

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE ALGUNAS CLASES MINIMALES DE GRUPOS FINITOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

JUAN MORALES RODRIGUEZ

Noviembre 1984.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTRODUCCIÓN.

En 1978, M.G. Bianchi [1] clasificó los grupos finitos no cíclicos en los cuales cada subgrupo normal propio es cíclico. A sugerencia del Prof. Guido Zappa me puse el problema de determinar los grupos finitos no abelianos generados por más de dos elementos y en los cuales cada subgrupo normal propio es generado por a lo más dos elementos. Al considerar el caso de los grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos, teniendo cada uno de ellos una base formada por a lo más dos elementos, me di cuenta que se podía llegar fácilmente a la caracterización de los grupos finitos solubles no abelianos en los cuales cada subgrupo normal propio es abeliano. Estos resultados se presentan en la Sección I de este trabajo. En el caso no soluble logré caracterizar los grupos no simples que tienen todos sus subgrupos normales propios abelianos, con una base formada por a lo más dos elementos; estos resultados se presentan en la Sección VI. Posteriormente me propuse caracterizar los grupos finitos solubles no nilpotentes con todos sus subgrupos normales propios nilpotentes. Los resultados que obtuve en este sentido se relacionan con los de Moreno-Miller [6] y Redei [7] que estudian los grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos propios abelianos y los de SCHMIDT [10], IWASAWA [5] y Redei [8] que estudian los grupos finitos no nilpotentes con todos sus subgrupos propios nilpotentes. Como una consecuencia de estos resultados obtenidos se caracterizan fácilmente los grupos finitos

no simples no abelianos que tienen todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios abelianos, así como los grupos finitos no simples no nilpotentes que tienen todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios nilpotentes. Estos resultados aparecen respectivamente en las Secciones II y IV.

En 1966, K. Doerk [2] estudió los grupos finitos no supersolubles con todos sus subgrupos propios supersolubles, así que me propuse caracterizar los grupos finitos no supersolubles con todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios supersolubles, logrando una caracterización en el caso que tales grupos tengan solo un subgrupo normal maximal. Este resultado está en la Sección V.

Agradezco de manera muy especial a mi querido maestro Guido Zappa por su gran ayuda y paciencia en la elaboración de este trabajo, asimismo agradezco al Profesor Alessandro Scarselli, que tanto me animó y ayudó al inicio del mismo y al Profesor Francisco Tomás por su paciencia y valiosa ayuda en la revisión de este trabajo.

Agradezco también a la UNAM por los diversos apoyos que me brindó desde la iniciación hasta la culminación de este trabajo, al Istituto Matematico ULISSE DINI en donde desarrollé parte del mismo, así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Consiglio Nazionale delle Ricerche por su apoyo.

Quiero recordar a mi esposa Beatriz, a mis hijos Karla Beatriz, Rocío y Juan, a mis padres Juan y María de la Luz, a mis hermanos María Luisa, Silvia, María de los Angeles, José Carlos y Fernando, así como a mis tías Chuyita, Techa y Regina que con su ejemplo, cariño y amor siempre me han impulsado y ayudado a salir adelante.

Recuerdo también a mis maestros y a mis amigos, que han seguido con interés todos mis estudios.

Un recuerdo especial para los Profesores Independientes de la Facultad de Ciencias de la UNAM que con su valor, entusiasmo e interés por la actividad académica seguramente lograrán impulsar en forma definitiva la matemática en México.

Juan Morales Rodríguez

Noviembre 1984.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	i
NOTACIONES	v
DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES	vii
SECCIÓN I	1
Grupos finitos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos.	
SECCIÓN II	14
Grupos finitos no simples no abelianos con todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios abelianos.	
SECCIÓN III	19
Grupos finitos solubles no nilpotentes con todos sus subgrupos normales propios nilpotentes.	
SECCIÓN IV	22
Grupos finitos no simples no nilpotentes con todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios nilpotentes.	
SECCIÓN V	25
Grupos finitos no simples no supersolubles con todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios supersolubles.	
SECCIÓN VI	29
Grupos finitos no solubles no simples con todos sus subgrupos normales propios abelianos.	
BIBLIOGRAFÍA	36

NOTACIÓN

En el presente trabajo solo se consideran grupos finitos y se utiliza la notación usual y en particular la siguiente:

G	grupo finito
a^x	$x^{-1} a x$ con $a, x \in G$
$[a, b]$	$a^{-1} b^{-1} ab$ con $a, b \in G$
$\langle X \rangle$	subgrupo de G generado por el subconjunto X de G
$[A, B]$	$\langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$
$ G $	orden de G
$H < G$	H es un subgrupo de G
$H <_{\neq} G$	H es un subgrupo propio de G
$H <_{\max} G$	H es un subgrupo maximal de G
$H \triangleleft G$	H es un subgrupo normal de G
$N \text{ car } G$	H es un subgrupo característico de G
M_p	la p -componente primaria del grupo abeliano M , p -primo
H^p	subgrupo generado por las h^p , $h \in H$, p primo
$[G : H]$	Indice del subgrupo H en el grupo G
$H \cong G$	H es isomorfo a G
$C_G(H)$	centralizador de H en G
$N_G(H)$	normalizador de H en G
$Z(G)$	centro de G
$\phi(G)$	subgrupo de Frattini de G , que es la intersección de los subgrupos maximales de G

G'	Subgrupo derivado de G o Subgrupo conmutador de G
$F(G)$	Subgrupo de Fitting de G , que es el subgrupo genera <u>do</u> por los subgrupos normales nilpotentes de G
$\mathbb{Z}_p$	Campo finito con p elementos
A_4	Grupo alternante de grado 4
G/H	Grupo cociente de las clases laterales del subgrupo normal H en el grupo G
$G_1 \times G_2$	Producto directo de los grupos G_1 y G_2
$\text{Aut}(G)$	Grupo de automorfismo del grupo G
$\text{GL}(2,p)$	Grupo General Lineal de las matrices invertibles de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$
$\text{SL}(2,p)$	Grupo Lineal Especial de las matrices de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ de determinante 1.

DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES.

Se recuerda que en este trabajo solo se consideran grupos finitos.

Un grupo G es abeliano elemental si $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, s factores para algún primo p .

Teorema. Si G es un p -grupo, p primo, $N \triangleleft G$ y G/N es abeliano elemental, entonces $\phi(G) \leq N$.

Si p es un primo, un grupo G es un p' -grupo si su orden no es divisible por p .

$T < G$ centraliza a $R < G$ si $t^{-1}rt = r$ para toda $t \in T$ y para toda $r \in R$.

$H \triangleleft G$ es un subgrupo normal minimal de G si $H \neq \langle 1 \rangle$ y no existe $\langle 1 \rangle \neq N \leq H$ con $N \triangleleft G$.

Teorema. Si H es un subgrupo normal minimal de G , entonces H es un grupo abeliano elemental o H es producto directo de grupos simples no abelianos isomorfos.

$H \triangleleft G$ es un subgrupo normal maximal de G si no existe $N \triangleleft G$ tal que $H < N$.

$H < G$ se llama característico si $\varphi(H) \leq H$ para todo automorfismo φ de G .

Un grupo que no tiene subgrupos propios característicos se llama característicamente simple.

Teorema. Un grupo característicamente simple es producto directo de grupos simples isomorfos.

Un grupo G tiene una cadena normal si existen $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ subgrupos normales de G tales que $G > A_1 > A_2 > \dots > A_n > \dots$

Una serie principal de G es una cadena normal $G = A_0 > A_1 > \dots > A_s = \langle 1 \rangle$ tal que no existe N normal en G con $A_{i-1} \leq N \leq A_i$ $i = 0, 1, \dots, (n-1)$.

Un grupo G es soluble si tiene una cadena normal $G = A_0 > A_1 > \dots > A_s = \langle 1 \rangle$ tal que A_i/A_{i+1} es abeliano $i = 0, 1, 2, \dots, (s-1)$.

Teorema. Si G es un grupo soluble y $H < G$, entonces H es soluble.

Teorema. Si G es soluble y $H \triangleleft G$, entonces G/H es soluble.

Teorema. Si $H \triangleleft G$ con K y G/K solubles, entonces G es soluble.

Teorema. Si G_1 y G_2 son grupos solubles, entonces $G_1 \times G_2$ es solubles.

$H < G$ es un subgrupo de Hall de G si $(|H|, [G:H]) = 1$.

Teorema (P. Hall) Si G es un grupo soluble y $|G| = mn$ con $(m, n) = 1$, entonces G tiene un subgrupo de orden m y si R es otro subgrupo de G de orden m , entonces R y T son conjugados.

Un grupo G es supersoluble si tiene una serie normal $G = A_0 > A_1 > \dots > A_s = \langle 1 \rangle$ tal que A_i/A_{i+1} es cíclico $i = 0, 1, \dots, (s-1)$.

Teorema. Si G es un grupo supersoluble y $H < G$, entonces H es supersoluble.

Teorema. Si G es un grupo supersoluble y $H \triangleleft G$, entonces G/H es supersoluble.

Teorema. Si G_1 y G_2 son grupos supersolubles, entonces $G_1 \times G_2$ es supersoluble.

Teorema. Si M es un subgrupo normal y cíclico de G con M y G/M supersolubles, entonces G es supersoluble.

Teorema. Si $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$ con G/H y G/K supersolubles, entonces $G/H \cap K$ es supersoluble.

Teorema. Si M es un subgrupo normal minimal de G y G es supersoluble, entonces $|M| = \text{primo}$.

Teorema. Si G es supersoluble y $|G| = p_1 p_2 \dots p_s$ con $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_s$, p_i primo $i = 1, 2, \dots, s$, entonces G tiene una cadena normal $G = A_s > A_{s-1} > \dots > A_1 = \langle 1 \rangle$ tal que A_{i+1}/A_i es de orden p_i , $i = 1, 2, \dots, (s-1)$.

Teorema. Si G es supersoluble y $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_s$, p_i primos $i = 1, 2, \dots, s$, entonces G tiene un subgrupo normal de orden $p_1^{\alpha_1}$.

Teorema. Si G es un p -grupo, entonces G es supersoluble.

- x -

Un grupo G es nilpotente si es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Teorema. Los grupos nilpotentes son supersolubles.

Teorema. Si G es nilpotente y $H < G$, entonces H es nilpotente.

Teorema. Si $G = N_1 N_2$ con $N_1 \triangleleft G$, $N_2 \triangleleft G$ y N_1 y N_2 son nilpotentes, entonces G es nilpotente.

Teorema. Si G es supersoluble, entonces G' es nilpotente.

Todos estos resultados así como aquellos que no están enunciados aquí pero se utilizan en el presente trabajo, pueden consultarse en [9] o en [11].

SECCIÓN I

GRUPOS FINITOS SOLUBLES NO ABELIANOS CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS ABELIANOS

En esta sección se caracterizan los grupos finitos solubles no abelianos tales que sus subgrupos normales propios son abelianos. Se distinguen dos casos según tales grupos tengan uno o dos subgrupos normales maximales.

Teorema 1. Sea G un grupo finito soluble. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- a)
 - a.1 G no es abeliano.
 - a.2 cada subgrupo normal propio de G es abeliano.
 - a.3 G tiene al menos dos subgrupos normales maximales.
- b)
 - b.1 G es un p -grupo.
 - b.2 $G/Z(G)$ es abeliano elemental de orden p^2
 - b.3 el subgrupo de Frattini de G ($\phi(G)$), coincide con el centro de G ($Z(G)$).

Demostración. a) implica b):

Sean M y N subgrupos normales maximales distintos de G , entonces:

(1) $G/M \cap N$ es abeliano.

En efecto G/M y G/N son simples y solubles por lo tanto son cíclicos de orden primo y en consecuencia son abelianos, lo que implica que $G' \subset M$ y $G' \subset N$ por lo tanto $G' \subset M \cap N$ y $G/M \cap N$ es abeliano.

(2) $G/M \cap N$ es abeliano de orden pq (p, q primos).

Se tiene que $[G:M] = p$ y $[G:N] = q$ (p, q primos), además $[G:M \cap N] = [G:M][M:M \cap N]$ y como $\frac{M}{M \cap N} \simeq \frac{MN}{N} = \frac{G}{N}$ ya que M y N son subgrupos normales maximales distintos, por lo tanto $[G:M \cap N] = [G:M][G:N] = pq$.

(3) $\langle 1 \rangle \neq M \cap N \subset Z(G)$.

En efecto $M \subset C_G(M \cap N)$ ya que $M \supset (M \cap N)$ y M es abeliano porque es un subgrupo normal de G . Análogamente $N \subset C_G(M \cap N)$ y por lo tanto $G = MN \subset C_G(M \cap N)$, esto es $x^{-1}tx = t$ para toda $t \in M \cap N$ y para toda $x \in G$, entonces $M \cap N \subset Z(G)$. $\langle 1 \rangle \neq M \cap N$ por a.1 y (2).

(4) $G/M \cap N$ es abeliano elemental de orden p^2 .

En (2) hemos visto que $G/M \cap N$ es abeliano de orden pq con p y q primos. Si q fuera diferente de p , entonces $G/M \cap N$

sería cíclico y como $M \cap N \subset Z(G)$, G resultaría abeliano lo que es una contradicción. Por lo tanto $p = q$ y $G/M \cap N$ es de orden p^2 ; como los únicos grupos de orden p^2 son $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_{p^2}$, entonces $G/M \cap N$ es necesariamente isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ya que de otra forma por lo visto anteriormente G resultaría abeliano.

(5) G es un p -grupo.

Como $|G| = [G:M \cap N] |M \cap N|$ y $[G:M \cap N] = p^2$, basta probar que $M \cap N$ es de orden una potencia de p . Supongamos que $q \mid |M \cap N|$ con q primo $q \neq p$, como $\langle 1 \rangle \neq M \cap N < Z(G)$ se tiene que $M \cap N = (M \cap N)_{p'} \times (M \cap N)_p$; $H = (M \cap N)_{p'}$ es de índice una potencia de p en G ($[G:H] = [G:M \cap N] [(M \cap N):H]$), y su orden es primo con p , por lo tanto es un p' -subgrupo de Hall de G . Sea K un p -subgrupo de Sylow de G . Se tiene que $G = HK$. Como $H < Z(G)$ entonces tanto H como K son subgrupos normales propios de G y por lo con siguiente abelianos, de donde sigue que $G = HK = H \times K$ es abeliano, lo que es un absurdo. Por lo tanto $M \cap N$ es de orden una potencia de p y G es un p -grupo.

(6) $M \cap N = Z(G)$.

En efecto, ya que G es un p -grupo no abeliano $[G:Z(G)] = p^s$ $s \geq 2$; además como $M \cap N < Z(G)$ se tiene que $p^2 = [G:(M \cap N)] = [G:Z(G)][Z(G):(M \cap N)]$ lo que implica que $[G:Z(G)] = p^2$ y que $Z(G) = M \cap N$.

(7) $G/Z(G)$ es abeliano elemental de orden p^2 .

Sigue de (6) y (4).

(8) $Z(G) \subset \phi(G)$.

Como G es un p -grupo, cada subgrupo maximal de G es normal. Pero de (6) resulta que si M y N son subgrupos maximales diferentes de G , entonces $M \cap N = Z(G)$, por lo tanto cada subgrupo maximal de G contiene a $Z(G)$, esto es $Z(G) \subset \phi(G)$.

(9) $\phi(G) \subset Z(G)$.

Sigue del hecho que $G/Z(G)$ es abeliano elemental.

(10) $Z(G) = \phi(G)$.

En (8) y (9) se demostró que $Z(G) \subset \phi(G)$ y que $\phi(G) \subset Z(G)$. De (5), (7) y (10) sigue que a) implica b).

b) implica a)

De b.2 se sigue que G no es abeliano. Además G tiene al menos dos subgrupos maximales ya que de otra forma G resultaría cíclico. Siendo G un p -grupo, cada subgrupo maximal de G es normal por lo tanto G tiene al menos dos subgrupos normales maximales. Entonces para que valga a) es suficiente demostrar que cada subgrupo maximal es abeliano. Sea M un subgrupo maximal de G ; por b.3 se tiene que $Z(G) = \phi(G) \subset M$ y ya que $[G:M] = p$ por b.2, se tiene $|M/Z(G)| = p$ se donde sigue que M es abeliano. ■

Teorema 2. Si G es un grupo finito soluble, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)
 - a.1 G no es abeliano.
 - a.2 cada subgrupo normal propio de G es abeliano.
 - a.3 G tiene solo un subgrupo normal maximal.
- b)
 - b.1 G es producto semidirecto de un p' -grupo abeliano M (no trivial que coincide con G'), con un p -grupo cíclico H (p , primo)
 - b.2 $H^p < Z(G)$ y $N = M H^p = M \times H^p$ es el único subgrupo normal maximal de G .

Demostración: a) implica b):

Sea N el único subgrupo normal maximal de G , entonces:

- (1) $[G:N] = p$ primo.
- (2) G/G' es un p -grupo.

En efecto, ya que G/G' es abeliano, si existe un primo q tal que q divide al orden de G/G' , entonces G/G' tiene un subgrupo normal T/G' de índice q , y T es normal en G con $[G:T] = q$, por lo tanto T es normal maximal en G y por lo tanto $T = N$ y $p = q$.

- (3) G' es un p' -subgrupo de Hall de G (y por lo tanto, siendo normal es el único p' -subgrupo de Hall de G).

En efecto ya que G' es abeliano, G' tiene un solo p' -subgrupo de Hall M , el cual es característico en G' y por lo tanto normal en G . Como G/G' y G'/M son p -grupos, se tiene que G/M es un p -grupo y por lo tanto M es un p' -subgrupo de Hall de G . G/M es un p -grupo con un único subgrupo maximal ya que de otra forma G tendría al menos dos subgrupos normales maximales contra la hipótesis, por lo tanto G/M es cíclico y $G' \subset M$; pero $M \subset G'$ por lo tanto $G' = M$ y G' es el único p' -subgrupo de Hall de G .

(4) $G = G' H$, donde H es un p -subgrupo de Sylow de G .

(5) H es un p -grupo cíclico.

En efecto G/G' es cíclico y $G/G' = \frac{G' H}{G'} \simeq \frac{H}{G' \cap H} = H$ por lo tanto b.1 se verifica.

(6) $H^p < Z(G)$.

En efecto como H es cíclico H^p centraliza a H , además como $[G:N] = p$, entonces $H^p < N$ y como $G' < N$ (ya que N es el único subgrupo normal maximal), entonces H^p centraliza a G' ya que N es abeliano y como $G = G' H$, entonces H^p centraliza a G , esto es $H^p < Z(G)$.

(7) $N = G' H^p = G' \times H^p$

En efecto como G' y H^p son normales en G , entonces $G' H^p$ es normal en G y

$$\left| \frac{G' H}{G' H^p} \right| = \frac{|G' H|}{|G' H^p|} = \frac{|G'|}{|G'|} \frac{|H|}{|H^p|} = \frac{|H|}{|H^p|} = \left| \frac{H}{H^p} \right|$$

y como H es cíclico, $\left| \frac{H}{H^p} \right| = p$, por lo tanto $[G:G'H^p] = p$ y como $G'H^p < N$, entonces $N = G'H^p = G' \times H^p$. Hemos demostrado que a) implica b). Ahora demostraremos que b) implica a).

De b.1 se sigue que G no es abeliano. Sea R normal en G , se tiene que $R < N = G' \times H^p$ ya que N es el único subgrupo normal maximal y como $N = G' \times H^p$ es abeliano, entonces R es abeliano. ■

Teorema 3. Sea G un grupo finito tal que:

b.1 G es producto semidirecto de un p' -grupo abeliano no trivial M con un p -grupo cíclico H (p , primo).

b.2 Si h es un generador de H , h induce en M un automorfismo de orden p que no deja fijo a ningún elemento $\neq 1$ de $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$), donde M_{p_i} es la p_i -componente primaria de M y $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_s^{t_s}$.

Entonces G es un grupo soluble no abeliano tal que todo subgrupo normal propio de G es abeliano y G tiene solamente un subgrupo normal maximal.

Antes de demostrar este teorema recordaremos el siguiente resultado:

Teorema de Maschke (cfr [4], pág. 21). Sea G un grupo finito y F un campo tal que la característica de F sea cero o que la característica de F no divida al orden de G . Sea V un F -espacio vectorial y $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ un homomorfismo de G en el

grupo lineal de V . Si $W \subset V$ es un subespacio propio de V tal que $\varphi(g)W \subset W$ para toda $g \in G$, entonces existe $U \subset V$ subespacio tal que $V = W \oplus U$ y $\varphi(g)U \subset U$ para toda $g \in G$.

Demostración del Teorema 3.

G es soluble ya que G/M y M son solubles.

Como h induce en M un automorfismo de orden p , H^p centraliza a M , por lo tanto H^p es normal en $G = MH$ y por lo tanto $N = MH^p = M \times H^p$ es un subgrupo normal abeliano de G . Si demostramos que N es el único subgrupo normal maximal de G , se tendrá que cada subgrupo normal propio de G es abeliano.

Supongamos que G tenga un subgrupo normal maximal $S \neq N$. Como G es soluble, $[G:S]$ es un primo. Si $[G:S] = p$, entonces S contiene a todos los p' -elementos de G y por lo tanto $M \subset S$ por lo tanto $[G/M : S/M] = [G:S] = p$ pero como $G/M \cong H$ es cíclico, G/M solo tiene un subgrupo de índice p . Y como $[G/M : N/M] = [G:N] = \left| \frac{H}{H^p} \right| = p$ por lo tanto $S/M = N/M$ y $N = S$ contra la hipótesis, por lo tanto $[G:S] = p_i$ con $p_i \neq p$.

Como S es normal en G y G/S es de orden p_i , S contiene todos los subgrupos de Sylow de G con excepción de M_{p_i} ; además se tiene que $[M_{p_i} : (M_{p_i} \cap S)] = p_i$ ya que $\frac{G}{S} = \frac{M_{p_i} S}{S} \cong \frac{M_{p_i}}{M_{p_i} \cap S}$ y por lo tanto $M_{p_i}^{p_i} \subset M_{p_i} \cap S$ ya que $M_{p_i} / M_{p_i} \cap S$ es cíclico de orden p_i . Como $H < S$, $h \in S$ ($H = \langle h \rangle$) y ya que S es normal en G , enton

ces $[M_{p_i}, h] \subset S$ y siendo M_{p_i} normal en G (M_{p_i} car $M \triangleleft G$), entonces $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i}$ por lo tanto $[M_{p_i}, h] \subset (M_{p_i} \cap S)$. Si M_{p_i} es cíclico se tiene $[M_{p_i} : M_{p_i}^{p_i}] = p_i$ y como $[M_{p_i} : (M_{p_i} \cap S)] = p_i$ y $M_{p_i}^{p_i} \subset (M_{p_i} \cap S)$, entonces $M_{p_i}^{p_i} = M_{p_i} \cap S$ y por lo tanto $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i}^{p_i}$; se sigue que h induce el automorfismo idéntico en $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$, contra la hipótesis. Si M_{p_i} no es cíclico, $(M_{p_i} \cap S) / M_{p_i}^{p_i}$ es un p_i -grupo abeliano elemental y es dejado invariante por el automorfismo inducido por h ya que es normal en $G / M_{p_i}^{p_i}$. Por lo tanto h deja invariante un subgrupo propio del grupo abeliano elemental $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$. Se tiene pues que si $\varphi: H \rightarrow \text{aut}(M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i})$ es el homomorfismo tal que $\varphi(h)(x M_{p_i}^{p_i}) = (h^{-1} x h) M_{p_i}^{p_i}$, como $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$ es abeliano elemental ($M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$ es un $\mathbb{Z}_{p_i}$ -espacio vectorial). Y ya que $\text{GL}(M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}) = \text{aut}(M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i})$, y dado que $\varphi(h^s)(M_{p_i} \cap S / M_{p_i}^{p_i}) \subset M_{p_i} \cap S / M_{p_i}^{p_i}$, entonces por el teorema de Maschke (siendo que $p_i \nmid |H|$), existe un complemento $T / M_{p_i}^{p_i}$ de $M_{p_i} \cap S / M_{p_i}^{p_i}$ en $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$, tal que $\varphi(h)(T / M_{p_i}^{p_i}) \subset T / M_{p_i}^{p_i}$ por lo tanto $[T, h] \subset T$ pero $[T, h] \subset [M_{p_i}, h] \subset (M_{p_i} \cap S)$ y por lo tanto $[T, h] \subset T \cap (M_{p_i} \cap S) = M_{p_i}^{p_i}$.

Por lo tanto h induce la identidad en $T / M_{p_i}^{p_i}$ contra la hipó-

tesis de que h no deja fijo ningún elemento $\neq 1$ de $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$, por lo tanto G tiene solo un subgrupo normal maximal ■

Problema ¿La condición del teorema anterior es también una condición necesaria?.

Si todo subgrupo normal propio de G es cíclico, entonces dicha condición es también necesaria.

Teorema 4. Sea G un grupo finito soluble. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)
 - a.1 G no es abeliano.
 - a.2 Todo subgrupo normal propio de G es cíclico.
 - a.3 G tiene solo un subgrupo normal maximal.
- b)
 - b.1 G es producto semidirecto de un p' -grupo cíclico M con un p -grupo cíclico H (p , primo).
 - b.2 Si h es un generador de H , h induce en M un automorfismo de orden p que no deja fijo a ningún elemento $\neq 1$ de $M_{p_i} / M_{p_i}^{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) donde $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_s^{t_s}$ y M_{p_i} es la p_i -componente primaria de M

Demostración. Que b) implica a) es inmediato del teorema anterior. Para mostrar que a) implica b), en virtud del teorema 2 solo es necesario demostrar b.2. Demostración de b.2:

Del teorema 2 se sigue que $G = MH$ con M un p' -grupo cíclico y H un p -grupo cíclico y que $N = M H^p = M \times H^p$ es el único subgrupo normal maximal, además de que $[G:N] = p$.

Sea h un generador de H entonces en virtud de que $[G:N] = p$ se tiene que $H^p \subset N$ y ya que N es abeliano y $M \subset N$, h^p induce la identidad en M , por lo tanto h induce en M un automorfismo de orden p .

Sea M_{p_i} la p_i -componente primaria de M . Como M_{p_i} es característico en M y $M_{p_i}^{p_i}$ característico en M_{p_i} y en M , se tiene que h deja invariante a M_{p_i} y a $M_{p_i}^{p_i}$, por lo tanto h induce un automorfismo en $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$. Solo falta demostrar que h no deja fijo ningún elemento $\neq 1$ de $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$. Supongamos que h deja fijo a $M_{p_i}^{p_i} b$ con $b \in M_{p_i}$ y $b \notin M_{p_i}^{p_i}$, entonces $[h, b] \in M_{p_i}^{p_i}$, en efecto como $M_{p_i}^{p_i} h b h^{-1} = M_{p_i}^{p_i} b$, entonces $M_{p_i}^{p_i} h b h^{-1} b^{-1} = M_{p_i}^{p_i}$ lo que implica que $[h, b] \in M_{p_i}^{p_i}$. De donde sigue que b normaliza el subgrupo $K = (M_{p_1} \times M_{p_2} \times \dots \times M_{p_{i-1}} \times M_{p_i}^{p_i} \times M_{p_{i+1}} \times \dots \times M_{p_s}) H$, el cual es de índice p_i en G ya que

$$[G:K] = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|MH|}{|K|} = \frac{|M||H|}{|K|} = \frac{|M_{p_1}| |M_{p_2}| \dots |M_{p_i}| \dots |M_{p_s}| |H|}{|M_{p_1}| |M_{p_2}| \dots |M_{p_i}^{p_i}| \dots |M_{p_s}| |H|}$$

$$= \left| \frac{M_{p_i}}{M_{p_i}^{p_i}} \right| = p_i \text{ ya que } M_{p_i} \text{ es cíclico puesto que } M \text{ es cíclico}$$

co. Como $b \notin K$, se tiene que $N_G(K) \neq K$ y en virtud de que K es maximal en G (puesto que $[G:K] = p_i$), entonces $N_G(K) = G$, esto es K es normal maximal en G , además $M \not\subset K$ porque $b \notin K$ lo que implica que $K \neq N$ porque $M \subset N$, contra la hipótesis de que G tiene solo un subgrupo normal maximal. Se sigue que a) implica b) ■

Corolario. Si G es un grupo soluble no abeliano tal que todo subgrupo normal propio de G sea cíclico y G tenga solo un subgrupo normal maximal entonces si $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_s$ (p_i -primos), el único subgrupo normal maximal N de G es de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s-1}$.

Demostración. Primero observamos que G es supersoluble ya que G/N es cíclico de orden p y N es cíclico.

Como un grupo supersoluble tiene subgrupos de todos los ordenes posibles (i.e. si $m \mid |G|$, y G es supersoluble G tiene un subgrupo de orden m), entonces G tiene un subgrupo R de índice p_s en G y como p_s es el menor de los primos que dividen a $|G|$, R es normal en G (cfr. [11], XI.2.5, pág. 190) y ya que $[G:R] = p_s$ entonces R es el único subgrupo normal maximal de G , esto es $R = N$ y $|N| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s-1}$ ■

Observación. Si en el corolario anterior solo se pide que todo subgrupo normal sea abeliano (no necesariamente cíclico), entonces

no es necesariamente cierto que si $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_s$, el único subgrupo normal maximal N de G es de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s-1}$.

Ejemplo. A_4 tiene todos sus subgrupos normales abelianos $|A_4| = 3 \cdot 2^2$ y el único subgrupo normal maximal es de orden 4.

Sin embargo si solo se pide que todo subgrupo normal propio de G sea abeliano, pero se impone la condición de que el grupo G sea supersoluble, entonces también es cierto que si $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_s$ (p_i -primos), el único subgrupo normal maximal N de G es de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s-1}$.

SECCIÓN II

GRUPOS FINITOS NO SIMPLES NO ABELIANOS CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS Y TODOS SUS COCIENTES PROPIOS ABELIANOS.

En esta sección caracterizamos los grupos finitos no simples no abelianos que tienen todos sus subgrupos normales propios abelianos y todos sus cocientes propios abelianos. Distinguiendo dos casos según tales grupos tengan uno o dos subgrupos normales maximales.

Teorema 5. Sea G un grupo finito no simple. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)
 - a.1 G no es abeliano.
 - a.2 Cada subgrupo normal propio de G es abeliano.
 - a.3 Cada cociente propio de G es abeliano.
 - a.4 G tiene al menos dos subgrupos normales maximales.
- b)
 - b.1 G es un p -grupo (p -primo)
 - b.2 $G/Z(G)$ es abeliano elemental de orden p^2 .
 - b.3 $Z(G) = \phi(G)$
 - b.4 G' es el único subgrupo normal minimal de G .

Demostración. a) implica b): Ya que G no es simple, G tiene un subgrupo propio K normal en G y como por hipótesis K y G/K son abelianos, G es soluble y por el teorema 1 para que se verifique b) es suficiente demostrar b.4. Sea $\langle 1 \rangle \neq N \triangleleft G$; entonces G/N es abeliano y $G' < N$, además $G' \neq \langle 1 \rangle$ ya que G no es abeliano, por lo tanto G' es el único subgrupo normal minimal de G .

b) implica a): Por el teorema 1 basta probar a.3. Sea $\langle 1 \rangle \neq N \triangleleft G$, entonces $G' < N$ y G/N es abeliano. ■

Observación. Con las hipótesis del teorema anterior, $Z(G)$ resulta cíclico. En efecto cada subgrupo minimal de $Z(G)$ es normal minimal de G y siendo $Z(G)$ abeliano con solo un subgrupo minimal, es cíclico.

Teorema 6. Sea G un grupo finito no simple. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)
 - a.1 G no es abeliano.
 - a.2 Cada subgrupo normal propio de G es abeliano.
 - a.3 Cada cociente propio de G es abeliano.
 - a.4 G tiene un sólo subgrupo normal maximal.
- b)
 - b.1 G' es el único subgrupo normal propio de G .
 - b.2 G' es un q -grupo abeliano elemental (q -primo).
 - b.3 $[G:G'] = p$ (p , primo, $p \neq q$).
- c)
 - c.1 G es soluble no abeliano.
 - c.2 G tiene solo un subgrupo normal propio..

- d)
 - d.1 G no es abeliano.
 - d.2 Cada subgrupo propio de G es abeliano.
 - d.3 Cada cociente propio de G es abeliano.
 - d.4 G tiene solo un subgrupo normal maximal.
- e)
 - e.1 G es producto semidirecto de un q -grupo abeliano elemental $M=G'$ no trivial con un p -grupo cíclico H de orden p , (p, q primos $p \neq q$).
 - e.2 Si h es un generador de H , h induce en M un automorfismo de orden p que no deja fijo ningún elemento $\neq 1$ de M .
 - e.3 G' es el único subgrupo normal minimal de G .

Para la demostración seguiremos el siguiente diagrama.

$$a) \xRightarrow{1} b) \xRightarrow{2} c) \xRightarrow{3} d) \xRightarrow{4} a) \xLeftrightarrow[6]{5} e)$$

1. a) implica b): Por el teorema 2 es suficiente demostrar que $H^p = \langle 1 \rangle$, que G' es un q -grupo abeliano elemental y que G' es el único subgrupo normal minimal de G .

Si $H^p \neq \langle 1 \rangle$, ya que $H^p < Z(G)$, entonces $H^p \triangleleft G$ y G/H^p es abeliano, de donde sigue que $G' < H^p$, lo que es absurdo porque G' es un p' -grupo y H^p un p -grupo, por lo tanto $H^p = \langle 1 \rangle$.

Sea $N \triangleleft_{\min} G$; entonces G/N es abeliano, $G' < N$. y por lo tanto $G' = N$ es el único subgrupo normal minimal de G .

ya que G es soluble y $G' \triangleleft_{\min} G$, entonces G' es abeliano elemental de orden q^s (q primo, $q \neq p$).

2. b) implica c): Es inmediato.
3. c) implica d): Ya que G es soluble no abeliano con solo un subgrupo normal propio, este subgrupo es precisamente G' y necesariamente G' es abeliano y $[G:G'] = p$ (p -primo).

Es suficiente demostrar que cada subgrupo maximal es abeliano.

Sea $S <_{\max} G$; si $S = G'$, S es abeliano. Supongamos que $S \neq G'$; entonces $G = G'S$ y ya que $G' \cap S \triangleleft G'$, $G' \cap S \triangleleft S$, entonces $G' \cap S \triangleleft G'S = G$; por lo tanto $G' \cap S = \langle 1 \rangle$ ya que G' es el único subgrupo normal propio de G , por lo tanto $G/G' = SG'/G' \simeq S$ es cíclico, y por consiguiente abeliano.

4. d) implica a): Es inmediato.
5. a) implica e): Como hemos demostrado que a) implica b), por el teorema 2 es suficiente demostrar e.2. Como $G = G'H$ con G' un q -grupo abeliano y H un p -grupo cíclico de orden p y $[G:G'] = p$ se tiene que si $h \in H$ entonces $h^p \in G'$ y como G' es abeliano, h^p induce el automorfismo identidad en G' y h induce en G' un automorfismo de orden p . Basta probar que el automorfismo inducido por h en G' no deja fijo ningún elemento $\neq 1$ de $M = G'$. Si $1 \neq b \in M$ es dejado

fijo por h , i.e. $h^{-1}bh = b$ esto implica que $b \in Z(G)$ ya que $G = G'H$ y G' es abeliano y $H = \langle h \rangle$, por lo tanto $\langle 1 \rangle \neq R = \langle b \rangle \triangleleft G$ lo que implica que $G' = \langle b \rangle$ y por lo tanto $h^{-1}rh = r$ para todo $r \in \langle b \rangle$ y ya que H es cíclico, H resulta normal en G y por consiguiente G resulta abeliano, lo que es una contradicción. Por lo tanto el automorfismo inducido por h en G' no deja fijo ningún elemento $\neq 1$ de $M = G'$.

6. e) implica a): Es inmediato por el teorema 3 ■

. SECCIÓN III

GRUPOS FINITOS SOLUBLES NO NILPOTENTES CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS NILPOTENTES

En esta sección caracterizaremos los grupos finitos solubles no nilpotentes con todos sus subgrupos normales propios nilpotentes.

Teorema 7. Sea G un grupo finito soluble. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) a.1 G no es nilpotente.
- a.2 Cada subgrupo normal propio de G es nilpotente.
- b) b.1 G es producto semidirecto de un p' -grupo nilpotente M que coincide con G' con un p -grupo cíclico H (p -primo).
- b.2 $F(G) = G' \times H^p$ es el único subgrupo normal maximal de G , donde $F(G)$ es el subgrupo de Fitting de G .

Demostración. a) implica b): Sea $F(G)$ el subgrupo de Fitting de G . Ya que cada subgrupo normal propio de G es nilpotente y como $F(G)$ es el subgrupo generado por todos los subgrupos normales

nilpotentes es inmediato que $F(G)$ contiene a todos los subgrupos normales de G , además $F(G) \neq G$ ya que $F(G)$ es nilpotente y G no lo es, por lo tanto $F(G)$ es el único subgrupo normal maximal de G y como G es soluble, se tiene que $[G:F(G)] = p$, p , primo. Ya que $F(G)$ es soluble (porque es nilpotente), $F(G)$ contiene un p' -subgrupo de Hall M , el cual es característico en $F(G)$ y por consiguiente normal en G . $G/F(G)$ es un p -grupo al igual que $F(G)/M$, de donde sigue que G/M es un p -grupo y como G/M solo tiene un subgrupo normal maximal, entonces G/M es cíclico y $G' < M$. Sea H un p -subgrupo de Sylow de G , entonces $G = MH$ y $H \simeq G/M$ cíclico.

Demostraremos ahora que G' coincide con M . G/G' es abeliano con solo un subgrupo maximal (ya que de otra forma G resultaría nilpotente), por lo tanto G/G' es un grupo cíclico de orden una potencia de un primo y como $G/M \simeq G/G' / M/G'$, se tiene que

$$\left| \frac{G}{M} \right| = \frac{\left| \frac{G}{G'} \right|}{\left| \frac{M}{G'} \right|} \quad \text{lo que implica que} \quad \left| \frac{G}{M} \right| \text{ es un divisor de } \left| \frac{G}{G'} \right|,$$

por lo tanto G/G' es un p -grupo cíclico y por consiguiente $M < G'$ (ya que M es un p' -grupo y G' contiene todos los p' -elementos de G) y $G' = M$. Solo falta demostrar que $F(G) = G' \times H^p$.

Como $[G:F(G)] = p$, se tiene que $H^p < F(G)$ y como $G' < F(G)$, entonces $G' H^p < F(G)$; $[G:G' H^p] = [G'H:G'H^p] = \frac{|G'H|}{|G' H^p|} = \frac{|H|}{|H^p|} = \left| \frac{H}{H^p} \right| = p$

ya que H es un p -grupo cíclico lo que implica que $F(G) = G' H^p$
y ya que H^p es el p -subgrupo de Sylow de $F(G)$, siendo $F(G)$ nil-
potente, H^p es normal en $F(G)$ y por lo tanto $F(G) = G' \times H^p$.

b) implica a): Es inmediato. ■

SECCIÓN IV

GRUPOS FINITOS NO SIMPLES NO NILPOTENTES CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS Y TODOS SUS COCIENTES PROPIOS NILPOTENTES.

¿Cómo son los grupos no nilpotentes tales que todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios son nilpotentes?. Se demuestra que esta clase de grupos coincide con la clase de los grupos no nilpotentes con todos sus subgrupos propios y todos sus cocientes propios nilpotentes y con la clase de los grupos no abelianos que tienen solo un subgrupo normal maximal y que todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios son abelianos.

Lema 8. (P. Hall) (cfr. [9], pág. 129) Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G . Si tanto N como G/N , son nilpotentes, entonces G es nilpotente.

Teorema 9. Sea G un grupo finito no simple no nilpotente tal que cada subgrupo normal propio de G y cada cociente propio de G son nilpotentes. Entonces:

(i) Cada subgrupo normal propio de G es abeliano.

(ii) Cada cociente propio de G es abeliano.

Demostración de (i). Sea $F(G)$ el subgrupo de Fitting de G , si $(F(G))' \neq \langle 1 \rangle$ se tiene que $F(G)$ y $G/(F(G))'$ son nilpotentes y por el lema 8, G es nilpotente contra la hipótesis, por lo tanto $(F(G))' = \langle 1 \rangle$ y $F(G)$ es abeliano. Por consiguiente cada subgrupo normal propio T siendo nilpotente por hipótesis, está contenido en $F(G)$ y por consiguiente T es abeliano.

Demostración de (ii). Sea G/H un cociente propio de G , consideremos dos casos. Caso a) G/H no es un p -grupo. Sea S/H un p -subgrupo de Sylow de G/H ; ya que G/H es nilpotente (por hipótesis), S/H es normal en G/H y S es normal en G y como $S/H \neq G/H$, entonces $S \neq G$ y por (i) S es abeliano y S/H es abeliano, por lo tanto G/H es abeliano.

Caso b) G/H es un p -grupo. G/H sólo tiene un subgrupo maximal porque de otra forma G tendría dos subgrupos normales maximales nilpotentes y G sería nilpotente contra la hipótesis. Por lo tanto G/H con solo un subgrupo maximal es cíclico y por lo tanto abeliano. ■

Teorema 10. Sea G un grupo finito no simple. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) a.1 G no es abeliano.

a.2 Cada subgrupo normal propio de G es abeliano.

- a.3 Cada cociente propio de G es abeliano.
- a.4 G tiene solo un subgrupo normal maximal.
- b)
 - b.1 G no es nilpotente.
 - b.2 Cada subgrupo normal propio de G es nilpotente.
 - b.3 Cada cociente propio de G es nilpotente.
- c)
 - c.1 G no es nilpotente.
 - c.2 Cada subgrupo propio de G es nilpotente.
 - c.3 Cada cociente propio de G es nilpotente.

Demostración. a) implica b): Basta que demostremos que G no es nilpotente. Si G fuera nilpotente, G tendría solo un subgrupo maximal ya que en un grupo nilpotente, los subgrupos maximales son normales y por hipótesis G tiene solo un subgrupo normal maximal y por lo tanto G resultaría cíclico contra la hipótesis de que G no es abeliano.

b) implica a): Por el Teorema 9, y por el hecho de que G tiene solo un subgrupo normal maximal.

b) implica c): Ya que b) implica a), entonces es suficiente demostrar que cada subgrupo propio de G es nilpotente.

Por el teorema 6, cada subgrupo propio de G es abeliano y por consiguiente nilpotente.

c) implica b): Es inmediato ■

SECCIÓN V

GRUPOS FINITOS NO SIMPLES NO SUPERSOLUBLES CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS Y TODOS SUS COCIENTES PROPIOS SUPERSOLUBLES.

Aquí se caracterizan los grupos finitos no simples no supersolubles tales que todos sus subgrupos normales propios y todos sus cocientes propios son supersolubles y que tienen solo un subgrupo normal maximal.

Teorema 11. Sea G un grupo finito no simple. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)
 - a.1 G no es supersoluble.
 - a.2 Todo subgrupo normal propio de G es supersoluble.
 - a.3 Todo cociente propio de G es supersoluble.
 - a.4 G tiene solo un subgrupo normal maximal.
- b) G tiene una cadena normal $1 \subsetneq M \leq P \leq N \subsetneq G$ tal que
 - b.1 M es el único subgrupo normal minimal de G y M es abeliano elemental de orden q^n , q primo y $n > 1$.
 - b.2 P es un q -subgrupo de Sylow de G .

b.3 N es supersoluble y es producto semidirecto de P con un grupo abeliano A tal que todo divisor primo del $|A|$ es menor que q .

b.4 $\frac{G}{M}$ es supersoluble.

b.5 N es el único subgrupo normal maximal de G y G/N tiene orden primo p ; si $|A| \neq 1$, entonces p es menor o igual que todo divisor primo del $|A|$ y por consiguiente $p < q$

Demostración: b) implica a):

G no es supersoluble ya que M es un subgrupo normal minimal y tiene orden q^n con $n > 1$.

Ya que N es el único subgrupo normal maximal de G y N es supersoluble, entonces todo subgrupo normal propio de G es supersoluble.

Basta demostrar que si $S \neq \langle 1 \rangle$ es un subgrupo normal propio de G , entonces G/S es supersoluble. Ya que M es el único subgrupo normal minimal de G , se tiene que M está contenido en S y G/S es isomorfo a $\frac{G/M}{S/M}$ y como G/M es supersoluble, entonces G/S es supersoluble.

a) implica b):

G tiene solo un subgrupo normal minimal M ya que si M_1 y M_2 fueran subgrupos normales minimales distintos de G , entonces

G/M_1 y G/M_2 serían supersolubles y por consiguiente G que es isomorfo a $G/M_1 \cap M_2$ sería supersoluble contra la hipótesis.

Ya que M es normal minimal y G es soluble, M es un grupo abeliano elemental de orden q^n , q primo y como G no es supersoluble y G/M es supersoluble, entonces $n > 1$ ya que si $n = 1$, G resultaría supersoluble contra la hipótesis.

Sea N el único subgrupo normal maximal de G . Ya que G es soluble se tiene $[G:N] = p$, p primo.

Si $|N| = p_1 p_2 \dots p_r$ con p_i primos y $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$, entonces el p_r subgrupo de Sylow P de N es normal en N ya que N es supersoluble y siendo P característico en N , P es normal en G y se tiene que $1 < M \leq P \leq N < G$ ya que M es el único subgrupo normal minimal de G y como $|M| = q^n$ se tiene $p_r = q$.

Como N' es característico en N y N normal en G y ya que N' es nilpotente porque N es supersoluble, entonces todo subgrupo de Sylow de N' es característico en N y normal en G y como M es el único subgrupo normal minimal de G , y $|M| = q^n$ entonces N' es un q -grupo y por consiguiente $N' = \langle 1 \rangle$ o $M < N' < P < N$ y en cualquier caso N/P es un q' -grupo abeliano.

Si $N/P \neq \langle 1 \rangle$, q es mayor que todo divisor primo de $|N/P|$ ya que q no divide a $|N/P|$ y $q = p_r$ es mayor o igual que todos los divisores primos del $|N|$.

Como G/P es supersoluble (por hipótesis) y $1 \neq N/P$ es el

único subgrupo normal maximal de G/P y $[G/P : N/P] = [G:N] = p$ se
 tiene que $p \leq$ todos los divisores primos del $|G/P|$ y por lo tanto
 p es menor o igual que todos los divisores primos del $|N/P|$ y por
 consiguiente $p < q$ ya que q es mayor que todo divisor primo del
 $|N/P|$ y p resulta ser el q -subgrupo de Sylow de G porque
 $[G:P] = [G:N][N:P]$ no es divisible por q . ■

. SECCIÓN VI

GRUPOS FINITOS NO SOLUBLES NO SIMPLES CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS ABELIANOS.

En esta sección caracterizaremos los grupos finitos no solubles no simples tal que cada subgrupo normal propio es abeliano y admite una base con a lo más dos elementos. Para este fin son necesarios los siguientes resultados ya conocidos.

Lema 12. Si p es un primo, entonces el grupo lineal $GL(2,p)$ de las matrices invertibles de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ no tiene subgrupos simples no abelianos.

Demostración. Como $|GL(2,p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$, si $p = 2$, $|GL(2,2)| = 6$ y $GL(2,p)$ no tiene subgrupos simples no abelianos, entonces podemos suponer que $p \geq 3$.

Sea $SL(2,p)$ el subgrupo de $GL(2,p)$ de las matrices cuyo determinante es 1. $SL(2,p)$ es normal en G y además $GL(2,p)/SL(2,p)$ es abeliano, ya que $GL(2,p)/SL(2,p) \simeq \mathbb{Z}_p - \{0\}$.

Sea H un subgrupo simple no abeliano de $GL(2,p)$; $H \cap SL(2,p)$ es normal en H y como H es simple, entonces $H \cap SL(2,p) = \langle 1 \rangle$ o $H < SL(2,p)$. Supongamos que $H \cap SL(2,p) = \langle 1 \rangle$, entonces H es isomorfo a $\frac{H \cap SL(2,p)}{SL(2,p)} < \frac{GL(2,p)}{SL(2,p)}$ que es abeliano, contra el hecho de que H no es abeliano. Por lo tanto $H < SL(2,p)$. Sea $Z = Z(SL(2,p))$, se tiene que $Z = Z(G) \cap SL(2,p)$ = matrices escalares con determinante igual a 1.

$H \cap Z$ es normal en H y como H es simple, entonces $H \cap Z = \langle 1 \rangle$ o $H \subset Z$, pero como H no es abeliano se tiene $H \cap Z = \langle 1 \rangle$.

Ya que H es simple, H es de orden par (W. Feit-J. Thompson[3]).

Sea $A \in H$ de orden 2. Como $H < SL(2,p)$ se tiene que $A^2 = 1$ y $\det A = 1$ y como $p > 2$, entonces $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ contra el hecho de que $H \cap Z = \langle 1 \rangle$. Se sigue que $GL(2,p)$ no tiene subgrupos simples no abelianos ■

Lema 13. Sea R un p -subgrupo normal abeliano del grupo finito G y sea $\langle 1 \rangle = A_s < A_{s-1} < \dots < A_2 < A_1 < A_0 = R$ una porción de una serie principal de G comprendida entre $\langle 1 \rangle$ y R . Si $C_G(A_i/A_{i+1}) = G$ $i = 0, 1, \dots, s-1$, entonces el grupo de automorfis-

mos inducidos por G en R es un p -grupo.

Demostración: Como A_i/A_{i+1} es característicamente simple y $A_i < R$ con R p -grupo abeliano, entonces A_i/A_{i+1} es un grupo abeliano elemental de orden p^{n_i} y por consiguiente si $a \in A_i$, entonces $(a A_{i+1})^p = a^p A_{i+1} = A_{i+1}$, esto es $a^p \in A_{i+1}$.

Como $C_G(A_i/A_{i+1}) = G$, si $a \in A_i$, $x \in G$ se tiene $x^{-1}(a A_{i+1})x = x^{-1} a x A_{i+1} = a A_{i+1}$, esto es $a^x = x^{-1} a x = a a_{i+1}$ con $a_{i+1} \in A_{i+1}$. Por lo tanto $a^{x^p} = a a_2$ con $a_2 \in A_{i+2}$, $a^{x^{p^2}} = a a_3$ con $a_3 \in A_{i+3}$ y $a^{x^{p^t}} = a a_{t+1}$ con $a_{t+1} \in A_{i+t+1}$ y por lo tanto si $r \in R = A_0$, $x \in G$, $r^x = r a_1$ con $a_1 \in A_1$ y $r^{x^{p^s}} = r$, esto es el automorfismo inducido por x en R es de orden una potencia de p . ■

Teorema 14. Sea G un grupo finito no soluble tal que cada subgrupo normal propio sea abeliano y admita una base con a lo más dos elementos. Entonces G tiene un solo subgrupo normal maximal N que coincide con el subgrupo de Frattini $\phi(G)$ de G .

Demostración: Si G tuviera dos subgrupos normales maximales N_1 y N_2 se tendría que $G = N_1 N_2$ con N_1 y N_2 normales y abelianos, por lo tanto G sería nilpotente contra la hipótesis, por lo tanto G tiene un solo subgrupo normal maximal N , entonces $\phi(G) \subset N$ porque $\phi(G)$ es normal en G .

Demostraremos por inducción sobre el orden de G que $N \subset \phi(G)$.

Sea P un subgrupo normal minimal de G contenido en N , entonces G/P verifica las hipótesis del teorema de donde por hipótesis de inducción $\phi(G/P) = N/P$, esto es cada subgrupo maximal de G que contenga a P contiene también a N .

Si $N \not\subset \phi(G)$, entonces debe existir un subgrupo maximal M de G tal que $N \not\subset M$ y por lo visto anteriormente $P \not\subset M$ y por la maximilidad de M , $G = MP$.

Como N es abeliano $C_G(P) \supset N$, pero $C_G(P)$ es normal en G y ya que N es normal maximal de G , entonces $C_G(P) = N$ o $C_G(P) = G$. Si $C_G(P) = G$, entonces $M \subset C_G(P)$, por lo tanto $P \subset C_G(M) \subset N_G(M)$ y como $M \subset N_G(M)$ se tiene $G = PM \subset N_G(M)$, esto es M es normal en G y por lo tanto normal maximal en G lo que es un absurdo porque $N \neq M$ y N es el único subgrupo normal maximal de G . Por lo tanto $C_G(P) = N$.

Como $G/N = G/C_G(P)$ es isomorfo al grupo de automorfismos inducidos por G en P y como N es abeliano y tiene una base formada por a lo más dos elementos y $P \subset N$, entonces P debe ser un

grupo abeliano elemental de orden p o p^2 ya que P es normal minimal y como G/N es isomorfo a un subgrupo del grupo de automorfismos de P , se tiene que G/N es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Z}_{p-1}$ o de $GL(2,p)$ lo cual no puede ser ya que G/N es simple no abeliano (en virtud de que G no es soluble y N es normal maximal), mientras que $\mathbb{Z}_{p-1}$ es abeliano y $GL(2,p)$ no tiene subgrupos simples no abelianos (lema 12). Se llega así a un absurdo y por lo tanto $N = \phi(G)$ ■

Teorema 15. Sea G un grupo finito no soluble tal que cada subgrupo normal propio sea abeliano y admita una base formada por a lo más dos elementos, entonces G tiene un solo subgrupo normal maximal N que coincide con el centro $Z(G)$ de G .

Demostración: Que G tenga un solo subgrupo normal maximal N resulta del teorema 14. Demostraremos que $N = Z(G)$. Porque $Z(G) \subset N$, es suficiente demostrar que $N \subset Z(G)$.

Sea R un p -subgrupo de Sylow no trivial de N , R es característico en N porque N es abeliano, por lo tanto R es normal en G . Sean A y B dos subgrupos de R normales en G y tales que $A \subsetneq B < R$ y que no exista ningún subgrupo normal D de G tal que $A \subsetneq D \subsetneq B$. Entonces $C_G(B/A) \supset N$; pero $C_G(B/A)$ es normal en G y como N es normal maximal en G , se tiene que $C_G(B/A) = N$ o bien $C_G(B/A) = G$.

Supongamos que $C_G(B/A) = N$. Como $G/N = G/C_G(B/A)$ es isomorfo al grupo de automorfismos inducidos por G en B/A y ya que B/A es abeliano elemental (porque B/A es característicamente simple),

además $A \subset B \subset N$ y N es abeliano y es generado por a lo más dos elementos, se tiene que B/A es de orden p o p^2 , por lo tanto G/N es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Z}_{p-1}$ o de $GL(2,p)$ y esto no puede ser porque G/N es simple no abeliano mientras que $\mathbb{Z}_{p-1}$ es abeliano y $GL(2,p)$ no tiene subgrupos simples no abelianos (lema 12). Se sigue que $C_G(B/A) = G$.

Sea $\langle 1 \rangle = A_s < A_{s-1} < \dots < A_2 < A_1 < A_0 = R$ una porción de serie principal de G comprendida entre $\langle 1 \rangle$ y R . Se quiere demostrar que $C_G(R) = G$; en caso contrario, sería $C_G(R) = N$, porque $N \subset C_G(R)$ y $C_G(R)$ es normal en G . Por lo visto en el parrafo precedente $C_G(A_i/A_{i+1}) = G$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$) y por el lema 13, el grupo de automorfismos inducidos por G en R es un p -grupo; pero el grupo de automorfismos inducidos por G en R es isomorfo a $G/C_G(R)$, entonces si $C_G(R) = N$, G/N es un p -grupo lo que es una contradicción ya que G/N es simple no abeliano. Se sigue que $C_G(R) = G$, esto es $R < Z(G)$. Por lo tanto cada subgrupo de Sylow de N está contenido en $Z(G)$ y por consiguiente $N \subset Z(G)$ ■

Teorema 16. Sea G un grupo finito no soluble, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) Cada subgrupo normal propio de G es abeliano y tiene una base formada por a lo más dos elementos.
- b) G es una extensión central de un grupo abeliano finito M , que tiene una base formada por a lo más dos generadores,

con un grupo simple no abeliano y se tiene $\phi(G) = M$.

Demostración: a) implica b): Sea M el único subgrupo normal maximal de G , entonces M es abeliano y tiene una base formada por a lo más dos elementos y G/M es simple no abeliano. De los teoremas 14 y 15 se sigue que a) implica b).

b) implica a): Sea N un subgrupo normal propio de G . Ya que $N\phi(G)/\phi(G)$ es normal en $G/\phi(G)$ y como $G/\phi(G)$ es simple, entonces $N\phi(G) = G$ o $N\phi(G) = \phi(G)$; si $N\phi(G) = G$, entonces $N = G$ lo que es una contradicción porque N es un subgrupo normal propio de G , por consiguiente $N\phi(G) = \phi(G)$, esto es $N \subset \phi(G) = M$ y N es abeliano y tiene una base formada por a lo más dos elementos ■

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] BIANCHI, M.G., Sui Gruppi a Sottogruppi Normale Ciclici. Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 112, 302-310 (1978).
- [2] DOERK, K., Minimal Nicht Überauflösbare, Endliche Gruppen, Math. Z. 91, 198-205 (1966).
- [3] FEIT, W.-THOMPSON, J., Solvability of Groups of Odd Order. Pacific J. Math. 13, 775-1029 (1963).
- [4] LEDERMAN, W., Introduction to Group Characters. Cambridge University Press. Cambridge (1977).
- [5] IWASAWA, K., Über die Struktur der Endlichen Gruppen, Deren Echte Untergruppen Sämtlich Nilpotent Sind. Proc. Phys. Math. Soc. Japan 23, 1-4. (1941).
- [6] MILLER, G.-MORENO, H., Nonabelian Groups in Which Every Subgroup is Abelian. Trans. Am. Math. Soc. 4, 398-404 (1903).
- [7] REDEI, L., Das Schiefe Produkt in der Gruppentheorie. Comment. Math. Helvet. 20, 225-267 (1947).
- [8] REDEI, L., Die Endlichen Einstufig Nichtnilpotenten Gruppen. Publ. Math. Debrecen 4, 303-324. (1956).
- [9] ROBINSON, D., A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1980).
- [10] SCHMIDT, O., Über Gruppen, Deren Sämtlichen Teiler Spezielle Gruppen Sind. Mat. Sbornik 31, 366-372 (1924).
- [11] ZAPPA, G., Fondamenti di Teoria dei Gruppi Vol. II. Edizioni Cremonese, Roma (1970).