrario de  $D(A)$ . Para cada  $\varphi \in D(A^*)$ , definimos  $A^*\varphi = \eta$ . Se verifica que  $A^*$  es un operador bien definido en  $\mathfrak{h}$ , es decir,  $D(A^*)$  es un subespacio de  $\mathfrak{h}$  y  $A^*$  es una transformación lineal.

Decimos que un operador  $A$  es *cerrado* en  $\mathfrak{h}$  si para cualquier sucesión  $x_n \in D(A)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , las condiciones  $x_n \rightarrow x$  y  $Ax_n \rightarrow y$  cuando  $n \rightarrow \infty$  implican que  $x \in D(A)$  y  $Ax = y$ . Además, decimos que un operador  $A$  es *cerrable* si tiene una extensión cerrada. Todo operador cerrable  $A$  tiene una extensión cerrada que resulta ser la más chica de todas, conocida como la *cerradura* de  $A$ , la cual denotamos por  $\bar{A}$ .

El dominio de los operadores juega un papel muy importante cuando se trata de caracterizar a los operadores no-acotados y a sus propiedades. Las operaciones algebraicas entre operadores no-acotados no son la excepción. Para dos operadores,  $A$  y  $B$ , el dominio de la suma  $A + B : D(A + B) \subset \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  es

$$D(A + B) = D(A) \cap D(B). \quad (2.8)$$

Mientras que el producto  $AB : D(AB) \subset \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  tiene como dominio a

$$D(AB) = \{x \in D(B) \mid Bx \in D(A)\}. \quad (2.9)$$

Para  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en  $\mathfrak{H}$ , decimos que  $B$  está acotado relativamente con respecto de  $A$  (en el sentido de Kato) si  $D(A) \subset D(B)$  y existen  $a, b \geq 0$  que satisfacen

$$\|B\varphi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|, \quad (2.10)$$

para todo  $\varphi \in D(A)$ . El ínfimo de los valores que toma la constante  $a$  se le llama cota relativa de  $B$  con respecto de  $A$ .

**Teorema 2.1.1 (Teorema de Kato-Rellich)** Sean  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en  $\mathfrak{H}$ , con  $A$  cerrado y  $B$  cerrable. Si  $B$  está acotado relativamente con respecto de  $A$  (en el sentido de Kato), con cota relativa  $a \in [0, 1)$ , entonces  $A + B$  es cerrado en  $D(A)$ .

Al resultado anterior se le conoce como el teorema de Kato-Rellich cuando  $A$  es auto-adjunto y  $B$  simétrico, en este caso  $A + B$  es autoadjunto en  $D(A)$ . Si, además, se supone que  $A$  está acotado por debajo, se demuestra que  $A + B$  también lo está. Su demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [26], [29], [33].

Para  $A$ , un operador densamente definido en  $\mathfrak{H}$ , definimos el conjunto resolvente  $\rho(A)$  como el conjunto de los números  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que  $A - \lambda$  es una biyección de  $D(A)$  a  $\mathfrak{H}$  con inversa acotada. El conjunto  $\rho(A)$  es abierto en  $\mathbb{C}$ . Para  $z \in \rho(A)$ , definimos el operador resolvente como  $R_A(z) := (A - z)^{-1}$ . Es de nuestro interés estudiar el complemento del resolvente, conocido como el espectro de  $A$ ,

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \text{ no es invertible}\}. \quad (2.11)$$

Uno de los resultados más importantes de la teoría de operadores en espacios de Hilbert es el teorema espectral, para presentarlo adecuadamente es necesario introducir un par de conceptos. Decimos que un operador acotado  $P$  es una proyección si  $P^2 = P$ . Además, si  $P^* = P$ , entonces a  $P$  se le llama proyección ortogonal.

Para una  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  de un espacio medible  $M$  definimos una *resolución de la identidad* como una función  $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  con las siguientes propiedades:

- (a)  $E(\emptyset) = 0, E(M) = \mathbf{1}_{\mathfrak{h}}$ .
- (b)  $E(\omega)$  es una proyección ortogonal, para todo  $\omega \in \mathcal{B}$ .
- (c)  $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')$ , para  $\omega$  y  $\omega'$  elementos arbitrarios de  $\mathcal{B}$ .
- (d) Si  $\omega \cap \omega' = \emptyset$ , entonces  $E(\omega \cup \omega') = E(\omega) + E(\omega')$ .
- (e) Para  $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}$ , la función  $E_{\varphi, \psi}$ , definida en  $\mathcal{B}$ , como  $E_{\varphi, \psi}(\omega) := \langle \varphi, E(\omega)\psi \rangle$  es una medida (compleja) regular.

Los siguientes teoremas son resultados clásicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert, las respectivas pruebas y generalizaciones se puede encontrar, por ejemplo, en [2], [29], [31].

**Teorema 2.1.2 (Teorema Espectral)** *Para todo operador normal  $A$  definido en  $\mathfrak{h}$  existe una única resolución de la identidad,  $E^A$ , tal que*

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_{\varphi, \psi}^A(\lambda), \quad (2.12)$$

donde  $\lambda$  representa la función identidad sobre  $\sigma(A)$  y  $\psi \in D(A)$  y  $\varphi \in \mathfrak{h}$ . Más aún, para todo conjunto de Borel  $\omega \subset \sigma(A)$  y para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  que conmuta con  $A$  (si  $A$  no es acotado, se entiende como  $AB \subset BA$ ), se cumple que  $E^A(\omega)B = BE^A(\omega)$ .

La resolución de la identidad asociada al operador  $A$  es conocida como la *descomposición espectral* de  $A$ , si la circunstancia no da lugar a ambigüedad se identifica  $E \equiv E^A$ .

**Teorema 2.1.3 (Cálculo Funcional de Borel)** *Sea  $A$  un operador auto-adjunto definido en  $\mathfrak{h}$  y sea  $E$  su descomposición espectral. Entonces, existe un único mapeo de  $L^\infty(E)$ , el conjunto de las funciones complejas medibles y acotadas sobre el espectro de  $A$ , al conjunto de los operadores acotados sobre  $\mathfrak{h}$ ,*

$$\phi_A : L^\infty(E) \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h}), \quad (2.13)$$

definido por la fórmula

$$\langle \varphi, \phi_A(f)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_{\varphi, \psi}(\lambda). \quad (2.14)$$

Dados  $f, g \in L^\infty(E)$  y  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\phi_A$  satisface las siguientes propiedades:

(a)  $\phi_A$  es un  $*$ -homomorfismo de álgebras, es decir,

$$\begin{aligned}\phi_A(fg) &= \phi_A(f)\phi_A(g), & \phi_A(\mu f) &= \mu\phi_A(f), \\ \phi_A(1) &= \mathbf{1}_{\mathfrak{h}}, & \phi_A(\bar{f}) &= \phi_A(f)^*.\end{aligned}$$

(b)  $\phi_A$  es una isometría

$$\|\phi_A(f)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h})} = \|f\|_{\infty} \leq \sup_{z \in \sigma(A)} |f(z)|. \quad (2.15)$$

En particular, si  $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$ , se cumple la igualdad:

$$\|\phi_A(f)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h})} = \sup_{z \in \sigma(A)} |f(z)|.$$

(c) El espectro de  $\phi_A(f)$  es el rango esencial de  $f$ ,

$$\sigma(\phi_A(f)) = \text{Ran}_{\text{ess}}(f). \quad (2.16)$$

(d) Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{\infty}(E)$  converge puntualmente a  $f$ , se tiene que  $\phi_A(f_n)$  converge fuertemente a  $\phi_A(f)$ .

(e) Si  $A\psi = \mu\psi$ , entonces  $\phi_A(f)\psi = f(\mu)\psi$ .

(f) Si  $f \geq 0$ , se cumple que  $\phi_A(f) \geq 0$ .

(g) Si  $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$  y  $\omega_0 = f^{-1}(0)$ , entonces

$$\text{Ker}(\phi_A(f)) = \text{Ran}(E(\omega_0)). \quad (2.17)$$

(h) Un operador  $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  conmuta con toda proyección  $E(\omega)$  si y sólo si conmuta con todo operador  $\phi_A(f)$ .

Es común escribir  $f(A)$  en vez de  $\phi_A(f)$ . En general, a una función medible es posible asignarle un operador cerrado y densamente definido.

**Corolario 2.1.4** Sea  $E$  una resolución de la identidad. A cada función medible,  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , corresponde un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$  y cerrado  $\phi(f)$ .

El operador  $\phi(f)$  está caracterizado por

$$\langle \varphi, \phi(f)\psi \rangle = \int_M f(\lambda) dE_{\varphi, \psi}(\lambda), \quad (2.18)$$

con  $\varphi \in \mathfrak{h}$  y  $\psi \in D(\phi(f)) = D_f$ , donde

$$D_f = \left\{ \psi \in \mathfrak{h} \mid \int_M |f|^2 dE_{\psi, \psi} \right\} < \infty. \quad (2.19)$$

Dadas  $f$  y  $g$  funciones medibles, se satisfacen las propiedades enunciadas a continuación.

(a) Se satisface el teorema de multiplicación en el siguiente sentido:

$$\phi(f)\phi(g) \subset \phi(fg), \quad D(\phi(f)\phi(g)) = D_g \cap D_{fg}.$$

Entonces la igualdad  $\phi(f)\phi(g) = \phi(fg)$  se da si y sólo si  $D_{fg} \subset D_g$ .

(b) Se cumple que

$$\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$$

y

$$\phi(f)\phi(f)^* = \phi(|f|^2) = \phi(f)^*\phi(f).$$

(c) La norma de  $\phi(f)\psi$  está dada por

$$\|\phi(f)\psi\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dE_{\psi, \psi}. \quad (2.20)$$

## 2.2 Perturbación de Eigenvalores

La teoría de perturbaciones de eigenvalores (en el contexto de este trabajo) describe el destino de los eigenvalores de un operador  $A$  cuando es perturbado mediante un operador  $V$ . En otras palabras, si consideramos un eigenvalor aislado  $E_0$  de  $A$  y definimos al operador  $A + \epsilon V$ , con  $|\epsilon|$  un número pequeño, la teoría de perturbaciones estudia la existencia de eigenvalores de  $A + \epsilon V$  cercanos a  $E_0$  y su comportamiento como función de  $\epsilon$ . En general, la teoría de perturbaciones se puede construir para  $n$  eigenvalores no necesariamente simples (ver [26, 30]), nosotros nos restringimos al caso de un eigenvalor simple y aislado. Para introducir la teoría de perturbaciones es necesario recordar algunos conceptos del análisis complejo:

Para una curva cerrada  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ , el índice de  $\Gamma$  respecto a  $z_0$  se define como

$$Ind_{\Gamma}(z_0) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z_0 - z}. \quad (2.21)$$

Nosotros consideramos sólo el caso donde  $\Gamma$  es una curva simple y parametrizada en sentido anti-horario. De esta manera  $Ind_{\Gamma}(z_0) = 1$ , si  $z_0$  está en el interior del conjunto acotado delimitado por  $\Gamma$  y  $Ind_{\Gamma}(z_0) = 0$ , si  $z_0$  está en el exterior de

este conjunto. Para una función analítica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en un subconjunto abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ , se satisface la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z_0 - z} dz, \quad (2.22)$$

donde  $\Gamma \subset \Omega$  y  $z_0 \in \Omega \setminus \Gamma$ . Observamos que si  $z_0$  no está en el interior de  $\Gamma$ , el integrando en la Ecuación 2.22 resulta ser analítico y su integral cero (resultado conocido como Teorema de Cauchy).

Nos interesa extender estos conceptos, cambiando adecuadamente en las expresiones anteriores el número complejo  $z_0$  por un operador  $A$ , para asignar a funciones analíticas cierto tipo de operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ .

Sea  $A$  un operador cerrado tal que su espectro  $\sigma(A)$  se descompone en dos partes no vacías  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , con al menos una de ellas, digamos  $\sigma_1$ , acotada. Suponemos también que  $\text{dist}(\sigma_1, \sigma_2) > 0$  de manera que podemos encontrar un conjunto abierto  $\Omega$  tal que  $\sigma_1 \subset \Omega$  y  $\Omega \cap \sigma_2 = \emptyset$ . Para una función analítica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos

$$\tilde{f}(A) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{A - z} dz, \quad (2.23)$$

donde  $\Gamma \subset \Omega$  es una curva que rodea a  $\sigma_1$  y  $\Gamma \cap \sigma(A) = \emptyset$ .

La expresión en (2.23) define un cálculo funcional que comparte algunas características con el cálculo funcional de Borel (ver 2.1.3). Recordamos que  $R_A(z) := (A - z)^{-1}$ . Nos interesa el caso donde  $f \equiv 1$  en  $\Omega$ , pues el operador

$$P_{A, \sigma_1} := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} R_A(z) dz \quad (2.24)$$

es una proyección, i.e.,  $P_{A, \sigma_1}^2 = P_{A, \sigma_1}$ , que conmuta con  $A$  en  $D(A)$  y que satisface

$$\sigma(AP_{A, \sigma_1}) = \sigma_1, \quad \sigma(A(1 - P_{A, \sigma_1})) = \sigma(A) \setminus \sigma_1.$$

En particular, si  $\sigma_1 = \{z_0\}$  es un eigenvalor simple de  $A$ , i.e., si el rango de  $P_{A, z_0}$  tiene dimensión 1, cualquier  $\psi \in \text{Ran}(P_{A, z_0})$  cumple la relación  $A\psi = z_0\psi$ . Por otro lado, no es difícil ver que para un operador cerrado  $A$ , con  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} \subset \rho(A)$ , el operador

$$P_{A, z_0} := \frac{i}{2\pi} \int_{|z - z_0| = r} R_A(z) dz, \quad (2.25)$$

es una proyección (conocida como proyección de Riez). Se puede probar que si la dimensión del rango de  $P_{A,z_0}$  es 1, el operador  $A$  tiene un eigenvalor simple en el interior de  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ .

Sea  $R$  un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{C}$  y sea  $T(\epsilon)$  un operador cerrado tal que su conjunto resolvente es no vacío para  $\epsilon \in R$ . Decimos que  $T(\epsilon)$  es una familia analítica de tipo  $(A)$  si y sólo si

- El dominio del operador  $T(\epsilon)$  es un conjunto  $D \subset \mathfrak{h}$  que no depende de  $\epsilon$ .
- Para cada  $\psi \in D$ , la función  $T(\epsilon)\psi$  que toma valores en  $\mathfrak{h}$  es analítica respecto a  $\epsilon$ .

El siguiente resultado, conocido como el Teorema de Kato-Rellich (al igual que el Teorema 2.1.1), describe el comportamiento de los eigenvalores simples y aislados de una familia analítica de tipo  $(A)$ .

**Teorema 2.2.1 (Kato-Rellich)** *Sea  $T(\epsilon)$  una familia analítica de tipo  $(A)$  y sea  $E_0$  un eigenvalor simple y aislado de  $T(\epsilon_0)$ . Entonces, para  $\epsilon$  cercana a  $\epsilon_0$ , existe un único punto  $E(\epsilon)$  en el espectro de  $T(\epsilon)$  que está en una vecindad de  $E_0$  y es un eigenvalor simple y aislado de  $T(\epsilon)$  asociado al eigenvector  $\psi(\epsilon)$ . Tanto  $E(\epsilon)$  como  $\psi(\epsilon)$  son funciones analíticas de  $\epsilon$  para  $\epsilon$  cercana a  $\epsilon_0$ .*

Un resultado que es de gran utilidad cuando se estudia la teoría de perturbaciones es la existencia de las series de Neumann.

**Proposición 2.2.2 (Serie de Neumann)** *Sean  $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , con  $A$  invertible y  $B$  es tal que  $\|BA^{-1}\| < 1$ . Entonces  $A + B$  es invertible y su inverso está explícitamente dado por*

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-BA^{-1})^n. \quad (2.26)$$

En nuestro caso, bajo ciertas condiciones, las series de Neumann nos permiten describir al operador  $R_{A+B}(z)$  en términos de  $R_A(z)$  y  $BR_A(z)$ .

## 2.3 Producto Tensorial y Suma Directa de Espacios de Hilbert

En esta sección se construye el producto tensorial de espacios de Hilbert y se presentan algunas de sus características. Sobre el producto tensorial de espacios de Hilbert se define un producto tensorial de operadores. Al final de esta sección se construye la suma directa de espacios de Hilbert y se caracteriza su espectro.

Sean  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  espacios de Hilbert. Para  $\varphi_1 \in \mathfrak{h}_1$  y  $\varphi_2 \in \mathfrak{h}_2$ , denotamos por  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$  a la forma bilineal

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle, \quad (2.27)$$

donde  $(\psi_1, \psi_2) \in \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ . Denotamos por  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  al conjunto

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2} := \left\{ \sum_{j=1}^m \varphi_{1j} \otimes \varphi_{2j} \mid \varphi_{1j} \in \mathfrak{h}_1, \varphi_{2j} \in \mathfrak{h}_2, j \in \{1, \dots, m\} \text{ y } m \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.28)$$

Para  $\varphi \otimes \psi$  y  $\eta \otimes \mu$  en este conjunto definimos el producto interior

$$\langle \varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu \rangle_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2} = \langle \varphi, \eta \rangle \langle \psi, \mu \rangle$$

y lo extendemos por linealidad a  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$ . Definimos el producto tensorial de  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  como la completación de  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  bajo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  y lo denotamos por  $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$ . De manera similar, para una familia (finita) de espacios de Hilbert  $\{\mathfrak{h}_i\}_{i=1}^n$ , se define el producto tensorial  $\bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{h}_i$ . En particular, si  $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , obtenemos el producto tensorial de  $n$  copias de  $\mathfrak{h}$ , denotado por

$$\mathfrak{h}^{(n)} := \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{h}.$$

Para  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , respectivamente, es posible definir un operador en  $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$ . Para  $\varphi \in D(A)$  y  $\psi \in D(B)$  definimos el operador  $A \otimes B$  como

$$(A \otimes B)(\varphi \otimes \psi) = A\varphi \otimes B\psi$$

y lo extendemos por linealidad a

$$D(A) \otimes D(B) := \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \mid \varphi_i \in D(A), \psi_i \in D(B) \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

El producto tensorial de  $A$  y  $B$  es la cerradura del operador  $A \otimes B$  definido en  $D(A) \otimes D(B)$ . Denotamos a la cerradura también por  $A \otimes B$ .

Otra manera de construir un conjunto con estructura de espacio de Hilbert, es mediante la suma directa. Para  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  definimos la suma directa  $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  como el espacio de Hilbert formado por las parejas  $(\psi, \varphi)$  con  $\psi \in \mathfrak{h}_1$  y  $\varphi \in \mathfrak{h}_2$ . El producto interior de  $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  se define como

$$\langle (\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2) \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathfrak{h}_1} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathfrak{h}_2}, \quad (2.29)$$

para  $\psi_i, \varphi_i$  elementos arbitrarios de  $\mathfrak{h}_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .

Para dos operadores  $A_i : D(A_i) \rightarrow \mathfrak{h}_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ , podemos definir la suma directa  $A_1 \oplus A_2 : D(A_1 \oplus A_2) \rightarrow \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  como

$$(A_1 \oplus A_2)(\psi_1 + \psi_2) = A_1\psi_1 + A_2\psi_2, \quad (2.30)$$

con  $\psi_1 \in D(A_1)$  y  $\psi_2 \in D(A_2)$ . Para nosotros es importante construir sumas directas contables tanto de espacios de Hilbert como de operadores. Para una familia de espacios de Hilbert  $\{\mathfrak{h}_n\}_{n=0}^{\infty}$  definimos la suma directa

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_n := \left\{ \psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} \mid \psi_n \in \mathfrak{h}_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|_{\mathfrak{h}_n}^2 < \infty \right\}$$

con el producto interior

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\mathfrak{h}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_n, \varphi_n \rangle_{\mathfrak{h}_n}. \quad (2.31)$$

Para una familia de operadores  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ , donde cada  $A_n$  tiene un dominio denso en  $\mathfrak{h}_n$ , se puede construir una suma directa

$$A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n,$$

con dominio  $D(A) = \{\psi \in \mathfrak{h} \mid \psi_n \in D(A_n), \quad A\psi \in \mathfrak{h}\}$ . El operador  $A$  actúa como

$$A\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\psi_n.$$

## 2.4 Espacios de Fock y Segunda Cuantización

En esta sección presentamos a los espacios de Fock y a los operadores en segunda cuantización. Estos conceptos son la base para definir al Hamiltoniano que describe la energía libre de los fotones y los operadores de creación y aniquilación.

Para un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ , definimos el *espacio de Fock* como la suma directa de  $\mathfrak{h}^{(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ , es decir,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^{(n)},$$

con  $\mathfrak{h}^{(0)} := \mathbb{C}$ . Un elemento arbitrario  $\psi$  del espacio de Fock se puede representar como  $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ , donde  $\psi^{(n)} \in \mathfrak{h}^{(n)}$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ .  $\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{h})$  es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{h})} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle_{\mathfrak{h}^{(n)}}. \quad (2.32)$$

Para describir (únicamente) a los fotones es necesario restringirnos a un subespacio adecuado mediante una proyección. Para  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert separable y  $n \in \mathbb{N}$  definimos al operador de simetrización  $S_n : \mathfrak{h}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{h}^{(n)}$  como

$$S_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} \psi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\tau(n)},$$

donde  $\mathcal{P}_n$  el grupo de permutaciones de  $n$  elementos, y  $S_0$  es la identidad en  $\mathbb{C}$ . El operador de simetrización es una proyección ortogonal, es decir,  $S_n^2 = S_n$  y  $S_n^* = S_n$ . Al rango de  $S_n$  sobre  $\mathfrak{h}^{(n)}$  se le conoce como el producto tensorial simétrico de  $n$  copias de  $\mathfrak{h}$ . Se define al espacio de Fock simétrico sobre  $\mathfrak{h}$  como

$$\mathcal{F}(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathfrak{h}^{(n)}. \quad (2.33)$$

Como ejemplo, si  $\mathfrak{h} = L^2(M)$  es el espacio de las funciones cuadrado integrables en  $M \subset \mathbb{R}^3$  con respecto a la medida de Lebesgue, entonces un elemento  $\psi \in \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  es una sucesión de funciones

$$\psi = \left( \psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots \right),$$

tal que su norma es finita,

$$\|\psi\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{h})}^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M^n} |\psi^{(n)}|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_n < \infty,$$

donde  $\psi^{(n)} \in S_n \otimes_{i=1}^n L^2(M)$ . Empleando el isomorfismo  $\otimes_{i=1}^n L^2(M) \cong L^2(M^n)$ ,  $S_n \mathfrak{h}^{(n)}$  se puede ver como el subespacio de  $L^2(M^n)$  formado por las funciones que permanecen igual bajo cualquier permutación de sus variables.

Definimos al conjunto de partículas finitas  $F_0(\mathfrak{h})$ , como el subconjunto del espacio de Fock simétrico formado por los vectores  $\psi \in \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  con  $\psi^{(n)} = 0$  para todas excepto un número finito de entradas, es decir,

$$F_0(\mathfrak{h}) := \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \mid \exists r \in \mathbb{N} \text{ tal que } \psi^{(k)} = 0, \forall k > r \right\}. \quad (2.34)$$

$F_0(\mathfrak{h})$  es un conjunto denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$  que nos permite definir adecuadamente algunos operadores en el espacio de Fock y algunas de las propiedades de este espacio como es la ley exponencial de los espacios de Fock (ver (2.40)). Un elemento importante de  $F_0(\mathfrak{h})$  es el vacío cuántico:  $\Omega := (1, 0, 0, \dots)$ .

Para  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  espacios de Hilbert separables y  $A$  un operador cerrado de  $\mathfrak{h}_1$  a  $\mathfrak{h}_2$  se define el operador  $\Gamma(A) : \mathcal{F}(\mathfrak{h}_1) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{h}_2)$  de la siguiente manera: Primero denotamos por  $A^{\otimes n} := A \otimes A \otimes \dots \otimes A$  al producto tensorial de  $n$  copias de  $A$  definido en  $\bigotimes_{k=1}^n D(A)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $n = 0$  definimos  $A^{\otimes 0} := \mathbf{1}$ . Se define el operador  $\Gamma(A)$  como la suma directa

$$\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{\otimes n} \quad (2.35)$$

en

$$D_A = \left\{ \psi \in F_0(\mathfrak{h}) \mid \psi^{(n)} \in \bigotimes_{k=1}^n D(A) \text{ para cada } n \geq 1 \right\}. \quad (2.36)$$

El operador  $\Gamma(A)$  es acotado si  $\|A\| \leq 1$ . Además, si  $A$  es un operador unitario también lo es  $\Gamma(A)$ . Para  $\psi \in S_r \bigotimes_{i=1}^r \mathfrak{h}_1$  y  $\varphi \in S_p \bigotimes_{i=1}^p \mathfrak{h}_2$  definimos el operador

$$U : F_0(\mathfrak{h}_1) \otimes F_0(\mathfrak{h}_2) \rightarrow F_0(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2), \quad (2.37)$$

a partir de  $\Gamma(A)$  y de los operadores de inclusión  $j_i : \mathfrak{h}_i \rightarrow \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  (con  $i \in \{1, 2\}$ ), de la siguiente manera

$$U(\psi \otimes \varphi) := \sqrt{\frac{(r+p)!}{r!p!}} \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n [\Gamma(j_1)\psi \otimes \Gamma(j_2)\varphi], \quad (2.38)$$

y se extiende por linealidad a elementos  $\psi \otimes \varphi \in F_0(\mathfrak{h}_1) \otimes F_0(\mathfrak{h}_2)$ . Se define

$$U(\Omega_1 \otimes \Omega_2) = \Omega, \quad (2.39)$$

donde  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega$  son los estados del vacío cuántico en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_1)$ ,  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_2)$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ , respectivamente. El operador  $U$  se extiende a un operador unitario (que denotamos por el mismo símbolo):

$$U : \mathcal{F}(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{h}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2). \quad (2.40)$$

A la relación que define el operador  $U$  entre estos espacios se le conoce como ley exponencial de los espacios de Fock. Retomando el ejemplo de los espacios de Lebesgue, si  $\mathfrak{h}_1 = L^2(M_1)$  y  $\mathfrak{h}_2 = L^2(M_2)$  con  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$  disjuntos  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  — y utilizando que el espacio  $L^2(M_1 \cup M_2)$  es isomorfo a  $L^2(M_1) \oplus L^2(M_2)$  mediante el mapeo  $f \mapsto (f\chi_{M_1}, f\chi_{M_2})$  — se tiene que

$$\mathcal{F}(L^2(M_1 \cup M_2)) \cong \mathcal{F}(L^2(M_1)) \otimes \mathcal{F}(L^2(M_2)). \quad (2.41)$$

Para un operador  $A$  con dominio denso  $D(A)$  en  $\mathfrak{h}$ , definimos

$$A^{(n)} := A \otimes I \otimes \cdots \otimes I + I \otimes A \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes I \otimes \cdots \otimes A,$$

sobre  $\bigotimes_{k=1}^n D(A)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , y  $A^{(0)} := 0$ . Definimos la *segunda cuantización* de  $A$  en  $D_A$  (ver (2.36)) como la cerradura del operador

$$d\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{(n)}, \quad (2.42)$$

y lo denotamos con el mismo símbolo. De manera equivalente, definimos  $d\Gamma(A)$  por su acción en cada entrada de un vector  $\psi \in D_A$  como  $(d\Gamma(A)\psi)^{(n)} = A^{(n)}\psi^{(n)}$ .

Al igual que  $\Gamma(A)$ , el operador  $d\Gamma(A)$  hereda algunas de las características de  $A$ , entre ellas, que su dominio  $D(d\Gamma(A))$  es denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ . Si  $A$  es un operador autoadjunto,  $d\Gamma(A)$  también lo es, etc. Más aún,  $d\Gamma(A)$  y el operador unitario  $U$  definido en la Ecuación (2.40) cumplen la siguiente propiedad: dados dos operadores  $A$  y  $B$  con dominio denso en  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , respectivamente, se cumple que

$$U(d\Gamma(A) + d\Gamma(B)) = d\Gamma(A \oplus B)U, \quad (2.43)$$

donde omitimos el producto tensorial con factores triviales identificando  $d\Gamma(A) \equiv d\Gamma(A) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}(\mathfrak{h}_2)}$  y  $d\Gamma(B) \equiv \mathbf{1}_{\mathcal{F}(\mathfrak{h}_1)} \otimes d\Gamma(B)$ .

Si consideramos, en nuestro ejemplo donde  $\mathfrak{h} = L^2(M)$  con  $M \subset \mathbb{R}^3$ , al operador de multiplicación  $M_\omega : D(M_\omega) \subset L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  por la función medible  $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$ , tenemos que  $M_\omega$  es densamente definido y podemos definir su segunda cuantización como

$$(d\Gamma(\omega)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) := \left( \sum_{i=1}^n \omega(k_i) \right) \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \quad (2.44)$$

donde la evaluación de las componentes de  $\psi \in D(d\Gamma(\omega))$  se entiende que está definida para casi todo punto, pues  $\psi^{(n)} \in L^2(M^n)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Más aún la

ley exponencial de los espacios de Fock (2.41) y la igualdad (2.43) nos permiten escribir

$$U (d\Gamma(\omega_{\chi_{M_1}}) + d\Gamma(\omega_{\chi_{M_2}})) U^{-1} = d\Gamma(\omega_{\chi_{M_1 \cup M_2}}). \quad (2.45)$$

## CAPÍTULO 3

# Resonancias en el Modelo de Pauli-Fierz con divergencia infrarroja crítica

---

En este capítulo presentamos de manera resumida el contenido de [7]. Para mayor claridad de las ideas presentadas durante este capítulo, se presenta detalladamente el modelo que estudiamos.

### 3.1 Definición del Modelo y Descripción del Problema

Antes de presentar el modelo es necesario introducir los siguientes parámetros:  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\theta, \beta \in D_{1/10}$  (con  $D_{1/10} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/10\}$  el disco abierto en el plano complejo de radio  $1/10$  y centrado en  $0$ ), los cuales no son necesarios para definir el modelo de Pauli-Fierz, pero son fundamentales para describir las transformaciones que nos permiten estudiar las resonancias. Por tal motivo, y para evitar definir los elementos del modelo una segunda vez, mostramos desde un inicio la dependencia de los espacios y operadores en  $\alpha, \theta$  y  $\beta$ . El parámetro  $\alpha$  es la constante de acoplamiento y nos sirve para definir una transformación de Pauli-Fierz,  $\theta$  nos da el acceso a las resonancias por medio de una dilatación compleja y  $\beta$  nos permite realizar una transformación que explota el decaimiento exponencial de las eigenfunciones para controlar la variable del átomo  $\mathbf{x}$ . En la Sección 3.2 puntualizamos el uso de estos parámetros, mientras tanto los agrupamos de la siguiente forma:

$$\underline{\alpha} := (\theta, \alpha, \beta). \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Definición del Hamiltoniano de Pauli-Fierz

**El Hamiltoniano del átomo.** El Hamiltoniano del átomo  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$  es un operador cerrado (no necesariamente auto-adjunto) con dominio denso contenido en el espacio de Hilbert del átomo

$$\mathcal{H}_{\text{at}} := L^2(\mathbb{R}^3), \quad (3.2)$$

y está definido por la fórmula

$$H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) := -e^{-2\theta} \Delta + V(\underline{\alpha}). \quad (3.3)$$

El operador  $V(\underline{\alpha})$  es la suma de (múltiplos de)  $V_{\text{pot}}(\theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $V_{\text{PF}}(\theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  y del operador diferencial  $\tilde{V}(\theta, \beta)$ ,

$$V(\underline{\alpha}) := V_{\text{pot}}(\theta) + \alpha^3 V_{\text{PF}}(\theta) + \tilde{V}(\theta, \beta). \quad (3.4)$$

El potencial eléctrico  $V_{\text{pot}}(\theta)$  es un operador de multiplicación en la variable de posición del electrón  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , y  $V_{\text{pot}}(\theta)(\mathbf{x})$  tiende a cero cuando  $|\mathbf{x}|$  tiende a infinito, de manera uniforme en  $\theta \in D_{1/10}$ . Como  $H_{\text{at}}(\theta)$  no es auto-adjunto, a menos que  $\theta$  sea real, suponemos que  $D_{1/10} \ni \theta \mapsto V_{\text{pot}}(\theta)(-\Delta + 1)^{-1} \in \mathcal{B}[L^2(\mathbb{R}^3)]$  es una función analítica (con valores a un espacio de Banach) y que  $V_{\text{pot}}(\theta)(-\Delta + r)^{-1}$  tiende a cero en la norma de operador, cuando  $r \rightarrow \infty$ , de manera uniforme en  $\theta \in D_{1/10}$ . Más aún,

$$V_{\text{pot}}(\theta)^* = V_{\text{pot}}(\bar{\theta}), \quad V_{\text{pot}}(\theta) = u(\Re\theta) V_{\text{pot}}(i\Im\theta) u(\Re\theta)^*,$$

donde, para  $r \in \mathbb{R}$ , el operador  $u(r) : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  es una dilatación unitaria

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) : \quad [u(r)\phi](\mathbf{x}) := e^{3r/2} \phi(e^r \mathbf{x}). \quad (3.5)$$

El potencial efectivo  $V_{\text{PF}}(\theta)$  es generado por la transformación de Pauli-Fierz y se define como

$$V_{\text{PF}}(\theta)(\mathbf{x}) := \sum_{\lambda=1}^2 \frac{e^{-2\theta}}{8(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-2e^{-2\theta} |\mathbf{k}|^2) |\eta(|\mathbf{x}||\mathbf{k}|) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{x}|^2 d^3 k, \quad (3.6)$$

para cualquier  $\theta \in D_{1/10}$ , donde  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_0^+; [0, 1])$  es una función decreciente tal que

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } r \leq 1, \\ 0, & \text{si } r \geq 2, \end{cases} \quad (3.7)$$

y  $\boldsymbol{\epsilon} := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^3$  es una función medible que satisface las relaciones

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \nu) = \delta_{\lambda, \nu}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) = 0, \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k}, \lambda)^* = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda), \quad \boldsymbol{\epsilon}(r\mathbf{k}, \lambda) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda), \quad r > 0, \quad (3.9)$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon}^* := (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3)$  y  $\delta_{\lambda, \nu}$  es el símbolo de Kronecker.

El operador diferencial  $\tilde{V}(\theta, \beta)$  se define como

$$\tilde{V}(\theta, \beta)(\mathbf{x}) := e^{-2\theta}(\Delta - e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} \Delta e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}), \quad (3.10)$$

donde

$$\langle \mathbf{x} \rangle := \sqrt{1 + |\mathbf{x}|^2}. \quad (3.11)$$

Suponemos que el eigenvalor correspondiente al primer estado excitado  $e_1 \equiv e_1(0, 0, 0)$  de  $H_{\text{at}} \equiv H_{\text{at}}(0, 0, 0)$  está aislado y es simple. Definimos

$$\delta_{\text{at}} := \text{dist}(e_1, \sigma(H_{\text{at}}(0, 0, 0)) \setminus \{e_1\}) > 0. \quad (3.12)$$

**El Hamiltoniano de los Fotones.** El espacio de Hilbert de los estados de un fotón con momento  $\mathbf{k}$  restringido en valor absoluto a valores entre  $s$  y  $t$  (con  $0 \leq s < t \leq \infty$ ) se denota por

$$\mathfrak{h}^{s,t} := L^2(\mathcal{K}^{s,t}), \quad \text{con} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{K}^{s,t} := \{(\mathbf{k}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \mid s \leq |\mathbf{k}| < t\}. \quad (3.14)$$

Denotamos por  $k$  a los pares  $k = (\mathbf{k}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$  y definimos

$$|k| \equiv |(\mathbf{k}, \lambda)| := |\mathbf{k}|, \quad (3.15)$$

La integral de una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  se define como

$$\int f(k) dk := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_2} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{k}, \lambda) d^3k. \quad (3.16)$$

El espacio de Fock (simétrico) de los fotones con momento entre  $s$  y  $t$  es la suma directa

$$\mathcal{F}^{s,t} := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_N^{s,t}, \quad \text{con} \quad \mathcal{F}_N^{s,t} := S_N \bigotimes_{i=1}^N \mathfrak{h}^{s,t}, \quad (3.17)$$

donde  $\mathcal{S}_N$  es la proyección en el espacio de las funciones totalmente simétricas y  $\mathcal{F}_N^{s,t}$  es el espacio de Hilbert de  $N$  fotones, para  $N \in \mathbb{N}$ . El subespacio de dimensión uno  $\mathcal{S}_0[\bigotimes_{n=1}^0 \mathfrak{h}^{s,t}] := \mathbb{C} \cdot \Omega^{s,t}$  es generado por el vacío (normalizado) que denotamos por  $\Omega^{s,t}$ . Un elemento  $\psi \in \mathcal{F}^{s,t}$  es una sucesión  $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ , con cada una de sus entradas  $\psi^{(n)} \in \mathcal{F}_N^{s,t}$ . Es útil notar que el isomorfismo  $\mathfrak{h}^{s',t} \cong \mathfrak{h}^{s',s} \oplus \mathfrak{h}^{s,t}$ , con  $s' < s < t$ , da lugar al isomorfismo

$$\forall s' < s < t: \quad \mathcal{F}^{s',t} \cong \mathcal{F}^{s',s} \otimes \mathcal{F}^{s,t} \quad (3.18)$$

de los espacios de Fock correspondientes. Dados dos operadores  $A^{s,t}$  en  $\mathcal{F}^{s,t}$  y  $B^{s',s}$  en  $\mathcal{F}^{s',s}$  tienen una extensión natural al espacio  $\mathcal{F}^{s',t}$  dada por

$$A^{s',t} := \mathbf{1}^{s',s} \otimes A^{s,t} \quad \text{y} \quad B^{s',t} := B^{s',s} \otimes \mathbf{1}^{s,t}, \quad (3.19)$$

respectivamente, notación que usaremos de ahora en adelante sin mencionarlo.

El operador  $\check{H}^{s,t}$  describe la energía libre de los fotones, mapea el estado  $\phi = (\phi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}^{s,t}$  en  $\check{H}^{s,t}(\theta)\phi$ , con  $(\check{H}^{s,t}(\theta)\phi)_0 := 0$  y

$$(\check{H}^{s,t}(\theta)\phi)_n(k_1, \dots, k_n) := e^{-\theta}(|k_1| + \dots + |k_n|) \phi_j(k_1, \dots, k_n), \quad (3.20)$$

para  $n \geq 1$  y cualquier valor de  $\theta \in D_{1/10}$ .

**El Hamiltoniano del Sistema con Interacción.** Definimos el espacio de Hilbert de los estados (puros) del sistema formado por el átomo y los fotones con momento restringido a valores  $s \leq |k| < t$  como

$$\mathcal{H}^{s,t} := \mathcal{H}_{\text{at}} \otimes \mathcal{F}^{s,t} \cong L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}^{s,t}), \quad (3.21)$$

donde el espacio  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}^{s,t})$  es llamado la representación de Schrödinger de  $\mathcal{H}^{s,t}$ . Los valores  $s = 0$  y  $t = \infty$  corresponden a  $\mathcal{K}^{0,\infty} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$  y  $\mathfrak{h}^{0,\infty} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ , de tal manera que  $\mathcal{F}^{0,\infty}$  es el espacio de Fock definido a partir del espacio de Hilbert de un fotón  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  sin restricciones en el momento. En este espacio, el Hamiltoniano libre (dilatado) que representa la energía del sistema sin interacción es el operador

$$H_0^{s,t}(\underline{\alpha}) := H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) + \check{H}^{s,t}(\theta) \equiv H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{at}}} \otimes \check{H}^{s,t}(\theta). \quad (3.22)$$

No es difícil ver que  $H_0^{s,t}(\underline{\alpha})$  es un operador cerrado en el dominio de

$$H_0^{s,t}(\underline{0}) = (-\Delta + V_{\text{pot}}(0)) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} + \check{H}^{s,t}(0), \quad (3.23)$$

donde  $\underline{0} := (0, 0, 0)$ .

En la representación de Schrödinger, el Hamiltoniano (dilatado) del sistema acoplado es un operador de Schrödinger con un potencial vectorial magnético en segunda cuantización. Para introducir adecuadamente este potencial es necesario definir la función de acoplamiento y los operadores de creación y aniquilación. La función de acoplamiento (dilatada)  $\mathbf{G}^{s,t}(\theta) : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{K}^{s,t} \rightarrow \mathbb{C}^3$  está dada por

$$\mathbf{G}^{s,t}(\theta)[\mathbf{x}, k] := \frac{\alpha^{3/2}}{4(\pi)^{3/2}} \frac{e^{-\theta - \mu\theta} \exp(-e^{-2\theta}|k|^2)}{|k|^{1/2 - \mu}} e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\epsilon}(k), \quad (3.24)$$

donde  $\alpha \sim 1/137$  es la constante de estructura fina. Nosotros consideramos a  $\alpha \in [0, 1]$  como un parámetro pequeño. Cuando  $s > 0$ , el parámetro  $s$  corresponde a un corte infrarrojo. El término  $\exp(-e^{-2\theta}|k|^2)$ , juega el papel de un corte ultravioleta. Mientras que  $\mu$  es un parámetro de regularización infrarroja; en [6] se estudia el caso  $\mu \in (0, 1)$ , nosotros analizamos el caso crítico (y físicamente relevante)  $\mu = 0$  y seguimos considerándolo en la notación para facilitar la comparación con [6].

Para definir apropiadamente los operadores de creación y aniquilación en el espacio  $\mathcal{H}^{s,t}$  es necesario introducirlos primero en el espacio  $\mathcal{F}^{s,t}$ : Dado un estado de  $N$  fotones  $\psi \in \mathcal{F}_N^{s,t}$  y  $f \in \mathfrak{h}^{s,t}$  definimos el operador de creación  $a^*(f)$  como

$$a^*(f)\psi := \sqrt{N+1} \mathcal{S}_{N+1} f \otimes \psi, \quad (3.25)$$

con  $a^*(f)\psi$  elemento del espacio  $\mathcal{F}_{N+1}^{s,t}$ , el espacio de los estados de  $N+1$  fotones. Por linealidad extendemos a  $a^*(f)$  y tomamos su cerradura para definir el operador de creación  $a^*(f)$  en (un dominio adecuado contenido en)  $\mathcal{F}^{s,t}$ . El operador de aniquilación  $a(f)$  se define como el adjunto de  $a^*(f)$ . Los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[a^*(f), a^*(g)] = [a(f), a(g)] = 0 \quad \text{y} \quad [a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle, \quad (3.26)$$

donde  $[\cdot, \cdot]$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotan el conmutador y el producto escalar, respectivamente. Usando el isomorfismo en (3.21) podemos extender las definiciones de los operadores de creación y aniquilación al espacio del sistema acoplado. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{K}^{s,t} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f_x(\cdot) := f(x, \cdot)$  pertenece a  $\mathfrak{h}^{s,t}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Definimos al operador de creación en  $\mathcal{H}^{s,t}$  como

$$[a^*(f)\psi](x) := a^*(f_x)\psi(x), \quad (3.27)$$

donde  $\psi$  es un elemento de un dominio adecuado contenido en  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}^{s,t})$ . De manera similar, se extiende el operador de aniquilación  $a(f)$  al espacio  $\mathcal{H}^{s,t}$ . El potencial vectorial magnético en segunda cuantización es el operador

$$\mathbf{A}^{s,t}(\theta) := a^*(\mathbf{G}^{s,t}(\theta)) + a(\mathbf{G}^{s,t}(\bar{\theta})). \quad (3.28)$$

La dinámica del sistema acoplado está generada por el Hamiltoniano

$$H \equiv H^{0,\infty}(0, 0, 0) := (-i\nabla + A^{0,\infty}(0))^2 - V_{\text{pot}}(0) + \check{H}^{0,\infty}(0). \quad (3.29)$$

### 3.1.2 El Espectro del Hamiltoniano

Como mencionamos anteriormente, suponemos que el potencial  $V_{\text{pot}}(0)$  es una función analítica de  $\theta$  y que  $V_{\text{pot}}(0)$  es un operador relativamente compacto con

respecto a  $-\Delta$ , el operador de la energía libre del átomo. Esto implica que el espectro esencial  $\sigma_{ess}(H_{at}) = \mathbb{R}_0^+$  de  $H_{at} := -\Delta + V_{\text{pot}}(0)$  es la parte positiva del eje real y que el espectro discreto  $\sigma_{disc}(H_{at}) = \{e_i\}_{i=0}^M \subset \mathbb{R}_0^+$  se encuentra en el eje negativo, con  $M \in \mathbb{N}$  o  $M = \infty$  y  $e_0 < e_1 < \dots < e_M < 0$ . Suponemos que  $M \geq 1$ , pues de lo contrario no habría eigenvalor alguno que se convierta en una resonancia. Dado que las perturbaciones no sólo desplazan a los eigenvalores sino que también exhiben sus degeneraciones, suponemos también que  $e_1$  es simple. El espectro del Hamiltoniano libre  $H_0 \equiv H_0^{0,\infty}(0)$  es el intervalo  $[e_0, \infty)$ , ver (3.23). Los puntos  $\{e_0, e_1, \dots, e_M\}$  siguen siendo eigenvalores de  $H_0$ , pero ahora están inmersos en el continuo debido a que el espectro  $\sigma(\tilde{H}^{0,\infty}) = \mathbb{R}_0^+$  del operador  $\tilde{H}^{0,\infty}$  es el eje positivo. Se espera que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ , el eigenvalor  $e_i$  sea inestable bajo la perturbación dada por el acoplamiento entre el átomo y el campo electromagnético, i.e, el Hamiltoniano del sistema acoplado  $H^{0,\infty}$  no tiene eigenvalores (reales) cerca de  $e_i$ .

Recientemente, se han establecido resultados rigurosos en esta dirección algunos de los cuales mencionamos brevemente: Un primer resultado importante es que el Hamiltoniano  $H$  es auto-adjunto y acotado por debajo (ver [21, 23]). La energía del estado fundamental

$$E_{gs} = \inf \sigma(H) \quad (3.30)$$

es un eigenvalor simple [20]. El hecho de que  $E_{gs}$  sea simple es una consecuencia de reemplazar al electrón por una partícula sin espín en el modelo. El intervalo  $[E_{gs}, \infty)$  es el espectro esencial de  $H$ . Más aún, utilizando diversas técnicas se ha demostrado que los eigenvalores  $e_i$  son inestables para  $i \geq 1$  (ver por ejemplo [12]). En [6] se demostró, utilizando el método de escalas múltiples e imponiendo una regularización infrarroja, que  $e_i$  se desplaza hacia el plano inferior complejo  $\mathbb{C}^-$ . En la ausencia de una regularización infrarroja, la perturbación del eigenvalor  $e_i$  de  $H_0$  -como consecuencia de la interacción entre el átomo y el campo electromagnético- es un problema difícil de estudiar desde el punto de vista matemático. Esto se debe, por un lado, al hecho de que  $e_i$  no está aislado del resto del espectro de  $H_0$  y, por otro lado, a que la función de acoplamiento que modela la interacción entre el átomo y el campo electromagnético tiene una singularidad infrarroja  $|k|^{-1/2}$  en  $k = 0$ .

Nosotros estudiamos la existencia de la resonancia, asociada al primer eigenvalor excitado del átomo  $e_1$ , en el modelo de Pauli-Fierz en el caso de la singularidad infrarroja  $|k|^{-1/2}$  en  $k = 0$ . Por conveniencia (de notación) se estudia la resonancia correspondiente a  $e_1$ , pero los argumentos utilizados son igualmente válidos para  $e_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, M$ .

### 3.1.3 El Hamiltoniano de Pauli-Fierz Transformado

Las características del problema no permiten que el operador  $H$  pueda ser tratado directamente, pero es posible estudiar el Hamiltoniano  $H^{0,\infty}(0, \alpha, 0)$ , que es unitariamente equivalente a  $H$ . Para describir adecuadamente el nuevo Hamiltoniano necesitamos implementar una transformación de Pauli-Fierz seguida de una dilatación compleja, y de una transformación que explota el decaimiento exponencial de las eigenfunciones para controlar la variable del átomo  $\mathbf{x}$ .

**Transformación de Pauli-Fierz** La Transformación de Pauli-Fierz se realiza mediante el operador  $\exp[i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0, \alpha, 0)]$ , donde

$$\lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) := a^* \left( \eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x} \right) + a \left( \eta(|\mathbf{x}||k|) e^{\bar{\theta}} \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}) \cdot \mathbf{x} \right), \quad (3.31)$$

$\mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha})[\mathbf{x}, k] := \mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})[0, k]$  y  $(\beta, \alpha, \theta) := (\beta, \alpha, \bar{\theta})$ . También definimos

$$\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) := \mathbf{A}^{s,t}(\underline{\alpha}) - e^{-\theta} \nabla_x \lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}), \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) &:= a^* \left( i e^{-\theta} |k| \eta(|\mathbf{x}||k|) \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x} \right) \\ &\quad + a \left( i e^{-\bar{\theta}} |k| \eta(|\mathbf{x}||k|) \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}) \cdot \mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aplicando esta transformación obtenemos el Hamiltoniano

$$H^{0,\infty}(0, \alpha, 0) := \exp[-i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0, \alpha, 0)] H \exp[i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0, \alpha, 0)]. \quad (3.34)$$

El generador de la transformación se escoge de tal manera que anula la parte más singular de  $\mathbf{A}^{0,\infty}(0)$ . Es importante notar que el potencial magnético transformado se puede escribir como

$$\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) := a^* \left( \mathbf{G}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \right) + a \left( \mathbf{G}_{\text{PF}}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}) \right), \quad (3.35)$$

con

$$\mathbf{G}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})[\mathbf{x}, k] := \mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})[\mathbf{x}, k] - \nabla_x (\eta(|\mathbf{x}||k|) \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x}). \quad (3.36)$$

**Dilatación Compleja** Siguiendo a [1, 25], definimos a una resonancia como un eigenvalor del operador  $H^{0,\infty}(\theta, \alpha, 0)$  que es una dilatación compleja de  $H^{0,\infty}(0, \alpha, 0)$ . Para  $\theta \in \mathbb{R}$ , se define la dilatación  $(\mathbf{x}, k) \mapsto (e^\theta \mathbf{x}, e^{-\theta} k)$  que cambia la escala en la variable de posición del átomo y en la variable de momento de los fotones. La dilatación se realiza mediante un operador unitario

$U(\theta) \in \mathcal{B}[\mathcal{H}^{0,\infty}]$  que cumple  $U(-\theta) = U(\theta)^*$ . Bajo la acción de  $U(\theta)$  el operador  $H^{0,\infty}(0, \alpha, 0)$  se transforma en

$$H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0) := U(\theta) H^{0,\infty}(0, \alpha, 0) U(-\theta), \quad (3.37)$$

donde  $\underline{\alpha}_0 := (\theta, \alpha, 0)$ . Se observa que  $\theta \mapsto H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  define una familia de operadores analíticos de tipo A (en el sentido de Kato) en una vecindad del cero en el plano complejo, i.e., la función

$$\theta \mapsto H^{0,\infty}(\theta, \alpha, 0)[H^{0,\infty}(0, \alpha, 0) + i]^{-1} \quad (3.38)$$

que toma valores en  $\mathcal{B}[\mathcal{H}^{0,\infty}]$  es analítica en un dominio  $\mathcal{D}_\theta \subset \mathbb{C}$ . Nosotros tomamos al conjunto  $\mathcal{D}_\theta$  como el disco de radio  $\frac{1}{10}$  centrado en el origen,  $D_{1/10} \subseteq \mathbb{C}$ . Es importante destacar que  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  no es auto-adjunto en general a menos que  $\theta \in \mathbb{R}$ . Después de establecer que  $\theta \mapsto H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  es una función analítica en  $D_{1/10}$ , escogemos  $\theta := i\nu$  fijo, con  $\nu$  un número positivo que está en  $D_{1/10}$ .

**Decaimiento exponencial** La transformación de Pauli-Fierz produce una regularización en  $k = 0$  para la interacción, pero el comportamiento para grandes valores de  $\mathbf{x}$  empeora. Para controlar este comportamiento empleamos el decaimiento exponencial de los eigenestados del átomo  $\varphi_{\text{at},j} \in \mathcal{H}_{\text{at}}$ . Específicamente, usamos que  $\|e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle} \varphi_{\text{at},j}\|_{\mathcal{H}_{\text{at}}} < \infty$  es acotado cuando  $\beta > 0$  es menor que la tasa de decaimiento exponencial. Conjugamos al Hamiltoniano  $H^{0,\infty}(\theta, \alpha, 0)$  con  $e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}$ . En este caso, escogemos  $\beta = i\tau$  con  $\tau \in \mathbb{R}$  para obtener el operador unitariamente equivalente

$$H^{0,\infty}(\theta, \alpha, i\tau) := e^{-i\tau\langle \mathbf{x} \rangle} H^{0,\infty}(\theta, \alpha, 0) e^{i\tau\langle \mathbf{x} \rangle}. \quad (3.39)$$

De manera semejante a la dilatación por  $\theta$ , observamos que (3.39) define una familia analítica con respecto a  $\tau$  en una vecindad del cero (que tomamos  $D_{1/10}$  por conveniencia). Extendemos a  $H^{0,\infty}(\theta, \alpha, i\tau)$  a valores puramente imaginarios de  $\tau$ , i.e., a valores reales de  $\beta = i\tau \in \mathbb{R}$ .

Al aplicar las transformaciones obtenemos el operador

$$H^{0,\infty}(\theta, \alpha, \beta) := e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} U(\theta) e^{-i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0,\alpha,0)} H_\alpha e^{i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0,\alpha,0)} U(-\theta) e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}. \quad (3.40)$$

Es importante notar que el lado derecho de la igualdad en (3.40) es una composición de operadores no-acotados que sólo tiene sentido para valores reales de  $\theta$  y puramente imaginarios de  $\beta$ , pero el lado izquierdo de la igualdad se puede extender a valores complejos de  $\theta$  y  $\beta$  en una vecindad (pequeña) de 0 usando la expresión (3.41), que se define a continuación.

**Corte Infrarrojo** Restringimos al Hamiltoniano en (3.40) al espacio  $\mathcal{H}^{s,t}$ , con  $0 < s < t < \infty$  y desarrollando las transformaciones obtenemos

$$\begin{aligned} H^{s,t}(\underline{\alpha}) &:= \left( e^{-\theta \frac{1}{i}} \nabla_x - \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \right)^2 + b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + V(\underline{\alpha}) + e^{-\theta} \check{H}^{s,t} \\ &\quad + ie^{-\theta} \beta (\nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \nabla \langle \mathbf{x} \rangle) \\ &= H_0^{s,t}(\underline{\alpha}) + W^{s,t}(\underline{\alpha}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde  $H_0^{s,t}(\underline{\alpha})$  es el Hamiltoniano libre definido en (3.22) y

$$\begin{aligned} W^{s,t}(\underline{\alpha}) &:= ie^{-\theta} \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \nabla_x + ie^{-\theta} \nabla_x \cdot \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + [\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})]^2 + b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \\ &\quad + ie^{-\theta} \beta (\nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle) \end{aligned} \quad (3.42)$$

es la interacción.

Se puede observar de (3.32) y (3.41) que la transformación de Pauli-Fierz regulariza significativamente el comportamiento infrarrojo. Por ejemplo, el término  $b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})$  contiene el término  $|k| \mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})$  en lugar de  $\mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})$  que está presente en el potencial magnético  $\mathbf{A}^{s,t}(\theta)$ . Así, la nueva interacción tiene un factor de regularización  $|k|$ , i.e., la función de acoplamiento va como  $|k|^{1/2}$  cuando  $|k| \rightarrow 0$ , ver (3.24). Sin embargo, hay un precio a pagar por esta regularización: la presencia del factor  $\mathbf{x}$  en la interacción. Aunque, en conjunto el término  $\eta(|\mathbf{x}||k|)|k|\mathbf{x}$  está acotado, no podemos usar el factor de regularización  $|k|$  sin perder el control del factor no-acotado  $\mathbf{x}$ . Para solucionar este problema implementamos la conjugación con el operador  $e^{-\beta \langle \mathbf{x} \rangle}$ . Esta transformación y la restricción de los operadores a un espacio de eigenvectores exponencialmente acotados, la cual realizamos mediante el mapeo de Feshbach-Schur, nos permite cambiar  $\mathbf{x}$  por  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-1} \mathbf{x}$  (a grandes rasgos). En consecuencia el modelo se comporta como si tuviéramos una función de acoplamiento que va como  $|k|^{1/2}$  en lugar de  $|k|^{-1/2}$  en (3.24).

## 3.2 Resultado Principal y Estrategia de la Prueba

Nuestro principal propósito es la construcción de las resonancias  $E^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  del operador  $H^{s,t}(\underline{\alpha}_0)$  en el caso  $s = 0$  y  $t = \infty$ , con  $\nu, \alpha > 0$  cercanos a cero. El parámetro  $\beta$  es sólo una herramienta matemática que se usa durante esta construcción. Obtenemos las propiedades buscadas de  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  a partir de las propiedades de  $(H^{s,\infty}(\underline{\alpha}_0))_{s>0}$  en el límite  $s \rightarrow 0$ , mediante el método de escalas múltiples.

**Teorema 3.2.1** Sean  $\theta = i\nu$ ,  $\kappa > 6$  y  $\ell > 9$ . Si  $\nu > 0$  y  $\alpha^{3/2}/|\sin(\nu)|^{\kappa\ell}$  son suficientemente pequeños,  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  tiene una resonancia  $E$  (en una vecindad de  $e_1$ ) y una proyección asociada  $P$ , cuyo rango consiste de los eigenvectores asociados a  $E$ .

### 3.2.1 Método de escalas múltiples

Tomamos una sucesión decreciente de números  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ , donde cada  $\sigma_n := \mathfrak{b}^n \sigma_0$  (con  $0 < \mathfrak{b} < 1$  y  $\sigma_0 > 0$ ) representa un corte infrarrojo y  $\sigma_n \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Denotamos por  $\overset{n}{H} := H^{\sigma_n, \infty}(\underline{\alpha}_0)$  al Hamiltoniano con la restricción  $|k| \geq \sigma_n$ . Gracias a la presencia del corte infrarrojo podemos utilizar la teoría de perturbaciones para construir un eigenvalor (aislado)  $E_0$  de  $\overset{0}{H}$  en una vecindad de  $e_1$ . Se puede demostrar la existencia de  $E_0$  para valores pequeños de  $\alpha$ . Los valores admisibles de la constante de acoplamiento están sujetos al valor del corte infrarrojo, la magnitud de  $\alpha$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por esta razón no es posible construir los eigenvalores de  $\overset{n}{H}$  de la misma manera en que se construye  $E_0$ . La forma en que superamos este obstáculo es utilizando el siguiente esquema inductivo:

Recordamos que  $\theta = i\nu$ , con  $\nu > 0$  y definimos el rectángulo  $R_\nu := \left[ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] - i\left[0, \frac{1}{2} \sin(\nu)\right] \subseteq \mathbb{C}$ . Para  $s > 0$ , definimos el subconjunto

$$\mathcal{E}^s(i\nu) := e_1 + sR_\nu - e^{-i\nu} \mathbb{R}_0^+ = \{e_1 + s\zeta - e^{-i\nu} r \mid \zeta \in R_\nu, r \geq 0\}, \quad (3.43)$$

del plano complejo. Construimos de manera inductiva una sucesión  $(E_m)_{m=-1}^\infty$  de números complejos, una sucesión de  $(\mathcal{E}_m)_{m=0}^\infty$  subconjuntos del plan complejo y una sucesión de proyecciones  $(P_m)_{m=-1}^\infty$  que satisfacen las propiedades  $\mathbf{\Pi}(m)$  abajo descritas. Por conveniencia fijamos  $E_{-1} := E_0$ ,  $P_{-1} := P_0$ , y  $\sigma_{-1} := \sigma_0$ . El esquema utilizado requiere que en el paso inductivo se construyan simultáneamente el eigenvalor  $E_n$ , la proyección  $P_n$  al espacio propio asociado a  $E_n$  y el subconjunto del plano complejo  $\mathcal{E}_n$ . Para  $m \in \mathbb{N}_0$ , las hipótesis de inducción  $\mathbf{\Pi}(m)$  están determinadas por las siguientes cuatro propiedades:

$\mathbf{\Pi}_1(m)$  Para  $m \geq 0$ ,  $E_m$  es un eigenvalor simple de  $\overset{m}{H}$  y

$$|E_m - E_{m-1}| \leq \alpha^{3/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sigma_{m-1}. \quad (3.44)$$

$\mathbf{\Pi}_2(m)$   $E_m$  es el único punto en el espectro de  $\overset{m}{H}$  contenido en

$$\mathcal{E}_m := \mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu) \setminus \left\{ z \mid \Im z < \Im E_m - \frac{1}{4} \sin(\nu) \sigma_m \right\}, \quad (3.45)$$

i.e.,  $\sigma[\overset{m}{H}] \cap \mathcal{E}_m = \{E_m\}$ .

$\Pi_3(m)$ : Definimos la proyección al espacio propio asociado a  $E_m$  como

$$P_m = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_m}^m R(z) dz, \quad (3.46)$$

donde  $R(z) := (\overline{H} - z)^{-1}$  y  $\gamma_m : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{E}_m \subset \mathbb{C}$  es la parametrización

$$\gamma_m(r) := E_m + \frac{1}{4} \sin(\nu) \sigma_m e^{ir} \quad (3.47)$$

del círculo de radio  $\frac{1}{4} \sin(\nu) \sigma_m$  centrado en  $E_m$ . Esta proyección satisface

$$\|P_m - P_{m-1} \otimes P_{\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}}\| \leq \frac{\alpha^{3/2}}{\mathfrak{b}} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}. \quad (3.48)$$

donde  $P_{\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}}$  es la proyección al subespacio generado por el vector (del vacío cuántico)  $\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}} \in \mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}$ , usando que  $\mathcal{H}^{\sigma_m} \cong \mathcal{H}^{\sigma_{m-1}} \otimes \mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}$  (en el caso  $m = 0$  se omite el producto tensorial).

$\Pi_4(m)$  Para  $z \in \mathcal{E}_m$  se satisface la siguiente estimación

$$\|R(z) \overline{P}_m\| \leq \frac{\mathfrak{C}(\nu)^{m+1}}{\sigma_m + |z - E_m|}, \quad (3.49)$$

donde  $\overline{P}_m := 1_{\mathcal{H}^{\sigma_m}} - P_m$  y  $\mathfrak{C}(\nu) > 1$ .

Las estimaciones (3.44) y (3.48) nos permiten ocupar series geométricas para obtener

$$|E_m| \leq |E_0| + 2\alpha^{3/2}, \quad (3.50)$$

$$\|P_m\| \leq \|P_0\| + C \alpha^{3/2} \mathfrak{b}^{-1}. \quad (3.51)$$

### 3.2.2 Resultados Preliminares

A continuación mostramos algunos resultados básicos del modelo que estamos estudiando. La mayoría de las demostraciones son estándar y se pueden encontrar, por ejemplo, en [11]. En la primera proposición, resumimos algunos resultados sobre  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$ . Su demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [30].

**Proposición 3.2.2** *Para valores suficientemente chicos de  $|\theta|$ ,  $\alpha$  y  $|\beta|$ , el eigenvalor del estado fundamental  $e_0(\underline{\alpha})$  y el eigenvalor del primer estado excitado  $e_1(\underline{\alpha})$  son los únicos puntos del espectro de  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$  con parte real menor que  $e_1 + \frac{99}{100} \delta_{\text{at}} < 0$  [ver (3.12)]. Si denotamos por*

$$P_{\text{at},0}(\underline{\alpha}) \quad \text{y} \quad P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \quad (3.52)$$

a las proyecciones de Riesz [ver (2.25)] sobre el espacio propio asociado a  $e_0(\underline{\alpha}) \equiv e_0(\alpha)$  y  $e_1(\underline{\alpha}) \equiv e_1(\alpha)$ , respectivamente, se satisfacen las siguientes estimaciones

$$|e_0(\underline{\alpha}) - e_0|, |e_1(\underline{\alpha}) - e_1| \leq \frac{1}{100} \delta_{\text{at}}, \quad (3.53)$$

$$\|P_{\text{at},0}(\underline{\alpha}) - P_{\text{at},0}(\underline{0})\|, \|P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) - P_{\text{at},1}(\underline{0})\| \leq \frac{1}{100}. \quad (3.54)$$

Más aún, el rango de  $P_{\text{at},1}(\theta, \alpha, 0) = P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}_0)$  está contenido en el dominio de  $e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}$ , y existe una constante  $C$  tal que

$$\|(1 + |\mathbf{x}|^2) P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}_0)\| + \|e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle} P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}_0)\| \leq C, \quad (3.55)$$

de manera uniforme en  $\theta, \alpha \rightarrow 0$ .

A continuación mencionamos algunas propiedades del Hamiltoniano de Pauli-Fierz (transformado). Primero, enunciaremos un resultado estándar cuya demostración se puede encontrar, por ejemplo, en el Lema 1 de [21].

**Lema 3.2.3** Sean  $g_1 \equiv g_1(\mathbf{x}; k), g_2 \equiv g_2(\mathbf{x}; k) \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathfrak{h}^{s,t})$  funciones acotadas de manera uniforme y supongamos que  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \| |k|^{-1/2} g_i \|_{\mathfrak{h}^{s,t}} < \infty$  [ver (3.13)-(3.16)], donde  $i = 1, 2$ . Para cualquier  $\rho > 0$ ,  $\phi \in \text{dom}[(\check{H}^{s,t})^{1/2}]$ , y  $\psi \in \text{dom}[\check{H}^{s,t}]$ , se satisface

$$\|a^\#(g_i) \phi\|_{\mathcal{H}^{s,t}} \leq \|g_i\|_\rho \|(\check{H}^{s,t} + \rho)^{1/2} \phi\|_{\mathcal{H}^{s,t}}, \quad (3.56)$$

$$\|a^\#(g_2) a^\#(g_1) \psi\|_{\mathcal{H}^{s,t}} \leq \|g_2\|_\rho \|g_1\|_\rho \|(\check{H}^{s,t} + \rho) \psi\|_{\mathcal{H}^{s,t}}, \quad (3.57)$$

donde

$$\|g_i\|_\rho := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \{\rho^{-1/2} \|g_i(\mathbf{x})\|_{\mathfrak{h}^{s,t}}\} + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \{\|\omega^{-1/2} g_i(\mathbf{x})\|_{\mathfrak{h}^{s,t}}\} \quad (3.58)$$

y  $\omega(k) := |k|$ .

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Lema 3.2.3.

**Proposición 3.2.4** Sean  $0 \leq s' \leq s \leq t \leq \infty$  y  $\alpha$  y  $|\beta|$  suficientemente chicos. Entonces existe una constante  $C$  tal que para  $\rho > 0$  y  $\phi$  en el dominio de  $H_0^{s',t}(\tilde{\underline{\alpha}})$ , con  $\tilde{\underline{\alpha}} := (\tilde{\theta}, \alpha, \beta)$ , se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|W^{s,t}(\underline{\alpha}) \phi\|_{\mathcal{H}^{s',t}} &\leq C \left( (1 + \rho^{-1/2}) \alpha^{3/2} + (1 + \rho^{-1/2})^2 \alpha^3 \right) \\ &\quad \cdot \left( \|(H_0^{s',t}(\tilde{\underline{\alpha}}) + \rho) \phi\|_{\mathcal{H}^{s',t}} + \|\phi\|_{\mathcal{H}^{s',t}} \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

para  $|\theta|, |\tilde{\theta}| > 0$  suficientemente chicos.

Para  $s' = s$ , (3.59) y el Teorema de Kato-Rellich (ver Teorema 2.1.1) implican que  $H^{s,t}(\underline{\alpha})$  es un operador cerrado en el dominio de  $H_0^{s,t}(\underline{\alpha})$  [ver (3.22)].

En la siguiente proposición se analiza el Hamiltoniano con corte infrarrojo  $H^{\sigma_0}(\underline{\alpha})$ , con  $\theta = i\nu$  y  $\nu > 0$ . Recordamos que el parámetro  $\sigma_0$  en el Hamiltoniano es un corte infrarrojo. La prueba detallada se encuentra (esencialmente) en la Proposición 2.10 de [6].

**Proposición 3.2.5** *Para valores suficientemente chicos de  $\nu > 0$ ,  $|\beta|$  y el cociente  $\alpha^{3/2}/\sin^{\ell\kappa}(\nu)$ , existe un único punto  $E_0$  en el espectro de  $H^{\sigma_0}(\underline{\alpha}) \equiv \overset{0}{H}$  contenido en  $\mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu)$ . El punto  $E_0$  es un eigenvalor simple de  $\overset{0}{H}$  y cumple*

$$|E_0 - e_1(\underline{\alpha})| \leq \frac{1}{8} \sin(\nu) \sigma_0. \quad (3.60)$$

### 3.2.3 Comparación con el Modelo Regular

En [6] se estudia la existencia de las resonancias para el modelo de Pauli-Fierz con una regularización infrarroja, es decir, considerando al parámetro  $\mu$ , presente la función de acoplamiento (3.24), en el conjunto  $(0, 1)$ . Dicha regularización se impone de manera artificial para simplificar el análisis de la existencia de resonancias, el caso crítico ( $\mu = 0$ ) es el que está dado por principios físicos y por lo tanto es de especial importancia. En la presencia de la regularización infrarroja, las resonancias del modelo de Pauli-Fierz se pueden analizar con el método de escalas múltiples sin la necesidad de la transformación de Pauli-Fierz, el mapeo de Feshbach-Schur y el decaimiento exponencial de las eigenfunciones. Para llevar a cabo el paso inductivo del método de escalas múltiples la primera tarea es dar una estimación de la norma de la diferencia de los operadores resolventes  $R^n(z)$  y  $R^{n+1}(z)$  que permite concluir la propiedad  $\Pi_3(n+1)$ . En lo sucesivo el superíndice "old" hace referencia a que el respectivo objeto matemático se define en [6] y es distinto al ocupado aquí. En [6] se considera al operador  $W_{n+1}^{n,(\text{old})}$  como una perturbación del Hamiltoniano  $\tilde{H}_n^{(\text{old})} := \overset{n}{H}^{(\text{old})} + e^{-\theta} \check{H}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}$  — de hecho estos operadores se definen de tal manera que  $\overset{n+1}{H}^{(\text{old})} = \tilde{H}_n^{(\text{old})} + W_{n+1}^{n,(\text{old})}$ . Definimos  $\tilde{R}^n(z)^{(\text{old})} := (\tilde{H}_n^{(\text{old})} - z)^{-1}$ , gracias a la regularización infrarroja se demuestra que  $\|W_{n+1}^{n,(\text{old})} \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})}\|$  se puede acotar por potencias de  $\sigma_n^\mu$ , i.e.,

$$\|W_{n+1}^{n,(\text{old})} \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})}\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^2(\nu)} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n^\mu, \quad (3.61)$$

donde  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  y  $|z - E_n| \geq \frac{\sin(\nu)\sigma_{n+1}}{10}$  (ver Proposición 3.8 de [6]). La estimación en (3.61) hace posible escribir a  $R^{n+1}(z)^{(\text{old})}$  como una serie de Neumann (convergente):

$$R^{n+1}(z)^{(\text{old})} = \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})} \sum_{j=0}^{\infty} \left( -W_{n+1}^{n,(\text{old})} \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})} \right)^j, \quad (3.62)$$

y así encontrar una estimación adecuada de

$$\|R^{n+1}(z)^{(\text{old})} - \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})}\| = \|\tilde{R}^n(z)^{(\text{old})} \sum_{j=1}^{\infty} \left( -W_{n+1}^{n,(\text{old})} \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})} \right)^j\|, \quad (3.63)$$

que permite obtener la propiedad equivalente a  $\Pi_3(n+1)$  en el caso regular [6]. En el caso crítico ( $\mu = 0$ ) no podemos asegurar que  $\|W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$  decae a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde ahora definimos  $\tilde{H}_n := \overset{n}{H} + e^{-\theta} \check{H}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}$  y  $W_{n+1}^n := \overset{n+1}{H} - \tilde{H}_n$ . Lo mejor que podemos garantizar es una cota de la forma

$$\|W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^2(\nu)} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}. \quad (3.64)$$

Recordamos que  $\mathfrak{C}(\nu) > 1$  y por tanto, el término  $\mathfrak{C}(\nu)^{n+1}$  diverge exponencialmente a  $\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, no podemos estimar directamente  $\|R^{n+1} - \tilde{R}^n(z)\|$  con una serie de Neumann (bien definida) como en [6]. Para encontrar una solución al problema es conveniente analizar el origen del término  $\sigma_n^\mu$  en la estimación (3.61). Ya que  $W_{n+1}^{n,(\text{old})}$  se escribe en términos de operadores de creación y aniquilación, a grandes rasgos, el Lema 3.2.3 permite acotar  $\|W_{n+1}^{n,(\text{old})} \tilde{R}^n(z)^{(\text{old})}\|$  en términos de  $\|\mathbf{G}_j^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}\|_\rho$  (con  $j = 1, 2, 3$ ) y cantidades similares. Para una selección adecuada de  $\rho$  se puede estimar

$$\|\mathbf{G}_j^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}\|_\rho \leq C \alpha^{3/2} \sigma_n^\mu. \quad (3.65)$$

En nuestro caso, a pesar de la regularización  $|k|$  en la función de acoplamiento obtenida con la transformación de Pauli-Fierz, la aparición del factor  $\mathbf{x}$  (debido a la misma transformación) no nos permite obtener el decaimiento necesario de  $\|\mathbf{G}_{\text{PF}}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}\|_\rho$  en términos de  $\sigma_n$  sin perder el control para valores grandes de  $\mathbf{x}$ . Para obtener las estimaciones adecuadas necesitamos usar el decaimiento exponencial de las eigenfunciones del átomo en la variable de posición  $\mathbf{x}$ . Empleamos el mapeo de Feshbach-Schur para estudiar parte del problema en un espacio de Hilbert equivalente donde las eigenfunciones tienen decaimiento exponencial en  $\mathbf{x}$ . Básicamente, el mapeo de Feshbach-Schur nos permite cambiar  $\mathbf{x}$  por  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-1} \mathbf{x}$  en la función de acoplamiento  $\mathbf{G}_{\text{PF}}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}$ .

### 3.2.4 El mapeo de Feshbach-Schur

En esta sección presentamos en términos generales el mapeo de Feshbach-Schur que es un ingrediente clave para la realización del esquema inductivo, específicamente, para probar la propiedad  $\Pi_3(n+1)$ . Recordamos que  $\underline{\alpha} = (\theta, \alpha, \beta)$ . Para cualquier  $0 \leq s' \leq s < t \leq \infty$ , extendemos la proyección  $P_{\text{at},1}(\underline{\alpha})$  [ver (3.52)] al espacio  $\mathcal{H}^{s,t}$  y  $\mathcal{H}^{s',t}$ , respectivamente, como

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(\underline{\alpha}) := P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} \equiv P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s',t}}, \quad (3.66)$$

$$\overline{\mathcal{P}} := \overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}) := \mathbf{1} - \mathcal{P}(\underline{\alpha}). \quad (3.67)$$

También definimos el operador

$$\dot{H} := \dot{H}(\underline{\alpha}) := H^{s,t}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s',s}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{s,t}} \otimes \check{H}^{s',s}(\theta) \quad (3.68)$$

y

$$\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} := \dot{H}_{\overline{\mathcal{P}},\beta} := \overline{\mathcal{P}} \dot{H} \overline{\mathcal{P}}. \quad (3.69)$$

Definimos el mapeo de Feshbach-Schur correspondiente a la proyección (3.66) como

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z) := \mathcal{P}(\dot{H} - z)\mathcal{P} - \mathcal{P}\dot{H}\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\dot{H}\mathcal{P}, \quad (3.70)$$

y notamos que

$$\mathcal{P}\dot{H}\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}W^{s,t}\overline{\mathcal{P}}, \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{P}}\dot{H}\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}W^{s,t}\mathcal{P}. \quad (3.71)$$

Si el parámetro  $\alpha$  es suficientemente chico, entonces  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  es un operador cerrado. La importancia del operador  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  recae en la relación que guarda su espectro con el de  $\dot{H}$ . Se cumple que  $z \in \sigma[\dot{H}] \Leftrightarrow 0 \in \sigma[\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)]$  y los eigenvectores de  $\dot{H}$  asociados al eigenvalor  $z$  se pueden escribir explícitamente en términos de los elementos del núcleo de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  y viceversa. Más aún, para  $z \notin \sigma[\dot{H}]$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(z) := \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  es invertible en  $\mathcal{P}\mathcal{H}^{s',t}$  si y sólo si  $\dot{H} - z$  es invertible en  $\mathcal{H}^{s',t}$ . En este caso

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z))^{-1} = \mathcal{P}(\dot{H} - z)^{-1}\mathcal{P} \quad (3.72)$$

y

$$(\dot{H} - z)^{-1} = Q_{\mathcal{P}}(z)\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(z)^{-1}Q_{\mathcal{P}}^{\#}(z) + \overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}, \quad (3.73)$$

donde

$$Q_{\mathcal{P}}(z) := \mathcal{P} - \overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}W^{s,t}(\underline{\alpha})\mathcal{P} \quad (3.74)$$

$$Q_{\mathcal{P}}^{\#}(z) := \mathcal{P} - \mathcal{P}W^{s,t}(\underline{\alpha})\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}. \quad (3.75)$$

### 3.2.5 Resonancias del Hamiltoniano sin corte infrarrojo

La ventaja de ocupar el mapeo de Feshbach-Schur es que en la serie de Neumann de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overset{n}{H} - z)^{-1}$  los términos de la interacción se pueden escribir como  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)$  y  $W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)$  y por tanto la función de acoplamiento tiene el comportamiento deseado (contiene el factor  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-1} \mathbf{x}$ ) que nos permite obtener cotas de la forma

$$\|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|, \|W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^2(\nu)} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n, \quad (3.76)$$

para  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  tal que  $|z - E_n| \geq \frac{\sin(\nu) \sigma_{n+1}}{10}$  y alguna constante  $C < \infty$ . La fórmula de inversión (3.73) nos permite reconstruir a los operadores  $R^{n+1}(z)$  y  $\tilde{R}^n(z)$  en términos de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overset{n}{H} - z)^{-1}$  y así estimar

$$\|R^{n+1}(z) - \tilde{R}^n(z)\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\sin^4(\nu)} \frac{(\mathfrak{C}(\nu)^2)^{n+1}}{\mathfrak{b} \sigma_{n+1}} \sigma_n^{1/2} \quad (3.77)$$

que garantiza la validez de la propiedad  $\Pi_3(n+1)$ . Ocupando  $\Pi_3(n+1)$  se pueden concluir las propiedades  $\Pi_1(n+1)$ ,  $\Pi_2(n+1)$  y  $\Pi_4(n+1)$ . Con lo que se cierra el paso inductivo.

Como las proyecciones  $P_n$  están definidas en diferentes espacios, usamos el isomorfismo  $\mathcal{H}^0 \cong \mathcal{H}^{\sigma_n} \otimes \mathcal{F}^{0, \sigma_n}$  para extenderlas como  $P_n^\infty := P_n \otimes P_{\Omega^{0, \sigma_n}}$ . Las propiedades  $\Pi_1(n)$  y  $\Pi_3(n)$  implican la existencia de los siguientes límites

$$E_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \quad \text{y} \quad P_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\infty. \quad (3.78)$$

En estos términos podemos reescribir el resultado principal de la siguiente forma.

**Teorema 3.2.6** *Supongamos que  $\nu > 0$  y  $\alpha^{3/2}/\sin^{\ell_\kappa}(\nu)$  son suficientemente chicos, entonces  $E_\infty$  es un eigenvalor de  $H^{0, \infty}(\theta, \alpha, 0)$ . En este caso el rango de  $P_\infty$  tiene dimensión uno y consiste de los eigenvectores asociados a  $E_\infty$ .*

## CAPÍTULO 4

# A New Method of Construction of Resonances that applies to Critical Models

---

En este capítulo se presenta el artículo [\[7\]](#).



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Functional Analysis

www.elsevier.com/locate/jfa



# A new method of construction of resonances that applies to critical models



Volker Bach<sup>a</sup>, Miguel Ballesteros<sup>b,\*</sup>, Diego Iniesta<sup>b</sup>,  
Alessandro Pizzo<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Institut für Analysis und Algebra, Technische Universität Braunschweig, Germany*

<sup>b</sup> *Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS),  
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Mexico*

<sup>c</sup> *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Italy*

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 20 March 2020

Accepted 7 October 2020

Available online 28 October 2020

Communicated by Benjamin Schlein

### Keywords:

Spectral theory

Resonances

Multi-scale analysis

Pauli-Fierz model

## ABSTRACT

We introduce a new method of multi-scale analysis that can be used to study the spectral properties of operators in non-relativistic quantum electrodynamics with critical coupling functions. We utilize our method to prove the existence of resonances of nonrelativistic atoms which are minimally coupled to the quantized (ultraviolet-regularized) radiation field and construct them together with the corresponding resonance eigenvector in case of critical coupling, i.e., without any infrared regularization. This result was first proved in [19] with the ingredient of a suitable Pauli-Fierz transformation. The purpose of the present paper, however, is to demonstrate the power of our new method for the estimation of resolvents that is based on the isospectral Feshbach-Schur map [8]. The reconstruction formula for the resolvent of an operator in terms of the resolvent of its image under the Feshbach-Schur map allows us to use a *fixed* projection and to compare two resolvents without actually decimating the degrees of freedom. This is in contrast to the renormalization group based on Feshbach-Schur map, developed in [8,5], that uses a decreasing sequence of ever-smaller projections and successively decimates the degrees of freedom. It is this new method that allows us to treat the critical and physically relevant *Standard model of non-*

\* Corresponding author.

*E-mail addresses:* [vbach@tu-bs.de](mailto:vbach@tu-bs.de) (V. Bach), [miguel.ballesteros@iimas.unam.mx](mailto:miguel.ballesteros@iimas.unam.mx) (M. Ballesteros), [diegoiniesta@ciencias.unam.mx](mailto:diegoiniesta@ciencias.unam.mx) (D. Iniesta), [pizzo@mat.uniroma2.it](mailto:pizzo@mat.uniroma2.it) (A. Pizzo).

*relativistic quantum electrodynamics* [7] which is intractable by standard methods.

© 2020 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction and main result

In this paper we prove the existence of resonance eigenvalues of nonrelativistic atoms which are minimally coupled to the quantized photon field. We impose an ultraviolet cutoff to obtain a mathematically well-defined model but no infrared regularization. Even though the non-relativistic description of matter in this model is somewhat inconsistent with the relativistic description of the photons, it otherwise abides by physical principles and is, therefore, termed *Standard model of non-relativistic quantum electrodynamics* [7]. Indeed, it is an accurate description of the interaction of matter and light for processes like the absorption and emission of photons by atoms, molecules, and matter, in general.

The price to pay for this accuracy (i.e., no infrared regularization) is the singular nature of the model: The quantized magnetic vector potential  $\mathbf{A}[\mathbf{x}]$ , entering the Hamiltonian in the velocity operator by minimal coupling  $\frac{1}{i}\nabla_x \mapsto \frac{1}{i}\nabla_x - \mathbf{A}[\mathbf{x}]$ , is a marginal perturbation of the non-interacting Hamiltonian, i.e., invariant (neither decreasing nor increasing) under unitary rescaling of the system's length units. Because of this singular behavior, the proof of the physically important fact that excited atomic eigenvalues become unstable under coupling to the radiation field and turn into resonances with a finite life-time is mathematically particularly difficult to establish, and this has been achieved only fairly recently in [19].

The use of a suitable Pauli-Fierz transformation (see Sect. 1.1) to desingularize the interaction coupling for small photon momenta is a common key ingredient of these proofs. The regularizing effect of the Pauli-Fierz transformation on the dependence of the interaction coupling on small photon momenta, however, comes at the price of a growth in the electron position variable. This growth, in turn, is then controlled by the exponential decay of the eigenfunction under consideration, and then *Pizzo's method* [17] can be applied to inductively construct the resonance eigenvalue and the corresponding eigenprojection  $P$  of the Hamiltonian.

While it is easy to sketch this strategy in a few lines, its implementation is technically rather involved because the inductive construction yields a sequence  $(P_n)_{n=1}^\infty$  of approximate resonance projections that, shell by shell, include ever smaller –and eventually all–photon momenta. The existence of the resonance then amounts to showing the convergence of this sequence in operator norm, and this, in turn is traced back to estimating the norm of the difference of the corresponding resolvent operators (see Theorem 6.5) at the  $n$ th inductive step. It is here that the singular nature of the interaction enters: The

methods previously established, e.g., in [8,13], do not yield this convergence, and finer estimates have to be used.

In the present paper we carry out these refined estimates based on the isospectral Feshbach-Schur map [8]. Our main technical result is formulated in Theorem 6.5. The reconstruction formula (5.14) for the resolvent of an operator in terms of the resolvent of its image under the Feshbach-Schur map allows us to use a *fixed* projection and to compare two resolvents without actually decimating the degrees of freedom. This is in contrast to the renormalization group based on Feshbach-Schur map, developed in [8,5], that uses a decreasing sequence of projections of ever smaller range to successively decimate the degrees of freedom. The fact that, with these estimates, we succeed in showing the convergence of the projection proves the power of this method.

The present paper shares with [19] the use of a suitably chosen Pauli-Fierz transformation as a common ingredient. The difference of [19] compared to [4] (where noncritical models have been considered), and the present paper, however, lies in the inductive scheme to prove the convergence of the eigenprojections: The renormalization group based on the Feshbach-Schur map is used in [19], while [4], and the present paper, is based on the successive momentum shell inclusion known as Pizzo's method. Yet, the Feshbach-Schur map is of key importance in [19] and in this work, too, and it is the very purpose of the present paper to exhibit this. Somewhat similarly, the existence of ground states of the singular spin-boson model has been proved in [12] using the renormalization group based on the Feshbach-Schur map and the absence of self-interactions of the atomic levels. The latter has been identified to be a consequence of a (parity) symmetry of the spin-boson model in [2,3] with a desingularizing effect similar to the Pauli-Fierz transformation in the context of the present paper, and in [2,3] an alternative proof for the existence of ground states of the singular spin-boson model based on Pizzo's method is given.

The present paper is organized as follows: In the remainder of this section we sketch the derivation of the model from theoretical physics and state our main result. In Sect. 2, we give precise mathematical definitions of the operators studied in this paper and the Hilbert spaces they act on. We describe the strategy of proof and set up the inductive scheme -the heart of our proof- with a precise formulation of the induction hypothesis. This is followed in Sect. 3 by a recollection of the basic estimates needed for the induction step. As many of these estimates are derived in earlier works of us, especially in [4], we omit most of the details of their derivation. Sect. 4 is a short comparison of the present work to earlier results. In Sect. 5 the criticality of the model is discussed and the Feshbach-Schur map is introduced, which is the key tool used in Sect. 6 for carrying out the induction step as formulated in Theorem 2.2. We conclude with the proof of our main result, Theorem 2.3, and construct the resonance eigenvalue and corresponding eigenvector in the final section, Sect. 7.

### 1.1. Interaction of matter and light

We briefly sketch the framework of quantum physics for the description of nonrelativistic matter –which we here assume to consist of a single (spinless) electron bound to a nucleus– and the (relativistic) quantized photon field. Putting these two constituents together, we obtain the *atom-photon system*.

The (vector) state of the atom and the photon field at time  $t \in \mathbb{R}$  is represented by a wave function  $\Psi_t \in \mathcal{H}^{0,\infty}$  in the Hilbert space  $\mathcal{H}^{0,\infty} := \mathcal{H}_{\text{at}} \otimes \mathcal{F}^{0,\infty}$  of the atom-photon system, with  $\mathcal{H}_{\text{at}} = L^2(\mathbb{R}^3)$  and  $\mathcal{F}^{0,\infty}$  [see (2.14)] being the atom Hilbert space and the photon Fock space, respectively. Given a normalized initial state  $\Psi_0 \in \mathcal{H}^{0,\infty}$ , the state of the system at time  $t > 0$  is given by the solution  $\Psi_t = e^{-itH_\alpha} \Psi_0$  of the Schrödinger equation  $i\dot{\Psi}_t = H_\alpha \Psi_t$ .

Here, the generator  $H_\alpha$  of the atom-photon dynamics is the Hamiltonian

$$H_\alpha = \left( \frac{1}{i} \nabla_x - \mathbf{A}^{0,\infty}(0) \right)^2 + V_{\text{pot}}(0) + \check{H}^{0,\infty}, \quad (1.1)$$

where  $V_{\text{pot}}(0) \equiv V_{\text{pot}}(0)[\mathbf{x}]$  is an attractive potential which gives rise to atomic bound states of the system,  $\check{H}^{0,\infty}$  is the energy operator of the photon field, and  $\mathbf{A}^{0,\infty}(0) \equiv \mathbf{A}^0(0)$  is the quantized magnetic vector potential that couples the electron to the photons; in fact, the definition of  $\mathbf{A}^{0,\infty}(0)$  in (2.21)–(2.22) contains the parameter  $\alpha$ , the so-called fine structure constant. (The notation used here is introduced in Sect. 2.1.)

*Pauli-Fierz transformation.* It is customary to cutoff the vector potential  $\mathbf{A}^{0,\infty}(0)$  in the ultraviolet region in order to make  $H_\alpha$  semibounded and self-adjoint on the domain of  $H_0$  (see [14]). For the quantitative study of fine spectral properties, we unitarily transform the Hamiltonian by a Pauli-Fierz transformation as

$$H^{0,\infty}(0, \alpha, 0) := \exp \left[ -i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0, \alpha, 0) \right] H_\alpha \exp \left[ i\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0, \alpha, 0) \right], \quad (1.2)$$

where the generator  $\lambda_{\text{PF}}^{0,\infty}(0, \alpha, 0) = a^*(F_x) + a(F_x)$  is defined in (2.23) with  $F_x$  suitably chosen as to cancel the most singular part of  $\mathbf{A}^{0,\infty}(0)$ . As  $H^{0,\infty}(0, \alpha, 0)$  is unitarily equivalent to  $H_\alpha$ , they share all spectral properties.

*Complex dilations.* Resonances are defined to be singularities of the complex function  $z \mapsto R_{\varphi,\psi}[z] := \langle \varphi | [H^{0,\infty}(0, \alpha, 0) - z]^{-1} \psi \rangle$  of the single complex variable  $z$  when analytically continued from the complex upper half-plane across the real axis into the second Riemann sheet in the complex lower half-plane (see [1,10,15,16,18]), for wave functions  $\varphi, \psi$  in a suitable dense family of vectors. To reveal these singularities we change the projection of the Riemann surface of  $R_{\varphi,\psi}$  onto the complex plane by means of a complex dilation. *Real dilations* are unitary changes  $(\mathbf{x}, k) \mapsto (e^\theta \mathbf{x}, e^{-\theta} k)$  of atomic length and photon momentum scales implemented by a unitary operator  $U(\theta) \in \mathcal{B}[\mathcal{H}^{0,\infty}]$ ,  $U(-\theta) = U(\theta)^{-1} = U(\theta)^*$ , for real  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0) := U(\theta) H^{0,\infty}(0, \alpha, 0) U(-\theta), \quad \underline{\alpha}_0 := (\theta, \alpha, 0). \tag{1.3}$$

Then one observes that  $\theta \mapsto H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  defines an analytic family of Type A in a complex neighborhood of zero which we assume to be the disc of radius  $\frac{1}{10}$  centered at the origin,  $D_{1/10} \subseteq \mathbb{C}$ . Note that  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  is in general not self-adjoint unless  $\theta \in \mathbb{R}$ . After establishing  $\theta \mapsto H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  as an analytic operator-valued map on the open disc  $D_{1/10}$  in the complex plane we choose  $\theta := i\nu$  purely positive imaginary and of small, but fixed magnitude,  $\nu \in (0, \frac{1}{10})$ .

*Boosts.* As mentioned in the introduction, the conjugation of  $H_\alpha$  by the Pauli-Fierz transformation yields a growth of the interaction coupling in the electron position variable  $\mathbf{x}$  which we control by the exponential decay of the atomic eigenfunctions  $\varphi_{\text{at},j} \in \mathcal{H}_{\text{at}}$ . Specifically, we use that  $\|e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle} \varphi_{\text{at},j}\|_{\mathcal{H}_{\text{at}}} < \infty$  remains bounded, provided  $\beta > 0$  is smaller than the exponential decay rate, and conjugate the Hamiltonian  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$  by  $e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}$ , where  $\langle \mathbf{x} \rangle := \sqrt{1 + |\mathbf{x}|^2}$ . More precisely, we take  $\beta = i\tau$ , with  $\tau \in \mathbb{R}$ , and conjugate  $H^{0,\infty}(\theta, \alpha, 0)$  by the unitary  $e^{i\tau\langle \mathbf{x} \rangle}$ , obtaining the unitarily equivalent operator

$$H^{0,\infty}(\theta, \alpha, i\tau) := e^{-i\tau\langle \mathbf{x} \rangle} H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0) e^{i\tau\langle \mathbf{x} \rangle}. \tag{1.4}$$

Then we observe that (1.4) defines an analytic family in  $\tau$  in a neighborhood of zero (assumed to be  $D_{1/10}$ , for convenience) which we then continue to purely imaginary values for  $\tau$ , i.e., to real values of  $\beta = i\tau \in \mathbb{R}$ .

*Undoing the complex deformations.* Note that the operator  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0)$ , with  $\nu, \alpha > 0$  positive and small, and the construction of its resonance eigenvalues  $E_j^{0,\infty}(\underline{\alpha}_0) \in \mathbb{C}^-$  and the corresponding projections are the objects of principal interest in this work. The boost parameter  $\beta$  is only a mathematical tool that we use in order to achieve our goal.

## 2. Definitions and basic bounds

*Notation.*

1.  $\mathbb{R}_0^+$  corresponds to the positive real axis including 0, likewise  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
2. For any operator  $A$  defined in a Hilbert space, we use the superscript ‘\*’ to denote the adjoint operator  $A^*$ , whereas the complex conjugate of a number  $z$  in the complex plane is denoted by  $\bar{z}$ .
3. Vectors in  $\mathbb{R}^3$  or  $\mathbb{C}^3$  are written in boldface letters. For  $k = (\mathbf{k}, \tau) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$  and integrable functions  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  it is convenient to write  $|k| := |\mathbf{k}|$  and  $\int f(k) dk := \sum_{\tau=\pm} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{k}, \tau) d^3k$ . We refrain, however, from using boldface letters in subscripts and write, e.g.,  $\nabla_x$  instead of  $\nabla_{\mathbf{x}}$ .
4.  $D(z, r) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\} \subseteq \mathbb{C}$  denotes the open disc in the complex plane of radius  $r > 0$  and centered at  $z \in \mathbb{C}$ . We particularly denote  $D_r := D(0, r)$ .

5. We omit trivial tensor products, this means that for vector spaces  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  and operators  $T_1$  and  $T_2$  (defined in  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$ , respectively) we identify  $T_1 \equiv T_1 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{V}_2}$ ,  $T_2 \equiv \mathbf{1}_{\mathcal{V}_1} \otimes T_2$ .
6. Given a normed vector space  $\mathcal{V}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  denotes its norm. If  $\mathcal{V}$  has an inner product, we denote it by  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ . In general we omit the subscript  $\mathcal{V}$  if no confusion is possible.
7. We denote by  $C$  any finite constant that, however, might change from line to line. These constants are universal and do not depend on  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  and the parameter  $n$  of the induction scheme. In some occasions we add to our constants subscripts with equation numbers. Some special constants are written in boldface gothic letters, such as  $\mathfrak{b}$  and  $\mathfrak{C}$ .
8. The expression “If  $a$  is small enough then  $\mathcal{Q}(a)$  holds true” means that  $a \geq 0$  and that there is a positive constant  $C > 0$  such that  $\mathcal{Q}(a)$  holds true, provided  $a \leq C$ .

### 2.1. Definition of the model

*The atom Hamiltonian.* The (Pauli-Fierz-transformed and dilated) atom Hamiltonian  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$  depends on the parameters  $\alpha \in [0, 1]$  and  $\theta, \beta \in D_{1/10}$ , which we comprise in the triple

$$\underline{\alpha} := (\theta, \alpha, \beta). \quad (2.1)$$

The atom Hamiltonian  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$  is a closed (not necessarily self-adjoint) operator with dense domain contained in the atom Hilbert space

$$\mathcal{H}_{\text{at}} := L^2(\mathbb{R}^3),$$

and it is defined by the formula

$$H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) := -e^{-2\theta} \Delta + V(\underline{\alpha}).$$

Here, the operator  $V(\underline{\alpha})$  is the sum of (multiples of) two potentials  $V_{\text{pot}}(\theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  and  $V_{\text{PF}}(\theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  and a differential operator  $\tilde{V}(\theta, \beta)$ ,

$$V(\underline{\alpha}) := V_{\text{pot}}(\theta) + \alpha^3 V_{\text{PF}}(\theta) + \tilde{V}(\theta, \beta). \quad (2.2)$$

The electric potential  $V_{\text{pot}}(\theta)$  is a multiplication operator in the electron position variable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , and  $V_{\text{pot}}(\theta)(\mathbf{x})$  tends to zero, as  $|\mathbf{x}|$  tends to infinity, uniformly in  $\theta \in D_{1/10}$ . While  $H_{\text{at}}(\theta)$  is not selfadjoint, unless  $\theta$  is real, we assume that  $D_{1/10} \ni \theta \mapsto V_{\text{pot}}(\theta)(-\Delta + 1)^{-1} \in \mathcal{B}[L^2(\mathbb{R}^3)]$  is an analytic (Banach space-valued) map and that  $V_{\text{pot}}(\theta)(-\Delta + r)^{-1}$  tends to zero in operator norm, as  $r \rightarrow \infty$ , uniformly in  $\theta \in D_{1/10}$ . Moreover,

$$V_{\text{pot}}(\theta)^* = V_{\text{pot}}(\bar{\theta}), \quad V_{\text{pot}}(\theta) = u(\Re\theta) V_{\text{pot}}(i\Im\theta) u(\Re\theta)^*,$$

where, for  $r \in \mathbb{R}$ , the linear operator  $u(r) : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  is the unitary dilation

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) : \quad [u(r)\phi](\mathbf{x}) := e^{3r/2}\phi(e^r \mathbf{x}). \tag{2.3}$$

The effective potential  $V_{\text{PF}}(\theta)$  is generated by the Pauli-Fierz transformation and is defined by

$$V_{\text{PF}}(\theta)(\mathbf{x}) := \sum_{\lambda=1}^2 \frac{e^{-2\theta}}{8(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-2e^{-2\theta}|\mathbf{k}|^2) |\eta(|\mathbf{x}||\mathbf{k}|) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{x}|^2 d^3k, \tag{2.4}$$

for any  $\theta \in D_{1/10}$ , where  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_0^+; [0, 1])$  is a fixed decreasing function such that

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } r \leq 1, \\ 0, & \text{if } r \geq 2, \end{cases} \tag{2.5}$$

and  $\boldsymbol{\epsilon} := (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^3$  is a fixed measurable function that satisfies

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \mu) = \delta_{\lambda, \mu}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) = 0, \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k}, \lambda)^* = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda), \quad \boldsymbol{\epsilon}(r\mathbf{k}, \lambda) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda), \quad r > 0, \tag{2.7}$$

where  $\boldsymbol{\epsilon}^* := (\overline{\epsilon_1}, \overline{\epsilon_2}, \overline{\epsilon_3})$  and  $\delta_{\lambda, \mu}$  is the Kronecker symbol.

The differential operator  $\tilde{V}(\theta, \beta)$  is defined by

$$\tilde{V}(\theta, \beta)(\mathbf{x}) := e^{-2\theta}(\Delta - e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} \Delta e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}), \tag{2.8}$$

where

$$\langle \mathbf{x} \rangle := \sqrt{1 + |\mathbf{x}|^2}.$$

**Assumption 2.1.** We assume that the first excited eigenvalue  $e_1 \equiv e_1((0, 0, 0))$  of  $H_{\text{at}} \equiv H_{\text{at}}((0, 0, 0))$  is isolated and simple, and we set

$$\delta_{\text{at}} := \text{dist}(e_1, \sigma(H_{\text{at}}((0, 0, 0))) \setminus \{e_1\}) > 0. \tag{2.9}$$

*The photon Hamiltonian.* The Hilbert space of a single photon with momentum  $\mathbf{k}$  restricted in absolute value between  $s$  and  $t$  (with  $0 \leq s < t \leq \infty$ ) is denoted by

$$\mathfrak{h}^{s,t} := L^2(\mathcal{K}^{s,t}), \quad \text{with} \tag{2.10}$$

$$\mathcal{K}^{s,t} := \{(\mathbf{k}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \mid s \leq |\mathbf{k}| < t\}. \tag{2.11}$$

Recall that we denote  $k$  (not typeset in boldface) for pairs  $k = (\mathbf{k}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$  and define

$$|k| \equiv |(\mathbf{k}, \lambda)| := |\mathbf{k}|, \quad (2.12)$$

and that the integral of a function  $f \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  is defined by

$$\int f(k) dk := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_2} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{k}, \lambda) d^3k. \quad (2.13)$$

The Fock space of photons with momenta between  $s$  and  $t$  is the direct sum

$$\mathcal{F}^{s,t} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{S}_N \left[ \bigotimes_{n=1}^N \mathfrak{h}^{s,t} \right], \quad (2.14)$$

where  $\mathcal{S}_N$  is the projection onto the subspace of totally symmetric functions, for  $N \in \mathbb{N}$ , and  $\mathcal{S}_0[\bigotimes_{n=1}^0 \mathfrak{h}^{s,t}] := \mathbb{C} \cdot \Omega^{s,t}$  is the one-dimensional subspace generated by the (normalized) vacuum vector denoted by  $\Omega^{s,t}$ .

Note that the isomorphism  $\mathfrak{h}^{s',t} \cong \mathfrak{h}^{s',s} \oplus \mathfrak{h}^{s,t}$ , for  $s' < s < t$ , of the one-photon spaces gives rise to the isomorphism

$$\forall s' < s < t: \quad \mathcal{F}^{s',t} \cong \mathcal{F}^{s',s} \otimes \mathcal{F}^{s,t} \quad (2.15)$$

of the corresponding Fock spaces. Operators  $A^{s,t}$  on  $\mathcal{F}^{s,t}$  and  $B^{s',s}$  on  $\mathcal{F}^{s',s}$  have a natural extension to  $\mathcal{F}^{s',t}$  by

$$A^{s',t} := \mathbf{1}^{s',s} \otimes A^{s,t} \quad \text{and} \quad B^{s',t} := B^{s',s} \otimes \mathbf{1}^{s,t}, \quad (2.16)$$

respectively, which we henceforth use without further mentioning. This differentiation of scales makes the introduction of the second scale variable  $t$  convenient, but if  $t = \infty$  we frequently omit the variable  $t$  and write  $\mathcal{F}^s := \mathcal{F}^{s,\infty}$ .

The dilated photon Hamiltonian is the multiplication operator that maps  $\phi = (\phi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}^{s,t}$  to  $\check{H}^{s,t}(\theta)\phi$ , with  $(\check{H}^{s,t}(\theta)\phi)_0 := 0$  and

$$(\check{H}^{s,t}(\theta)\phi)_n(k_1, \dots, k_n) := e^{-\theta} (|k_1| + \dots + |k_n|) \phi_j(k_1, \dots, k_n), \quad (2.17)$$

for  $n \geq 1$  and any  $\theta \in D_{1/10}$ .

*The atom-photon Hamiltonian.* For later convenience, we define the Hilbert space of the (pure) states of the atom-photon system where the photon momenta are restricted to values  $s \leq |k| < t$  by

$$\mathcal{H}^{s,t} := \mathcal{H}_{\text{at}} \otimes \mathcal{F}^{s,t} \cong L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}^{s,t}), \quad (2.18)$$

where the latter space  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}^{s,t})$  is called the *Schrödinger representation* of  $\mathcal{H}^{s,t}$ . The values  $s = 0$  and  $t = \infty$  correspond to  $\mathcal{K}^{0,\infty} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$  and  $\mathfrak{h}^{0,\infty} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ , so  $\mathcal{F}^{0,\infty}$

is the Fock space used in Section 1 over the full one-photon Hilbert space  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  without restriction on the momenta. On this Hilbert space, the free (non-interacting, but dilated) atom-photon Hamiltonian is the operator

$$H_0^{s,t}(\underline{\alpha}) := H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) + \check{H}^{s,t}(\theta) \equiv H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{at}}} \otimes \check{H}^{s,t}(\theta). \quad (2.19)$$

By standard arguments,  $H_0^{s,t}(\underline{\alpha})$  is a closed operator on the domain of

$$H_0^{s,t}(\underline{0}) = (-\Delta + V_{\text{pot}}(0)) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{at}}} \otimes \check{H}^{s,t}(0), \quad (2.20)$$

where  $\underline{0} := (0, 0, 0)$ .

In the Schrödinger representation, the (interacting and dilated) atom-photon Hamiltonian is a Schrödinger operator with a second-quantized magnetic vector potential. For  $\mu \geq 0$ , we define the dilated coupling function  $\mathbf{G}^{s,t}(\theta) : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{K}^{s,t} \rightarrow \mathbb{C}^3$  by

$$\mathbf{G}^{s,t}(\theta)[\mathbf{x}, k] := \frac{\alpha^{3/2} \mathbf{1}[s \leq |k| < t]}{4(\pi)^{3/2}} \frac{e^{-\theta-\mu\theta} \exp(-e^{-2\theta}|k|^2)}{|k|^{1/2-\mu}} e^{-i\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \boldsymbol{\epsilon}(k), \quad (2.21)$$

where  $\mu \geq 0$  is an infrared regularization parameter.

In this paper we address the critical case  $\mu = 0$ , in contrast to our previous paper [4], where we assumed that  $\mu > 0$ . Note that fundamental physical principles yield  $\mu = 0$ , demonstrating the importance of the critical case, while  $\mu > 0$  is in most approaches merely assumed for mathematical convenience. To simplify a comparison of the present paper to our earlier results in [4], we continue to display  $\mu$  – even though it equals zero. The constant  $\alpha \sim 1/137$  is the fine structure constant. Here, we consider it a small parameter. The exponential function  $\exp(-e^{-2\theta}|k|^2)$  is an ultraviolet cutoff. For  $s > 0$ , the parameter  $s$  is an infrared cutoff.

The second-quantized magnetic vector potential is the operator

$$\mathbf{A}^{s,t}(\theta) := a^*(\mathbf{G}^{s,t}(\theta)) + a(\mathbf{G}^{s,t}(\bar{\theta})), \quad (2.22)$$

where  $a$  and  $a^*$  are creation and annihilation operators, respectively, constituting the standard Fock representation of the canonical commutation relations.  $\mathbf{A}^0(\theta) \equiv \mathbf{A}^{0,\infty}(\theta)$  is an analytic continuation of the physical second-quantized magnetic potential  $\mathbf{A}^0(0)$ .

The Pauli-Fierz transformation is the operator  $e^{i\lambda_{\text{PF}}^0((0,\alpha,0))}$ , where

$$\lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) := a^*\left(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x}\right) + a\left(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^{\bar{\theta}} \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}) \cdot \mathbf{x}\right), \quad (2.23)$$

$\mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha})[\mathbf{x}, k] := \mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})[0, k]$  and  $\overline{(\beta, \alpha, \theta)} := (\beta, \alpha, \bar{\theta})$ . We further define

$$\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) := \mathbf{A}^{s,t}(\underline{\alpha}) - e^{-\theta} \nabla_x \lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}), \quad (2.24)$$

$$b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) := a^*\left(i e^{-\theta} |k| \eta(|\mathbf{x}||k|) \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x}\right) \quad (2.25)$$

$$+ a \left( i e^{-\bar{\theta}} |k| \eta(|\mathbf{x}||k|) \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x} \right).$$

As described in Sect. 1.1, the Hamiltonian operators studied in this paper can be formally expressed as in (2.26) below: the operators

$$H^{0,\infty}(\theta, \alpha, \beta) := e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} U(\theta) e^{-i\lambda_{\text{PF}}^0((0,\alpha,0))} H_\alpha e^{i\lambda_{\text{PF}}^0((0,\alpha,0))} U(-\theta) e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle} \quad (2.26)$$

derive from the physical Hamiltonian  $H_\alpha$  of the atom-photon system by (1.), a *Pauli-Fierz transformation* followed by (2.) a *complex dilation*, and finally (3.) a *boost*, see (1.4). Note that, while the right side of (2.26) is a composition of unbounded operators that only makes sense for real  $\theta$  and purely imaginary  $\beta$ , its left side can be extended to complex values of  $\theta$  and  $\beta$  in a small neighborhood of 0 using (2.27) below.

We ultimately aim at the construction of resonances of  $H^{s,t}(\underline{\alpha})$  for  $s = 0$  and  $t = \infty$ . The boost parameter  $\beta$  is only a mathematical tool for this construction. We restrict the Hamiltonians (2.26) to  $\mathcal{H}^{s,t}$ , for  $0 < s < t < \infty$ , and obtain the desired properties of  $H^{0,\infty}(\underline{\alpha})$  from those of  $(H^{s,\infty}(\underline{\alpha}))_{s>0}$  in the limit  $s \rightarrow 0$ . Here,

$$\begin{aligned} H^{s,t}(\underline{\alpha}) &:= \left( e^{-\theta} \frac{1}{i} \nabla_x - \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \right)^2 + b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + V(\underline{\alpha}) + e^{-\theta} \check{H}^{s,t} \\ &\quad + i e^{-\theta} \beta (\nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle) \\ &= H_0^{s,t}(\underline{\alpha}) + W^{s,t}(\underline{\alpha}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

where  $H_0^{s,t}(\underline{\alpha}) = H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{at}}} \otimes \check{H}^{s,t}(\theta)$  is the non-interacting Hamiltonian defined in (2.19) and

$$\begin{aligned} W^{s,t}(\underline{\alpha}) &:= i e^{-\theta} \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \nabla_x + i e^{-\theta} \nabla_x \cdot \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + [\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})]^2 + b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \\ &\quad + i e^{-\theta} \beta (\nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) + \mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \nabla_x \langle \mathbf{x} \rangle) \end{aligned} \quad (2.28)$$

is the interaction.

It can be seen from Eqs. (2.24) and (2.27) that the Pauli-Fierz transformation significantly regularizes the infrared behavior. For example,  $b_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})$  contains the term  $|k| \mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})$  instead of  $\mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha})$  which is present in the magnetic potential  $\mathbf{A}^{s,t}(\theta)$ . Then, the new interaction behaves as if we had an infrared regularization parameter  $\mu$  equal to 1, see (2.21). However, there is a price to pay, which is the unbounded factor  $\mathbf{x}$ . Although, altogether the term  $|k| \eta(|\mathbf{x}||k|) \mathbf{x}$  is bounded, we cannot use the regularizing factor  $|k|$  without losing control on the unbounded factor  $\mathbf{x}$ . This problem requires an additional argument and this is how the parameter  $\beta$  enters the scene. For this reason we define

$$H^0(\theta, \alpha, \beta) := e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} H^0(\theta, \alpha, 0) e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}. \quad (2.29)$$

This, together with the fact that the eigenvectors we study are exponentially bounded, permits us to change  $\mathbf{x}$  by  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-1} \mathbf{x}$  (roughly speaking), once we restrict the domain of the

operators at stake using an appropriate Feshbach-Schur map. Then the model behaves as if we had  $\mu = 1$  in (2.21). With this respect, we use in this paper estimates that are obtained in [4] with slight modifications. Since we want to present a new method, we do not repeat our calculations from [4] (this would distract the attention of the reader and make this paper much longer, and it would as well obscure the key new ingredients).

2.2. Main result and strategy of the proof

Our goal is the study of complex eigenvalues (resonances) of the complex deformed Pauli-Fierz Hamiltonian  $H^0(\underline{\alpha}_0)$ , with  $\underline{\alpha}_0 = (\theta, \alpha, 0)$ . The presence of soft photons implies that – even after complex deformation and with  $\alpha = 0$  – the eigenvalues of  $H^0(\underline{\alpha}_0)$  are not isolated and touch the essential spectrum. This makes the problem difficult and, therefore, suggests an iterative approach. In [6], [7], and [8] a renormalization analysis based on an iterative application of the Feshbach-Schur map has been developed and used to construct resonances for the regularized model with  $\mu > 0$ . In our previous paper [4] we analyzed the regularized case  $\mu > 0$ , while in the present manuscript we treat the substantially more complicated critical case  $\mu = 0$  for the minimally coupled model. As in [4], we include photons corresponding to ever smaller energy shells.

We define a sequence  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  of infrared-cutoff parameters  $\sigma_n$  representing the minimally allowed photon energy at step  $n$  by

$$\sigma_n = \mathfrak{b}^n \sigma_0, \quad 0 < \mathfrak{b} < 1, \quad \text{and} \quad \sigma_0 > 0. \tag{2.30}$$

The choice of  $\sigma_n$  is an important part in the proofs of this paper. It essentially involves all estimates in this manuscript. These are encoded in the next parameters

$$\underline{C}, \quad \underline{\mathfrak{b}}, \quad \underline{\sigma}_0, \quad \kappa, \quad \ell, \tag{2.31}$$

which are independent of  $\theta, \alpha, \beta$ , and  $\nu$ . To specify the selection of the parameters we set  $\theta = i\nu$ , with  $\nu > 0$ . The constant  $\underline{C} \geq 1$  is the most important constant in this paper, as it bounds all other constants that appear in our estimates. As  $\nu$  tends to zero, most of our estimates diverge. This is unavoidable, because resonances are not eigenvalues for  $\nu = 0$ . The parameter  $\kappa$  describes the order of this singularity (at  $\nu = 0$ ). Then, the key bound that appears in our calculations is the function

$$\mathfrak{C}(\nu) := \frac{\underline{C}}{|\sin(\nu)|^\kappa}. \tag{2.32}$$

The restrictions for the constant  $\underline{C}$  are obtained from our calculations throughout this manuscript. In short,  $\underline{C}$  is any constant satisfying

$$\underline{C} \geq C_{(3.15)} + C_{(6.37)} + C_{(6.40)} + C_{(6.46)}, \tag{2.33}$$

where the subscripts of the constants above refer to the labels of the equations in which they are introduced. It follows from the text below (3.15) that

$$\underline{C} \geq 10^5. \tag{2.34}$$

We assume that  $\kappa$  satisfies (we explain below where this restriction comes from)

$$\kappa \geq 6. \tag{2.35}$$

The parameters  $\mathfrak{b}$  and  $\sigma_0$  are related to  $\underline{\mathfrak{b}}$  and  $\underline{\sigma}_0$  as follows:

$$\sigma_0(\nu) \equiv \sigma_0 := \underline{\sigma}_0 |\sin(\nu)|^{(\ell-1)\kappa} \quad \text{and} \quad \mathfrak{b}(\nu) \equiv \mathfrak{b} := \underline{\mathfrak{b}} |\sin(\nu)|^{(\ell-1)\kappa}, \tag{2.36}$$

where we assume that

$$\underline{\sigma}_0 \leq \underline{C}^{-(\ell-1)}, \quad \underline{\sigma}_0 \leq \frac{\delta_a t}{100}, \quad \text{and} \quad \underline{\mathfrak{b}} \leq \frac{1}{4} \underline{C}^{-(\ell-1)}, \tag{2.37}$$

where  $t$  is the momenta threshold [see (2.15)], and  $l \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  are two new parameters. In this paper we assume  $\ell$  to be larger than nine,

$$\ell \geq 9. \tag{2.38}$$

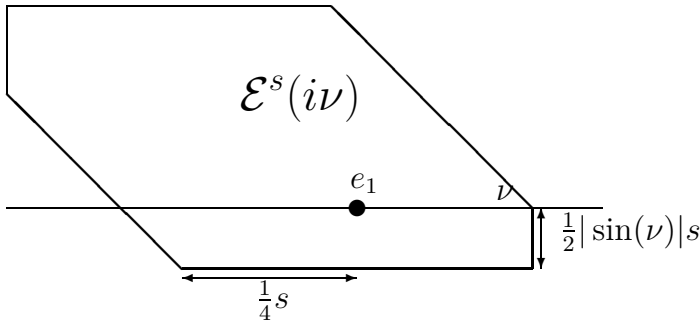
It enters the exponential decay of  $\sigma_n$  that balances the exponential growth of  $\mathfrak{C}(\nu)^n$ . More specifically, it is chosen in such a way that

$$\sigma_0 \mathfrak{C}(\nu)^{\ell-1} \leq 1 \quad \text{and} \quad \mathfrak{b} \mathfrak{C}(\nu)^{\ell-1} \leq \frac{1}{4} \tag{2.39}$$

hold true. The restriction  $\ell \geq 9$  is chosen to obtain (2.50) from (2.47). The restriction  $\kappa \geq 6$  is chosen in order to fulfill the hypotheses of Proposition 3.5 below (see the explanation below that proposition), which is essentially Proposition 2.10 in [4]. Therefore, there is no new restriction here in comparison to our previous work. We remark that there is a change of notation in the present paper with respect to [4]. While in the present paper all constants and expressions chosen *small enough* are universal, i.e., do not depend on other parameters of this paper, several constants in [4] implicitly depend, e.g., on  $\nu$ ,  $\sigma_0$  and  $\beta$  (which is here denoted by  $\mathfrak{b}$ , and in the present text  $\beta$  is the boost parameter). This makes hard, in our previous paper, to understand how small  $\alpha$  must be (in terms of  $\nu$ ). This problem is solved in this manuscript and the parameters  $\kappa$  and  $\ell$  are introduced for this reason. The parameters and the constants in this paper (and in our previous paper [4]) are not optimal. Optimizing constants and parameters is not our concern. Rather, for a better readability of this text, we refrain from providing optimal estimates.

We simplify our notation using

$$\overset{n}{H} := H^{s \equiv \sigma_n}(\underline{\sigma}_0) \quad \text{and} \quad \overset{n}{R}(z) := \left( \overset{n}{H} - z \right)^{-1}, \tag{2.40}$$



**Fig. 1.** Description of the set  $\mathcal{E}^s(i\nu)$ . The symbol  $\nu$  represents the angle between the horizontal and the diagonal lines close to it.

where

$$\underline{\alpha}_0 = (i\nu, \alpha, 0). \tag{2.41}$$

The Hamiltonian  $\overset{n}{H}$  takes only photons with energies larger than  $\sigma_n$  into account. For each  $n$ , we shall determine the (resonant) eigenvalue  $E_n$  of  $\overset{n}{H}$  (related to  $e_1$ ) and take the limit  $n \rightarrow \infty$ , including all photon energies, eventually. The limiting energy  $E_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  is the eigenvalue of  $H^0(\underline{\alpha}_0)$  sought for. To implement this strategy, we make use of an inductive procedure as described in the following section.

*2.2.1. Inductive scheme*

We inductively (and simultaneously) construct a sequence  $(E_m)_{m=-1}^\infty$  of complex numbers, a sequence  $(\mathcal{E}_m)_{m=0}^\infty$  of subsets of the complex plane, and a sequence  $(P_m)_{m=-1}^\infty$  of operators that satisfy the properties listed below. To this end we assume that  $\theta = i\nu$ , with  $\nu > 0$ . We define the closed rectangle  $R_\nu := [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] - i[0, \frac{1}{2} \sin(\nu)] \subseteq \mathbb{C}$  and, for  $s > 0$ , subsets

$$\mathcal{E}^s(i\nu) := e_1 + sR_\nu - e^{-i\nu} \mathbb{R}_0^+ = \{e_1 + s\zeta - e^{-i\nu} r \mid \zeta \in R_\nu, r \geq 0\}, \tag{2.42}$$

of the complex plane, see Fig. 1. Moreover, we set  $E_{-1} := E_0, P_{-1} := P_0$ , and  $\sigma_{-1} := \sigma_0$ .

For  $m \in \mathbb{N}_0$  we formulate the induction hypothesis  $\mathbf{\Pi}(m)$  consisting of the four parts  $\Pi_1(m), \Pi_2(m), \Pi_3(m)$ , and  $\Pi_4(m)$ , below:

$\Pi_1(m)$  We set  $E_{-1} \equiv E_0$ . For  $m \geq 0$ ,  $E_m$  is a simple eigenvalue of  $\overset{m}{H}$  and

$$|E_m - E_{m-1}| < \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{m+1} \sigma_{m-1}^2. \tag{2.43}$$

$\Pi_2(m)$   $E_m$  is the only point in the spectrum of  $\overset{m}{H}$  contained in

$$\mathcal{E}_m := \mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu) \setminus \{z \mid \Im z < \Im E_m - \frac{1}{4} \sin(\nu) \sigma_m\}, \tag{2.44}$$

i.e.,  $\sigma[H] \cap \mathcal{E}_m = \{E_m\}$ .

$\Pi_3(m)$  Let  $\gamma_m : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{E}_m \subseteq \mathbb{C}$  be the parametrization

$$\gamma_m(r) := E_m + \frac{1}{4} \sin(\nu) \sigma_m e^{ir} \tag{2.45}$$

of the circle of radius  $\frac{1}{4} \sin(\nu) \sigma_m$  centered at  $E_m$ . The projection  $P_m$ , defined by the contour integral

$$P_m := \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_m}^m R(z) dz, \tag{2.46}$$

fulfills the norm bound

$$\|P_m - P_{m-1} \otimes P_{\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}}\| \leq \frac{\alpha^{3/2}}{\mathfrak{b}} \mathfrak{C}(\nu)^{2m+2} \sigma_{m-1}^{1/2}, \tag{2.47}$$

where  $P_{\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}}$  denotes the projection onto the subspace generated by the vacuum vector  $\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}} \in \mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}$ , using that  $\mathcal{H}^{\sigma_m} \cong \mathcal{H}^{\sigma_{m-1}} \otimes \mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}$  (in case  $m = 0$  we omit the tensor product).

$\Pi_4(m)$  For any  $z \in \mathcal{E}_m$ , we have that

$$\|R(z) \overline{P}_m\| \leq \frac{\mathfrak{C}(\nu)^{m+1}}{\sigma_m + |z - E_m|}, \tag{2.48}$$

where  $\overline{P}_m := 1_{\mathcal{H}^{\sigma_m}} - P_m$ .

We note that the norm in Estimates (2.47) and (2.48) is the operator norm. We further remark that

$$|E_m - E_{m-1}| \leq \alpha^{3/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sigma_{m-1}, \tag{2.49}$$

$$\|P_m - P_{m-1} \otimes P_{\Omega^{\sigma_m, \sigma_{m-1}}}\| \leq \frac{\alpha^{3/2}}{\mathfrak{b}} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}, \tag{2.50}$$

$$|E_m| \leq |E_0| + 2\alpha^{3/2}, \quad \|P_m\| \leq \|P_0\| + C \alpha^{3/2} \mathfrak{b}^{-1}, \tag{2.51}$$

due to (2.30)-(2.39) applied to (2.43) and (2.47), respectively. Estimate (2.51) results from bounding  $|E_m|$  and  $\|P_m\|$  by geometric series, using (2.49) and (2.50).

The inductive construction defined above is formalized in the following theorem that is proven in Section 6.2.

**Theorem 2.2.** *Assume that  $\theta = i\nu$  and  $\nu > 0$  is sufficiently small, and that  $\alpha^{3/2}/|\sin(\nu)|^{\ell_\kappa}$  is small enough, too. Then, there exist sequences of numbers  $(E_m)_{m=0}^\infty$ , subsets of the complex plane  $(\mathcal{E}_m)_{m=0}^\infty$ , and projection operators  $(P_m)_{m=0}^\infty$ , such that the triple  $(E_m, \mathcal{E}_m, P_m)$  satisfies Hypothesis  $\mathbf{\Pi}(m)$ , for all  $m \in \mathbb{N}_0$ .*

2.2.2. Main result

We observe that  $\mathcal{H}^0 \cong \mathcal{H}^{\sigma_n} \otimes \mathcal{F}^{0,\sigma_n}$  and define  $P_n^\infty := P_n \otimes P_{\Omega^0,\sigma_n}$ . Eqs. (2.43) and (2.47) imply that the limits

$$E_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \quad \text{and} \quad P_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\infty \tag{2.52}$$

exist. The following theorem is the main result of this paper.

**Theorem 2.3.** *Assume that  $\theta = i\nu$  and  $\nu > 0$  is sufficiently small, and that  $\alpha^{3/2}/|\sin(\nu)|^{\ell_\kappa}$  is small enough, too. Then, the complex number  $E_\infty$  is an eigenvalue of  $H^0(\underline{\alpha}_0)$  and the range of  $P_\infty$  consists of corresponding eigenvectors.*

**3. Preliminaries: standard estimates for the infrared-cutoff Hamiltonian**

In this section we collect basic results further used in the sequel. Most of the proofs are standard, and we refer the reader to [9]. The main result of this section is Proposition 3.5 that establishes the induction basis for Theorem 2.2 and provides other ingredients used in the proof of the aforementioned theorem.

In Section 3.1 we collect the results on the spectral properties of the atom Hamiltonian. Section 3.2 is concerned with the infrared cutoff Hamiltonian  $H^{\sigma_0}(\underline{\alpha}_0)$ . The results of this section are summarized in Proposition 3.5.

3.1. The atom Hamiltonian

In the next proposition, we summarize the results on  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$  that are needed further on. For the proof, we encourage the non-specialist reader to consult [18].

**Proposition 3.1.** *For small enough  $|\theta|$ ,  $\alpha$ , and  $|\beta|$ , the following holds true: The ground state energy<sup>1</sup>  $e_0(\underline{\alpha})$  and the first excited eigenvalue  $e_1(\underline{\alpha})$  are the only points in the spectrum of  $H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$  with real part less than  $e_1 + \frac{99}{100}\delta_{\text{at}} < 0$  [see (2.9)], for some  $\delta_{\text{at}} > 0$ . Let*

$$P_{\text{at},0}(\underline{\alpha}) \quad \text{and} \quad P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \tag{3.1}$$

be the Riesz projections onto the eigenspaces corresponding to  $e_0(\underline{\alpha}) \equiv e_0(\alpha)$  and  $e_1(\underline{\alpha}) \equiv e_1(\alpha)$ , respectively. It follows that

$$|e_0(\underline{\alpha}) - e_0|, |e_1(\underline{\alpha}) - e_1| \leq \frac{1}{100} \delta_{\text{at}}, \tag{3.2}$$

$$\|P_{\text{at},0}(\underline{\alpha}) - P_{\text{at},0}(\underline{0})\|, \|P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) - P_{\text{at},1}(\underline{0})\| \leq \frac{1}{100}. \tag{3.3}$$

---

<sup>1</sup> In fact, the eigenvalues  $e_0(\underline{\alpha})$  and  $e_1(\underline{\alpha})$  do not depend on  $\theta$  and  $\beta$ . This is a consequence of Theorem XIII.36(d) in [18].

Furthermore, let  $z \in \mathbb{C} \setminus \{e_0(\underline{\alpha}), e_1(\underline{\alpha})\}$  with  $\Re(z) < e_1 + \frac{99}{100}\delta_{at}$ . Then, denoting

$$\bar{P}_{at,j}(\underline{\alpha}) := \mathbf{1} - P_{at,j}(\underline{\alpha}), \tag{3.4}$$

the following estimate

$$\|(H_{at}(\underline{\alpha}) - z)^{-1}\bar{P}_{at,j}(\underline{\alpha})\| \leq \frac{C}{|z - e_{1-j}(\underline{\alpha})|}, \tag{3.5}$$

holds true, for some constant  $C > 1$  and  $j = 0, 1$ .

Moreover, the range of  $P_{at,1}(\theta, \alpha, 0) = P_{at,1}(\underline{\alpha}_0)$  is contained in the domain of  $e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}$ , and there is a constant  $C$  such that

$$\|(1 + |\mathbf{x}|^2)P_{at,1}(\underline{\alpha}_0)\| + \|e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}P_{at,1}(\underline{\alpha}_0)\| \leq C, \tag{3.6}$$

uniformly in  $\theta, \alpha \rightarrow 0$ .

### 3.2. Basic estimates for the atom-photon system

In this section we establish some basic properties of the atom-photon Hamiltonian and some useful estimates. First, we recall a basic result whose proof can be found, for example, in Lemma 1 of [11].

**Lemma 3.2.** *Let  $g_1 \equiv g_1(\mathbf{x}) \equiv g_1(\mathbf{x}; k), g_2 \equiv g_2(\mathbf{x}) \equiv g_2(\mathbf{x}; k) \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathfrak{h}^{s,t})$  be uniformly bounded functions and assume that  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \| |k|^{-1/2} g_i \|_{\mathfrak{h}^{s,t}} < \infty$  [see (2.10)-(2.13)], where  $i = 1, 2$ . For any  $\rho > 0, \phi \in \text{dom}[(\check{H}^{s,t})^{1/2}]$ , and  $\psi \in \text{dom}[\check{H}^{s,t}]$ , we have that*

$$\|a^\#(g_i)\phi\|_{\mathcal{H}^{s,t}} \leq \|g_i\|_\rho \|(\check{H}^{s,t} + \rho)^{1/2}\phi\|_{\mathcal{H}^{s,t}}, \tag{3.7}$$

$$\|a^\#(g_2)a^\#(g_1)\psi\|_{\mathcal{H}^{s,t}} \leq \|g_2\|_\rho \|g_1\|_\rho \|(\check{H}^{s,t} + \rho)\psi\|_{\mathcal{H}^{s,t}}, \tag{3.8}$$

where

$$\|g_i\|_\rho := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \{\rho^{-1/2} \|g_i(\mathbf{x})\|_{\mathfrak{h}^{s,t}}\} + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \{\|\omega^{-1/2} g_i(\mathbf{x})\|_{\mathfrak{h}^{s,t}}\} \tag{3.9}$$

and  $\omega \equiv \omega(k) := |k|$ .

The next lemma is a straightforward consequence of Lemma 3.2. Its proof requires a lengthy calculation similar to the one in the proof of Lemma 2.3 in [4].

**Lemma 3.3.** *Let  $0 \leq s' \leq s \leq t \leq \infty$ . Suppose that  $\alpha$  and  $|\beta|$  are small enough. There exists a constant  $C$  such that for any  $\rho > 0$ , and any  $\phi$  in the domain of  $H_0^{s',t}(\tilde{\underline{\alpha}})$ , with  $\tilde{\underline{\alpha}} := (\tilde{\theta}, \alpha, \beta)$ , the following estimate holds true*

$$\begin{aligned} \|W^{s,t}(\underline{\alpha})\phi\|_{\mathcal{H}^{s',t}} &\leq C\left((1 + \rho^{-1/2})\alpha^{3/2} + (1 + \rho^{-1/2})^2\alpha^3\right) \\ &\cdot \left(\|(H_0^{s',t}(\tilde{\underline{\alpha}}) + \rho)\phi\|_{\mathcal{H}^{s',t}} + \|\phi\|_{\mathcal{H}^{s',t}}\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

for sufficiently small  $|\theta|, |\tilde{\theta}| > 0$ .

Applying (3.10) with  $s' = s$ , we deduce from standard arguments that the Hamiltonian  $H^{s,t}(\underline{\alpha})$  is a well-defined closed operator in the domain of  $H_0^{s,t}(\underline{\alpha})$  [see (2.19)]. Furthermore, Eq. (3.10), the fact that  $e_0 < 0$ , and a Neumann series expansion readily imply the following corollary.

**Corollary 3.4.** *For every  $0 \leq s' \leq s \leq t$  and  $\rho \leq 2e_0 - 1$ , the following inequalities hold true,*

$$\left\| \frac{1}{H^{s,t}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s',s}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{s,t}} \otimes \check{H}^{s',s}(\theta) - \rho} \right\| \leq 8, \tag{3.11}$$

$$\left\| (H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) - \rho) \frac{1}{H^{s,t}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s',s}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{s,t}} \otimes \check{H}^{s',s}(\theta) - \rho} \right\| \leq 8, \tag{3.12}$$

for sufficiently small  $\alpha^{3/2} \sin(\nu)^{-\ell\kappa}$ ,  $|\beta|, |\theta|$  (with  $\theta = i\nu, \nu > 0$ ).

### 3.2.1. The infrared-cutoff Hamiltonian

In this section we analyze the infrared cutoff Hamiltonian  $H^{\sigma_0}(\underline{\alpha})$ , with  $\theta = i\nu$  and  $\nu > 0$  positive. We assume the restrictions on the parameters  $\underline{\alpha}$  used in previous sections. We recall that the parameter  $\sigma_0$  in the Hamiltonian denotes an infrared cutoff. The infrared cutoff Hamiltonian that we study is almost the same as the one presented in Section 2.2.1 in [4]. We do not repeat all the arguments presented in [4] and state, without proofs, the main properties that we need in the present paper (the proofs following from Section 2.2.1 in [4]). The next proposition is (essentially) proven in Proposition 2.10 in [4].

**Proposition 3.5.** *For sufficiently small  $\nu > 0$  and  $|\beta|$ , and small enough  $\alpha^{3/2}/\sin^{\ell\kappa}(\nu)$ , there is precisely one point  $E_0$  in the spectrum of  $H^{\sigma_0}(\underline{\alpha}) \equiv \overset{0}{H}$  contained in the set  $\mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu)$ . This point  $E_0$  is a simple eigenvalue and obeys*

$$|E_0 - e_1(\underline{\alpha})| \leq \frac{1}{8} \sin(\nu) \sigma_0. \tag{3.13}$$

Furthermore, the Riesz projection  $P_0$  corresponding to  $E_0$  satisfies the norm bound

$$\|P_0 - \mathcal{P}(\underline{\alpha})\| \leq \frac{1}{2} \sin(\nu), \tag{3.14}$$

where  $\mathcal{P}(\underline{\alpha}) = P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \otimes P_{\Omega^{\sigma_0}}$  [see (3.1)]. Moreover, there is a constant  $C_{(3.15)}$  such that for any  $z \in \mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu)$ :

$$\| \overset{0}{R}(z) \overline{P}_0 \| \leq \frac{C_{(3.15)}}{|\sin(\nu)|^2} \frac{1}{\sigma_0 + |z - E_0|}. \tag{3.15}$$

Since Proposition 3.5 is essentially Proposition 2.10 in [4], it is important to explain why our hypotheses in this manuscript imply the assumptions of Proposition 2.10 in [4]. We recall [see the text below (2.39)] that we modified our notation here with respect to [4]. In [4], the dependence of  $\sigma_0$  on  $\nu$  is not explicitly stated (although it does depend on  $\nu$ ). The restriction for  $\alpha$  in Proposition 2.10 in [4] is stated in (2.43) therein. More precisely, it is assumed in [4] that  $\alpha^{3/2} \leq C \sin^6(\nu)\sigma_0$ , for some constant  $C$ . In the present manuscript this assumption is implied by our hypothesis  $\alpha^{3/2}/\sin^{\ell\kappa}(\nu)$  is small enough, because in the present instance  $\sigma_0 = \underline{\sigma}_0 \sin^{(\ell-1)\kappa}(\nu)$  with  $\kappa \geq 6$ .

#### 4. Notation for the inductive scheme and previous results

##### 4.1. Notation

Recall from (2.10)-(2.16) that, for any  $\sigma_m < \sigma_n$ , the disjoint union

$$\mathcal{K}^{\sigma_m} = \mathcal{K}^{\sigma_m, \sigma_n} \cup \mathcal{K}^{\sigma_n} \tag{4.1}$$

gives rise to the isomorphisms

$$\mathfrak{h}^{\sigma_m} \cong \mathfrak{h}^{\sigma_n} \oplus \mathfrak{h}^{\sigma_m, \sigma_n}, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{F}^{\sigma_m} \cong \mathcal{F}^{\sigma_n} \otimes \mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_n}, \tag{4.3}$$

and, consequently,

$$\mathcal{H}^{\sigma_m} \cong \mathcal{H}^{\sigma_n} \otimes \mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_n}. \tag{4.4}$$

We simplify our notation using

$$\overset{n}{H}_0 := \overset{n}{H}_0(\underline{\alpha}_0) := H_0^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) \quad \text{and} \quad \overset{n}{R}_0(z) := \left( \overset{n}{H}_0 - z \right)^{-1}. \tag{4.5}$$

To compare the Hamiltonians  $\overset{n}{H}$  and  $\overset{n+1}{H}$  at successive energy scales we introduce the Hamiltonian

$$\tilde{H}^n := \overset{n}{H} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}} + e^{-\theta} \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\sigma_n}} \otimes \check{H}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}, \tag{4.6}$$

$$\tilde{R}^n(z) = \left( \tilde{H}^n - z \right)^{-1}. \tag{4.7}$$

Recalling the definition (2.24) of the magnetic vector potential  $\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}$ , we introduce the velocity operator  $\mathbf{v}^{\sigma_n} \equiv \mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0)$  acting on  $\mathcal{H}^{\sigma_n}$  by

$$\mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) := -ie^{-\theta}\nabla - \mathbf{A}_{\text{PF}}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) \tag{4.8}$$

and observe that

$$\overset{n}{H} = (\mathbf{v}^{\sigma_n})^2 + b_{\text{PF}}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) + e^{-\theta}\check{H}^{\sigma_n} + V(\underline{\alpha}_0), \tag{4.9}$$

using (2.27). Recall that we identify  $\mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0)$  with  $\mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{\sigma_m, \sigma_n}}$ , which is acting on  $\mathcal{H}^{\sigma_m}$  for any  $m \geq n + 1$ . Then we have,

$$\mathbf{v}^{\sigma_m}(\underline{\alpha}_0) = \mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) - \mathbf{A}_{\text{PF}}^{\sigma_m, \sigma_n}(\underline{\alpha}_0). \tag{4.10}$$

For  $m > n$  we further define the operator

$$\begin{aligned} W_m^n &\equiv W_m^n(\underline{\alpha}_0) := (\mathbf{v}^{\sigma_m}(\underline{\alpha}_0))^2 - (\mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0))^2 + b_{\text{PF}}^{\sigma_m}(\underline{\alpha}_0) - b_{\text{PF}}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) \\ &= -\mathbf{A}_{\text{PF}}^{\sigma_m, \sigma_n}(\underline{\alpha}_0) \cdot \mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) - \mathbf{v}^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0) \cdot A(\underline{\alpha}_0)^{\sigma_m, \sigma_n} \\ &\quad + (A(\underline{\alpha}_0)^{\sigma_m, \sigma_n})^2 + b_{\text{PF}}^{\sigma_m, \sigma_n}(\underline{\alpha}_0), \end{aligned} \tag{4.11}$$

and note that, with this notation,

$$\overset{n+1}{H} = \tilde{H}^n + W_{n+1}^n. \tag{4.12}$$

#### 4.2. Previous results

In our previous work [4], we studied a regularized case ( $\mu > 0$ ) for the Pauli-Fierz model. Although many results from [4] also apply to the present model, the key mechanism of the convergence in [4] does not hold in the critical case  $\mu = 0$ . Some results, however, that we need in this paper are obtained in [4]. In this section we state these results and refer to [4] for the proofs. It is important to notice that in this paper we study the Pauli-Fierz operator obtained after a Pauli-Fierz transformation. This implies that the interaction terms here and in [4] are not the same, but their analysis regarding the purpose of this section is the same. We specify below the details about how to implement our results in [4]. In [4], we explicitly present how small  $\alpha$  must be in order to achieve the results of this section. Here, we just state that  $\alpha$  is sufficiently small. This restriction depends on  $\theta$ , but not on  $n$  and the other parameters. In fact, the radius of the disc of admissible  $\alpha$  tends to zero as a power of  $\sin(\nu)$ .

In this section we fix  $n \in \mathbb{N}_0$  and assume that Hypothesis  $\mathbf{\Pi}(m)$  formulated in Section 2.2.1 holds true for all  $m \leq n$ . We define

$$\tilde{\mathcal{E}}_m := \mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu) \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < \Im(E_m) - \frac{1}{2} \sin(\nu) \sigma_{m+1} \right\}, \tag{4.13}$$

where  $\mathcal{E}^{\sigma_0}(i\nu)$  is defined in (2.42). Notice that  $\mathfrak{C}(\nu) \geq 10^5$ . Hence, from (2.30)-(2.39), it follows that  $\sigma_{n+1} \leq 10^{-5}\sigma_n$ , which in turn, implies that

$$\tilde{\mathcal{E}}_n \subseteq \mathcal{E}_n. \tag{4.14}$$

Moreover, the functional calculus implies that

$$\sigma(\tilde{H}^n) = \sigma(\overset{n}{H}) + (e^{-i\nu}[\sigma_{n+1}, \infty) \cup \{0\}).$$

By (induction) hypothesis,  $E_n$  is the only spectral point of  $\overset{n}{H}$  in  $\mathcal{E}_n$ . Then  $E_n$  is the only spectral point of  $\tilde{H}^n$  in  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ .

**Remark 4.1.** Eq. (4.6) implies that  $E_n$  is an isolated, simple eigenvalue of  $\tilde{H}^n$  since it is an isolated, simple eigenvalue of  $H^n$ . We denote by

$$\tilde{P}_n = P_n \otimes P_{\Omega^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}} \tag{4.15}$$

the projection onto the corresponding eigenspace and observe that

$$\tilde{P}_n := \frac{i}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_n} \tilde{R}^n(z) dz, \tag{4.16}$$

where  $\tilde{\gamma}_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  is the contour

$$\tilde{\gamma}_n(r) := E_n + \frac{\sin(\nu)}{2} \sigma_{n+1} e^{ir}. \tag{4.17}$$

**Lemma 4.2.** For any  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n$ , there is a constant  $C$  such that

$$\|\tilde{R}^n(z) \overline{\tilde{P}_n}\| \leq \left( \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu)} \right) \frac{1}{\sigma_{n+1} + |z - E_n|}, \tag{4.18}$$

where  $\overline{\tilde{P}_n} := \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\sigma_{n+1}}} - \tilde{P}_n$ .

**Proof.** The proof is similar to the proof of Lemma 3.3 in [4].  $\square$

The next proposition follows from the proof of Proposition 3.8 in [4]. In Section 5 we explain how to apply our results from [4] to prove Proposition 4.3 below.

**Proposition 4.3.** Assume that  $\theta = i\nu$ , with  $\nu > 0$  being sufficiently small. Assume furthermore that  $\alpha^{3/2}/\sin(\nu)^{\ell_\kappa}$  is small enough. Suppose that  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  and that  $|z - E_n| \geq \frac{\sin(\nu)\sigma_{n+1}}{10}$ . Then

$$\|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|, \|W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^2(\nu)} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n, \tag{4.19}$$

$$\|W^{\sigma_n} \tilde{R}^n(z)\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^2(\nu)} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}, \tag{4.20}$$

for some constant  $C < \infty$ . Here,  $\mathcal{P}$  is essentially the projection  $P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}_0)$  introduced in (3.1) (its precise definition is given in (5.7) below).

Since Proposition 4.3 is essentially Proposition 3.8 in [4], it is important to explain why our hypotheses in the present manuscript imply the assumptions of Proposition 3.8 in [4]. We argue as in the text below Proposition 3.5, but here we have other constrains. In [4], the dependence of  $\beta$  (which corresponds to  $\mathfrak{b}$  here, in the present manuscript  $\beta$  is the boost parameter instead) on  $\nu$  is not explicitly stated. The restriction for  $\alpha$  in Proposition 3.8 in [4] is stated in Assumption 3.1 in [4]. More precisely, it is assumed that  $\alpha^{3/2}/(\beta \sin(\nu)^2)$  is small enough. In the present manuscript this assumption is implied by our hypothesis that  $\alpha^{3/2}/\sin^{\ell\kappa}(\nu)$  is small enough, because (here)  $\mathfrak{b} = \underline{\mathfrak{b}} \sin^{(\ell-1)\kappa}(\nu)$  with  $\kappa \geq 6$  and  $\ell \geq 9$  [see (2.35) and (2.38)].

We close this section with a Lemma that follows from Lemma 4.2 above and is used in the estimates for the Feshbach-Schur map in Section 6.1.

**Lemma 4.4.** *Suppose that  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  and that  $|z - E_n| \geq \frac{1}{10} \sin(\nu) \sigma_{n+1}$ . Then, there is a constant  $C$  such that*

$$\|W^{\sigma_{n+1}} \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)\| \leq \frac{C \alpha^{3/2} (\mathfrak{C}(\nu))^{n+1}}{\mathfrak{b} \sin(\nu) \sigma_n}. \tag{4.21}$$

**Proof.** We first take  $\rho = 2e_0 - 1$  and use (3.10) (with  $\rho = 1$ ) and Corollary 3.4 to get

$$\left\| W^{\sigma_{n+1}} \mathcal{P} \tilde{R}^n(\rho) \right\| \leq C \alpha^{3/2} \left\{ \left\| H_0 \tilde{R}^n(\rho) \right\| + \left\| \tilde{R}^n(\rho) \right\| \right\} \leq C' \alpha^{3/2}, \tag{4.22}$$

for suitable constants  $C < C'$ . Furthermore,

$$\begin{aligned} \left\| (\tilde{H}^n - \rho) \tilde{R}^n(z) \right\| &\leq 1 + |z - \rho| \cdot \left\| \tilde{R}_n(z) (\tilde{P}_n + \overline{\tilde{P}_n}) \right\| \\ &\leq 1 + (|z - E_n| + |E_n - \rho|) \left( \frac{\|P_n\|}{|z - E_n|} + \left\| \tilde{R}_n(z) \overline{\tilde{P}_n} \right\| \right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Now,  $|E_n|, \|P_n\| \leq C$  are bounded uniformly in  $n$ , according to (2.51) which follows from the induction hypothesis. Moreover, using Lemma 4.2, and that  $\sigma_{n+1} = \mathfrak{b} \sigma_n$ , we further obtain

$$\left\| (\tilde{H}^n - \rho) \tilde{R}^n(z) \right\| \leq 1 + \left( C + |z - E_n| \right) \left( \frac{C}{|z - E_n|} + \frac{C}{\sin(\nu) \mathfrak{b} \sigma_n + |z - E_n|} \frac{(\mathfrak{C}(\nu))^{n+1}}{\sigma_n} \right). \tag{4.24}$$

The asserted bound (4.21) is now immediate from (4.22) combined with (4.24) and the assumption  $|z - E_n| \geq \frac{1}{10} \sin(\nu)\sigma_{n+1}$ .  $\square$

**5. Analysis of the criticality and comparison to [4]**

In the regularized case ( $\mu > 0$ ), one of the key estimates for our proof in [4] is the control of the interaction  $W_{n+1}^n$  with respect to the resolvent operator  $\tilde{R}^n(z)$  (i.e.,  $\|W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$ , see Proposition 4.3 in the present paper and Proposition 3.8 in [4]). In [4], the infrared regularization implies that  $\|W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$  can be bounded by a power of  $\sigma_n^\mu$  and this is the reason that the whole method works. In the present situation the best we can do is to bound  $\|W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$  by an exponentially increasing (with respect to  $n$ ) term. This does not even allow us to close the induction scheme, see Theorem 2.2. As we indicate below, however, the quantity  $\|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$  (as well as  $\|W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)\|$ ) does decay as a power of  $\sigma_n$ . The key strategy of this paper is to find a method which allows to trade  $W_{n+1}^n$  for  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n$  and  $W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)$ . This is achieved using the exponential decay of the eigenfunctions, applying a suitable Feshbach-Schur map. Then, our key estimates are derived after a Feshbach-Schur transformation. Using inversion formulas for the Feshbach-Schur map we close the induction scheme in Theorem 2.2. The proof of Theorem 2.2, which is the main novelty of the present paper, is the content of Section 6. In this section we argue that  $\|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$  decays as a power of  $\sigma_n$ , even if  $\mu = 0$ . The argument that applies to  $\|W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z)\|$  is similar and details are omitted. It uses that  $\langle \mathbf{x} \rangle^2 \mathcal{P}$  is bounded and, therefore, the factor  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-2}$  next to  $W_{n+1}^n$  is obtained. That is,

$$W_{n+1}^n \mathcal{P} \tilde{R}^n(z) = (W_{n+1}^n \langle \mathbf{x} \rangle^{-2}) (\langle \mathbf{x} \rangle^2 \mathcal{P}) \tilde{R}^n(z).$$

In [4] we studied the interaction term  $W_{n+1}^{n,(\text{old})}$ , which is similar to, but not identical with, the interaction  $W_{n+1}^n$  analyzed in the present paper. (The additional superscript “(old)” is meant to indicate that we refer to [4].) The interaction operator  $W_{n+1}^{n,(\text{old})}$  is estimated using the terms that are collected in the sets  $\mathcal{W}_1^{(\text{old})}$  and  $\mathcal{W}_2^{(\text{old})}$ ; see Definition 2.11 in [4].

The key idea for the study of  $\|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W_{n+1}^n \tilde{R}^n(z)\|$  is to realize that the analysis of the terms of the form  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-2} W$ , for  $W \in \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_1$  (see Definition 5.1 below), is similar (essentially equivalent) to the analysis of the elements of  $\mathcal{W}_2^{(\text{old})} \cup \mathcal{W}_1^{(\text{old})}$ , with  $\mu = 1$ , see (2.21). This is achieved by showing that the elements of  $\mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_1$  feature factors of the form  $|k|\mathbf{x}$  (or similar). The operator  $\mathbf{x}$  is controlled by  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-2}$  (this is why we need this term) and  $|k|$  is an infrared regularization which is the reason that we take  $\mu = 1$  above. We explain this in detail in Paragraphs 5.0.0.1 and 5.0.0.2 below.

**Definition 5.1.** For  $n \in \mathbb{N}_0$ , we define the following families of operators:

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ (A_{\text{PF}}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n})^2 \right\} \cup \left\{ (A_j^{\sigma_{n+1}, \sigma_n})^* A_q^{\sigma_{n+1}, \sigma_n} \right\}_{j, q \in \{1, 2, 3\}}$$

$$\begin{aligned} &\cup \left\{ (A_i^{\sigma_{n+1}, \sigma_n})^* [A_j^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}, v_q^{\sigma_n}] \right\}_{i,j,q \in \{1,2,3\}} \\ &\cup \left\{ [(A_j^{\sigma_{n+1}, \sigma_n})^*, v_q^{\sigma_n}] A_i^{\sigma_{n+1}, \sigma_n} \right\}_{i,j,q \in \{1,2,3\}}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ b_{\text{PF}}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n} \right\} \cup \left\{ [A_j^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}, v_q^{\sigma_n}] \right\}_{j,q \in \{1,2,3\}}. \tag{5.2}$$

5.0.0.1. *Analysis of  $\mathcal{W}_2$*  The terms in  $\mathcal{W}_2$  and  $\mathcal{W}_2^{\text{(old)}}$  look the same, but in the latter we have the magnetic potential  $\mathbf{A}^{s,t}$  defined in (2.22) instead of  $\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}$ . We recall that [see (2.24)]

$$\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}_0) = \mathbf{A}^{s,t}(\underline{\alpha}_0) - e^{-\theta} \nabla_x \lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}_0), \tag{5.3}$$

where  $\underline{\alpha}_0 = (\theta, \alpha, 0)$ ,

$$\lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}_0) = a^*(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}) \cdot \mathbf{x}) + a(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^{\bar{\theta}} \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}) \cdot \mathbf{x}), \tag{5.4}$$

and

$$\mathbf{A}^{s,t}(\theta) := a^*(\mathbf{G}^{s,t}(\theta)) + a(\mathbf{G}^{s,t}(\bar{\theta})). \tag{5.5}$$

The subtraction of the gradient  $e^{-\theta} \nabla_x \lambda_{\text{PF}}^{s,t}$  (with respect to the position coordinates,  $\mathbf{x}$ ) of  $e^{-\theta} \lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)$  in (5.3) regularizes the infrared behavior effectively. This plays the role of an extra factor that behaves as  $|k||\mathbf{x}|\eta(|k||\mathbf{x}|)$  multiplying  $\mathbf{G}^{s,t}$ , i.e., it gives the same effect as if we had  $\mu = 1$  but also an extra unbounded factor  $|\mathbf{x}|$  in the coupling function  $\mathbf{G}^{s,t}$ . We describe this in the following. We analyze only the term that results when the gradient is applied to the factor  $\mathbf{x}$  in  $\lambda_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)$  (which is the most difficult one: the other term, the gradient of  $\eta(|k||\mathbf{x}|)$ , gives rise directly to the factor  $|k|$  that we are looking for). Then we obtain the next term as

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^{s,t}(\theta) - a^*(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)) - a(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^{\bar{\theta}} \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}_0)) \\ &= a^*(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta [\mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha}_0) - \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)]) \\ &\quad + a(\eta(|\mathbf{x}||k|) e^{\bar{\theta}} [\mathbf{G}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}_0) - \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}_0)]) \\ &\quad + a^*([1 - \eta(|\mathbf{x}||k|)] e^\theta \mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)) + a([1 - \eta(|\mathbf{x}||k|)] e^{\bar{\theta}} \mathbf{G}^{s,t}(\bar{\underline{\alpha}}_0)). \end{aligned} \tag{5.6}$$

The term  $\eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta [\mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha}_0) - \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)]$  already exhibits the behavior that we are looking for, because the factor  $e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  in  $\mathbf{G}^{s,t}$  gives rise to the factor  $e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - 1$  in  $\eta(|\mathbf{x}||k|) e^\theta [\mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha}_0) - \mathbf{G}_{x=0}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)]$ , and we obtain the desired behavior observing that  $|e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - 1| \leq \alpha |\mathbf{x}||k|$ .

Uncovering the right behavior of  $\mathbf{G}^{s,t}(\underline{\alpha}_0)(1 - \eta(|\mathbf{x}||k|)) e^\theta$  is straightforward. Namely, it follows from the observation that on the support of  $1 - \eta(|\mathbf{x}||k|)$  we have that  $|\mathbf{x}||k| \geq 1$ .

Therefore, we have that  $|1 - \eta(|\mathbf{x}||k|)| \leq |\mathbf{x}||k||1 - \eta(|\mathbf{x}||k|)|$ , and we obtain the factor  $|\mathbf{x}||k|$  that we sought for. This construction is essentially due to Sigal [19].

*5.0.0.2. Analysis of  $\mathcal{W}_1$*  One difference between the terms in  $\mathcal{W}_1$  and  $\mathcal{W}_1^{(\text{old})}$  is that in the latter we have the magnetic potential  $\mathbf{A}^{s,t}$  defined in (2.22) instead of  $\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}$ . This issue has already been addressed in Paragraph 5.0.0.1. The other difference is the term  $b_{\text{PF}}^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}$ . This term already contains the regularizing factor  $|k|\eta(|\mathbf{x}||k|)\mathbf{x}$  by definition, see (2.25).

*5.1. The Feshbach-Schur map*

Here, we present the Feshbach-Schur map that is a key ingredient in our proofs. For any  $0 \leq s' \leq s < t \leq \infty$ , we extend the definition of the projection  $P_{\text{at},1}(\underline{\alpha})$  [introduced in (3.1)] to  $\mathcal{H}^{s,t}$  and  $\mathcal{H}^{s',t}$ , respectively, by

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(\underline{\alpha}) := P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s,t}} \equiv P_{\text{at},1}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s',t}}, \tag{5.7}$$

$$\overline{\mathcal{P}} := \overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}) := \mathbf{1} - \mathcal{P}(\underline{\alpha}), \tag{5.8}$$

recalling that  $\underline{\alpha} = (\theta, \alpha, \beta)$ . We define

$$\dot{H} := \dot{H}(\underline{\alpha}) := H^{s,t}(\underline{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}^{s',s}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{s,t}} \otimes \check{H}^{s',s}(\theta) \tag{5.9}$$

and

$$\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} := \dot{H}_{\overline{\mathcal{P}},\beta} := \overline{\mathcal{P}}\dot{H}\overline{\mathcal{P}}. \tag{5.10}$$

We (formally) define the Feshbach-Schur map corresponding to the projection (5.7) as

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z) := \mathcal{P}(\dot{H} - z)\mathcal{P} - \mathcal{P}\dot{H}\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\dot{H}\mathcal{P}. \tag{5.11}$$

Note that

$$\mathcal{P}\dot{H}\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}W^{s,t}\overline{\mathcal{P}}, \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{P}}\dot{H}\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}W^{s,t}\mathcal{P}. \tag{5.12}$$

If  $\alpha$  is sufficiently small then  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  defines a closed operator. The importance of  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  lies in its *isospectrality*, that is,  $z \in \sigma[\dot{H}] \Leftrightarrow 0 \in \sigma[\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)]$  and, for  $z \notin \sigma[\dot{H}]$ , there are explicit formulae for both the resolvent of  $\dot{H} - z$  in terms of the resolvent of  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  and, conversely, for the resolvent of  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  in terms of the resolvent of  $\dot{H} - z$ . Similarly, there are explicit formulae for both the eigenvectors of  $\dot{H}$  corresponding to the eigenvalue  $z$  in terms of the kernel of  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  and vice versa. The precise formulation of these statements is given in Lemma 5.2 below.

**Lemma 5.2.** *Suppose that  $\theta = i\nu$ , with  $\nu > 0$ , and  $|\theta|$  and  $\alpha^{3/2}/\sin(\nu)$  are sufficiently small. Then, for any  $z \in \mathcal{E}^{\delta_{\text{at}}/2}(\theta)$ , the following statements hold true:*

- (i)  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(z) := \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z)$  is invertible on  $\mathcal{PH}^{s',t}$  if and only if  $\dot{H} - z$  is invertible on  $\mathcal{H}^{s',t}$  and in this case

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\dot{H} - z))^{-1} = \mathcal{P}(\dot{H} - z)^{-1}\mathcal{P} \tag{5.13}$$

and

$$(\dot{H} - z)^{-1} = Q_{\mathcal{P}}(z)\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(z)^{-1}Q_{\mathcal{P}}^{\#}(z) + \overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}, \tag{5.14}$$

where

$$Q_{\mathcal{P}}(z) := \mathcal{P} - \overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}W^{s,t}(\underline{\alpha})\mathcal{P} \tag{5.15}$$

$$Q_{\mathcal{P}}^{\#}(z) := \mathcal{P} - \mathcal{P}W^{s,t}(\underline{\alpha})\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}. \tag{5.16}$$

- (ii) If  $\dot{H}\psi = z\psi$ , for some eigenvector  $\psi \in \mathcal{H}^{s',t} \setminus \{0\}$  and eigenvalue  $z \in \mathcal{E}^{1/2\delta_{\text{at}}}(\theta)$ , then  $\mathcal{P}\psi \in \mathcal{PH}^{s',t} \setminus \{0\}$  solves  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(z)\mathcal{P}\psi = 0$  and

$$\|\mathcal{P}\psi\| \geq \frac{\|\psi\|}{1 + \|\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\dot{H}\mathcal{P}\|}. \tag{5.17}$$

- (iii) If  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(z)\phi = 0$ , for some eigenvector  $\phi = \mathcal{P}\psi \in \mathcal{PH}^{s',t} \setminus \{0\}$ , then  $\psi := Q_{\mathcal{P}}(z)\phi$  is an eigenvector of  $(\dot{H})$  with corresponding eigenvalue  $z$ , i.e.,  $\dot{H}\psi = z\psi$  and  $\psi \in \mathcal{H}^{s',t} \setminus \{0\}$ .

- (iv)

$$\dim \ker(\dot{H} - z) = \dim \ker \mathcal{F}_{\mathcal{P}}. \tag{5.18}$$

**Proof.** See the proof of Theorem II.1 in [8].  $\square$

The decomposition of the resolvent provided in (5.14) is the crucial ingredient that allows us to implement the inductive scheme prepared in Sect. 2.2.1, namely to provide the estimate

$$\|(\overset{n+1}{H} - z)^{-1} - (\tilde{H}^n - z)^{-1}\| \leq \frac{C\alpha^{3/2}}{\sin^4(\nu)} \frac{(\mathfrak{C}(\nu)^2)^{n+1}}{\mathfrak{b}\sigma_{n+1}} \sigma_n^{1/2} \tag{5.19}$$

in Theorem 6.5, as if the interaction were irrelevant. Indeed, from the formula

$$P_{n+1} - \tilde{P}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_n} [(\overset{n+1}{H} - z)^{-1} - (\tilde{H}^n - z)^{-1}] dz, \tag{5.20}$$

combined with estimate (5.19), in Theorem 6.6 we derive the bound

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{2(n+1)} \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^4(\nu)} \sigma_n^{1/2}, \tag{5.21}$$

that ensures the convergence of the inductive scheme.

**Lemma 5.3.** *Suppose that  $\theta = i\nu$  ( $\nu > 0$ ), and  $|\theta|$  and  $\alpha^{3/2}/\sin(\nu)$  are sufficiently small. Then  $\mathcal{E}^{\delta_{\text{at}}/2}(\theta)$  is contained in the resolvent set of  $\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}}$  (as an operator on the range of  $\overline{\mathcal{P}}$ ), and, for every  $z \in \mathcal{E}^{\delta_{\text{at}}/2}(\theta)$ ,*

$$\|(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1} \overline{\mathcal{P}}\| \leq \left( \frac{C}{\sin(\nu)} \right) \frac{1}{\delta_{\text{at}} + |z - e_0(\underline{\alpha})|}, \tag{5.22}$$

for some constant  $C$ .

**Proof.** Let  $\zeta \in \mathcal{E}^{\delta_{\text{at}}/2}(\theta) \setminus \{e_1(\underline{\alpha})\}$ . The spectral theorem and (3.5) imply that there are constants  $C$  such that

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{H_0^{s',t}(\theta, \alpha, \beta) - \zeta} \overline{\mathcal{P}} \right\| &\leq C \sup_{s \geq 0} \left\{ \frac{1}{|\zeta - e_0(\underline{\alpha}) - e^{-i\nu s}|} \right\} \\ &\leq \left( \frac{C}{\sin(\nu)} \right) \frac{1}{\delta_{\text{at}} + |\zeta - e_0(\underline{\alpha})|} \end{aligned} \tag{5.23}$$

and, similarly, for  $\rho = 2e_0 - 1$

$$\begin{aligned} \left\| (H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) - \rho) \frac{1}{H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) - \zeta} \overline{\mathcal{P}} \right\| &\leq C + \left\| \frac{|\zeta - \rho|}{H_0^{s',t}(\theta, \alpha, \beta) - \zeta} \overline{\mathcal{P}} \right\| \\ &\leq C + \frac{C}{\sin(\nu)} \frac{|\zeta - \rho|}{\delta_{\text{at}} + |\zeta - e_0(\underline{\alpha})|} \\ &\leq \frac{C}{\sin(\nu)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Furthermore, Lemma 3.3 implies that

$$\left\| W^{s,t}(\underline{\alpha}) \frac{1}{H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) - \rho} \right\| \leq C \alpha^{3/2}, \tag{5.25}$$

and these estimates (5.23)-(5.25) allow us to construct  $(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - \zeta)^{-1} \overline{\mathcal{P}}$  by a norm-convergent Neumann series,

$$(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - \zeta)^{-1} \overline{\mathcal{P}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\overline{\mathcal{P}}}{H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) - \zeta} \right) \left[ -W^{s,t}(\underline{\alpha}) \left( \frac{\overline{\mathcal{P}}}{H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) - \zeta} \right) \right]^n, \tag{5.26}$$

using that  $H_0^{s',t}(\underline{\alpha})$  and  $\mathcal{P}$  commute, according to (2.19). To establish its convergence we estimate the norm of the  $n$ th order term in brackets by  $(1/2)^n$ . We achieve this by taking  $\alpha$  so small that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}$  is bounded by a sufficiently small constant.  $\square$

**Lemma 5.4.** *Suppose that  $\theta = i\nu$ , with  $\nu > 0$ , and  $|\theta|$  and  $\alpha^{3/2}/\sin(\nu)$  are sufficiently small. Then there is a constant  $C$  such that, for every  $z \in \mathcal{E}^{\delta_{\text{at}}/2}(\theta)$  and  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,*

$$\|\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\dot{H}\mathcal{P}\| + \|\mathcal{P}\dot{H}\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\| \leq \frac{C\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}, \tag{5.27}$$

$$\|(H_0^{s',t}(\underline{\alpha}) + \zeta)\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\| \leq \frac{C}{\sin(\nu)}(1 + |z + \zeta|), \tag{5.28}$$

and, if  $s' \leq \sigma_{n+1} < \sigma_n \leq t$ , then

$$\|\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}W_{n+1}^n\mathcal{P}\| + \|\mathcal{P}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\| \leq \frac{C\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\sigma_n^{3/2} \tag{5.29}$$

**Proof.** The proof of (5.27) is similar to the one of (5.22). We expand the Neumann series of  $(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}$  and multiply by the corresponding operators in (5.27). Although (5.29) is proved similarly to (5.22) and (5.27), it is more interesting because of the appearance of a factor  $\sigma_n^{3/2}$  on the right side of the estimate. Here we only prove that (for some constant  $C$ )

$$\|\mathcal{P}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\| \leq \frac{C\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\sigma_n^{3/2} \tag{5.30}$$

in order to present the method. To prove (5.30), we first observe that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\| &\leq \|\mathcal{P}\langle \mathbf{x} \rangle^2\| \cdot \|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2}W_{n+1}^n(\check{H}^{\sigma_{n+1},\sigma_n} + 1)^{-1}\| \\ &\quad \cdot \|(\check{H}^{\sigma_{n+1},\sigma_n} + 1)(\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}\overline{\mathcal{P}}\| \end{aligned} \tag{5.31}$$

and then estimate the factors on the right side separately, starting with  $\|\mathcal{P}\langle \mathbf{x} \rangle^2\| \leq C$ , due to the decay of the atomic eigenfunction  $\phi_{\text{at},1}$ , see (3.6). It follows from Lemma 2.12 in [4] that

$$\|\langle \mathbf{x} \rangle^{-2}W_{n+1}^n(\check{H}^{\sigma_{n+1},\sigma_n} + 1)^{-1}\| \leq C\alpha^{3/2}\sigma_n^{3/2}. \tag{5.32}$$

A few words are required to explain how we deduce this formula from [4]. In [4], we consider an interaction term with an infrared regularization, as the coupling function is bounded by  $C|k|^{-\frac{1}{2}+\mu}$ , as  $k \rightarrow 0$ . As we explain in Section 5, the analysis of  $\langle \mathbf{x} \rangle^{-2}W_{n+1}^n$  is equivalent to the analysis of the infrared regular model of [4] with  $\mu = 1$ . Then (5.32) follows from Lemma 2.12 in [4] taking  $\mu = 1$  in (2.59) of [4] and recalling that  $W_{n+1}^{n,(\text{old})}$  (in [4]) is estimated in terms of the elements  $w$  that appear in (2.60) of [4].

Now we expand the operator in the third norm factor on the right side of (5.31) in a Neumann series,

$$\begin{aligned}
 & (\check{H}^{\sigma_m, \sigma_n} + 1) (\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1} \overline{\mathcal{P}} \\
 &= (\check{H}^{\sigma_m, \sigma_n} + 1) \frac{\overline{\mathcal{P}}}{H_0^{s', t}(\underline{\alpha}) - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -W^{s, t}(\theta, \alpha, \beta) \left( \frac{\overline{\mathcal{P}}}{H_0^{s', t}(\underline{\alpha}) - z} \right) \right]^n.
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

For sufficiently small  $\alpha^{3/2} / \sin(\nu)$ , it follows from (5.23)-(5.25) that

$$\left\| W^{s, t}(\underline{\alpha}) \frac{\overline{\mathcal{P}}}{H_0^{s', t}(\theta, \alpha, \beta) - z} \overline{\mathcal{P}} \right\| \leq \frac{1}{2}.
 \tag{5.34}$$

The spectral theorem and (3.5) (and geometric relations in the complex plane) imply that

$$\begin{aligned}
 \left\| (\check{H}^{\sigma_m, \sigma_n} + 1) \frac{\overline{\mathcal{P}}}{H_0^{s', t}(\underline{\alpha}) - z} \right\| &\leq \sup_{r, s > 0} \left\| \frac{(r + 1) \overline{\mathcal{P}}_{\text{at}, 1}(\underline{\alpha})}{H_{\text{at}}(\underline{\alpha}) - z + e^{-i\nu}(r + s)} \right\| \\
 &\leq C \sup_{r, s > 0} \left\{ \frac{(r + 1)}{|e_0(\underline{\alpha}) - z + e^{-i\nu}(r + s)|} \right\} \\
 &\leq \frac{C}{\sin(\nu)}.
 \end{aligned}
 \tag{5.35}$$

Eqs. (5.31)-(5.35) imply (5.30).  $\square$

**Proposition 5.5** (Exponential decay of the eigenfunctions). *Suppose that  $\theta = i\nu$ , with  $\nu > 0$ , and  $|\theta|$  and  $\alpha^{3/2} / \sin(\nu)$  are sufficiently small and  $\beta = 0$ . If  $z \in \mathcal{E}^{\delta_{\text{at}}/2}(\theta)$  is an eigenvalue of  $\dot{H}$  and  $\psi \neq 0$  a corresponding eigenfunction, then there is a constant  $C$  such that, for small enough  $\beta' \geq 0$ ,*

$$\|e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle} \psi\| \leq C \|\psi\|.
 \tag{5.36}$$

The constant  $C$  neither depends on  $\alpha$ ,  $\beta'$ , or  $\theta$ , nor on  $s'$ ,  $s$ , or  $t$ .

**Proof.** We apply Lemma 5.2 with projection  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)$  and interaction  $W^{s, t}(\underline{\alpha}_0)$ , so that

$$Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)}(z) = \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0) - \overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}_0) (\dot{H}_{\overline{\mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)}} - z)^{-1} \overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}_0) W^{s, t}(\underline{\alpha}_0) \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0),
 \tag{5.37}$$

recalling that  $\underline{\alpha}_0 = (\theta, \alpha, 0)$ . Consequently, the nonzero vectors in the kernel of  $\dot{H} - z$  are of the form  $\psi = Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)}(z)\phi$ , where  $\phi = \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)\phi \in \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)\mathcal{H}^{s', t} \setminus \{0\}$  and  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)}(z)\phi = 0$ , see (5.7)-(5.11). Below in this proof, we write  $\underline{\alpha}' := (\theta, \alpha, -\beta')$ , with  $\beta' \geq 0$  [note the sign of the third component - only for notation convenience we assume in some

places in this paper that the boost parameter is positive] and observe that, due to  $e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle} Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)}(z) = Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}')}(z) e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle}$ , we have that

$$\begin{aligned} \|e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle} \psi\| &= \|e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle} Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)}(z) \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0) \phi\| = \|Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}')}(z) e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle} \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0) \phi\| \\ &\leq \|Q_{\mathcal{P}(\underline{\alpha}')}(z)\| \|e^{\beta' \langle \mathbf{x} \rangle} \mathcal{P}(\underline{\alpha}_0)\| \|\phi\| \leq C \|\phi\|, \end{aligned} \tag{5.38}$$

where we used (3.3), (3.6) and (5.27). By (5.37) and (3.3) we have that

$$\|\psi\| \geq (1 - \frac{1}{4}) \|\phi\|, \tag{5.39}$$

for small enough  $\alpha^{3/2} / \sin(\nu)$ . (5.36) is a direct consequence of (5.38) and (5.39).  $\square$

### 6. Proof of Theorem 2.2

This section is devoted to the proof of our main result, Theorem 2.2, which we break up into three main steps.

- First, we derive a series of estimates on the Feshbach operator  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overset{n+1}{H} - z)$  –which results for applying the Feshbach-Schur map to  $\overset{n+1}{H} - z$ – and its resolvent in the first part of Section 6.1.
- In the second part of Section 6.1 we apply these estimates to derive, in turn, estimates on the resolvent of the Hamiltonian  $\overset{n+1}{H} - z$  itself. The main estimate is the one formulated in Theorem 6.5. We consider this to be the most innovative part of the present paper.
- The third step is the inductive proof of Theorem 2.2 in Section 6.2, for which the estimates derived in Section 6.1 are the key input.

#### 6.1. Key estimates

**Assumption 6.1.** In this section we assume that  $\alpha / |\sin(\nu)|^{\ell_\kappa}$ ,  $|\theta|$ , and  $|\beta|$  are small enough such that the results of Sections 3, 4, and 5.1 are valid. In the hypotheses of the statements of our results in this section we only report the new restrictions that appear for the first time. Moreover, we assume that  $n \in \mathbb{N}_0$  is fixed and Hypotheses  $\mathbf{\Pi}(0)$ ,  $\mathbf{\Pi}(1), \dots, \mathbf{\Pi}(n)$  of Section 2.2.1 hold true.

#### Estimates for the Feshbach-Schur map

**Theorem 6.2.** *Suppose that  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  and that  $|z - E_n| \geq \frac{1}{10} \sin(\nu) \sigma_{n+1}$ . Then, there is a constant  $C$  such that*

$$\left\| \left( \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overset{n+1}{H} - z) - \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z) \right) \frac{1}{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z)} \right\| \leq \frac{C \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n^{1/2}}{\mathfrak{b} \sin^3(\nu)}. \tag{6.1}$$

**Proof.** In the proof we abbreviate  $R^{n+1} := (H - z)^{-1}$ ,  $\tilde{R}^n := (\tilde{H}^n - z)^{-1}$ ,  $R_{\overline{\mathcal{P}}}^{n+1} := (H_{\overline{\mathcal{P}}} - z)^{-1}$ ,  $\tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}}}^n := (\tilde{H}_{\overline{\mathcal{P}}}^n - z)^{-1}$ ,  $H_{\overline{\mathcal{P}}}^{n+1} := \overline{\mathcal{P}} H^{n+1} \overline{\mathcal{P}}$ , and  $\tilde{H}_{\overline{\mathcal{P}}}^n := \overline{\mathcal{P}} \tilde{H}^n \overline{\mathcal{P}}$ , so that

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z) = \mathcal{P}(\tilde{H}^n - z)\mathcal{P} - \mathcal{P}W^{\sigma_n}\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}}}^n\overline{\mathcal{P}}W^{\sigma_n}\mathcal{P}, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(H^{n+1} - z) = \mathcal{P}(H^{n+1} - z)\mathcal{P} - \mathcal{P}W^{\sigma_{n+1}}\overline{\mathcal{P}}R_{\overline{\mathcal{P}}}^{n+1}\overline{\mathcal{P}}W^{\sigma_{n+1}}\mathcal{P}. \tag{6.3}$$

Moreover,  $(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z))^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{P}\tilde{R}^n(z)\mathcal{P}$ , according to Lemma 5.2. Therefore,

$$\left(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(H^{n+1} - z) - \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z)\right) \frac{1}{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z)} = X_1 - X_2 - X_3 - X_4, \tag{6.4}$$

where

$$X_1 := \mathcal{P}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}^n\mathcal{P}, \tag{6.5}$$

$$X_2 := \mathcal{P}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}R_{\overline{\mathcal{P}}}^{n+1}\overline{\mathcal{P}}W^{\sigma_{n+1}}\mathcal{P}\tilde{R}^n\mathcal{P}, \tag{6.6}$$

$$X_3 := -\mathcal{P}W^{\sigma_n}\overline{\mathcal{P}}R_{\overline{\mathcal{P}}}^{n+1}\overline{\mathcal{P}}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}}}^n\overline{\mathcal{P}}W^{\sigma_{n+1}}\mathcal{P}\tilde{R}^n\mathcal{P}, \tag{6.7}$$

$$X_4 := \mathcal{P}W^{\sigma_n}\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}}}^n\overline{\mathcal{P}}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}^n\mathcal{P}. \tag{6.8}$$

Proposition 4.3 and (3.6) imply that

$$\|X_1\| \leq \frac{C\alpha^{3/2}\mathfrak{C}(\nu)^{n+1}\sigma_n}{\mathfrak{b}\sin^2(\nu)}. \tag{6.9}$$

The second term and the fourth term are each estimated by means of Lemma 4.4, (5.29), (3.6), Proposition 4.3, (4.19), and (5.27)

$$\begin{aligned} & \|X_2\| + \|X_4\| \\ & \leq \|\mathcal{P}W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}R_{\overline{\mathcal{P}}}^{n+1}\overline{\mathcal{P}}\| \cdot \|W^{\sigma_{n+1}}\mathcal{P}\tilde{R}^n\mathcal{P}\| + \|\mathcal{P}W^{\sigma_n}\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}}}^n\overline{\mathcal{P}}\| \cdot \|W_{n+1}^n\overline{\mathcal{P}}\tilde{R}^n\mathcal{P}\| \\ & \leq \left(\frac{C\alpha^{3/2}\mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\mathfrak{b}\sigma_n\sin(\nu)}\right) \cdot \left(\frac{C\alpha^{3/2}\sigma_n^{3/2}}{\sin(\nu)}\right) \\ & \quad + \left(\frac{C\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^{3/2}\mathfrak{C}(\nu)^{n+1}\sigma_n}{\mathfrak{b}\sin(\nu)^2}\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

To bound the third term we use that  $e^{-\beta\langle x \rangle} H^{n+1}(\underline{\alpha}_0) e^{\beta\langle x \rangle} = H^{n+1}(\underline{\alpha})$  and hence

$$\|e^{-\beta\langle x \rangle} W^{\sigma_n}(\underline{\alpha}_0)\overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}_0)R_{\overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}_0)}^{n+1}\overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}_0)e^{\beta\langle x \rangle}\| \tag{6.11}$$

$$= \|W^{\sigma_n}(\underline{\alpha}) \overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha}) \overline{R}^{\overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha})} \overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha})\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\sin(\nu)},$$

see (5.27). Eq. (6.11), Lemma 4.4, and (5.29) then yield (see also (3.6))

$$\begin{aligned} \|X_3\| &\leq \|\mathcal{P} e^{\beta(\mathbf{x})}\| \cdot \|e^{-\beta(\mathbf{x})} W^{\sigma_n} \overline{\mathcal{P}} \overline{R}^{\overline{\mathcal{P}}(\underline{\alpha})} \overline{\mathcal{P}} e^{\beta(\mathbf{x})}\| \\ &\quad \cdot \|e^{-\beta(\mathbf{x})} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} \widetilde{R}_n^{\overline{\mathcal{P}}} \overline{\mathcal{P}}\| \cdot \|W^{\sigma_{n+1}} \mathcal{P} \widetilde{R}^n \mathcal{P}\| \\ &\leq \left(\frac{C \alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\right) \cdot \left(\frac{C \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\mathfrak{b} \sin(\nu) \sigma_n}\right) \cdot \left(\frac{C \alpha^{3/2} \sigma_n^{3/2}}{\sin(\nu)}\right). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Adding up (6.9), (6.10), and (6.12), we arrive at the asserted estimate (6.1)  $\square$

**Corollary 6.3.** *Suppose that  $z \in \widetilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  and that  $|z - E_n| \geq \frac{1}{10} \sin(\nu) \sigma_{n+1}$ . Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell\kappa}(\nu)}$  is small enough. Then,  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overline{H}^{n+1} - z)$  is invertible and there is a constant  $C$  such that*

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overline{H}^{n+1} - z)^{-1}\| \leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu) (\sigma_{n+1} + |z - E_n|)}. \tag{6.13}$$

**Proof.** Denoting  $\mathcal{F}_{n+1} := \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overline{H}^{n+1} - z)$  and  $\widetilde{\mathcal{F}}_n := \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\widetilde{H}^n - z)$ , we obtain the resolvent of  $\mathcal{F}_{n+1}$  from a Neuman series expansion,

$$\mathcal{F}_{n+1}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{F}}_n^{-1} \left[ (\widetilde{\mathcal{F}}_n - \mathcal{F}_{n+1}) \widetilde{\mathcal{F}}_n^{-1} \right]^k. \tag{6.14}$$

Thanks to Theorem 6.2 this series is norm-convergent, and summing up powers of the right side of (6.1) in a geometric series we have the estimate

$$\|\mathcal{F}_{n+1}^{-1}\| \leq \|\widetilde{\mathcal{F}}_n^{-1}\| \left( 1 - \frac{C \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n^{1/2}}{\mathfrak{b} \sin^3(\nu)} \right)^{-1} \leq 2 \|\widetilde{\mathcal{F}}_n^{-1}\|, \tag{6.15}$$

provided  $\alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n^{1/2} / [\mathfrak{b} \sin^3(\nu)]$  is sufficiently small. Hence,

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overline{H}^{n+1} - z)^{-1}\| \leq 2 \|\mathcal{P}(\widetilde{H}^n - z)^{-1} \mathcal{P}\| \leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu) (\sigma_{n+1} + |z - E_n|)}, \tag{6.16}$$

additionally using Lemma 5.2 and (4.18). Notice that (2.30)-(2.39) imply that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^3(\nu)}$  is small whenever  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell\kappa}(\nu)}$  is small.  $\square$

**Estimates for the resolvent**

**Theorem 6.4.** *Suppose that  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  and that  $|z - E_n| \geq \frac{1}{10} \sin(\nu)\sigma_{n+1}$ . Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{|\sin(\nu)|^{\ell\kappa}}$  is small enough. Then,  $\overset{n+1}{H} - z$  is invertible and there is a constant  $C$  such that*

$$\|(\overset{n+1}{H} - z)^{-1}\| \leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin^3(\nu)} \left( \frac{1}{\sigma_{n+1} + |z - E_n|} \right). \tag{6.17}$$

**Proof.** We use formula (5.14) to express  $(\overset{n+1}{H} - z)^{-1}$ . To estimate the terms appearing in (5.14) we make use of (5.22), (5.27)-(5.28) and Corollary 6.3. We obtain:

$$\begin{aligned} \|(\overset{n+1}{H} - z)^{-1}\| \leq C & \left[ \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)} \right)^2 \left( \frac{1}{\sin(\nu) (\sigma_{n+1} + |z - E_n|)} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\sin(\nu) (\delta_{\text{at}} + |z - e_0(\underline{\alpha}_0)|)} \right) \right]. \end{aligned} \tag{6.18}$$

The desired result is obtained by realizing that  $|z - E_n| \leq \frac{C}{\sin(\nu)} |z - e_0(\underline{\alpha}_0)|$ , because the distance between  $e_0(\underline{\alpha}_0)$  and  $\tilde{\mathcal{E}}_n$  is of order  $\sin(\nu)$ .  $\square$

**Theorem 6.5.** *Suppose that  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n \setminus \{E_n\}$  and that  $|z - E_n| \geq \frac{1}{10} \sin(\nu)\sigma_{n+1}$ . Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{|\sin(\nu)|^{\ell\kappa}}$  is small enough. Then there is a constant  $C$  such that*

$$\|(\overset{n+1}{H} - z)^{-1} - (\tilde{H}^n - z)^{-1}\| \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\sin^4(\nu)} \frac{(\mathfrak{C}(\nu)^2)^{n+1}}{\mathfrak{b}\sigma_{n+1}} \sigma_n^{1/2}. \tag{6.19}$$

**Proof.** We express the inverse of the operators in (6.19) using the Feshbach-Schur map. According to (5.14), we have that

$$(\overset{n+1}{H} - z)^{-1} = Q_{\mathcal{P},n+1} \mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1}^{-1} Q_{\mathcal{P},n+1}^\# + \bar{\mathcal{P}} R_{\bar{\mathcal{P}},n+1} \bar{\mathcal{P}}, \tag{6.20}$$

$$(\tilde{H}^n - z)^{-1} = \tilde{Q}_{\mathcal{P},n} \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n}^{-1} \tilde{Q}_{\mathcal{P},n}^\# + \bar{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\bar{\mathcal{P}},n} \bar{\mathcal{P}}, \tag{6.21}$$

where we use the notation

$$Q_{\mathcal{P},n+1} := Q_{\mathcal{P}}(\overset{n+1}{H} - z), \quad Q_{\mathcal{P},n+1}^\# := Q_{\mathcal{P}}^\#(\overset{n+1}{H} - z), \tag{6.22}$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1} := \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\overset{n+1}{H} - z), \quad \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n} := \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\tilde{H}^n - z), \tag{6.23}$$

$$R_{\bar{\mathcal{P}},n+1} := (\overset{n+1}{H}_{\bar{\mathcal{P}}} - z)^{-1}, \quad \tilde{R}_{\bar{\mathcal{P}},n} := (\tilde{H}_{\bar{\mathcal{P}}}^n - z)^{-1}. \tag{6.24}$$

It follows that

$$(\overset{n+1}{H} - z)^{-1} - (\tilde{H}^n - z)^{-1} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \tag{6.25}$$

where

$$Y_1 := [Q_{\mathcal{P},n+1} - \tilde{Q}_{\mathcal{P},n}] \mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1}^{-1} Q_{\mathcal{P},n+1}^\#, \tag{6.26}$$

$$Y_2 := \tilde{Q}_{\mathcal{P},n} [\mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1}^{-1} - \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n}^{-1}] Q_{\mathcal{P},n+1}^\#, \tag{6.27}$$

$$Y_3 := \tilde{Q}_{\mathcal{P},n} \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n}^{-1} [Q_{\mathcal{P},n+1}^\# - \tilde{Q}_{\mathcal{P},n}^\#], \tag{6.28}$$

$$Y_4 := \overline{\mathcal{P}} R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}} - \overline{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}},n} \overline{\mathcal{P}}. \tag{6.29}$$

To estimate  $Y_1, \dots, Y_4$ , we recall from Corollary 6.3 and (5.27), respectively, that

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1}^{-1}\|, \|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n}^{-1}\| \leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu) \mathfrak{b} \sigma_n}, \tag{6.30}$$

$$\|Q_{\mathcal{P},n+1}\|, \|\tilde{Q}_{\mathcal{P},n}\|, \|Q_{\mathcal{P},n+1}^\#\|, \|\tilde{Q}_{\mathcal{P},n}^\#\| \leq C \left(1 + \frac{\alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\right) \leq C. \tag{6.31}$$

Next, we observe that

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P},n+1} - \tilde{Q}_{\mathcal{P},n} &= \mathcal{P} W^{\sigma_{n+1}} \overline{\mathcal{P}} R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}} - \mathcal{P} W^{\sigma_n} \overline{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}},n} \overline{\mathcal{P}} \\ &= \mathcal{P} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}} + \mathcal{P} W^{\sigma_n} \overline{\mathcal{P}} R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}},n} \overline{\mathcal{P}}, \end{aligned} \tag{6.32}$$

which implies that

$$\begin{aligned} \|Q_{\mathcal{P},n+1} - \tilde{Q}_{\mathcal{P},n}\| &\leq \|\mathcal{P} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}}\| \\ &\quad + \|\mathcal{P} e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle} \cdot \|e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} W^{\sigma_n} \overline{\mathcal{P}} R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}} e^{\beta\langle \mathbf{x} \rangle}\| \cdot \|e^{-\beta\langle \mathbf{x} \rangle} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}},n} \overline{\mathcal{P}}\| \\ &\leq \left(\frac{C \alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\right) \sigma_n^{3/2} + \left(\frac{C \alpha^{3/2}}{\sin(\nu)}\right)^2 \sigma_n^{3/2} \leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\sin^2(\nu)} \sigma_n^{3/2}, \end{aligned} \tag{6.33}$$

where we use (5.29) (and its proof), (3.6), and (6.11). Using (6.33) and a similar estimate for  $\|Q_{\mathcal{P},n+1}^\# - \tilde{Q}_{\mathcal{P},n}^\#\|$ , as well as (6.30) and (6.31), we derive the estimate

$$\|Y_1\| + \|Y_3\| \leq \left(\frac{C \alpha^{3/2}}{\sin^2(\nu)} \sigma_n^{3/2}\right) \cdot \left(\frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu) \mathfrak{b} \sigma_n}\right). \tag{6.34}$$

Next, thanks to Lemma 5.3 and the proof of (5.27), we have that

$$\begin{aligned} \|Y_4\| &= \|R_{\overline{\mathcal{P}},n+1} \overline{\mathcal{P}} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}},n}\| \leq \|R_{\overline{\mathcal{P}},n+1}\| \cdot \|\overline{\mathcal{P}} W_{n+1}^n \overline{\mathcal{P}} \tilde{R}_{\overline{\mathcal{P}},n}\| \\ &\leq \frac{C \alpha^{3/2}}{\sin^2(\nu)}, \end{aligned} \tag{6.35}$$

and it remains to estimate

$$\begin{aligned} \|Y_2\| &= \|\tilde{Q}_{\mathcal{P},n} \mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1}^{-1} [\mathcal{F}_{\mathcal{P},n+1} - \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n}] \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{P},n}^{-1} Q_{\mathcal{P},n+1}^\#\| & (6.36) \\ &\leq C \left( \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu) \sigma_{n+1}} \right) \left( \frac{C \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \sigma_n^{1/2}}{\mathfrak{b} \sin^3(\nu)} \right) \\ &\leq \frac{C \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{2(n+1)} \sigma_n^{1/2}}{\mathfrak{b} \sin^4(\nu) \sigma_{n+1}}, \end{aligned}$$

using Theorem 6.2, Corollary 6.3, and (6.31). The right side of (6.36) is in fact the dominant term and bounds  $\|Y_1\|$ ,  $\|Y_3\|$ , and  $\|Y_4\|$  up to a multiplicative constant.  $\square$

### 6.2. Inductive proof of Theorem 2.2

In this section we inductively prove Theorem 2.2. First, we establish the induction basis, which is a consequence of Proposition 3.5, then we complete the induction step.

#### Induction basis

Since  $P_{-1} = P_0$  and  $E_{-1} = E_0$ , Properties  $\Pi_1(0)$  and  $\Pi_3(0)$  hold true trivially. We only need to verify Properties  $\Pi_2(0)$  and  $\Pi_4(0)$ , and these are proven in Proposition 3.5. Concerning Property  $\mathcal{P}4$ , notice that

$$\frac{C_{(3.15)}}{\sin^2(\nu)} \leq \mathfrak{C}(\nu),$$

see (2.30)-(2.39). We conclude that Hypothesis  $\mathbf{\Pi}(0)$  is fulfilled.

#### Induction step

In this section we prove the induction step by proving that Hypotheses  $\mathbf{\Pi}(0)$ ,  $\mathbf{\Pi}(1), \dots, \mathbf{\Pi}(n)$  of Section 2.2.1 imply  $\mathbf{\Pi}(n+1)$ . In detail, we first prove Property  $\Pi_3(n+1)$ , then Properties  $\Pi_1(n+1)$  and  $\Pi_2(n+1)$ , and finally Property  $\Pi_4(n+1)$ .

#### Proof of Eq. (2.47) [Property $\Pi_3(n+1)$ ]:

**Theorem 6.6.** *Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\epsilon_\kappa}(\nu)}$  is small enough. Then there is a constant  $C_{(6.37)}$  such that*

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq \frac{C_{(6.37)} \mathfrak{C}(\nu)^{2(n+1)} \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^4(\nu)} \sigma_n^{1/2}. \tag{6.37}$$

**Proof.** We take  $\tilde{\gamma}_n$  as in (4.17). Using Theorem 6.5 and the notation (6.24), we estimate

$$\begin{aligned} \|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_n} [(\tilde{H}^{n+1} - z)^{-1} - (\tilde{H}^n - z)^{-1}] dz \right\| \\ &\leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{2(n+1)} \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^4(\nu)} \sigma_n^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.38}$$

taking into account that the contour has length  $2\pi\sigma_{n+1}$ .  $\square$

**Remark 6.7.** As  $C_{(6.37)} \leq \mathfrak{C}(\nu)$ , Theorem 6.6 establishes the induction step for (2.47), which is presented in Corollary 6.8 below. This further implies the existence of  $E_{n+1}$  and its simplicity, because (6.37), Eqs. (2.30)-(2.39) and our restrictions for  $\alpha$  imply that

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| < 1,$$

and, by hypothesis,  $\tilde{P}_n$  is a rank-1 projection. Therefore,  $P_{n+1}$  is rank one. This, together with Theorem 6.4, implies that  $E_{n+1}$  is the only eigenvalue in  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ .

**Corollary 6.8** (Property  $\Pi_3(n + 1)$ ). *The following estimate holds true*

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq \frac{\mathfrak{C}(\nu)^{2(n+2)} \alpha^{3/2} \sigma_n^{1/2}}{\mathfrak{b}}. \tag{6.39}$$

**Proof of Eq. (2.43) and Property  $\Pi_2(n + 1)$  [Properties  $\Pi_1(n + 1)$  and  $\Pi_2(n + 1)$ ]:**

**Proposition 6.9** (Proof of Property  $\Pi_1(n + 1)$ ). *Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell\kappa}(\nu)}$  is small enough. Then there exists a constant  $C_{(6.40)}$  such that*

$$|E_{n+1} - E_n| \leq \frac{C_{(6.40)} \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin(\nu)} \sigma_n^2 \leq \alpha^{3/2} \mathfrak{C}(\nu)^{n+2} \sigma_n^2. \tag{6.40}$$

**Proof.** The second inequality is a consequence of the fact that

$$\mathfrak{C}(\nu) \geq \frac{C_{(6.40)}}{\sin(\nu)},$$

see (2.30)-(2.39). Concerning the first inequality, we consider a normalized eigenvector  $\psi_0$  of  $H_{\text{at}}(\underline{0})$  corresponding to  $e_1$ . We identify  $\psi_0 \equiv \psi_0 \otimes \Omega^{\sigma_n} \in \mathcal{H}^{\sigma_n}$  and make the  $\underline{\alpha}_0$ -dependence of  $P_n$  explicit in our notation:  $P_n \equiv P_n(\underline{\alpha}_0)$ . Notice that in many places in this text we assume that  $\nu > 0$ . This is done for notational convenience. Of course, the same proofs work for  $\nu < 0$  if  $\sin(\nu)$  is replaced by its absolute value everywhere. We set  $\underline{\alpha}_0 = (\bar{\theta}, \alpha, 0)$ . For each  $n \in \mathbb{N}$ , we define  $\psi_n(\underline{\alpha}_0) := P_n(\underline{\alpha}_0)\psi_0$ . Eqs. (2.30)-(2.39), (3.14), (3.3), (6.39), and  $\Pi_3(n + 1)$  imply that

$$\|\psi_n(\underline{\alpha}_0)\| \leq 3 \quad \text{and} \quad \langle \psi_n(\underline{\alpha}_0) | P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle \geq \frac{1}{2}, \tag{6.41}$$

where  $\psi_n(\underline{\alpha}_0) \equiv \psi_n(\underline{\alpha}_0) \otimes \Omega^{\sigma_{n+1}, \sigma_n}$ . We compute

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{\langle \psi_n(\underline{\alpha}_0) | \overset{n+1}{H} P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle}{\langle \psi_n(\underline{\alpha}_0) | P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle} \\ &= \frac{\langle [(\tilde{H}^n)^* + (W_{n+1}^n(\underline{\alpha}_0))^*] \psi_n(\underline{\alpha}_0) | P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle}{\langle \psi_n(\underline{\alpha}_0) | P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle} \\ &= E_n + \frac{\langle e^{-\beta(\mathbf{x})} W_{n+1}^n(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) | e^{\beta(\mathbf{x})} P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle}{\langle \psi_n(\underline{\alpha}_0) | P_{n+1}(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0) \rangle}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

We pick  $z$  such that  $|z - E_n(\underline{\alpha}_0)| = \frac{1}{10} |\sin(\nu)| \sigma_{n+1}$  and use Proposition 4.3 [see also (6.41)] to estimate

$$\begin{aligned} &\|e^{-\beta(\mathbf{x})} W_{n+1}^n(\underline{\alpha}_0) \psi_n(\underline{\alpha}_0)\| \\ &= |z - E_n(\underline{\alpha}_0)| \cdot \left\| e^{-\beta(\mathbf{x})} W_{n+1}^n(\underline{\alpha}_0) \frac{1}{\tilde{H}^n(\underline{\alpha}_0) - z} \psi_n(\underline{\alpha}_0) \right\| \\ &\leq C \left( \frac{|\sin(\nu)| \sigma_{n+1}}{10} \right) \left( \frac{\mathfrak{C}(\nu)^{n+1} \alpha^{3/2}}{\mathfrak{b} \sin^2(\nu)} \sigma_n \right). \end{aligned} \tag{6.43}$$

Now, the first inequality in Eq. (6.40) is derived from (6.41)-(6.43), using Proposition 5.5 and  $\sigma_{n+1} = \mathfrak{b} \sigma_n$ .  $\square$

Proposition 6.9 and Remark 6.7 imply the following corollary.

**Corollary 6.10** (Proof of Property  $\Pi_2(n+1)$ ). *If  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell\kappa}(\nu)}$  is sufficiently small then  $\mathcal{E}_{n+1} \subset \tilde{\mathcal{E}}_n$  and Property  $\Pi_2(n+1)$  is valid.*

**Proof of Eq. (2.48) [Property  $\Pi_4(n+1)$ ]:**

**Lemma 6.11.** *Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell\kappa}(\nu)}$  is small enough. Then there is a constant  $C$  such that, for every  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n$ ,*

$$\|R_{\overline{\mathcal{P}}, n+1}(z) \overline{\mathcal{P}}_{n+1}\| \leq \frac{C \mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sin^3(\nu) (\sigma_{n+1} + |z - E_n|)}. \tag{6.44}$$

**Proof.** By Remark 6.7, there is only one eigenvalue of  $\overset{n+1}{H}$  in  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ . Using the notation (6.24), we observe that  $z \mapsto R_{\overline{\mathcal{P}}, n+1}(z) \overline{\mathcal{P}}_{n+1}$  is analytic in  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ . The maximum modulus principle hence implies that

$$\max_{|z-E_n| \leq r_{n+1}} \|R_{\overline{\mathcal{P}},n+1}(z)\overline{P}_{n+1}\| = \max_{|z-E_n|=r_{n+1}} \|R_{\overline{\mathcal{P}},n+1}(z)\overline{P}_{n+1}\|, \tag{6.45}$$

where  $r_{n+1} := \frac{1}{10} \sin(\nu)\sigma_{n+1}$ . It therefore suffices to establish (6.44) under the assumption that  $|z - E_n| \geq r_{n+1}$ . This assumption and (6.17) then imply (6.44), indeed.  $\square$

**Proposition 6.12** (Proof of Property  $\Pi_4(n + 1)$ ). *Assume that  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell_\kappa}(\nu)}$  is small enough. There is a constant  $C_{(6.46)}$  such that, for  $z \in \tilde{\mathcal{E}}_n$  (and, hence, for  $z \in \mathcal{E}_{n+1}$  - see Corollary 6.10),*

$$\begin{aligned} \left\| R^{n+1}(z)\overline{P}_{n+1} \right\| &\leq \frac{C_{(6.46)}}{\sin^3(\nu)} \frac{\mathfrak{C}(\nu)^{n+1}}{\sigma_{n+1} + |z - E_{n+1}|} \\ &\leq \frac{\mathfrak{C}(\nu)^{n+2}}{\sigma_{n+1} + |z - E_{n+1}|}, \end{aligned} \tag{6.46}$$

**Proof.** The second inequality follows from the fact that

$$\frac{C_{(6.46)}}{\sin^3(\nu)} \leq \mathfrak{C}(\nu). \tag{6.47}$$

Proposition 6.9 implies that (see also (2.30)-(2.39))

$$|E_{n+1} - E_n| \leq \frac{1}{10} \sigma_{n+1}.$$

Thus,

$$\frac{1}{\sigma_{n+1} + |z - E_n|} \leq \frac{10}{9} \frac{1}{\sigma_{n+1} + |z - E_{n+1}|}. \tag{6.48}$$

Eq. (6.46) follows from Lemma 6.11 and (6.48).  $\square$

### 7. Proof of Theorem 2.3

**Theorem 7.1.** *Assume that  $\theta = i\nu$ ,  $\nu > 0$  small enough, and  $\frac{\alpha^{3/2}}{\sin^{\ell_\kappa}(\nu)}$  is sufficiently small. The complex number  $E_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  is an eigenvalue of  $H^0(\underline{\alpha}_0)$ . The range of  $P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\infty$  is one-dimensional and consists of eigenvectors corresponding to  $E_\infty$ .*

**Proof.** Let  $\phi_0$  be a normalized eigenvector of the atom Hamiltonian  $H_{\text{at}}(\mathbb{Q})$  corresponding to the simple eigenvalue  $e_1$  and  $\psi_0 := \phi_0 \otimes \Omega^0$ . We define the sequence of vectors  $\psi_n := P_n \psi_0$ . Due to Eq. (2.47), the sequence  $(\psi_n)_{n=0}^\infty$  converges to a non-zero limit. We define  $\psi_\infty := P_\infty \psi_0 \neq 0$ . We set

$$\tilde{H}_\infty^n := \overset{n}{H} + e^{-i\nu} \check{H}^{0,\sigma_n}, \quad \tilde{R}_\infty^n(z) := (\tilde{H}_\infty^n - z)^{-1}, \tag{7.1}$$

$$W_\infty^n := H^0(\underline{\alpha}_0) - \tilde{H}_\infty^n, \tag{7.2}$$

and  $z := E_n + i\frac{\sin(\nu)}{10}\sigma_{n+1}$  and write

$$H^0(\underline{\alpha}_0)\psi_n = (\tilde{H}_\infty^n + W_\infty^n)\psi_n = E_n\psi_n + (E_n - z)W_\infty^n\tilde{R}_\infty^n(z)\psi_n. \quad (7.3)$$

Following the rationale of Proposition 4.3 we can prove inductively that  $\|W_\infty^n\tilde{R}_\infty^n(z)\|$  is well-defined and show that  $\|W_\infty^n\tilde{R}_\infty^n(z)\| \leq \frac{C\mathfrak{E}(\nu)^{n+1}\alpha^{3/2}}{\mathfrak{b}\sin^2(\nu)}$ . (We omit the proof because it is similar to the proof of (4.19)-(4.20).) It then follows that  $\|(E_n - z)W_\infty^n\tilde{R}_\infty^n(z)\|$  converges exponentially fast to zero, see (2.30)-(2.39). From the previous observations and Eq. (7.3) we deduce that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^0(\underline{\alpha}_0)\psi_n = E_\infty\psi_\infty. \quad (7.4)$$

As  $H^0(\underline{\alpha}_0)$  is a closed operator, we conclude that  $\psi_\infty$  belongs to its domain and is an eigenvector corresponding to the eigenvalue  $E_\infty$ . As  $P_\infty$  is the limit of rank-one projections, it is rank-one, as well, and therefore,  $\psi_\infty$  generates its range.  $\square$

## Acknowledgments

This Project was funded by CONACYT, FORDECYT-PRONACES 429825/2020 (proyecto apoyado por el FORDECYT-PRONACES, PRONACES/429825). Additionally, it was funded by PAPIIT-DGAPA UNAM IN101621 and PAPIIT-DGAPA UNAM IN108818. We also acknowledge the grants MIUR Excellence Department Project, awarded to the Department of Mathematics, University of Rome Tor Vergata, CUP E83C18000100006, and PAPIIT-DGAPA UNAM IN103918. M.B. is a Fellow of the Sistema Nacional de Investigadores (SNI).

## References

- [1] J. Aguilar, J.M. Combes, A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians, *Commun. Math. Phys.* 22 (1971) 269–279.
- [2] V. Bach, M. Ballesteros, M. Könenberg, L. Menrath, Existence of ground state eigenvalues for the spin-boson model with critical infrared divergence and multiscale analysis, *J. Math. Anal. Appl.* 453 (2) (2017) 773–797.
- [3] V. Bach, M. Ballesteros, L. Menrath, A new approach to continuous multi-scale analysis in non-relativistic QED: ground states and photon number bounds for the spin-boson model with critical infrared singularity, *J. Evol. Equ.* (2017).
- [4] V. Bach, M. Ballesteros, A. Pizzo, Existence and construction of resonances for atoms coupled to the quantized radiation field, *Adv. Math.* 314 (2017) 540–572.
- [5] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Smooth Feshbach map and operator-theoretic renormalization group methods, *J. Funct. Anal.* 203 (1) (2003) 44–92.
- [6] V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Mathematical theory of non-relativistic matter and radiation, *Lett. Math. Phys.* 34 (1995) 183–201.
- [7] V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, *Adv. Math.* 137 (1998) 299–395.
- [8] V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, *Adv. Math.* 137 (1998) 205–298.
- [9] V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Commun. Math. Phys.* 207 (2) (1999) 249–290.

- [10] H. Cycon, R. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators*, 1 edition, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [11] D. Hasler, I. Herbst, On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* 20 (7) (2008) 787–800.
- [12] D. Hasler, I. Herbst, Ground states in the spin boson model, *Ann. Henri Poincaré* 12 (2011) 621–677.
- [13] D. Hasler, I. Herbst, M. Huber, On the lifetime of quasi-stationary states in nonrelativistic QED, *Ann. Henri Poincaré* 9 (2008) 1005–1028.
- [14] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré* 3 (1) (2002) 171–201.
- [15] P. Hislop, I.M. Sigal, *Introduction to Spectral Theory*, Springer-Verlag, 1996.
- [16] W. Hunziker, Distortion analyticity and molecular resonance curves, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 45 (1986) 339–358.
- [17] A. Pizzo, One-particle (improper) states in Nelson’s massless model, *Ann. Henri Poincaré* 4 (3) (2003) 439–486.
- [18] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Analysis of Operators*, vol. 4, 1 edition, Academic Press, San Diego, 1978.
- [19] I.M. Sigal, Ground state and resonances in the standard model of the non-relativistic QED, *J. Stat. Phys.* 134 (5–6) (2009) 899–939.

# Lista de Símbolos

---

En esta sección proporcionamos una lista de los principales símbolos empleados y el lugar donde se encuentra su definición.

Símbolo	Lugar donde se define
$\ \cdot\ $	(2.1)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	(2.2)
$\mathcal{B}(\mathfrak{h})$	debajo de (2.4)
$D(\cdot)$	debajo de (2.7)
$\rho(\cdot)$	arriba de (2.11)
$R_{(\cdot)}(z)$	arriba de (2.11)
$\sigma(\cdot)$	(2.11)
$\otimes$	Sección 2.3
$\mathcal{F}(\mathfrak{h})$	(2.33)
$\Gamma(\cdot)$	(2.35)
$\Omega$	debajo de (2.34)
$d\Gamma(\cdot)$	(2.42)
$D_{1/10}$	arriba de (3.1)
$\theta$	arriba de (3.1), ver también (3.38)
$\alpha$	arriba de (3.1), ver también (3.24)
$\beta$	arriba de (3.1), ver también (3.39)
$\underline{\alpha}$	(3.1)
$\mathcal{H}_{\text{at}}$	(3.2)
$H_{\text{at}}(\underline{\alpha})$	(3.3)
$\eta(\cdot)$	(3.7)
$\langle \mathbf{x} \rangle$	(3.11)
$e_0, e_1$	arriba de (3.12)
$\delta_{\text{at}}$	(3.12)
$\mathfrak{h}^{s,t}, \mathcal{K}^{s,t}$	(3.13) y (3.14)
$\mathcal{F}^{s,t}, \mathcal{F}_N^{s,t}$	(3.17)
$\tilde{H}^{s,t}(\theta)$	(3.20)
$\mathcal{H}^{s,t}$	(3.21)
$H_0^{s,t}(\underline{\alpha})$	(3.22)
$\mathbf{G}^{s,t}(\theta)$	(3.24)
$\mu$	debajo de (3.24)
$a^*(f)$	(3.25)
$a(f)$	debajo de (3.25)
$\mathbf{A}^{s,t}(\theta)$	(3.28)
$\mathbf{A}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})$	(3.32)
$\mathbf{G}_{\text{PF}}^{s,t}(\underline{\alpha})$	(3.36)

---

Símbolo	Lugar donde se define
$\underline{\alpha}_0$	(3.37)
$\nu$	(3.38)
$H^{s,t}(\underline{\alpha}), W^{s,t}(\underline{\alpha})$	(3.41) y (3.42)
$\overset{n}{H}$	arriba de (3.43)
$\sigma_n$	arriba de (3.43)
$\mathfrak{b}$	arriba de (3.43)
$E_m$	(3.44)
$\mathcal{E}_m$	(3.45)
$P_m$	(3.46)
$\overset{m}{R}(z)$	debajo de (3.46)
$\mathfrak{C}(\nu)$	debajo de (3.49)
$e_0(\underline{\alpha}), e_1(\underline{\alpha})$	arriba de (3.52)
$P_{\text{at},0}(\underline{\alpha}), P_{\text{at},1}(\underline{\alpha})$	(3.52)
(old)	arriba de (3.61)
$\tilde{R}^n(z)$	arriba de (3.61)
$\mathcal{P}$	(3.66)
$\dot{H}$	(3.68)
$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$	(3.70)

---

# Bibliografía

---

- [1] Aguilar, J., & Combes, J. M. (1971). A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4), 269-279.
- [2] Arai, A. (2017). *Analysis on Fock spaces and mathematical theory of quantum fields: An introduction to mathematical analysis of quantum fields*. World Scientific.
- [3] Bach, V., Ballesteros, M., Könenberg, M., & Menrath, L. (2017). Existence of ground state eigenvalues for the spin-boson model with critical infrared divergence and multiscale analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 453(2), 773-797.
- [4] Bach, V., Ballesteros, M., & Menrath, L. (2018). A new approach to continuous multi-scale analysis in nonrelativistic QED: ground states and photon number bounds for the spin-boson model with critical infrared singularity. *Journal of Evolution Equations*, 18(2), 715-754.
- [5] Bach, V., Ballesteros, M., & Fröhlich, J. (2015). Continuous renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory. *Journal of Functional Analysis*, 268(4), 749-823.
- [6] Bach, V., Ballesteros, M., & Pizzo, A. (2017). Existence and construction of resonances for atoms coupled to the quantized radiation field. *Advances in Mathematics*, 314, 540-572.
- [7] Bach, V., Ballesteros, M., Iniesta, D., & Pizzo, A. (2021). A new method of construction of resonances that applies to critical models. *Journal of Functional Analysis*, 280(6), 108818.
- [8] Bach, V., Froehlich, J., & Sigal, I. M. (1995). Mathematical theory of non-relativistic matter and radiation, *Lett. Math. Phys.* 34, no. 3, 183–201.
- [9] Bach, V., Froehlich, J., & Sigal, I. M. (1998). Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, *Adv. Math.* 137, no. 2, 205–298.
- [10] Bach, V., Froehlich, J., & Sigal, I. M. (1998). Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, *Adv. Math.* 137, no. 2, 299–395.
- [11] Bach, V., Fröhlich, J., & Sigal, I. M. (1999). Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field. *Communications in Mathematical Physics*, 207(2), 249-290.

- 
- [12] Bach, V., Fröhlich, J., Sigal, I. M., & Soffer, A. (1999). Positive Commutators and the Spectrum of Pauli–Fierz Hamiltonian of Atoms and Molecules. *Communications in mathematical physics*, 207(3), 557-587.
- [13] Bachmann, S., Deckert, D. A., & Pizzo, A. (2012). The mass shell of the Nelson model without cut-offs. *Journal of Functional Analysis*, 263(5), 1224-1282.
- [14] Ballesteros, M., Deckert, D. & Haenle, F. (2019). Relation between the resonance and the scattering matrix in the massless spin-boson model. *Commun. Math. Phys.*, 370(1), 249-290.
- [15] Ballesteros, M., Deckert, D. & Haenle, F. (2019). Analyticity of resonances and eigenvalues and spectral properties of the massless Spin–Boson model. *J. Funct. Anal.*, 276(8), 2524-2581.
- [16] Ballesteros, M., Deckert, D. & Haenle, F. (2020). One-boson scattering processes in the massless Spin-Boson model –A non-perturbative formula. *Adv. Math.*, 371, 107248.
- [17] Ballesteros, M., Deckert, D., Faupin, J. & Haenle, F. (2020). One-boson scattering processes in the massive Spin-Boson model. *J. Math. Anal. Appl.*, 124094.
- [18] Ballesteros, M., Faupin J., Froehlich, J., & Schnubel, B.(2015). Quantum Electrodynamics of Atomic Resonances. *Comm. Math. Phys.* 337 , 633-680.
- [19] Deckert, D.-A., & Pizzo A.(2014). Ultraviolet properties in the spinless, one-particle Yukawa model, *Communication in Mathematical Physics*327 , Iss. 3, p. 887-920.
- [20] Griesemer, M., Lieb, E. H., & Loss, M. (2001). Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Inventiones mathematicae*, 145(3), 557-595.
- [21] Hasler, D., & Herbst, I. (2008). On the self-adjointness and domain of Pauli–Fierz type Hamiltonians. *Reviews in Mathematical Physics*, 20(07), 787-800.
- [22] Hasler, D., Herbst, I., & Huber, M. (2008). On the lifetime of quasi-stationary states in non-relativistic QED. In *Annales Henri Poincaré* (Vol. 9, No. 5, pp. 1005-1028). SP Birkhäuser Verlag Basel.
- [23] Hiroshima, F. (2002). Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants. In *Annales Henri Poincaré* (Vol. 3, No. 1, pp. 171-201). Birkhäuser Verlag.

- 
- [24] Hislop, P., Sigal, I. (1995). Introduction to Spectral Theory: With Applications to Schrödinger Operators. Applied Mathematical Sciences, Volume 113, Springer.
- [25] Hunziker, W. (1986). Distortion analyticity and molecular resonance curves. In Annales de l'IHP Physique théorique (Vol. 45, No. 4, pp. 339-358).
- [26] Kato, T. (1966). Perturbation theory for linear operators. Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag.
- [27] Pizzo, A. (2003). One-particle (improper) states in Nelson's massless model. In Annales Henri Poincaré (Vol. 4, No. 3, pp. 439-486). Birkhäuser-Verlag.
- [28] Reed, M., & Simon, B. (1980). Methods of modern mathematical physics. vol. 1. Functional analysis. New York: Academic.
- [29] Reed, M., & Simon, B. (1975). *Methods of Modern Mathematical Physics: Fourier Analysis, Self-adjointness*, volume 2, 1st ed., Academic Press.
- [30] Reed, M., & Simon, B. (1979). Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Operator Analysis.
- [31] Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. 3rd ed., McGraw Hill.
- [32] Sigal, I. M. (2009). Ground state and resonances in the standard model of the non-relativistic QED. Journal of Statistical Physics, 134(5-6), 899-939.
- [33] Teschl, G. (2010). Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operators. Graduate Studies in Mathematics, Volume 157, 2nd ed., American Mathematical Society.