



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MONOMIALIZACIÓN COMBINATORIA PARA  
FUNCIONES ANALÍTICAS GENERALIZADAS EN TRES VARIABLES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
JESÚS ALBERTO PALMA MÁRQUEZ

DIRECTORA DE TESIS:  
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM  
CODIRECTOR DE TESIS:  
DR. FELIPE CANO TORRES  
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID, ESPAÑA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DR. XAVIER GÓMEZ-MONT ÁVALOS  
CIMAT  
DR. JOSÉ ANTONIO SEADE KURI  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, 12 DE FEBRERO DE 2020.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Este trabajo contó con el apoyo de Papiit Dgapa UNAM IN106217, IN110520, ECOS-Nord Conacyt 249542, Conacyt CB-2013-219722, Conacyt 291137 y Conacyt 291250.



# Índice general

Índice de figuras	v
Introducción	vii
Estructura del texto	viii
Capítulo 1. Categoría de variedades analíticas generalizadas	1
1.1. Series de potencias generalizadas	1
1.2. Variedades analíticas generalizadas	5
Capítulo 2. Sucesiones finitas de morfismos de explosión combinatorios	15
2.1. Representación lineal de sucesiones finitas de morfismos de explosión combinatorios	17
2.2. Ejemplos	20
Capítulo 3. Estudio de centros admisibles unidimensionales compactos	27
3.1. Vecindades analíticas reales de centros admisibles estándar unidimensionales compactos	29
3.2. Vecindades analíticas generalizadas de curvas compactas	32
3.3. Caracterización de centros admisibles unidimensionales compactos	33
Capítulo 4. Monomialización combinatoria	37
4.1. Caso bidimensional	37
4.2. Caso tridimensional	41
Primeros auxilios	53
A. Espacios localmente anillados	53
B. Representación lineal de carcajes	55
Bibliografía	59
Índice alfabético	61



## Índice de figuras

1.1. Gráfica de $f_\lambda(x) = x^\lambda$ , $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ .	1
1.2. Poliedro de Newton.	3
1.3. Mapeo de Dulac.	4
1.4. Estratificación natural de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , inducida por su frontera.	7
1.5. Morfismo de explosión de $G\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ centrado en $\{0\}_\alpha$ .	11
1.6. Morfismo de explosión de $G\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ centrado en $X_{2,\alpha}$ .	12
1.7. Morfismo de explosión de $G\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ centrado en $\{0\}_\alpha$ .	13
2.1. Morfismo de explosión de $(\mathbb{R}^2, 0)$ centrado en el origen.	16
2.2. Morfismo de explosión de $(\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ centrado en el origen.	20
2.3. Curva compacta $E_3$ , cuya estructura analítica está codificada por la matriz $G_{1,-1}^{1,2}$ .	22
2.4. Morfismo de explosión centrado en $X_1$ .	24
3.1. Curva compacta adaptada a la frontera de $M$ .	27
3.2. Estandarización en torno a la curva compacta $ Z $ , adaptada a la frontera de $M$ .	28
3.3. Estructura analítica real en torno a una curva compacta $ W $ , adaptada a la frontera de $A$ .	30
3.4. Centros admisibles de explosión alrededor de una curva compacta $ W $ .	31
3.5. Estructura analítica generalizada en torno a una curva compacta $ Z $ , adaptada a la frontera de $M$ .	32
4.1. Imagen de la familia de rectas $\{\mathcal{L}_{-\frac{1}{\lambda}, b} : b \in \mathbb{R}\}$ bajo el isomorfismo lineal $L_\lambda$ .	39
4.2. Imagen de la familia de rectas $\{\mathcal{L}_{-\frac{1}{\lambda}, b} : b \in \mathbb{R}\}$ bajo el isomorfismo lineal $R_\lambda$ .	40
4.3. Polígono de Newton de $f \circ \pi_\mu^1$ , para $\mu = \lambda_1$ .	40
4.4. Aislado curvas dentro de $S_\kappa(F)$ .	44
4.5. Polígono de Newton genérico de $F$ a lo largo de $ Z $ .	46
4.6. Preparación de la curva compacta $ \tilde{Z} $ .	49



## Introducción

Un problema clásico en la teoría de variedades algebraicas y espacios analíticos reales y complejos, es la existencia de una resolución de singularidades por medio de una sucesión finita de morfismos de explosión, para tal clase de espacios. Lo que uno busca es un modelo sencillo que rescate las propiedades de interés del objeto inicial. En el caso de variedades algebraicas, dada una variedad singular, usualmente se busca un modelo brracionalmente equivalente a ella, pero siendo este último no singular, a través de una sucesión finita de morfismos de explosión. Los primeros resultados sobre el tema fueron obtenidos por O. Zariski durante la primera mitad del siglo veinte, para superficies algebraicas en [23] y, en la década de 1960, H. Hironaka presenta una solución general en [12, 13] para variedades algebraicas de cualquier dimensión en característica cero. El problema análogo para espacios analíticos complejos fue obtenido por J.M. Aroca, H. Hironaka y J.L. Vicente pocos años después (*ver* [2]).

La resolución de singularidades mediante sucesiones finitas de morfismos de explosión ha probado ser una herramienta útil para solucionar problemas en otros ámbitos matemáticos. Por ejemplo, en la teoría de foliaciones holomorfas es fundamental la aplicación de ésta para comprender la dinámica local alrededor de conjuntos singulares. En [21], A. Seidenberg demuestra la resolución de singularidades para foliaciones singulares holomorfas en un espacio ambiente bidimensional. En este caso, se obtienen modelos sencillos (conocidos usualmente como *singularidades simples*) de puntos singulares, que permite entender a profundidad la geometría de las hojas de una foliación singular alrededor de cualquiera de sus puntos singulares. El resultado análogo para foliaciones holomorfas de codimensión uno en el caso tridimensional fue obtenido, para el caso no dicrítico, por D. Cerveau y F. Cano en [7], mientras que el caso general tridimensional fue resuelto por F. Cano en [8]. Por otra parte, en variable real, D. Panazzolo demostró en [19] la resolución de singularidades para campos vectoriales reales definidos en espacios ambientes tridimensionales, usando morfismos de explosión con pesos. En el epílogo del libro [2], se presenta un recuento, actualizado al día de hoy, con los principales resultados sobre resolución de singularidades para foliaciones holomorfas y para campos vectoriales analíticos reales y complejos.

Ahora bien, el problema de la monomialización, tanto en su versión local como global, de transformaciones pertenecientes a diversas clases de morfismos, es una versión de la resolución de singularidades. Lo que se busca ahora es monomializar transformaciones a través de sucesiones finitas de morfismos de explosión. La monomialización global para funciones algebraicas y analíticas se deriva de los resultados paralelos sobre la resolución de singularidades para variedades antes mencionados.

En [5] E. Bierstone y P. Milman presentan una prueba simplificada de monomialización local para funciones reales y complejas, basada en las ideas elaboradas por H. Hironaka expuestas en el texto [14].

En el presente trabajo abordamos el problema de monomialización para funciones analíticas generalizadas. Tales funciones están definidas como funciones continuas de variable real que admiten un desarrollo en serie de potencias generalizadas (con valores reales no negativos como exponentes) alrededor de cualquier punto en su dominio de definición. En [11] L. van den Dries y P. Speissegger desarrollan la teoría de espacios semianalíticos generalizados, ofreciendo así un primer paso hacia el entendimiento cualitativo para tal clase de funciones. Tiempo después, R. Martín-Villaverde, J.-P. Rolin y F. Sanz-Sánchez demuestran en [18] un resultado de monomialización local para funciones analíticas generalizadas, que está basado en el resultado análogo para espacios analíticos reales (*cf.*, Theorem 4.4. en [5]). Para ello, los autores introducen la categoría de variedades analíticas generalizadas que les brinda un marco conveniente para establecer su resultado de monomialización local. En los trabajos [22, 20] T. Servi y, la misma autora en compañía de J.-P. Rolin, respectivamente, ofrecen un algoritmo que brinda nuevamente la monomialización local para funciones analíticas generalizadas.

Nuestra labor se centra en demostrar la existencia de una *monomialización combinatoria* tridimensional. Es decir, dada una función analítica generalizada  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  definida en una vecindad del origen  $0 \in U \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , mediante morfismos de explosión, globalmente definidos, logramos monomializar a la función  $f$  respecto a las componentes de frontera. Concretamente, demostramos el siguiente teorema.

**TEOREMA PRINCIPAL.** *Sea  $M_0$  el germen de una variedad analítica generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina, y sea  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Existe una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , tal que el transformado total de  $f$ ,  $f \circ \pi$ , es combinatoriamente monomial sobre  $M$ ; es decir, la función  $f \circ \pi$  es localmente de tipo monomial en cada punto de la variedad  $M$ , con respecto a sus componentes de frontera.*

A continuación describimos brevemente la manera en que hemos organizado el presente texto.

### Estructura del texto

**Capítulo 1.** Comenzamos recordando las definiciones y conceptos básicos de nuestros objetos de estudio. A saber, presentamos a los anillos de series de potencias generalizadas con coeficientes reales, tanto formales como convergentes, así como la clase de funciones que determinan estas últimas, llamadas *funciones analíticas generalizadas*. Luego, basados en el trabajo desarrollado en [18], introducimos las clases de variedades topológicas en las que estamos interesados; esto es, las clases de *variedades estándar* y de *variedades analíticas generalizadas*. Concretamente, tales espacios son variedades topológicas con frontera y esquinas, dotados de una estructura analítica real, o bien analítica generalizada, respectivamente. Una subclase de las variedades analíticas generalizadas está constituida por aquéllas conocidas como *variedades estandarizables*. Una variedad estandarizable es isomorfa al *enriquecido* de una variedad estándar, donde por enriquecido entendemos, *grosso modo*, dotar

de una estructura analítica generalizada a una variedad estándar. La necesidad de hablar de tal clase de variedades analíticas generalizadas recae en el hecho de que esto nos permitirá llevar a cabo construcciones conocidas en el caso estándar, dentro de la categoría de variedades analíticas generalizadas. Una construcción relevante para nuestro propósito es la de morfismo de explosión para variedades generalizadas (*ver* definición 1.8).

**Capítulo 2.** Aquí, introducimos una herramienta de especial importancia para el trabajo que desarrollamos en los capítulos subsecuentes. A saber, dadas dos cartas locales  $(U, X)$  y  $(V, Y)$ , donde  $U$  es una vecindad abierta del origen en el ortante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ , y  $V$  lo es en el ortante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , cualquier morfismo monomial definido entre ellas,  $f: U \rightarrow V$ , admite una representación lineal dada por una matriz  $M_f \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  que codifica la definición del morfismo  $f$ . Más aún, demostramos que tal representación lineal es funtorial (*ver* teorema 2.1). Este formalismo nos permite estudiar morfismos y la interacción entre ellos, a través de transformaciones lineales.

Una aplicación de ello es la siguiente: dada cualquier sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios,

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N,$$

definida sobre un germen de variedad analítica generalizada en torno a un punto esquina,  $\mathbf{M}_0 = (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, 0)$ , notamos que ésta da lugar a un carcaj finito definido por los morfismos  $\pi_j: M_j \rightarrow M_{j-1}$  que conforman a la sucesión, así como las estructuras analíticas que definen a cada una de las variedades  $M_j$ , digamos  $\mathcal{U}_{M_j}$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Pero, tanto las determinaciones locales de los morfismos  $\pi_j$ , como los cambios de coordenadas definidos por las cartas locales de cada atlas  $\mathcal{U}_{M_j}$ , están dados por transformaciones monomiales y, por tanto, podemos estudiarlos a través de la representación lineal mencionada antes.

**Capítulo 3.** En este apartado, describimos explícitamente la estructura analítica (o bien, analítica generalizada) en torno a curvas compactas sobre la frontera de las variedades obtenidas tras haber realizado alguna sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre un germen de variedad estándar (o bien, analítica generalizada) alrededor de un punto esquina. En primer lugar, exhibimos cómo son éstas en el caso estándar (*ver* teorema 3.1), para luego hacer lo propio en el caso analítico generalizado (*ver* teorema 3.2). En resultado principal expuesto en este capítulo es el siguiente.

**TEOREMA (Caracterización de curvas compactas adaptadas a la frontera).** *Sea  $\pi: M \rightarrow M_0$  una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , y sea  $|Z| \subset \partial|M|$  una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad  $M$ . Entonces existe una estandarización local en torno a la curva  $|Z|$ ,  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ , donde  $|Z| \subset U$ , y ésta es única, módulo la estructura analítica admisible sobre la curva compacta  $\varphi(|Z|)$ .*

Con este resultado a la mano, obtenemos que cualquier curva compacta como  $|Z|$  da lugar a un centro admisible  $Z := (|Z|, U, \varphi)$  y, más aún, sabemos cuáles son los morfismos de explosión centrados en  $Z$  que podemos efectuar, pues éstos dependen de la estructura analítica real que admite la curva imagen  $\varphi(|Z|)$ .

**Capítulo 4.** Cerramos nuestro trabajo abordando finalmente el problema de monomialización combinatoria para gérmenes de funciones analíticas generalizadas en dos y tres variables reales. La primera parte la dedicamos al caso bidimensional, donde demostramos el siguiente resultado.

**TEOREMA** (Monomialización combinatoria bidimensional). *Sea  $M_0$  el germen de una variedad analítica generalizada bidimensional alrededor de un punto esquina, y sea  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Existe una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , tal que el transformado total de  $f$ ,  $f \circ \pi$ , es localmente de tipo monomial en cada uno de los puntos esquina de la variedad  $M$ .*

La prueba que presentamos de tal resultado está basada en el análisis geométrico de los polígonos de Newton asociados al transformado total del germen inicial  $f$ . Éstos los leemos mediante la representación lineal de las determinaciones locales de cualquier morfismo de explosión, alrededor de cada punto esquina de la variedad  $M$ , y obtenemos así una manera de elegir, paso a paso, los morfismos de explosión adecuados para concluir lo establecido en el teorema anterior.

En la segunda parte, nos enfocamos en demostrar el teorema principal de este trabajo; es decir, la versión tridimensional de la monomialización combinatoria. Si bien la estrategia a seguir está basada en la descripción de los poliedros de Newton en juego y su descripción a través de transformaciones lineales, esta vez hay una componente adicional que debemos considerar. Debido a que los centros de explosión ahora no sólo serán puntos aislados, sino también curvas adaptadas a la frontera del espacio ambiente en turno, debemos ocuparnos de un nuevo problema; a saber, las restricciones analíticas inherentes a las curvas compactas adaptadas a la frontera de las variedades obtenidas al realizar cualquier sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios. Gracias a los resultados expuestos en el capítulo previo, sabemos cuáles son tales restricciones explícitamente y, realizando modificaciones sobre los espacios ambiente vía morfismos de explosión de puntos, logramos evitarlas para, finalmente, obtener la monomialización combinatoria establecida en el enunciado del teorema principal.

**Primeros auxilios.** Al final del texto hemos incluido los conceptos básicos sobre espacios localmente anillados y carcajes finitos. Por una parte, hemos empleado el lenguaje de espacios localmente anillados para hablar de variedades topológicas dotadas de alguna estructura, y por otra, la representación lineal de carcajes sustenta lo hecho en el capítulo 2.

## Categoría de variedades analíticas generalizadas

### 1.1. Series de potencias generalizadas

Iniciamos nuestro trabajo introduciendo a las *series de potencias generalizadas* con coeficientes reales, tanto formales como convergentes. A diferencia de las series de potencias usuales (con exponentes enteros no negativos), las series de potencias generalizadas permiten exponentes reales no negativos. Un ejemplo sencillo es el siguiente: sea  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  un número real positivo y consideremos  $f_\lambda: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$(1.1) \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

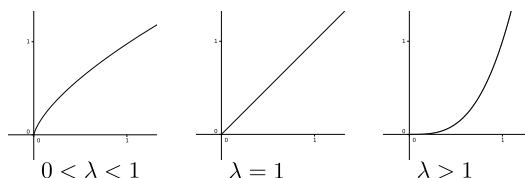


FIGURA 1.1. Gráfica de  $f_\lambda(x) = x^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Notemos que  $f_\lambda$  es la suma de una serie de potencias generalizada bien definida a lo largo de la semirecta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . En efecto,  $f_\lambda$  es una función analítica real en  $\mathbb{R}_{>0}$ ; es decir,  $f_\lambda$  admite un desarrollo en series de potencias con exponentes enteros no negativos, convergente alrededor de cada punto  $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ , ya que:

$$f_\lambda(x + x_0) = (x + x_0)^\lambda = \exp(\lambda \ln(x + x_0)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} c_j x^j,$$

para constantes  $c_j \in \mathbb{R}$ . Empero,  $f_\lambda$  sólo es, en general, una función de clase  $\mathcal{C}^k$  en el origen, con  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Antes de mostrar más ejemplos de funciones analíticas generalizadas (*ver* secc. 1.1.2), recordaremos las definiciones y resultados básicos sobre éstas, que fueron introducidos por primera vez por Lou van den Dries y Patrick Speissegger en [11] (*ver* seccs. 4, 5 y 6).

**DEFINICIÓN 1.1** (Notación multiíndice). Sea  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  un número entero no negativo arbitrario y consideremos las variables  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Usaremos la *notación multiíndice*:  $X^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$ , con  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ , y  $X^0 := 1$ . El producto entre monomios es por definición  $X^\alpha X^\beta := X^{\alpha+\beta}$  si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ .

DEFINICIÓN 1.2. Una *serie de potencias generalizada formal* en las variables  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , con coeficientes reales es una función  $f: \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , denotada por

$$f(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m} f_\alpha X^\alpha, \quad f_\alpha := f(\alpha),$$

tal que su *soporte*,

$$\text{Supp}(f) := \{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m : f_\alpha \neq 0\},$$

está contenido en el producto cartesiano de subconjuntos bien ordenados de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Denotaremos por  $\mathbb{R}[[X^*]]$  al conjunto de todas las series de potencias generalizadas formales. Definiendo las operaciones de suma y producto usuales para series de potencias, se verifica que  $\mathbb{R}[[X^*]]$  es un  $\mathbb{R}$ -álgebra, que es, además, un anillo local y que su ideal maximal  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{R}[[X^*]]$  es el conjunto de elementos sin término constante; es decir,  $\mathfrak{m} = \{f \in \mathbb{R}[[X^*]] : f_0 = 0\}$ .

Consideremos el *orden de división* definido entre elementos de  $\mathbb{R}^m$ : dadas  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ , escribimos  $\alpha \leq \beta$  si  $\alpha_j \leq \beta_j$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Esta relación de orden parcial lee la división entre monomios, pues  $\alpha \leq \beta$  si, y sólo si  $X^\alpha$  divide a  $X^\beta$ , denotado por  $X^\alpha \mid X^\beta$ . Para cada  $s \in \mathbb{R}[[X^*]]$ , consideramos el subconjunto finito de su soporte,  $\text{Supp}_{\min}(s) \subset \text{Supp}(s)$ , cuyos elementos son los minimales con respecto al orden de división en  $\mathbb{R}^m$ , a dicho conjunto lo llamamos el *soporte mínimo* de  $s$ , y denotamos por  $\kappa(s) := |\text{Supp}_{\min}(s)|$  a su tamaño.

Así, toda serie de potencias generalizada formal,  $s \in \mathbb{R}[[X^*]]$ , puede ser escrita como una suma finita de monomios:

$$(1.2) \quad s = \sum_{\alpha \in \text{Supp}_{\min}(s)} u_\alpha X^\alpha, \quad u_\alpha \in \mathbb{R}[[X^*]] \setminus \mathfrak{m}, \quad \text{para cada } \alpha \in \text{Supp}_{\min}(s).$$

La expresión dada en (1.2) es conocida como la *representación monomial* de  $s$ . Además, decimos que  $s$  es de *tipo monomial* si, y sólo si  $\kappa(s) = 1$ ; es decir, su soporte mínimo es un singulete. Enfatizamos que el anillo de series de potencias formales *usuales*,  $\mathbb{R}[[X]]$ , es un subanillo de  $\mathbb{R}[[X^*]]$ , ya que, por definición,  $\text{Supp}(s) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  si  $s \in \mathbb{R}[[X]]$ . Otro subanillo de  $\mathbb{R}[[X^*]]$  en el que estamos interesados es el anillo de series de potencias formales *mixtas*. Para definirlo, consideremos  $(X, Y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$  una  $(m+n)$ -tupla de variables. Diremos que  $s \in \mathbb{R}[[X, Y]]$  es una serie de potencias formal *mixta* si  $\text{Supp}(s) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ; a las variables  $X$  las llamamos *variables generalizadas*, y a las variables  $Y$ , *analíticas*. El anillo de series de potencias formales mixtas en las variables  $(X, Y)$  es denotado por  $\mathbb{R}[[X^*, Y]]$ .

**1.1.1. Poliedro de Newton.** Sea  $s \in \mathbb{R}[[X^*, Y]]$  una serie de potencias formal mixta. Vista  $s$  como un elemento del anillo  $\mathbb{R}[[Y]][[X^*]]$ , podemos asociarle su *poliedro de Newton*: éste es la frontera de la envolvente convexa de  $\text{Supp}_{\min}(s) + \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ , denotado por  $\Delta(s)$ . El conjunto de vértices de  $\Delta(s)$ ,  $\text{vert } \Delta(s)$ , es un subconjunto (posiblemente propio) de  $\text{Supp}_{\min}(s)$ , y por tanto, es finito. Denotamos por  $v(s) := |\text{vert } \Delta(s)|$  al tamaño del conjunto de vértices de  $\Delta(s)$ .

OBSERVACIÓN 1.1. Dada  $s \in \mathbb{R}[[Y]][[X^*]]$  una serie de potencias generalizada formal, subrayamos que  $s$  es de tipo monomial (con respecto a las variables generalizadas  $X$ ) si, y sólo si  $v(s) = 1 = \kappa(s)$ .

EJEMPLO 1.1. Sea  $s \in \mathbb{R}[[Y]][[X^*]]$  una serie de potencias generalizada arbitraria con coeficientes en  $\mathbb{R}[[Y]]$ , tal que depende de una sola variable generalizada ( $m = 1$ ). Consecuentemente, el soporte de  $s$  es un conjunto bien ordenado y, por tanto,

$$\text{Supp}_{\min}(s) = \{\alpha_0\}, \quad \text{donde } \alpha_0 = \min \text{Supp}(s).$$

Así, la representación monomial de  $s$ , con respecto a la variable  $X$ , es

$$s = X^{\alpha_0} u(X), \quad \text{para alguna unidad } u \in \mathbb{R}[[X^*]] \setminus \mathfrak{m},$$

y su poliedro de Newton,  $\Delta(s)$ , consta de un solo vértice.

EJEMPLO 1.2. Sea  $s \in \mathbb{R}[[X^*]]$ , con  $X = (x_1, x_2)$ , la serie de potencias

$$s = \sum_{j=1}^8 c_j X^{\alpha_j}, \quad \text{donde } c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

y  $\alpha_1 = (\phi, 8)$ ,  $\alpha_2 = (3, \frac{9}{2})$ ,  $\alpha_3 = (4, 7)$ ,  $\alpha_4 = (2\pi, 4)$ ,  $\alpha_5 = (8, 3)$ ,  $\alpha_6 = (\pi^2, \sqrt{2})$  y  $\alpha_7 = (4e + \frac{3}{2}, \frac{17}{5})$ , donde  $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $e$  es la constante de Euler.

En (a) de la figura 1.2, está representada la posición en el plano de los elementos del soporte de la serie de potencias  $s$ .

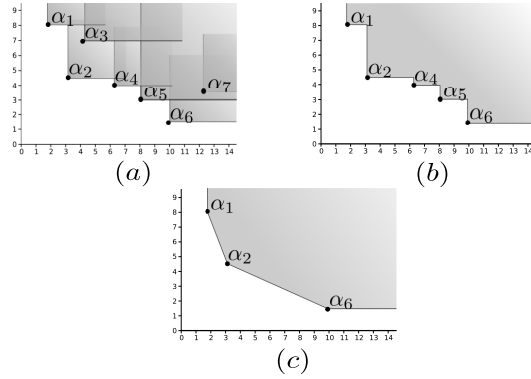


FIGURA 1.2. Poliedro de Newton.

Ahora, las únicas relaciones de orden en  $\text{Supp}(s)$  son  $\alpha_2 \leq \alpha_3$  y  $\alpha_6 \leq \alpha_7$ . En consecuencia,  $\text{Supp}_{\min}(s) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  (ver (b) en la figura 1.2). Finalmente, el polígono de Newton de  $s$  tiene por conjunto de vértices a  $\text{vert } \Delta(s) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6\}$ , como apreciamos en (c) de la misma figura.

**1.1.2. Series de potencias generalizadas convergentes.** La noción de convergencia para series de potencias usuales se extiende de forma natural para series de potencias generalizadas. En efecto, si denotamos por  $|\cdot|: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  a la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^m$ , y  $(r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$  es un poliradio, entonces  $\mathbb{R}[[X^*]]$  es un anillo normado a través de la función norma,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}[[X^*]] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \\ s &\longmapsto \|s\|_r := \sum_{\alpha} |s_{\alpha}| r^{\alpha}, \end{aligned}$$

donde  $s = \sum_{\alpha} s_{\alpha} X^{\alpha} \in \mathbb{R}[[X^*]]$ . Denotamos por  $\mathbb{R}\{X^*\}_r$  al subanillo de  $\mathbb{R}[[X^*]]$  tal que sus elementos tienen norma finita; es decir,  $s \in \mathbb{R}\{X^*\}_r$  si, y sólo si  $\|s\|_r < \infty$ . La suma de cada serie de potencias en  $\mathbb{R}\{X^*\}_r$  define una *función analítica generalizada*, que es continua en su dominio de definición,  $[0, r_1] \times [0, r_2] \times \cdots \times [0, r_m]$ , y analítica real en el interior de éste. Finalmente, denotamos por

$$\mathbb{R}\{X^*\} := \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{>0}} \mathbb{R}\{X^*\}_r,$$

al subanillo obtenido al considerar la unión de todos los subanillos  $\mathbb{R}\{X^*\}_r$ , con  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , y llamamos series de potencias generalizadas *convergentes* a sus elementos.

En el caso de series de potencias mixtas podemos definir el subanillo de series de potencias mixtas *convergentes*; esto es, si  $\mathbb{R}[[X^*, Y]]$  es el anillo de series de potencias mixtas en las variables  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , entonces  $\mathbb{R}\{X^*, Y\} := \mathbb{R}[[X^*, Y]] \cap \mathbb{R}\{(X, Y)^*\}$  y  $\mathbb{R}\{X^*, Y\}_{(r,s)} := \mathbb{R}[[X^*, Y]] \cap \mathbb{R}\{(X, Y)^*\}_{(r,s)}$  para el poliradio  $(r, s) = (r_1, r_2, \dots, r_m, s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_{>0}^{m+n}$ . Una vez más, la suma de cualquier elemento del anillo  $\mathbb{R}\{X^*, Y\}$  define una función continua en su dominio de definición,  $I_{r,s} := [0, r_1] \times [0, r_2] \times \cdots \times [0, r_m] \times (-s_1, s_1) \times (-s_2, s_2) \times \cdots \times (-s_n, s_n)$ , y es analítica real en el interior de  $I_{r,s}$  (ver seccs. 5 y 6 de [11]).

**1.1.3. Ejemplos de series de potencias generalizadas.** Las series de potencias generalizadas surgen en diversos contextos:

- a) En ecuaciones diferenciales, uno de los ejemplos más sencillos son las soluciones al sistema de Euler  $x' = t^{-1}\lambda x$ . Dichas soluciones están dadas por  $x = t^{\lambda} = \exp(\lambda \ln t)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un número real.

También las series de potencias generalizadas aparecen en el llamado *mapeo de Dulac*. Esta transformación aparece de manera natural, entre otros, en el proceso de reducción de singularidades de una foliación al conectar distintas componentes del divisor excepcional.

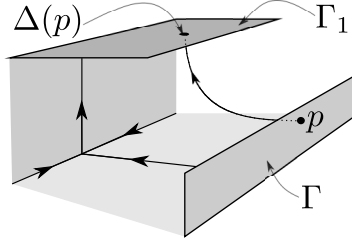


FIGURA 1.3. Mapeo de Dulac.

- b) En geometría algebraica un ejemplo emblemático de las series de potencias generalizadas lo constituyen las llamadas *series de Puiseux*. Éstas son una subclase de las series de potencias generalizadas que resultan ser parametrizaciones de curvas analíticas planas irreducibles. Las series de Puiseux dependen del campo base en el que uno trabaje; por ejemplo, llevando a cabo los cálculos pertinentes, obtenemos que la serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2-2^{-k}}$  parametriza a la curva  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_2 : y^2 + x^2 y + x^2 = 0\}$ , sobre el campo finito  $\mathbb{Z}_2$ .

- c) En ecuaciones funcionales: se puede verificar que la serie de potencias  $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} x^{2-\frac{1}{2^j}}$  es una solución convergente de la ecuación funcional  $f(x) = x + \frac{1}{2}xf(\sqrt{x})$ . Como se muestra en este caso, a pesar de la condición de buen orden impuesta en la definición de series de potencias generalizadas, esta clase contiene series muy distintas a las que encontramos en el caso estándar, debido a que el soporte de una serie de potencias generalizada admite, *a priori*, puntos de acumulación. Más drásticamente, al considerar la serie de potencias  $G(x) := \frac{1}{1-x} \cdot F(x)$ , obtenemos una serie de potencias tal que su soporte contiene una cantidad infinita de puntos límite.
- d) Una serie de Dirichlet ordinaria: tomando en cuenta la función  $g(t) = \sum_{j \geq 1} a_j j^{-t}$ , el cambio de coordenadas dado por  $t = -\log x$ , da lugar a la serie de potencias  $\sum_{j \geq 1} a_j x^{\log j} \in \mathbb{R}[[x^*]]$ . Su soporte,  $\{\log j : j \geq 1\}$ , es una sucesión creciente de números reales.

## 1.2. Variedades analíticas generalizadas

Para introducir a la categoría de *variedades analíticas generalizadas*, definidas por primera vez en [18], por Rafael Martín-Villaverde, Jean-Philippe Rolin y Fernando Sanz-Sánchez, comenzamos esta sección recordando a la categoría de variedades analíticas reales con frontera y esquinas, pues como podemos apreciar, éstas son los dominios naturales de las funciones analíticas generalizadas. Usaremos el lenguaje de *espacios localmente anillados* para referirnos a variedades topológicas dotadas de alguna estructura. Hemos incluido en los primeros auxilios (*ver secc. A*), las definiciones básicas sobre espacios localmente anillados, así como la traducción de la definición usual de variedad topológica (con alguna estructura) al lenguaje de éstos.

DEFINICIÓN 1.3. Una *variedad (analítica real) estándar* de dimensión  $m$ , con  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ , es un espacio localmente anillado,  $A = (|A|, \mathcal{O}_A)$ , en anillos de funciones continuas, que es localmente isomorfo (como espacio anillado) al espacio localmente anillado  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m = (|\mathbb{R}_{\geq 0}^m|, \mathcal{O}_m)$ , donde  $\mathcal{O}_m$  es el haz de funciones analíticas reales en el ortante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ . Es decir, una variedad estándar es una variedad topológica con frontera y esquinas, dotada de una estructura analítica real.

DEFINICIÓN 1.4. Una *variedad (analítica real) generalizada* de dimensión  $m$ , con  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ , es un espacio localmente anillado,  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$ , en anillos de funciones continuas, que es localmente isomorfo al espacio localmente anillado  $G\mathbb{R}_{\geq 0}^m = (|G\mathbb{R}_{\geq 0}^m|, \mathcal{G}_m)$ , donde  $|G\mathbb{R}_{\geq 0}^m| = \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ , y  $\mathcal{G}_m$  es el haz de funciones analíticas generalizadas en el ortante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ .

Ahora, dada una variedad estándar  $A = (|A|, \mathcal{O}_A)$  y una estructura analítica definida en ella,  $\mathcal{U}_A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ , consideramos el subhaz  $\mathcal{G}_A$  del haz de funciones continuas en  $|A|$  cuyas secciones sobre cualquier subconjunto abierto de  $|A|$ ,  $U \subset |A|$ , están dadas por:

$$(f : U \rightarrow \mathbb{R}) \in \mathcal{G}_A(U) \quad \text{si, y sólo si} \quad f|_{U \cap U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)} \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}_{\geq 0}^m}(U \cap U_\alpha),$$

para todo  $\alpha \in \Lambda$ ,  $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ . De esta manera, dotamos a  $|A|$  con una estructura analítica generalizada,  $A^e := (|A|, \mathcal{G}_A)$ , que llamaremos *enriquecido* de  $A$ , *cf.*, [18]. Además, el morfismo de identidad en  $|A|$ ,  $\text{id}_A : |A| \rightarrow |A|$ , induce un morfismo de espacios localmente anillados,  $\text{id}_A : A^e \rightarrow A$ .

OBSERVACIÓN 1.2. Las secciones del subhaz  $\mathcal{G}_A$  no dependen de la estructura analítica real elegida sobre el espacio topológico  $|A|$ .

OBSERVACIÓN 1.3. Dotar de una estructura analítica generalizada a variedades estándar, a través de la noción de enriquecido introducida hace un instante, nos permitirá definir, cuando sea posible (*ver* proposición 1.2), morfismos entre variedades generalizadas que tienen sentido en el contexto analítico real; como lo son los morfismos de explosión usuales, en los que centraremos nuestra atención más adelante.

DEFINICIÓN 1.5. Decimos que una variedad generalizada  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$  es una *variedad estandarizable* si es isomorfa al enriquecido de alguna variedad estándar. Es decir, si existe  $A = (|A|, \mathcal{O}_A)$  una variedad estándar y un isomorfismo  $\varphi^e: M \rightarrow A^e$ , donde  $A^e$  denota al enriquecido de  $A$ . Notamos que es inducido un morfismo de espacios localmente anillados  $\varphi: M \rightarrow A$ , a través de la composición  $\varphi := \text{id}_A \circ \varphi^e$ , y  $\varphi: |M| \rightarrow |A|$  es un homeomorfismo.

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi^e} & A^e \\ & \searrow \varphi & \downarrow \text{id}_A \\ & & A \end{array}$$

Al par  $(A, \varphi)$  lo llamamos *estandarización* de  $M$ , que es único salvo isomorfismo.

**1.2.1. Estratificación natural de variedades estándar y variedades generalizadas.** Antes de continuar, hacemos notar que cualquier variedad topológica  $m$ -dimensional, con frontera y esquinas,  $X = (|X|, \mathcal{E}_X)$ , dotada de una estructura analítica real, o bien analítica generalizada,  $\mathcal{E}_X \in \{\mathcal{O}_X, \mathcal{G}_X\}$ , admite una *estratificación*<sup>1</sup> *natural*, inducida por su frontera. A saber, para cada punto  $p \in |X|$  consideremos una carta local centrada en él, digamos  $(U_p, Z)$ , donde  $U_p \subset |X|$  es una vecindad abierta de  $p$  en  $|X|$ , y  $Z = (X, Y)$  es un sistema local de coordenadas (analíticas reales, o bien analíticas generalizadas) centrado en el punto  $p$ , tal que  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{l_p})$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{m-l_p})$ , y las variables  $X$  señalan justamente a las componentes de frontera alrededor del punto  $p$ . Definimos la *cantidad de componentes de frontera* de  $X$  en  $p$ , como el número entero no negativo  $l_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Con esto en mente, para cada  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ , consideremos los conjuntos  $|X|_j := \{p \in |X| : l_p = j\}$ , que parten al espacio topológico  $|X|$  en la unión ajena:

$$|X| = \bigcup_{j=0}^m |X|_j.$$

Para cada  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  consideremos la familia de componentes conexas del conjunto  $|X|_j$ ,  $\{|X|_{j,k} : k \in J_j\}$ . Así, el espacio topológico  $|X|$  queda estratificado,

$$|X| = \bigcup_{j=0}^m \left( \bigcup_{k \in J_j} |X|_{j,k} \right),$$

<sup>1</sup>Recomendamos al lector consultar el libro [1], donde encontrará la definición formal de *variedad estratificada*, así como una serie de ejemplos ilustrativos (*ver* páginas 230–233).

y a tal partición la llamamos la *estratificación natural* de  $X$ , inducida por su frontera,  $\partial X$ , y, para cada  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  y cada  $k \in J_j$ , queda definida la variedad  $(m-j)$ -dimensional  $X_{j,k} := (|X|_{j,k}, \mathcal{E}_X|_{|X|_{j,k}})$ , que llamamos  $(m-j)$ -estrato de la variedad  $X$ . Además, la frontera de cada uno de ellos,  $\partial X_{j,k} = \overline{X_{j,k}} \setminus X_{j,k}$ , es unión de estratos de menor dimensión. A los 0-estratos de la variedad  $X$  los llamaremos *puntos esquina* de  $X$  y por *curva adaptada a la frontera* de  $X$  nos referiremos a la clausura topológica de cualquier 1-estrato de  $X$ , en concordancia con su naturaleza geométrica en el espacio topológico soporte  $|X|$ .

EJEMPLO 1.3. Sea  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3 = (|\mathbb{R}_{\geq 0}^3|, \mathcal{E}_X)$  el ortante en el espacio euclidiano tridimensional, definido por las tríadas de números reales no negativos, dotado de una estructura analítica real, o bien analítica generalizada,  $\mathcal{E}_X \in \{\mathcal{O}_3, \mathcal{G}_3\}$ . La estratificación natural del ortante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , inducida por su frontera, la ilustramos en la siguiente figura:

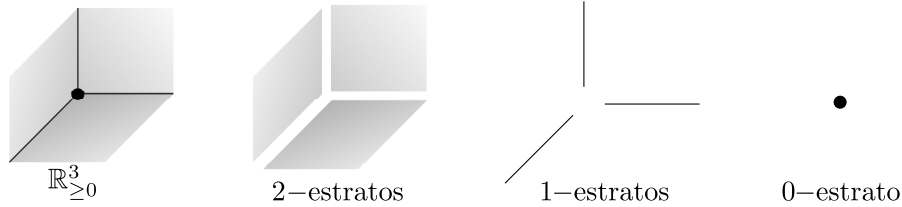


FIGURA 1.4. Estratificación natural de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , inducida por su frontera.

**1.2.2. Descripción local de morfismos.** Para lograr un mejor entendimiento, tanto analítico como geométrico, de las variedades generalizadas, debemos exhibir explícitamente la descripción de morfismos *localmente*; es decir, en coordenadas locales. Una peculiaridad de dichos morfismos es que ellos son localmente de tipo monomial alrededor de puntos en la frontera, esto es consecuencia de la siguiente proposición (ver proposición 3.16 en [18]).

PROPOSICIÓN 1.1. Sean  $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $k = m + n$ ,  $k' = m' + n'$ . Sean  $U, V$  vecindades abiertas en torno al origen en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}$ , respectivamente. Sea  $h = (h_1, h_2, \dots, h_{k'}) : U \rightarrow V$  una transformación continua, con  $h(0) = 0$ . Denotemos por  $(X, Y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$  y  $(Z, W) = (z_1, z_2, \dots, z_{m'}, w_1, w_2, \dots, w_{n'})$  coordenadas en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}$ , respectivamente. Entonces:

1. La transformación  $h$  induce un morfismo

$$(h, h^*) : G\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}^n|_{U_0} \rightarrow G\mathbb{R}_{\geq 0}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}|_{V_0}$$

(donde  $U_0$  y  $V_0$  son vecindades abiertas del origen en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}$ , respectivamente) si, y sólo si cada componente  $h_j$  es una función analítica generalizada en el origen de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}^n$  y, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m'\}$ ,

$$h_j(X, Y) = X^{\alpha^j} g_j(X, Y),$$

para algún  $\alpha^j \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$  y alguna función analítica generalizada  $g_j$ , tal que  $g_j(0) > 0$ .

2. Si  $k = k'$  y la transformación  $h$  induce un morfismo de variedades generalizadas,  $(h, h^*): G\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}^n|_U \rightarrow G\mathbb{R}_{\geq 0}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}|_V$ , entonces  $(h, h^*)$  es un isomorfismo (módulo la restricción de  $U$  y  $V$  a vecindades más pequeñas) si, y sólo si  $m = m'$ ,  $n = n'$ ,  $h$  es un homeomorfismo, la transformación

$$Y \mapsto (h_{m+1}(0, Y), h_{m+2}(0, Y), \dots, h_k(0, Y)),$$

induce un isomorfismo analítico real local de  $\mathbb{R}^n$  en el origen y, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,

$$z_j = h_j(X, Y) = x_{\sigma(j)}^{\alpha_j} g_j(X, Y),$$

con  $\alpha_j \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $g_j$  es una función analítica generalizada en el origen, tal que  $g_j(0) > 0$  y  $\sigma \in S_m$  es una permutación de  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

Ahora que conocemos cómo son localmente los morfismos entre variedades generalizadas, podemos decir cuándo se *levantan* morfismos (*analíticos reales*) entre variedades estándar, a morfismos entre variedades generalizadas. Concretamente, si  $M, N$  son variedades estandarizables,  $(A, \varphi)$  y  $(B, \psi)$  son estandarizaciones de  $M$  y  $N$ , respectivamente, y  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo entre  $A$  y  $B$ , deseamos saber cuándo existe un morfismo  $\tilde{f}: M \rightarrow N$  tal que el diagrama

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{f}} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta.

Esto es de nuestro interés ya que un método al que recurriremos para definir morfismos entre variedades estandarizables, será a través del *levantamiento* de morfismos entre las copias estándar de éstas. La siguiente proposición da respuesta a lo planteado en estas líneas (*ver* proposición 3.19 en [18]).

PROPOSICIÓN 1.2. Sean  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$  y  $N = (|N|, \mathcal{G}_N)$  dos variedades estandarizables, y sean  $(A, \varphi)$  y  $(B, \psi)$  estandarizaciones de  $M$  y  $N$ , respectivamente. Dado un morfismo (analítico real)  $f: A \rightarrow B$ , existe un morfismo  $\tilde{f}: M \rightarrow N$ , tal que el diagrama

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{f}} & N \\ \varphi \downarrow & \begin{array}{c} \searrow \varphi^e \\ \swarrow \text{id}_A \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow \psi^e \\ \searrow \text{id}_B \end{array} \downarrow \psi \\ A^e & \xrightarrow{f^e} & B^e \\ \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \text{id}_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta si, y sólo si el morfismo  $f$  es localmente de tipo monomial, con respecto a las coordenadas generalizadas. En tal caso decimos que el morfismo  $f$  se levanta a  $M$  y que el morfismo  $\tilde{f}$  es su levantamiento.

**1.2.3. Morfismos de explosión.** Una aplicación de la proposición 1.2 es la definición de *morfismo de explosión* en la categoría de variedades generalizadas, que está basada en la definición usual de esta clase de morfismos en el caso estándar. Requerimos además especificar qué entenderemos por un *centro admisible* en este contexto. Para hacer esto formalmente, a continuación recordamos qué es un centro admisible en el caso estándar.

DEFINICIÓN 1.6. Dada  $A = (|A|, \mathcal{O}_A)$  una variedad estándar, decimos que un subconjunto cerrado y conexo  $|W|$  de  $A$ ,  $|W| \subset |A|$ , es un *centro admisible estándar* si tiene cruzamientos normales con la frontera de  $A$ ; es decir, para cada punto  $p$  en  $|W|$ , existe un sistema local de coordenadas,  $(U, X_p)$ , tal que  $|W| \cap U$  está contenido en el conjunto de ceros de algunas de las variables que conforman  $X_p$  (esto es, las componentes de frontera del punto  $p$  en  $|A|$ ).

Motivados por la noción de centro admisible estándar, damos ahora la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.7. Sea  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$  una variedad generalizada,  $|Z| \subset |M|$  un subconjunto de  $|M|$  y  $U \subset M$  una vecindad abierta de  $|Z|$  en  $|M|$ . Decimos que la tríada  $Z = (|Z|, U, \varphi)$  es un *centro admisible* si  $(A, \varphi)$  es una estandarización de  $U$  tal que  $\varphi(|Z|) \subset |A|$  es un centro admisible estándar en  $A$ .

Finalizamos esta sección estableciendo el concepto de *morfismo de explosión* en la categoría de variedades generalizadas.

DEFINICIÓN 1.8. Sea  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$  una variedad generalizada, y sea  $Z = (|Z|, U, \varphi)$  un centro admisible en  $M$ . Un *morfismo de explosión* de  $M$  centrado en  $Z$  es el producto fibrado de los morfismos  $\varphi: U \rightarrow A$  y  $\pi_W^A: \tilde{A} \rightarrow A$ , donde  $\pi_W^A$  es el morfismo de explosión usual de  $A$  centrado en  $|W| := \varphi(|Z|)$ , en la categoría de variedades estándar:

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\pi_Z^M} & \tilde{M} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ A & \xleftarrow{\pi_W^A} & \tilde{A} \end{array}$$

OBSERVACIÓN 1.4. Se puede verificar que el morfismo  $\pi_Z^M$  es propio, suprayectivo y que su restricción a  $\tilde{M} \setminus E_Z$  da lugar a un isomorfismo entre  $\tilde{M} \setminus E_Z$  y  $M \setminus Z$ , donde  $E_Z := (\pi_Z^M)^{-1}(Z)$  es llamado el *divisor excepcional* (ver secc. 4 en [18]).

EJEMPLO 1.4 (Morfismo de explosión con centro de codimensión dos). Sea  $\mathbf{M} = (G\mathbb{R}_{>0}^m, 0)$  el germen<sup>2</sup> en un punto esquina  $p \in \partial|M|$  de una variedad generalizada  $m$  dimensional  $M$ ,  $m \geq 2$ . Sean  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  un sistema local de coordenadas centrado en  $p$  y  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i < j$ , dos índices distintos entre sí que marcan al  $(m-2)$ -estrato  $|Z| := \{x_i = x_j = 0\}$ . Consideremos un número real positivo

<sup>2</sup>Dada una variedad  $X = (|X|, \mathcal{E}_X)$  dotada de una estructura analítica real, o bien analítica generalizada,  $\mathcal{E}_X \in \{\mathcal{O}_X, \mathcal{G}_X\}$ , usaremos el estilo tipográfico **negrita** para referirnos a un germen de ella (en torno a algún subconjunto suyo,  $U \subset |X|$ ),  $\mathbf{X} = (X, U)$ , diferenciando así éste del caso de variedades, donde usamos el estilo *cursiva*,  $X$ .

arbitrario  $\lambda > 0$ , y definamos la estandarización  $\varphi := \varphi_{\alpha, i, j}: M \rightarrow A$ , con  $\mathbf{A} = (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, 0)$ , dada por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_m^{\alpha_m}) = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}_{>0}^m$  es un vector tal que  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \lambda$ . Por consiguiente, queda definido el centro admisible  $Z = (|Z|, |M|, \varphi)$ , y el morfismo de explosión de  $M$  centrado en  $Z$ , queda determinado por un diagrama conmutativo como el mostrado en (1.6).

Ahora, al efectuar el morfismo de explosión de la variedad estándar  $A$  centrado en el estrato  $W := \varphi(|Z|) = \{y_i = y_j = 0\}$ , digamos  $\pi := \pi_W^A: \tilde{A} \rightarrow A$ , sabemos que el espacio topológico soporte de la variedad  $\tilde{A}$  lo obtenemos al identificar dos copias del ortante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ ,

$$|\tilde{A}| = \mathbb{R}_{\geq 0}^m \sqcup \mathbb{R}_{\geq 0}^m / \sim,$$

donde la relación de equivalencia,  $\sim$ , está definida por:

$$\begin{aligned} (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_i, \dots, \tilde{y}_j, \dots, \tilde{y}_m) \sim (y'_1, y'_2, \dots, y'_i, \dots, y'_j, \dots, y'_m) \text{ si, y sólo si} \\ \tilde{y}_j \cdot y'_i \neq 0, \quad y'_i = \frac{1}{\tilde{y}_j}, \quad y'_j = \tilde{y}_i \cdot \tilde{y}_j, \quad y'_k = \tilde{y}_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i, j\}. \end{aligned}$$

Tenemos así la  $\lambda$ -equivalencia,  $\sim_\lambda$ , que da lugar a la estructura analítica generalizada que define a la variedad  $\tilde{M}$ , donde

$$|\tilde{M}| = \mathbb{R}_{\geq 0}^m \sqcup \mathbb{R}_{\geq 0}^m / \sim_\lambda,$$

y

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_j, \dots, \tilde{x}_m) \sim_\lambda (x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_j, \dots, x'_m) \text{ si, y sólo si} \\ \tilde{x}_j \cdot x'_i \neq 0, \quad x'_i = \frac{1}{\tilde{x}_j^{1/\lambda}}, \quad x'_j = \tilde{x}_i^\lambda \cdot \tilde{x}_j, \quad x'_k = \tilde{x}_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i, j\}. \end{aligned}$$

Entonces, la transformación  $\varphi$  se levanta a un morfismo  $\tilde{\varphi}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{A}$ , y el morfismo de explosión  $\pi_\lambda := \pi_Z^M: \tilde{M} \rightarrow M$  queda determinado, en cada carta, por:

$$\pi_\lambda(\tilde{x})_k = \begin{cases} \tilde{x}_k, & \text{si } k \neq j \\ \tilde{x}_i^\lambda \tilde{x}_j, & \text{si } k = j \end{cases}, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

y

$$\pi_\lambda(x')_k = \begin{cases} x'_k, & \text{si } k \neq i \\ x'_i (x'_j)^{1/\lambda}, & \text{si } k = i \end{cases}, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

**EJEMPLO 1.5** (Morfismo de explosión de  $(G\mathbb{R}_{\geq 0}^2, 0)$  centrado en el origen). Un caso particular del ejemplo anterior es tomar  $\mathbf{M} = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^2, 0)$ . Sea  $X = (x_1, x_2)$  un sistema local de coordenadas en el origen,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  un número real positivo, y consideremos la estandarización de  $M$ ,  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ , dada por

$$\varphi_\alpha(x_1, x_2) = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lambda.$$

Así,  $\{0\}_\alpha := (\{0\}, |M|, \varphi_\alpha)$  es un centro admisible y el morfismo  $\pi_\lambda: \tilde{M} \rightarrow M$  está determinado por el siguiente diagrama conmutativo:

$$(1.7) \quad \begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\pi_\lambda} & \tilde{M} \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_\alpha \\ A & \xleftarrow{\pi} & \tilde{A} \end{array}$$

Que geoméricamente visualizamos como:

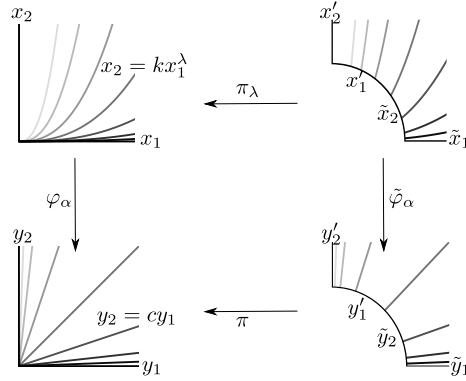


FIGURA 1.5. Morfismo de explosión de  $G\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  centrado en  $\{0\}_\alpha$ .

donde  $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$  es el morfismo de explosión de  $A := \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  centrado en el origen. Haciendo los cálculos explícitos en cada carta local, tenemos que

$$\pi_\lambda(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^\lambda \tilde{x}_2) \quad \text{y} \quad \pi_\lambda(x'_1, x'_2) = (x'_1 (x'_2)^{1/\lambda}, x'_2).$$

EJEMPLO 1.6 (Morfismo de explosión de  $(G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  centrado en un eje coordenado). Otro caso particular del ejemplo 1.4 es cuando  $\mathbf{M} = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  es el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina. Sea  $X = (x_1, x_2, x_3)$  un sistema local de coordenadas centradas en el origen,  $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$  un número real positivo, y consideremos la estandarización de  $M$ ,  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , dada por

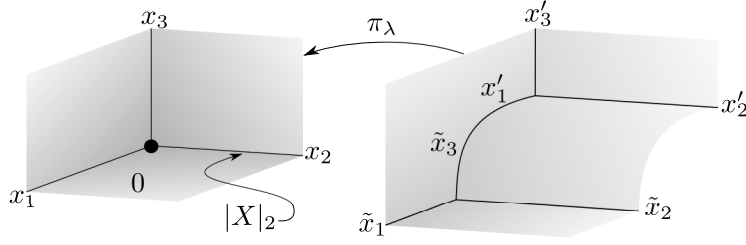
$$\varphi_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}), \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_{> 0}^3, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \lambda.$$

Y denotemos por  $|X|_2 := \{x_1 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$  al eje coordenado en la dirección de la variable generalizada  $x_2$ . Entonces,  $X_{2,\alpha} := (|X|_2, |M|, \varphi_\alpha)$  es un centro admisible y el morfismo  $\pi_\lambda: \tilde{M} \rightarrow M$  está determinado, en cada carta local, por:

$$\pi_\lambda(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_1^\lambda \tilde{x}_3) \quad \text{y} \quad \pi_\lambda(x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_1 (x'_3)^{1/\lambda}, x'_2, x'_3).$$

Geoméricamente lo visualizamos como:

EJEMPLO 1.7 (Morfismo de explosión de  $(G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  centrado en el origen). Sean  $\mathbf{M} = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina,  $X = (x_1, x_2, x_3)$  un sistema local de coordenadas en el origen,

FIGURA 1.6. Morfismo de explosión de  $G\mathbb{R}_{\geq 0}^3$  centrado en  $X_{2,\alpha}$ .

y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$  dos números reales positivos arbitrarios. Consideremos la estandarización de  $M$ ,  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , dada por

$$\varphi_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}), \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_{>0}^3, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lambda, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \mu.$$

Y denotemos por  $\{0\}_\alpha := (\{0\}, |M|, \varphi_\alpha)$  al centro admisible definido por la estandarización  $\varphi_\alpha$ . Entonces, el morfismo  $\pi_{\lambda,\mu}: \tilde{M} \rightarrow M$  está determinado por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\pi_{\lambda,\mu}} & \tilde{M} \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_\alpha \\ A & \xleftarrow{\pi} & \tilde{A} \end{array}$$

donde  $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$  es el morfismo de explosión de  $A := \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  centrado en el origen. La variedad estándar  $\tilde{A}$  está descrita por una estructura analítica que consta de tres cartas locales,

$$\mathcal{U}_{\tilde{A}} = \{(V_1, Y_1), (V_2, Y_2), (V_3, Y_3)\},$$

donde,

$$\begin{aligned} Y_2 \circ Y_1^{-1}: V_1 &\rightarrow V_2, & Y_2 \circ Y_1^{-1}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) &= (y_{21}^{-1}, y_{11} y_{12}, y_{12}^{-1} y_{13}), \\ Y_3 \circ Y_2^{-1}: V_2 &\rightarrow V_3, & Y_3 \circ Y_2^{-1}(y_{21}, y_{22}, y_{23}) &= (y_{21} y_{23}^{-1}, y_{23}^{-1}, y_{22} y_{23}), \\ Y_3 \circ Y_1^{-1}: V_1 &\rightarrow V_3, & Y_3 \circ Y_1^{-1}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) &= (y_{13}^{-1}, y_{12} y_{13}^{-1}, y_{11} y_{13}). \end{aligned}$$

Y, el morfismo  $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$ , en cada carta local está dado por

$$\begin{aligned} \pi^1(y_{11}, y_{12}, y_{13}) &= (y_{11}, y_{11} y_{12}, y_{11} y_{13}), \\ \pi^2(y_{21}, y_{22}, y_{23}) &= (y_{21} y_{22}, y_{22}, y_{23} y_{22}), \\ \pi^3(y_{31}, y_{32}, y_{33}) &= (y_{31} y_{33}, y_{32} y_{33}, y_{33}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la estructura analítica generalizada que define a la variedad generalizada  $\tilde{M}$  es

$$\mathcal{U}_{\tilde{M}} = \{(U_1, X_1), (U_2, X_2), (U_3, X_3)\},$$

donde,

$$\begin{aligned} X_2 \circ X_1^{-1} &=: \psi_{12}: U_1 \rightarrow U_2, & \psi_{12}(x_{11}, x_{12}, x_{13}) &= (x_{12}^{-\frac{1}{\lambda}}, x_{11}^{\lambda} x_{12}, x_{12}^{-\frac{\mu}{\lambda}} x_{13}), \\ X_3 \circ X_2^{-1} &=: \psi_{23}: U_2 \rightarrow U_3, & \psi_{23}(x_{11}, x_{12}, x_{13}) &= (x_{11} x_{13}^{-\frac{1}{\mu}}, x_{13}^{-\frac{\lambda}{\mu}}, x_{12}^{\frac{\mu}{\lambda}} x_{13}), \\ X_3 \circ X_1^{-1} &=: \psi_{13}: U_1 \rightarrow U_3, & \psi_{13}(x_{11}, x_{12}, x_{13}) &= (x_{13}^{-\frac{1}{\mu}}, x_{12} x_{13}^{-\frac{\lambda}{\mu}}, x_{11}^{\mu} x_{13}). \end{aligned}$$

Y, el morfismo  $\pi_{\lambda, \mu}: \tilde{M} \rightarrow M$ , en cada carta local está dado por

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda, \mu}^1(x_{11}, x_{12}, x_{13}) &= (x_{11}, x_{11}^{\lambda} x_{12}, x_{11}^{\mu} x_{13}), \\ \pi_{\lambda, \mu}^2(x_{21}, x_{22}, x_{23}) &= (x_{21} x_{22}^{\frac{1}{\lambda}}, x_{22}, x_{22}^{\frac{\mu}{\lambda}} x_{23}), \\ \pi_{\lambda, \mu}^3(x_{31}, x_{32}, x_{33}) &= (x_{31} x_{33}^{\frac{1}{\mu}}, x_{32} x_{33}^{\frac{\lambda}{\mu}}, x_{33}). \end{aligned}$$

Una representación geométrica de esta situación la damos en la siguiente figura:

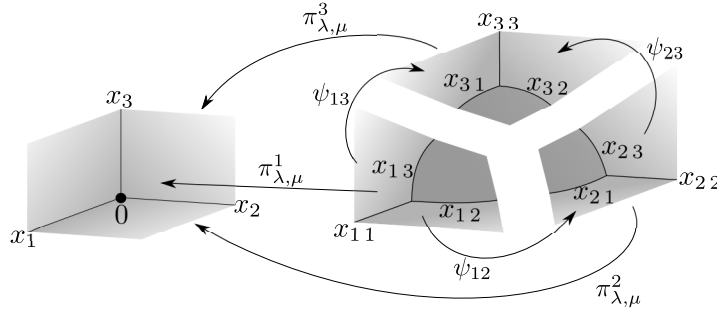


FIGURA 1.7. Morfismo de explosión de  $G\mathbb{R}_{\geq 0}^3$  centrado en  $\{0\}_\alpha$ .

En lo que sigue, centraremos nuestra atención en una clase particular de morfismos de explosión; a saber, los *morfismos de explosión combinatorios*:

**DEFINICIÓN 1.9.** Sean  $M$  una variedad analítica generalizada y  $Z = (|Z|, U, \varphi)$  un centro admisible en  $M$ . Un morfismo de explosión  $\pi_Z^M: \tilde{M} \rightarrow M$  es *combinatorio* si  $|Z|$  es la clausura de un estrato de la estratificación natural de  $M$ , inducida por su frontera,  $\partial|M|$ .

En el capítulo 2, analizaremos más ejemplos de morfismos de explosión combinatorios. Más aún, describiremos en términos matriciales cómo son todas las posibles sucesiones finitas de morfismos de explosión combinatorios,  $\pi: M_N \rightarrow M$ , donde  $\mathbf{M} = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  es el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina, y  $\pi = \pi_N \circ \dots \circ \pi_2 \circ \pi_1$  denota a la sucesión de morfismos de explosión combinatorios:

$$M = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N,$$

con  $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ , indicando además cuáles son los morfismos realizables,  $\pi_j$ , que definen a la composición  $\pi$ , pues recordemos que cada morfismo  $\pi_j$  depende de una estandarización que define a su centro de explosión. Todo esto será cubierto en los capítulos 2 y 3.



## Sucesiones finitas de morfismos de explosión combinatorios

Introducimos ahora una herramienta fundamental que emplearemos para contestar preguntas en las categorías de variedades estándar y generalizadas. A saber, cada vez que realizamos alguna sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios, emerge naturalmente una *representación lineal de carcajes*<sup>1</sup> asociada intrínsecamente a ella. Dicha representación codifica las propiedades que nos son de interés, brindándonos además un marco claro (el lenguaje del álgebra lineal) donde podemos articular los resultados claves para dar una solución positiva a la existencia de la monomialización combinatoria tridimensional; fin último de nuestro trabajo.

El siguiente ejemplo, a pesar de su sencillez, nos sugiere hacer la traducción al álgebra lineal mencionada antes; *e.g.*, si deseamos conocer la estructura (analítica real o analítica generalizada) definida sobre los espacios topológicos que ocurren en una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios (*ver* capítulo 3), basta con que describamos la representación lineal del carcaj que subyace tras ella; siendo esta última, en general, más diáfana que la sucesión de partida.

**EJEMPLO 2.1.** Recordemos<sup>2</sup> la definición del morfismo de explosión de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  centrado en el origen,  $\pi: \mathbb{M} \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . La variedad  $\mathbb{M}$  está determinada por la estructura analítica real:

$$\mathcal{U}_{\mathbb{M}} := \{(U, (x, u)), (V, (v, y))\},$$

donde  $U, V \subset \mathbb{R}^2$  son vecindades abiertas del origen, y la transformación de pegado entre ellas es:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g: U^* &\longrightarrow V^* \\ (x, u) &\longmapsto (u^{-1}, xu) \end{aligned}$$

donde  $U^* := U \setminus \{u = 0\}$  y  $V^* := V \setminus \{v = 0\}$ . Y el morfismo  $\pi$  está determinado localmente, en cada carta, por

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \pi^1: U &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) & \pi^2: V &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, u) &\longmapsto (x, xu), & (v, y) &\longmapsto (vy, y). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>En los primeros auxilios (*ver* secc. B) damos una breve introducción a la teoría básica de representaciones lineales de carcajes.

<sup>2</sup>*cf.*, capítulo 3 en [10] y capítulo 1 en [15]

Lo anterior queda codificado en el siguiente diagrama conmutativo:

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccc} & V & \xleftarrow{\iota_v} V^* \\ \swarrow \pi^2 & & \uparrow g \\ (\mathbb{R}^2, 0) & & U^* \\ \swarrow \pi^1 & & \xleftarrow{\iota_u} U \end{array}$$

siendo  $\iota_u: U^* \rightarrow U$  y  $\iota_v: V^* \rightarrow V$  las inclusiones canónicas de  $U^*$  en  $U$  y de  $V^*$  en  $V$ , respectivamente. Denotando por  $\Pi^1 := \pi^1 \circ \iota_u$  y  $\Pi^2 := \pi^2 \circ \iota_v$ , obtenemos el diagrama conmutativo:

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} & V^* & \\ \swarrow \Pi^2 & & \uparrow g \\ (\mathbb{R}^2, 0) & & U^* \\ \swarrow \Pi^1 & & \end{array}$$

Que geoméricamente representamos como:

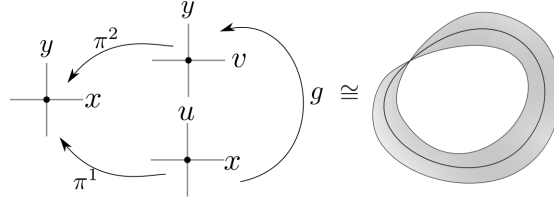


FIGURA 2.1. Morfismo de explosión de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  centrado en el origen.

En resumen, el diagrama (2.4) codifica la construcción del morfismo  $\pi$ , una vez que conocemos las expresiones explícitas de cada uno de los morfismos que lo conforman, y que hemos dado en (2.1) y (2.2). Una forma equivalente de describir lo anterior es usando el lenguaje del álgebra lineal; a saber, sean

$$(2.5) \quad L(g) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(\Pi^1) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L(\Pi^2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

las matrices determinadas por cómo actúa cada uno de los morfismos  $g$ ,  $\Pi^1$  y  $\Pi^2$  en las variables que definen a los dominios de definición de cada uno de ellos. Concretamente, las columnas de cada matriz están dadas en términos de los exponentes que ocurren en cada monomio, coordenada a coordenada. Observemos que

$$L(g) \cdot L(\Pi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L(\Pi^1).$$

En consecuencia, queda determinado el diagrama conmutativo:

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^2 & \\ L(\Pi_2) \nearrow & & \downarrow L(g) \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ L(\Pi_1) \searrow & & \end{array}$$

que nos brinda una segunda forma para describir explícitamente el morfismo  $\pi$  (en las coordenadas locales  $(x, u)$  y  $(v, y)$ ), y la estructura analítica real de  $\mathbb{M}$ , sin necesidad de emplear explícitamente los sistemas locales de coordenadas involucrados.

Enseguida formalizamos el paso del diagrama (2.4) al diagrama (2.6). Mostraremos que la asignación dada en (2.5) es funtorial, obteniendo así la representación lineal mencionada al inicio del presente capítulo.

### 2.1. Representación lineal de sucesiones finitas de morfismos de explosión combinatorios

Consideremos una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios,

$$(2.7) \quad M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N,$$

donde  $N \in \mathbb{Z}_{>0}$  es un número entero positivo y  $\mathbf{M}_0 := (G\mathbb{R}_{\geq 0}^m, 0)$  es el germen de una variedad generalizada ( $m$  dimensional) en torno a un punto esquina. Queremos comprender la estructura analítica generalizada de cada uno de los espacios topológicos,  $|M_l|$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ , que aparece en tal sucesión, así como exhibir las fórmulas explícitas de los morfismos involucrados.

En primera instancia, para cada  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ , por la definición del morfismo  $\pi_l$ , sabemos que la variedad  $M_l$  queda completamente determinada (como variedad generalizada) por la estructura analítica generalizada:

$$\mathcal{U}_{M_l} = \{(U_{l,1}, \mathbf{x}^{l,1}), (U_{l,2}, \mathbf{x}^{l,2}), \dots, (U_{l,m_l}, \mathbf{x}^{l,m_l})\},$$

con  $m_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , para todo  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Además, para cada  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ , el morfismo  $\pi_l: M_l \rightarrow M_{l-1}$  está determinado por las expresiones locales  $\pi_l^j: U_{l,j} \rightarrow M_{l-1}$ , cada una de ellas de tipo monomial, donde  $j \in \{1, 2, \dots, m_l\}$ . Consecuentemente, al mirar con detalle la sucesión de morfismos dada en (2.7), vemos la estructura de un carcaj finito:

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccccccc} & & U_{1,m_1} & \xleftarrow{\pi_2^{m_2}} & \dots & \xleftarrow{\pi_N^{m_N}} & U_{N,m_N} \\ & \nearrow \pi_1^{m_1} & \uparrow \varphi_{m_1-1,m_1}^1 & & \uparrow \dots & & \uparrow \varphi_{m_N-1,m_N}^N \\ & & \vdots & \leftarrow \dots & \leftarrow \dots & \leftarrow \dots & \vdots \\ & & \uparrow \varphi_{2,3}^1 & & \uparrow \dots & & \uparrow \varphi_{2,3}^N \\ & \nearrow \pi_1^2 & U_{1,2} & \xleftarrow{\pi_2^2} & \dots & \xleftarrow{\pi_N^2} & U_{N,2} \\ & & \uparrow \varphi_{1,2}^1 & & \uparrow \dots & & \uparrow \varphi_{1,2}^N \\ & \nearrow \pi_1^1 & U_{1,1} & \xleftarrow{\pi_2^1} & \dots & \xleftarrow{\pi_N^1} & U_{N,1} \end{array}$$

donde los morfismos  $\varphi_{i,j}^l: U_{l,i} \rightarrow U_{l,j}$  son las transformaciones de transición determinadas por la estructura analítica generalizada  $\mathcal{U}_{M_l}$ , para cada  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ , y cualesquiera índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m_l\}$ .

Para determinar el funtor  $L: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  que lleva (2.8) a una situación lineal, precisaremos cuáles son las categorías  $\mathcal{C}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}$  que intervienen en su definición. Puesto que estamos hablando de una representación lineal de carcajes finitos, necesariamente  $\tilde{\mathcal{C}}$  es la categoría de espacios vectoriales reales de dimensión finita,  $\tilde{\mathcal{C}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}$ . En consecuencia, nos queda por determinar cuál es la categoría  $\mathcal{C}$ , y cómo actúa  $L$  a nivel de objetos y de morfismos.

**2.1.1. La categoría  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ .** Motivados por el análisis hecho en el ejemplo 2.1, consideraremos ahora subconjuntos abiertos de ortantes  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ , dotados de una estructura analítica generalizada local, digamos  $(\mathbb{R}_{\geq 0}^m, X)$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , y los morfismos de tipo monomial definidos entre ellos, ampliando así nuestro estudio a una situación más general. Formalicemos esto:

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$  la categoría cuya colección de objetos es

$$\text{Obj}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}}) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \{U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^n, X) : U \text{ es abierto en } \mathbb{R}_{\geq 0}^n\},$$

y cuyos morfismos son las aplicaciones de tipo monomial entre ellas. A saber, dados abiertos  $U \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^m$  y  $V \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \text{Mor}_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}}}(U, V)$  si, y sólo si cada componente  $f_j: U \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es de tipo monomial; es decir,

$$f_j(X) := X^{\alpha^j} = x_1^{\alpha_1^j} x_2^{\alpha_2^j} \cdots x_m^{\alpha_m^j} \quad \text{para algún } \alpha^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_m^j) \in \mathbb{R}^m.$$

**2.1.2. Definición del funtor  $L$ .** Sea  $U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, X) \in \text{Obj}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})$  un objeto de  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ , y consideremos la regla de correspondencia

$$U \mapsto L(U) := \mathbb{R}^m.$$

Esto es,  $L$  asocia a cada abierto  $U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, X)$  el único (salvo isomorfismo) espacio vectorial real euclidiano de dimensión  $m$ .

Sean  $U, V \in \text{Obj}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})$  dos abiertos tales que  $U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, X)$  y  $V \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^n, Y)$ , y sea  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \text{Mor}_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}}}(U, V)$  un morfismo entre ellos. Entonces, por su definición sabemos que, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$f_j(X) := X^{\alpha^j}, \quad \text{para algún } \alpha^j \in \mathbb{R}^m.$$

Consideremos la matriz  $L(f) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , cuyas columnas son los vectores columna  $(\alpha^j)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $L(f) := ((\alpha^1)^T, (\alpha^2)^T, \dots, (\alpha^n)^T)$ . De esta manera, definimos

$$f \mapsto L(f).$$

TEOREMA 2.1.  $L: \mathcal{N}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$  es un funtor contravariante y fiel.

DEMOSTRACIÓN. Dado cualquier objeto  $U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, X) \in \text{Obj}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})$ , tal que  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , es inmediato que  $L(\text{id}_U) = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ .

Ahora, dados cualesquiera tres objetos  $U, V, W \in \text{Obj}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})$ ,  $U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^l, X)$ ,  $V \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, Y)$  y  $W \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^n, Z)$ , donde  $X = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  y  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , respectivamente, con  $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , y dados cualesquiera morfismos  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}}}(U, V)$  y  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}}}(V, W)$ , determinados por  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  y  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ , donde para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,

$$f_j(X) = X^{\alpha^j}, \quad \text{para alguna } \alpha^j \in \mathbb{R}^l,$$

y para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$g_j(Y) := Y^{\beta^j}, \quad \text{para alguna } \beta^j \in \mathbb{R}^m.$$

Debemos demostrar que

$$L(g \circ f) = L(f) \cdot L(g).$$

En efecto, sean  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  cualesquiera índices. Entonces, la entrada  $ij$  de la matriz  $L(f) \cdot L(g)$  es

$$(L(f) \cdot L(g))_{ij} = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^m) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^j \\ \beta_2^j \\ \vdots \\ \beta_m^j \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k \beta_k^j.$$

Es decir, para todo par  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, l\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$(2.9) \quad (L(g) \cdot L(f))_{ij} = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k \beta_k^j.$$

La entrada  $L(g \circ f)_{ij}$  la calculamos como sigue: obtenemos primero la  $j$ -ésima columna de  $L(g \circ f)$ , digamos  $L(g \circ f)_j$ , y concluimos así que  $L(g \circ f)_{ij} = \langle L(g \circ f)_j^T, e_i \rangle$ , donde  $e_i \in \mathbb{R}^l$  es el  $i$ -ésimo vector canónico en  $\mathbb{R}^l$ . Así,

$$(g \circ f)_j(X) := g_j(f(X)) = g(X^{\alpha^1}, X^{\alpha^2}, \dots, X^{\alpha^m}) = X^{\beta_1^j \alpha^1 + \beta_2^j \alpha^2 + \dots + \beta_m^j \alpha^m}.$$

Consecuentemente,

$$L(g \circ f)_j = \left( \sum_{k=1}^m \beta_k^j \alpha^k \right)^T.$$

Por tanto,

$$L(g \circ f)_{ij} = \langle L(g \circ f)_j^T, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m \beta_k^j \alpha^k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^m \beta_k^j \alpha_i^k.$$

Es decir, para todo par  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, l\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$(2.10) \quad L(g \circ f)_{ij} = \sum_{k=1}^m \beta_k^j \alpha_i^k.$$

De lo obtenido en las ecuaciones (2.9) y (2.10), concluimos que  $L: \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$  es un funtor contravariante.

Finalmente, dados cualesquiera dos objetos  $U, V \in \text{Obj}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})$ ,  $U \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^m, X)$  y  $V \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}^n, Y)$ , y dados cualesquiera morfismos  $f, g \in \text{Mor}_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}}}(U, V)$  si  $L(f) = L(g)$ , por la definición del funtor  $L$ , se sigue que  $f = g$ . Es decir,  $L$  es un funtor fiel.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.1.** Cada posible pregunta acerca de un diagrama conmutativo  $\mathcal{D}$  en la categoría  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ , da lugar a una pregunta sobre la imagen directa del diagrama  $\mathcal{D}$ , digamos  $L(\mathcal{D})$ , en la categoría  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$ , y viceversa.

### 2.2. Ejemplos

Comencemos por describir la representación lineal de morfismos de explosión combinatorios estándar en dimensión tres (el caso bidimensional estándar, sin frontera, se corresponde al ejemplo 2.1). El objeto inicial será el germen de una variedad estándar tridimensional en torno a un punto esquina,  $\mathbf{A}_0 = (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ . Fijemos un sistema local de coordenadas centradas en el origen,  $X = (x_1, x_2, x_3)$ . Hay tres posibles centros admisibles de explosión que analizamos por separado.

EJEMPLO 2.2 (Morfismo de explosión centrado en un punto esquina). En primera instancia, consideremos el morfismo de explosión de  $A_0$  centrado en el origen (punto esquina)  $\{0\} = \cap_{j=1}^3 \{x_j = 0\}$ ,  $\pi: A \rightarrow A_0$ . Sabemos<sup>3</sup> que la estructura analítica real que define a  $A$  es

$$\mathcal{U}_A = \{(U_1, X^1), (U_2, X^2), (U_3, X^3)\}, \quad X^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j), \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

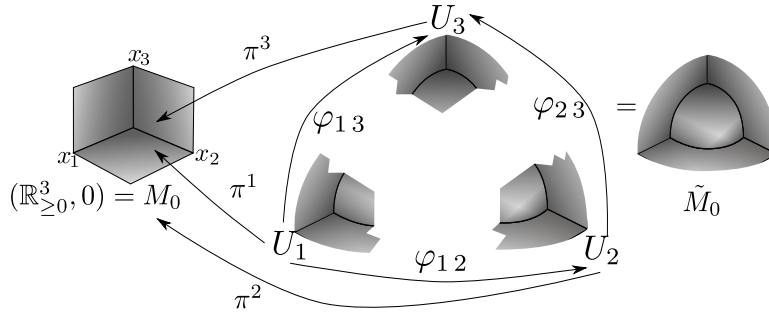


FIGURA 2.2. Morfismo de explosión de  $(\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  centrado en el origen.

El morfismo  $\pi$  lo podemos leer a través del siguiente diagrama conmutativo:

$$(2.11) \quad \begin{array}{ccc} & U_3 & \\ \pi^3 \swarrow & \uparrow \varphi_{2,3} & \searrow \\ A_0 & \xleftarrow{\pi^2} U_2 & \xrightarrow{\varphi_{1,3}} \\ \pi^1 \swarrow & \uparrow \varphi_{1,2} & \\ & U_1 & \end{array}$$

donde las aplicaciones  $\varphi_{i,j}: U_i \rightarrow U_j$  son las transformaciones de transición entre las cartas correspondientes. Luego, el conocer explícitamente cada uno de los morfismos que determinan al diagrama (2.11) nos permite recobrar la variedad analítica  $A$ . Haremos esto usando la representación lineal de (2.11), valiéndonos solamente de

<sup>3</sup>Recomendamos al lector consultar [5], donde encontrará la definición general de morfismo de explosión en el caso analítico real.

las expresiones locales del morfismo  $\pi$ , que están dadas por:

$$\begin{aligned}\pi^1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) &= (x_1^1, x_1^1 x_2^1, x_1^1 x_3^1), \\ \pi^2(x_1^2, x_2^2, x_3^2) &= (x_1^2 x_2^2, x_2^2, x_2^2 x_3^2), \\ \pi^3(x_1^3, x_2^3, x_3^3) &= (x_1^3 x_3^3, x_2^3 x_3^3, x_3^3).\end{aligned}$$

Así, a la expresión local  $\pi^1$  le asignamos su imagen bajo el funtor  $L$ ,  $\pi^1 \mapsto A_1 := L(\pi^1) \in \text{SGL}(3, \mathbb{Z})$ , dada por

$$A_1 := L(\pi^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Precediendo análogamente, si denotamos por  $A_j := L(\pi^j)$ , para cada  $j \in \{1, 2, 3\}$ , entonces

$$(2.12) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea  $\varphi_{i,j}: U_i \rightarrow U_j$  la transformación de transición entre las cartas  $U_i$  y  $U_j$ , para cada par  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ . Del diagrama (2.11), obtenemos en particular:

$$(2.13) \quad \begin{array}{ccc} & & U_j \\ & \nearrow \pi^j & \\ A_0 & & \uparrow \varphi_{ij} \\ & \nwarrow \pi^i & \\ & & U_i \end{array}, \quad \text{para cada par } \{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

En consecuencia, gracias al funtor  $L$ , para el par  $\{1, 2\}$  obtenemos el diagrama conmutativo:

$$(2.14) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^3 \\ & \nearrow L(\pi^2) & \\ \mathbb{R}^3 & & \downarrow L(\varphi_{1,2}) \\ & \searrow L(\pi^1) & \\ & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Es decir,

$$A_1 := L(\pi^1) = L(\varphi_{1,2})L(\pi^2) =: L(\varphi_{1,2})A_2.$$

Equivalentemente, usando la fórmula explícita de las matrices  $A_1$  y  $A_2$  dadas en (2.12), concluimos que

$$L(\varphi_{1,2}) = A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resumiendo,

$$L(\varphi_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, para los pares restantes,  $\{2, 3\}$  y  $\{1, 3\}$ , obtenemos que

$$L(\varphi_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } L(\varphi_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Usaremos la siguiente nomenclatura,

$$G_{1,-1}^{1,2} := L(\varphi_{1,2}), \quad G_{1,-1}^{2,3} := L(\varphi_{2,3}) \quad \text{y} \quad G_{1,-1}^{1,3} := L(\varphi_{1,3}),$$

donde los subíndices que etiquetan a cada matriz  $G_{(0,0)}^{i,j}$  nos indican cómo son las correspondientes transformaciones de transición  $\varphi_{i,j}$ . Más aún, dichos números se pueden interpretar como la manera en que están encajados en la variedad  $A$  los semicírculos que aparecen sobre la frontera del divisor excepcional  $E := \pi^{-1}(\{0\})$  (es decir, las curvas compactas adaptadas a la frontera de la variedad  $A$ ), en analogía con el hecho conocido para variedades estándar sin frontera. Concretamente, si consideramos la matriz  $G_{1,-1}^{1,2}$ , entonces el primer subíndice, que en este caso es uno, refleja cómo está encajado el semicírculo  $E_3 := \{x_1^1 = x_3^1 = 0\} \cup \{x_2^2 = x_3^2 = 0\}$  en el plano horizontal  $\{x_3^1 = 0\} \cup \{x_3^2 = 0\}$ , mientras que el número menos uno refleja la estructura proyectiva del encaje del mismo semicírculo  $E_3$ , esta vez visto sobre el divisor excepcional  $\pi^{-1}(\{0\})$ .

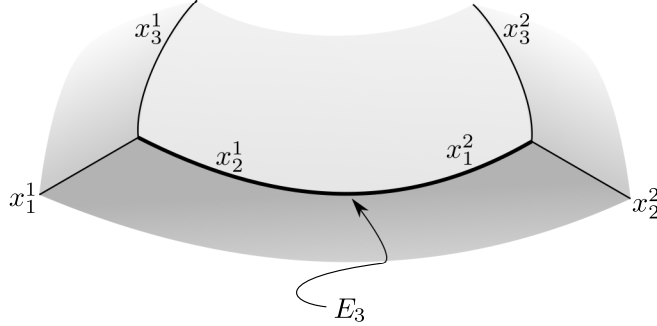


FIGURA 2.3. Curva compacta  $E_3$ , cuya estructura analítica está codificada por la matriz  $G_{1,-1}^{1,2}$ .

Un análisis similar en los casos restantes,  $G_{1,-1}^{2,3}$  y  $G_{1,-1}^{1,3}$ , sustentan tales nomenclaturas, y hacemos hincapié en el significado analítico de los subíndices que acompañan a cada matriz.

**EJEMPLO 2.3** (Morfismo de explosión centrado en algún eje coordenado). Sean  $X_1 := \{x_2 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$ ,  $X_2 := \{x_1 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$  y  $X_3 := \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$  los tres ejes coordenados alrededor del origen en  $(\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0) = \mathbf{A}_0$ ; esto es, las tres curvas adaptadas a la frontera de la variedad de partida  $A_0$ , una vez elegidas las coordenadas centradas en el origen,  $X = (x_1, x_2, x_3)$ . La descripción concreta de cada uno de los morfismos de explosión de  $(\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , con centro en algún eje coordenado, la obtendremos de forma similar a como hemos procedido en el ejemplo anterior. Desarrollamos a detalle la construcción de éste cuando el centro es el eje  $X_1$ , ya que los casos restantes son análogos.

- *Morfismo de explosión centrado en  $X_1$ .* Sea  $\pi: A \rightarrow A_0$  el morfismo de explosión de  $\mathbf{A}_0 := (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  con centro en  $X_1$ . Sabemos que la variedad estándar  $A$  está determinada por la estructura analítica real:

$$\mathcal{U}_A = \{(U_1, (x_1^1, x_2^1, x_3^1)), (U_2, (x_1^2, x_2^2, x_3^2))\},$$

y el morfismo  $\pi$  en cada carta local se escribe como

$$\begin{aligned}\pi^1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) &= (x_1^1, x_2^1, x_2^1 x_3^1), \\ \pi^2(x_1^2, x_2^2, x_3^2) &= (x_1^2, x_2^2 x_3^2, x_3^2).\end{aligned}$$

Como ya vimos en el ejemplo anterior, tanto la estructura analítica real de la variedad  $A$ , como la descripción del morfismo  $\pi$ , la podemos reunir en el diagrama conmutativo:

$$(2.15) \quad \begin{array}{ccc} & & U_2 \\ & \swarrow \pi^2 & \uparrow \\ A_0 & & \psi_{1,2} \\ & \nwarrow \pi^1 & \downarrow \\ & & U_1 \end{array}$$

donde  $\psi_{1,2}: U_1 \rightarrow U_2$  es la transformación de transición entre las cartas  $U_1$  y  $U_2$ . Luego, a cada expresión local del morfismo  $\pi$  le asignamos la matriz correspondiente:  $\pi^j \mapsto B_j^1 := L(\pi^j) \in \text{SGL}(3, \mathbb{Z})$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , donde el superíndice que etiqueta a cada matriz  $B_j^1$  nos recuerda que el centro de explosión es el eje coordenado  $X_1$ , y tenemos que

$$B_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Luego, aplicando el funtor  $L$  al diagrama (2.15), obtenemos:

$$(2.16) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^3 \\ & \swarrow L(\pi^2) & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 & & L(\psi_{1,2}) \\ & \searrow L(\pi^1) & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

es decir,

$$B_1^1 := L(\pi^1) = L(\psi_{1,2})L(\pi^2) =: L(\psi_{1,2})B_2^1.$$

Por tanto, podemos obtener la matriz  $G_{1,0}^{1,2} := L(\psi_{1,2})$  en términos de las matrices  $B_1^1$  y  $B_2^1$ :

$$G_{1,0}^{1,2} := L(\psi_{1,2}) = B_1^1 (B_2^1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

resumiendo,

$$(2.17) \quad G_{1,0}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

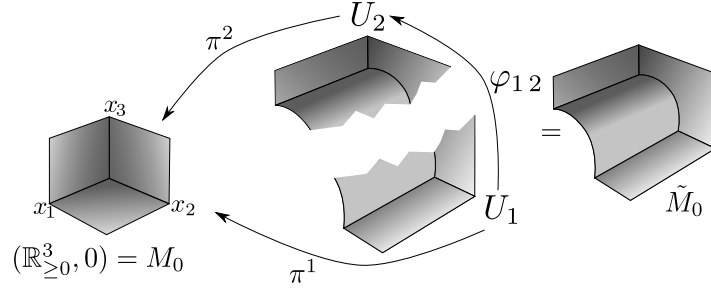


FIGURA 2.4. Morfismo de explosión centrado en  $X_1$ .

OBSERVACIÓN 2.2. Enfatizamos una vez más que los superíndices  $ij$  en las matrices  $G_{(0)0}^{ij}$  nos recuerdan que las respectivas transformaciones de transición están definidas entre las cartas  $U_i$  y  $U_j$ , mientras que los subíndices indican cómo están encajados (analíticamente) los semicírculos sobre la frontera de  $A$ , pues se corresponden con la estructura analítica real en vecindades de éstos. En el caso que acabamos de analizar, dichos números son cero y uno,  $L(\psi_{1,2}) = G_{1,0}^{12}$ , que pueden ser interpretados geoméricamente como sigue: el número uno refleja el hecho de haber explotado el origen en el plano coordenado  $\{x_2 = 0\} \cup \{x_3 = 0\}$  (cf., caso bidimensional, ejemplo 2.1), mientras que el número cero refleja la estructura de producto fibrado trivial en la dirección del eje coordenado  $X_1$ .

- *Morfismo de explosión centrado en  $X_2$ .* Procediendo de forma análoga al caso anterior, a cada una de las expresiones locales del morfismo de explosión de  $A_0$  centrado en  $X_2$ ,  $\pi: A \rightarrow A_0$ , le asignamos la correspondiente matriz:  $\pi^j \mapsto B_j^2 := L(\pi^j) \in \text{SGL}(3, \mathbb{Z})$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , donde

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, si queremos conocer la fórmula explícita de la transformación de transición, digamos  $\psi$ , es suficiente determinar la matriz correspondiente:

$$L(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Morfismo de explosión centrado en  $X_3$ .* Como antes, a cada expresión local del morfismo  $\pi$  (explosión de  $A_0$  centrada en  $X_3$ ), le asignamos la matriz correspondiente  $\pi^j \mapsto B_j^3 := L(\pi^j) \in \text{SGL}(3, \mathbb{Z})$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ,

$$B_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la transformación de transición, digamos  $\psi$ , está codificada a través de la matriz  $L(\psi)$ . En este caso tenemos que:

$$L(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

OBSERVACIÓN 2.3. Sea  $\pi: M_N \rightarrow M_0$  una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios, como la dada en (2.7); a saber,

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N, \quad \text{donde } N \in \mathbb{Z}_{>0},$$

tal que la variedad de partida es, o bien el germen de una variedad tridimensional estándar,  $\mathbf{A}_0 = (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , o bien el germen de una variedad tridimensional generalizada,  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ . Hacemos notar que, los ejemplos de morfismos de explosión expuestos hasta el momento agotan todas las opciones para sucesiones de longitud uno,  $N = 1$ .

Más aún, vislumbramos que en cada una de las variedades (estándar o generalizadas, según sea el caso)  $M_j$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , surgen potenciales centros admisibles de explosión que no vemos en una primera instancia, pero que sí debemos tomar en cuenta; a saber, las curvas compactas adaptadas a la frontera de las variedades  $M_j$ . Precisando, tales curvas compactas aparecen en la preimagen de cualquier centro admisible seleccionado para llevar a cabo cada uno de los morfismos  $\pi_j: M_j \rightarrow M_{j-1}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Adicionalmente, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , por la definición del morfismo  $\pi_j: M_j \rightarrow M_{j-1}$ , si  $|Z| \subset \partial|M|_j$  es una de tales curvas compactas, se verifica que ésta puede ser cubierta por sólo dos cartas del atlas que define la estructura analítica (real o generalizada, según sea el caso) de la variedad  $M_j$ ; a saber, una carta por cada punto esquina extremo de la curva  $|Z|$ .



## Estudio de centros admisibles unidimensionales compactos

Hasta ahora hemos descrito todos los posibles morfismos de explosión combinatorios (estándar y generalizados) que se presentan en la situación inicial; es decir, aquellos morfismos de explosión que podemos definir sobre el germen de una variedad (estándar  $\mathbf{A}_0 = (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , o bien generalizada  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ ) tridimensional en torno a un punto esquina, centrados en la clausura de algún estrato de su frontera. Empero, como adelantamos en la observación 2.3, si deseamos continuar modificando los espacios obtenidos efectuando subsecuentes morfismos de explosión combinatorios, aparecen potenciales centros admisibles. A saber, si  $\pi: M \rightarrow M_0$  es una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios y  $|Z| \subset \partial|M|$  es una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , queremos saber cuáles son los morfismos de explosión que podemos definir tales que la curva  $|Z|$  sea el soporte topológico de un centro admisible, acorde con la definición 1.7.

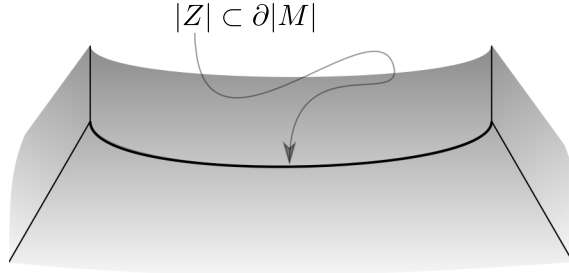


FIGURA 3.1. Curva compacta adaptada a la frontera de  $M$ .

Recordemos que debemos garantizar que existen una variedad estándar,  $V$ , una vecindad abierta de  $|Z|$  en  $M$ ,  $U \subset M$ , y una estandarización  $\varphi: U \rightarrow V$ , tal que  $\varphi(|Z|) =: |W| \subset V$  es un centro admisible estándar en  $V$ . Exhibir qué estandarizaciones son realizables en torno a una curva compacta  $|Z|$  con las condiciones anteriores es el objetivo principal de este capítulo (*ver* teorema 3.4). A continuación, esbozamos la estrategia para llevar a cabo este propósito.

Por la construcción de la variedad generalizada  $M$ , dada la estructura analítica generalizada que la define, digamos  $\mathcal{U}_M$ , podemos cubrir la curva  $|Z| \subset \partial|M|$  con dos cartas locales contenidas en  $\mathcal{U}_M$  (una por cada punto esquina extremo de  $|Z|$ ),

$$\mathcal{U}_Z := \mathcal{U}_M|_{|Z|} = \left\{ (U_1^Z, X), (U_2^Z, \tilde{X}) \right\}, \quad |Z| \subset U_1^Z \cup U_2^Z =: U^Z,$$

donde

$$h_Z: U_1^Z \rightarrow U_2^Z, \quad h_Z := \tilde{X} \circ X^{-1},$$

es la transformación de transición a lo largo de la curva compacta  $|Z|$ . En consecuencia, basta con que mostremos que existen una variedad estándar,  $V^W$ , y una estandarización de  $U^Z$ ,  $\varphi: U^Z \rightarrow V^W$ , tales que  $\varphi(|Z|) =: |W| \subset V^W$  es un centro admisible estándar. Esto último es posible sólo si logramos definir estandarizaciones locales:

$$\varphi_j: U_j^Z \longrightarrow \varphi_j(U_j^Z) =: V_j^W, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2\},$$

tales que  $V_1^W \cup V_2^W =: V^W$  admita una estructura analítica real,

$$\mathcal{V}_W = \left\{ (V_1^W, Y), (V_2^W, \tilde{Y}) \right\},$$

donde

$$g_W: V_1^W \rightarrow V_2^W, \quad g_W := \tilde{Y} \circ Y^{-1},$$

es la transformación de transición a lo largo de la curva compacta  $|W|$ , de forma tal que:

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} U_1^Z & \xrightarrow{h_Z} & U_2^Z \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ V_1^W & \xrightarrow{g_W} & V_2^W \end{array}$$

sea un diagrama conmutativo. Geométricamente lo podemos visualizar como:

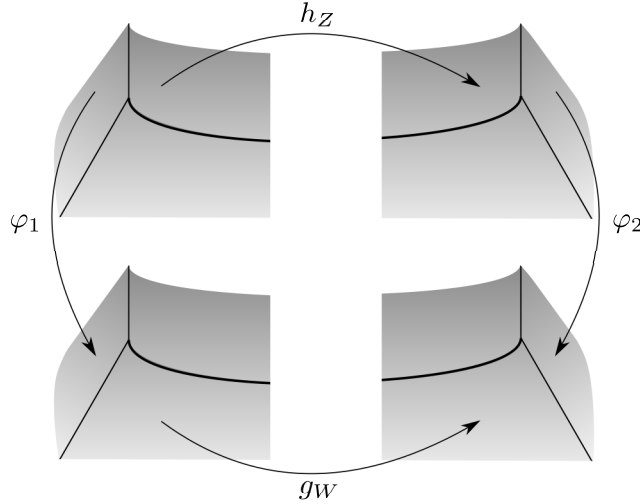


FIGURA 3.2. Estandarización en torno a la curva compacta  $|Z|$ , adaptada a la frontera de  $M$ .

Hecho esto, obtendremos que, en efecto, la curva  $|Z|$  es el soporte topológico de un centro admisible  $Z := (|Z|, U^Z, \varphi)$  y, conociendo las fórmulas explícitas de cada morfismo que interviene en el diagrama (3.1), sabremos qué morfismos de explosión de  $M$  centrados en  $Z$  son realizables.

En primera instancia nos ocuparemos del caso estándar: describiremos cómo son las transformaciones de transición,  $g_W$ , a lo largo de curvas compactas adaptadas

a la frontera de espacios obtenidos a partir de sucesiones finitas de morfismos de explosión combinatorios estándar. Continuaremos por hacer lo propio en el caso generalizado, para finalmente hallar qué estandarizaciones locales  $\varphi_j$  se extienden a una estandarización global en torno a  $|Z|$ , y obtener así la clase de centros admisibles con soporte topológico  $|Z|$ .

### 3.1. Vecindades analíticas reales de centros admisibles estándar unidimensionales compactos

Sea  $\mathbf{A}_0 = (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad analítica estándar tridimensional en torno a un punto esquina. Consideremos una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $A$ ,  $\pi: A \rightarrow A_0$ , y sea  $|W| \subset \partial|A|$  una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad  $A$ . Si  $\mathcal{V}_A$  es la estructura analítica real que define a la variedad estándar  $A$ , su restricción a  $|W|$ ,  $\mathcal{V}_W := \mathcal{V}_A|_{|W|}$ , induce una estructura analítica real a lo largo de la curva compacta  $|W|$ , donde

$$\mathcal{V}_W = \left\{ (V_1^W, Y), (V_2^W, \tilde{Y}) \right\}, \quad |W| \subset V_1^W \cup V_2^W =: V^W,$$

y la transformación de transición es

$$g_W: V_1^W \rightarrow V_2^W, \quad g_W := \tilde{Y} \circ Y^{-1}.$$

Usando la notación recién introducida, establecemos el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.1.** *La transformación de transición  $g_W: V_1^W \rightarrow V_2^W$  es de tipo monomial y está dada, salvo un cambio de coordenadas, por*

$$g_W(y_1, y_2, y_3) = (y_2^{-1}, y_1 y_2^p, y_2^q y_3), \quad \text{para algún par } (p, q) \in \mathbb{Z}^2.$$

Equivalentemente, su imagen bajo el functor  $L$  se expresa por medio de la matriz

$$L(g_W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: G_{p,q}, \quad \text{para algún par } (p, q) \in \mathbb{Z}^2,$$

a excepción de los casos  $G_{-1,0}$ ,  $G_{0,-1}$ ,  $G_{-1,-1}$  y  $G_{0,0}$ , que no tienen lugar.

**DEMOSTRACIÓN.** Usaremos inducción matemática sobre la longitud de la sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios  $\pi: A \rightarrow A_0$ .

La base de inducción ya la hicimos y se corresponde con lo mostrado en los ejemplos 2.2 y 2.3. Efectivamente, sea  $Y = (y_1, y_2, y_3)$  un sistema local de coordenadas centradas en el punto esquina de la variedad  $A_0$ . Al efectuar un solo morfismo de explosión combinatorio,  $\pi: A \rightarrow A_0$ , las únicas matrices obtenidas (equivalentemente, las únicas transformaciones de transición  $g_W$ ), son las siguientes:

- (a) Si el centro de explosión es el origen de coordenadas en la variedad  $A_0$ , entonces en el divisor excepcional  $\pi^{-1}(\{0\})$  hay tres curvas compactas adaptadas a la frontera de  $A$ , y las respectivas transformaciones de transición a lo largo de cada una de ellas están codificadas por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Si el centro de explosión es algún eje coordenado,

$$X_1 := \{x_2 = x_3 = 0\}, \quad X_2 := \{x_1 = x_3 = 0\}, \quad \text{o bien } X_3 := \{x_1 = x_2 = 0\},$$

entonces en el divisor excepcional  $\pi^{-1}(\{X_j\})$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , hay una única curva compacta adaptada a la frontera de  $A$ , y la transformación de transición a lo largo de ella está codificada, respectivamente, por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, sea  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  un par de números enteros y consideremos las siguientes matrices en  $\text{SGL}(\mathbb{Z}, 3)$ :

$$G_{k,l} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & k & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_{k,l} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ l & -1 & k \end{pmatrix}, \quad \hat{G}_{k,l} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & l & k \end{pmatrix}.$$

**AFIRMACIÓN 3.1.** *Para todo par  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , se satisface que  $G_{k,l}$ ,  $\tilde{G}_{k,l}$  y  $\hat{G}_{k,l}$  son matrices similares; es decir, existen matrices invertibles  $A, B \in \text{GL}(\mathbb{R}, 3)$  tales que*

$$A^{-1} G_{k,l} A = \tilde{G}_{k,l} \quad \text{y} \quad B^{-1} G_{k,l} B = \hat{G}_{k,l}.$$

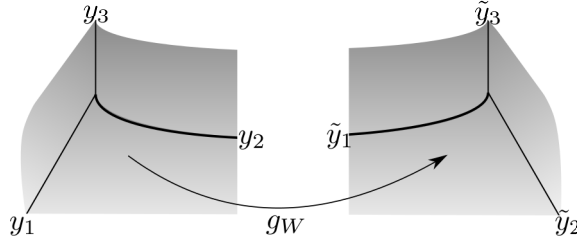
**DEMOSTRACIÓN.** Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

realizan la conjugación en cada caso, respectivamente.  $\square$

En consecuencia, por lo mostrado en los incisos (a) y (b), salvo por alguno de los cambios de coordenadas dictados en la afirmación 3.1, concluimos que las únicas matrices que codifican el cambio de coordenadas a lo largo de las curvas compactas adaptadas a la frontera de la variedad  $A$ , son las matrices  $G_{1,-1}$ , o bien  $G_{1,0}$ .

Supongamos que  $\pi: A \rightarrow A_0$  es una sucesión finita de morfismos de explosión de longitud  $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $N > 1$ , y sea  $|W|$  una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad  $A$ . Por hipótesis de inducción, la transformación de pegado a lo largo de la curva  $|W|$ , digamos  $g_W$ , es de tipo monomial y existe un par de números enteros,  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , tal que su imagen bajo el functor  $L$  es la matriz  $L(g_W) = G_{p,q}$ . De esta manera, en coordenadas locales, la curva compacta  $|W|$  está descrita como se muestra en la siguiente figura.



**FIGURA 3.3.** Estructura analítica real en torno a una curva compacta  $|W|$ , adaptada a la frontera de  $A$ .

Ahora, alrededor de la curva compacta  $|W|$  tenemos siete posibles centros admisibles a ser considerados como centros de explosión. Concretamente, podemos explotar:

- (i) Alguno de los puntos esquina extremo de  $|W|$ ,  $\{p_0\} = \{y_1 = y_2 = y_3 = 0\}$ , o bien  $\{\tilde{p}_0\} = \{\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 0\}$ .
- (ii) Alguno de los ejes coordenados locales *horizontales* adyacentes a  $|W|$ ,  $Y_1 = \{y_2 = y_3 = 0\}$ , o bien  $\tilde{Y}_2 = \{\tilde{y}_1 = \tilde{y}_3 = 0\}$ .
- (iii) Alguno de los ejes coordenados locales *verticales* adyacentes a  $|W|$ ,  $Y_3 = \{y_1 = y_2 = 0\}$ , o bien  $\tilde{Y}_3 = \{\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0\}$ .
- (iv) La curva compacta  $|W| = (\{y_1 = y_3 = 0\} \cup \{\tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 0\}) / g_W$ .

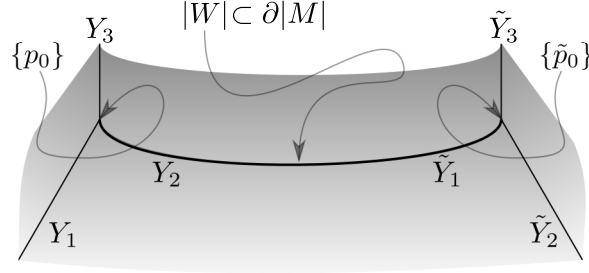


FIGURA 3.4. Centros admisibles de explosión alrededor de una curva compacta  $|W|$ .

Luego, al realizar el morfismo de explosión de  $A$  centrado en alguno de los conjuntos antes listados, digamos  $\pi_{N+1}: \tilde{A} \rightarrow A$ , ya conocemos cómo serán las curvas compactas adaptadas a la frontera de  $\tilde{A}$  que surgen en la nueva componente del divisor excepcional (la situación aquí es análoga a lo ocurrido en la base de inducción). Por tanto, es suficiente que nos fijemos en cómo es la transformación de transición a lo largo del transformado estricto de  $|W|$ , digamos  $|\tilde{W}| \subset |\tilde{A}|$ , bajo el morfismo  $\pi_{N+1}$ , en cada caso, y éste lo podemos leer mediante su traducción al lenguaje del álgebra lineal como sigue:

$$(3.2) \quad A_2 \cdot G_{p,q} = G_{p+1,q+1} \quad G_{p,q} \cdot A_1^{-1} = G_{p+1,q+1}$$

$$(3.3) \quad B_1^1 \cdot G_{p,q} = G_{p,q+1} \quad G_{p,q} \cdot (B_1^2)^{-1} = G_{p,q+1}$$

$$(3.4) \quad B_2^3 \cdot G_{p,q} = G_{p+1,q} \quad G_{p,q} \cdot (B_1^3)^{-1} = G_{p+1,q}$$

$$(3.5) \quad B_1^2 \cdot G_{p,q} \cdot (B_1^1)^{-1} = G_{p,q-p} \quad B_2^2 \cdot G_{p,q} \cdot (B_2^1)^{-1} = G_{p-q,q}$$

donde, recordemos que:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que, sin importar qué centro hayamos elegido, la transformación de transición a lo largo de la curva compacta  $|\tilde{W}|$  en  $\tilde{A}$ , digamos  $g_{\tilde{W}}$ , es de tipo monomial, con  $L(g_{\tilde{W}}) = G_{\tilde{p},\tilde{q}}$ , para algún par  $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in \mathbb{Z}^2$ , y los casos  $G_{-1,0}$ ,  $G_{0,-1}$ ,  $G_{-1,-1}$  y  $G_{0,0}$  no tienen lugar, como podemos observar.  $\square$

### 3.2. Vecindades analíticas generalizadas de curvas compactas

Sea  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad generalizada tridimensional en torno a un punto esquina. Consideremos una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M$ ,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , y sea  $|Z| \subset \partial|M|$  una curva compacta adaptada a la frontera de  $M$ . Si  $\mathcal{U}_M$  es la estructura analítica generalizada definida sobre  $M$ , su restricción a  $|Z|$ ,  $\mathcal{U}_Z := \mathcal{U}_M|_{|Z|}$ , induce una estructura analítica generalizada a lo largo de la curva  $|Z|$ , donde

$$\mathcal{U}_Z = \left\{ (U_1^Z, X), (U_2^Z, \tilde{X}) \right\}, \quad |Z| \subset U_1^Z \cup U_2^Z =: U^Z,$$

y la transformación de transición es

$$h_Z: U_1^Z \rightarrow U_2^Z, \quad h_Z := \tilde{X} \circ X^{-1}.$$

Luego, similarmente a como ocurre en el caso estándar (tal como apreciamos en la demostración del teorema 3.1), podemos suponer que, en cartas locales, la curva compacta  $|Z|$  está descrita como se muestra en la siguiente figura.

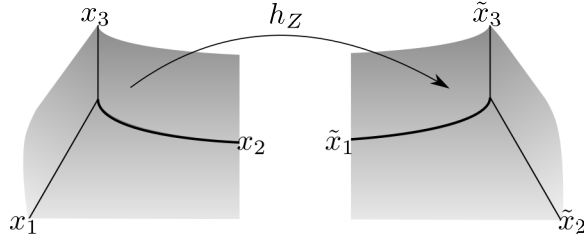


FIGURA 3.5. Estructura analítica generalizada en torno a una curva compacta  $|Z|$ , adaptada a la frontera de  $M$ .

Usando la notación recién introducida, establecemos el siguiente resultado que es una consecuencia de lo hecho en la sección previa.

**TEOREMA 3.2.** *La transformación de transición  $h_Z: U_1^Z \rightarrow U_2^Z$  es de tipo monomial y está dada por*

$$h_Z(x_1, x_2, x_3) = (x_2^{-\frac{1}{\lambda}}, x_1^\lambda x_2^a, x_2^b x_3), \quad \text{para algunos } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Equivalentemente, su imagen bajo  $L$  se expresa por medio de la matriz

$$L(h_Z) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\frac{1}{\lambda} & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: H_{\lambda, a, b}, \quad \text{para algunos } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

donde el número  $\lambda$  depende la construcción de la variedad global  $M$ , y el par  $(a, b)$  depende del atlas  $\mathcal{U}_Z$ .

Notemos que la tríada  $(|Z|, U^Z, h_Z)$  codifica la estructura analítica generalizada a lo largo de la curva compacta  $|Z|$  adaptada a la frontera de la variedad  $M$ . Al conjunto formado por todas ellas, obtenidas al efectuar alguna sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre el germen  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  lo denotaremos por  $\mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$ .

**DEFINICIÓN 3.1.** Dada  $(|Z|, U^Z, h_Z) \in \mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$ , definimos su *huella analítica* como el par  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , tal que  $L(h_Z) = H_{\lambda, a, b}$ .

### 3.3. Caracterización de centros admisibles unidimensionales compactos

Ahora que contamos con la descripción explícita sobre las estructuras analíticas reales (teorema 3.1) y analíticas generalizadas (teorema 3.2) definidas sobre curvas compactas adaptadas a la frontera de los espacios originados a partir de sucesiones finitas de morfismos de explosión en ambos contextos, estándar y generalizado, procedemos en esta sección a identificar cuáles son los morfismos de explosión combinatorios que podemos definir subsecuentemente. A saber, dada una tríada  $(|Z|, U^Z, h_Z) \in \mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$ , nos interesa hallar las estandarizaciones locales que hagan del diagrama (3.1) una realidad.

Sea  $(|Z|, U^Z, h_Z) \in \mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$  una estructura analítica generalizada a lo largo de una curva compacta  $|Z| \subset \partial|M|$ , adaptada a la frontera de  $M$ , donde  $M$  es la variedad obtenida al realizar una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios, y supongamos que hemos dotado al espacio topológico  $|Z|$  de una estructura analítica real  $\mathcal{V}_W$  como describimos en la sección 3.1, digamos

$$\mathcal{V}_W = \left\{ (V_1^W, Y), (V_2^W, \tilde{Y}) \right\}, \quad |W| := |Z| \subset V_1^W \cup V_2^W =: V^W.$$

Estamos en busca de estandarizaciones locales  $\varphi_j: U_j^Z \rightarrow V_j^W$ , para cada  $j \in \{1, 2\}$ , tales que el diagrama:

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccc} U_1^Z & \xrightarrow{h_Z} & U_2^Z \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ V_1^W & \xrightarrow{g_W} & V_2^W \end{array}$$

conmute. Ahora, por lo hecho en el capítulo 2, sabemos además que el diagrama (3.6) conmuta si, y sólo si el diagrama

$$(3.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xleftarrow{L(h_Z)} & \mathbb{R}^3 \\ L(\varphi_1) \uparrow & & \uparrow L(\varphi_2) \\ \mathbb{R}^3 & \xleftarrow{L(g_W)} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

conmuta. Pero, ya conocemos cómo son todas las posibles transformaciones lineales  $L(g_W)$  y  $L(h_Z)$  gracias a los teoremas 3.1 y 3.2, respectivamente. A saber,

$$L(g_W) = G_{p,q}, \quad \text{para algún par } (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\},$$

y

$$L(h_Z) = H_{\lambda,a,b}, \quad \text{para algunos } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Adicionalmente, de la descripción local de los morfismos entre variedades generalizadas alrededor de puntos esquina (*ver* proposición 1.1), sabemos que éstos son de tipo monomial. Consecuentemente, toda estandarización local está dada, en coordenadas locales, por un morfismo de tipo monomial invertible, por lo que, sin pérdida

de generalidad, podemos suponer que para cada  $j \in \{1, 2\}$ , existe algún vector  $\alpha^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j) \in \mathbb{R}_{>0}^3$  tal que

$$(3.8) \quad L(\varphi_j) = \begin{pmatrix} \alpha_1^j & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^j & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^j \end{pmatrix} =: \text{diag}(\alpha^j).$$

Por lo tanto, concluimos que el diagrama (3.7) conmuta si, y sólo si

$$(3.9) \quad \text{diag}(\alpha^1) \cdot G_{p,q} = H_{\lambda,a,b} \cdot \text{diag}(\alpha^2).$$

DEFINICIÓN 3.2. Sean  $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$  cualesquiera dos vectores en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $(x, y)$  tiene el mismo signo que  $(z, w)$  si las relaciones

$$(3.10) \quad \begin{cases} x = 0 \text{ si, y sólo si } z = 0; & y = 0 \text{ si, y sólo si } w = 0; \\ xz > 0 \text{ si, y sólo si } xz \neq 0; & yw > 0 \text{ si, y sólo si } yw \neq 0, \end{cases}$$

se satisfacen.

DEFINICIÓN 3.3. Sean  $A, B \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$  cualesquiera dos matrices. Decimos que  $A$  es  $d$ -equivalente a  $B$ , y lo denotamos por  $A \sim_d B$ , si existe una pareja de vectores  $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}_{>0}^3$  tal que  $\text{diag}(\alpha^1) \cdot A = B \cdot \text{diag}(\alpha^2)$ .

Observemos ahora que la ecuación (3.9) es realizable si, y sólo si  $G_{p,q} \sim_d H_{\lambda,a,b}$ . Con el par de definiciones técnicas que acabamos de introducir, formulamos el siguiente resultado:

TEOREMA 3.3. *Dados  $(\lambda, a, b) \in \mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  y  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ , tenemos que las matrices  $G_{p,q}$  y  $H_{\lambda,a,b}$  son  $d$ -equivalentes si, y sólo si  $(a, b)$  tiene el mismo signo que  $(p, q)$ .*

*En particular,*

$$(3.11) \quad \{H_{\lambda,a,b} : (\lambda, a, b) \in \mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\} / \sim_d = \{[G_{i,j}]_{\sim_d} : (i, j) \in I\},$$

donde  $I := \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1)\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Nada más una parte de la equivalencia debe ser verificada. Sean  $(\lambda, a, b) \in \mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  una tríada en  $\mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  y  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  un par de números enteros tales que  $(a, b)$  y  $(p, q)$  tienen el mismo signo. Debemos estudiar la casuística y exhibir una solución para cada posible situación:

- (a)  $p \neq 0$  y  $q = 0$ .
- (b)  $p = 0$  y  $q \neq 0$ .
- (c)  $p \neq 0$  y  $q \neq 0$ .

Mediante los cálculos explícitos verificamos que una pareja de matrices diagonales que realiza la conjugación, en cada respectivo caso, está dada por la pareja de vectores:

$$(3.12) \quad \begin{cases} (a) & \alpha^1 = \left(x, \frac{a}{p\lambda}x, y\right), & \alpha^2 = \left(\frac{a}{p}x, \frac{x}{\lambda}, y\right), \\ (b) & \alpha^1 = \left(x, y, \frac{q}{b}y\right), & \alpha^2 = \left(\lambda y, \frac{x}{\lambda}, \frac{q}{b}y\right), \\ (c) & \alpha^1 = \left(x, \frac{a}{p\lambda}x, \frac{aq}{bp\lambda}x\right), & \alpha^2 = \left(\frac{a}{p}x, \frac{x}{\lambda}, \frac{aq}{bp\lambda}x\right), \end{cases}$$

para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ . □

Para finalizar, hagamos la traducción de este teorema al contexto de variedades generalizadas.

DEFINICIÓN 3.4. Sean  $(|Z|, U^Z, h_Z), (|\tilde{Z}|, U^{\tilde{Z}}, h_{\tilde{Z}}) \in \mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$  cualesquiera dos tríadas en  $\mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$ . Decimos que  $(Z, U^Z, h_Z)$  y  $(|\tilde{Z}|, U^{\tilde{Z}}, h_{\tilde{Z}})$  son  $G$ -equivalentes, y lo denotamos por  $(Z, U^Z, h_Z) \simeq_G (|\tilde{Z}|, U^{\tilde{Z}}, h_{\tilde{Z}})$ , si existen isomorfismos locales  $\varphi_j : U_j^Z \rightarrow U_j^{\tilde{Z}}$ , para cada  $j \in \{1, 2\}$ , tales que el diagrama:

$$(3.13) \quad \begin{array}{ccc} U_1^Z & \xrightarrow{h_Z} & U_2^Z \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ U_1^{\tilde{Z}} & \xrightarrow{h_{\tilde{Z}}} & U_2^{\tilde{Z}} \end{array}$$

conmuta.

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema 3.3 y, como veremos en el próximo capítulo, será un elemento clave en la demostración de la monomialización combinatoria tridimensional (*ver* teorema 4.5). Lo que garantiza tal teorema es que si  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  es una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios, entonces cada curva compacta  $|Z| \subset \partial|\tilde{M}|$  adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , es el soporte topológico de un centro admisible  $Z := (|Z|, U^Z, \varphi)$ . Adicionalmente, por lo hecho hasta el momento, ya sabemos cómo luce, en coordenadas locales, cada morfismo de explosión de  $M$  centrado en  $Z$  que es realizable, pues éstos quedan determinados por la estandarización  $\varphi$ .

TEOREMA 3.4. Sean  $\pi : M \rightarrow M_0$  una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , y  $(|Z|, U^Z, h_Z) \in \mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0)$ . Entonces,

- (a)  $(|Z|, U^Z, h_Z)$  es estandarizable y le pertenece una única clase analítica real, con respecto a la relación de  $G$ -equivalencia.
- (b)  $(|Z|, U^Z, h_Z)$  y  $(|\tilde{Z}|, U^{\tilde{Z}}, h_{\tilde{Z}})$  son  $G$ -equivalentes si, y sólo si  $(|Z|, U^Z, h_Z)$  y  $(|\tilde{Z}|, U^{\tilde{Z}}, h_{\tilde{Z}})$  tienen la misma huella analítica. En particular, tenemos la biyección:

$$(3.14) \quad \mathcal{N}_{\text{Compact}}(M_0) / \simeq_G \longleftrightarrow \{[G_{i,j}]_{\sim_d} : (i, j) \in I\},$$

donde  $I := \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1)\}$ .

OBSERVACIÓN 3.1. Como consecuencia del teorema anterior, tenemos a nuestra disposición el catálogo completo de los morfismos de explosión combinatorios realizables. Específicamente, en caso de que el centro tenga por soporte topológico a una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad en turno, hay tres clases distintas de tales morfismos: cada una de ellas descrita por las estandarizaciones locales definidas por la pareja de vectores  $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}_{>0}^3$ , mostrada en (3.12).



## Monomialización combinatoria

Iniciamos este capítulo estudiando la monomialización combinatoria en dimensión dos, debido a que con ello rescataremos información relevante para dar una solución en el caso tridimensional, donde además entrarán en juego los resultados mostrados en el capítulo 3 que caracterizan a los morfismos de explosión realizables.

### 4.1. Caso bidimensional

La monomialización combinatoria en dimensión dos se sigue de los resultados expuestos en la sección 4 en [11] (*ver* Lemma 4.10 en [11]). Otra forma de obtenerla es como un caso particular de los resultados de monomialización local exhibidos en [18, 20, 22], basados en el método empleado usualmente para resolver la situación análoga en el caso real-analítico usual (*ver* Theorem 4.4 en [5]). El caso bidimensional es relativamente sencillo de obtener debido a que el soporte de los centros de explosión siempre estará constituido por puntos aislados, de forma tal que no hay restricción alguna sobre la elección de ellos (*ver* definición 1.7), pues toda variedad analítica generalizada es localmente estandarizable. Además, todo morfismo de explosión luce, en coordenadas locales, de manera similar al ejemplo 1.5, para algún número real positivo  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Hacemos notar que la monomialización combinatoria bidimensional es un problema de gérmenes de funciones analíticas generalizadas alrededor de puntos tipo esquina, ya que cualquier germen de función analítica generalizada siempre es de tipo monomial, con respecto a las variables generalizadas, alrededor de todo punto no esquina. Efectivamente, en caso de puntos sobre la frontera que no son esquina solamente ocurre una variable generalizada, mientras en puntos en el interior ninguna. En consecuencia, la monomialización combinatoria bidimensional equivale a asegurarla en puntos esquina, efectuando morfismos de explosión centrados en tal clase de puntos. Más adelante presentamos una solución que está basada en el entendimiento geométrico de cómo evolucionan los polígonos de Newton asociados a gérmenes de funciones analíticas generalizadas bajo morfismos de explosión, que describiremos valiéndonos de la representación lineal de los morfismos involucrados, desarrollada en el capítulo 2.

Sean  $\mathbf{M}_0 = (GR_{\geq 0}^2, 0)$  el germen de una variedad generalizada alrededor de un punto esquina y  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Recordemos que (*ver* observación 1.1), podemos leer la no-monomialidad del germen  $f$  a través de su polígono de Newton (*ver* subsección 1.1.1),  $\Delta_0(f)$ , con respecto a un sistema local de coordenadas  $(x_1, x_2)$  alrededor del origen: el germen  $f$  no es de tipo monomial en el origen si, y sólo si  $v_0(f) \geq 2$ , donde  $v_0(f)$  es el número de vértices del polígono de Newton de  $f$ . Por tanto, reformulamos la monomialización combinatoria bidimensional como sigue.

TEOREMA 4.1 (Monomialización combinatoria bidimensional). *Existe una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , tal que*

$$(4.1) \quad v_q(f \circ \pi) = 1, \quad \text{para cada punto esquina } q \in \partial|M|.$$

Para demostrar el teorema anterior, basta que garanticemos que tras haber realizado una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios adecuada,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , la desigualdad estricta:

$$v_q(f \circ \pi) < v_0(f), \quad \text{para cada punto esquina } q \in \partial|M|,$$

se satisface. Una vez hecho esto, argumentando inductivamente, la igualdad (4.1) es inmediata. En consecuencia, la monomialización combinatoria bidimensional es un corolario del siguiente teorema.

TEOREMA 4.2. *Sea  $\pi: M \rightarrow M_0$  un morfismo de explosión arbitrario, centrado en el punto esquina  $0 \in M_0$ . Entonces, se cumple que*

$$(4.2) \quad v_q(f \circ \pi) \leq v_0(f), \quad \text{para cada punto esquina } q \in \pi^{-1}(\{0\}),$$

*y la igualdad se satisface a lo más en uno de ellos.*

*Más aún, si  $v_0(f) \geq 2$ , existe un morfismo de explosión centrado en  $\{0\}$  tal que la desigualdad anterior es estricta para ambos puntos esquina sobre el divisor excepcional  $\pi^{-1}(\{0\})$ .*

Antes de pasar a la demostración de este resultado, estudiaremos cómo actúan en el plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  las representaciones lineales asociadas a cualquier morfismo de explosión en dimensión dos. Esto clarificará qué morfismos de explosión debemos aplicar si deseamos que decrezca estrictamente la desigualdad (4.2).

**4.1.1. Estudio en  $\mathbb{R}^2$  de la representación lineal de morfismos de explosión.** Sea  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^2, 0)$  el germen de una variedad generalizada bidimensional en torno a un punto esquina. Por lo hecho en el ejemplo 1.5, sabemos que cualquier morfismo de explosión de  $M_0$  centrado en el origen depende de un número real positivo  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ . Formalmente, dadas coordenadas locales en  $M_0$ ,  $(x_1, x_2)$ , centradas en el origen, definimos el centro admisible  $\{0\}_\alpha := (\{0\}, M_0, \varphi_\alpha)$ , donde  $\varphi_\alpha: M_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  es la estandarización de  $M_0$  dada por

$$\varphi_\alpha(x_1, x_2) = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}), \quad \text{para algún } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2, \quad \text{tal que } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lambda.$$

Definimos la variedad  $\tilde{M}_0$  como

$$|\tilde{M}_0| := \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \sqcup \mathbb{R}_{\geq 0}^2 / \sim_\lambda,$$

donde

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \sim_\lambda (x'_1, x'_2) \quad \text{si, y sólo si} \quad \tilde{x}_2 \cdot x'_1 \neq 0, \quad x'_1 = \frac{1}{\tilde{x}_2^{1/\lambda}}, \quad x'_2 = \tilde{x}_1^\lambda \cdot \tilde{x}_2.$$

Y el morfismo  $\pi_\lambda: \tilde{M}_0 \rightarrow M_0$  queda determinado, en cada carta, por

$$\pi_\lambda^1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^\lambda \tilde{x}_2), \quad \text{y} \quad \pi_\lambda^2(x'_1, x'_2) = (x'_1 (x'_2)^{1/\lambda}, x'_2).$$

Equivalentemente,

$$L_\lambda := L(\pi_\lambda^1) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R_\lambda := L(\pi_\lambda^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, quedan definidos los isomorfismos lineales  $L_\lambda, R_\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Veamos cómo transforman cada uno de ellos a los subespacios afines unidimensionales de  $\mathbb{R}^2$ . Sea

$$\mathcal{L}_{m,b} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\},$$

la recta afín determinada por la pendiente  $m \in \mathbb{R}$  y ordenada al origen  $b \in \mathbb{R}$  y sea

$$\mathcal{L}_{\infty,a} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\},$$

la recta vertical afín cuya abscisa es  $a \in \mathbb{R}$ .

Analicemos primero la geometría detrás del isomorfismo lineal  $L_\lambda$ . Tenemos que

$$L_\lambda(1, m) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda m \\ m \end{pmatrix} \quad \text{para toda } m \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente

$$L_\lambda(\mathcal{L}_{m,b}) = \mathcal{L}_{\tilde{m},\tilde{b}}, \quad \text{donde } \tilde{m} := \frac{m}{1 + \lambda m}.$$

Así, observamos que el isomorfismo lineal  $L_\lambda$  transforma a la familia de rectas con pendiente fija  $m \in \mathbb{R}$  en la familia de rectas con pendiente fija  $\frac{m}{1 + \lambda m}$ . En particular, a la familia de rectas  $\{\mathcal{L}_{-\frac{1}{\lambda},b} : b \in \mathbb{R}\}$  la transforma en la familia de rectas verticales  $\{\mathcal{L}_{\infty,a} : a \in \mathbb{R}\}$ :

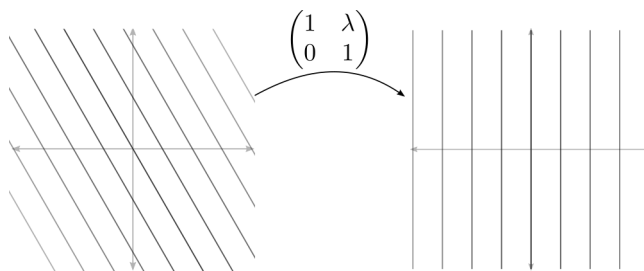


FIGURA 4.1. Imagen de la familia de rectas  $\{\mathcal{L}_{-\frac{1}{\lambda},b} : b \in \mathbb{R}\}$  bajo el isomorfismo lineal  $L_\lambda$ .

OBSERVACIÓN 4.1. Al considerar la *función pendiente* definida por el isomorfismo lineal  $L_\lambda$ , digamos  $\mathfrak{s}_\lambda: \mathbb{R} \setminus \{-\lambda^{-1}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\mathfrak{s}_\lambda(x) := \frac{x}{1 + \lambda x},$$

notamos que es una función estrictamente creciente. En efecto, de la diferenciabilidad de  $\mathfrak{s}_\lambda$  y debido a que

$$\frac{d\mathfrak{s}_\lambda}{dx}(x) = \frac{1}{(1 + \lambda x)^2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda^{-1}\},$$

concluimos que  $\mathfrak{s}_\lambda$  es estrictamente creciente en su dominio de definición.

El análisis correspondiente del isomorfismo lineal  $R_\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nos lleva a concluir que éste transforma a la familia de rectas  $\{\mathcal{L}_{-\frac{1}{\lambda},b} : b \in \mathbb{R}\}$  en la familia de rectas horizontales  $\{\mathcal{L}_{0,b} : b \in \mathbb{R}\}$ . Más aún, la función pendiente que define  $R_\lambda$ , digamos  $\tilde{\mathfrak{s}}_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es estrictamente creciente, pues

$$\tilde{\mathfrak{s}}_\lambda(x) = x + \frac{1}{\lambda}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

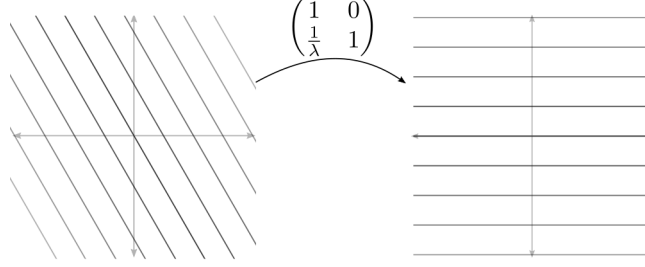


FIGURA 4.2. Imagen de la familia de rectas  $\{\mathcal{L}_{-\frac{1}{\lambda}, b} : b \in \mathbb{R}\}$  bajo el isomorfismo lineal  $R_\lambda$ .

Esta información nos basta para demostrar el teorema 4.2.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.2. Sea  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Consideremos  $\pi_\mu: \tilde{M}_0 \rightarrow M_0$  el morfismo de explosión de  $M_0$  centrado en  $\{0\}_\alpha$ , donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  y  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \mu$ . La desigualdad 4.2 es inmediata. En efecto, las funciones pendiente  $\mathfrak{s}_\mu$  y  $\tilde{\mathfrak{s}}_\mu$  son estrictamente crecientes, y por tanto,

$$v_q(f \circ \pi_\mu) \leq v_0(f), \quad \text{para ambos puntos esquina } q \in \partial|\tilde{M}_0|.$$

Mostremos que ésta es estricta si  $k := v_0(f) \geq 2$ , una vez elegido un número real positivo  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$  adecuado. Sea  $\{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_k, \beta_k)\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  el conjunto de vértices del polígono de Newton de  $f$ ,  $\Delta_0(f)$ , y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha_i < \alpha_j$ ,  $\beta_i > \beta_j$  si  $i < j$ , donde  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , denotemos por  $\sigma_j$  a la cara compacta de  $\Delta_p(f)$  con extremos  $(\alpha_j, \beta_j)$  y  $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1})$ , y sea  $\delta_j := \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} < 0$  la pendiente de la recta afín que contiene a la cara  $\sigma_j$ . Observemos que  $\delta_i < \delta_j$  si  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , y definamos  $\lambda_j := -\frac{1}{\delta_j}$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ .

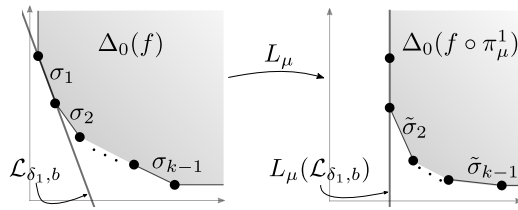


FIGURA 4.3. Polígono de Newton de  $f \circ \pi_\mu^1$ , para  $\mu = \lambda_1$ .

Por lo mostrado antes, concluimos que al elegir el valor  $\mu = \lambda_1$ , se satisface que

$$v_0(f \circ \pi_\mu^1) = k-1 < k = v_0(f) \quad \text{y} \quad v_0(f \circ \pi_\mu^2) = 1 < k = v_0(f),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

OBSERVACIÓN 4.2. Del análisis hecho sobre las representaciones lineales de los morfismos de explosión de  $M_0$  centrados en  $\{0\}_\alpha$ , podemos decir aún más; a saber:

- (a) Si  $\mu \in (0, \lambda_1)$ , entonces  $v_0(f \circ \pi_\mu^1) = 1 < v_0(f)$  y  $v_0(f \circ \pi_\mu^2) = v_0(f)$ .

- (b) Si  $\mu \in (\lambda_{k-1}, +\infty)$ , entonces  $v_0(f \circ \pi_\mu^1) = v_0(f)$  y  $v_0(f \circ \pi_\mu^2) = 1 < v_0(f)$ .  
(c) Si  $\mu \in [\lambda_1, \lambda_{k-1}]$ , entonces  $\max\{v_0(f \circ \pi_\mu^1), v_0(f \circ \pi_\mu^2)\} < v_0(f)$ .

## 4.2. Caso tridimensional

La monomialización combinatoria tridimensional no es tan directa como lo es en el caso bidimensional que acabamos de probar. Esto radica básicamente en el hecho de que en el proceso de monomialización ahora requerimos realizar morfismos de explosión centrados no sólo en puntos esquina, sino en centros admisibles unidimensionales, que son las curvas adaptadas a la frontera del espacio ambiente en cuestión. La necesidad de llevar a cabo morfismos de explosión centrados en curvas conlleva a que nos ocupemos de un problema adicional; a saber, las obstrucciones para definir tal clase de morfismos, inherentes a la estructura analítica generalizada definida sobre los espacios ambientes (*ver* observación 3.1). Enseguida establecemos los resultados que deben ser probados para obtener la monomialización combinatoria tridimensional.

Sean  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina y  $f \in \mathcal{G}_{M_0, 0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Similarmente al caso bidimensional, el que el germen  $f$  sea localmente de tipo monomial en el origen, o no, se refleja a través de su poliedro de Newton asociado,  $\Delta_0(f)$ , con respecto a un sistema local de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor del origen. Concretamente, el germen  $f$  no es de tipo monomial en el origen si, y sólo si  $v_0(f) \geq 2$ , donde  $v_0(f)$  es el número de vértices del poliedro de Newton de  $f$ . Sabemos además que  $v_0(f) \geq 2$  si, y sólo si  $\kappa_0(f) \geq 2$ , donde  $\kappa_0(f)$  es el tamaño del soporte mínimo de  $f$ ,  $\kappa_0(f) := |\text{Supp}_{\min}(f)|$  (*ver* observación 1.1). Resumiendo, tenemos las equivalencias:

*El germen  $f \in \mathcal{G}_{M_0, 0}$  no es localmente de tipo monomial en el origen  $0 \in M_0$  si, y sólo si  $v_0(f) > 1$  si, y sólo si  $\kappa_0(f) > 1$ .*

En consecuencia, el lugar no monomial combinatorio del germen  $f$  es el conjunto de puntos  $p \in |M_0|$  tales que  $\kappa_p(f) > 1$ :

$$(4.3) \quad \text{NM}_{\text{comb}}(f) := \{p \in |M| : \kappa_p(f) > 1\}.$$

Así, concluimos que en la situación inicial, el conjunto  $\text{NM}_{\text{comb}}(f)$  o bien es vacío (si  $\kappa_0(f) = 1$ ), o bien consta del origen  $0 \in M_0$  y la unión de algunos ejes coordenados locales alrededor de él. Además, notemos que  $\kappa_{(\cdot)}(f)$  resulta ser una función semicontinua superiormente, por tanto podemos considerar el valor máximo de  $\kappa_{(\cdot)}(f)$ ,

$$\kappa(f) := \max\{\kappa_p(f) : p \in |M_0|\},$$

y definir el conjunto

$$(4.4) \quad \text{S}_\kappa(f) := \{p \in |M_0| : \kappa_p(f) = \kappa(f)\},$$

como el subconjunto de  $|M_0|$  donde tal máximo se alcanza.

**DEFINICIÓN 4.1.** Sean  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$  una variedad generalizada y  $f \in \mathcal{G}_M$  una función analítica generalizada en  $M$ . Diremos que un centro admisible  $Z = (|Z|, U, \varphi)$ , con  $|Z| \subset |M_0|$ , es un *centro permisible* para la función  $f$  si el espacio topológico soporte  $|Z|$  está contenido en el conjunto  $\text{S}_\kappa(f)$ .

DEFINICIÓN 4.2. Sean  $M = (|M|, \mathcal{G}_M)$  una variedad generalizada y  $f \in \mathcal{G}_M$  una función analítica generalizada en  $M$ . Decimos que  $f$  es *combinatoriamente monomial* sobre  $M$  si  $\kappa(f) = 1$ . Equivalentemente,  $f$  es combinatoriamente monomial sobre  $M$  si, y sólo si  $\text{NM}_{\text{comb}}(f) = \emptyset$ .

En estos términos, formulamos la monomialización combinatoria tridimensional como sigue.

TEOREMA 4.3 (Monomialización combinatoria). *Sean  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina y  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Existe una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios con centros permisibles,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , tal que el transformado total de  $f$ ,  $f \circ \pi$ , es combinatoriamente monomial sobre  $M$ ; es decir,  $\text{NM}_{\text{comb}}(f \circ \pi) = \emptyset$ .*

Notemos que este resultado es una consecuencia de la siguiente situación más general.

TEOREMA 4.4. *Sean  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina y  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Entonces, dada cualquier sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M_0$ ,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , existe una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M$  con centros permisibles,  $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow M$ , tal que  $\text{NM}_{\text{comb}}(F \circ \tilde{\pi}) = \emptyset$ , donde  $F := f \circ \pi$ .*

OBSERVACIÓN 4.3. Dado cualquier morfismo de explosión combinatorio definido sobre  $M_0$ ,  $\pi: M \rightarrow M_0$ , la desigualdad  $\kappa(f \circ \pi) \leq \kappa(f)$  siempre ocurre y es conocida como *estabilidad vertical*. Así, usando un argumento inductivo, si logramos que  $\kappa(f)$  decrezca estrictamente después de llevar a cabo una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios adecuada, el teorema 4.4 es inmediato. Por tanto, es suficiente que demostremos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.5. *Sean  $\mathbf{M}_0 = (G\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$  el germen de una variedad generalizada tridimensional alrededor de un punto esquina,  $f \in \mathcal{G}_{M_0,0}$  el germen de una función analítica generalizada en el origen. Consideremos una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M_0$ ,  $\pi: M \rightarrow M_0$ . Si  $\kappa(F) \geq 2$ , existe una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M$  con centros permisibles,  $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow M$ , tal que*

$$(4.5) \quad \kappa(F \circ \tilde{\pi}) < \kappa(F), \quad \text{donde } F := f \circ \pi.$$

Probaremos primero una serie de lemas auxiliares, donde estudiamos por separado cada posible centro permisible a ser explotado: ya sea un punto esquina, o bien una curva adaptada a la frontera del espacio ambiente, compacta o no. Una vez hecho esto, mostramos un algoritmo que nos permite garantizar la desigualdad (4.5).

**4.2.1. Demostración del teorema 4.5.** En cada uno de los resultados contenidos en este apartado supondremos que se satisfacen las hipótesis del teorema 4.5 y emplearemos la notación recién introducida.

LEMA 4.1. *Si  $p \in S_\kappa(F)$  es un punto esquina aislado en el conjunto  $S_\kappa(F)$ , entonces existe un morfismo de explosión centrado en  $\{p\}$ ,  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ , tal que*

$$(4.6) \quad \kappa_q(F \circ \pi) < \kappa(F), \quad \text{para cada punto esquina } q \in \pi^{-1}(\{p\}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p \in S_\kappa(F)$  un punto aislado en  $S_\kappa(F)$ . Entonces, necesariamente existe al menos una cara compacta del poliedro de Newton de  $F$  en el punto  $p$ . Luego, dada  $U_p \subset M$  una vecindad abierta de  $p$  en  $M$ , si definimos la estandarización descrita por el vector normal al plano que contiene tal cara compacta (ver ejemplo 1.7), digamos  $\varphi_\alpha: U_p \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}_{> 0}^3$ , la desigualdad (4.6) es garantizada al efectuar el morfismo de explosión de  $M$  centrado en  $\{p\}_\alpha := (\{p\}, U_p, \varphi_\alpha)$ .  $\square$

El lema anterior nos permite asegurar que si  $S_\kappa(F)$  contiene algún punto esquina aislado de otros elementos de  $S_\kappa(F)$ , entonces efectuando un morfismo de explosión adecuado, en la preimagen de tal punto no aparecen más puntos esquina aislados dentro de  $S_\kappa(F \circ \pi)$ . En consecuencia, nos falta determinar qué ocurre en caso de que  $S_\kappa(F)$  contenga curvas adaptadas a la frontera de la variedad  $M$ .

Se puede verificar que si en  $S_\kappa(F)$  hay curvas adaptadas a la frontera de la variedad  $M$ , entonces no concurren tres de ellas en un punto esquina; es decir, a lo más dos curvas dentro de  $S_\kappa(F)$  se intersecan en un punto esquina de  $M$ . El siguiente resultado establece que si éste es el caso, entonces podemos separar dichas curvas (a sus transformados estrictos), realizando un morfismo de explosión adecuado, centrado en el punto de su intersección.

LEMA 4.2. *Si  $|Z_1|, |Z_2| \in S_\kappa(F)$  son dos curvas que se intersecan en un punto,  $|Z_1| \cap |Z_2| = \{p\}$ , entonces existe un morfismo de explosión centrado en  $\{p\}$ ,  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ , tal que*

$$(4.7) \quad \kappa_q(F \circ \pi) < \kappa(F), \quad \text{para todo punto } q \in \pi^{-1}(\{p\}) \setminus \{q_1, q_2\},$$

donde  $q_j \in |\tilde{Z}_j| \cap \pi^{-1}(\{p\})$ , y  $|\tilde{Z}_j|$  es el transformado estricto de la curva  $|Z_j|$ , para cada  $j \in \{1, 2\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\kappa(F) = m > 1$ . Por hipótesis, sabemos que  $\kappa(F|_{|Z_1|}) = \kappa(F|_{|Z_2|}) = m$ . Luego, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dadas coordenadas locales centradas en  $p$ , digamos  $(x_1, x_2, x_3)_p$ , tenemos que  $|Z_1| = \{x_2 = x_3 = 0\}$  y  $|Z_2| = \{x_1 = x_3 = 0\}$ . Ahora, si el soporte mínimo de  $F$  en  $p$  es el conjunto

$$\text{Supp}_{\min}(F_p) = \{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \dots, (\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Supp}_{\min}(F|_{|Z_1|}) &= \{(\beta_1, \gamma_1), (\beta_2, \gamma_2), \dots, (\beta_m, \gamma_m)\}, \\ \text{Supp}_{\min}(F|_{|Z_2|}) &= \{(\alpha_1, \gamma_1), (\alpha_2, \gamma_2), \dots, (\alpha_m, \gamma_m)\}. \end{aligned}$$

Así, podemos suponer además que los elementos del soporte mínimo del germen  $F_p$  están etiquetados de forma tal que  $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_m$ . En consecuencia, notamos que

$$(4.8) \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m, \quad \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m.$$

Dada  $U_p \subset M$  una vecindad abierta del punto esquina  $p$  en  $M$ , consideremos la estandarización  $\varphi_\alpha: U_p \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_{> 0}^3$ ,  $\lambda := \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  y  $\mu := \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$ . Entonces, realizando el morfismo de explosión de  $M$  centrado en  $\{p\}_\alpha :=$

$(\{p\}, U_p, \varphi_\alpha), \pi_{\lambda, \mu}: \tilde{M} \rightarrow M$ , para cada  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , se cumple que:

$$(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \mapsto \begin{cases} (\alpha_k + \lambda\beta_k + \mu\gamma_k, \beta_k, \gamma_k), & \text{en la primera carta.} \\ (\alpha_k, \frac{1}{\lambda}\alpha_k + \beta_k + \frac{\mu}{\lambda}\gamma_k, \gamma_k), & \text{en la segunda carta.} \\ (\alpha_k, \beta_k, \frac{1}{\mu}\alpha_k + \frac{\lambda}{\mu}\beta_k + \gamma_k), & \text{en la tercera carta.} \end{cases}$$

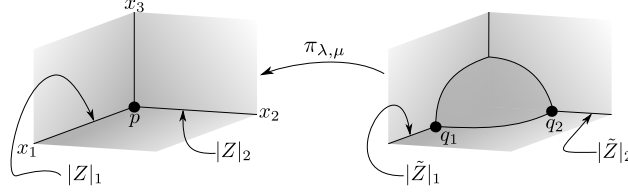


FIGURA 4.4. Aislado curvas dentro de  $S_\kappa(F)$ .

En consecuencia, usando la primera carta, con coordenadas  $(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ , (cf., ejemplo 1.7), notamos que las curvas compactas adaptadas a la frontera de la variedad  $\tilde{M}$ , sobre el divisor  $\pi_{\lambda, \mu}^{-1}(\{p\})$ , observadas en dicha carta, son  $E_2 = \{x_1^1 = x_3^1 = 0\}$  y  $E_3 = \{x_1^1 = x_2^1 = 0\}$ , localmente. Y la curva compacta restante adaptada a la frontera del divisor excepcional, digamos  $E_1$ , la podemos estudiar por medio de la segunda carta, con coordenadas  $(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ , obteniendo que  $E_1 = \{x_1^2 = x_2^2 = 0\}$ . Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \text{Supp}_{\min}(F \circ \pi_{\lambda, \mu}|_{E_1}) &\subset \left\{ \left( \alpha_j, \frac{1}{\lambda}\alpha_j + \beta_j + \frac{\mu}{\lambda}\gamma_j \right) \right\}_{j=1}^m, \\ \text{Supp}_{\min}(F \circ \pi_{\lambda, \mu}|_{E_2}) &\subset \{(\alpha_j + \lambda\beta_j + \mu\gamma_j, \gamma_j)\}_{j=1}^m, \\ \text{Supp}_{\min}(F \circ \pi_{\lambda, \mu}|_{E_3}) &\subset \{(\alpha_j + \lambda\beta_j + \mu\gamma_j, \beta_j)\}_{j=1}^m. \end{aligned}$$

Antes de continuar, hacemos la siguiente observación:

**OBSERVACIÓN 4.4.** Dado un par de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i < j$ , la ecuación

$$\alpha_i + \lambda\beta_i + \mu\gamma_i = \alpha_j + \lambda\beta_j + \mu\gamma_j,$$

que usando las nomenclaturas  $\alpha_{ij} := \alpha_i - \alpha_j$ ,  $\beta_{ij} := \beta_i - \beta_j$  y  $\gamma_{ij} := \gamma_i - \gamma_j$ , reescribimos como

$$(4.9) \quad \alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij} + \mu\gamma_{ij} = 0,$$

garantiza la desigualdad (4.7). En efecto, la igualdad (4.9) implica que

$$\kappa_{E_l}(F \circ \pi_{\lambda, \mu}) \leq m - 1 < m = \kappa(F), \quad \text{para cada } l \in \{1, 2, 3\}.$$

Por tanto, si demostrásemos que dado cualquier par  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , podemos elegir  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ , tales que (4.9) ocurre, habremos terminado. Hagámoslo: sean  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tales que  $i < j$ . De (4.8), se sigue que

$$\alpha_{ij} < 0, \quad \beta_{ij} < 0 \quad \text{y} \quad \gamma_{ij} > 0.$$

Así, denotando por

$$\delta_{ij}^\lambda := \alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij},$$

tenemos que

$$\delta_{ij}^\lambda < 0, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Por lo tanto, para cada número real positivo  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , la solución a la ecuación lineal (4.9) está dada por

$$\mu(i, j, \lambda) = -\frac{\delta_{ij}^\lambda}{\gamma_{ij}} > 0.$$

□

Por lo hecho hasta el momento, podemos suponer que en el conjunto  $S_\kappa(F)$ ; es decir, el conjunto de puntos donde el valor máximo de  $\kappa(F)$  es alcanzado, no hay puntos esquina aislados y, por tanto, sus elementos son una cantidad finita de curvas adaptadas a la frontera de  $M$ , aisladas unas de otras dentro de  $S_\kappa(F)$ . Enseguida nos enfocamos en cómo resolver tales curvas, dividiendo nuestro análisis en dos partes. Primero resolveremos las curvas no compactas, ya que ellas definen centros admisibles de explosión de cualquier tipo; es decir, siempre podemos definir estandarizaciones locales en torno a ellas, sin restricción alguna. Después, resolveremos el caso de curvas compactas, donde emplearemos la descripción de los morfismos de explosión realizables sobre éstas, determinados por la huella analítica de la curva compacta en turno.

LEMA 4.3. *Si  $|Z| \in S_\kappa(F)$  es una curva no compacta, adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , aislada de otras curvas dentro del conjunto  $S_\kappa(F)$ , entonces existe una estandarización en torno a  $|Z|$ ,  $\varphi: U^Z \rightarrow \varphi(U^Z)$ , de forma que el morfismo de explosión centrado en  $Z = (|Z|, U^Z, \varphi)$ ,  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ , es tal que*

$$(4.10) \quad \kappa_q(F \circ \pi) < \kappa(F), \quad \text{para todo punto } q \in \pi^{-1}(|Z|).$$

DEMOSTRACIÓN. Debido a que  $|Z|$  es una curva no compacta, podemos elegir la estandarización que garantice la desigualdad 4.10 (la situación es análoga al caso bidimensional, demostrado en el teorema 4.2). □

Supongamos ahora que  $|Z|$  es una curva compacta, adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , aislada dentro del conjunto  $S_\kappa(F)$ . Recordemos que si queremos definir un morfismo de explosión centrado en  $|Z|$ , éste dependerá de la estructura analítica generalizada que induce el espacio ambiente global  $M$  sobre  $|Z|$ . Concretamente, en virtud del teorema 3.4, sabemos que una curva compacta  $|Z|$ , adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , siempre define un centro admisible  $Z := (|Z|, U^Z, \varphi)$ , determinado por la huella analítica de  $(|Z|, U^Z, h_Z)$ , digamos  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , tal que

$$L(h_Z) = H_{\eta, a, b} := \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ -\frac{1}{\eta} & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para algún número positivo } \eta \in \mathbb{R}_{>0},$$

donde  $h_Z$  es la transformación de transición a lo largo de  $|Z|$ , definida por la estructura analítica generalizada sobre  $M$ , y el número  $\eta$  depende de la construcción de la variedad global  $M$ .

Más aún, una vez elegidas coordenadas locales adecuadas en torno a  $|Z|$ , la estandarización  $\varphi: U^Z \rightarrow \varphi(U^Z)$  que da lugar al centro admisible  $Z = (|Z|, U^Z, \varphi)$  está descrita por la pareja de vectores  $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}_{>0}^3$ , exhibidos en (3.12) (ver observación 3.1), y nos basta con conocer uno solo de ellos. A saber, dada una pareja de números enteros  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  que tenga el mismo signo que  $(a, b)$  (ver definición 3.2), por lo obtenido en (3.12), tenemos que

- (a) Si  $a \neq 0$  y  $b = 0$ , entonces  $\alpha^1 = \left(x, \frac{a}{p\eta}x, y\right)$ ,  $\alpha^2 = \left(\frac{a}{p}x, \frac{x}{\eta}, y\right)$ , para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ .
- (b) Si  $a = 0$  y  $b \neq 0$ , entonces  $\alpha^1 = \left(x, y, \frac{q}{b}y\right)$ ,  $\alpha^2 = \left(\eta y, \frac{x}{\eta}, \frac{q}{b}y\right)$ , para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ .
- (c) Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , entonces  $\alpha^1 = \left(x, \frac{a}{p\eta}x, \frac{aq}{bp\eta}x\right)$ ,  $\alpha^2 = \left(\frac{a}{p}x, \frac{x}{\eta}, \frac{aq}{bp\eta}x\right)$ , para cualquier  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Luego, concluimos que la clase de morfismos de explosión de  $M$  centrados en  $Z = (|Z|, U^Z, \varphi)$  está codificada por el vector  $\alpha^1$  (o bien, el vector  $\alpha^2$ ) como vimos en el ejemplo 1.6. Concretamente, el valor numérico que describe en coordenadas locales a cada morfismo de explosión de  $M$  centrado en  $Z$  es

$$(4.11) \quad \nu := \nu(a, b) := \frac{\alpha_1^1}{\alpha_3^1}.$$

Hacemos notar que el valor  $\nu$  depende de la huella analítica de la curva  $|Z|$ , y los casos (a), (b) y (c) dan lugar a los valores

$$(4.12) \quad \nu = \frac{x}{y}, \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}_{>0},$$

$$(4.13) \quad \nu = \frac{bx}{qy}, \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}_{>0} \text{ y } q \in \mathbb{Z} \text{ tal que } bq > 0,$$

$$(4.14) \quad \nu = \frac{bp}{aq}\eta, \quad \text{para cualesquiera } p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ tales que } ap > 0, bq > 0,$$

respectivamente.

Por otra parte, si  $\Delta_{|Z|}(F)$  denota al polígono de Newton genérico de  $F$  a lo largo de la curva  $|Z|$ , sea  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  el conjunto de caras compactas de  $\Delta_{|Z|}(F)$ , y sea  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$  el conjunto de sus pendientes, etiquetadas de forma tal que  $\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m < 0$ , como ilustramos en la siguiente figura:

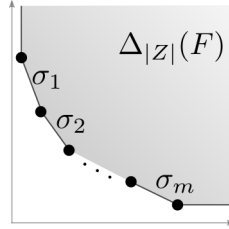


FIGURA 4.5. Polígono de Newton genérico de  $F$  a lo largo de  $|Z|$ .

Definamos las cantidades positivas  $\theta_j := -\frac{1}{\delta_j}$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , y denotemos por

$$(4.15) \quad \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F)) := [\theta_1, \theta_m],$$

al intervalo cerrado determinado por la colección  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ . El siguiente resultado es una consecuencia de la monomialización combinatoria bidimensional (ver observación 4.2).

**LEMA 4.4.** Sean  $|Z| \in \mathcal{S}_\kappa(F)$  una curva compacta, adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , aislada de otras curvas dentro del conjunto  $\mathcal{S}_\kappa(F)$ , con huella analítica

$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Existe una estandarización en torno a  $|Z|$ ,  $\varphi: U^Z \rightarrow \varphi(U^Z)$ , de forma que el morfismo de explosión centrado en  $Z = (|Z|, U^Z, \varphi)$ ,  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ , es tal que

$$\kappa_q(F \circ \pi) < \kappa(F), \quad \text{para todo punto } q \in \pi^{-1}(|Z|)$$

si, y sólo si

$$\nu(a, b) \in \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F)),$$

donde  $\nu(a, b)$  está determinado por (4.12), (4.13) o (4.14), acorde a la huella analítica de  $|Z|$  en  $M$ .

DEFINICIÓN 4.3. Sean  $|Z| \in \partial|M|$  una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , con huella analítica  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , y  $\Delta_{|Z|}(F)$  el polígono de Newton genérico de  $F$  a lo largo de  $|Z|$ . Decimos que la curva  $|Z|$  es *compatible* con  $\Delta_{|Z|}(F)$  si existe  $\nu(a, b) \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\nu(a, b) \in \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$ .

OBSERVACIÓN 4.5. Sea  $|Z| \subset \partial|M|$  una curva compacta adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , con huella analítica  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y consideremos  $\Delta_{|Z|}(F)$  el polígono de Newton genérico de  $F$  a lo largo de  $|Z|$ . Por lo expuesto antes, concluimos que si  $a = 0$  o  $b = 0$ , entonces siempre existe  $\nu(a, b)$  (dado como (4.12) o (4.13), respectivamente) tal que  $\nu(a, b) \in \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$ . Es decir,

$$\text{Si } 0 \in \{a, b\}, \quad \text{entonces } |Z| \text{ es compatible con } \Delta_{|Z|}(F).$$

Esto nos lleva a enfocarnos en sólo un caso; a saber, cuando la huella analítica de la curva  $|Z|$ , digamos  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  es tal que  $ab \neq 0$ . Pero, por (4.14), concluimos entonces que:

$$|Z| \text{ es compatible con } \Delta_{|Z|}(F) \quad \text{si, y sólo si} \quad \left(\frac{b}{a}\eta\right)\mathbb{Q} \cap \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F)) \neq \emptyset.$$

Consecuentemente, si  $\mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$  tiene interior no vacío, por la densidad de los números racionales en los números reales, aseguramos que  $\left(\frac{b}{a}\eta\right)\mathbb{Q} \cap \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$  es un conjunto no vacío.

Ahora, si  $\mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$  tiene interior vacío; es decir,  $\Delta_{|Z|}(F)$  tiene una única cara compacta y, por tanto, el conjunto  $\mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$  es un singulete, digamos  $\mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F)) = \{\theta\}$ , para algún número real positivo  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ , podría ocurrir que dicho valor  $\theta$  sea no favorable para nuestro propósito; es decir, que  $\theta \notin \left(\frac{b}{a}\eta\right)\mathbb{Q}$ . Con esto en mente, establecemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.4. Diremos que un número real  $\theta \in \mathbb{R}$  pertenece a un *dominio no propicio* para la terna  $(a, b, \eta)$ ,  $ab \neq 0$ , si  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{b}{a}\eta\right)\mathbb{Q}$ . Es decir,  $\theta$  pertenece a un dominio no propicio para la terna  $(a, b, \eta)$  si, y sólo si  $\theta$  y  $\frac{b}{a}\eta$  son racionalmente independientes.

Usando la misma notación previa, enunciamos el siguiente resultado técnico que nos permite resolver la obstrucción subrayada en el párrafo anterior.

LEMA 4.5. Sea  $|Z| \in S_\kappa(F)$  una curva compacta, adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , aislada de otras curvas dentro del conjunto  $S_\kappa(F)$ , tal que  $L(h_Z) = H_{\eta, a, b}$ , para algunos  $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , tales que  $ab \neq 0$ . Supongamos que el polígono de Newton genérico de  $F$  a lo largo de  $|Z|$ ,  $\Delta_{|Z|}(F)$ , tiene una única cara compacta satisfaciendo que el único elemento del conjunto  $\mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F)) = \{\theta\}$  pertenece a un dominio no propicio para la terna  $(a, b, \eta)$ . Entonces existe un

morfismo de explosión centrado en algún punto esquina extremo de  $|Z|$ ,  $p \in |Z|$ ,  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ , tal que

$$\kappa_q(F \circ \pi) < \kappa(F), \quad \text{para todo punto } q \in \pi^{-1}(\{p\}) \setminus \{\tilde{p}\} \quad \text{y} \quad \theta = \nu(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

para algún  $\nu(\tilde{a}, \tilde{b})$ , donde  $\{\tilde{p}\} = |\tilde{Z}| \cap \pi^{-1}(\{p\})$ , la curva  $|\tilde{Z}|$  es el transformado estricto de la curva  $|Z|$ , y  $L(h_{\tilde{Z}}) = H_{\eta, \tilde{a}, \tilde{b}}$ .

Asumiendo que el lema 4.5 ha sido demostrado, procederemos a dar la demostración del teorema 4.5 que, en particular, nos permite deducir la monomialización combinatoria tridimensional (ver observación 4.3).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.5. Sabemos que el conjunto  $S_\kappa(F)$  es una unión finita de puntos esquina aislados y curvas adaptadas a la frontera de  $M$ . En primer lugar, cada punto esquina, aislado dentro de  $S_\kappa(f)$ , puede ser resuelto como mostramos en el lema 4.1. Luego, si hay curvas adaptadas a la frontera de la variedad  $M$ , que pertenecen al conjunto  $S_\kappa(F)$ , podemos aislarlas entre sí, gracias al procedimiento mostrado en el lema 4.2. En consecuencia, es suficiente que garanticemos la monomialización combinatoria a lo largo de curvas aisladas en  $S_\kappa(f)$ . Hay dos casos por analizar: el caso de curvas compactas y su complemento. El último de ellos se resuelve en virtud del lema 4.2, mientras que el primero es consecuencia de los lemas 4.4 y 4.5, lo que nos permite concluir la existencia de una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios sobre  $M$  tal que la desigualdad  $\kappa(F \circ \tilde{\pi}) < \kappa(F)$  se satisface.  $\square$

Para finalizar demostremos el lema 4.5 que dejamos pendiente por un momento. Éste nos permite solucionar la obstrucción derivada de la incompatibilidad entre el polígono de Newton genérico de una función  $F$  y el centro admisible definido por alguna curva compacta  $|Z|$ , adaptada a la frontera de la variedad  $M$ , dentro del conjunto  $S_\kappa(F)$ , pues, recordemos que en tal situación no podemos definir el único morfismo de explosión requerido para que decrezca estrictamente  $\kappa(F) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Veremos que cuando el valor  $\theta \in \mathfrak{D}(\Delta_{|Z|}(F))$  pertenece a un dominio no propicio para la terna  $(a, b, \eta)$ , que da lugar al centro admisible  $Z = (|Z|, U, \varphi)$ , siempre es posible resolver tal obstrucción definiendo un morfismo de explosión apropiado, permitiéndonos así continuar con el proceso de monomialización combinatoria establecido en el lema 4.4.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.5. Sea  $\kappa_{|Z|}(F) = m > 1$ . Entonces, si  $p \in \partial|Z|$  es un punto esquina extremo de la curva  $|Z|$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dadas coordenadas locales centradas en  $p$ ,  $(x_1, x_2, x_3)_p$ , tenemos que  $|Z| = \{x_1 = x_3 = 0\}$ , alrededor del punto  $p$ ; escribiendo a  $F$  en tales coordenadas, el soporte mínimo de  $F$  en el punto  $p$  es:

$$\text{Supp}_{\min}(F_p) = \{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \dots, (\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)\}.$$

En consecuencia,

$$\text{Supp}_{\min}(F|_{|Z|}) = \{(\alpha_1, \gamma_1), (\alpha_2, \gamma_2), \dots, (\alpha_m, \gamma_m)\},$$

y podemos suponer además que

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m \quad \text{y} \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_m.$$

Dados  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$ , usaremos las nomenclaturas

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &:= \alpha_i - \alpha_j, & \beta_{ij} &:= \beta_i - \beta_j, & \gamma_{ij} &:= \gamma_i - \gamma_j, \\ A_{ij} &:= \frac{\alpha_{ji}}{\gamma_{ij}}, & B_{ij} &:= \frac{\beta_{ji}}{\gamma_{ij}}, & C_{ij} &:= \frac{\beta_{ji}}{\alpha_{ij}}. \end{aligned}$$

Y, puesto que  $\Delta_{|Z|}(F)$  tiene una única cara compacta, se sigue que

$$A_{ij} = \theta > 0, \quad \text{para cualesquiera } i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j.$$

**AFIRMACIÓN 4.1.** *Las cantidades  $B_{ij}$  y  $C_{ij}$  son constantes si, y sólo si ambas son cero.*

*Más aún, existen índices  $i_0, j_0, i_1, j_1 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i_0 < j_0$ ,  $i_1 < j_1$ , tales que  $B_{i_0 j_0} \geq 0$  y  $B_{i_1 j_1} \leq 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $B_{ij} = B_0 \in \mathbb{R}$ , para toda pareja de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$ . Si  $B_0 = 0$ , el resultado es inmediato. En otro caso, si  $B_0 \neq 0$ , entonces o bien  $\kappa_{|X|_1}(f) = m$ , o bien  $\kappa_{|X|_3}(f) = m$ , si  $B_0 > 0$  o  $B_0 < 0$ , respectivamente; donde  $|X|_1 = \{x_2 = x_3 = 0\}$  y  $|X|_3 = \{x_1 = x_2 = 0\}$ . Pero esto es imposible debido a que, por hipótesis, la curva  $|Z|$  está aislada de otras curvas dentro del conjunto  $S_\kappa(F)$ . Un razonamiento análogo muestra que si  $C_{ij} = C_0$ , para toda pareja de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$ , entonces  $C_0 = 0$ .

Ahora bien, si todas las parejas de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i < j$ , son tales que  $B_{ij} < 0$ , entonces  $\beta_{ji} < 0$ , ya que  $\gamma_{ij} > 0$  si  $i < j$ . Así, obtendríamos que  $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_m$ , de manera que  $\kappa_{|X|_3}(f) = m$ , que es imposible, pues la curva compacta  $|Z|$  está aislada dentro de  $S_\kappa(F)$ . Por lo tanto, necesariamente existen índices  $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i_0 < j_0$ , tales que  $B_{i_0 j_0} \geq 0$ . Similarmente, deducimos que existen índices  $i_1, j_1 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i_1 < j_1$ , tales que  $B_{i_1 j_1} \leq 0$ .  $\square$

Dada  $U_p \subset M$  una vecindad abierta de  $p$  en  $M$ , y la estandarización  $\varphi_\alpha: U_p \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}^3, 0)$ , donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_{> 0}^3$ ,  $\lambda := \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ,  $\mu := \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$ , consideremos el morfismo de explosión de  $M$  centrado en  $\{p\}_\alpha := (\{p\}, U_p, \varphi_\alpha)$ ,  $\pi_{\lambda, \mu}: \tilde{M} \rightarrow M$ .

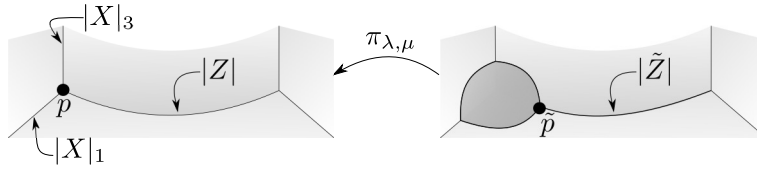


FIGURA 4.6. Preparación de la curva compacta  $|\tilde{Z}|$ .

Por los resultados presentados en el capítulo 3, sabemos que la transformación de transición a lo largo de la curva compacta  $|\tilde{Z}|$  (el transformado estricto de  $|Z|$  bajo  $\pi_{\lambda, \mu}$ ) adaptada a la frontera de la variedad  $\tilde{M}$ , está codificado por la matriz  $H_{\eta, \tilde{a}, \tilde{b}} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ :

$$(4.16) \quad H_{\eta, \tilde{a}, \tilde{b}} = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ -\frac{1}{\eta} & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \tilde{a} = \frac{a\lambda + \eta}{\lambda} \quad \text{y} \quad \tilde{b} = \frac{b\lambda + \mu}{\lambda}.$$

Ahora, por lo visto en la observación 4.4, para asegurar que ocurre la desigualdad

$$\kappa_q(F \circ \pi_{\lambda, \mu}) < \kappa(F), \quad \text{para todo punto } q \in \pi_{\lambda, \mu}^{-1}(\{p\}) \setminus \{\tilde{p}\},$$

es suficiente exhibir una pareja de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$ , tal que se satisfaga la ecuación (4.9), para valores  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$  adecuados. Recordemos que debemos asegurar además que  $\theta = \nu(\tilde{a}, \tilde{b})$ , para algún  $\nu(\tilde{a}, \tilde{b})$ . Hay tres casos por analizar:

Caso I ( $a < 0$ ): Elijamos en (4.16)  $\lambda = -\frac{\eta}{a} > 0$ . Entonces,  $\tilde{a} = 0$  y, en consecuencia  $\theta = \nu(\tilde{a}, \tilde{b})$  para algún  $\nu(\tilde{a}, \tilde{b})$  definido como en (4.12).

Por otra parte, de lo probado en la afirmación 4.1, se sigue que existen  $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i_0 < j_0$ , tales que  $B_{i_0 j_0} = \frac{-\beta_{i_0 j_0}}{\gamma_{i_0 j_0}} \geq 0$ . Hacemos notar que

$$\alpha_{i_0} + \lambda\beta_{i_0} + \mu\gamma_{i_0} = \alpha_{j_0} + \lambda\beta_{j_0} + \mu\gamma_{j_0} \quad \text{si, y sólo si} \quad \mu = \theta + \lambda B_{i_0 j_0},$$

donde  $\theta = \frac{-\alpha_{i_0 j_0}}{\gamma_{i_0 j_0}} = A_{i_0 j_0}$ . Por tanto,

$$(\lambda, \mu) = \left(-\frac{\eta}{a}, \theta - \frac{\eta}{a} B_{i_0 j_0}\right) \in \mathbb{R}_{>0}^2,$$

realiza la igualdad (4.9).

Caso II ( $b < 0$ ): Elijamos  $\mu = -\lambda b$ . Entonces  $\tilde{b} = 0$ , y observamos que  $\mu > 0$  si, y sólo si  $\lambda > 0$ , ya que  $b < 0$ . Más aún,  $\theta = \nu(\tilde{a}, \tilde{b})$  para algún  $\nu(\tilde{a}, \tilde{b})$  definido como en (4.13).

Por otra parte, de lo probado en la afirmación 4.1, se sigue que existen  $i_1, j_1 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i_1 < j_1$ , tales que  $B_{i_1 j_1} \leq 0$ . Luego,

$$\alpha_{i_1} + \lambda\beta_{i_1} + \mu\gamma_{i_1} = \alpha_{j_1} + \lambda\beta_{j_1} + \mu\gamma_{j_1} \quad \text{si, y sólo si} \quad \mu = \theta + \lambda B_{i_1 j_1},$$

pero, debido a que  $\mu = -\lambda b$ , tenemos que

$$\mu = \theta + \lambda B_{i_1 j_1} \quad \text{si, y sólo si} \quad \lambda = \frac{\theta}{-b - B_{i_1 j_1}}.$$

Por lo tanto  $\lambda > 0$ , ya que  $-b - B_{i_1 j_1} > 0$ , y consecuentemente

$$(\lambda, \mu) = \left(\frac{\theta}{-b - B_{i_1 j_1}}, \frac{\theta}{b + B_{i_1 j_1}} b\right) \in \mathbb{R}_{>0}^2,$$

realiza la igualdad (4.9).

Caso III ( $a, b > 0$ ): Si  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ , entonces  $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ , por su definición (ver ecuación (4.16)). Además, en este caso,  $\theta = \nu(\tilde{a}, \tilde{b})$  si, y sólo si  $\theta = \frac{p}{q} \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \eta\right)$ , para algún número racional  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , tal que  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Notemos que

$$\theta = \frac{p}{q} \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \eta\right) \quad \text{si, y sólo si} \quad \theta = \frac{p}{q} \left(\frac{b\lambda + \mu}{a\lambda + \eta}\right) \eta \quad \text{si, y sólo si} \quad \frac{q\theta}{p\eta} = \frac{b\lambda + \mu}{a\lambda + \eta}.$$

Denotemos por  $A := \frac{q\theta}{p\eta}$ . Simplificando la ecuación anterior, obtenemos que

$$\theta = \frac{p}{q} \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \eta\right) \quad \text{si, y sólo si} \quad \lambda(aA - b) + \eta A = \mu.$$

Denotemos por  $C := aA - b$  y  $B := \eta A = \frac{q}{p}\theta$ . Concluimos que

$$\theta \in \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \eta\right) \mathbb{Q} \quad \text{si, y sólo si} \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{R}_{>0}^2, \quad \mathcal{L} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = Cx + B\}.$$

Necesitamos garantizar una cosa más; a saber, que

$$(4.17) \quad \kappa_q(F \circ \pi_{\lambda, \mu}) < \kappa(F), \quad \text{para todo punto } q \in \pi_{\lambda, \mu}^{-1}(\{p\}) \setminus \{\tilde{p}\},$$

Y una forma de lograrlo es, como antes, hallando una pareja de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i < j$ , tal que

$$\alpha_i + \lambda\beta_i + \mu\gamma_i = \alpha_j + \lambda\beta_j + \mu\gamma_j.$$

Equivalentemente,

$$\mu = B_{ij}\lambda + \theta.$$

Por tanto, la desigualdad (4.17) ocurre si

$$(\lambda, \mu) \in \tilde{\mathcal{L}}, \quad \tilde{\mathcal{L}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = B_{ij}x + \theta\}.$$

De esta manera, se infiere que si el conjunto  $\mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{L}} \cap \mathbb{R}_{>0}^2$  es no vacío, garantizaríamos el resultado deseado. Pero,

$$\mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{L}} \neq \emptyset \quad \text{si, y sólo si} \quad \det \begin{pmatrix} C & -1 \\ B_{ij} & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sin embargo, para cada pareja de índices  $i, j$ , esta última condición numérica es abierta en  $\mathbb{Q}$ . Entonces, el par  $(\lambda, \mu)$  está dado por

$$(4.18) \quad (\lambda, \mu) = \left( \frac{B - \theta}{B_{ij} - C}, \frac{BB_{ij} - C\theta}{B_{ij} - C} \right).$$

Por tanto, el par  $(\lambda, \mu)$  será una solución a nuestro problema si  $\lambda, \mu > 0$ . Sustituyendo los valores de  $B = \frac{q}{p}\theta$  y  $C = aA - b$  en (4.18), tenemos que,

$$\lambda = \frac{\left(\frac{q-p}{p}\right)\theta}{B_{ij} + b - aA},$$

y recordando que  $A = \frac{q}{p}\frac{\theta}{\eta}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left(\frac{q-p}{p}\right)\theta}{B_{ij} + b - \frac{q}{p}\frac{\theta}{\eta}a} \\ &= \frac{q-p}{p(B_{ij} + b) - q\left(\frac{\theta}{\eta}a\right)}\theta. \end{aligned}$$

Denotemos por  $\beta := B_{ij} + b$  y  $\alpha := \frac{\theta}{\eta}a$ , así,

$$(4.19) \quad \lambda = \frac{p-q}{q\alpha - p\beta}\theta.$$

Más aún, puesto que  $\mu = \theta + B_{ij}\lambda$ , reemplazando el valor de  $\lambda$  dado en (4.19), se sigue que

$$\begin{aligned} \mu &= \theta + B_{ij}\frac{p-q}{q\alpha - p\beta}\theta \\ &= \frac{q(\alpha - B_{ij}) - pb}{q\alpha - p\beta}\theta. \end{aligned}$$

Denotemos por  $\tilde{\alpha} := \alpha - B_{ij}$  y observemos entonces que

$$(4.20) \quad \mu = \frac{q\tilde{\alpha} - pb}{q\alpha - p\beta}\theta.$$

Por tanto, de las expresiones obtenidas en (4.19) y (4.20), concluimos que:

$$(4.21) \quad \lambda > 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad \frac{p-q}{q\alpha - p\beta} > 0,$$

$$(4.22) \quad \mu > 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad \frac{q\tilde{\alpha} - pb}{q\alpha - p\beta} > 0.$$

Ahora, de la afirmación 4.1, se sigue que existe un par de índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i < j$ , tal que  $\alpha \neq \beta$ . Para concluir la demostración debemos mostrar que existe un par de números enteros positivos  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$  que realiza lo dicho en (4.21) y (4.22). Hay dos posibles casos:

( $\beta < \alpha$ ) Observemos que  $\beta < \alpha$  si, y sólo si  $0 < b < \tilde{\alpha}$ . Además, (4.21) y (4.22) se siguen de:

$$(4.23) \quad \lambda, \mu > 0 \quad \text{si} \quad \frac{q}{p} < 1, \quad b < \frac{q}{p}\tilde{\alpha}, \quad \beta < \frac{q}{p}\alpha.$$

( $\alpha < \beta$ ) Similarmente al caso previo, notamos que (4.21) y (4.22) son consecuencia de

$$(4.24) \quad \lambda, \mu > 0 \quad \text{si} \quad \frac{p}{q} < 1, \quad \alpha < \frac{p}{q}\beta, \quad \tilde{\alpha} < \frac{p}{q}b.$$

Finalmente, gracias a la densidad de los números racionales en los números reales, sabemos que siempre existen números racionales positivos que satisfacen (4.23), o (4.24), según sea el caso.

Esto completa la demostración del lema 4.5. □

### A. Espacios localmente anillados

En el capítulo 1 introducimos las variedades analíticas con frontera y esquinas, así como las variedades generalizadas, apoyándonos en el lenguaje de espacios localmente anillados. En la presente sección damos un breve recuento de la terminología y definiciones esenciales que hemos usado. Recomendamos al lector consultar los textos [16] y [4], donde encontrará los conceptos básicos sobre teoría de categorías y álgebra conmutativa, respectivamente, que son necesarios para seguir el material expuesto a continuación<sup>1</sup>.

Dado  $(X, \tau_X)$  un espacio topológico, podemos considerar la categoría pequeña que define la topología  $\tau_X$ , que denotamos igualmente por  $\tau_X$ , y cuya colección de objetos es  $\tau_X$  y los únicos morfismos son las inclusiones de elementos en  $\tau_X$ .

DEFINICIÓN A.1. Sea  $(X, \tau_X)$  un espacio topológico. Un *prehaz de grupos conmutativos*<sup>2</sup>  $\mathfrak{F}$  sobre  $X$  es un funtor contravariante de la categoría  $\tau_X$  en la categoría  $\text{Ab}$  de grupos abelianos,  $\mathfrak{F}: \tau_X \rightarrow \text{Ab}$ . Es decir, para cada abierto  $U \in \tau_X$ , asignamos un grupo abeliano:

$$U \mapsto \mathfrak{F}(U) \in \text{Ab},$$

tal que si  $U, V \in \tau_X$  son tales que  $V \subset U$ , entonces existe un morfismo de grupos abelianos:

$$\rho_V^U: \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V),$$

llamado *morfismo de restricción*, satisfaciendo las condiciones:

$$\rho_U^U = \text{id}_{\mathfrak{F}(U)}, \quad \text{para cada } U \in \tau_X,$$

y

$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U, \quad \text{para cualesquiera } U, V, W \in \tau_X, \text{ tales que } W \subset V \subset U.$$

A los elementos de  $\mathfrak{F}(U)$  les llamamos *secciones* sobre  $U$ , para cada abierto  $U \in \tau_X$ , y a los elementos de  $\mathfrak{F}(X)$  los llamamos *secciones globales*.

Ahora, si  $\mathfrak{F}$  es un prehaz sobre un espacio topológico  $(X, \tau_X)$ , y  $U \in \tau_X$  es un abierto en  $X$ , entonces definimos la *restricción* de  $\mathfrak{F}$  a  $U$  como el prehaz  $\mathfrak{F}|_U$  definido como sigue:

$$V \mapsto \mathfrak{F}|_U(V) := \mathfrak{F}(V), \quad \text{para todo } V \in \tau_X|_U,$$

donde  $\tau_X|_U$  denota la topología relativa de  $U$ .

<sup>1</sup>Basamos nuestra exposición en el texto [17].

<sup>2</sup>Similarmente se define un prehaz con valores en cualquier categoría.

DEFINICIÓN A.2. Sea  $\mathfrak{F}$  un prehaz de grupos abelianos sobre un espacio topológico  $(X, \tau_X)$ . Decimos que  $\mathfrak{F}$  es un *haz* (o bien, *prehaz completo*) si para cada abierto  $U \in \tau_X$ , dada cualquier cubierta abierta de  $U$  en  $X$ ,  $\{U_j : j \in J\} \subset \tau_X$  y cualquier familia de morfismos  $\{s_j : j \in J\}$ , tal que  $s_j \in \mathfrak{F}(U_j)$ , para toda  $j \in J$ , se satisface lo siguiente: para toda pareja de índices  $j, l \in J$ , si

$$s_j|_{\mathfrak{F}(U_j \cap U_l)} = s_l|_{\mathfrak{F}(U_j \cap U_l)},$$

entonces existe un único morfismo  $s \in \mathfrak{F}(U)$  tal que

$$s|_{\mathfrak{F}(U_j)} = s_j, \quad \text{para todo } j \in J.$$

Equivalentemente,  $\mathfrak{F}$  es un haz si, y sólo si para todo abierto  $U \in \tau_X$ , dada cualquier cubierta abierta de  $U$  en  $X$ ,  $\{U_j : j \in J\} \subset \tau_X$ , el diagrama compuesto por los productos de los morfismos de restricción:

$$\mathfrak{F}(U) \longrightarrow \prod_{j \in J} \mathfrak{F}(U_j) \rightrightarrows \prod_{j, l \in J} \mathfrak{F}(U_j \cap U_l),$$

es exacto.

Sean  $\mathfrak{F}$  un prehaz sobre  $(X, \tau_X)$  y  $x \in X$  un punto de  $X$ . Definimos el *tallo* de  $\mathfrak{F}$  en  $x$ , que denotamos por  $\mathfrak{F}_x$ , como el límite directo

$$\mathfrak{F}_x := \varinjlim \mathfrak{F}(U), \quad \text{tal que } x \in U.$$

Y a cada elemento  $s_x \in \mathfrak{F}_x$  le llamamos el *germen* de (la sección)  $s$  en  $x$ .

DEFINICIÓN A.3. Dados dos prehaces  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$  sobre el mismo espacio topológico  $(X, \tau_X)$ , un *morfismo de prehaces*,  $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ , es simplemente una transformación natural entre ellos. Es decir, el morfismo  $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$  es una colección de morfismos:

$$\{\varphi_U: \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{G}(U)\}_{U \in \tau_X},$$

tal que para cualesquiera dos abiertos  $U, V \in \tau_X$ , con  $V \subset U$ , el diagrama

$$(A.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathfrak{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho}_V^U \\ \mathfrak{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathfrak{G}(V) \end{array}$$

es conmutativo, donde  $\rho$  y  $\tilde{\rho}$  son los morfismos de restricción de  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{G}$ , respectivamente.

En caso de que  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{G}$  sean haces (prehaces completos) y  $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$  un morfismo entre ellos, entonces  $\varphi$  induce morfismos al nivel de tallos,  $\varphi_x: \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{G}_x$ . En efecto, si  $\psi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$  es un morfismo de prehaces tal que  $\varphi_x = \psi_x$ , para todo punto  $x \in X$ , necesariamente  $\varphi = \psi$ . Diremos que un morfismo de haces  $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$  es *inyectivo* (suprayectivo) si para cada punto  $x \in X$ , el morfismo  $\varphi_x$  es *inyectivo* (suprayectivo).

Introducimos ahora la noción de espacio localmente anillado.

DEFINICIÓN A.4. Un *espacio anillado* es una pareja  $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ , donde  $|X|$  es un espacio topológico, llamado el *espacio soporte* de  $X$ , y  $\mathcal{O}_X$  es un haz de anillos conmutativos sobre  $X$ , llamado el *haz estructural* de  $X$ .

Decimos además que  $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$  es un *espacio localmente anillado* si para todo punto  $x \in X$ ,  $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$  es un anillo local.

DEFINICIÓN A.5. Sean  $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ,  $Y = (|Y|, \mathcal{O}_Y)$  dos espacios localmente anillados. Un *morfismo de espacios localmente anillados* es una pareja  $\varphi = (|\varphi|, \varphi^*)$ , donde  $|\varphi|: |X| \rightarrow |Y|$  es una aplicación continua, y  $\varphi^*: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$  es el morfismo de haces inducido por  $|\varphi|$ ; es decir,  $\varphi_*\mathcal{O}_X$  es el haz<sup>3</sup> sobre  $|Y|$  definido como sigue:

$$U \mapsto \varphi_*\mathcal{O}_X(U) := \mathcal{O}_X(|\varphi|^{-1}(U)), \quad \text{para cada abierto } U \in \tau_{|Y|}.$$

Y, para cada punto  $x \in X$ , el morfismo de anillos:

$$\varphi_x^*: (\mathcal{O}_{Y,|\varphi|(x)}, \mathfrak{m}_{Y,|\varphi|(x)}) \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_{X,x}),$$

local; es decir,  $(\varphi_x^*)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) = \mathfrak{m}_{Y,|\varphi|(x)}$ .

Concluimos nuestro resumen dando la definición de una variedad diferenciable (suave), en términos del lenguaje recién introducido. Como notará el lector, uno puede definir similarmente cualquier variedad topológica con alguna estructura, ya sea  $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ , analítica real, etcétera.

DEFINICIÓN A.6. Sea  $(|M|, \tau_{|M|})$  un espacio topológico, Hausdorff y segundo numerable, y sea  $\mathcal{O}_M$  un haz de anillos conmutativos sobre  $|M|$  tal que la pareja  $M(|M|, \mathcal{O}_M)$  es un espacio localmente anillado. Decimos que  $M$  es una *variedad diferenciable real de dimensión  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$*  si es *localmente isomorfo* al espacio localmente anillado  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}^\infty)$ , donde  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}^\infty$  denota al haz de funciones suaves sobre  $\mathbb{R}^m$ . Es decir, para cualquier abierto  $U \in \tau_X$  existe un isomorfismo de espacios localmente anillados,  $(U, \mathcal{O}_X|_U) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}^\infty)$ .

## B. Representación lineal de carcajes

La exposición que presentamos a continuación está basada en los textos [3, 9], e incluimos tan sólo las definiciones y conceptos que dan soporte a lo expuesto en el capítulo 2.

DEFINICIÓN B.1. Un *carcaj* es una tétroda  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathfrak{p}, \mathfrak{o})$  que consiste de dos conjuntos finitos;  $\mathcal{C}_0$ , cuyos elementos son llamados *vértices*, y  $\mathcal{C}_1$ , cuyos elementos son llamados *flechas*, junto con dos aplicaciones;  $\mathfrak{p}: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$ ,  $\mathfrak{s}: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$  que asignan a cada flecha  $\alpha \in \mathcal{C}_1$  su *procedencia*,  $\mathfrak{p}(\alpha) \in \mathcal{C}_0$ , y su *objetivo*,  $\mathfrak{o}(\alpha) \in \mathcal{C}_0$ , respectivamente. Además, incluimos la propiedad de que la gráfica<sup>4</sup> subyacente  $\bar{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  sea conexa.

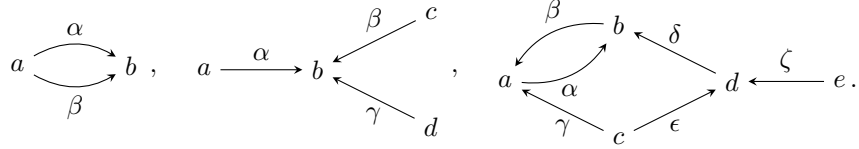
A una flecha  $\alpha \in \mathcal{C}_1$  con procedencia  $\mathfrak{p}(\alpha) = a$  y objetivo  $\mathfrak{o}(\alpha) = b$ , la denotaremos por  $\alpha: a \rightarrow b$ , o bien, por  $a \xrightarrow{\alpha} b$ .

Hacemos notar que un carcaj es un sinónimo de *digráfica* conexa. Sin embargo, como se menciona en [3], una de las razones por la que se prefiere el término de carcaj en vez del de digráfica es por que el segundo es empleado en muy diversos contextos y sentidos; algunas de las veces se acota el estudio de digráficas a aquéllas sin fechas (aristas) múltiples, o bien, sin lazos.

<sup>3</sup>A tal haz se le conoce como *haz imagen directa* de  $|\varphi|$ .

<sup>4</sup>Recomendamos al lector consultar el texto [6], donde se presenta una vasta introducción a la teoría de gráficas y digráficas.

EJEMPLO B.1. Algunos ejemplos de carcajes, que representamos gráficamente, son:



DEFINICIÓN B.2. Sea  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathbf{p}, \mathbf{o})$  un carcaj y consideremos cualesquiera dos vértices  $a, b \in \mathcal{C}_0$ . Una *trayectoria* de longitud  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$  con procedencia a y objetivo b es una sucesión de vértices y flechas:

$$(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b),$$

que escribiremos brevemente por  $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$ , donde  $\alpha_j: a_{j-1} \rightarrow a_j \in \mathcal{C}_1$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $a = a_0$  y  $b = a_l$ . Es decir,

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{p}(\alpha_1), \\ \mathbf{o}(\alpha_j) &= \mathbf{p}(\alpha_{j+1}) = a_{j-1} \in \mathcal{C}_0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, l-1\}, \\ \mathbf{o}(\alpha_l) &= b. \end{aligned}$$

Que visualizamos como sigue

$$(B.1) \quad a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b.$$

Al conjunto de todas las trayectorias de longitud  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$  lo denotamos por  $\mathcal{C}_l$ . Además, a cada vértice  $a \in \mathcal{C}_0$  le asociamos su *trayectoria trivial* (o *estacionaria*) de longitud cero,  $\tau_a := (a | a)$ . En consecuencia, las trayectorias de longitud cero y longitud uno están en correspondencia biunívoca con el conjunto de vértices  $\mathcal{C}_0$  y el conjunto de flechas  $\mathcal{C}_1$ , respectivamente.

Diremos que una trayectoria de longitud  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$ , es un *ciclo* si sus extremos coinciden; es decir, si  $\mathbf{p}(\alpha_1) = \mathbf{o}(\alpha_l)$ . A los ciclos de longitud uno los llamaremos *lazos*; si un carcaj  $\mathcal{C}$  no contiene ciclos, diremos que  $\mathcal{C}$  es un carcaj *acíclico*.

DEFINICIÓN B.3. Sean  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathbf{p}, \mathbf{o})$  un carcaj y  $\mathbb{K}$  un campo arbitrario. Una  $\mathbb{K}$ -representación lineal (o en breve, una *representación*) del carcaj  $\mathcal{C}$  es una pareja

$$V = (\{V_a\}_{a \in \mathcal{C}_0}, \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}_1}),$$

que consta de

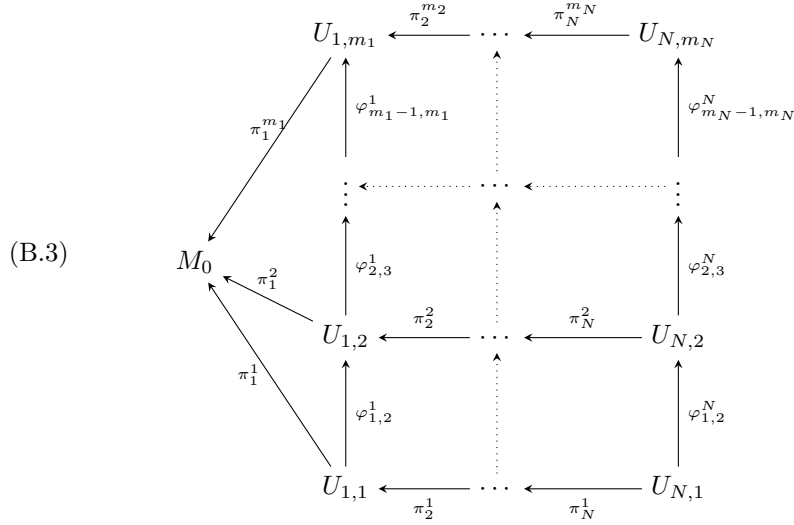
- (A) Una familia de  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales,  $V_a \in \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ , uno por cada vértice  $a \in \mathcal{C}_0$ .
- (B) Una familia de  $\mathbb{K}$ -transformaciones lineales,  $\varphi_\alpha: V_a \rightarrow V_b$ , una por cada flecha  $\alpha: a \rightarrow b \in \mathcal{C}_1$ .

Diremos que  $V = (\{V_a\}_{a \in \mathcal{C}_0}, \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}_1})$  es una *representación finito-dimensional* si  $V_a$  es un espacio vectorial de dimensión finita, para cada vértice  $a \in \mathcal{C}_0$ .

EJEMPLO B.2. Consideremos una sucesión finita de morfismos de explosión combinatorios (cf., sección 2.1 del capítulo 2),

$$(B.2) \quad M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_N} M_N,$$

donde  $N \in \mathbb{Z}_{>0}$  es un número entero positivo y  $\mathbf{M}_0 := (G\mathbb{R}_{\geq 0}^m, 0)$  es el germen de una variedad generalizada ( $m$  dimensional) en torno a un punto esquina. Por lo discutido en la sección 2.1 del capítulo 2, sabemos que la sucesión de morfismos (B.2) queda determinada por el carcaj:



Recordemos que, para cada  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ , el morfismo  $\pi_l: M_l \rightarrow M_{l-1}$  está determinado por las expresiones locales  $\pi_l^j: U_{l,j} \rightarrow M_{l-1}$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, m_l\}$ . Mientras que los morfismos  $\varphi_{i,j}^l: U_{l,i} \rightarrow U_{l,j}$  son las transformaciones de transición determinadas por la estructura analítica generalizada  $\mathcal{U}_{M_l}$ , para cada  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ , y cualesquiera índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, m_l\}$ .

Luego, aplicando el functor  $L$  (ver teorema 2.1) a cada vértice y cada flecha que aparece en el carcaj (B.3), obtenemos que

- (A) A cada vértice le asignamos el espacio vectorial euclidiano de dimensión  $m$ ; a saber,  $L(M_0) = L(U_{j,k}) = \mathbb{R}^m$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , y cada  $k \in \{1, 2, \dots, m_j\}$ .
- (B) Y cada flecha en (B.3), le asignamos la transformación lineal determinada por el mismo functor  $L$ .

Por tanto, el functor  $L$  brinda una representación lineal (finito-dimensional) del carcaj (B.3).

**OBSERVACIÓN B.1.** Formalmente, la representación obtenida en este caso, incluye un paso más. A saber, uno debería considerar la categoría opuesta de  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}, \mathcal{N}_{\mathbb{R}}^{op}$ . Así, los puntos (A) y (B) garantizan que el functor  $L$  determina una representación lineal del carcaj (B.3), acorde a la definición B.3.



## Bibliografía

1. V.I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 250, Springer-Verlag New York, 1988 (English).
2. José Manuel Aroca, Heisuke Hironaka, and José Luis Vicente, *Complex analytic desingularization.*, Tokyo: Springer, 2018 (English).
3. Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson, *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 1, Cambridge University Press, 2006.
4. M.F. Atiyah and I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
5. Edward Bierstone and Pierre Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **67** (1988), 5–42 (en). MR 89k:32011
6. J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer-Verlag London, 2008.
7. F. Cano and D. Cerveau, *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*, Acta Math. **169** (1992), 1–103.
8. Felipe Cano, *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*, Annals of Mathematics **160** (2004), no. 3, 907–1011.
9. Claude Cibils, Francisco Larrión, and Leonardo Salmerón, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, IM–UNAM, México, 1982.
10. S.D. Cutkosky, *Resolution of singularities*, Graduate Studies in Mathematics, Providence, RI, vol. 63, American Mathematical Society, 2004.
11. Lou van den Dries and Patrick Speissegger, *The real field with convergent generalized power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 11, 4377–4421. MR 1458313
12. Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I*, Annals of Mathematics **79** (1964), no. 1, 109–203.
13. ———, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: II*, Annals of Mathematics **79** (1964), no. 2, 205–326.
14. ———, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Quaderni dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio nazionale delle ricerche, Istituto matematico "L. Tonelli" dell'Università di Pisa, 1973.
15. János Kollár, *Lectures on resolution of singularities*, Annals of Mathematical Studies, vol. 166, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.
16. Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag New York, 1978.
17. I.G. Macdonald, *Algebraic geometry: Introduction to schemes*, Mathematics Lecture Note Series, New York, W. A. Benjamin, Inc., 1968.
18. Rafael Martín-Villaverde, Jean-Philippe Rolin, and Fernando Sanz-Sánchez, *Local monomialization of generalized analytic functions*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **107** (2013), no. 1, 189–211. MR 3031269
19. Daniel Panazzolo, *Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three*, Acta Math. **197** (2006), no. 2, 167–289.
20. J.-P. Rolin and T. Servi, *Quantifier elimination and rectilinearization theorem for generalized quasianalytic algebras*, Proceedings of the London Mathematical Society **110** (2015), no. 5, 1207–1247.
21. A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation  $ady = bdx$* , American Journal of Mathematics **90** (1968), no. 1, 248–269.

22. Tamara Servi, *Multivariable newton-puiseux theorem for generalised quasianalytic classes*, *Annales de l'Institut Fourier* **65** (2015), no. 1, 349–368 (en).
23. Oscar Zariski, *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, *Annals of Mathematics* **40** (1939), no. 3, 639–689.

## Índice alfabético

- carcaj, 17, 55
  - representación lineal de, 15
- carcaj: flecha, 55
- carcaj: vértice, 55
- centro
  - permisible, 41
- centro admisible, 9
  - de codimensión dos, 9
  - estándar, 9, 27, 28
- componentes de frontera, 6
- curva adaptada a la frontera, 7
  
- d-equivalencia, 34
- divisor excepcional, 9
- dominio no propicio, 47
  
- espacio anillado, 54
  - haz estructural, 54
  - localmente isomorfo, 55
  - soporte, 54
- espacio localmente anillado, 5, 54
- estabilidad vertical, 42
- estandarización, 6
  - en torno a una curva compacta, 27
- estratificación, 6
  - natural, 7
- estrato, 7
- estructura
  - analítica generalizada, 5, 17
  - en torno a una curva compacta, 32, 33
  - analítica real, 5
  - en torno a una curva compacta, 33
  
- función analítica, 4
  - generalizada, 1, 4
  - combinatoriamente monomial, 42
- G-equivalencia, 35
  
- haz, 54
  - imagen directa, 55
- huella analítica, 32, 45
  
- mismo signo, 34, 45
- monomialización
  - combinatoria, 37
    - bidimensional, 37, 38
    - tridimensional, 41, 42
- morfismo
  - de espacios localmente anillados, 55
  - de explosión, 9
    - centrado en el origen de  $\mathbb{R}^2$ , 15
    - centrado en el origen de  $G\mathbb{R}_{>0}^2$ , 10
    - centrado en el origen de  $G\mathbb{R}_{>0}^3$ , 11
    - centrado en un eje coordenado, 11
  - combinatorio, 13, 27
  - sucesión finita de, 13, 15, 29
  - usual, 9
  - de prehaces, 54
  - de restricción, 53
  - de tipo monomial, 7, 18
  
- notación multiíndice, 1
  
- orden de división, 2
  
- polígono de Newton, 37, 40
- poliedro de Newton, 2, 41
  - conjunto de vértices, 2
- prehaz, 53
  - completo, 54
  - restrcción, 53
  - sección, 53
    - germen, 54
    - global, 53
  - tallo, 54
- punto esquina, 7
  
- representación monomial, 2
  
- serie de potencias
  - de tipo monomial, 2
  - generalizada, 1
    - formal, 2
    - convergente, 3, 4
  - mixta, 2
  - usual, 1
- soporte, 2
  - mínimo, 2

- variable
  - analítica, 2
  - generalizada, 2
- variedad
  - analítica
    - enriquecido de, 5
  - estándar, 5
  - generalizada, 5
  - estandarizable, 6
  - germen de, 9