# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# COMPLETEZ EN GRUPOS TOPOLÓGICOS Y PARATOPOLÓGICOS

T E S I S

PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANGEL CALDERÓN VILLALOBOS

DIRECTOR:
DR. IVÁN SÁNCHEZ ROMERO
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA**

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2021.

# Dedicatoria

*A mi familia.*

II

# Agradecimientos

*La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente participaron distintas personas opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo y acompañando a cada momento. Por ello es para mi un placer utilizar este espacio para expresarles mis agradecimientos.*

*A mis padres, Ángel y Romanita por haberme apoyado en la decisión de ingresar a la maestría, por confiar, creer en mi y en mis expectativas.*

*A mi asesor de tesis, Dr. Iván Sánchez Rómero,*
*por todos sus consejos, por su paciencia, por todo el tiempo y esfuerzo dedicado a la realización de la tesis.*

*A mi tutora, Dra. Natalia Jonard Pérez,*
*por sus consejos y el tiempo que me dedicó estos años.*

*A mis sinodales los doctores: Mikhail Tkachenko, Sergey Antonyan, Natalia Jonard Pérez, Roberto Pichardo Mendoza, Iván Sánchez Rómero, gracias por darme la oportunidad y el tiempo que me han dedicado para leer y corregir esta tesis.*

*A mis amigos que me acompañaron en este viaje, que a pesar de la pandemia siempre estuvieron presentes.*

*A los profesores y personal administrativo del Posgrado en Ciencias Matemáticas por todo el apoyo brindado en estos dos años.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada estos dos años de estudios con número de apoyo 750168.*

*Gracias a todos aquellos que no están aquí, pero que me ayudaron a que este gran esfuerzo se volviera realidad.*

Ángel Calderón Villalobos
Junio de 2021

# Resumen

En el presente trabajo estudiaremos las propiedades de separación que satisfacen estas estructuras topológicas y compararemos dichos axiomas de separación en grupos topológicos con los de grupos paratopológicos.

Tratamos de escribir la tesis de tal manera que pueda ser leída y comprendida para lectores con un poco de conocimiento de las matemáticas.

En el primer capítulo damos los preliminares de topología donde presentamos las nociones topológicas básicas para comprender este trabajo y recordamos los axiomas de separación que son el tema central de la tesis. Además definimos una cuasi-uniformidad y proporcionamos propiedades que satisfacen las cuasi-uniformidades que utilizaremos para la demostración de varios resultados en capítulos siguientes.

En el capítulo 2 presentamos los resultados básicos que debemos conocer acerca de los grupos topológicos y paratológicos. Por ejemplo las condiciones de Pontryagin para grupos paratopológicos y topológicos. Además mostramos que cualquier grupo topológico $T_0$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ y damos el ejemplo de un grupo topológico Tychonoff que no es normal.

En el capítulo 3 mostramos algunos contraejemplos en grupos paratopológicos para obtener lo siguiente:

$$T_0 \not\Rightarrow T_1 \not\Rightarrow T_2 \not\Rightarrow T_3.$$

Mostramos que todo grupo paratopológico regular es completamente regular, por lo que en grupos paratopológicos obtenemos que si el grupo paratopológico es $T_3$, entonces es $T_{3\frac{1}{2}}$. Además presentamos resultados sobre axiomas de separación en espacios cocientes y en espacios doble cociente.

Por último, en el capítulo 4 mostramos que si $G$ es un grupo topológico Hausdorff primero numerable, entonces $G$ es metrizable. Vemos que este

resultado no se satisface en grupos paratopológicos. Además probamos que en grupos topológicos (Hausdorff) ser submetrizable equivale a tener pseudocarácter numerable.

# Índice general

# Resumen

En el presente trabajo estudiamos la completación de espacios uniformes, la completación de grupos topológicos y la completación de grupos paratopológicos.

Para que la lectura de la tesis sea más accesible, el capítulo 1 es de preliminares: recordaremos algunas nociones de filtros, espacios uniformes, grupos topológicos y paratopológicos. Además de resultados que se usarán en los capítulos posteriores.

En el capítulo 2 estudiaremos la completación de espacios uniformes, basados principalmente en [18] y [11]. Daremos una construcción de la completación de espacios unifomes separados. Además, veremos en dicha construcción que la completación de espacios uniformes separados también es separado y es única salvo isomorfismos uniformes. Al final del capítulo enunciaremos un teorema que nos dice que cada espacio uniforme tiene una completación uniforme, la cual no siempre es separada.

En el capítulo 3 estudiaremos la completación de Raĭkov de grupos topológicos y algunas propiedades que satisface dicha completación [2].

Terminamos la tesis con el capítulo 4, donde estudiaremos la completación de Raĭkov para grupos paratopológicos definida en [4] y compararemos las propiedades que satisface la completacióпn de Raĭkov de grupos topológicos con la completación de Raĭkov de grupos paratopológicos. También daremos algunas extensiones de resultados dados en el capítulo 3 y mostraremos que la completación de Raĭkov de un grupo paratopológico $T_3$ es $T_3$. El resultado anterior mejora uno presentado en [4]. Sin embargo, con un ejemplo demostramos que la completación de Raĭkov no preserva los axiomas de separación $T_i$ con $i = 1, 2$.

# Introducción

La Topología y el Álgebra son dos áreas de las matemáticas que entran en contacto de manera natural. Muchos de los objetos más importantes de las matemáticas representan una mezcla entre estructuras algebraicas y estructuras topológicas. La combinación de la estructura algebraica de un grupo con la estructura de espacio topológico ha dado lugar al crecimiento de tres áreas bien marcadas de la Matemática: Álgebra Topológica, Topología Algebraica y Análisis Funcional.

En la Topología Algebraica se usan las herramientas del álgebra abstracta para clasificar y estudiar los espacios topológicos. En el Álgebra Topológica se estudia la influencia de las estructuras algebraicas con topologías que se ajustan adecuadamente a ellas. El estudio de los grupos paratopológicos y topológicos son parte del Álgebra Topológica.

Las teorías de grupos paratopológicos y topológicos son unos de los ejemplos de la interacción exitosa de estas dos áreas de las matemáticas. Los grupos topológicos fueron estudiados por primera vez por Shereirer en 1926 y por F. Leja en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* (1927), donde se establece por primera vez la definición de grupo topológico en un contexto similar a los grupos de Lie.

Un grupo paratopológico es un grupo dotado con una topología, con la cual la multiplicación del grupo es continua. Un grupo topológico es un grupo paratopológico tal que la función de tomar inversos es continua.

Por otro lado, el concepto de una sucesión convergente es uno de los más antiguos en topología general. De hecho, uno de los primeros intentos de definir un espacio topológico utilizó el concepto de sucesión convergente. En 1874, G. Cantor público su primer artículo sobre teoría de conjuntos. Con sus ideas sobre conjuntos dio pie a la formulación de ideas “topológicas”; él mismo proporcionó las primeras definiciones de conjunto derivado y punto límite [7]. Frechet introdujo la idea de un conjunto compacto, aunque actualmente dicho concepto se denomina *compacidad por punto límite* o de *acomulación* en [13]. También introdujo en 1906 los espacios métricos en su tesis doctoral [14]. F. Riesz trabajó sobre las ideas de Fréchet expuestas en su tesis doctoral, introdujo el concepto de convergencia débil de una sucesión de funciones y realizó una aproximación a la definición axiómatica de espacio topológico [28]. Sin embargo, es imposible definir y describir la topología de un producto no numerable de espacios en términos de sucesiones. A pesar de esto, el concepto de sucesión convergente tiene la ventaja de poderse definir en cualquier espacio topológico; además, existen clases de espacios (ej. los espacios secuenciales) en los que la topología sí puede describirse mediante sucesiones convergentes.

En matemáticas, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $(X, d)$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Así, una sucesión es de Cauchy si sus términos se aproximan entre sí cada vez más, pero la definición no hace referencia a ningún posible límite. Por ejemplo, es fácil ver que toda sucesión de números racionales convergente a un número irracional es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$. Un espacio métrico $X$ en donde cada sucesión de Cauchy es convergente en $X$ es llamado un espacio completo. Entonces, podemos notar que $\mathbb{Q}$ no es un espacio métrico completo. Sin embargo, $\mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio completo. Hausdorff en 1914 demostró que $\mathbb{R}$ es la completación de $\mathbb{Q}$, es decir, que cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ converge a un número real [16]. Este resultado se generaliza demostrando que cada espacio métrico tiene una completación.

Una forma de generalizar el concepto de convergencia de sucesiones es por medio de filtros. Los filtros aparecen por primera vez en 1908 en el trabajo de F. Riez. En 1937 Cartan usa la teoría de filtros para definir en topología la teoría de la convergencia [8], la cual fue desarrollada por Bourbaki en [6] (1940). Además, los filtros de Cauchy en espacios uniformes son una generalización de las sucesiones de Cauchy en espacios métricos.

En 1936, A. Weil [39] introduce la noción de espacios uniformes completos. En 1938, Weil publicó *Sur les Espaces à Structure Uniforme et Sur la Topologie Générale* donde demostró que cada espacio uniforme tiene una completación uniforme. Además que todo grupo topológico tiene dos estructuras uniformes naturales (la uniformidad izquierda y la uniformidad derecha) y define la completación de grupos topológicos [40]. Sin embargo, la completación de grupos topológicos dada por Weil tuvo un problema, no se podía afirmar que toda completación de un grupo topológico era un grupo topológico. Más aún, no se podía afirmar que tuviera estructura de grupo, pues no se podía extender la operación de tomar inversos. Los primeros ejemplos de este fenómeno fueron dados en 1944 por Dieudonné en [10].

Del hecho de que la completación de Weil de un grupo topológico no sea necesariamente un grupo topológico, los matemáticos se dieron a la tarea de averiguar si existía una completación mejor que la de Weil, es decir, que si cada grupo topológico se puede encajar en un grupo topológico completo como un subgrupo denso. En 1946 Raĭkov en [25] demostró que sí existía tal completación de grupos topológicos. La construcción de Raĭkov fue una corrección de lo hecho en la completación de Weil usando la uniformidad bilateral del grupo topológico. Además, si la completación de Weil de un grupo topológico es un grupo topológico, ésta coincide con la completación de Raĭkov.

Una pregunta que quedaba abierta es si existía una completación de grupos paratopológicos. Marin y Romaguera [21] en 1996 mostraron que para cada grupo paratopológico $G$, existe un grupo paratopológico $\check{G}$ el cual es completo en su cuasi-uniformidad bilateral y contiene a $G$ como subgrupo denso. En 1998, Hans-Peter A. Künzi, Salvador Romaguera y Ol'ga V. Sipacheva dieron una completación de grupos paratopológicos $T_3$. En 2020, Taras Banakh y Alex Ravsky en [4] extendieron la completación de Raĭkov de grupos topológicos a grupos paratopológicos $T_0$ (sin usar cuasi-uniformidades).

# Capítulo 1

# Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar las nociones que debe de conocer el lector para la lectura de esta tesis. Para esto el capítulo está formado por cuatro secciones: filtros, espacios uniformes, grupos topológicos y uniformidades en grupos topológicos.

## 1.1. Filtros

Otra manera de tratar la convergencia en espacios topológicos es por medio de filtros. El concepto de filtro tiene importancia por muchas aplicaciones que tiene en topología, análisis y lógica. En esta sección presentamos la definición de filtro y sus propiedades elementales, todo lo cual permite construir la teoría de la convergencia. La teoría de la convergencia por filtros fue introducida por Cartan en 1937 y desarrollado por Bourbaki en 1940.

**Definición 1.1.1.** Sea $X$ un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $X$ se llama ***filtro*** en $X$, si:

i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

ii) Si $U, V \in \mathcal{F}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$.

iii) Si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subseteq W \subseteq X$, entonces $W \in \mathcal{F}$.

Notemos que si $\mathcal{F}$ es un filtro en un conjunto $X$, de las propiedades i) y iii) tenemos que $X \in \mathcal{F}$. Por la observación anterior, en el resto de la tesis trabajaremos con conjuntos no vacíos. También podemos observar que la definición es puramente conjuntista, es decir, no es necesario definir una topología en $X$ para definir los filtros. Ahora veamos unos ejemplos de filtros.

**Ejemplos 1.1.2.** Sea $X$ un conjunto.

a) Se tiene que $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro en $X$, llamado el filtro trivial en $X$.

b) Sea $A \subset X$ no vacío. Entonces $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$ es un filtro en $X$.

c) Si $X$ es un conjunto no numerable, entonces podemos considerar a $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \backslash F \text{ es numerable}\}$. $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$.

**Definición 1.1.3.** Una familia $\gamma$ de subconjuntos de $X$ se llama ***base de filtro*** en $X$, si:

i) $\gamma \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \gamma$.

ii) Si $U, V \in \gamma$, entonces existe $C \in \gamma$ tal que $C \subseteq U \cap V$.

De la definición de filtro podemos notar que todo filtro es una base de filtro. Dada una base de filtro $\gamma$ en $X$, la familia

$$\mathcal{F}(\gamma) = \{F \subseteq X : \text{existe } B \in \gamma \text{ tal que } B \subseteq F\}$$

es un filtro en $X$. A este filtro le llamamos el ***filtro generado por la base*** $\gamma$. Además, si $\mathcal{F}$ es otro filtro en $X$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}(\gamma) \subseteq \mathcal{F}$. Con esto podemos decir que $\mathcal{F}(\gamma)$ es el filtro más pequeño que contiene a $\gamma$.

Ahora daremos un ejemplo de una base de filtro.

**Ejemplo 1.1.4.** Consideremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base de filtro en $\mathbb{R}$.

Al filtro generado por $\mathcal{C}$ se le conoce como ***filtro de Fréchet***.

**Definición 1.1.5.** Si $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$, decimos que $\gamma \subseteq \mathcal{F}$ es una ***base de filtro para*** $\mathcal{F}$ si para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \gamma$ tal que $B \subseteq F$.

Sea $X$ un conjunto. Denotemos por $\mathbb{P}(X)$ al conjunto potencia de $X$. Notemos que si $\gamma \subseteq \mathbb{P}(X)$ satisface las propiedades de una base de filtro en $X$, entonces $\mathcal{F}(\gamma)$ es un filtro en $X$. Ahora si $\gamma$ es una base de filtro para algún filtro $\mathcal{F}$, entonces $\gamma$ es una base de filtro en $X$ y además $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\gamma)$. Esto muestra la consistencia de ambas definiciones.

**Definición 1.1.6.** Si $X \subseteq Y$ y $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$, entonces $\mathcal{F}$ genera un filtro en $Y$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_Y := \{F \subseteq Y : \text{ existe } B \in \mathcal{F} \text{ tal que } B \subseteq F\}.$$

Se conoce al filtro $\mathcal{F}_Y$ como la ***extensión de*** $\mathcal{F}$ ***a*** $Y$. Por otro lado, si $\mathcal{G}$ es un filtro en $Y$, la familia $\{G \cap X : G \in \mathcal{G}, G \cap X \neq \emptyset\}$ es una base de filtro en $X$ que se conoce como ***la traza de*** $\mathcal{G}$ ***sobre*** $X$***.***

**Nota 1.1.7.** *Sean $X \subseteq Y$ y $\mathcal{F}$ un filtro en $Y$. Denotemos por $\mathcal{G}$ a la traza de $\mathcal{F}$ sobre $X$. Entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_Y$.*

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son filtros en un conjunto $X$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, entonces decimos que $\mathcal{F}'$ es un ***refinamiento*** de $\mathcal{F}$.

Ahora vamos a trabajar con filtros en un espacio topológico.

Sean $X$ un espacio un topológico y $x \in X$. Denotamos por $\beta_x$ a la familia de vecindades de $x \in X$. Es fácil demostrar que $\beta_x$ es un filtro, el cual se conoce como ***el filtro de vecindades***.

**Definición 1.1.8.** Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico $X$. Decimos que $x \in X$ es un ***punto límite*** de $\mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\beta_x$. En este caso decimos que $\mathcal{F}$ ***converge a x***. Por otro lado, decimos que $x$ es un ***punto de adherencia*** de $\mathcal{F}$, si $x$ está en la adherencia de cada elemento de $\mathcal{F}$. Al conjunto de los puntos de adherencia de $\mathcal{F}$ se le llama la ***adherencia*** de $\mathcal{F}$.

Recordemos que en un espacio topológico $X$ a la adherencia de un conjunto $A \subseteq X$ también se le conoce como clausura o cerradura de $A$. Donde la cerradura de $A$, denotado por $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto $A$.

Ahora presentamos la noción de ultrafiltro.

**Definición 1.1.9.** Sea $X$ un conjunto. Un filtro $\mathcal{F}$ en $X$ es un ***ultrafiltro*** en $X$ si $\mathcal{F}$ es un filtro maximal con el orden de contención de conjuntos.

Veamos ahora un ejemplo de un ultrafiltro y un ejemplo de un filtro que no es un ultrafiltro.

**Ejemplo 1.1.10.**

i) Sea $X$ un espacio topológico. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : \{x\} \subseteq F\}$ es un ultrafiltro en $X$. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un filtro en $X$ tal que $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}$. Dado que $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ y $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}$, se sigue que para cada $G \in \mathcal{G}$, $G \cap \{x\} \neq \emptyset$. Luego $x \in G$ para cada $G \in \mathcal{G}$, es decir, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_x$. Por tanto, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_x$.

ii) Sean $X$ un conjunto y $A$ un subconjunto de $X$ con más de un punto. Entonces $\mathcal{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$ no es un ultrafiltro en $X$. En efecto, sea $x \in A$. Es claro que $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_x$. Sin embargo, $\mathcal{F}_A \nsupseteq \mathcal{F}_x$ pues $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ pero $\{x\} \notin \mathcal{F}_A$.

Una propiedad básica de los ultrafiltros es la siguiente.

**Teorema 1.1.11.** *[41] Si $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.*

## 1.2. Espacios uniformes

El propósito de esta sección es dar los conceptos y resultados necesarios para poder realizar una construcción de la completación de un espacio uniforme separado.

Sean $X$ un conjunto y $U$ y $V$ subconjuntos de $X \times X$. Definimos el producto de $U$ y $V$ como sigue

$$U \circ V = \{(x, z) \in X \times X : \text{ existe } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in U \text{ y } (y, z) \in V\}.$$

Para el caso $U = V$ escribiremos $V^2 = V \circ V$. Además, para $V \subseteq X \times X$ se define el inverso de $V$ de la siguiente manera $V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\}$.

**Definición 1.2.1.** Una ***uniformidad*** en un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$, la cual satisface las siguientes condiciones:

i) $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq U$, para cada $U \in \mathcal{U}$;

ii) para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;

iii) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$;

iv) para cada $V \in \mathcal{U}$, se cumple que $V^{-1} \in \mathcal{U}$.

v) si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subseteq V \subseteq X \times X$, entonces $V \in \mathcal{U}$.

A la pareja $(X, \mathcal{U})$ la nombraremos como ***espacio uniforme***. Los elementos de $\mathcal{U}$ se llaman ***entornos*** y si $V = V^{-1}$, diremos que $V$ es un ***entorno simétrico***.

Unos ejemplos de uniformidades son los siguientes.

**Ejemplo 1.2.2.**

a) La uniformidad discreta sobre un conjunto $X$ es

$$D_X = \{V \subseteq X \times X : \Delta_X \subseteq V\}.$$

b) La uniformidad trivial sobre un conjunto $X$ es

$$T_X = \{X \times X\}.$$

Cuando $X = \emptyset$ entonces $T_X$ es la uniformidad vacía.

**Definición 1.2.3.** Sea $\mathcal{U}$ una uniformidad en un conjunto $X$. Para cada $x \in X$ y cada $U \in \mathcal{U}$ se define la ***$U$-bola centrada en*** $x$ como

$$B(x,U) = \{y \in X : (x,y) \in U\}.$$

Si $A \subseteq X$ y $U \in \mathcal{U}$, denotamos por $B(A,U)$ al conjunto $\bigcup_{x\in A} B(x,U)$. Una familia $\beta \subseteq \mathcal{U}$ es llamada una ***base*** para la uniformidad $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \beta$ tal que $W \subseteq V$

El siguiente resultado nos dice que todo espacio uniforme tiene una base de entornos simétricos.

**Proposición 1.2.4.** *Sean* $(X,\mathcal{U})$ *un espacio uniforme y*

$$Sim(\mathcal{U}) = \{V \in \mathcal{U} \colon V = V^{-1}\}.$$

*Entonces* $Sim(\mathcal{U})$ *es una base para* $\mathcal{U}$*.*

*Demostración.* Para cada $U \in \mathcal{U}$, $U \cap U^{-1} \in Sim(\mathcal{U})$ y $U \cap U^{-1} \subseteq U$. Por tanto, $Sim(\mathcal{U})$ es una base para $\mathcal{U}$. □

El siguiente lema nos muestra una propiedad que cumplen los inversos de los subconjuntos de los espacios producto.

**Lema 1.2.5.** *Sean* $X$ *un conjunto y* $V,W \subseteq X \times X$*. Si* $V \subseteq W$*, entonces* $V^{-1} \subseteq W^{-1}$*.*

*Demostración.* Sea $(y,x) \in V^{-1}$, entonces $(x,y) \in V \subseteq W$. Por lo que $(x,y) \in W$, así que $(y,x) \in W^{-1}$. Concluimos que $V^{-1} \subseteq W^{-1}$. □

El siguiente lema que presentamos nos dice cómo podemos generar una uniformidad en un conjunto $X$.

**Proposición 1.2.6.** *Si* $X$ *es un conjunto y* $\beta$ *es una familia de subconjuntos de* $X \times X$*, donde* $\beta$ *satisface las primeras cuatro condiciones de la definición de uniformidad, entonces* $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X : \exists V \in \beta \text{ tal que } V \subseteq U\}$ *es una uniformidad en* $X$*.*

*Demostración.* Para mostrar que $\mathcal{U}$ es una uniformidad en $X$ probaremos que se satisfacen las condiciones de la definición de uniformidad. Notemos que $\beta \subseteq \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{U}$ satisface claramente las primeras tres condiciones de la definición de uniformidad. Sólo hace falta mostrar las condiciones iv) y v). Primero veamos que se cumple la condición iv), sea $U \in \mathcal{U}$. Como $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \beta$ tal que $V \subseteq U$. Por el lema 1.2.5 tenemos que $V^{-1} \subseteq U^{-1}$. Como $V^{-1} \in \beta$, se tiene que $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Ahora mostremos que se cumple la condición v), sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq W \subseteq X \times X$. Como $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \beta$ tal que $V \subseteq U \subseteq W$. Por lo cual $W \in \mathcal{U}$. Esto muestra la condición que hacía falta. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una uniformidad en $X$. $\square$

La siguiente proposición nos da un ejemplo que muestra que los espacios uniformes son generalizaciones de los espacios métricos.

**Proposición 1.2.7.** *Sea $d$ una métrica en $X$, entonces $d$ induce una uniformidad $\mathcal{U}_d$ en $X$.*

*Demostración.* Para $n \in \mathbb{N}$ sea $U_n = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \frac{1}{n}\}$ y sea $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que $\beta$ es numerable y mostremos que $\beta$ es base para una uniformidad $\mathcal{U}_d$ en $X$.

i) Es claro que $\Delta_X \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $r = \text{máx}\{m, n\}$, por lo que $n \leq r$ y $m \leq r$. Así que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$ y además $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{m}$. Es claro que $U_r \subseteq U_n \cap U_m$.

iii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < \frac{m}{2}$. Se sigue que $\frac{2}{m} < \frac{1}{n}$. Afirmamos que $U_m^2 \subseteq U_n$. Sea $(x, y) \in U_m^2$, entonces existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in U_m$ y $(z, y) \in U_m$. Por lo que $d(x, z) < \frac{1}{m}$ y $d(z, y) < \frac{1}{m}$. Por la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{2}{m} < \frac{1}{n}.$$

Esto muestra que $(x, y) \in U_n$ y con esto se sigue que $U_m^2 \subseteq U_n$.

iv) Sólo falta probar que $U_n = U_n^{-1}$. Esta igualdad se satisface pues $d$ es una métrica en $X$ por lo que $d(x, y) = d(y, x)$.

De lo mostrado en los incisos anteriores y aplicando la proposición 1.2.6, concluimos que $\beta$ es una base (numerable) de una uniformidad $\mathcal{U}_d$ en $X$. $\square$

Cada uniformidad $\mathcal{U}$ en un conjunto $X$ induce una topología $\tau_{\mathcal{U}}$ en $X$ de la siguiente manera:

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{G \subseteq X : \forall x \in G, \ \exists V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B(x, V) \subseteq G\}.$$

Entonces cada espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ define un espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{U}})$. La topología $\tau_{\mathcal{U}}$ generada por la uniformidad $\mathcal{U}$ es llamada la ***topología inducida*** por $\mathcal{U}$.

**Lema 1.2.8.** *La familia* $\{B(x,U) \subseteq X : U \in \mathcal{U}\}$ *es una base de vecindades para cada punto* $x \in X$.

*Demostración.* Denotemos por $B$ a la familia $\{B(x,U) \subseteq X : U \in \mathcal{U}\}$. Probemos que $B$ es una base de vecindades usando la caracterización de base de vecindades (ver teorema 4.5 de [41]).

a) Para cada $U \in \mathcal{U}$ tenemos que $(x,x) \in U$ para cada $x \in X$. Entonces $x \in B(x,U)$.

b) Sea $x \in X$. Dados $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, se tiene que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ y

$$B(x, U_1 \cap U_2) \subseteq B(x,U_1) \cap B(x,U_2).$$

c) Sea $x \in X$. Si $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $V^2 \subseteq U$. Por lo que $B(x,V) \in B$. Como $V \in Sim(\mathcal{U})$, se tiene que para cada $y \in B(x,V)$, $B(y,V) \subseteq B(x,U)$. En efecto, si $z \in B(y,V)$, entonces $(y,z) \in V$ y $(x,y) \in V$, por lo que $(x,z) \in V^2 \subseteq U$. Así $z \in B(x,U)$.

De a), b) y c) (ver teorema 4.5 de [41]) podemos concluir que $B$ es una base de vecindades de una topología $\sigma$ en $X$. Note que

$$\sigma = \{G \subseteq X : \forall x \in X \;\; \exists V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B(x,V) \subseteq G\} = \tau_{\mathcal{U}}.$$

Por tanto, $B$ es una base de vecindades de $(X, \tau_{\mathcal{U}})$. □

A la topología producto inducida por $\tau_{\mathcal{U}}$ sobre $X \times X$ la denominaremos ***topología producto uniforme***. Las propiedades 1) y 2) de la siguiente proposición nos dicen que las colecciones $\{B(x,V) \times B(y,W) : x,y \in X; V,W \in \mathcal{U}\}$ y $\{B(x,V) \times B(y,V) : x,y \in X; V \in \mathcal{U}\}$ generan la topología producto uniforme y además los elementos de $\mathcal{U}$ son vecindades de la diagonal.

**Proposición 1.2.9.** *Sea* $(X,\mathcal{U})$ *un espacio uniforme. Entonces se cumple lo siguiente:*

1) *Para todo* $U \subset X \times X$*, el interior de* $U$ *en la topología producto uniforme es*

$$\begin{aligned} int(U) &= \{(x,y) \in X \times X : \exists\, V,W \in \mathcal{U} \text{ tales que } B(x,V) \times B(y,W) \subseteq U\} \\ &= \{(x,y) \in X \times X : \exists\, V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B(x,V) \times B(y,V) \subseteq U\}. \end{aligned}$$

2) *Si $U \in \mathcal{U}$, entonces $int(U) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, todo elemento de $\mathcal{U}$ es una vecindad de la diagonal en la topología producto uniforme.*

3) *La familia $\{V \in Sim(\mathcal{U}) : V$ es abierto $\}$ es una base para $\mathcal{U}$.*

4) *Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $\overline{A} = \bigcap\{B(A,U) : U \in \mathcal{U}\}$.*

5) *Para cada $A \subseteq X \times X$, se tiene que $\overline{A} = \bigcap\{U \circ A \circ U : U \in \mathcal{U}\}$, donde la cerradura es tomada en la topología producto uniforme.*

6) *La familia $\{V \in Sim(\mathcal{U}) : V$ es cerrado$\}$ es una base para $\mathcal{U}$.*

*Demostración.*

1) Denotemos por $A$ a $\{(x,y) \in X \times X : \exists\, V, W \in \mathcal{U}$ tales que $B(x,V) \times B(y,W) \subseteq U\}$ y por $B$ a $\{(x,y) \in X \times X : \exists\, V \in \mathcal{U}$ tales que $B(x,V) \times B(y,V) \subseteq U\}$. Note que $B \subseteq A$. Veamos que $int(U) = A$. En efecto, si $(x,y) \in int(U)$, existen $V, W \in \mathcal{U}$ tales que $B(x,V) \times B(y,W) \subseteq U$. En consecuencia, $(x,y) \in A$. Si $(x,y) \in A$, entonces $(x,y) \in B(x,V) \times B(y,W) \subseteq U$ con $V, W \in \mathcal{U}$. Como $x \in B(x,V)$ y $y \in B(y,W)$ existen $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$ tales que $x \in U_1 \subseteq B(x,V)$ y $y \in U_2 \subseteq B(y,W)$. Entonces

$$(x,y) \in U_1 \times U_2 \subseteq U.$$

Como $int(U)$ es el abierto más grande contenido en $U$, se tiene que $(x,y) \in int(U)$. Se sigue que $int(U) = A$. Ahora probemos que $A \subseteq B$. Sea $(x,y) \in A$. Entonces existen $V, W \in \mathcal{U}$ tales que $B(x,V) \times B(y,W) \subseteq U$. Como $V \cap W \in \mathcal{U}$, se sigue que $B\left(x, V \cap W\right) \times B\left(y, V \cap W\right) \subseteq U$. Por lo que $(x,y) \in B$. Se concluye que

$$\begin{aligned} int(U) &= \{(x,y) \in X \times X : \exists\, V, W \in \mathcal{U} \text{ tales que } B(x,V) \times B(y,W) \subseteq U\} \\ &= \{(x,y) \in X \times X : \exists\, V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B(x,V) \times B(y,V) \subseteq U\}. \end{aligned}$$

2) Para cada $U \in \mathcal{U}$, existen $V \in Sim(\mathcal{U})$ y $W \in \mathcal{U}$ tales que $V^2 \subseteq W$ y $W^2 \subseteq U$. Para probar que $int(U) \in \mathcal{U}$, mostraremos que $V \subseteq int(U)$. En efecto, sea $(x,y) \in V$. Ahora consideremos a $B(x,V)$ y $B(y,V)$. Probaremos que $B(x,V) \times B(y,V) \subseteq U$. Sea $(a,b) \in B(x,V) \times B(y,V)$. Entonces, $(x,a)$ y $(y,b)$ pertenecen a $V$. Por lo que $(a,x) \in V$. Se sigue que

$$(a,y) \in V \circ V = V^2 \subseteq W.$$

Además,

$$(y,b) \in V \circ V = V^2 \subseteq W.$$

Por tanto,

$$(a,b) \in W \circ W = W^2 \subseteq U.$$

Se sigue que para cada $(x,y) \in V$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$B(x,V) \times B(y,V) \subseteq U.$$

En consecuencia, $(x,y) \in int(U)$. Finalmente, concluimos que $int(U) \in \mathcal{U}$.

3) Esta afirmación es clara pues

$$int(U) \cap (int(U))^{-1} \subseteq U \quad \text{y} \quad int(U) \cap (int(U))^{-1} \in Sim(\mathcal{U})$$

para cada $U \in \mathcal{U}$.

4) Primero demostraremos que $\bigcap\{B(A,U) : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \overline{A}$. Para mostrar esto, afirmamos lo siguiente: si $x \notin \overline{A}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin B(A,V)$. A continuación probaremos la afirmación. Sea $x \in X$ tal que $x \notin \overline{A}$. Como $x \notin \overline{A}$, existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $A \cap B(x,V) = \emptyset$. Se sigue que $x \notin B(A,V)$. De lo contrario, existe $a \in A$ tal que $(a,x) \in V$, por lo que $(x,a) \in V$. En consecuencia, $a \in B(x,V)$ lo que es una contradicción pues $A \cap B(x,V) = \emptyset$. Por tanto, si $x \notin \overline{A}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin B(A,V)$.
Ahora mostraremos que $\overline{A} \subseteq \bigcap\{B(A,U) : U \in \mathcal{U}\}$. Para probar esta contención, afirmamos lo siguiente: si $x \notin \bigcap\{B(A,U) : U \in \mathcal{U}\}$, entonces $x \notin \overline{A}$. A continuación probaremos la afirmación.
Sea $x \in X$ tal que $x \notin \bigcap\{B(A,U) : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces, existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $x \notin B(A,V)$, es decir, para cada $a \in A$, $(a,x) \notin V$ por lo que $(x,a) \notin V$ para cada $a \in A$. En consecuencia, $A \cap B(x,V) = \emptyset$. Como $\Delta_X \subseteq V$, se tiene que $x \in B(x,V)$. Por tanto, $x \notin \overline{A}$. Concluimos que $\overline{A} \subseteq \bigcap\{B(A,U) : U \in \mathcal{U}\}$.

5) Para demostrar que $\bigcap\{U \circ A \circ U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \overline{A}$, mostraremos que si $x \notin \overline{A}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin V \circ A \circ V$. Sea $(x,y) \in X \times X$ tal que $(x,y) \notin \overline{A}$. Como $(x,y) \notin \overline{A}$, existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $A \cap (B(x,V)) \times (B(y,V)) = \emptyset$. Afirmamos que $(x,y) \notin V \circ A \circ V$. En efecto, supongamos para llegar a una contradicción que $(x,y) \in V \circ A \circ V$. Entonces existen $z, w \in X$ tales que $(x,z) \in V$, $(w,y) \in V$, $(y,w) \in V$ y $(z,w) \in A$. Como $(x,z) \in V$, se tiene que $z \in B(x,V)$. Como $(y,w) \in V$, entonces $w \in B(y,V)$. En consecuencia $(z,w) \in A \cap (B(x,V)) \times (B(y,V))$ lo que es una contradicción. Por tanto, si $x \notin \overline{A}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin V \circ A \circ V$.
Ahora mostraremos que $\overline{A} \subseteq \bigcap\{U \circ A \circ U : U \in \mathcal{U}\}$. Para probar esta

contención, afirmamos lo siguiente: si $(x,y) \notin \bigcap\{U \circ A \circ U : U \in \mathcal{U}\}$, entonces $(x,y) \notin \overline{A}$. En efecto, si $(x,y) \in X \times X$ tal que $(x,y) \notin \bigcap\{U \circ A \circ U : U \in \mathcal{U}\}$, entonces existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $(x,y) \notin V \circ A \circ V$. Se sigue que $A \cap (B(x,V)) \times (B(y,V)) = \emptyset$. De lo contrario, existe $(a_1,a_2) \in A \cap (B(x,V)) \times (B(y,V))$. Es decir, $(a_1,a_2) \in A$, $(x,a_1) \in V$ y $(y,a_2) \in V$ por lo que $(a_2,y) \in V$. En consecuencia,

$$(x,y) \in V \circ A \circ V,$$

lo que es una contradicción. Concluimos que $\overline{A} \subseteq \bigcap\{U \circ A \circ U : U \in \mathcal{U}\}$.

6) Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces, existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $V^3 \subseteq U$. Por 5), se tiene que $\overline{V} \subseteq V^3 \subseteq U$. Ahora probemos que $\overline{V} \in Sim(\mathcal{U})$. Si $(x,y) \in \overline{V}$, entonces para cada $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $(B(x,U) \times B(y,U)) \cap V \neq \emptyset$. Como $V \in Sim(\mathcal{U})$, se sigue que $(B(y,U) \times B(x,U)) \cap V \neq \emptyset$. Por lo que $\overline{V} \in Sim(\mathcal{U})$. □

De la proposición anterior obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.2.10.** *Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $x \in X$. Si $V \in \mathcal{U}$ es un abierto en la topología producto uniforme, entonces $B(x,V)$ es un conjunto abierto en $\tau_{\mathcal{U}}$.*

*Demostración.* Probaremos que $X - B(x,V)$ es cerrado. Si $y \in \overline{X - B(x,-V)}$, para cada $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $B(y,U) \cap X - B(x,V) \neq \emptyset$. Afirmamos que $y \in X - B(x,V)$. De lo contrario $y \in B(x,V)$ y en consecuencia, $(x,y) \in V$. Como $V$ es abierto y por 1) de la proposición anterior, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $B(x,W) \times B(y,W) \subseteq V$. Así, para cada $z \in B(y,W)$ se tiene que $z \in B(x,V)$. Por lo que $B(y,W) \cap X - B(x,V) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por tanto, $y \in X - B(x,V)$. Concluimos que $X - B(x,V)$ es un conjunto cerrado. Finalmente, $B(x,V)$ es un conjunto abierto. □

El siguiente resultado nos ayudará a demostrar el corolario 1.2.12.

**Lema 1.2.11.** *Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $x \in X$. Si $V \in \mathcal{U}$ es un cerrado en la topología producto uniforme, entonces $B(x,V)$ es un conjunto cerrado en $\tau_{\mathcal{U}}$.*

*Demostración.* Mostraremos que $\overline{B(x,V)}^{\tau_{\mathcal{U}}} \subseteq B(x,V)$. Para esto probemos que si $y \notin B(x,V)$, entonces $y \notin \overline{B(x,V)}^{\tau_{\mathcal{U}}}$. En efecto, si $y \notin B(x,V)$, entonces $(x,y) \notin V$. Como $V$ es cerrado, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que

$$(B(x,W) \times B(y,W)) \cap V = \emptyset.$$

De aquí se deduce que $B(y,W) \cap B(x,V) = \emptyset$, pues de lo contrario, existe $z \in B(y,W) \cap B(x,V)$. Se sigue que $(x,z) \in V$ y $(x,z) \in B(x,W) \times B(y,W)$, lo cual no puede suceder. Como $B(y,W) \cap B(x,V) = \emptyset$, concluimos que $y \notin \overline{B(x,V)}^{\tau_{\mathcal{U}}}$. □

De la proposición 1.2.9 y del lema anterior podemos concluir que todo espacio uniforme es un espacio regular.

**Corolario 1.2.12.** *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, entonces $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio regular.*

*Demostración.* Sean $x \in X$ y $G \in \beta_x$, donde $\beta_x$ es una base local de vecindades de $x \in X$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $G = B(x,U)$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Por la propiedad 6) de la proposición anterior, existe $V \in Sim(\mathcal{U})$ cerrado tal que $V \subseteq U$. Entonces,

$$x \in B(x,V) \subseteq B(x,U).$$

Del lema anterior se infiere que $B(x,V)$ es un conjunto cerrado. Por tanto, $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio regular. □

Ahora vamos a definir los subespacios uniformes.

**Definición 1.2.13.** Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme y $Y \subseteq X$ es un subconjunto cualquiera entonces

$$\mathcal{U}_Y = \{V \cap (Y \times Y) \colon V \in \mathcal{U}\}$$

es una uniformidad sobre $Y$, llamada ***uniformidad inducida*** por $\mathcal{U}$. Diremos que $(Y,\mathcal{U}_Y)$ es un ***subespacio uniforme*** de $(X,\mathcal{U})$. En este caso notemos que $(Y,\tau_{\mathcal{U}_Y})$ es un subespacio topológico de $(X,\tau_{\mathcal{U}})$.

## 1.3. Grupos topológicos

Dado un grupo $G$ y un elemento $g \in G$, definimos las traslaciones izquierdas $\lambda_g \colon G \to G$ y derechas $\rho_g \colon G \to G$ por las reglas de correspondencia $\lambda_g(x) = gx$ y $\rho_g(x) = xg$, para cada $x \in G$. Notemos que las traslaciones son funciones biyectivas de $G$ sobre sí mismo.

Si $A$ y $B$ son subconjuntos de $G$ definimos

$$AB = \{ab : a \in A \text{ y } b \in B\},$$

escribimos $aB$ en lugar de $\{a\}B$ y cuando $A = B$ se usará el símbolo $A^2$ para abreviar $AB$. Además

$$A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}.$$

Decimos que $A$ es simétrico si $A = A^{-1}$.

**Definición 1.3.1.** Un ***grupo paratopológico*** $G$ es un grupo $G$ con una topología en el conjunto $G$ que hace continua a la multiplicación, donde a $G \times G$ se le dota con la topología producto.

De ahora en adelante, denotaremos por $\mu\colon G \times G \to G$ a la multiplicación en $G$.

Dado un grupo $G$, la ***función inversión*** $In\colon G \to G$ está definida por la regla de correspondecia $In(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$.

**Definición 1.3.2.** Un ***grupo topológico*** es un grupo paratopológico tal que la función inversión es continua.

Notemos que cada grupo topológico es un grupo paratopológico. Sin embargo los números reales con su suma usual y con la topología de Sorgenfrey son un grupo paratopológico que no es grupo topológico.

A continuación presentamos un ejemplo de grupo topológico.

**Ejemplo 1.3.3.** Los números reales $\mathbb{R}$ con la suma usual y con su topología usual son un grupo topológico.

De forma equivalente, un grupo topológico es una terna $(G, \mu, \tau)$ que satisface las siguientes condiciones.

1) $(G, \mu)$ es un grupo.

2) $(G, \tau)$ es un espacio topológico.

3) Las funciones $\mu$ e $In$ son continuas.

Ahora veremos cómo construir grupos paratopológicos y topológicos a partir de otros. La propiedad de ser grupo topológico y paratopológico se preserva en productos y subgrupos.

**Teorema 1.3.4.** *[2] Sean $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de grupos paratopológicos (topológicos) y $e_\alpha$ el elemento neutro de $G_\alpha$, para cada $\alpha \in A$. Si $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, entonces $G$ es también un grupo paratopológico (topológico) con elemento neutro $e = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$ y con la multiplicación dada por $\mu(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\alpha y_\alpha)_{\alpha \in A}$.*

**Proposición 1.3.5.** *[2] Sean $G$ un grupo paratopológico (topológico) y $H$ un subgrupo de $G$. Entonces $H$ es un grupo paratopológico (topológico) con la topología que hereda de $G$.*

El siguiente resultado nos proporciona más información de las traslaciones.

**Proposición 1.3.6.** *[2] Si $G$ es un grupo paratopológico y $g$ un elemento de $G$, entonces:*

i) *La traslación derecha $\rho_g$ es un homeomorfismo del espacio $G$ en sí mismo;*

ii) *La traslación izquierda $\lambda_g$ es un homeomorfismo del espacio $G$ en sí mismo.*

En grupos topológicos tenemos un resultado extra por la continuidad de la función inversión.

**Proposición 1.3.7.** *[2] Si $G$ es un grupo topológico, entonces la función inversión es un homeomorfismo.*

Describir la topología en grupos paratopológicos y topológicos es generalmente una tarea más facil que hacerlo en un espacio topológico arbitrario. Basta describir una base local para la identidad del grupo.

**Proposición 1.3.8.** *[2] Sean $G$ un grupo paratopológico, $g \in G$ y $\beta_e$ una base local de la identidad. Entonces:*

i) $\beta_g = \{Ug : U \in \beta_e\}$ *es una base local de $g$ en $G$;*

ii) $\beta'_g = \{gU : U \in \beta_e\}$ *es una base local de $g$ en $G$.*

Decimos que un espacio topológico $X$ es ***homogéneo*** si para cada $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f$ del espacio $X$ sobre sí mismo tal que $f(x) = y$. En el caso de un grupo paratopológico, la traslación $\lambda_{gh^{-1}}$ es un homeomorfismo tal que $\lambda_{gh^{-1}}(h) = g$, lo cual demuestra el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.9.** *Todo grupo paratopológico es un espacio homogéneo.*

Dado un grupo paratopológico $G$ con identidad $e$, denotaremos por $\mathcal{N}(e)$ a la familia de vecindades abiertas de $e$ en $G$. El siguiente teorema es importante debido a que nos da una caracterización de la familia $\mathcal{N}(e)$. Dicho resultado nos proporciona un método para definir topologías de grupos paratopológicos.

**Teorema 1.3.10.** *[27] Sean $G$ un grupo paratopológico y $\beta$ una base local de la identidad $e$ de $G$, entonces:*

i) *para cada $U \in \beta$, existe un elemento $V \in \beta$ tal que $V^2 \subseteq U$;*

ii) *para cada $U \in \beta$ y cada $x \in U$, existe $V \in \beta$ tal que $Vx \subseteq U$;*

iii) *para cada $U \in \beta$ y cada $x \in G$, existe $V \in \beta$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$;*

iv) *para cada $U, V \in \beta$, existe $W \in \beta$ tal que $W \subseteq U \cap V$.*

*Recíprocamente, si $G$ es un grupo y $\beta$ una familia de subconjuntos de $G$, que satisface las condiciones i)-iv), entonces la familia $\{Ua : a \in G, U \in \beta\}$ es una base para una topología en $G$. Con esta topología $G$ es un grupo paratopológico y la familia $\{aU : a \in G, U \in \beta\}$ también es una base para la misma topología en $G$.*

**Nota:** Las propiedades i)-iv) del teorema anterior son conocidas como las ***condiciones de Pontryagin para grupos paratopológicos.*** En lo sucesivo, así haremos referencia a dichas condiciones.

**Proposición 1.3.11.** *Si $G$ es un grupo paratopológico y $\beta$ una base local de $e$ en $G$, entonces $G$ es un grupo topológico si y sólo si se cumple*

$$\textit{para cada } U \in \beta, \ \textit{existe } V \in \beta \textit{tal que } V^{-1} \subseteq U.$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$] Como $G$ es un grupo topológico, la función $In$ es continua, en particular es continua en $e$, entonces para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

[$\Leftarrow$ Como $G$ es un grupo paratopológico, la multiplicación $\mu$ es continua. Para mostrar que $G$ es un grupo topológico, debemos mostrar que $In$ es continua. Sea $W$ abierto en $G$. Veamos que $W^{-1}$ es abierto. Tomemos $x \in W^{-1}$. Notemos que $xW$ es vecindad abierta de $e$, así que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq xW$, por lo que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$. Por lo cual, $V^{-1} \subseteq U \subseteq xW$. Por consiguiente $V \subseteq W^{-1}x^{-1}$. De aquí $Vx \subseteq W^{-1}$. Como $G$ es un grupo paratopológico, $Vx$ es vecindad básica de $x$. Por lo tanto, $W^{-1}$ es abierto en $G$. Concluimos que $In$ es continua. Por lo que $G$ es un grupo topológico. $\square$

Del teorema 1.3.10 y la proposición 1.3.11 se desprende el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.12.** *Sean $G$ un grupo topológico y $\beta$ una base local de la identidad $e$ de $G$, entonces:*

i) *para cada $U \in \beta$, existe un elemento $V \in \beta$ tal que $V^2 \subseteq U$;*

ii) *para cada $U \in \beta$ y cada $x \in U$, existe $V \in \beta$ tal que $Vx \subseteq U$;*

iii) *para cada $U \in \beta$ y cada $x \in G$, existe $V \in \beta$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$;*

iv) *para cada $U, V \in \beta$, existe $W \in \beta$ tal que $W \subseteq U \cap V$;*

v) *para cada $U \in \beta$, existe $V \in \beta$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.*

*Recíprocamente, si $G$ es un grupo y $\beta$ una familia de subconjuntos de $G$, que satisface las condiciones i)-v), la familia $\{Ua : a \in G, U \in \beta\}$ es una base para una topología en $G$. Con esta topología $G$ es un grupo topológico y la familia $\{aU : a \in G, U \in \beta\}$ también es una base para la misma topología en $G$.*

**Nota:** Las propiedades i)-v) del teorema anterior son conocidas como las condiciones de Pontryagin para grupos topológicos. En lo sucesivo, así haremos referencia a dichas condiciones.

Los siguientes resultados son acerca de la metrización para grupos topológicos. Las demostraciones de estos resultados se puede encontrar en [2].

**Corolario 1.3.13.** *Sean $G$ un grupo topológico y $H$ un subgrupo de $G$. Entonces $\overline{H}$ es un subgrupo de $G$.*

**Proposición 1.3.14.** *Si $H$ es un subgrupo primero numerabe de un grupo topológico $G$, entonces $\overline{H}$ también es primero numerable.*

**Teorema 1.3.15** (G. Birkhoff, S. Kakutani)**.** *Un grupo topológico $G$ es metrizable si y sólo si es primero numerable.*

**Proposición 1.3.16.** *Sea $H$ un subgrupo metrizable de un grupo topológico $G$. Entonces $\overline{H}^G$ también es un subgrupo metrizable.*

*Demostración.* Denotemos por $K$ a $\overline{H}^G$. Del corolario 1.3.13 $K$ es un subgrupo de $G$. Como $H$ es metrizable, $H$ es primero numerable. De la proposición 1.3.14 $K$ es primero numerable y del teorema de Birkhoff-Kakutani se sigue que $K$ es metrizable. □

Sean $G$ un grupo topológico y una métrica $\rho$ en $G$. Decimos que $\rho$ es ***invariante por la derecha*** si $\rho(x,y) = \rho(xz,yz)$ para cada $x,y,z \in G$. Decimos que $\rho$ es ***invariante por la izquierda*** si $\rho(x,y) = \rho(zx,zy)$ para cada $x,y,z \in G$. El siguiente resultado nos dice que existen una métrica invariante por la derecha y una métrica invariante por la izquierda en un grupo topológico metrizable $G$ donde ambas métricas (la invariante por la derecha y la invariante por la izquierda) son compatibles con la topología de $G$.

**Teorema 1.3.17.** *[2] Cada grupo topológico metrizable $G$ admite una métrica invariante por la derecha $d_\rho$ y una métrica invariante por la izquierda $d_\lambda$. Además, ambas métricas generan la topología original de $G$.*

Ahora recordamos los siguientes resultados de espacios métricos.

**Definición 1.3.18.** Decimos que dos métricas $d_1$ y $d_2$ de un conjunto $X$ son ***equivalentes*** si existen constantes positivas $c$ y $k$ tales que

$$cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq kd_1(x,y).$$

La demostración de la siguiente proposición se ve en un curso básico de espacios métricos y si el lector está interesado en ver la demostración puede consultar [15].

**Proposición 1.3.19.** *Si $d_1, d_2$ son métricas equivalentes definidas sobre un conjunto $X$, entonces $(X,d_1)$ y $(X,d_2)$ tienen las mismas sucesiones de Cauchy. En consecuencia $(X,d_1)$ es completo si y sólo si $(X,d_2)$ es completo.*

**Nota 1.3.20.** Del teorema 1.3.17 podemos concluir que $d_\rho$ y $d_\lambda$ son equivalentes y de la proposición anterior se tiene que $(G,d_\rho)$ es completo si y sólo si $(G,d_\lambda)$ es completo. Este hecho lo usaremos para demostrar el ejemplo 3.1.1.

## 1.4. Uniformidades en grupos topológicos

Dado un grupo topológico $G$, la continuidad de la multiplicación del grupo nos permite proporcionar al grupo una estructura de espacio uniforme.

Sean $G$ un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e)$. Definamos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{L}_U = \{(x,y) \in G \times G : y \in xU\},$$
$$\mathcal{R}_U = \{(x,y) \in G \times G : y \in Ux\}.$$

A continuación mostraremos que las familias $\{\mathcal{L}_U : U \in \mathcal{N}(e)\}$ y $\{\mathcal{R}_U : U \in \mathcal{N}(e)\}$ son bases para uniformidades en el grupo topológico $G$.

**Proposición 1.4.1.** *Si $(G,\tau)$ es un grupo topológico y*

$$\beta = \{\mathcal{L}_U : U \in \mathcal{N}(e)\}.$$

*Entonces $\beta$ es base de una uniformidad $\mathcal{L}$ en $G$ y $\tau$ es inducida por $\mathcal{L}$.*

*Demostración.* Primero veamos que $\beta$ es base de una uniformidad en $G$. Para esto probemos las propiedades i)-iv) de la definición de uniformidad.

i) Como claramente $x \in xU$, para $U \in \mathcal{N}(e)$, obtenemos que $\Delta_G \subseteq \mathcal{L}_U \in \beta$.

ii) Para $U, V \in \mathcal{N}(e)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{U\cap V} &= \{(x,y) \in G \times G : y \in x(U \cap V)\}\\ &= \{(x,y) \in G \times G : y \in xU\} \cap \{(x,y) \in G \times G : y \in xV\}\\ &= \mathcal{L}_U \cap \mathcal{L}_V.\end{aligned}$$

iii) Probemos que para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $\mathcal{L}_V\mathcal{L}_V \subseteq \mathcal{L}_U$. Por las condiciones de Pontryagin, se tiene que para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $VV \subseteq U$. Sea $(x,y) \in \mathcal{L}_V\mathcal{L}_V$. Entonces existe $z \in G$ tal que $(x,z) \in \mathcal{L}_V$ y $(z,y) \in \mathcal{L}_V$, con esto $z \in xV$ y $y \in zV$. Se sigue que

$$y \in zV \subseteq xVV \subseteq xU.$$

Esto muestra que $(x,y) \in \mathcal{L}_U$ y se concluye la prueba de que $\mathcal{L}_V\mathcal{L}_V \subseteq \mathcal{L}_U$.

iv) Solo nos hace falta mostrar que si $\mathcal{L}_U \in \beta$, entonces existe $\mathcal{L}_V$ tal que $(\mathcal{L}_V)^{-1} \subseteq \mathcal{L}_U$. En efecto, como $U \in \mathcal{N}(e)$ por las condiciones de Pontryagin existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$. Afirmamos que $(\mathcal{L}_V)^{-1} \subseteq \mathcal{L}_U$. Sea $(x,y) \in (\mathcal{L}_V)^{-1}$, por lo que $(y,x) \in \mathcal{L}_V$. En consecuencia, $x \in yV$, por lo que $x =$

$yv$ para algún $v \in V$, se sigue que $y = xv^{-1} \in xV^{-1} \subseteq xU$. Concluimos que $(x, y) \in \mathcal{L}_U$. Por tanto, $(\mathcal{L}_V)^{-1} \subseteq \mathcal{L}_U$. Finalmente, $\beta$ es base de una uniformidad $\mathcal{L}$ en $G$.

Ahora mostremos que la topología del grupo topológico es igual a la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{L}$, es decir, $\tau = \tau_{\mathcal{L}}$. Para esto notemos que para cada $U \in \mathcal{N}(e)$

$$B(x, \mathcal{L}_U) = \{y \in G : (x, y) \in \mathcal{L}_U\} = \{y \in G : y \in xU\} = xU.$$

De aquí vemos que $\tau$ y $\tau_{\mathcal{L}}$ tienen el mismo sistema de vecindades. Por lo cual, son la misma topología. $\square$

La siguiente proposición muestra que la familia $\{\mathcal{R}_U : U \in \mathcal{N}(e)\}$ es base para una uniformidad en el grupo topológico $G$; dado que su demostración es completamente análoga a la proposición anterior omitiremos la prueba.

**Proposición 1.4.2.** *Sean $(G, \tau)$ un grupo topológico y*

$$\beta = \{\mathcal{R}_U : U \in \mathcal{N}(e)\},$$

*entonces $\beta$ es base de una uniformidad $\mathcal{R}$ en $G$ y $\tau$ es inducida por $\mathcal{R}$.*

A $\mathcal{L}$ se le llama la ***uniformidad izquierda*** en $G$ y a $\mathcal{R}$ se le llama la ***uniformidad derecha*** en $G$.

Ahora note que para cada $U \in \mathcal{N}(e)$ se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U = \{(x, y) \in G \times G : y \in xU \cap Ux\} \neq \emptyset,$$

pues $\Delta_G \subseteq \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U \neq \emptyset$. La siguiente proposición nos dice que podemos definir una uniformidad más en el grupo topológico $G$.

**Proposición 1.4.3.** *Sean $(G, \tau)$ un grupo topológico y*

$$\beta = \{\mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U : U \in \mathcal{N}(e)\}.$$

*Entonces $\beta$ es base de una uniformidad $\mathcal{B}$ en $G$ y $\tau$ es inducida por $\mathcal{B}$.*

*Demostración.* Primero veamos que $\beta$ es base de una uniformidad en $G$. Para esto probemos las propiedades i)-iv) de la definición de uniformidad.

i) Es claro que $\Delta_G \subseteq \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U$ para cada $U \in \mathcal{N}(e)$.

ii) Para $U, V \in \mathcal{N}(e)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{U\cap V} \cap \mathcal{R}_{U\cap V} &= \{(x,y) \in G \times G : y \in x(U \cap V) \cap (U \cap V)x\} \\ &= \{(x,y) : y \in xU \cap Ux\} \cap \{(x,y) : y \in xV \cap Vx\} \\ &= (\mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U) \cap (\mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V) \,. \end{aligned}$$

iii) Probemos que para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $(\mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V)^2 \subseteq \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U$. Por las condiciones de Pontryagin, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Sea $(x, y) \in (\mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V)^2$. Entonces existe $z \in G$ tal que $(x, z) \in \mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V$ y $(z, y) \in \mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V$, es decir, $z \in xV \cap Vx$ y $y \in zV \cap Vz$. Se sigue que

$$y \in zV \subseteq xVV \subseteq xU,$$

$$y \in Vz \subseteq VVx \subseteq Ux.$$

Esto muestra que $(x, y) \in \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U$ y esto concluye la prueba de que

$$(\mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V)^2 \subseteq \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U.$$

iv) Para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V = V^{-1}$ y $V \subseteq U$. En consecuencia $(\mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V)$ es simétrico y $(\mathcal{L}_V \cap \mathcal{R}_V)^{-1} \subseteq \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U$.

Concluimos que $\beta$ es base de una uniformidad $\mathcal{B}$ en $G$.

Ahora mostremos que la topología del grupo topológico es igual a la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{B}$, es decir, $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$. Para esto notemos que para cada $U \in \mathcal{N}(e)$

$$\begin{aligned} B(x, \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U) &= \{y \in G : (x, y) \in \mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U\} \\ &= \{y \in G : y \in xU \cap Ux\} = xU \cap Ux. \end{aligned}$$

De aquí vemos que $\tau$ y $\tau_{\mathcal{B}}$ tienen el mismo sistema de vecindades. Por lo cual son la misma topología. $\square$

A la uniformidad $\mathcal{B}$ en $G$ generada por $\beta = \{\mathcal{L}_U \cap \mathcal{R}_U : U \in \mathcal{N}(e)\}$ le llamaremos la ***uniformidad bilateral*** del grupo $G$.

# Capítulo 2

# Completación de espacios uniformes

En este capítulo presentamos una completación de los espacios uniformes separados y vemos que esta completación también es separada. Este capítulo es importante pues veremos en el próximo capítulo cómo se relaciona con la completación de Raĭkov de grupos topológicos.

## 2.1. Completación de espacios uniformes

**Definición 2.1.1.**

i) Dados un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ y $V \in \mathcal{U}$, decimos que $A \subseteq X$ es $V$-***pequeño*** si $A \times A \subseteq V$.

ii) Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un ***filtro de Cauchy*** si $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$ y para todo $V \in \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A$ es $V$-pequeño.

Ahora presentaremos un ejemplo de un filtro de Cauchy. Para este ejemplo necesitaremos las siguientes nociones.

En un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, una ***sucesión*** $(x_n) \subseteq X$ ***es de Cauchy*** si para todo $V \in \mathcal{U}$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo par $m, n \geq K$ se tiene que $(x_m, x_n) \in V$. El ***filtro elemental asociado a una sucesión*** $\mathcal{F}_{(x_n)}$ es el filtro generado por la siguiente familia

$$\gamma = \{F_n \colon n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{donde} \quad F_n = \{x_m \colon m \geq n\}.$$

**Ejemplo 2.1.2.** En un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ el filtro elemental asociado a una sucesión de Cauchy es un filtro de Cauchy.

*Demostración.* Sea $V \in \mathcal{U}$. Como $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_m, x_n) \in V$ para cada $m, n \geq K_0$. Entonces, existe $F_{K_0} \in \mathcal{F}_{(x_n)}$ tal que $x_n, x_m \in F_{K_0}$ para cada $m, n \geq K_0$. Por como está definido $F_{K_0}$, podemos concluir que $F_{K_0} \times F_{K_0} \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_{(x_n)}$ es un filtro de Cauchy en $X$. $\square$

Los siguientes lemas nos ayudan a demostrar la proposición 2.1.5.

**Lema 2.1.3.** *Todo refinamiento de un filtro de Cauchy es de Cauchy.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en $X$ tales que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy y $\mathcal{G}$ es un refinamiento de $\mathcal{F}$. Demostraremos que $\mathcal{G}$ es de Cauchy. Sea $V \in \mathcal{U}$. Por hipótesis, $\mathcal{F}$ es de Cauchy. Entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \times A \subseteq V$. Como $A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, concluimos que $\mathcal{G}$ es un filtro de Cauchy. $\square$

**Lema 2.1.4.** *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces para cada $x \in X$, el filtro de vecindades $\beta_x$ es un filtro de Cauchy.*

*Demostración.* Sea $V \in \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $V$ es un abierto en la topología producto uniforme, de lo contrario consideramos al entorno $int(V)$. Como $(x, x) \in V$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B(x, U) \times B(x, U) \subseteq V$. Por lo que, $B(x, U)$ es $V$-pequeño. Por lo tanto, para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B(x, U) \in \beta_x$ y $B(x, U) \times B(x, U) \subseteq V$. $\square$

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que un filtro sea de Cauchy.

**Proposición 2.1.5.** *Todo filtro convergente en $(X, \tau_{\mathcal{U}})$, donde $\mathcal{U}$ es una uniformidad en $X$, es de Cauchy.*

*Demostración.* La demostración es inmediata de los lemas anteriores. $\square$

**Definición 2.1.6.** Decimos que un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es ***completo*** si todo filtro de Cauchy es convergente respecto a la topología $\tau_{\mathcal{U}}$.

El siguiente resultado es una condición suficiente para la convergencia de un filtro de Cauchy.

**Proposición 2.1.7.** *Si $x$ es un punto de adherencia de un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ converge a $x$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $X$. Afirmamos que para todo $V \in \mathcal{U}$, existe $F \in \mathcal{F}$ cerrado que es $V$-pequeño. En efecto, sea $V \in \mathcal{U}$. Por la proposición 1.2.9, existe $W \in \mathcal{U}$ cerrado tal que $W \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A$ es $W$-pequeño. Sea $F = \overline{A}^{\tau_{\mathcal{U}}}$. Así

$$F \times F \subseteq W \subseteq V.$$

Entonces, $F$ es $W$-pequeño y, por tanto, $V$-pequeño. Además, $F$ es cerrado y pertenece a $\mathcal{F}$ pues $A \subseteq F$. Lo que demuestra nuestra afirmación.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ tiene un punto de adherencia $x \in X$. Vamos a demostrar que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\beta_x$. Por lo demostrado anteriormente, para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $F \in \mathcal{F}$ cerrado tal que $F \times F \subseteq V$. Como $x$ es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$, tenemos que $x \in \overline{F} = F$. Por lo tanto, para cada $y \in F$ se tiene que $(x, y) \in F \times F \subseteq V$ y, en consecuencia, $y \in B(x, V)$. Es decir, $F \subseteq B(x, V)$. Esto implica que $\beta_x \subseteq \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ converge a $x$. □

**Corolario 2.1.8.** *Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ filtros en $X$. Supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy y $\mathcal{G}$ converge a $x \in X$. Entonces $\mathcal{F}$ converge a $x$.*

*Demostración.* Como $\mathcal{G}$ converge a $x$, se tiene que $x$ es punto de adherencia de $\mathcal{F}$ y por el teorema anterior, concluimos que $\mathcal{F}$ converge a $x$. □

Dados dos espacios topológicos $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$, recordemos que una función $\varphi\colon X \to Y$ es un ***encaje topológico*** si $\varphi$ es inyectiva, continua y abierta sobre su imagen.

Sean $X$, $Y$ conjuntos y $f\colon X \to Y$ una función. Usaremos la siguiente notación:

1) Para todo $U \subset X \times X$,

$$(f \times f)(U) = \{(f(x), f(y)) : (x, y) \in U\}.$$

2) Para todo $U \subset Y \times Y$,

$$(f \times f)^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times X : (f(x), f(y)) \in U\}.$$

**Definición 2.1.9.** Sean $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$ espacios uniformes.

a) Una función $f\colon X \to Y$ es ***uniformemente continua*** si para todo $V \in \mathcal{U}_Y$, existe $U \in \mathcal{U}_X$ tal que $(f \times f)(U) \subset V$. En otras palabras, $f$ es uniformemente continua si para todo $V \in \mathcal{U}_Y$, el conjunto $(f \times f)^{-1}(V)$ pertenece a $\mathcal{U}_X$.

b) Si $f\colon X \to Y$ es biyectiva y $f$, $f^{-1}$ son uniformemente continuas, decimos que $f$ es un ***isomorfismo uniforme*** y que $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$ son ***uniformemente equivalentes***.

c) Decimos que $\varphi\colon X \to Y$ es un ***encaje uniforme*** si es uniformemente continua y un encaje topológico de $(X, \tau_{\mathcal{U}_X})$ en $(Y, \tau_{\mathcal{U}_Y})$.

d) Una ***completación uniforme*** de $(X,\mathcal{U}_X)$ es un espacio uniforme completo $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{U}})$ junto con un encaje uniforme $\sigma\colon (X,\mathcal{U}_X) \to (\tilde{X},\tilde{\mathcal{U}})$ tal que $\sigma(X)$ es denso en $(\tilde{X}, \tau_{\tilde{\mathcal{U}}})$.

**Ejemplo 2.1.10.** Si $X$ es un subespacio uniforme de $Y$, entonces la inclusión $i\colon X \to Y$ es un encaje uniforme.

Ahora describiremos la construcción de una completación uniforme Hausdorff para espacios uniformes Hausdorff. Para ello necesitaremos los siguientes resultados y conceptos.

Decimos que una uniformidad $\mathcal{U}$ en $X$ es ***separada*** si

$$\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X.$$

Si $\mathcal{U}$ es separada, diremos que el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es ***separado***.

El siguiente resultado nos muestra una caracterización de los espacios uniformes separados.

**Proposición 2.1.11.** *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $(X,\mathcal{U})$ es separado si y sólo si $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio $T_3$.*

*Demostración.* Supongamos que $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme separado. Sean $x$ y $y$ elementos de $X$ tales que $x \neq y$. Se sigue que $(x, y) \notin \Delta_X = \bigcap \mathcal{U}$. Entonces, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \notin V$, es decir, $y \notin B(x, V)$. De manera similar, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin B(y, U)$. Por tanto, $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es $T_1$. Del corolario 1.2.12, concluimos que $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio $T_3$.

Ahora supongamos que $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio $T_3$, en particular es Hausdorff. Sabemos que $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Mostremos la contención contraria. Sean $x$ y $y$ elementos de $X$ distintos. Como el espacio topológico es Hausdorff, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin B(x, V)$, es decir, $(x, y) \notin V$. Por tanto, $(x, y) \notin \bigcap \mathcal{U}$. Esto demuestra que $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$. □

En espacios uniformes se demuestra que todo espacio regular es un espacio completamente regular (ver [18]) por lo que si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme separado, entonces $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio Tychonoff.

Si $X$ es un espacio uniforme, un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $X$ es ***minimal*** si no contiene estrictamente a ningún otro filtro de Cauchy.

El siguiente resultado nos dice que cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio uniforme contiene un único filtro de Cauchy minimal.

**Teorema 2.1.12.** *Sean $X$ un espacio uniforme con uniformidad $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $X$. Entonces $\mathcal{F}$ contiene un único filtro de Cauchy minimal $\mathcal{F}_0$.*

*Demostración.* Sea $\gamma$ una base de $\mathcal{F}$. Mostremos que

$$\gamma_0 = \{B\,(A, V) : A \in \gamma \text{ y } V \in Sim(\mathcal{U})\}$$

es base de un filtro de Cauchy minimal $\mathcal{F}_0$. Para esto veamos que $\gamma_0$ satisface las condiciones de la definición 1.1.3. Entonces,

i) Primero note que $\gamma_0 \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \gamma_0$ pues $\gamma$ y $Sim(\mathcal{U})$ son bases.

ii) Si $U, V \in Sim(\mathcal{U})$ y $F, G \in \gamma$, entonces $B(F, U)$ y $B(G, V)$ son elementos de $\gamma_0$. Como $\gamma$ y $Sim(\mathcal{U})$ son bases, existen $W \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $W \subseteq U \cap V$ y $H \in \gamma$ tal que $H \subseteq F \cap G$. Por lo que $B(H, W) \in \gamma_0$ y $B(H, W) \subseteq B(F, U) \cap B(G, V)$.

De i) y ii) concluimos que $\gamma_0$ es base de un filtro $\mathcal{F}_0$. Además, como $F \subseteq B(F, V)$ para cada $V \in Sim(\mathcal{U})$, obtenemos que $B(A, V) \in \mathcal{F}$. Luego $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$.

Ahora probemos que $\mathcal{F}_0$ es un filtro de Cauchy. Sea $U \in \mathcal{U}$. Podemos encontar $V \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $V^3 \subseteq U$. Como $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy, existe $A \in \gamma$ tal que $A \times A \subseteq V$. Veamos que $B(A, V) \times B(A, V) \subseteq U$. Sea $(x, y) \in B(A, V) \times B(A, V)$. Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $(a_1, x) \in V$ y $(a_2, y) \in V$. Así $(x, a_1) \in V$, $(a_1, a_2) \in V$ y $(a_2, y) \in V$. Se sigue que

$$(x, y) \in V^3 \subseteq U.$$

Por tanto, $\mathcal{F}_0$ es un filtro de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$. A continuación mostraremos la minimalidad de $\mathcal{F}_0$. Supongamos que $\mathcal{F}_1$ es otro filtro de Cauchy tal que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$. Sean $A \in \gamma$ y $U \in Sim(\mathcal{U})$. En consecuencia, $B(A, U) \in \gamma_0$. Como $\mathcal{F}_1$ es filtro de Cauchy, existe $F \in \mathcal{F}_1$ tal que $F \times F \subseteq U$. Como $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $F \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in F \cap A$. Si $y \in F$, se tiene que $(x, y) \in U$ pues $F$

es $U$-pequeño. Consecuentemente, $y \in B(x,U) \subseteq \bigcup_{z\in A} B(z,U) = B(A,U)$. Por tanto, $F \subseteq B(A,U)$ y $B(A,U) \in \mathcal{F}_1$, es decir, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$. Finalmente, $\mathcal{F}_0$ es el único filtro de Cauchy minimal contenido en $\mathcal{F}$. $\square$

Como consecuencia de la demostración del teorema anterior se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.13.** *Todo filtro de Cauchy minimal en un espacio uniforme tiene una base formada por conjuntos abiertos.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy minimal en un espacio uniforme $X$. Por la proposición 1.2.9, podemos considerar a $\beta = \{V \in Sim(\mathcal{U}) : V \text{ es abierto}\}$ como base de $\mathcal{U}$. Por el corolario 1.2.10, podemos concluir que $\{B(A,V) : A \in \gamma \text{ y } V \in \beta\}$ es una base de abiertos para $\mathcal{F}$. $\square$

El siguiente resultado juega un papel importante en la construcción de la completación uniforme.

**Teorema 2.1.14.** *Sean $X$ un espacio uniforme y $D \subseteq X$ un espacio denso en $X$ con la topología uniforme $\tau_{\mathcal{U}}$. Si para todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $D$, la extensión $\mathcal{F}_X$ converge en $X$, entonces $X$ es completo.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $X$ y $\mathcal{F}_0$ el filtro de Cauchy minimal contenido en $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}_0$ tiene una base formada por abiertos, $\{F \cap D : F \in \mathcal{F}_0\}$ es una base de filtro de Cauchy $\mathcal{G}$ en $D$. Por hipótesis, $\mathcal{G}_X$ converge a algún $x \in X$, por la nota 1.1.7 y el corolario 2.1.8 se tiene que $\mathcal{F}_0$ también converge a $x$, y por tanto, $\mathcal{F}$ converge a $x$. En consecuencia, $X$ es completo. $\square$

Del siguiente teorema se desprende que si un espacio uniforme $X$ es un subconjunto denso de otro espacio uniforme completo $\overline{X}$, entonces existe una correspondencia entre los puntos de $\overline{X}$ y los filtros de Cauchy minimales de $X$.

**Teorema 2.1.15.** *Sean $Y$ un espacio uniforme con uniformidad $\mathcal{U}$ y $X \subset Y$. Si $x \in \overline{X}^{\tau_{\mathcal{U}}}$, entonces el filtro $\tilde{\mathcal{F}}_x$ en $X$ generado por el conjunto $\{U \cap X : U \in \beta_x^Y\}$, donde $\beta_x^Y$ es el filtro de vecindades de $x$ en $Y$, es el único filtro de Cauchy minimal en $X$ que converge a $x$ (es decir cada elemento de $\beta_x^Y$ contiene un elemento de $\tilde{\mathcal{F}}_x$).*

*Demostración.* Como $x \in \overline{X}$, se tiene que $U \cap X \neq \emptyset$ para cada $U \in \beta_x^Y$. Además, note que $\{U \cap X : U \in \beta_x^Y\}$ es la traza del filtro de vecindades $\beta_x^Y$ sobre $X$, por lo que $\tilde{\mathcal{F}}_x$ es un filtro en $X$. Sea $\mathcal{V}$ la uniformidad inducida por $\mathcal{U}$ sobre $X$. Entonces, $X$ es un espacio uniforme. Tenemos que $\tilde{\mathcal{F}}_x$ converge a $x$, pues para cada $U \in \beta_x^Y$, se sigue que $U \cap X \in \tilde{\mathcal{F}}_x$ y $U \cap X \subseteq U$.

Ahora veamos que $\tilde{\mathcal{F}}_x$ es un filtro de Cauchy. En efecto, dado un entorno $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V = U \cap (X \times X)$. Como $\beta_x^Y$ es un filtro de Cauchy por el lema 2.1.4, existe $W \in \beta_x^Y$ tal que $W \times W \subseteq U$. Entonces existe $F = W \cap X \in \tilde{\mathcal{F}}_x$ tal que $F \times F \subseteq V$. Se sigue que $\tilde{\mathcal{F}}_x$ es un filtro de Cauchy.

Ahora veamos que $\tilde{\mathcal{F}}_x$ es minimal. En efecto, sea $\mathcal{F}_0$ un filtro en $X$ que es de Cauchy tal que $\mathcal{F}_0 \subset \tilde{\mathcal{F}}_x$. Como $\tilde{\mathcal{F}}_x$ converge a $x$, tenemos que $x \in \overline{A}^Y$ para cada $A \in \mathcal{F}_0$. Dado $W \in \beta_x^Y$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B(x, U) \subseteq W$. Como $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Sea $V_1 = V \cap (X \times X) \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{F}_0$ es un filtro de Cauchy en $X$, existe $A \in \mathcal{F}_0$ tal que $A \times A \subseteq V_1$. Como $A \cap B(x, V) \neq \emptyset$, existe $a \in A \cap B(x, V)$, por lo que $(x, a) \in V$. Además, para cada $y \in A$ se tiene que $(a, y) \in V$. Así que

$$(x, y) \in V^2 \subseteq U.$$

Por tanto, $A \subseteq B(x, U) \subseteq W$. Se sigue que $A \subseteq W \cap X$. En consecuencia $\tilde{\mathcal{F}}_x \subset \mathcal{F}_0$. Por tanto, $\tilde{\mathcal{F}}_x$ es un filtro de Cauchy minimal. La unicidad de $\mathcal{F}_x$ se sigue de la minimalidad.

□

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme separado. Denotamos por $\tilde{X}$ a la colección de todos los filtros de Cauchy minimales de $X$. Ahora dotaremos a $\tilde{X}$ de una uniformidad. Para cada $V \in Sim(\mathcal{U})$ consideremos el siguiente subconjunto de $\tilde{X} \times \tilde{X}$:

$$\tilde{V} = \left\{ (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \tilde{X} \times \tilde{X} \colon \exists A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \text{ donde } A \text{ es } V\text{-pequeño} \right\}.$$

Notemos que $\tilde{V}$ es no vacío pues para $x \in X$, consideramos el filtro minimal $\tilde{\mathcal{F}}_x$ como en el teorema anterior con $X = Y$ y se tiene que $\left(\tilde{\mathcal{F}}_x, \tilde{\mathcal{F}}_x\right) \in \tilde{V}$. Ahora afirmamos que $\beta = \left\{ \tilde{V} \colon V \in Sim(\mathcal{U}) \right\}$ es base para una uniformidad en $\tilde{X}$. En efecto,

i) notemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \in \widetilde{V}$ para cada $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$;

ii) para cada $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \beta$, se tiene que $(\widetilde{V \cap U}) \subseteq \widetilde{V} \cap \widetilde{U}$;

iii) sea $\widetilde{V} \in \beta$, donde $V \in \mathcal{U}$. Como $V \in \mathcal{U}$, existe $U \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $U^2 \subseteq V$. Ahora probemos que $\left(\widetilde{U}\right)^2 \subseteq \widetilde{V}$. Sea $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3) \in \left(\widetilde{U}\right)^2$. Entonces, existe $\mathcal{F}_2 \in \widetilde{X}$ tal que $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \widetilde{U}$ y $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \in \widetilde{U}$. En consecuencia, existen $A_1 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ y $A_2 \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$ tales que $A_1$ y $A_2$ son $U$-pequeños. Note que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ pues $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_2$. Ahora note que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_3$ y mostremos que

$$(A_1 \cup A_2) \times (A_1 \cup A_2) \subseteq V.$$

Sean $(a_1, a_3) \in (A_1 \cup A_2) \times (A_1 \cup A_2)$ y $a_2 \in A_1 \cap A_2$. Entonces

$$(a_1, a_3) \in U \circ U = U^2 \subseteq V.$$

Se sigue que $(A_1 \cup A_2) \times (A_1 \cup A_2) \subseteq V$. Por tanto, $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3) \in \tilde{V}$;

iv) como $V \in Sim(\mathcal{U})$, se tiene que $\widetilde{V} = (\widetilde{V^{-1}}) = \left(\widetilde{V}\right)^{-1}$.

Por la proposición 1.2.6, podemos concluir de i)-iv) que $\beta = \{\widetilde{V} : V \in Sim(\mathcal{U})\}$ es base para una uniformidad $\widetilde{\mathcal{U}}$ en $\tilde{X}$.

Ahora veamos que la uniformidad $\widetilde{\mathcal{U}}$ es separada. Para demostrar que $\widetilde{\mathcal{U}}$ es separada, mostraremos que $\bigcap\{\widetilde{U} : U \in Sim(\mathcal{U})\} = \Delta_{\widetilde{X}}$. Es claro que $\Delta_{\widetilde{X}} \subseteq \bigcap\{\widetilde{U} : U \in Sim(\mathcal{U})\}$. Ahora mostremos la otra contención. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros de Cauchy minimales en $\widetilde{X}$. De tal modo que

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \bigcap \left\{\widetilde{U} : U \in Sim(\mathcal{U})\right\}.$$

Sea $\gamma = \{F_1 \cup F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ y } F_2 \in \mathcal{F}_2\}$. Ahora mostremos que $\gamma$ es una base filtro.

i) Como $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ ya son filtros, entonces $\gamma \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \gamma$.

ii) Si $A, B \in \gamma$. Existen, $F_1, A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2, B_2 \in \mathcal{F}_2$ tales que $A = F_1 \cup B_2$ y $B = A_1 \cup F_2$. Como $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son filtros, $F_1 \cap A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \cap B_2 \in \mathcal{F}_2$. Por lo que, $(F_1 \cap A_1) \cup (F_2 \cap B_2) \subseteq A \cap B$.

De i) y ii) podemos concluir que $\gamma$ es una base de filtro y $\mathcal{F}(\gamma)$ es el filtro generado por $\gamma$. Además, note que si $A \in \mathcal{F}(\gamma)$, entonces existen $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$ tales que $F_1 \cup F_2 \subseteq A$ y además $F_1 \subseteq F_1 \cup F_2 \subseteq A$ y $F_2 \subseteq F_1 \cup F_2 \subseteq A$. Se sigue que $A \in \mathcal{F}_1$ y $A \in \mathcal{F}_2$. En consecuencia, $\mathcal{F}(\gamma) \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Por lo que $\mathcal{F}(\gamma)$ es un filtro de Cauchy, pues para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $U \in Sim(\mathcal{U})$ tal que $U \subseteq V$. Como $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \tilde{U}$, se obtiene que existe $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ y $A = A \cup A \in \mathcal{F}(\gamma)$ tal que $A \times A \subseteq U$. Por la minimalidad de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, se tiene que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\gamma) = \mathcal{F}_2$. Por tanto, $\bigcap \left\{ \tilde{U} : U \in Sim(\mathcal{U}) \right\} = \Delta_{\tilde{X}}$ y concluimos que $\tilde{\mathcal{U}}$ es una uniformidad separada.

Sea $\sigma \colon (X,\mathcal{U}) \to (\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ definida por $\sigma(x) = \widetilde{\mathcal{F}}_x$. Diremos que $\sigma$ es la ***inclusión canónica*** de $X$ en $\widetilde{X}$.

**Proposición 2.1.16.** *La inclusión canónica $\sigma$ es un encaje uniforme. Además, $\sigma \colon X \to \sigma(X)$ es un isomorfismo uniforme y $\sigma(X)$ es denso en la topología inducida por la uniformidad $\widetilde{\mathcal{U}}$.*

*Demostración.* Empecemos por ver que $\sigma$ es uniformemente continua. Más aún, vamos a probar que si $V \in Sim(\mathcal{U})$, entonces

$$(\sigma \times \sigma)^{-1} \left( \widetilde{V} \right) \subseteq V \subseteq (\sigma \times \sigma)^{-1} \left( \widetilde{V^3} \right). \tag{2.1}$$

La segunda inclusión implica la continuidad uniforme de $\sigma$, pues $V \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es cerrada bajo superconjuntos.

Ahora mostremos las contenciones (2.1)

Si $(x,y) \in (\sigma \times \sigma)^{-1} \left( \widetilde{V} \right)$, existe $A \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$ tal que $A \times A \subseteq V$. Como $x, y \in A$, se sigue que $(x,y) \in V$. Así que $(\sigma \times \sigma)^{-1} \left( \widetilde{V} \right) \subseteq V$.

Si $(x,y) \in V$, entonces $A = B(x,V) \cup B(y,V) \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$. Sea $(\alpha,\beta) \in A \times A$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha \in B(x,V)$ y $\beta \in (y,V)$, por lo que

$$(\alpha,\beta) \in V^3.$$

En consecuencia, se cumple la contención $V \subseteq (\sigma \times \sigma)^{-1} \left( \widetilde{V^3} \right)$.

Veamos ahora que $\sigma$ es inyectiva. En efecto, $\sigma(x) = \sigma(y)$ si y sólo si $x$ y $y$ tienen las mismas vecindades en $X$, es decir, si y sólo si para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $y \in B(x,U)$ y $x \in B(y,U)$, lo que equivale que $(x,y) \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es separada, se tiene que la uniformidad $\mathcal{U}$ es separada, por tanto $x = y$. Concluimos que $\sigma$ es inyectiva.

Note que $\{(x, y) \in X \times X : \sigma(x) = \sigma(y)\} = \bigcap \mathcal{U}$. Por lo que $\sigma$ es inyectiva si y sólo si $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio Hausdorff.

Como $\sigma$ es inyectiva, se tiene que la inclusión $(\sigma \times \sigma)^{-1}\left(\widetilde{V}\right) \subseteq V$, implica que $\sigma^{-1} \colon \sigma(X) \to X$ es uniformemente continua pues $(\sigma^{-1} \times \sigma^{-1})^{-1}(V) = (\sigma \times \sigma)(V)$, luego $\tilde{V} \cap (\sigma(X) \times \sigma(X)) \subseteq (\sigma \times \sigma)(V) = (\sigma^{-1} \times \sigma^{-1})^{-1}(V)$. Por tanto, $\sigma$ es un isomorfismo uniforme en su imagen.

Ahora veamos que $\sigma(X)$ es denso en $\widetilde{X}$. Si $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$ y $V \in \mathcal{U}$, por la proposición 2.1.13, se tiene que $\mathcal{F}$ tiene una base formada por conjuntos abiertos, luego contiene abiertos $V$-pequeños. Si $A \in \mathcal{F}$ es la unión de los interiores de los elementos $V$-pequeños de $\mathcal{F}$, se cumple que $\sigma(X) \cap B\left(\mathcal{F}, \widetilde{V}\right) = \sigma(A)$. En efecto, si $\sigma(x) \in B\left(\mathcal{F}, \widetilde{V}\right)$, esto significa que $(\sigma(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{V}$, por lo que existe $U \in \mathcal{F}$, vecindad de $x \in X$, tal que $U \times U \subseteq V$, pero $x \in Int_X(U) \subseteq A$, luego $\sigma(x) \in \sigma(A)$. Recíprocamente, si $x \in A$, existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $x \in Int_X(U)$ y $U \times U \subseteq V$. Luego, $U \in \sigma(x)$, por lo que $(\sigma(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{V}$. De aquí que $\sigma(x) \in \sigma(X) \cap \mathcal{F}$. Por tanto, $\sigma(X) \cap B\left(\mathcal{F}, \widetilde{V}\right) = \sigma(A)$.

En particular, $\sigma(X) \cap B(\mathcal{F}, \widetilde{V}) \neq \emptyset$, lo que prueba que $\sigma(X)$ es denso en la topología inducida por la uniformidad $\widetilde{\mathcal{U}}$. Más aún $\sigma(\mathcal{F}) = \{\sigma(A) : A \in \mathcal{F}\}$ es base para algún filtro, al que denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}$, en $\widetilde{X}$ tal que todas las bolas $B\left(\mathcal{F}, \widetilde{V}\right)$ son elementos del filtro $\tilde{\mathcal{F}}$. Por lo que el filtro $\tilde{\mathcal{F}}$ converge a $\mathcal{F}$.

□

Ahora demostraremos que $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}})$ es un espacio completo, para esto usaremos el teorema 2.1.14.

**Proposición 2.1.17.** *Sea* $(X, \mathcal{U})$ *un espacio uniforme separado. Entonces* $(\widetilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ *es un espacio uniforme completo y separado.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $\sigma(X)$. Para cada $A \subset X$, sea $\sigma(A) = \{\sigma(x) : x \in A\}$. La colección

$$\mathcal{G} = \{A \subset X : \sigma(A) \in \mathcal{F}\}$$

es un filtro de Cauchy en $X$. Sea $\mathcal{F}_0$ el filtro de Cauchy minimal contenido en $\mathcal{G}$. Entonces, $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$ (donde la notación $\sigma(\mathcal{F}_0)$ lo definimos en el último parrafo de la demostración del teorema anterior) y, sabemos que el filtro que tiene por base a $\sigma(\mathcal{F}_0)$ converge a $\mathcal{F}_0$, luego $\mathcal{F}$ también converge a $\mathcal{F}_0$ en $\widetilde{X}$. Por el teorema 2.1.14, concluimos que $\widetilde{X}$ es completo.

□

Notemos que la proposición 2.1.16 nos permite identificar a $X$ con un subespacio denso de $\widetilde{X}$. El espacio uniforme $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$, junto con la inclusión canónica $\sigma$, es una completación uniforme de $(X,\mathcal{U})$.

Ahora probaremos que la completación de espacios uniformes separados es única salvo isomorfismos uniformes. Para esto necesitaremos los siguientes resultados.

**Lema 2.1.18.** *Sea $A$ un subconjunto de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ y $V \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $A \times A \subseteq V$. Entonces, $\overline{A} \times \overline{A} \subseteq V^3$.*

*Demostración.* Si $x, y \in \overline{A}$, entonces $A \cap B(x,V) \neq \emptyset$ y $A \cap B(y,V) \neq \emptyset$. Sean $a, b \in A$ tales que $(x,a) \in V$ y $(y,b) \in V$. Como $A \times A \subseteq V$, se tiene que

$$(x,y) \in V^3.$$

□

Recordemos que dada una función $f\colon X \to Y$ y un filtro $\mathcal{F}$ en $X$ tenemos que

$$f(\mathcal{F}) = \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$$

es una base de filtro en $Y$.

**Teorema 2.1.19.** *Sean $X$ e $Y$ espacios uniformes, donde $Y$ es separado y completo y $D$ un subespacio denso de $X$. Entonces, toda función uniformemente continua $f\colon D \to Y$, se extiende a una función uniformemente continua $\check{f}\colon X \to Y$.*

*Demostración.* Para cada $x \in X$ el conjunto

$$\{B(x,V) \cap D : V \in \mathcal{U}\}$$

es base para algún de filtro de Cauchy en $D$ al que denotaremos por $\mathcal{F}_x$. Como $f$ es uniformemente continua, $f(\mathcal{F}_x)$ es una base de filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $Y$. Como $Y$ es completo, $\mathcal{F}$ converge en $Y$. Como $Y$ es separado, $Y$ es un espacio Hausdorff. Por lo que su límite es único y lo llamamos $\check{f}(x)$.

Así definimos a la función $\check{f}\colon X \to Y$. Si $x \in D$, por la continuidad de $f$, $\mathcal{G}$ converge a $f(x)$. En consecuencia, $\check{f}(x) = f(x)$. Por lo que $\check{f}$ extiende a $f$. Ahora veamos que $\check{f}$ es uniformemente continua. Sea $W \in \mathcal{U}_Y$. Existe $V \in \mathcal{U}_Y$ tal que $V^6 \subseteq W$. Sea $U \in \mathcal{U}_X$ (abierto simétrico en $X \times X$). Como $D$ es denso, se tiene que $U \cap (D \times D) \neq \emptyset$ y por ser $f$ uniformemente continua, podemos suponer que si $(a,b) \in U^2 \cap (D \times D)$, entonces $(f(a), f(b)) \in V$. Veamos que $U \subseteq \left(\check{f} \times \check{f}\right)^{-1}(W)$. En efecto, sea $(x_1, x_2) \in U$. Como $D$ es denso en $X$, existe $d \in D \cap B(x_1, U) \cap B(x_2, U)$ (note que las bolas son abiertas por ser $U$ abierta). En consecuencia,

$$f\left(B(x_i, U) \cap D\right) \times f\left(B(x_i, U) \cap D\right) \subseteq V, \text{ para } i = 1, 2. \tag{2.2}$$

Por otra parte, como $f\left(B(x_i, U) \cap D\right) \in f(\mathcal{F}_{x_i})$ y $\mathcal{F}_{x_i}$ converge a $\check{f}(x_i)$, tenemos que $\check{f}(x_i) \in \overline{f\left(B(x_i, U) \cap D\right)}$ para $i = 1, 2$. Por el lema 2.1.18, se tiene que

$$\overline{f\left(B(x_i, U) \cap D\right)} \times \overline{f\left(B(x_i, U) \cap D\right)} \subseteq V^3, \text{ para } i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Por tanto, de las ecuaciones (2.2) y (2.3) se tiene que $(\check{f}(x_1), \check{f}(x_2)) \in W$. Por tanto, $\check{f}$ es una extensión uniformemente continua de $f$. □

El siguiente teorema nos ayuda a mostrar que la completación uniforme de un espacio Hausdorff es única salvo isomorfismo uniformes.

**Teorema 2.1.20.** *Sean $X$ y $Y$ espacios uniformes separados y completos, $A$ y $B$ subconjuntos densos de $X$ y $Y$ respectivamente y $f\colon A \to B$ un isomorfismo uniforme. Entonces, $f$ se extiende a un único isomorfismo uniforme $\check{f}\colon X \to Y$.*

*Demostración.* Sean $\check{f}\colon X \to Y$ y $\check{f^{-1}}\colon Y \to X$ las extensiones uniformemente continuas de $f$ y $f^{-1}$ que existen por el teorema 2.1.19. Entonces $\check{f^{-1}} \circ \check{f}$ fija a los elementos de $A$. Como $A$ es denso en $X$ y $X$ es Hausdorff, entonces $\check{f^{-1}} \circ \check{f}$ es la identidad en $X$. Análogamente, $\check{f} \circ \check{f^{-1}}$ es la identidad en $Y$. Luego $\check{f}$ es un isomorfismo uniforme. □

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del resultado anterior.

**Teorema 2.1.21.** *Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio unifome separado, $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{\mathcal{U}_1}\right)$ y $\left(\widetilde{X}_2, \widetilde{\mathcal{U}_2}\right)$ completaciones uniformes de $(X, \mathcal{U})$. Entonces, $(\widetilde{X}_1, \widetilde{\mathcal{U}_1})$ y $(\widetilde{X}_2, \widetilde{\mathcal{U}_2})$ son uniformemente equivalentes.*

Por la proposición 1.2.7, sabemos que todo espacio métrico $(X,d)$ induce una uniformidad $\mathcal{U}_d$ en $X$, en donde la familia $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{U}_d$ y $U_n = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$.

Decimos que un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es ***metrizable*** si existe una métrica $d$ en $X$ tal que $\mathcal{U}$ es inducida por $d$.

Para cada espacio métrico $(X,d)$, existen un espacio métrico completo $(Y,\tilde{d})$ y una isometría $f\colon X \to Y$ tales que $f(X)$ es denso en $Y$. Entonces, $\tilde{d}$ es la completación de $d$.

**Proposición 2.1.22.** *Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme metrizable y $d$ la métrica que induce a $\mathcal{U}$. Entonces, $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme completo si y sólo si $(X,d)$ es un espacio métrico completo.*

*Demostración.* Como $\mathcal{U}$ es inducida por $d$, se tiene que $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{U}$, donde $U_n = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$. Supongamos que $(X,d)$ es un espacio métrico completo. Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $X$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{F}$ tal que $A_n \times A_n \subseteq U_n$. Sean $\epsilon > 0$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$ con $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \epsilon$. Entonces, para cada $n, m \geq n_0$ se cumple que

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x') + d(x',x_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \epsilon,$$

donde $x' \in A_n \cap A_m \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como $(X,d)$ es completo, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M_n$, entonces $d(x,x_m) < \frac{1}{2n}$. Ahora veamos que $x$ es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$. Sea $A \in \mathcal{F}$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in A \cap A_m$, donde $m \geq M_n$; entonces $d(x,a) < \frac{1}{n}$. Así $a \in B(x,U_n)$. En consecuencia, $B(x,U_n) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $x \in \overline{A}^{\tau_{\mathcal{U}}}$. Por lo que $x$ es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$. Aplicando la proposición 2.1.7, concluimos que $\mathcal{F}$ converge a $x$. Finalmente, el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es completo.

Ahora supongamos que el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es completo. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(X,d)$. Notemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, nos consideramos al filtro elemental asociado a la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_{(x_n)} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $F_n = \{x_m : m \geq n\}$. Sabemos que el filtro elemental asociado a la sucesión de Cauchy, es un filtro de Cauchy. Como $(X,\mathcal{U})$ es completo, se tiene que

$\mathcal{F}_{(x_n)}$ converge a $x \in X$, es decir, $\beta_x \subseteq \mathcal{F}_{(x_n)}$. Por lo que $B(x, U_n) \cap F_m \neq \emptyset$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Ahora probemos que la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$ en $(X, d)$. Sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \epsilon$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \mathcal{U})$, para $n_0$ existe $M_{n_0} \in \mathbb{N}$ tal que si $m, t \geq M_{n_0}$, se tiene que $(x_m, x_t) \in U_{n_0}$. Entonces,

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_t) + d(x_t, x_m) < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \epsilon,$$

donde $x_t \in B(x, U_{n_0}) \cap F_{M_{n_0}}$. Por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$. Concluimos que $(X, d)$ es un espacio métrico completo. □

**Proposición 2.1.23.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $(Y, \tilde{d})$ su completación métrica. Entonces $(Y, \mathcal{U}_{\tilde{d}})$ es la completación uniforme de $(X, \mathcal{U}_d)$.*

*Demostración.* Como $(Y, \tilde{d})$ es la completación métrica de $(X, d)$, existe una función isométrica $f\colon X \to Y$ tal que $f(X)$ es denso en $Y$. Por la proposición 2.1.22 se sigue que $(Y, \mathcal{U}_{\tilde{d}})$ es un espacio uniforme completo. Notemos que

$$\beta_d = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ y } \beta_{\tilde{d}} = \{\tilde{U}_n : n \in \mathbb{N}\},$$

son bases para $\mathcal{U}_d$ y $\mathcal{U}_{\tilde{d}}$ respectivamente, donde

$$U_n = \left\{(x_1, x_2) \in X \times X : d(x_1, x_2) < \frac{1}{n}\right\} \text{ y}$$
$$\tilde{U}_n = \left\{(y_1, y_2) \in Y \times Y : \tilde{d}(y_1, y_2) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Para demostrar que $(Y, \mathcal{U}_{\tilde{d}})$ es una completación uniforme de $(X, \mathcal{U}_d)$ probaremos que $f$ es un encaje uniforme y que $f(X)$ es denso en $(Y, \tau_{\mathcal{U}_{\tilde{d}}})$. Note que $\tau_{\mathcal{U}_{\tilde{d}}} = \tau_{\tilde{d}}$ donde $\tau_{\tilde{d}}$ es la topología generara por la métrica $\tilde{d}$, pues

$$B(y_0, U_n) = \left\{y \in Y : d(y_0, x) < \frac{1}{n}\right\} = B_{\frac{1}{n}}(y_0),$$

donde $B_{\frac{1}{n}}(y_0)$ es la bola con centro en $y_0$ y radio $\frac{1}{n}$. Por lo que $f(X)$ es denso en $(Y, \tau_{\tilde{d}})$. Ahora probemos que $f$ es un encaje uniforme.

i) Es bien sabido que los encajes isométricos son encajes topológicos.

ii) Sea $\tilde{U}_n \in \mathcal{U}_{\tilde{d}}$ para $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(f \times f)^{-1}(\tilde{U}_n) &= \{(x_1, x_2) \in X \times X : (f(x_1), f(x_2)) \in \tilde{U}_n)\}\\ &= \left\{(x_1, x_2) \in X \times X : \tilde{d}(f(x_1), f(x_2)) < \frac{1}{n}\right\}\\ &= \left\{(x_1, x_2) \in X \times X : d(x_1, x_2) < \frac{1}{n}\right\} = U_n \in \mathcal{U}_d.\end{aligned}$$

Se sigue que $f$ es uniformemente continua.

Por tanto, de i) y ii) concluimos que $f$ es un encaje uniforme. Concluimos que $(Y, \mathcal{U}_{\tilde{d}})$ es una completación uniforme de $(X, \mathcal{U}_d)$. $\square$

Ahora note que si $X$ no es un espacio uniforme Hausdorff, el espacio que hemos construido $\tilde{X}$ no sería una completación uniforme de $X$, pues $\sigma$ no sería un encaje uniforme. El siguiente teorema prueba que todo espacio uniforme, tiene una completación uniforme y su prueba se puede encontrar en [18]. Sin embargo, dicha completación no siempre es separada.

**Teorema 2.1.24.** *Si $X$ es un espacio uniforme, el conjunto $\tilde{X}$ de todos los filtros de Cauchy en $X$ es un espacio uniforme completo con la uniformidad determinada por la base $\{\tilde{V} : V \in \mathcal{U}_X\}$ donde*

$$\tilde{V} = \{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \textit{existe } A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \textit{ tal que } A \times A \subseteq V\}.$$

*Además, $\sigma\colon X \to \tilde{X}$ dada por $\sigma(x) = \mathcal{F}_x$ donde $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ es un encaje uniforme y $\sigma(X)$ es denso en $\tilde{X}$.*

# Capítulo 3

# Completación de Raĭkov de grupos topológicos

En este capítulo encajaremos a un grupo topológico arbitrario en un grupo topológico más grande en el que todos los filtros de Cauchy convergen. Los grupos topológicos donde todos los filtros de Cauchy convergen son llamados ***Raĭkov completos***.

## 3.1. Completación de Raĭkov

Denotaremos por $G$ a un grupo topológico con neutro $e$. Para cada $x \in G$, entenderemos por $\mathcal{N}(x)$ a la familia de todos los conjuntos abiertos de $G$ que contienen a $x$.

Antes de dar la definición de una familia de Cauchy en grupos topológicos, presentamos una motivación de dicha definición.

**Ejemplo 3.1.1.** Sea $G$ un grupo topológico metrizable. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ de modo que para cualquier $V \in \mathcal{N}(e)$, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_1 \subseteq aV$ y $F_2 \subseteq Vb$ donde $a, b \in G$.

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $G$ respecto a una métrica $d$ compatible con la topología de $G$. Definamos $F_n = \{x_m : m \geq n\}$ y $\beta = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por el ejemplo 2.1.2 se tiene que $\beta$ es una base de un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $(G, \mathcal{U}_d)$.

Del teorema 1.3.17 para el grupo metrizable $G$, existen $d_\rho$ y $d_\lambda$ métricas equivalentes invariantes por la derecha y por izquierda, respectivamente.

Ambas generan a la topología original de $G$. Ahora note que $d$, $d_\rho$ y $d_\lambda$ son métricas equivalentes con constantes $c = 1 = k$ de la definición 1.3.18.

Por la nota 1.3.20 se tiene que $(G, d)$, $(G, d_\rho)$ y $(G, d_\lambda)$ tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

Para $\epsilon > 0$ y $x \in G$ arbitrario definamos

$$B_\rho(x, \epsilon) = \{y \in G : d_\rho(x, y) < \epsilon\}$$

y

$$B_\lambda(x, \epsilon) = \{y \in G : d_\lambda(x, y) < \epsilon\}.$$

Sea $V \in \mathcal{N}(e)$. Como $d_\rho$ y $d_\lambda$ son métricas compatibles con la topología de $G$ , existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $B_\rho(e, \epsilon) \subseteq V$ y $B_\lambda(e, \delta) \subseteq V$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy en $(G, d_\rho)$ y $(G, d_\lambda)$, existen $N_1$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n, m \geq N_1$ y si $r, s \geq N_2$, entonces $d_\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ y $d_\lambda(x_r, x_s) < \delta$.

Consideremos a $F_{N_1}$ y $F_{N_2}$ (como se definieron al principio de esta demostración). Sean $m \geq N_1$ y $s \geq N_2$ por lo que $x_m \in F_{N_1}$ y $x_s \in F_{N_2}$. De donde obtenemos que $d_\rho(x_m, x_{N_1}) < \epsilon$ y $d_\lambda(x_s, x_{N_2}) < \delta$. Como $d_\rho(x_m, x_{N_1}) = d_\rho(x_m x_{N_1}^{-1}, e)$ y $d_\lambda(x_s, x_{N_2}) = d_\lambda(x_{N_2}^{-1} x_s, e)$, se sigue que $x_m x_{N_1}^{-1} \in V$ y $x_{N_2}^{-1} x_s \in V$. Por tanto, $x_m = x_m x_{N_1}^{-1} x_{N_1} \in V x_{N_1}$ y $x_s = x_{N_2} x_{N_2}^{-1} x_s \in x_{N_2} V$. Concluimos que $F_{N_1} \subseteq V x_{N_1}$ y $F_{N_2} \subseteq x_{N_2} V$. Por tanto, considerando $a = x_{N_2}$, $b = x_{N_1}$, $F_1 = F_{N_2}$ y $F_2 = F_{N_1}$. Se tiene que $F_1 \subseteq aV$ y $F_2 \subseteq Vb$. □

Una familia $\zeta$ de subconjuntos de $G$ es una ***familia de Cauchy*** si para cada $V \in \mathcal{N}(e)$, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \zeta$ tales que $A \subseteq aV$ y $B \subseteq Vb$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un ***filtro de Cauchy*** en $G$, si $\mathcal{F}$ es un filtro en $G$ y una familia de Cauchy.

**Definición 3.1.2.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{F}$ es un ***filtro abierto*** en $X$ si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de subconjuntos abiertos de $X$ tal que cualquier intersección no vacía de elementos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$. Además, si para cada $U \in \mathcal{F}$ y $W \in \tau$ tal que $U \subseteq W$ se tiene que $W \in \mathcal{F}$. Una ***base de filtro abierto*** de un espacio topológico $X$ es una base de filtro en $X$, donde todos los elementos son conjuntos abiertos.

Un ***filtro abierto de Cauchy*** $\mathcal{F}$ es un filtro abierto y una familia de Cauchy.

A continuación daremos una equivalencia de filtro abierto de Cauchy.

**Proposición 3.1.3.** *Un filtro abierto $\mathcal{F}$ es un filtro abierto de Cauchy si y sólo si para cada $V \in \mathcal{N}(e)$, existen $a, b \in G$ tales que $aV, Vb \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy. Entonces para cada $V \in \mathcal{N}(e)$, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq aV$ y $B \subseteq Vb$. Como $A, B \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro abierto, entonces $aV, Vb \in \mathcal{F}$. Sea $V \in \mathcal{N}(e)$. Entonces existen $a, b \in G$ y $aV, Vb \in \mathcal{F}$ tales que $aV \subseteq aV$ y $Vb \subseteq Vb$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro abierto de Cauchy. $\square$

**Definición 3.1.4.** Una familia $\zeta$ de subconjuntos de $G$ es ***contraíble*** si para cada $B \in \zeta$, existen $A \in \zeta$ y $U, V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $UAV \subseteq B$. Un ***filtro canónico*** $\mathcal{F}$ es un filtro abierto de Cauchy y una familia contraíble.

Sea $\zeta$ una familia de subconjuntos de $G$. Denotemos por $\mathrm{B}(\zeta)$ a la familia de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de $G$ conteniendo al menos a un elemento de $\zeta$. Claramente, si cada elemento de $\zeta$ es abierto, entonces $\zeta \subseteq B(\zeta)$.

Ahora mostraremos algunos resultados relacionados a los conceptos que acabamos de introducir.

**Lema 3.1.5.** *Si $\zeta$ es una base de filtro abierto en $G$, entonces $B(\zeta)$ es un filtro abierto en $G$ que contiene a $\zeta$.*

*Demostración.*

i) Notemos que $G \in B(\zeta)$, por lo que $B(\zeta) \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin B(\zeta)$ por definición de $B(\zeta)$.

ii) Si $F_1, F_2 \in B(\zeta)$, entonces existen $A, B \in \zeta$ tales que $A \subseteq F_1$ y $B \subseteq F_2$. Como $A, B \in \zeta$, existe $C \in \zeta$ tal que $C \subseteq A \cap B \subseteq F_1 \cap F_2$. Se sigue que $F_1 \cap F_2 \in B(\zeta)$.

iii) Si $F \in B(\zeta)$ y $F \subseteq W$ con $W$ abierto en $G$, entonces existe $A \in \zeta$ tal que $A \subseteq F \subseteq W$ y consecuentemente $W \in B(\zeta)$.

De i), ii) y iii) concluimos que $B(\zeta)$ es un filtro abierto en $G$. Como cada elemento de $\zeta$ es abierto, se cumple que $\zeta \subseteq B(\zeta)$. $\square$

**Lema 3.1.6.** *Si $\zeta$ es una familia contraíble de conjuntos abiertos, entonces $B(\zeta)$ es también una familia contraíble de conjuntos abiertos.*

*Demostración.* Sea $B \in B(\zeta)$. Entonces existe $B_0 \in \zeta$ tal que $B_0 \subseteq B$. Como $B_0 \in \zeta$ y $\zeta$ es una familia contraíble, existen $A \in \zeta$ y $U, V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $UAV \subseteq B_0 \subseteq B$. Como $\zeta$ es una familia de abiertos, $\zeta \subseteq B(\zeta)$. De lo anterior se sigue que $A \in B(\zeta)$. Por tanto, para cada $B \in B(\zeta)$ existen $A \in B(\zeta)$ y $U, V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $UAV \subseteq B$. Concluimos que $B(\zeta)$ es una familia contraíble de conjuntos abiertos. $\square$

**Lema 3.1.7.** *Si $\zeta$ es una familia de Cauchy, entonces $B(\zeta)$ es una familia de Cauchy.*

*Demostración.* Sea $V \in \mathcal{N}(e)$. Como $\zeta$ es una familia de Cauchy, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \zeta$ tales que $A \subseteq aV$ y $B \subseteq Vb$. Como $aV, Vb$ son conjuntos abiertos no vacíos, tenemos que $aV, Vb \in B(\zeta)$. Entonces para cada $V \in \mathcal{N}(e)$ existen $aV, Vb \in B(\zeta)$ tales que $aV \subseteq aV$ y $Vb \subseteq Vb$. Por tanto, $B(\zeta)$ es una familia de Cauchy. □

**Proposición 3.1.8.** *Si $\zeta$ es una base de filtro abierto en $G$ que también es una familia de Cauchy contraíble, entonces $B(\zeta)$ es un filtro canónico conteniendo a $\zeta$.*

*Demostración.* Del lema 3.1.5 tenemos que $B(\zeta)$ es un filtro abierto en $G$ conteniendo a $\zeta$; del lema 3.1.6 obtenemos que $B(\zeta)$ es una familia contraíble y aplicando el lema 3.1.7 obtenemos que $B(\zeta)$ es una familia de Cauchy. Por tanto, $B(\zeta)$ es un filtro canónico conteniendo a $\zeta$. □

Para cualesquiera dos familias $\zeta_1$ y $\zeta_2$ de subconjuntos de $G$ definimos la siguiente familia de conjuntos

$$[\zeta_1\zeta_2] = \{AB : A \in \zeta_1, B \in \zeta_2\}.$$

**Lema 3.1.9.** *Si $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son bases de filtros abiertos en $G$, entonces $[\zeta_1\zeta_2]$ también es una base de filtro abierto en $G$.*

*Demostración.*

i) Como $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son bases de filtros, entonces $[\zeta_1\zeta_2] \neq \emptyset$ y además $\emptyset \notin [\zeta_1\zeta_2]$.

ii) Sean $A_1B_1, A_2B_2 \in [\zeta_1\zeta_2]$ donde $A_1, A_2 \in \zeta_1$ y $B_1, B_2 \in \zeta_2$. Como $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son bases de filtros abiertos en $G$, existen $A_3 \in \zeta_1$ y $B_3 \in \zeta_2$ tales que $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Por lo que $A_3B_3 \subseteq (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$.

Como los elementos de $\zeta_1$ y de $\zeta_2$ son abiertos, entonces cada elemento de $[\zeta_1\zeta_2]$ es abierto. Por tanto, $[\zeta_1\zeta_2]$ es una base de filtro abierto en $G$. □

**Lema 3.1.10.** *Si $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son familias contraíbles, entonces $[\zeta_1\zeta_2]$ es una familia contraíble.*

*Demostración.* Sea $AB \in [\zeta_1\zeta_2]$ donde $A \in \zeta_1$ y $B \in \zeta_2$. Como $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son familias contraíbles, existen $A_1 \in \zeta_1$, $B_1 \in \zeta_2$ y $U_1, V_1, U_2, V_2 \in \mathcal{N}(e)$ tales que $U_1A_1V_1 \subseteq A$ y $U_2B_1V_2 \subseteq B$. Entonces

$$U_1A_1B_1V_2 \subseteq U_1A_1V_1U_2B_1V_2 \subseteq AB.$$

Como $A_1B_1 \in [\zeta_1\zeta_2]$, concluimos que $[\zeta_1\zeta_2]$ es una familia contraíble. □

**Lema 3.1.11.** *Si $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son familias de Cauchy, entonces $[\zeta_1\zeta_2]$ también es una familia de Cauchy.*

*Demostración.* Sean $U, V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $V^2 \subseteq U$. Como $\zeta_2$ es una familia de Cauchy, existen $B \in \zeta_2$ y $b \in G$ tales que $B \subseteq bV$. Notemos que $bVb^{-1} \in \mathcal{N}(e)$. Como $\zeta_1$ es de Cauchy, existen $A \in \zeta_1$ y $a \in G$ tales que $A \subseteq abVb^{-1}$. Entonces tenemos que

$$AB \subseteq abVb^{-1}bV = abV^2 \subseteq abU.$$

Como $AB \in [\zeta_1\zeta_2]$, se prueba la primera parte de la demostración. Similarmente podemos encontrar $A_1 \in \zeta_1$, $B_1 \in \zeta_2$ y $c \in G$ tales que $A_1B_1 \subseteq Uc$. Por tanto, $[\zeta_1\zeta_2]$ es una familia de Cauchy. □

**Proposición 3.1.12.** *Si $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son filtros canónicos, entonces $[\zeta_1\zeta_2]$ es una base de filtro abierto en $G$ que es también una familia de Cauchy contraíble. Además, $B([\zeta_1\zeta_2])$ es un filtro canónico.*

*Demostración.* Como $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son filtros canónicos, entonces $\zeta_1$ y $\zeta_2$ son bases de filtro abierto en $G$, contraíbles y de Cauchy. Por el lema 3.1.9 obtenemos que $[\zeta_1\zeta_2]$ es una base de filtro abierto en $G$. Aplicando el lema 3.1.10 se sigue que $[\zeta_1\zeta_2]$ es una familia contraíble y por el lema 3.1.11 se tiene que $[\zeta_1\zeta_2]$ es una familia de Cauchy. De lo anterior, $[\zeta_1\zeta_2]$ es una base de filtro abierto en $G$ que es también una familia de Cauchy contraíble y por la proposición 3.1.8 concluimos que $B([\zeta_1\zeta_2])$ es un filtro canónico. □

**Corolario 3.1.13.** *$\mathcal{N}(x)$ es un filtro canónico en $G$.*

*Demostración.* Claramente $\mathcal{N}(x)$ es un filtro abierto y una familia de Cauchy. Sólo falta probar que $\mathcal{N}(x)$ es una familia contraíble. Sea $O \in \mathcal{N}(x)$. Por el teorema 1.3.12 (las condiciones de Pontryagin), existen $W, U, V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $xW \subseteq O$, $V^3 \subseteq W$ y $Ux \subseteq xV$. De lo anterior se sigue que

$$UxVV = UxV^2 \subseteq xV^3 \subseteq xW \subseteq O.$$

Note que $xV \in \mathcal{N}(x)$. Por tanto, $\mathcal{N}(x)$ es contraíble. Concluimos que $\mathcal{N}(x)$ es un filtro canónico. □

Ahora ya tenemos todas las herramientas para definir la completación de Raĭkov de un grupo topológico $G$.

Sea $G^*$ la familia de todos los filtros canónicos en $G$.

Para cada $x \in G$ definimos $i\colon G \to G^*$ por $i(x) = \mathcal{N}(x)$. Notemos que esta función es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in G$ tales que $i(x) = \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y) = i(y)$. Sea $U \in \mathcal{N}(e)$. Entonces $Ux \in \mathcal{N}(y)$ y $Uy \in \mathcal{N}(x)$, por lo cual existen $u_1, u_2 \in U$ tales que $u_1 x = y$ y $u_2 y = x$ de donde $u_1 = u_2^{-1}$ se sigue que $x = y$.

Ahora definimos $\bullet\colon G^* \times G^* \to G^*$ de la siguiente manera

$$\bullet(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = B\left([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2]\right).$$

Por la proposición 3.1.12, la operación $\bullet$ está bien definida.

Ahora mostraremos que con esta operación $G^*$ tiene estructura de grupo.

El inverso de $\mathcal{F} \in G^*$ lo definimos de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}^{-1} := \{U^{-1} : U \in \mathcal{F}\}.$$

**Lema 3.1.14.** $\mathcal{F}^{-1} \in G^*$.

*Demostración.* Como $\mathcal{F}$ es un filtro abierto y una familia de Cauchy, deducimos que $\mathcal{F}^{-1}$ es un filtro abierto en $G$ y un familia de Cauchy ya que la inversión de $G$ es un homeomorfismo.

Por último probaremos que $\mathcal{F}^{-1}$ es contraíble. Sea $B^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$. Como $\mathcal{F}$ es contraíble y $B \in \mathcal{F}$, entonces existen $A \in \mathcal{F}$ y $U, V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $UAV \subseteq B$. De donde $(UAV)^{-1} \subseteq B^{-1}$. Notemos que

$$(UAV)^{-1} = (U(AV))^{-1} = (AV)^{-1}U^{-1} = V^{-1}A^{-1}U^{-1}.$$

Entonces para $B^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$ existen $A^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$ y $U^{-1}, V^{-1} \in \mathcal{N}(e)$ tales que $V^{-1}A^{-1}U^{-1} \subseteq B^{-1}$. Por tanto, $\mathcal{F}^{-1}$ es contraíble. De todo lo mostrado anteriormente concluimos que $\mathcal{F}^{-1}$ es un filtro canónico. □

Ahora damos una caracterización de ser una familia de Cauchy.

**Lema 3.1.15.** *Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de un grupo topológico $G$ es una familia de Cauchy si y sólo si para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe $P \in \mathcal{F}$ tal que $PP^{-1} \subseteq U$ y $P^{-1}P \subseteq U$.*

*Demostración.* Supongamos que $PP^{-1} \subseteq U$ y $P^{-1}P \subseteq U$ para algún $P \in \mathcal{F}$ y $U \in \mathcal{N}(e)$. Como $P$ es no vacío, existen $a, b \in P$ tales que $Pb^{-1} \subseteq U$ y $a^{-1}P \subseteq U$; así $P \subseteq Ub$ y $P \subseteq aU$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy. Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy. Sea $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que

$VV^{-1} \subseteq U$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy, existen $P \in \mathcal{F}$ y $a, b \in G$ tales que $P \subseteq Va$ y $P \subseteq bV$. Se sigue que

$$PP^{-1} \subseteq Vaa^{-1}V^{-1} \subseteq U.$$

Análogamente se puede probar que $P^{-1}P \subseteq U$. □

El lema anterior nos implica el siguiente resultado.

**Lema 3.1.16.** $\mathcal{F} \bullet \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{N}(e) = \mathcal{F}^{-1} \bullet \mathcal{F}$ *para cada* $\mathcal{F} \in G^*$.

*Demostración.* Sea $U \in \mathcal{F} \bullet \mathcal{F}^{-1}$. Entonces existen $P \in \mathcal{F}$ y $R \in \mathcal{F}^{-1}$ tales que $PR \subseteq U$. Como $R \in \mathcal{F}^{-1}$, se sigue que $R^{-1} \in \mathcal{F}$ y por ser $\mathcal{F}$ filtro, tenemos que $\emptyset \neq P \cap R^{-1} \in \mathcal{F}$. En consecuencia $e \in PR \subseteq U$. Por tanto, $U \in \mathcal{N}(e)$. Análogamente, se puede demostrar que $\mathcal{F}^{-1} \bullet \mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}(e)$. Ahora mostremos la otra contención. Sea $U \in \mathcal{N}(e)$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy, por el lema anterior existe $P \in \mathcal{F}$ tal que $PP^{-1} \subseteq U$ y $P^{-1}P \subseteq U$. Por tanto, $\mathcal{F} \bullet \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{N}(e) = \mathcal{F}^{-1} \bullet \mathcal{F}$ para cada $\mathcal{F} \in G^*$. □

**Definición 3.1.17.** Decimos que dos bases de filtros abiertos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ están ***sincronizadas***, si para cada $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y cada $F_2 \in \mathcal{F}_2$, se satisface que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

El siguiente resultado muestra una de las propiedades básicas de los filtros canónicos.

**Proposición 3.1.18.** *Si* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *son filtros que están sincronizados, donde* $\mathcal{F}_1$ *es canónico y* $\mathcal{F}_2$ *es un filtro abierto de Cauchy, entonces* $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$.

*Demostración.* Sea $U \in \mathcal{F}_1$. Como $\mathcal{F}_1$ es contraíble, existen $P \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{N}(e)$ tales que $PV \subseteq U$. Podemos encontrar un $W \in \mathcal{N}(e)$ tal que $W^{-1}W \subseteq V$. Como $\mathcal{F}_2$ es una familia de Cauchy, por la proposición 3.1.3, existe $b \in G$ tal que $bW \in \mathcal{F}_2$. Se sigue que $P \cap bW \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ están sincronizados. Entonces $b \in PW^{-1}$ lo que implica que

$$bW \subseteq PW^{-1}W \subseteq PV \subseteq U.$$

Por tanto, $bW \subseteq U$ y concluimos que $U \in \mathcal{F}_2$. Finalmente $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. □

El resultado anterior nos proporciona inmediantamente las siguientes propiedades.

**Corolario 3.1.19.** *Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos filtros canónicos. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) *Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son sincronizados, entonces coinciden.*

ii) *Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son distintos, entonces existen $U \in \mathcal{F}_1$ y $V \in \mathcal{F}_2$ tales que $U \cap V = \emptyset$.*

**Lema 3.1.20.** *$\mathcal{F} \bullet \mathcal{N}(e) = \mathcal{F}$ para cada $\mathcal{F} \in G^*$.*

*Demostración.* Notemos que para cada $V \in \mathcal{N}(e)$, se tiene que $F \subseteq FV$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Se sigue que $\mathcal{F} \subseteq B([\mathcal{F}\mathcal{N}(e)])$. Por lo cual $\mathcal{F}$ y $B([\mathcal{F}\mathcal{N}(e)])$ son sincronizados y por el corolario 3.1.19 obtenemos la igualdad deseada. □

**Lema 3.1.21.** *Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in G^*$. Entonces,*

$$B([B([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2])\,\mathcal{F}_3]) = B([\mathcal{F}_1 B([\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3])]).$$

*Demostración.* Sea $U \in B([B([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2])\,\mathcal{F}_3])$. Existe $O \in [B([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2])\,\mathcal{F}_3]$ tal que $O \subseteq U$. Como $O \in [B([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2])\,\mathcal{F}_3]$, podemos encontrar $V \in B([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2])$ y $F_3 \in \mathcal{F}_3$ tales que $O = VF_3$. Como $V \in B([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2])$, existen $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$ tales $F_1F_2 \subseteq V$. De donde obtenemos que $(F_1F_2)F_3 \subseteq O \subseteq U$. Como $(F_1F_2)F_3 = F_1(F_2F_3)$, se sigue que $(F_1F_2)F_3 \in [\mathcal{F}_1 B([\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3])]$ y, por tanto, $U \in B([\mathcal{F}_1 B([\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3])])$. Similarmente se muestra la otra contención. □

De los lemas anteriores obtenemos que $\bullet$ es una operación de grupo en el conjunto $G^*$ y el filtro canónico $\mathcal{N}(e)$ es el elemento neutro de $G^*$.

**Lema 3.1.22.** *$\mathcal{N}(x) \bullet \mathcal{N}(y) = \mathcal{N}(xy)$.*

*Demostración.* Sea $U \in \mathcal{N}(x) \bullet \mathcal{N}(y) = B([\mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)])$. Entonces existen $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales que $VW \subseteq U$ y $xy \in VW \subseteq U$. Consecuentemente $U \in \mathcal{N}(xy)$. Sea $U \in \mathcal{N}(xy)$. Entonces $xy \in U$ y por la continuidad del producto en $G$, existen $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales que $VW \subseteq U$. Por tanto, $U \in B([\mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)]) = \mathcal{N}(x) \bullet \mathcal{N}(y)$. Por tanto, $\mathcal{N}(x) \bullet \mathcal{N}(y) = \mathcal{N}(xy)$. □

Del lema anterior se sigue que:

$$i(xy) = \mathcal{N}(xy) = \mathcal{N}(x) \bullet \mathcal{N}(y).$$

Por lo tanto, $i$ es un homomorfismo de grupos. Por consiguiente $i(G)$ es un subgrupo de $G^*$. El siguiente lema, nos muestra cómo son los inversos en el subgrupo $i(G)$.

**Lema 3.1.23.** $(\mathcal{N}(x))^{-1} = \mathcal{N}(x^{-1})$ *para cada* $x \in G$.

Notemos que $i$ es un isomorfismo del grupo $G$ en el subgrupo $i(G)$ de $G^*$. Vamos a definir una topología en $G^*$ que satisfaga que $G$ e $i(G)$ sean homeomorfos y, además, que la operación $\bullet$ en $G^*$ sea continua. Denotemos por $\tau$ a la topología de $G$. Para $U \in \tau$, definimos

$$U^* = \{\mathcal{F} \in G^* : U \in \mathcal{F}\}.$$

**Lema 3.1.24.** *Para cualesquiera* $U, V \in \tau$ *se satisfacen las siguientes propiedades:*

i) $U^* \cap i(G) = i(U)$.

ii) $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$

*Demostración.*

i) $U^* \cap i(G) = \{\mathcal{F} \in G^* : U \in \mathcal{F}\} \cap \{\mathcal{N}(x) : x \in G\} = \{\mathcal{N}(x) : x \in U\} = i(U)$.

ii) Sea $\mathcal{F} \in U^* \cap V^*$. Así $\mathcal{F} \in U^*$ y $\mathcal{F} \in V^*$, por lo cual $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{F}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$. De lo anterior, se sigue que $\mathcal{F} \in (U \cap V)^*$. Sea $\mathcal{F} \in (U \cap V)^*$. Entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$. Como $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$, se sigue que $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{F}$. Consecuentemente, $\mathcal{F} \in U^*$ y $\mathcal{F} \in V^*$. Por tanto, $\mathcal{F} \in U^* \cap V^*$. Concluimos que $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$. □

**Proposición 3.1.25.** $\beta = \{U^* : U \in \tau\}$ *es base de una topología* $\tau^*$ *en* $G^*$.

*Demostración.*

i) Es claro que

$$\bigcup_{V^* \in \beta} V^* = G^*.$$

ii) Sea $U^*, V^* \in \beta$. Del inciso ii) de el lema 3.1.24 obtenemos que

$$U^* \cap V^* = (U \cap V)^*.$$

De i) y ii) concluimos que $\beta$ es base de una topología $\tau^*$ en $G^*$. □

Como $\tau^*$ es una topología en $G^*$, podemos considerarnos la topología relativa al subespacio $i(G)$. De el lema 3.1.24 obtenemos que

$$\tau^*_{i(G)} = \{i(U) : U \in \tau\}$$

es la topología relativa a $i(G)$.

Como los abiertos de $i(G)$ son los conjuntos $i(U)$, donde $U \in \tau$. Entonces $i$ es biyectiva sobre su imagen, continua y abierta. Por lo tanto, $i$ es un homeomorfismo de $G$ sobre el subespacio $i(G)$ de $G^*$

Ahora probaremos que con $\tau^*$, el grupo $G^*$ se convierte en un grupo topológico.

**Teorema 3.1.26.** *$G^*$ es un grupo topológico con la topología $\tau^*$.*

*Demostración.* Primero mostremos que la función inversión $In\colon G^* \to G^*$ dada por $In(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{-1}$ es continua. Como la función inversión de $G$ es un homeomorfismo, para $U \in \tau$, $U^{-1} \in \tau$. Afirmamos que $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$. En efecto, sea $\mathcal{F}^{-1} \in (U^*)^{-1}$. Por lo cual, $\mathcal{F} \in U^*$, de esto se sigue que $U \in \mathcal{F}$. Por consiguiente, $U^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$. Consecuentemente, $\mathcal{F}^{-1} \in (U^{-1})^*$. Para probar la otra contención, sea $\mathcal{F}^{-1} \in (U^{-1})^*$. Entonces $U^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$, por lo que $U \in \mathcal{F}$. De lo anterior se deduce que $\mathcal{F} \in U^*$. Por lo cual $\mathcal{F}^{-1} \in (U^*)^{-1}$. Así queda mostrada la afirmación. Entonces se satisface que

$$In(U^*) = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^*.$$

Por tanto, la función $In$ es continua. Ahora probemos que $\bullet$ es una función continua. Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in G^*$ y $W^*$ vecindad de $\mathcal{F}_1 \bullet \mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{F}_1 \bullet \mathcal{F}_2 \in W^*$, se tiene que $W \in \mathcal{F}_1 \bullet \mathcal{F}_2 = B\left([\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2]\right)$. Por tanto, existen $U \in \mathcal{F}_1$ y $V \in \mathcal{F}_2$ tales que $UV \subseteq W$. Como $U \in \mathcal{F}_1$ y $V \in \mathcal{F}_2$, se sigue que $\mathcal{F}_1 \in U^*$ y $\mathcal{F}_2 \in V^*$. Ahora afirmamos que

$$U^* \bullet V^* = \{\tilde{\mathcal{F}}_1 \bullet \tilde{\mathcal{F}}_2 : \tilde{\mathcal{F}}_1 \in U^* \text{ y } \tilde{\mathcal{F}}_2 \in V^*\} \subseteq W^*.$$

En efecto, sea $\tilde{\mathcal{F}}_1 \bullet \tilde{\mathcal{F}}_2 \in U^* \bullet V^*$. Entonces $UV \in [\tilde{\mathcal{F}}_1\tilde{\mathcal{F}}_2]$. Como $UV \subseteq W$, se deduce que $W \in B\left([\tilde{\mathcal{F}}_1\tilde{\mathcal{F}}_2]\right) = \tilde{\mathcal{F}}_1 \bullet \tilde{\mathcal{F}}_2$. Por tanto, $\tilde{\mathcal{F}}_1 \bullet \tilde{\mathcal{F}}_2 \in W^*$. Concluimos que $U^* \bullet V^* \subseteq W^*$. Por lo tanto, $\bullet$ es continua. Como $In$ y $\bullet$ son continuas, $(G^*, \tau^*)$ es un grupo topológico. □

Ahora note que por el lema 3.1.24, se tiene que $U^* \cap i(G) = i(U)$ para cada $U \in \tau$, por lo que $i(G)$ es denso en $G^*$.

Si $\zeta$ es una familia de subconjuntos de $G$, denotamos por $s(\zeta)$ a la familia de todos los subconjuntos de $G$ de la forma $UPV$, donde $U, V \in \mathcal{N}(e)$ y $P \in \zeta$. También denotamos por $c(\zeta)$ a $B(s(\zeta))$.

**Proposición 3.1.27.** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $G$. Entonces $c(\mathcal{F})$ es un filtro canónico en $G$ contenido en $\mathcal{F}$.*

*Demostración.* Primero notemos que para cada $F \in \mathcal{F}$ y $U, V \in \mathcal{N}(e)$, se tiene que $F \subseteq UFV$. Se sigue que $UFV \in \mathcal{F}$. Entonces $s(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$. Además, notemos que cada elemento de $s(\mathcal{F})$ es un conjunto abierto, por ser traslación de conjuntos abiertos. Ahora mostremos que $s(\mathcal{F})$ es una base de filtro abierto.

i) Primero notemos que $s(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, entonces $\emptyset \notin s(\mathcal{F})$.

ii) Sean $U_1F_1V_1, U_2F_2V_2 \in s(\mathcal{F})$ donde $U_1, U_2, V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e)$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces $U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(e)$ y $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, así $(U_1 \cap U_2)(F_1 \cap F_2)(V_1 \cap V_2) \in s(\mathcal{F})$ y $(U_1 \cap U_2)(F_1 \cap F_2)(V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1F_1V_1) \cap (U_2F_2V_2)$.

De i) y ii) concluimos que $s(\mathcal{F})$ es una base de filtro abierto y además $s(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$. Por el lema 3.1.5, $c(\mathcal{F})$ es un filtro de abiertos en $G$ conteniendo a $s(\mathcal{F})$. Ahora mostremos que $s(\mathcal{F})$ es una familia contraíble.

Sea $A \in s(\mathcal{F})$. Entonces existen $U, V \in \mathcal{N}(e)$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $A = UFV$. Por el teorema de Pontryagin, exiten $U_1, V_1 \in \mathcal{N}(e)$ tales que $U_1^2 \subseteq U$ y $V_1^2 \subseteq V$. Consideremos $B = U_1FV_1 \in s(\mathcal{F})$, de donde obtenemos que

$$U_1BV_1 = U_1^2FV_1^2 \subseteq UFV = A.$$

Por tanto, $s(\mathcal{F})$ es contraíble y por el lema 3.1.6, concluimos que $c(\mathcal{F})$ es contraíble. Por último probemos que $c(\mathcal{F})$ es una familia de Cauchy. Para esto mostraremos que $s(\mathcal{F})$ es una familia de Cauchy.

Sea $V \in \mathcal{N}(e)$. Podemos encontrar $W \in \mathcal{N}(e)$ tal que $W^3 \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq aW$ y $B \subseteq Wb$. Así $aW, Wb \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es filtro. Como $aWa^{-1}$, $b^{-1}Wb \in \mathcal{N}(e)$, se sigue que $(aWa^{-1})(aW)W \in s(\mathcal{F})$ y $W(Wb)(b^{-1}Wb) \in s(\mathcal{F})$. Además,

$$W(Wb)(b^{-1}Wb) = W^3b \subseteq Vb$$

y

$$(aWa^{-1})(aW)W = aW^3 \subseteq aV.$$

Por lo tanto, $s(\mathcal{F})$ es una familia de Cauchy y por el lema 3.1.7, $c(\mathcal{F})$ es una familia de Cauchy. Por lo tanto, $c(\mathcal{F})$ es un filtro abierto de Cauchy y además es contraíble, es decir, $c(\mathcal{F})$ es un filtro canónico. Ahora mostremos la contención $c(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$. Sea $W \in c(\mathcal{F})$. Entonces existen $U, V \in \mathcal{N}(e)$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $UFV \subseteq W$. Como $F \subseteq UFV \subseteq W$, se sigue que $W \in \mathcal{F}$. Por tanto, $c(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$. □

**Proposición 3.1.28.** *Sean $G$ un subgrupo denso de un grupo topológico $H$ y $\mathcal{F}$ un filtro abierto en $H$. Si $\mathcal{F}_G = \{W \cap G : W \in \mathcal{F}\}$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

i) *$\mathcal{F}_G$ es un filtro abierto en $G$ sincronizado con $\mathcal{F}$.*

ii) *Si $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy en $H$, entonces $\mathcal{F}_G$ es una familia de Cauchy en $G$.*

iii) *Si $\mathcal{F}_G$ converge en $G$, entonces $\mathcal{F}$ converge en $H$ al mismo punto.*

iv) *Si $\mathcal{F}$ es un filtro canónico en $H$, entonces $\mathcal{F}_G$ es un filtro canónico en $G$.*

*Demostración.*

i) Notemos que $\mathcal{F}_G$ es la traza de $\mathcal{F}$ sobre $G$ (ver la definición 1.1.6). Entonces, $\mathcal{F}_G$ es una base de filtro en $G$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en $H$, cada $W \in \mathcal{F}$ es abierto en $H$, se sigue que $W \cap G$ es abierto en $G$ para cada $W \in \mathcal{F}$. Por lo cual, $\mathcal{F}_G$ es un filtro abierto. Ahora mostremos que $\mathcal{F}_G$ y $\mathcal{F}$ están sincronizadas. Sea $U \in \mathcal{F}_G$. Entonces existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $U = V \cap G$ y sea $W \in \mathcal{F}$. Como $V, W \in \mathcal{F}$, se sigue que $V \cap W \in \mathcal{F}$ y por ser $V \cap W$ abierto en $H$ y $G$ denso en $H$, obtenemos que $V \cap W \cap G \neq \emptyset$. Consecuentemente $U \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_G$ y $\mathcal{F}$ están sincronizados.

ii) Sea $W \in \mathcal{N}(e)$ en $G$. Entonces existe $U \in \mathcal{N}(e)$ en $H$ tal que $W = U \cap G$. Como $\mathcal{F}$ es un familia de Cauchy, por el lema 3.1.15, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FF^{-1} \subseteq U$ y $F^{-1}F \subseteq U$. Ahora consideremos $P = F \cap G \in \mathcal{F}_G$. Entonces, $PP^{-1} \subseteq G \cap U = W$ y similarmente $P^{-1}P \subseteq W$. Aplicando nuevamente el lema 3.1.15, concluimos que $\mathcal{F}_G$ es un filtro de Cauchy en $G$.

iii) Recordemos que para cada $W$ abierto en $H$ y cada subespacio $G$ denso en $H$ se tiene que $\overline{W}^H = \overline{W \cap G}^H$. Ahora supongamos que $\mathcal{F}_G \to g \in G$. Denotemos por $\mathcal{N}_G(g)$ a las vecindades abiertas de $g$ en $G$. Entonces, $\mathcal{N}_G(g) \subseteq \mathcal{F}_G$. Mostremos que $\mathcal{N}_H(g) \subseteq \mathcal{F}$. Sea $U \in \mathcal{N}_H(g)$. Por la regularidad de $H$ existe $V \in \mathcal{N}_H(g)$ tal que $g \in V \subseteq \overline{V}^H \subseteq U$. Así $V \cap G \in \mathcal{N}_G(g) \subseteq \mathcal{F}_G$. Entonces, existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $V \cap G = W \cap G$. Por lo dicho al principio del parrafo se sigue que

$$W \subseteq \overline{W \cap G}^H = \overline{V \cap G}^H = \overline{V}^H \subseteq U.$$

Por tanto, $U \in \mathcal{F}$. Concluimos que $\mathcal{N}_H(g) \subseteq \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \to g$.

iv) Si $\mathcal{F}$ es un filtro canónico, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro abierto de Cauchy y además es una familia contraíble. Como $\mathcal{F}$ es un filtro abierto de Cauchy, por i) y ii) $\mathcal{F}_G$ es un filtro abierto de Cauchy. Sólo falta mostrar que $\mathcal{F}_G$ es contraíble. Sea $A \cap G \in \mathcal{F}_G$ con $A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es una familia contraíble, existen $B \in F$, $U$ y $V$ en $\mathcal{N}(e)$ que satisfacen que $UBV \subseteq A$. Notemos que $B \cap G \in \mathcal{F}_G$; además, $U \cap G$ y $V \cap G$ son vecindades de la identidad en $G$. Se tiene que $(U \cap G)(B \cap G)(V \cap G) \subseteq A \cap G$. Por tanto, $\mathcal{F}_G$ es un filtro canónico. $\square$

**Lema 3.1.29.** *Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $G$ y el filtro abierto $B(\mathcal{F})$ converge en $G$, entonces $\mathcal{F}$ converge en $G$.*

*Demostración.* Supongamos que $B(\mathcal{F})$ converge a $x$ en $G$. Entonces $\beta_x \subseteq B(\mathcal{F})$. Para cada $U \in \beta_x$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq U$. Como $\mathcal{F}$ es filtro, se sigue que $U \in \mathcal{F}$ para cada $U \in \beta_x$. Por tanto, $\beta_x \subseteq \mathcal{F}$. Concluimos que $\mathcal{F}$ converge en $G$. $\square$

El siguiente resultado juega un papel importante en la completez del grupo topológico $G^*$.

**Proposición 3.1.30.** *Sea $(G, \tau)$ un grupo topológico. Entonces, cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $G^*$ es convergente.*

*Demostración.* Por el lema anterior es suficiente considerar el caso cuando $\mathcal{F}$ es un filtro abierto de Cauchy. Sabemos que para cada $x \in G$, $i(x) \in G^*$ y además $i(G)$ es un subgrupo denso en $G^*$. Consideremos $\mathcal{F}_{i(G)} = \{W \cap i(G) : W \in \mathcal{F}\}$. Por los incisos i) y ii) de la proposición 3.1.28, $\mathcal{F}_{i(G)}$ es un filtro abierto de Cauchy en $i(G)$ sincronizado con $\mathcal{F}$. Como $i$ es un isomorfismo topológico de $G$ en $i(G)$, se tiene que $\mathcal{F}_G = i^{-1}(\mathcal{F}_{i(G)}) = \{i^{-1}(W) \cap G : W \in \mathcal{F}\}$ es un filtro abierto de Cauchy en $G$. Ahora denotemos por $\zeta$ al conjunto $c(\mathcal{F}_G)$. Por la proposición 3.1.27, $\zeta$ es un filtro canónico en $G$ contenido en $\mathcal{F}_G$, por lo que $\zeta \in G^*$.

Sea $i(U) = U^* \cap i(G) \in \mathcal{N}(\zeta)$ una vecindad básica de $\zeta$, donde $U \in \tau$. Por lo que $\zeta \in U^*$, se sigue que $U \in \zeta$. Entonces, existen $F \in \mathcal{F}_G$ y $V, W \in \mathcal{N}_G(e)$ tales que

$$F \subseteq VFW \subseteq U.$$

Consecuentemente, $U \in \mathcal{F}_G$, por lo que $i(U) \in \mathcal{F}_{i(G)}$ para cada vecindad básica de $\zeta$. Por tanto, $\mathcal{F}_{i(G)}$ converge a $\zeta$ en $G^*$. Del inciso iii) de la proposición 3.1.28 concluimos que $\mathcal{F}$ también converge a $\zeta$ en $G^*$. $\square$

Un grupo topológico $G$ donde cada filtro de Cauchy converge es llamado ***Raĭkov completo***. Por lo tanto, podemos resumir los resultados y argumentos de esta sección de la siguiente manera:

**Teorema 3.1.31.** *Para cada grupo topológico $G$, existen un grupo topológico $G^*$ Raĭkov completo y un isomorfismo topológico $i$ de $G$ sobre el subgrupo denso $i(G)$ de $G^*$.*

## 3.2. Propiedades de la completación de Raĭkov en grupos topológicos

Ahora vamos a dar el teorema que nos indica que para un grupo topológico $G$, el grupo topológico $G^*$ es único (salvo isomorfismos topológicos). Para esto probaremos los siguientes dos resultados.

**Lema 3.2.1.** *Sea $g\colon G \to H$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $G$, entonces $g(\mathcal{F})$ es una base para un filtro de Cauchy en $H$.*

*Demostración.* Primero mostremos que $g(\mathcal{F}) = \{g(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de fitro en $H$.

i) Como $\mathcal{F}$ es filtro en $G$, se sigue que $g(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin g(\mathcal{F})$.

ii) Sean $g(U)$, $g(V) \in g(\mathcal{F})$. Como $U, V \in \mathcal{F}$, se sigue que $U \cap V \in F$. Por consiguiente $g(U \cap V) \in g(\mathcal{F})$ y además $g(U \cap V) \subseteq g(U) \cap g(V)$.

De i) y ii) concluimos que $g(\mathcal{F})$ es una base de filtro en $H$. Sea

$$\mathcal{F}_H = \{F \subseteq H : \exists V \in \mathcal{F} \text{ tal que } g(V) \subseteq F\}$$

el filtro generado por la base $g(\mathcal{F})$ en $H$.

Ahora probemos que $\mathcal{F}_H$ es una familia de Cauchy en $H$. Sea $U$ una vecindad abierta de la identidad en $H$. Como $g$ es continua, se sigue que $g^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de la identidad en $G$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy en $G$, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq ag^{-1}(U)$ y $B \subseteq g^{-1}(U)b$. Por ser $g$ homomorfismo, obtenemos lo siguiente

$$g(A) \subseteq g(ag^{-1}(U)) = g(a)g(g^{-1}(U)) \subseteq g(a)U$$

y

$$g(B) \subseteq g(g^{-1}(U)b) = g(g^{-1}(U))g(b) \subseteq Ug(b).$$

Como $g(A), g(B) \in g(\mathcal{F})$ y $g(a), g(b) \in H$, concluimos que $\mathcal{F}$ es un familia de Cauchy en $H$. De lo anterior, se tiene que $\mathcal{F}_H$ es un filtro de Cauchy en el grupo topológico $H$. □

En la siguiente proposición presentamos una de las propiedades más importantes de los grupos topológicos Raĭkov completos. Para demostrar dicha proposición necesitamos el siguiente lema cuya demostración es inmediata.

**Lema 3.2.2.** *Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros abiertos sincronizados en un espacio Hausdorff $X$. Si $\mathcal{F}_1$ converge a $x$ y $\mathcal{F}_2$ converge a $y$, entonces $x = y$.*

**Proposición 3.2.3.** *Sea $G$ un subgrupo denso de un grupo topológico $H$ y $g\colon G \to K$ un homomorfismo continuo de $G$ a un grupo Raĭkov completo $K$. Entonces $g$ admite una extensión a un homomorfismo continuo $g^*\colon H \to K$.*

*Demostración.* Para cada $z \in H$. Sea $\mathcal{N}_H(z)$ la familia de todas las vecindades de $z$ en $H$. Consideremos $\mathcal{F}_z = \{U \cap G : U \in \mathcal{N}_H(z)\}$. Como $\mathcal{N}_H(z)$ es un filtro de Cauchy en $H$, por la proposición 3.1.28, $\mathcal{F}_z$ es un filtro de Cauchy en $G$. Por el lema 3.2.1, se sigue que $g(\mathcal{F}_z) = \{g(P) : P \in \mathcal{F}_z\}$ es base para un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $K$.

Como $K$ es Raĭkov completo, $\mathcal{F}$ converge a $y$ para algún $y \in K$. Definamos $g^*\colon H \to K$ dada de la siguiente manera $g^*(z) = y$ para cada $z \in H$. Como $K$ es Hausdorff, se sigue que la función está bien definida. Ahora probaremos que $g^*$ es una extensión de $g$ a $H$, es decir, $g^*(z) = g(z)$ para cada $z \in G$. En efecto, sea $z \in G$. Es claro que $\mathcal{F}_z \to z$ y por la continuidad de $g$ se tiene que $g(\mathcal{F}_z) \to g(z)$. Se sigue que $g^*(z) = g(z)$ para cada $z \in G$. Por tanto, $g^*$ es una extensión de $g$ a $H$.

Para mostrar que $g^*$ es continua, es suficiente probar que para cada $A \subseteq G$, se cumple la siguiente contención $g^*(\bar{A}^H) \subseteq \overline{g(A)}^K$. Sean $z \in \bar{A}^H$ y $g^*(z) = y$. Sea $\delta_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{N}_H(z)\}$. Por como está definida $\delta_A$, se sigue que $\delta_A$ es un filtro abierto de Cauchy en $G$, pues $\mathcal{N}_H(z)$ es un filtro abierto de Cauchy en $H$.

Por el lema 3.2.1, $g(\delta_A)$ es base de un filtro de Cauchy $\mathcal{F}_1$ en $K$. Por como hemos definido a $g^*$, se tiene que $\mathcal{F}_1$ converge a $y \in K$. Como $\mathcal{F}_1$ converge a $y$, obtenemos que $\mathcal{N}_K(y) \subseteq \mathcal{F}_1$. Como $g(\delta_A)$ es base de $\mathcal{F}_1$, se sigue que para cada $U \in \mathcal{N}_K(y)$, existe $V \in \delta_A$ tal que $g(V) \subseteq U$. Como $V \in \delta_A$, existe $W \in \mathcal{N}_H(z)$ tal que $V = W \cap A$. Así que $g(W \cap A) \subseteq U$. Además, $g(W \cap A) \subseteq g(A)$. Por lo cual $g(W \cap A) \subseteq U \cap g(A)$. Por tanto, $y \in \overline{g(A)}^K$. Con lo cual $g^*$ es continua.

Ahora probemos que $g^*$ es un homomorfismo. Supongamos que existen $a, b \in H$ tales que $g^*(ab) \neq g^*(a)g^*(b)$. Sean $O$ y $W$ vecindades abiertas disjuntas de $g^*(ab)$ y $g^*(a)g^*(b)$ en $K$, respectivamente. Consideremos $U$ y $V$ vecindades abiertas de $g^*(a)$ y $g^*(b)$ en $K$, respectivamente, tales que $UV \subseteq W$. Por la continuidad de $g^*$ y de la multiplicación en $H$ podemos encontrar vecindades $U_1$ y $V_1$ de $a$ y $b$ en $H$, respectivamente, tales que $g^*(U_1) \subseteq U$, $g^*(V_1) \subseteq V$ y $g^*(U_1V_1) \subseteq O$. Como $G$ es denso en $H$, existen $a_1 \in U_1 \cap G$ y $b_1 \in V_1 \cap G$. Como $g$ es homomorfismo y $g^*$ coincide con $g$ en $G$, se tiene que

$$g^*(a_1b_1) = g(a_1b_1) = g(a_1)g(b_1) = g^*(a_1)g^*(b_1) \in UV \subseteq W.$$

Por otro lado, $g^*(a_1b_1) \in g^*(U_1V_1) \subseteq O$. Se sigue que $g^*(a_1b_1) \in O \cap W \neq \emptyset$. Por tanto, $g^*$ es un homomorfismo. $\square$

**Proposición 3.2.4.** *Sea $g\colon G \to H$ un isomorfismo topológico de grupos topológicos, donde $G$ y $H$ son subgrupos densos de grupos Raĭkov completos $G^*$ y $H^*$, respectivamente. Entonces $g$ admite una extensión continua a un isomorfismo topológico $g^*\colon G^* \to H^*$.*

*Demostración.* Por la proposición anterior podemos extender a $g\colon G \to H^*$ a un homomorfismo continuo $\varphi\colon G^* \to H^*$. Similarmente $g^{-1}\colon H \to G^*$ admite una extensión a un homomorfismo continuo $\psi\colon H^* \to G^*$. Entonces la restricción a $G$ de $\psi \circ \varphi$ es la identidad en $G$ y la restricción a $H$ de $\varphi \circ \psi$ es la identidad en $H$. Por lo tanto, $\psi \circ \varphi$ es la identidad en $G^*$ y $\varphi \circ \psi$ es la identidad en $H^*$. Así concluimos que $\varphi\colon G^* \to H^*$ es un isomorfismo topológico. $\square$

El siguiente teorema nos muestra la unicidad de la completación de Raĭkov, salvo isomorfismos topológicos.

**Teorema 3.2.5.** *Sean $G$ un grupo topológico, $H_1$ y $H_2$ grupos topológicos Raĭkov completos tales que $G$ es un subgrupo denso de $H_1$ y $H_2$. Entonces existe un isomorfismo topológico $\varphi\colon H_1 \to H_2$ tal que $\varphi(g) = g$ para cada $g \in G$.*

*Demostración.* Sea $Id\colon G \to G$ la identidad en $G$. Como $Id$ es un isomorfismo topológico, aplicando la proposición anterior se concuye el resultado. $\square$

Sea $G$ un grupo topológico. Desde este momento denotaremos al grupo topológico Raĭkov completo $G^*$ por $\rho G$ y $G$ siempre será identificado con $i(G)$.

**Proposición 3.2.6.** *Para cualquier grupo topológico $G$, $\rho\rho G = \rho G$. En particular, $G$ es Raĭkov completo si y sólo si $\rho G = G$.*

*Demostración.* Sabemos que $G$ es un subgrupo denso de la completación de Raĭkov $\rho G$ de $G$. Además $\rho G$ es un subgrupo denso $\rho\rho G$. Entonces $G$ es un subgrupo denso del grupo Raĭkov completo $\rho\rho G$. Por el teorema 3.2.5, existe un isomorfismo topológico $\varphi\colon \rho G \to \rho\rho G$ tal que $\varphi(g) = g$ para cada $g \in G$. Por tanto, $\rho G = \rho\rho G$. □

**Corolario 3.2.7.** *Sean $G$ un subgrupo denso de un grupo topológico $H$. Entonces existe un isomorfismo topológico $i_H$ de $H$ sobre un subgrupo de la completación de Raĭkov $\rho G$ de $G$ tal que $i_H(g) = g$, para cada $g \in G$.*

*Demostración.* Como $G$ es denso en $H$, se sigue que $G$ es un subgrupo denso de $\rho H$. Como $\rho H$ y $\rho G$ son Raĭkov completos y tienen a $G$ como subgrupo denso, existe un isomorfismo topológico $\varphi\colon \rho H \to \rho G$ tal que $\varphi(g) = g$ para cada $g \in G$, por el teorema 3.2.5. Como $G$ es subgrupo de $H$ y $H$ es subgrupo de $\rho H$, podemos tomarnos a $i_H = \varphi|_H\colon H \to \varphi(H)$. De lo anterior, se sigue el resultado. □

El resultado que se acaba de demostrar nos dice que todos los grupos topológicos $H$ que contienen un subgrupo denso $G$, pueden identificarse con los subgrupos de $\rho G$ tales que $G \subseteq H \subseteq \rho G$. Esta identificación se utilizará de ahora en adelante.

El siguiente resultado es un caso especial de la proposición 3.2.3 y establece una propiedad básica de la completación de Raíkov.

**Corolario 3.2.8.** *Cada homomorfismo continuo de grupos topológicos $f\colon G \to H$ pueden extenderse a un homomorfismo continuo $\rho f\colon \rho G \to \rho H$.*

El siguiente corolario complementa a la proposición 3.2.4.

**Corolario 3.2.9.** *Sean $f\colon G \to H$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos y $D$ un subgrupo denso de $G$. Si la restricción $g = f|_D\colon D \to f(D)$ es un isomorfismo topológico, entonces $f\colon G \to f(G)$ es un isomorfismo topológico.*

*Demostración.* Por el corolario anterior, $f$ admite una extensión $f^*\colon \rho G \to \rho H$, donde $f^*$ es un homomorfismo continuo. Sean $E = f(D)$ y $K = \overline{E}^{\rho H}$. Entonces $E$ es un subgrupo denso de un grupo Raíkov completo $K$ y $D$

es un subgrupo denso al grupo Raikov completo $\rho G$. Como $g = f|_D$ es un isomorfismo topológico, $D$ es un subgrupo denso en $\rho G$ y $E$ es denso en $K$, $g$ tiene una extensión $g^*\colon \rho G \to K$ por la proposición 3.2.4. Como $g^*$ y $f^*$ coinciden un conjunto denso y $K$ es Hausdorff, se sigue que $f^* = g^*$. Por tanto, $f^*$ es un isomorfismo topológico de $\rho G$ a $K$. Consecuentemente $f$ es un isomorfismo topológico de $G$ a $f(G)$.

$\square$

El corolario anterior no se satisface en todo espacio topológico. Si consideramos una función continua $g\colon I \to \mathbb{T}$ donde $I = [0,1]$ y $\mathbb{T}$ es el círculo definida por $g(x) = e^{2\pi i x}$ para cada $x \in I$. La restricción $g$ al subespacio denso $(0,1)$ de $I$ es un homeomorfismo de $(0,1)$ al subespacio $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ de $\mathbb{T}$. Sin embargo, $g$ no es un homeomorfismo pues $g(0) = g(1) = 1$.

El siguiente teorema nos muestra cómo obtener la completación de Raĭkov de un subgrupo en un grupo topológico Raĭkov completo.

**Teorema 3.2.10.** *Sean $(G,\tau)$ un un grupo topológico Raĭkov completo y $H$ un subgrupo de $G$. Entonces, $\overline{H}^{\tau}$ es Raĭkov completo.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $\overline{H}^{\tau}$ y $\mathcal{F}_G$ la extensión de $\mathcal{F}$ a $G$, es decir,

$$\mathcal{F}_G = \{F \subseteq G : \exists B \in \mathcal{F} \text{ tal que } B \subseteq F\}.$$

Ahora veamos que $\mathcal{F}_G$ es una familia de Cauchy para concluir que es un filtro de Cauchy en $G$. Sea $V \in \mathcal{N}_G(e)$; claramente $V \cap \overline{H}^{\tau} \in \mathcal{N}_{\overline{H}}(e)$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy, existen $a, b \in \overline{H}^{\tau}$ y $A, B \in \mathcal{F}$ tales que

$$A \subseteq a(V \cap \overline{H}^{\tau}) \subseteq aV$$

y

$$B \subseteq (V \cap \overline{H}^{\tau})b \subseteq Vb.$$

Se sigue que $\mathcal{F}_G$ es un filtro de Cauchy en $G$. Como $G$ es Raĭkov completo, se deduce que $\mathcal{F}_G$ converge a algún $g \in G$. Es decir, la familia $\beta_G^g$ de vecindades de $g$ en $G$ está contenida en $\mathcal{F}_G$. Ahora mostremos que $\mathcal{F}$ converge a $g$. Sea $U \in \beta^g_{\overline{H}^{\tau}}$, por lo que $U = V \cap \overline{H}^{\tau}$, donde $V \in \beta_G^g \subseteq \mathcal{F}$. Entonces, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq V$, por lo que $F \subseteq U$. Así $U \in \mathcal{F}$ y se sigue que $\beta^g_{\overline{H}^{\tau}} \subseteq \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F}$ converge a $g$. Como $\overline{H}^{\tau}$ es cerrado, se sigue que $g \in \overline{H}^{\tau}$. Finalmente, $\overline{H}^{\tau}$ es Raĭkov completo. $\square$

El siguiente resultado nos garantiza que la propiedad de ser Raĭkov completo se hereda a subgrupos cerrados.

**Corolario 3.2.11.** *Si $G$ es un grupo Raĭkov completo y $H$ un subgrupo cerrado de $G$, entonces $H$ es Raĭkov completo.*

A continuación daremos una caracterización de los grupos topológicos Raĭkov completos.

**Proposición 3.2.12.** *Un grupo topológico es Raĭkov completo si y sólo si es cerrado en todo grupo topológico que lo contenga como subgrupo.*

*Demostración.* Sean $G$ y $H$ grupos topológicos tales que $H \leq G$ y $H$ es Raĭkov completo. Mostremos que $H$ es cerrado en $G$. Sea $h \in \overline{H}$. Entonces existe una red $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en $H$ tal que $h_\omega \to h$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por la red $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, es decir, una base para $\mathcal{F}$ es $\{F_{\omega_0} : \omega_0 \in \Omega\}$, donde $F_{\omega_0} = \{h_\omega : \omega \geq \omega_0\}$. Notemos que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $H$ y por ser $H$ Raĭkov completo, $\mathcal{F} \to h_0 \in H$. Sin embargo, $h_\omega \to h$, por lo que $\mathcal{F} \to h$. Concluimos que $h \in H$. Por tanto, $H$ es cerrado en $G$.

Ahora mostremos el recíproco. Sea $H$ un grupo topológico que es cerrado en cada grupo topológico que lo contiene. Como $H$ es un grupo cerrado y denso en $\rho H$, se sigue que $H = \rho H$. $\square$

El siguiente resultado nos dice que la propiedad de ser Raĭkov completo se preserva bajo productos arbitrarios.

**Teorema 3.2.13.** *Cada producto topológico $G = \prod_{i\in I} G_i$ de grupos Raĭkov completos es Raĭkov completo.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $G$. Por el teorema 1.1.11, existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ sobre $G$ que contiene a $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, se sigue que $\mathcal{G}$ también es un filtro de Cauchy. Para cada $i \in I$, sea $\pi_i \colon G \to G_i$ la proyección canónica. Por el lema 3.2.1, la familia $\pi_i(\mathcal{G}) = \{\pi_i(F) : F \in \mathcal{G}\}$ es base de un filtro de Cauchy $\mathcal{F}_i$ en $G_i$. Como $G_i$ es Raĭkov completo, $\mathcal{F}_i$ converge a algún $b_i \in G_i$. Denotemos por $b$ al punto en $G$ con la propiedad de que $\pi_i(b) = b_i$ para cada $i \in I$. Como $\mathcal{F}_i$ converge a $b_i$ para cada $i \in I$, concluimos que $\pi_i^{-1}(V) \cap F \neq \emptyset$ para cada vecindad $V$ de $b_i$ en $G_i$ y cada $F \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es un ultrafiltro, se sigue que $\pi_i^{-1}(V) \in \mathcal{G}$ para cada $i \in I$. Afirmamos que $\mathcal{G}$ converge a $b$. En efecto, sea $O$ una vecindad de $b$ en $G$. Como $O$ es abierto, existe un básico $U = \pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \pi_{i_2}(U_2)^{-1} \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n)$

tal que $U \subseteq O$, donde $i_k \in I$, $b_{i_k} \in U_k$ y $U_k$ es abierto en $G_{i_k}$ para cada $k \leq n$. Por lo anterior, tenemos que $O_k = \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \in \mathcal{G}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\mathcal{G}$ es un filtro, se sigue que $U = O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{G}$. Como $U \subseteq O$, se sigue que $O \in \mathcal{G}$. Por tanto, $\mathcal{G}$ converge a $b$. Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $G$ es Hausdorff, se tiene que $\mathcal{F}$ converge a $b$. Por lo tanto, $G$ es Raĭkov completo. □

**Corolario 3.2.14.** *Sea $G = \prod_{i \in I} G_i$ el producto de grupos topológicos. Entonces $\rho G$ es topologicamente isomorfo al producto $\prod_{i \in I} \rho G_i$.*

Recordemos que un espacio Tychonoff $X$ es llamado ***Čech-completo*** si $X$ es homeomorfo a un conjunto $G_\delta$ en un espacio compacto. Un ***grupo Čech-completo*** es un grupo topológico el cual es un espacio Čech completo.

Un subconjunto $A$ del espacio $X$ es ***magro*** en $X$ si $A$ es la unión de una familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $X$. Decimos que $A \subseteq X$ es ***casi abierto*** en $X$ si existen conjuntos magros $B$ y $C$ en $X$ tales que $(A \setminus B) \cup C$ es un abierto en $X$.

El siguiente lema tiene una aplicación importante para demostrar que todo grupo Čech-completo es Raĭkov completo.

**Lema 3.2.15.** *Sea $A$ un subconjunto casi abierto no magro de un grupo paratopológico $G$. Entonces $AA^{-1}$ y $A^{-1}A$ son vecindades de la identidad en $G$.*

*Demostración.* Si $A$ no es magro en $G$, entonces $G$ no es magro en sí mismo. Afirmamos que cada subconjunto abierto no vacío de $G$ no es magro. En efecto, supongamos lo contrario, es decir, que $G$ contiene a un subconjunto abierto y magro $U$ no vacío. Como $G$ es homogéneo, podemos suponer que la identidad de $G$ está en $U$. Denotemos por $\gamma$ a la familia maximal disjunta de subconjuntos abiertos de $G$ de la forma $xV$, donde $e \in V \subseteq U$ y $x \in G$. Como las traslaciones izquierdas en $G$ son homeomorfismos, todos los elementos de $\gamma$ son magros en $G$. Además, de la maximalidad de $\gamma$ se tiene que $O = \bigcup \gamma$ es denso en $G$, por lo que $F = G \setminus O$ es un conjunto denso en ninguna parte en $G$. Sea $\gamma = \{W_i : i \in I\}$. Notemos que $\gamma$ es una familia localmente finita de abiertos. Para cada $i \in I$, existe una familia $\{B_{i,n} : n \in \omega\}$ de subconjuntos densos en ninguna parte de $G$ tales que $W_i = \bigcup_{n \in \omega} B_{i,n}$. Como $B_{i,n} \subseteq W_i$, $\{B_{i,n} : i \in I\}$ es una familia localmente finita; se sigue que $C_n = \bigcup_{i \in I} B_{i,n}$ es denso en ninguna parte para cada $n \in \omega$ (ver el ejercicio 1.3.B de [41]). Claramente, $G = F \cup \bigcup_{n \in \omega} C_n$ lo que contradice que $G$ no es magro en sí mismo. Por tanto, cada subconjunto abierto no vacío de $G$ no es magro.

Para cada subconjunto casi abierto $B$ de $G$, denotamos por $B^*$ a la unión de todos los subconjuntos abiertos $U$ en $G$ para el cual $U \setminus B$ es magro en $G$. Es claro que si $B$ y $C$ son conjuntos casi abiertos tales que $B \subseteq C$, se tiene que $B^* \subseteq C^*$.

**Afirmación:** Sean $B$ y $C$ conjuntos casi abiertos de $G$ y $x \in G$. Entonces, $(xB)^* = xB^*$ y $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$.

La igualdad $(xB)^* = xB^*$ es evidente del hecho que la traslación izquierda es un homeomorfismo en $G$. Para mostrar que $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$, primero note que $(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$. Entonces sólo probaremos que $B^* \cap C^* \subseteq (B \cap C)^*$. Si $y \in B^* \cap C^*$, podemos encontrar $U$ y $V$, subconjuntos abiertos en $G$, tales que $y \in U \cap V$ y los conjuntos $U \setminus B$ y $V \setminus C$ son magros en $G$. Como $(U \cap V) \setminus (B \cap C) \subseteq (U \setminus B) \cup (V \setminus C)$, se sigue que $y \in U \cap V \subseteq (B \cap C)^*$. Por tanto, $B^* \cap C^* \subseteq (B \cap C)^*$. Concluimos que $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$.

Sea $x \in G$. Por la afirmación anterior, se tiene que $xA^* \cap A^* = (xA \cap A)^*$. Si $xA^* \cap A^* \neq \emptyset$, se sigue que $xA \cap A \neq \emptyset$. Por tanto,

$$A^*(A^*)^{-1} = \{x \in G : xA^* \cap A^* \neq \emptyset\} \subseteq \{x \in G : xA \cap A \neq \emptyset\} = AA^{-1}.$$

En otras palabras, el conjunto $AA^{-1}$ contiene a la vecindad abierta $A^*(A^*)^{-1}$ de la identidad en $G$ (note que $A^* \neq \emptyset$ pues $A$ no es magro en $G$). Utilizando un argumento similar se puede mostrar que $A^{-1}A$ también es una vecindad de la identidad en $G$. □

**Teorema 3.2.16.** *Si un grupo topológico $G$ contiene un subconjunto abierto no vacío Čech-completo, entonces $G$ es Raĭkov completo. En particular, cada grupo Čech-completo es Raĭkov completo.*

*Demostración.* Sea $U$ un subconjunto abierto no vacío Čech-completo de $G$. Entonces, $U$ no es un conjunto magro en sí mismo (por el teorema 3.9.3 de [11]). Denotemos por $\rho G$ a la completación de Raĭkov de $G$. Sea $X$ la compactificación de Stone-Čech del espacio $\rho G$. Denotemos por $C$ a $\overline{U}^X$. Como $C$ es compacto y $U$ es un subespacio Čech-completo de $C$, se sigue que $C \setminus U$ es un conjunto $F_\sigma$ en $C$ (por el teorema 3.9.1 de [11]). En particular, $\overline{U}^{\rho G} \setminus U$ es un conjunto $F_\sigma$ en $\rho G$. Como $U$ es denso en $\overline{U}^{\rho G}$, se conluye que $\overline{U}^{\rho G} \setminus U$ es un conjunto magro en $\overline{U}^{\rho G}$ y en $\rho G$. Por la misma razón $U$ no es magro en ninguno de los espacios $C$, $\overline{U}^{\rho G}$ y $\rho G$. Ahora note que $\overline{U}^{\rho G}$ contiene al subconjunto abierto $V = \rho G \setminus \left(\overline{G \setminus U}^{\rho G}\right)$ de $\rho G$ y $U \subseteq V$. Notemos que $U$ es denso en $V$ y en consecuencia, $V \setminus U$ es magro en $V$, por lo que $V \setminus U$

es magro en $\rho G$. Por tanto, $V = (U \setminus \emptyset) \cup (V \setminus U)$, es decir, $U$ es un conjunto casi abierto no magro de $\rho G$.

Por el lema 3.2.15, el conjunto $UU^{-1} \subseteq G$ es una vecindad de la identidad en $\rho G$. Por tanto, $G$ es un subgrupo abierto y cerrado de $\rho G$. Luego, $G = \rho G$. Concluimos que $G$ es Raĭkov completo. $\square$

**Corolario 3.2.17.** *Cada grupo topológico localmente compacto $G$ es Raĭkov completo.*

**Corolario 3.2.18.** *Todo grupo topológico completamente metrizable es Raĭkov completo.*

**Proposición 3.2.19.** *Para cualquier grupo topológico metrizable $G$, su completación de Raĭkov $\rho G$ es metrizable.*

*Demostración.* Como $G$ es un subgrupo denso de $\rho G$ y $G$ es metrizable, se sigue de la proposición 1.3.16 que $\overline{G}^{\rho G} = \rho G$ es metrizable. $\square$

Recordemos que un grupo topológico $G$ es ***precompacto*** si para cada $U \in \mathcal{N}(e)$ se tiene que $AU = G$ para algún subconjunto finito $A$ de $G$; equivalentemente, $UB = G$ para algún subconjunto finito $B$ de $G$. En el siguiente resultado se da una caracterización de compacidad utilizando la propiedad de ser Raĭkov completo.

**Proposición 3.2.20.** *Todo grupo topológico Raĭkov completo y precompacto es compacto.*

*Demostración.* Sean $G$ un grupo topológico Raĭkov completo y precompacto y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro de $G$. Para demostrar que $G$ es compacto probaremos que $\mathcal{F}$ converge en $G$ (ver el teorema 17.4 de [41]). Sea $U \in \mathcal{N}(e)$ fijo. Como $G$ es precompacto, podemos encontrar $a_1, \ldots, a_n \in G$ tales que $G = \bigcup_{i=1}^n a_i U$. Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existe $F \in \mathcal{F}$, por lo que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i U$. Consecuentemente, $\bigcup_{i=1}^n a_i U \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, se tiene que $a_i U \in \mathcal{F}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. De manera similar podemos podemos encontrar $b \in G$ tal que $Ub \in \mathcal{F}$. Se deduce que $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy en $G$, por lo que es un filtro de Cauchy en $G$. Como $G$ es Raĭkov completo, $\mathcal{F}$ converge a algún punto en $G$. Por tanto, $G$ es compacto. $\square$

**Corolario 3.2.21.** *Un grupo topológico $G$ es compacto si y sólo si $G$ es precompacto y Raĭkov completo.*

Existe una relación natural entre los grupos Raĭkov completos y los espacios uniformes completos. Para establecer esta relación recordemos los conceptos necesarios de la teoría de espacios uniformes completos.

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un filtro $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $X$ es llamado de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$, si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subseteq U$. El espacio $(X,\mathcal{U})$ es completo si cada filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$ converge a algún punto de $X$.

**Teorema 3.2.22.** *Cada grupo topológico $G$ es Raĭkov completo si y sólo si el espacio uniforme $(G,\mathcal{B})$ es completo, donde $\mathcal{B}$ es la uniformidad bilateral en $G$.*

*Demostración.* Supongamos que el grupo $G$ es Raĭkov completo. Tenemos que verificar que cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $(G,\mathcal{B})$ converge. Sea $V$ una vecindad simétrica de $e$ en $G$. Entonces

$$O_V = \{(x,y) \in G \times G : y \in xV \cap Vx\} \in \mathcal{B}.$$

Como $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy en $(G,\mathcal{B})$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subseteq O_V$. Si $x \in F$, entonces $F \subseteq xV \cap Vx$. De lo anterior se sigue que $\mathcal{F}$ es una familia de Cauchy y, por tanto, un filtro de Cauchy en $G$. Como $G$ es Raĭkov completo, $\mathcal{F}$ converge a algún punto en $G$. Por tanto, el espacio uniforme $(G,\mathcal{B})$ es completo.

Ahora mostremos el recíproco. Supongamos que el espacio uniforme $(G,\mathcal{B})$ es completo. Para mostrar que el grupo $G$ es Raĭkov completo, probaremos que cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $G$, también es un filtro de Cauchy en $(G,\mathcal{B})$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $G$. Si $U \in \mathcal{B}$, existen vecindades simétricas $V$ y $W$ de $e$ en $G$ tales que $V \subseteq U$ y $W^2 \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $G$, se sigue que existen $a, b \in G$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $F \subseteq aW \cap Wb$. Sean $x$ y $y$ elementos en $F$ arbitrarios. Como $W$ es simétrico, tenemos que $a^{-1}x \in W$, $x^{-1}a \in W$ y $a^{-1}y \in W$. De donde obtenemos que $x^{-1}y = (x^{-1}a)(a^{-1}y) \in W^2 \subseteq V$. En consecuencia, $y \in xV$ Similarmente, $xb^{-1} \in W$, $yb^{-1} \in W$ y $by^{-1} \in W$. Se sigue que $xy^{-1} = (xb^{-1})(by^{-1}) \in W^2 \subseteq V$. Consecuentemente, $y \in Vx$. Deducimos que $(x,y) \in V$. Esto prueba que $F \times F \subseteq U$. Es decir, $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $(G,\mathcal{B})$. Como $(G,\mathcal{B})$ es completo, $\mathcal{F}$ converge a algún punto en $G$. Por tanto, $G$ es Raĭkov completo. $\square$

# Capítulo 4

# Completación de Raĭkov de un grupo paratopológico

En este capítulo describimos una construcción que extiende la completación de Raĭkov a grupos paratopológicos $T_0$. Compararemos algunos resultados de la completación de grupos topológicos con la completación de grupos paratopológicos. Para la construcción de la completación de Raĭkov de grupos paratopológicos necesitaremos nociones del grupo correflexión. Por lo que este capítulo empieza con la sección de grupos topológicos correflexión.

## 4.1. Grupo topológico correflexión

Dado un grupo paratopológico podemos asignarle de forma natural un grupo topológico de la siguiente manera:

Sea un grupo paratopológico $G$ con topología $\tau$. Definimos la ***topología conjugada*** $\tau^{-1}$ en $G$ por

$$\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}.$$

Entonces $G' = (G, \tau^{-1})$ también es un grupo paratopológico y además la función inversión $In : (G, \tau) \to (G, \tau^{-1})$ es un homeomorfismo. Por lo que $G$ y $G'$ son homeomorfos. El supremo $\tau^* = \tau \vee \tau^{-1}$ es una topología de grupo topológico en $G$. Llamamos a $G^* = (G, \tau^*)$ el ***grupo correflexión*** a $G$. Por como está definido $\tau^*$ podemos observar de manera inmediata que $\tau^*$ es la topología más gruesa que hace a $G$ un grupo topológico que contiene a $\tau$.

El siguiente resultado nos dice cómo obtener una base local de $e$ en $G^*$ a partir de una base local de $e$ en $G$.

**Proposición 4.1.1.** *Sea $G$ un grupo paratopológico con topología $\tau$. Si $\beta$ es una base local de la identidad $e$ en $G$, entonces*

$$\{U \cap U^{-1} : U \in \beta\}$$

*es una base local de la identidad en $G^*$.*

*Demostración.* Sea $V \in \tau^*$ una vecindad de la identidad $e$ en $G^*$. Si $V \in \tau$, existe $U \in \beta$ tal que $e \in U \cap U^{-1} \subseteq V$. Si $V \in \tau^{-1}$, se sigue que $e \in V^{-1} \in \tau$. En consecuencia, existe $U \in \beta$ tal que $e \in U \cap U^{-1} \subseteq V$. Concluimos que $\{U \cap U^{-1} : U \in \beta\}$ es una base local de la identidad en $G^*$. □

De la proposición anterior se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.2.** *Si $(G, \tau)$ es un grupo paratopológico, entonces $\{U \cap U^{-1} : e \in U \in \tau\}$ forma una base de vecindades de la identidad $e \in G^*$.*

El siguiente lema relaciona las propiedades de un grupo paratopológico $G$ con las del grupo paratopológico $G'$.

**Lema 4.1.3.** *Si $G$ es $T_0$, entonces su grupo correflexión es topológicamente isomorfo a $\{(x, x^{-1}) \in G \times G' : x \in G\}$.*

*Demostración.* Denotemos por $F$ a $\{(x, x^{-1}) \in G \times G' : x \in G\}$. Ahora consideremos a la función identidad $Id\colon G^* \to G$ y a la función inversión $In\colon G^* \to G'$. Note que estas funciones son funciones continuas. Así $\{Id, In\}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos, pues si $g_1$ y $g_2$ son elementos distintos del grupo $G^*$, entonces $Id(g_1) \neq Id(g_2)$. Además, la familia $\{Id, In\}$ tabién separa puntos de conjuntos cerrados, pues si $K$ es un cerrado en $G^*$ y $g \in G^*$ son tales que $g \notin K$, entonces $g = Id(g) \notin \overline{Id(K)}^{\tau}$. Por el teorema de la diagonal (ver el teorema 2.3.20 de [11]), concluimos que $f\colon G^* \to F$ definida por $f(x) = (x, x^{-1})$ es un homeomorfismo. Ahora note que $f$ es un isomorfismo topológico, por lo que concluimos que $F$ es topológicamente isomorfo a $G^*$. □

El siguiente resultado nos dice que $G$ y $G^*$ comparten algunas propiedades topológicas.

**Proposición 4.1.4.** *Sea $G$ un grupo paratopológico $T_0$. Si $G$ es primero (segundo) numerable, entonces $G^*$ también es primero (segundo) numerable.*

*Demostración.* Si $G$ es primero (segundo) numerable, entonces $G'$ también es primero (segundo) numerable. Por lo que $G \times G'$ es primero (segundo) numerable. Por tanto, $G^*$ es primero (segundo) numerable por el lema 4.1.3. $\square$

Los siguientes resultados nos dicen cómo se comporta la topología $\tau^*$ en subgrupos y en productos.

**Proposición 4.1.5.** *Sea $(G, \tau)$ un grupo paratopológico y $H$ un subgrupo de $G$. Entonces, $(\tau^*)|_H = (\tau|_H)^*$.*

*Demostración.* Sea $U \in \tau$. Como se cumple que

$$(U \cap H) \cap \left(U^{-1} \cap H\right) = \left(U \cap U^{-1}\right) \cap H,$$

se sigue la igualdad deseada. $\square$

**Proposición 4.1.6.** *Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos paratopológicos. Si $G = \prod_{i \in I} G_i$, entonces se cumple que $G^* = \prod_{i \in I} G_i^*$.*

*Demostración.* Para mostrar que $G^* = \prod_{i \in I} G_i^*$ veremos que la topología $\tau^*$, donde $\tau$ es la topología en $G$, coincide con la topología producto de la familia de topologías $\{\tau_i^* : i \in I\}$, donde $\tau_i$ es la topología de $G_i$. En efecto, sea $U$ un abierto básico de la identidad en $G^*$. Entonces $U$ tiene la forma de $W \cap W^{-1}$, donde $W$ es un abierto básico de la identidad en $G$. Entonces $W = \prod_{i \in I} W_i$, donde $W_i$ es un abierto en $G_i$ y $W_j = G_j$ para cada $j \in I$, excepto en un número finito de índices. Así que

$$U = W \cap W^{-1} = \prod_{i \in I} W_i \cap \left(\prod_{i \in I} W_i\right)^{-1} = \prod_{i \in I} W_i \cap \prod_{i \in I} W_i^{-1} = \prod_{i \in I} W_i \cap W_i^{-1}.$$

De la igualdad anterior podemos concluir que la topología $\tau^*$ coincide con la topología producto de la familia de topologías $\{\tau_i^* : i \in I\}$. Por tanto, $G^* = \prod_{i \in I} G_i^*$. $\square$

El siguiente resultado nos dice que podemos extender homorfismos continuos de grupos paratopológicos a homomorfismos continuos de sus grupos de correflexión.

**Proposición 4.1.7.** *Si $f\colon (G,\tau) \to (H,\upsilon)$ es un homomorfismo continuo de grupos paratopológicos, entonces induce un homomorfismo continuo de grupos topológicos $f^*\colon G^* \to H^*$.*

*Demostración.* Definimos $f^*\colon G^* \to H^*$ por $f^*(g) = f(g)$ para cada $g$ en $G$. Por cómo está definida $f^*$, se sigue que es un homomorfismo. Veamos que $f^*$ es continua. Sea $U \cap U^{-1} \in \upsilon^*$ con $e_H \in U \in \upsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}(U \cap U^{-1}) &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(U^{-1}) \\ &= f^{-1}(U) \cap (f^{-1}(U))^{-1} \in \tau^*.\end{aligned}$$

Por tanto, $f^*$ es un homomorfismo continuo de grupos topológicos. □

El siguiente resultado nos dice que si el grupo de correflexión de un grupo paratopológico $G$ es Hausdorff, entonces $G$ es $T_0$.

**Lema 4.1.8.** *Sea $(G,\tau)$ un grupo paratopológico. Si $(G,\tau^*)$ es Hausdorff, entonces $(G,\tau)$ es $T_0$.*

*Demostración.* Sean $x, y \in G$ tales que $x \neq y$. Como $(G,\tau^*)$ es Hausdorff, existen $U$ y $V$ en $\tau$ tales que $x \in U \cap U^{-1}$, $y \in V \cap V^{-1}$, $y \notin U \cap U^{-1}$ y $x \notin V \cap V^{-1}$. Se sigue que $(G,\tau)$ es $T_0$. □

Los siguientes conceptos y resultados juegan un papel importante en la demostración del teorema 4.3.18.

Sea $G$ un grupo paratopológico. $G$ es llamado $\omega$-***estrecho*** si para cada vecindad abierta $V$ de la identidad $e$ en $G$, existe un subconjunto numerable $C$ de $G$ tal que $CV = G = VC$. Si además, el grupo de correflexión $G^*$ es $\omega$-estrecho, diremos que $G$ es ***totalmente*** $\omega$-***estrecho***. Podemos notar que todo grupo paratopológico segundo numerable es $\omega$-estrecho.

**Proposición 4.1.9.** *Sea $G$ un grupo topológico. Si $G$ es primero numerable y $\omega$-estrecho, entonces $G$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de la identidad $e$ en un grupo topológico $\omega$-estrecho $G$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $C_n$, subconjunto numerable de $G$, tal que $C_n U_n = G$. Entonces la familia $\beta = \{xU_n : n \in \mathbb{N},\, x \in C_n\}$ es numerable y afirmamos que $\beta$ es base del grupo $G$. En efecto, sea $U$ una vecindad de un punto $g$ en $G$. Podemos encontrar $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $gU_k \subseteq U$ y $U_m^{-1}U_m \subseteq U_k$. Como $C_mU_m = G$, existe $x \in C_m$ tal que $g \in xU_m$. Por lo que $x \in gU_m^{-1}$. Entonces,

$$xU_m \subseteq \left(gU_m^{-1}\right) U_m = g(U_m^{-1}U_m) \subseteq gU_k \subseteq U.$$

De lo anterior podemos concluir que $\beta$ es una base numerable de $G$. Por tanto, $G$ es segundo numerable. □

El resultado anterior es falso para grupos paratopológicos, pues la recta de Sorgenfrey es primero numerable y $\omega$-estrecho pero no es segundo numerable. Por otro lado, la proposición 4.1.11 será una extensión de la proposición 4.1.9 a grupos paratopológicos. Para ello necesitaremos el siguiente resultado.

Sea $X$ un espacio topológico. La familia $\{K_i : i \in I\}$ de subconjuntos de $X$ es una red del espacio $X$ que cumple que para cada abierto $U$ en $X$ y para cada $x \in U$ existe $i \in I$ tal que $x \in K_i \subseteq U$. Decimos que $X$ tiene ***peso de red numerable*** si tiene una red topológica numerable.

**Proposición 4.1.10.** *Cada grupo paratopológico primero numerable con peso de red numerable es segundo numerable.*

*Demostración.* Sean $\beta$ una base numerable de $e$ en $G$ y $S$ una red topológica numerable. Por la continuidad del producto en $G$, la familia $\{VP : V \in \beta, P \in S\}$ es una base numerable en $G$. □

**Proposición 4.1.11.** *Sea $G$ un grupo paratopológico. Si $G$ es primero numerable y totalmente $\omega$-estrecho, entonces $G$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Como $G$ es primero numerable, por la proposición 4.1.4, sabemos que $G^*$ es primero numerable. Por hipótesis tenemos que $G^*$ es un grupo topológico $\omega$-estrecho y de la proposición 4.1.9, se sigue que $G^*$ es segundo numerable, es decir, tiene una base numerable. Esta base es una red topológica numerable para $G$, pues la función identidad de $G^*$ sobre $G$ es continua. Por tanto, $G$ es primero numerable con peso de red numerable y por la proposición 4.1.10, concluimos que $G$ es segundo numerable. □

## 4.2. Extensión de topologías de subgrupos a grupos paratopológicos

Recordemos que un grupo topológico Hausdorff $G$ es Raĭkov completo si y sólo si es completo en la uniformidad bilateral (ver el teorema 3.2.22). Esta uniformidad es generada por la familia de entornos

$$\{(x,y) \in G \times G : x \in Uy \cap yU\}, \text{ donde } U \in \mathcal{N}(e).$$

Sabemos que cada grupo topológico Hausdorff $G$ es un subgrupo denso de un grupo topológico Raĭkov completo $\rho G$, el cual es único salvo isomorfismos topológicos. Este único grupo topológico $\rho G$ es llamado la completación de Raĭkov de $G$. En este capítulo extenderemos la construcción de la completación de Raĭkov para todos los grupos paratopológicos $T_0$. Así que en el resto de la tesis los grupos paratopológicos que trabajaremos serán $T_0$.

Un grupo paratopológico $(G,\tau)$ es $*$-***completo*** si su grupo correflexión $(G,\tau^*)$ es Hausdorff y Raĭkov completo.

Como consecuencia del lema 4.1.8, podemos concluir que cada grupo paratopológico $*$-completo es $T_0$.

Si un espacio topológico $(X,\tau)$ satisface el axioma de separación $T$, decimos que $\tau$ es una topología $T$. En particular, si $(X,\tau)$ es regular, decimos que $\tau$ es regular. Dada una topología $\tau$ en un grupo $G$, denotamos por $\tau_e$ a la familia de los elementos de $\tau$ que contienen a la identidad $e$ de $G$.

Dado un espacio topológico $(X,\tau)$, decimos que $A$ es un ***abierto regular*** en $(X,\tau)$ si $int\left(\overline{A}\right) = A$. Se puede probar que los abiertos regulares tienen la forma $int\left(\overline{U}\right)$, donde $U$ es abierto en $X$. Stone y Katětov consideraron la topología $\tau_{sr}$ en $X$ generada por todos los abiertos regulares del espacio $(X,\tau)$, es decir, $\tau_{sr}$ está generada por la siguiente familia:

$$\{int\left(\overline{U}\right) : U \in \tau\}.$$

Esta topología es llamada la ***semirregularización*** de la topología $\tau$. Es fácil ver que la semirregularización de un espacio topológico Hausdorff es Hausdorff, pero en grupos paratopológicos se cumple lo siguiente.

**Teorema 4.2.1.** *Sea $(G,\tau)$ un grupo paratopológico Hausdorff. Entonces $(G,\tau_{sr})$ es un grupo paratopológico regular.*

*Demostración.* Para ver que $(G,\tau_{sr})$ es un grupo paratopológico, mostraremos que la familia $\beta_e = \{int\left(\overline{U}\right) : U \in \tau_e\}$ satisface las condiciones de Pontryagin para grupos paratopológicos (ver el teorema 1.3.10).

i) Sea $int\left(\overline{U}\right) \in \beta_e$. Como $U \in \tau_e$ y $(G,\tau)$ es un grupo paratopológico, existe $V \in \tau_e$ tal que $V^2 \subseteq U$. Por la continuidad de la multiplicación en $G$, se tiene que $\overline{V}^2 \subseteq \overline{U}$. Se sigue que

$$int\left(\overline{V}^2\right) \subseteq int\left(\overline{U}\right).$$

Ahora note que $int\left(\overline{V}\right)^2 \subseteq \overline{V}^2$, como $int(\overline{V})^2$ es un abierto contenido en $\overline{V}^2$, se tiene que

$$\left(int\left(\overline{V}\right)\right)^2 \subseteq int\left(\overline{V}^2\right) \subseteq int\left(\overline{U}\right).$$

ii) Sean $int\left(\overline{U}\right) \in \beta_e$ y $x \in int\left(\overline{U}\right)$. Como $int\left(\overline{U}\right)$ es un abierto en $G$ y $G$ es un grupo paratopológico, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $Vx \subseteq int\left(\overline{U}\right)$. Por tanto,

$$int\left(\overline{Vx}\right) \subseteq int\left(\overline{int(\overline{U})}\right) = int\left(\overline{U}\right).$$

Como las traslaciones son homeomorfismos, se tiene que $\overline{V}x = \overline{Vx}$, entonces se puede deducir que

$$int\left(\overline{V}\right)x = int\left(\overline{Vx}\right) \subseteq int\left(\overline{int(\overline{U})}\right) = int\left(\overline{U}\right).$$

iii) Se satisface esta propiedad pues las traslaciones derechas e izquierdas son homeomorfismos de $G$ en $G$.

iv) Se cumple la propiedad iv), pues la intersección de dos abiertos regulares es un abierto regular.

De i)-iv) concluimos que $(G, \tau_{sr})$ es un grupo paratopológico.

Como $(G, \tau)$ es Hausdorff, se sigue que $(G, \tau_{sr})$ es Hausdorff. Ahora probemos que $(G, \tau_{sr})$ es $T_3$. Como ya es Hausdorff, sólo hace falta ver que $(G, \tau_{sr})$ es regular. Sea $U \in \beta_e$. Por el problema 1.7.8 de [11], los abiertos regulares en $(G, \tau)$ coinciden con los abiertos regulares de $(G, \tau_{sr})$. Así que $int_{sr}\left(\overline{U}^{\tau_{sr}}\right) = U$, pues $U$ es un abierto regular en $(G, \tau)$. Como $(G, \tau_{sr})$ es grupo paratopológico, existe $W \in \beta_e$ tal que $W^2 \subseteq U$. Se sigue que $W\overline{W}^{\tau_{sr}} \subseteq \overline{W}^{\tau_{sr}}\overline{W}^{\tau_{sr}} \subseteq \overline{U}^{\tau_{sr}}$. Así que $\overline{W}^{\tau_{sr}} \subseteq int_{sr}\left(\overline{U}^{\tau_{sr}}\right) = U$. Por tanto, $(G, \tau_{sr})$ es $T_3$. □

La construcción de la completación de Raĭkov de grupos paratopológicos $T_0$ utiliza la siguiente propiedad de la semirregularización.

**Lema 4.2.2.** *Sean $(G, \tau)$ un grupo paratopológico, $H$ un subgrupo denso de $(G, \tau)$ y $\sigma$ una topología de grupo paratopológico regular en $H$ tal que $\sigma \subset \tau|_H$. Entonces, $\sigma \subseteq \tau_{sr}|_H$. En particular, si $\tau|_H = \sigma$, se sigue que $\tau_{sr}|_H = \sigma$.*

*Demostración.* Sea $U \subset H$ una vecindad arbitraria de la identidad $e$ en la topología $\sigma$. Por la regularidad de $\sigma$, existe una vecindad abierta $V \in \sigma_e$ tal que $V \subset \overline{V}^{\sigma} \subset U$. Como $\sigma \subset \tau|_H$, existe una vecindad abierta $W \in \tau_e$ tal que $W \cap H \subset V$. Como el subgrupo $H$ es denso en $(G, \tau)$, tenemos que

$$\overline{W}^{\tau} = \overline{W \cap H}^{\tau} \subset \overline{V}^{\tau}.$$

Entonces, $W \cap H \subseteq \overline{W}^{\tau} \cap H \subset \overline{V}^{\tau} \cap H \subset \overline{V}^{\sigma} \subset U$. Se sigue que $\sigma \subseteq \tau_{sr}|_H$. En particular, si $\tau|_H = \sigma$, se sigue que $\tau_{sr}|_H = \sigma$. □

Sea $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G, \tau)$. Para cualquier topología de grupo paratopológico $\sigma$ en $H$, consideremos la topología $\overline{\sigma}^{\tau}$ en $G$ que consiste de los subconjuntos $U \subset G$ tales que para cualquier $x \in U$ existe una vecindad $V \in \sigma$ de la identidad tal que $x\overline{V}^{\tau} \subset U$.

**Lema 4.2.3.** *Sean $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G, \tau)$ y $\sigma$ una topología de grupo paratopológico en $H$. Para cualquier vecindad $U \in \sigma$ de $e$ y cualquier $x \in G$ el conjunto $x\overline{U}^{\tau}$ es una vecindad de $x$ en la topología $\overline{\sigma}^{\tau}$.*

*Demostración.* Como $\sigma$ es una topología de grupo paratopológico en $H$, podemos elegir una sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$ de vecindades de la identidad en $(H, \sigma)$ tal que $U_0U_0 \subset U$ y $U_nU_n \subset U_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De la última condición tenemos que

$$U_0U_1 \cdots U_n \subset U_0 \cdots U_{n-1}U_{n-1} \subset U_0 \cdots U_{n-2}U_{n-2} \subset U_0U_0 \subset U$$

para cada $n \in \omega$. Como $(G, \tau)$ es un grupo paratopológico, concluimos que

$$\overline{U}_0^{\tau} \cdots \overline{U}_n^{\tau} \subset \overline{U_0 \cdots U_n}^{\tau} \subset \overline{U}^{\tau}.$$

Entonces, la unión $W := \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_0}^{\tau} \cdots \overline{U}_n^{\tau}$ es un subconjunto de $\overline{U}^{\tau}$ y $xW \subset x\overline{U}$.

Afirmamos que $xW \in \overline{\sigma}^{\tau}$. En efecto, sea $y \in xW$. Podemos encontrar $m \in \omega$ tal que $y \in x\overline{U}_0 \cdots \overline{U}_m$ y observar que

$$y\overline{U}_{m+1} \subset x\overline{U}_0 \cdots \overline{U}_m\overline{U}_{m+1} \subset xW.$$

Por tanto, $x\overline{U} \supset xW$ es una vecindad de $x$ en $\overline{\sigma}^{\tau}$. □

El siguiente resultado juega un papel importante en esta sección, pues nos dice cómo obtener una base local de la identidad en la topología $\overline{\sigma}^{\tau}$

**Corolario 4.2.4.** *Sean $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G, \tau)$ y $\sigma$ una topología de grupo paratopológico en $H$. Si $\beta$ es una base local de la identidad en $H$, entonces la familia $\{\overline{U}^{\tau} : U \in \beta\}$ es una base local de la identidad en $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$.*

La siguiente proposición nos permite saber qué estructura topológico-algebraica nos proporciona la topología $\overline{\sigma}^{\tau}$.

**Proposición 4.2.5.** *Sea $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G, \tau)$. Si $\sigma$ es una topología tal que $(H, \sigma)$ es un grupo paratopológico, entonces $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ es un grupo topológico izquierdo, es decir, las traslaciones izquierdas son continuas.*

*Demostración.* Sea $g \in G$. Probemos que la traslación izquierda $\lambda_g$ es continua. Sean $a \in G$ y $W \in \overline{\sigma}^{\tau}$ vecindad de $ga$. Por el lema 4.2.3, existe $U \in \sigma$, vecindad de $e$, tal que $ga\overline{U}^{\tau} \subseteq W$. Concluimos que $\lambda_g$ es continua para cada $g \in G$. Por tanto, $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ es un grupo topológico izquierdo. □

Del resultado anterior se desprende el siguiente corolario. Este resultado nos permite estudiar las propiedades topológicas de $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ en la identidad.

**Corolario 4.2.6.** *Sea $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G, \tau)$. Si $\sigma$ es una topología tal que $(H, \sigma)$ es un grupo paratopológico, entonces $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ es un espacio homogéneo.*

El siguiente resultado nos dice que si $(H, \sigma)$ es primero numerable, entonces $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ es primero numerable.

**Proposición 4.2.7.** *Sea $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G, \tau)$. Si $\sigma$ es una topología tal que $(H, \sigma)$ es un grupo paratopológico primero numerable, entonces $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ es primero numerable.*

*Demostración.* Como $(H, \sigma)$ es un espacio primero numerable, sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local para $e$ en $(H, \sigma)$. Ahora mostremos que $\{x\overline{U_n}^{\tau} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para cada $x \in G$. En efecto, sea $W$ un abierto en $\overline{\sigma}^{\tau}$ tal que $x \in W$. Por el lema 4.2.3, existe $U \in \sigma$ vecindad de $e$ tal que $x\overline{U}^{\tau} \subseteq W$. Como $U \in \sigma$ es vecindad de $e$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0} \subseteq U$ y nuevamente por el lema 4.2.3, sabemos que $x\overline{U_{n_0}}^{\tau}$ es una vecindad de $x$ en $\overline{\sigma}^{\tau}$ y satisface que

$$x \in x\overline{U_{n_0}}^{\tau} \subseteq x\overline{U}^{\tau} \subseteq W.$$

Por tanto, $\{x\overline{U_n}^{\tau} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable para cada $x \in G$. Concluimos que $(G, \overline{\sigma}^{\tau})$ es primero numerable. □

Hasta el momento se sabe que $(G,\overline{\sigma}^\tau)$ es un grupo topológico izquierdo. El siguiente concepto nos garantizará que $(G,\overline{\sigma}^\tau)$ es un grupo paratopológico.

Sea $\sigma$ una topología en un grupo $G$. Decimos que la topología $\sigma$ es $\tau$-***balanceada*** en $G$ si para cualquier $U \in \sigma_e$ y cualquier $x \in G$ existe $V \in \sigma_e$ tal que $xVx^{-1} \subset \overline{U}^\tau$.

Una topología $\sigma$ en $H$ es definida como $\tau$-***regular*** si para cualquier $U \in \sigma_e$, existe $V \in \sigma_e$ tal que $H \cap \overline{V}^\tau \subset U$.

**Nota 4.2.8.** *Observe que una topología regular $\sigma$ en $H$ es $\tau$-regular si se cumple la contención $\sigma \subset \tau|_H$.*

**Lema 4.2.9.** *Sean $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G,\tau)$ y $\sigma$ una topología de grupo paratopológico $\tau$-balanceada en $H$. Entonces:*

1) *$\overline{\sigma}^\tau$ es una topología de grupo paratopológico en $G$ tal que $\overline{\sigma}^\tau|_H \subset \sigma$;*
2) *Si $\sigma \subset \tau|_H$ y $H$ es denso en $(G,\tau)$, entonces $\overline{\sigma}^\tau \subset \tau$;*
3) *Si $\sigma \subset \tau|_H$, entonces $\sigma_{sr} \subset \overline{\sigma}^\tau|_H$;*
4) *Si $\sigma \supset \tau|_H$, entonces $\tau_{sr} \subset \overline{\sigma}^\tau$;*
5) *Si la topología $\sigma$ es $\tau$-regular, entonces $\sigma = \overline{\sigma}^\tau|_H$;*
6) *Si $\sigma \subset \tau|_H$ y el espacio $(H,\sigma)$ es regular, entonces $\sigma = \sigma_{sr} = \overline{\sigma}^\tau|_H$.*
7) *Si $\sigma \subset \tau|_H$, el espacio $(H,\sigma)$ es regular y $H$ es denso en $(G,\tau)$, entonces $\sigma = \sigma_{sr} = \overline{\sigma}^\tau|_H = (\overline{\sigma}^\tau)_{sr}|_H$.*

*Demostración.*

1) La definición de la topología $\overline{\sigma}^\tau$ asegura que $\overline{\sigma}^\tau|_H \subset \sigma$. Ahora mostraremos que $\overline{\sigma}^\tau$ es una topología de grupo paratopológico en $G$. Sean $x$, $y \in G$ y $O_{xy} \in \overline{\sigma}^\tau$ vecindad de $xy$. Por el lema 4.2.3, existe una vecindad $U \in \sigma$ de $e$ tal que $xy\overline{U}^\tau \subset O_{xy}$. Como $\sigma$ es una topología de grupo paratopológico, existe una vecindad $V \in \sigma$ de $e$ tal que $VV \subset U$. Como $\sigma$ es $\tau$-balanceada en $H$, existe una vecindad $W \in \sigma_e$ tal que $W \subset V$ y $y^{-1}Wy \subset \overline{V}^\tau$. Como $(G,\tau)$ es un grupo paratopológico, $y^{-1}\overline{W}^\tau y \subset \overline{V}^\tau$. Por el lema 4.2.3, los conjuntos $x\overline{W}^\tau$ y $y\overline{W}^\tau$ son vecindades de los puntos $x$ e $y$, respectivamente, en la topología $\overline{\sigma}^\tau$.
Finalmente observe que

$$x\overline{W}^\tau y\overline{W}^\tau = xy(y^{-1}\overline{W}^\tau y)\overline{W}^\tau \subset xy\overline{V}^\tau\overline{W}^\tau$$
$$\subset xy\overline{VW}^\tau \subset xy\overline{VV}^\tau \subset xy\overline{U}^\tau \subset O_{xy}.$$

Por tanto, $\overline{\sigma}^\tau$ es una topología de grupo paratopológico en $G$.

2) Supongamos que $\sigma \subset \tau|_H$ y $H$ es denso en $(G, \tau)$. Mostremos que $\overline{\sigma}^\tau \subset \tau$. Sea $W \in \overline{\sigma}^\tau_e$. Por la definición de la topología $\overline{\sigma}^\tau$, encontramos una vecindad $U \in \sigma_e$ tal que $\overline{U}^\tau \subset W$. Como $\sigma \subset \tau|_H$, existe una vecindad $V \in \tau_e$ tal que $V \cap H \subset U$. La densidad de $H$ en $(G, \tau)$ implica que

$$V \subset \overline{V}^\tau = \overline{V \cap H}^\tau \subset \overline{U}^\tau \subset W.$$

Por tanto, $\overline{\sigma}^\tau \subset \tau$.

3) Sea $U_{sr}$ una vecindad de la identidad en la semiregularización $(H, \sigma_{sr})$ del grupo $(H, \sigma)$. Por el lema 4.2.1, la topología $\sigma_{sr}$ es regular. Consecuentemente, existe una vecindad abierta $V_{sr} \in \sigma_{sr}$ de la identidad tal que $\overline{V_{sr}}^{\sigma_{sr}} \subset U_{sr}$. Por definición de la topología $\sigma_{sr}$, existe un conjunto abierto regular $V \in \sigma_e$ tal que $V \subset V_{sr}$. Por el lema 4.2.3, el conjunto $\overline{V}^\tau$ contiene una vecindad $W \in \overline{\sigma}^\tau$ de la identidad. Como $\sigma \subset \tau|_H$

$$W \cap H \subset \overline{V}^\tau \cap H \subset \overline{V_{sr}}^\tau \cap H = \overline{V_{sr}}^{\tau|_H} \subset \overline{V_{sr}}^\sigma \subset \overline{V_{sr}}^{\sigma_{sr}} \subset U_{sr}.$$

4) Supongamos que $\tau|_H \subset \sigma$. Probaremos que $\tau_{sr} \subset \overline{\sigma}^\tau$. Por el lema 4.2.1, la topología $\tau_{sr}$ es regular. Dada cualquier vecindad $U_{sr} \in \tau_{sr}$ de la identidad, por la regularidad de la topología $\tau_{sr}$, encontramos una vecindad $V_{sr} \in \tau_{sr}$ de la identidad tal que $\overline{V_{sr}}^{\tau_{sr}} \subset U_{sr}$. Por definición de la topología $\tau_{sr}$, existe una vecindad abierta regular $V \in \tau$ tal que $V \subset V_{sr}$. Como $\tau|_H \subset \sigma$, el conjunto $V \cap H$ es una vecindad de la identidad en $(H, \sigma)$. Por el lema 4.2.3, $\overline{V \cap H}^\tau$ contiene una vecindad $W \in \overline{\sigma}^\tau$ de la identidad. Entonces,

$$W \subset \overline{V}^\tau \subset \overline{V_{sr}}^\tau \subset \overline{V_{sr}}^{\tau_{sr}} \subset U_{sr}.$$

5) El argumento es similar a la demostración del lema 4.2.3.

6) Si $\sigma \subset \tau|_H$ y el espacio $(H, \sigma)$ es regular, entonces por la nota 4.2.8, se sigue que la topología $\sigma$ es $\tau$-regular y entonces $\sigma = \overline{\sigma}^\tau|_H$ por la propiedad 5). La regularidad de la topología $\sigma$ afirma que $\sigma = \sigma_{sr}$. Por tanto, $\sigma_{sr} = \sigma = \overline{\sigma}^\tau|_H$.

7) Supongamos que $\sigma \subset \tau|_H$, el espacio $(H, \sigma)$ es regular y $H$ es denso en $(G, \tau)$. Por la propiedad 6), $\sigma = \sigma_{sr} = \overline{\sigma}^\tau|_H$. Por la afirmación 2), la densidad de $H$ en $(G, \tau)$ implica la densidad de $H$ en $(G, \overline{\sigma}^\tau)$. Por el lema 4.2.2, tenemos que $(\overline{\sigma}^\tau)_{sr}|_H = \sigma$. □

Ahora estableceremos condiciones suficientes para que la topología $\sigma$ sea $\tau$-balanceada.

**Lema 4.2.10.** *Sean $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G,\tau)$ y $\sigma$ una topología de grupo paratopológico en $H$ tal que $\sigma \subset \tau^*|_H$; además $H$ es denso en $(G,\tau^*)$. Entonces la topología $\sigma$ es $\tau$-balanceada.*

*Demostración.* Vamos a demostrar que para cada $U \in \sigma_e$ y $x \in G$ podemos encontrar una vecindad $V \in \sigma_e$ tal que $xVx^{-1} \subset \overline{U}^\tau$. Como $\sigma$ es una topología de grupo paratopológico, existe una vecindad $W \in \sigma_e$ tal que $W^3 \subset U$. La inclusión $\sigma \subset \tau^*|_H$ implica que $\sigma^* \subset \tau^*|_H$. Entonces la intersección $W \cap W^{-1}$ pertenece a la topología $\sigma^* \subset \tau^*|_H$. Como el subgrupo $H$ es denso en $(G,\tau^*)$, podemos ver que la cerradura $\overline{W \cap W^{-1}}^{\tau^*}$ de $W \cap W^{-1}$ tiene interior no vacío en $(G,\tau^*)$ y, por tanto, tiene un punto en común $y$ con el conjunto denso $xH$. Se sigue que $y \in \overline{W \cap W^{-1}}^{\tau^*} \subset \overline{W}^\tau$ y $y^{-1} \in \left(\overline{W \cap W^{-1}}^{\tau^*}\right)^{-1} = \overline{W \cap W^{-1}}^{\tau^*} \subset \overline{W}^\tau$.
Como $(H,\sigma)$ es un grupo paratopológico y $x^{-1}y \in H$, el conjunto $V := x^{-1}yWy^{-1}x$ es una vecindad de la identidad en $(H,\sigma)$. Además,

$$xVx^{-1} = xx^{-1}yWy^{-1}xx^{-1} = yWy^{-1} \subset \overline{W}^\tau W \overline{W}^\tau \subset \overline{WWW}^\tau \subset \overline{U}^\tau.$$

□

Ahora estableceremos condiciones suficientes para que la topología $\sigma$ sea $\tau$-regular. Para esto denotemos por $\sigma^{-1}$ a $\{U^{-1} : U \in \sigma\}$.

**Lema 4.2.11.** *Sean $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico $(G,\tau)$ y $\sigma$ una topología de grupo paratopológico en $H$. Si $\sigma^{-1} \subset \tau|_H$, entonces $\sigma$ es $\tau$-regular.*

*Demostración.* Para mostrar que $\sigma$ es $\tau$-regular, fijemos cualquier vecindad $U \in \sigma$ de la identidad en $H$. Como $\sigma$ es una topología de grupo paratopológico en $H$, existe una vecindad $V \in \sigma_e$ tal que $VV \subset U$. Como $\sigma^{-1} \subset \tau|_H$, concluimos que

$$\overline{V}^\tau \cap H = \overline{V}^{\tau|_H} \subset \overline{V}^{\sigma^{-1}} = \bigcap_{e \in W \in \sigma} VW \subset VV \subset U.$$

Por lo que la topología $\sigma$ es $\tau$-regular. □

## 4.3. Completación de Raĭkov de grupos paratopológicos

Sea $(G, \tau)$ un grupo paratopológico $T_0$. Consideramos su grupo correflexión $G^* = (G, \tau^*)$, el cual es un grupo topológico Hausdorff. Para los fines de esta sección, denotaremos por $\rho G$ a la completación de Raĭkov del grupo topológico $G^*$ (esto es usaremos el símbolo $\rho G$ en lugar de $\rho G^*$). Observemos que $\tau \subseteq \tau^* = \rho\tau^*|_G$ donde $\rho\tau^*$ es la topología de $\rho G$. Por los lemas 4.2.10 y 4.2.11, se tiene que la topología $\tau$ es $\rho\tau^*$-balanceada y $\rho\tau^*$-regular. Consecuentemente, la topología $\overline{\tau}^{\rho\tau^*}$ en $\rho G$ hace a $\rho G$ un grupo paratopológico (ver condición 1) del lema 4.2.9). Denotemos a $\overline{\tau}^{\rho\tau^*}$ por $\check{\tau}$. El grupo paratopológico $(\rho G, \check{\tau})$ es, por definición, la ***completación de Raĭkov*** del grupo paratopológico $(G, \tau)$ y lo denotaremos por $\check{G}$.

Utilizaremos el lema 4.2.9 para la demostración de las siguientes propiedades de la completación de Raĭkov de un grupo paratopológico.

**Teorema 4.3.1.** *Sea $(G, \tau)$ grupo paratopológico $T_0$. Entonces, su completación de Raĭkov $(\check{G}, \check{\tau})$ tiene las siguientes propiedades:*

1) $\tau = \check{\tau}|_G$;

2) $\check{\tau} \subseteq \rho\tau^* = (\check{\tau})^*$;

3) *la topología $\check{\tau}$ satisface el axioma de separación $T_0$ en $\check{G}$;*

4) *si el espacio $(G, \tau)$ es regular, entonces se cumplen las siguientes igualdades $\tau = \check{\tau}|_G = (\check{\tau})_{sr}|_G$ y $\rho\tau^* = (\check{\tau})^* = (\check{\tau}_{sr})^*$. Además, la topología $\check{\tau}$ es Hausdorff;*

5) *si $(G, \tau)$ es un grupo topológico, entonces $\check{\tau} = \rho\tau$.*

*Demostración.*

1) Por el lema 4.2.11, la topología $\tau$ es $\rho\tau^*$-regular. Por el lema 4.2.9, inciso 5), la $\rho\tau^*$-regularidad de la topología $\tau$ implica que $\tau = \check{\tau}|_G$.

2) La contención $\check{\tau} \subseteq \rho\tau^*$ se sigue del lema 4.2.9, inciso 2). De esta contención se sigue que $(\check{\tau})^* \subseteq (\rho\tau^*)^* = \rho\tau^*$. Ahora mostraremos que $\rho\tau^* \subseteq (\check{\tau})^*$. Sea $U \in \rho\tau^*$ una vecindad de la identidad en $\rho G$. Por la regularidad del grupo topológico $(\rho G, \rho\tau^*)$, existe $W \in \rho\tau^*$ tal que $e \in \overline{W}^{\rho G} \subseteq U$, donde la clausura es tomada en la topología $\rho\tau^*$. Por como están definidas las topologías se tiene que $\tau^* = \rho\tau^*|_G$. Entonces existe $V \in \tau$ tal que $V \cap V^{-1} \subseteq W \cap G$. Como

$\tau = \check{\tau}|_G$, existe $T \in \check{\tau}$ tal que $T \cap G = V$. Como $T \cap T^{-1} \in (\check{\tau})^* \subseteq \rho\tau^*$, la intersección $T \cap T^{-1} \cap G$ es densa en $T \cap T^{-1}$. Consecuentemente,

$$T \cap T^{-1} \subseteq \overline{T \cap T^{-1} \cap G}^{\rho G} = \overline{V \cap V^{-1}}^{\rho G} \subseteq \overline{W}^{\rho G} \subseteq U.$$

Por tanto, $U \in (\check{\tau})^*$.

3) Como $\rho\tau^* = (\check{\tau})^*$ es $T_2$, por el lema 4.1.8, se sigue que $\check{\tau}$ es $T_0$ en $\check{G}$.

4) Si el espacio $(G, \tau)$ es regular, entonces $\tau = \check{\tau}|_G = (\check{\tau})_{sr}|_G$ por el inciso 7) del lema 4.2.9.

Del inciso 2) de este teorema sabemos que $\check{\tau}_{sr} \subseteq \check{\tau} \subseteq \rho\tau^*$, de donde obtenemos que $(\check{\tau}_{sr})^* \subseteq (\check{\tau})^* \subseteq (\rho\tau^*)^* = \rho\tau^*$. Ahora veremos que $\rho\tau^* \subseteq (\check{\tau}_{sr})^*$. Sea $U$ una vecindad de la identidad en $\rho G$. Por la regularidad de $\rho\tau^*$, existe una vecindad de la identidad $W \in \rho\tau^*$ tal que $\overline{W}^{\rho G} \subseteq U$. Como $W \cap G \in \tau^*$, existe $V \in \tau$, vecindad de la identidad en $G$, tal que $V \cap V^{-1} \subseteq W \cap G \subseteq W$. Como $\tau = \check{\tau}_{sr}|_G$, existe una vecindad de la identidad $B \in \check{\tau}_{sr}$ tal que $B \cap G \subseteq V$. Entonces, $B \cap B^{-1} \cap G \subseteq V \cap V^{-1} \subseteq W$. Como$(\check{\tau}_{sr})^* \subseteq \rho\tau^*$, el conjunto $B \cap B^{-1}$ es abierto en el grupo topológico $\rho G$. En consecuencia,

$$B \cap B^{-1} \subseteq \overline{B \cap B^{-1}}^{\rho G} = \overline{B \cap B^{-1} \cap G}^{\rho G} \subseteq \overline{W}^{\rho G} \subseteq U.$$

Como $U \supseteq B \cap B^{-1} \in (\check{\tau}_{sr})^*$, concluimos que $U \in (\check{\tau}_{sr})^*$. Por tanto, se tiene que $\rho\tau^* = (\check{\tau}_{sr})^*$. Por el lema 4.1.8 y la igualdad $\rho\tau^* = (\check{\tau}_{sr})^*$, podemos concluir que $\check{\tau}_{sr}$ satisface el axioma de separación $T_0$. Como $\check{\tau}_{sr}$ es regular y $T_0$, es Hausdorff. Por tanto, $\check{\tau}$ es Hausdorff.

5) Si $(G, \tau)$ es un grupo topológico, entonces $\check{\tau} = \rho\tau^*$ por los incisos 2) y 4) del lema 4.2.9. □

De los incisos 1)-3) del teorema 4.3.1 se desprende el siguiente resultado.

**Corolario 4.3.2.** *Sea $G$ un grupo paratopológico $T_0$. Entonces, $G$ es un subgrupo denso del grupo paratopológico $\check{G}$, el cual es $*$-completo.*

Del inciso 4) del teorema 4.3.1 y el teorema 4.2.1 se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.3.** *Si $G$ es un grupo paratopológico $T_3$, entonces su completación de Raĭkov $\check{G}$ es un grupo paratopológico Hausdorff.*

El siguiente resultado es una consecuencia de la proposición 4.2.7 y del teorema 4.3.1.

**Corolario 4.3.4.** *Si $G$ es un grupo paratopológico primero numerable, entonces su completación de Raĭkov $\check{G}$ es primero numerable.*

De la proposición 4.1.4, sabemos que si $G$ es segundo numerable, entonces $H^*$ es segundo numerable.

El siguiente teorema nos dice que la completación de Raĭkov de un producto de grupos paratopológicos es el producto de las completaciones de Raĭkov de cada factor (note que esto generaliza del teorema 3.2.13).

**Teorema 4.3.5.** *Sea $\{(G_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de grupos paratopológicos $T_0$. Si $G = \prod_{i \in I} G_i$, entonces $\check{G} = \prod_{i \in I} \check{G}_i$.*

*Demostración.* Como $G_i$ es $T_0$ para cada $i \in I$, se tiene que $G_i^*$ es un grupo topológico Hausdorff para cada $i \in I$. Por la proposición 4.1.6, se tiene que $G^* = \prod_{i \in I} G_i^*$ así que $G^*$ un grupo topológico Hausdorff; entonces por el corolario 3.2.14, se sigue que $\rho G^* = \prod_{i \in I} \rho G_i^*$. Ahora mostremos que $\check{G}$ con la topología $\check{\tau}$, donde $\tau$ es la topología producto de $G$, es el mismo grupo paratopológico con la topología producto de la siguiente familia de grupos paratopológicos $\{(\rho G_i, \check{\tau}_i) : i \in I\}$. En efecto, sea $U = \prod_{i \in I} U_i \in \check{\tau}$ un básico canónico del producto. Entonces, para cada $x = (x_i)_{i \in I} \in U$ existe $V \in \tau$, vecindad de $e$ en $\rho G$, tal que $x\overline{V}^{\rho\tau^*} \subseteq U$. Como $V \in \tau$, se tiene que $V$ es de la forma $\prod_{i \in I} V_i$, donde $V_i \in \tau_i$ si $i \in A$, $A$ es un subconjunto finito de índices de $I$ y $V_j = G_j$ si $j \notin A$. En consecuencia, para cada $i \notin A$ se tiene que $U_i = \rho G_i$ y además $x_i\overline{V_i}^{\rho\tau_i^*} \subseteq U_i$, pues $x\overline{V}^{\rho\tau^*} \subseteq U$. Concluimos que $U$ es un elemento de la topología producto de $\{(\rho G_i, \check{\tau}_i) : i \in I\}$.

Sea $U$ abierto básico canónico en la topología producto de $\{(\rho G_i, \check{\tau}_i) : i \in I\}$. Por lo que $U = \prod_{i \in I} U_i$ donde $U_i \in \check{\tau}_i$ si $i \in A$, $A$ es un subconjunto finito de $I$ y $U_j = \rho G_j$ si $j \notin A$. Para cada $x_i \in U_i$, existe $V_i \in \tau_i$, vecindad de la identidad $e_i$ de $G_i$, tal que $x_i\overline{V_i}^{\rho\tau_i} \subseteq U_i$, donde $V_i = G_i$ si $i \notin A$. Ahora consideramos la vecindad de la identidad $V = \prod_{i \in I} V_i \in \tau$ en $G$. Por como nos consideramos a $V$, se tiene que para cada $x = (x_i)_{i \in I} \in U$, existe $V \in \tau$ tal que $e \in V$ y $x\overline{V}^{\rho\tau} \subseteq U$. Por tanto, $U \in \check{\tau}$.

Así la topología $\check{\tau}$, donde $\tau$ es la topología del producto $G$, es la misma que la topología producto determinada por la familia $\{\check{\tau}_i : i \in I\}$, donde $\tau_i$ es la topología de $G_i$.

□

Del resultado anterior se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.6.** *Sea* $\{G_i : i \in I\}$ *una familia de grupos paratopológicos* $*$*-completos, entonces* $G = \prod_{i\in I} G_i$ *es* $*$*-completo.*

Los siguientes resultados que presentamos son sobre homomorfismos continuos y sus extensiones continuas de grupos paratopológicos $T_0$.

**Teorema 4.3.7.** *Sean* $(G, \tau)$ *y* $(H, \upsilon)$ *grupos paratopológicos y* $f \colon G \to H$ *un homomorfismo continuo. Entonces,* $f$ *admite una extensión a un homomorfismo continuo* $\check{f} \colon \check{G} \to \check{H}$*.*

*Demostración.* Sea $f \colon G \to H$ un homomorfismo continuo de grupos paratopológicos. Por la proposición 4.1.7 y su demostración, existe $h \colon G^* \to H^*$ homomorfismo continuo de grupos topológicos que extiende a $f$. Por el corolario 3.2.8, $h$ admite una extensión continua $g \colon \rho G^* \to \rho H^*$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "f"] & G^* \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"] & \rho G^* \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \check{G} \arrow[d, "\check{f}"] \\
H & H^* \arrow[l] \arrow[r, hook] & \rho H^* \arrow[r] & \check{H}
\end{tikzcd}$$

Sea $\check{f} \colon \check{G} \to \check{H}$ dada por $\check{f} = g$. Por como está definida $\check{f}$ se tiene que $\check{f}$ es un homomorfismo y además es una extensión de $f$. Veamos que $\check{f}$ es continua. Sea $U \in \check{\upsilon}$ una vecindad de la identidad $e_H$ en $\check{H}$. Por el lema 4.2.3, existe $V \in \upsilon$, vecindad de la identidad en $H$, tal que $\overline{V}^{\rho\upsilon^*} \subseteq U$. Como $f$ es continua, existe $W \in \tau$ tal que $e_G \in W$ y satisface que $f(W) \subseteq V$. Por lo que $\overline{f(W)}^{\rho\upsilon^*} \subseteq \overline{V}^{\rho\upsilon^*}$. Por la continuidad de $g$, se tiene que $g\left(\overline{W}^{\rho\tau^*}\right) \subseteq \overline{g(W)}^{\rho\upsilon^*}$. Como $\check{f} = g$, se sigue que

$$\check{f}\left(\overline{W}^{\rho\tau^*}\right) \subseteq \overline{\check{f}(W)}^{\rho\upsilon^*} \subseteq \overline{V}^{\rho\upsilon^*} \subseteq U.$$

Concluimos que $\check{f}$ es continua.

$\square$

El siguiente resultado es una generalización de la proposición 3.2.4.

**Proposición 4.3.8.** *Sea $f: G \to H$ un isomorfismo topológico de grupos paratopológicos. Entonces $f$ admite una extensión continua a un isomorfismo topológico de grupos paratopológicos $\check{f}: \check{G} \to \check{H}$.*

*Demostración.* Como $f$ es un isomorfismo topológico, $f$ y $f^{-1}$ son homomorfismos continuos y por el teorema 4.3.7, existen $\check{f}: \check{G} \to \check{H}$ y $\check{f^{-1}}: \check{H} \to \check{G}$, homomorfismos continuos que extienden a $f$ y $f^{-1}$, respectivamente. De las demostraciones de los teoremas 4.3.7 y 3.2.4, sabemos que $\check{f} = \varphi$ y $\check{f^{-1}} = \psi$. Por tanto, $\check{f} \circ \check{f^{-1}}$ es la identidad en $\rho G^*$ y $\check{f^{-1}} \circ \check{f}$ es la identidad en $\rho H^*$. Por tanto, $\check{f} \circ \check{f^{-1}}$ es la identidad en $\check{G}$ y $\check{f^{-1}} \circ \check{f}$ es la identidad en $\check{H}$. Así concluimos que $\check{f}$ es un isomorfismo topológico. □

El ejemplo que presentamos ahora muestra que el corolario 3.2.7 no se satisface para grupos paratopológicos.

**Ejemplo 4.3.9.** Existe un subgrupo denso $G$ en un grupo paratopológico $H$, tal que $H$ no es topológicamente isomorfo a un subgrupo denso de $\check{G}$.

*Demostración.* Consideremos a $G$ el grupo paratopológico de los racionales con la suma y la topología de Sorgenfrey y a $H$ la recta real con la suma y la topología de Sorgenfrey. Podemos notar que $G$ y $H$ son $*$-completos, pues sus grupos correflexión son discretos. Entonces, $\check{G} = G$ y $\check{H} = H$. Como $G$ es numerable y $H$ no es numerable, $H$ no se puede encajar en $G$. Por tanto, $H$ no es topológicamente isomorfo a un subgrupo denso de $\check{G}$. □

Debido a que el corolario 3.2.7 es consecuencia del teorema 3.2.5, se sigue que la versión de este teorema para grupos paratopológicos es falsa.

Ahora presentaremos generalizaciones para grupos paratopológicos del teorema 3.2.5 y del corolario 3.2.7. Para esto necesitaremos el siguiente concepto.

Sea $G$ un subgrupo de un grupo paratopológico $H$. Decimos que $G$ es ***$*$-denso*** en $H$ si $G$ es denso en $H^*$. Notemos que en el ejemplo 4.3.9, $G$ es denso en $H$, pero $G$ no es $*$-denso en $H$.

**Teorema 4.3.10.** *Sean $G$ un grupo paratopológico, $H_1$ y $H_2$ grupos paratopológicos $*$-completos tales que $G$ es un subgrupo $*$-denso de $H_1$ y $H_2$. Entonces existe un isomorfismo topológico $\varphi: H_1 \to H_2$ tal que $\varphi(g) = g$ para cada $g \in G$.*

*Demostración.* Por definición de que $G$ sea $*$-denso en $H_1$ y $H_2$, se tiene que $G^*$ es denso en $H_1^*$ y en $H_2^*$. Como $H_1^*$ y $H_2^*$ son Raĭkov completos, es decir, $\rho H_1^* = H_1^*$ y $\rho H_2^* = H_2^*$. Por el teorema 3.2.5, existe un isomorfismo topológico $\psi\colon H_1^* \to H_2^*$ tal que $\psi(g) = g$ para cada $g \in G^*$. Podemos considerarnos a $\varphi\colon H_1 \to H_2$ tal que $\varphi = \psi$. Así que $\varphi(g) = g$ para cada $g \in G$. Es claro que $\varphi$ es un isomorfismo. Ahora veamos que $\psi$ es un homeomorfismo. Sea $U$ una vecindad abierta de la identidad en $G$. Como $\psi$ es un homeomorfismo, se tiene que

$$\varphi\left(\overline{U}^{H_1^*}\right) = \psi\left(\overline{U}^{H_1^*}\right) = \overline{\psi\left(U\right)}^{H_2^*} = \overline{\varphi\left(U\right)}^{H_2^*}.$$

Utilizando el corolario 4.2.4, se puede concluir que $\varphi\colon H_1 \to H_2$ es un homeomorfismo. Por tanto, $\varphi$ es un isomorfismo topológico. □

**Corolario 4.3.11.** *Sean $G$ un subgrupo $*$-denso de un grupo paratopológico $H$. Entonces existe un isomorfismo topológico $i_H$ de $H$ sobre un subgrupo de $\check{G}$ tal que $i_H(g) = g$, para cada $g \in G$.*

*Demostración.* Como $G$ es $*$-denso en $H$, se sigue que $G^*$ es un subgrupo denso de $H^*$, por lo tanto, $G^*$ es denso en $\rho H^*$. Como $\check{H}$, $\check{G}$ son grupos paratopológicos $*$-completos y tienen a $G$ como subgrupo $*$-denso, existe un isomorfimo topológico $\varphi\colon \check{H} \to \check{G}$ tal que $\varphi(g) = g$ para cada $g \in G$, por el teorema 4.3.10. Como $G$ es subgrupo de $H$ y $H$ es subgrupo de $\check{H}$, podemos considerarnos a $i_H = \varphi|_H\colon H \to \varphi(H)$ y se sigue el resultado. □

El resultado que se acaba de demostrar nos dice que todos los grupos paratopológicos $H$ para los cuales $G$ es un subgrupo $*$-denso pueden identificarse con los subgrupos de la completación de Raĭkov $\check{G}$ de $G$ de la siguiente manera $G \subseteq H \subseteq \check{G}$.

El siguiente ejemplo nos muestra que el teorema 3.2.10 es falso en la clase de grupos paratopológicos.

**Ejemplo 4.3.12.** Existen un grupo paratopológico Raĭkov completo $G$ y $H$ un subgrupo de $G$ tales que $\overline{H}$ no es un subgrupo de $G$.

*Demostración.* Sean $G$ el grupo $\mathbb{Z}^\omega$ y $a_i$ elemento de $G$ tal que su $i$-ésima coordenada es 1 y las demás coordenadas son 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n$ el conjunto de todos los $z = (z_k)_{k\in\omega} \in G$ tales que $z_k = 0$ para cada $k \leq n$, y $z_k \geq 0$ para cada $k > n$. Consideremos el subgrupo $H$ de $G$ generado por el conjunto $A = \{a_0 + a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se puede demostrar usando las condiciones de Pontryagin para grupos paratopológicos (teorema 1.3.10) que $G$ es un grupo paratopológico tal que esta familia $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de la identidad en $G$ y $\overline{H}^G$ no es un subgrupo de $G$ (puede ver los detalles en el ejemplo 1.4.17 de [2]). Además, $G$ es $*$-completo pues $G^*$ es discreto. $\square$

El siguiente teorema nos muestra cómo obtener la completación de Raĭkov de un subgrupo en un grupo paratopológico $*$-completo.

**Teorema 4.3.13.** *Sean $(G, \tau)$ un un grupo paratopológico $*$-completo y $H$ un subgrupo de $G$. Entonces, $\overline{H}^{G^*}$ es $*$-completo.*

*Demostración.* Como $G$ es $*$-completo, se tiene que $G^*$ es Hausdorff y Raĭkov completo. Como $H$ es subgrupo de $G$, $H^*$ es subgrupo de $G^*$. Por ser $G^*$ un grupo topológico, se sigue que $\overline{H}^{G^*}$ es un subgrupo de $G^*$. Por el corolario 3.2.11 se tiene que $\left(\overline{H}^{G^*}\right)^* = \left(\overline{H}^{G^*}, \tau^*|_{\overline{H}^{G^*}}\right)$ es un grupo topológico Hausdorff y Raĭkov completo. Por tanto, $\overline{H}^{G^*}$ es $*$-completo. $\square$

Sea $H$ un subgrupo de un grupo paratopológico de $G$. Decimos que $H$ es ***$*$-cerrado*** en $G$ si $H$ es cerrado en $G^*$.

**Proposición 4.3.14.** *Sean $G$ un grupo paratopológico $*$-completo y $H$ un subgrupo de $G$. Si $H$ es $*$-cerrado en $G$, entonces $H$ es $*$-completo.*

*Demostración.* Como $H$ es $*$-cerrado en $G$, por definición se tiene que $H$ es cerrado en $G^*$. Consecuentemente, $\overline{H}^{G^*} = H$ y por el teorema 4.3.13, podemos concluir que $H$ es $*$-completo. $\square$

El siguiente resultado muestra que la propiedad de ser $*$-completo se hereda a subgrupos cerrados.

**Corolario 4.3.15.** *Si $G$ es un grupo paratopológico $*$-completo y $H$ es un subgrupo cerrado de $G$, entonces $H$ es $*$-completo.*

*Demostración.* Como $H$ es cerrado en $G$, se sigue que $H$ es cerrado en $G^*$. Por tanto, $H$ es $*$-cerrado y por la proposición 4.3.14, concluimos que $H$ es $*$-completo. $\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que la caracterización 3.2.12 de grupos topológicos Raĭkov completos es falsa en grupos paratopológicos.

**Ejemplo 4.3.16.** Existe un subgrupo propio $H$ de un grupo paratopológico $G$, tal que $G$ y $H$ son $*$-completos y, sin embargo, $H$ no es cerrado en $G$.

*Demostración.* Sea $H$ los racionales con la topología de Sorgenfrey y $G$ el grupo paratopológico de Sorgenfrey. Entonces $G$ y $H$ son $*$-completos. Sin embargo, $H$ no es cerrado en $G$. $\square$

Si reemplazamos el concepto de cerrado por $*$-cerrado en la proposición 3.2.12, podemos obtener una generalización de dicho resultado en grupos paratopológicos.

**Teorema 4.3.17.** *Un grupo paratopológico es $*$-completo si y sólo si es $*$-cerrado en todo grupo paratopológico que lo contenga como subgrupo.*

*Demostración.* Sea $H$ un grupo paratopológico $*$-completo. Supongamos que $G$ es un grupo paratopológico que contiene a $H$ como subgrupo. Como $H$ es $*$-completo, se tiene que $H^*$ es Hausdorff y Raĭkov completo. Además, $H^*$ es un subgrupo de $G^*$, entonces por la proposición 3.2.12, $H^*$ es cerrado en $G^*$. Consecuentemente, $H$ es $*$-cerrado en $G$.

Ahora supongamos que $H$ es $*$-cerrado en todo grupo paratopológico que lo contiene como subgrupo. Así que $H$ es $*$-cerrado en $\check{H}$, por lo que $H^*$ es cerrado en $\rho H^*$. De la densidad de $H^*$ en $\rho H^*$, se sigue que $H^*$ es Raĭkov completo. Por tanto, $H$ es $*$-completo. $\square$

Ahora demostraremos que la completación de Raĭkov de un grupo paratopológico segundo numerable es segundo numerable.

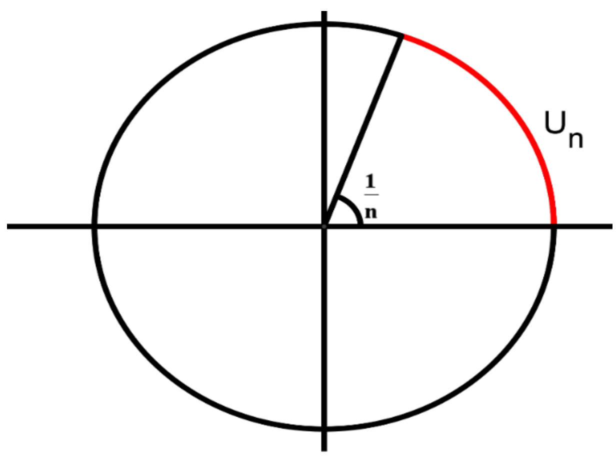
**Teorema 4.3.18.** *Si $G$ es un grupo paratopológico segundo numerable, entonces $\check{G}$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Como $G$ es segundo numerable, en particular es primero numerable y por el corolario 4.3.4, se tiene que $\check{G}$ es primero numerable. Ahora veamos que $\check{G}$ es totalmente $\omega$-estrecho. Como $G$ es segundo numerable, por la proposición 4.1.4, sabemos que $G^*$ es segundo numerable, entonces $\rho G^*$ es segundo numerable, por tanto $\rho G^*$ es $\omega$-estrecho. Por el teorema 4.3.1, sabemos que el grupo de correflexión de $\check{G}$ es $\rho G^*$, podemos concluir que $\check{G}$ es totalmente $\omega$-estrecho. Por tanto, $\check{G}$ es un grupo paratopológico primero numerable y totalmente $\omega$-estrecho y por la proposición 4.1.11, tenemos que $\check{G}$ es segundo numerable. $\square$

Con el siguiente ejemplo mostramos que la proposición 3.2.20 no se cumple en grupos paratopológicos.

**Ejemplo 4.3.19.** Existe un grupo paratopológico precompacto y $*$-completo que no es compacto.

*Demostración.* Sean $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $G = (\mathbb{S}^1, \tau)$ donde $\tau$ es la topología de Sorgenfrey. Entonces, $G$ es un grupo paratopológico respecto la multiplicación de números complejos. Por ser la topología de Sorgenfrey la dotada en $G$, se tiene que su grupo de correflexión $G^*$ es discreto, por lo que es $*$-completo. Además, es claro que $G$ es un grupo abeliano precompacto. Sin embargo, $G$ no es compacto.




□

Para poder generalizar la proposición 3.2.20, necesitaremos el siguiente concepto.

Sea $G$ un grupo paratopológico. Decimos que $G$ es ***totalmente precompacto*** si $G^*$ es precompacto.

**Teorema 4.3.20.** *Todo grupo paratopológico $*$-completo y totalmente precompacto es compacto.*

*Demostración.* Sea $G$ un grupo paratopológico $*$-completo y totalmente precompacto. Entonces, $G^*$ es precompacto y Raĭkov completo. Aplicando la proposición 3.2.20, concluimos que $G^*$ es compacto. Por lo tanto, $G$ es compacto.

□

El siguiente resultado nos da una propiedad para convertir grupos paratopológico en grupos topológicos y su demostración se puede encontrar en [38].

**Proposición 4.3.21.** *Si $G$ es un grupo paratopológico compacto, entonces $G$ es un grupo topológico.*

El siguiente corolario es un resultado ya conocido (ver teorema 1.8 de [1]) y aquí presentaremos una demostración alterna.

**Corolario 4.3.22.** *Si $(G, \tau)$ es un grupo paratopológico totalmente precompacto, entonces $G$ es un grupo topológico.*

*Demostración.* Como $G$ es totalmente precompacto, $G^*$ es precompacto. Así que $\rho G^*$ es precompacto. Se sigue que $\check{G}$ es $*$-completo y totalmente precompacto. Del teorema 4.3.20, se tiene que $\check{G}$ es un grupo paratopológico compacto. Por tanto, $\check{G}$ es un grupo topológico por la proposición 4.3.21. Como $G$ es un subgrupo de $\check{G}$ y $\tau = \check{\tau}|_G$, concluimos que $G$ es un grupo topológico. $\square$

**Teorema 4.3.23.** *Si $(G, \tau)$ un grupo paratopológico regular, entonces*

$$\left(\check{G}, \check{\tau}\right) \cong \left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right).$$

*Además, $\check{G}$ es $T_3$.*

*Demostración.* Del teorema4.2.1 y del inciso 4) del teorema 4.3.1, se tiene que $\left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right)$ es un grupo paratopológico $T_3$, el grupo de correflexión de $\left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right)$ es $(\rho G^*, \rho\tau^*)$ y que $\tau = (\check{\tau})_{sr}|_G$. Así que el grupo paratoplógico $\left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right)$ es $*$-completo. De la igualdad $\tau = (\check{\tau})_{sr}|_G$ y por ser $G^*$ denso en $\rho G^*$, se obtiene que $G$ es $*$-denso en $\left(\check{G}, \check{\tau}\right)$ y en $\left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right)$. En consecuencia, $\left(\check{G}, \check{\tau}\right)$ y $\left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right)$ son topológicamente isomorfos por el teorema 4.3.10. Por tanto, $\left(\check{G}, \check{\tau}\right) \cong \left(\check{G}, (\check{\tau})_{sr}\right)$. Además, $\check{G}$ es $T_3$. $\square$

El siguiente lema será útil en la construcción del ejemplo 4.3.25.

**Lema 4.3.24.** *Sean $\mathbb{T}$ el grupo círculo con la topología usual y $t \in \mathbb{T}$ de orden infinito, entonces el conjunto $\{nt : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{T}$.*

Dado un espacio producto $X = \prod X_\alpha$ con $\alpha \in A$ y $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ un abierto canónico de $X$. Definimos el ***soporte*** de U de la siguiente manera

$$Sop(U) = \{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}.$$

Se sabe por el teorema 4.3.1 que la completación de Raĭkov de un grupo paratopológico $T_0$ es $T_0$ y por el teorema 4.3.23, la completación de un grupo paratopológico $T_3$ es $T_3$. Pero el siguiente ejemplo nos muestra que la completación de Raĭkov no preserva los axiomas de separación $T_i$ con $i = 1, 2$.

**Ejemplo 4.3.25.** Existe un grupo paratopológico primero numerable y Hausdorff $H$ tal que $\check{H}$ no es $T_1$.

*Demostración.* Sea $F$ el grupo aditivo de los números reales dotado con la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $F$ es un grupo paratopológico donde $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \infty\right)$ es una base local de la identidad, por lo que $F$ es un grupo paratopológico primero numerable, el cual es $T_0$ pero no es $T_1$. Así $F^* = (\mathbb{R}, \tau_u)$ donde $\tau_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$. Notemos que $F^*$ es un grupo topológico Raĭkov completo por ser localmente compacto (ver el corolario 3.2.17). En consecuencia, $F$ es $*$-completo.

Consideremos el grupo círculo $\mathbb{T}$ dotado con la topología usual, usaremos la notación aditiva para la multiplicación en $\mathbb{T}$. Note que $\mathbb{T}$ es un grupo topológico primero numerable y Raĭkov completo. Sea $K = F \times \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Como $F$ y $\mathbb{T}$ son grupos paratopológicos primero numerable y $T_0$, se tiene que $K$ es primero numerable y $T_0$. Además, $K^* = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, por lo que $K$ es $*$-completo por el corolario 4.3.6.

Tomemos un conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ linealmente independiente en $(\mathbb{R}, +)$ tal que $a_n \to 0$. Sea $t \in \mathbb{T}$ un elemento de orden infinito. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ definimos el elemento $x_\alpha \in K$ de la siguiente manera

$$x_\alpha(\beta) = \begin{cases} a_\alpha, & \text{si} \quad \beta = 0 \\ t, & \text{si} \quad \beta = \alpha \\ 0_{\mathbb{T}}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $H$ el subgrupo de $K$ generado por el conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$. Por lo que $H$ es un grupo paratopológico primero numerable con la topología que hereda de $K$. Ahora mostraremos que $H$ es Hausdorff.

Sea $x \in H \setminus \{0\}$, entonces $x = n_1 x_{\alpha_1} + \cdots + n_k x_{\alpha_k}$ con $k \in \mathbb{N}$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, son elementos distintos de $\mathbb{N}$ y $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ para cada $i \leq k$. De aquí notamos que $x(\alpha_1) = n_1 t \neq 0_{\mathbb{T}}$ pues $t$ es de orden infinito.

Como $\mathbb{T}$ es un grupo topológico Hausdorff, para $0_{\mathbb{T}}$ y $x(\alpha_1) \in \mathbb{T}$ existen $U$ y $V$ abiertos ajenos en $\mathbb{T}$ tales que $x(\alpha_1) \in U_1$, $0_{\mathbb{T}} \in V_1$. Consideramos a $U = F \times U_1 \times \mathbb{T}_{\alpha}^{\mathbb{N}\setminus\{\alpha_1\}}$ y $V = F \times V_1 \times \mathbb{T}^{\mathbb{N}\setminus\{\alpha_1\}}$, son abiertos en $K$ por cómo están construidos. Por lo que $U \cap H$, $V \cap H$ son abiertos ajenos en $H$ tales que $x \in U \cap H$ y $0_K \in V \cap H$. Por lo tanto, $H$ es un grupo paratopológico Hausdorff

Ahora veamos que $\check{H} = K$, para esto mostremos que $H^*$ es denso en $K^*$. Sea $U = \prod_{\alpha\in\omega} U_\alpha$ un abierto canónico no vacío en $K^* = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Podemos suponer que $Sop(U) = \{0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $U_0 = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ con $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Veamos que existe un elemento de $H^*$ en $U$.

Como $t$ tiene orden infinito, por el lema 4.3.24 tenemos que el conjunto $\{nt : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{T}$. Para cada $i \leq k$, existe $r_i \in \mathbb{N}$ tal que $r_i t \in U_{\alpha_i}$.

Como $a_n \to 0$, se tiene que el el subgrupo generado por el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ y el siguiente conjunto $\{a_n : a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ es infinito. Por tanto, para cada $a_\alpha \in \{a_n : a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $ra_\alpha \in U_0$. Entonces, existen $n \in \mathbb{N} \setminus Sop(U)$ y $r \in \mathbb{Z}$ tales que $ra_n \in U_0 - (r_1 a_{\alpha_1} + \cdots + r_k a_{\alpha_k})$.

Sea $y = r_1 x_{\alpha_1} + r_2 x_{\alpha_2} + \cdots + r_k x_{\alpha_k} + r x_n$. Notemos lo siguiente:

$$y(0) = r_1 a_{\alpha_1} + r_2 a_{\alpha_2} + \cdots + r_k a_{\alpha_k} + r a_n \in U_0.$$

Por lo tanto, $y(0) \in U_0$ y $y(\alpha_i) = r_i t \in U_{\alpha_i}$ para cada $i \leq k$. Se sigue que $y \in U \cap H$, pues $y$ es generado por elementos de $H$. Por tanto, $y \in U$. Concluimos que $H^*$ es denso en $K^*$. Consecuentemente, $H$ es $*$-denso en $K$. Como $H$ es $*$-denso en $K$ y en $\check{H}$, por el teorema 4.3.10 se sigue que $\check{H} \cong K$. Claramente $K$ no es $T_1$, pues $F$ no es $T_1$. Finalmente, $H$ es un grupo paratopológico primero numerable Hausdorff tal que $\check{H}$ no es $T_1$. $\square$

# Bibliografía


[1] A.V. Arhangel'skii, E.A. Reznichenko, Paratopological and semitopological groups versus topological groups, Topology and its Application, 151 (2005) 107–119.

[2] A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press/World Scientific, Paris-Amsterdam, 2008.

[3] T. Banakh, A. Ravsky, Each regular paratopological group is completely regular, American Mathematical Society, Volume 145, Number 3, (2017) 1373–1382.

[4] T. Banakh, A. Ravsky, On feebly compact paratopological groups, Topology and its Aplications, 284 (2020) 107363.

[5] G. Birkhoff, A note on topological groups, Comput. Math. 3 (1936) 427–430.

[6] N. Bourbaki, Topologie générale ch. I et II, Paris 1940.

[7] G. Cantor, On a Property of the Class of all Real Algebraic Number, Crelle's Journal for Mathematics, Vol. 77, (1874) 258–262.

[8] H. Cartan, Theorie des filtres, C.R. Acad. Sci. Paris 205 (1937) 595-598.

[9] A. Császár, Fondements de la Topologie Generale, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[10] J. Dieudonné, Sur la complétion des groupes topologiques, Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) 218 (1944) 774-776.

[11] R. Engelkig, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[12] P. Fletcher, W. F. Lindgren, Quasi-uniform Spaces, Editorial Board, Vol. 77, New York, 1982.

[13] M. Fréchet, Généralisation d'un théorème de Weierstrass, C. R. Acad. Sci. (Paris) 139, 848-850.

[14] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906) 1-74.

[15] J. A. Guccione, J. J. Guccione, Espacios métricos, Copyright, Primera impresión, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 2017.

[16] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Veit, Leipzig, 1914. Reprinted: Chelsea, Hew York, 1949).

[17] J. Isbell, Uniform neighborhood retracts, Pacific J. Math. 11 (1961) 609–649.

[18] C. Ivorra, Topología, Universidad de Valencia, Valencia.

[19] S. Kakutani, Über die Metrization der Topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936) 82–84.

[20] S. Mazur, On Continuous Mappings on Cartesian Products, Fundamenta Mathematicae Vol. 39, (1952) 229-238.

[21] J. Marín, S. Romaguera, A bitopological view of quasi-topological groups, Indian J. Pure Appl. Math. 27 (1996) 393–405.

[22] J. R. Munkres, Topology, Pearson educación S.A., Madrid, 2002.

[23] M. G. Murdeshwar, and S. A. Naimpally, Quasi-uniform Topological Spaces, Noordhoff Series A, Groningen, 1966.

[24] L. S. Pontryagin, Continuous Groups, third edition, “Nauka”, Moscow 1973.

[25] D. A. Raikov, On completion of topological groups, Izv. AN SSSR 10 (1946) 513-528 (in Russian).

[26] O. Ravsky, On H-closed paratopological groups, arXiv:1003.5377 [math.GR].

[27] O.V. Ravsky, Paratopological groups I, Matematychni Studii 16 (2001), No. 1, 37–48.

[28] F. Riesz, ”Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables”, Comptes rendus de l’Académie des Sciences 144 (in French) 1409–1411.

[29] I. Sánchez, Subgroups of products of metrizable semitopological groups, Monatsh Math, 183 (2016) 191–199.

[30] I. Sánchez, M. Sanchis, Quasi-uniformities and quotients of paratopological groups, Filomat, 31 (6) (2017) 1721–1728.

[31] M. Sanchis, M.G. Tkachenko, Totally Lindelöf and totally $\omega$-narrow paratopological groups, Topology Appl. 155 (2007) 322–334.

[32] J. L. Sieber, and W. J. Pervin, Completeness in Quasiuniform Spaces, Math. Ann. 158 (1965) 79-81.

[33] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1995.

[34] R. A. Stoltenberg, A Completion for a Quasi-uniform Space, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 864–867.

[35] M.G. Tkachenko, L. M. Villegas, C. Hernández, O. J. Rendón, Grupos Topológicos, UAM-I, Ciudad de México, 1997.

[36] M.G. Tkachenko, Embedding paratopological groups into topological products, Topology Appl. 156 (2009) 1298–1305.

[37] M.G. Tkachenko, Group reflection and precompact paratopological groups, Topological Algebra and its Applications 1 (2013) 22-30.

[38] M.G. Tkachenko, Recent progress in general topology III, chapter 20, Atlantis Press, 2014, p.p. 825–882.

[39] A. Weil, Les recouvrements des espaces topologiques: espaces complets, espaces bicompacts, C. R. Acad. Paris 202 (1936), 1002-1005.

[40] A. Weil, Sur les Espaces à Structure Uniforme et Sur la Topologie Générale, Herman & Cie, Paris. Publ. Math. Uni. Strausbourg, 1937.

[41] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, 1970.