



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

RIGIDEZ CASI-ISOMÉTRICA EN VARIETADES DE GRÁFICAS SUPERIORES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR(A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
ADRIANA HAYDEÉ CONTRERAS PERUYERO

DIRECTOR DE TESIS
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CU

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. NOÉ BÁRCENAS
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

DR. PIERRE PY
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2021.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La investigación de este trabajo se realizó gracias al apoyo económico de las siguientes entidades:

- Programa de Becas Nacionales del CONACyT
- Programa de Becas Mixtas(Movilidad al extranjero) CONACyT 2018
- Proyecto *Aprendizaje Geométrico Profundo*, DGAPA PAPIIT IN104819.

Además, las siguientes instituciones apoyaron a la investigación con sus instalaciones:

- Instituto de Matemáticas, UNAM
- Department of Mathematics, The Ohio State University

Índice general

Introducción	iv
1 Preliminares	1
1.1 Variedades de Hadamard	1
1.2 Grupos relativamente hiperbólicos	4
1.3 Espacio eléctrico	12
1.4 Grupos nilpotentes	15
1.5 Gráficas de grupos	16
1.6 Inyectividad del grupo fundamental	17
1.7 Nociones de teoría geométrica de grupos	18
1.7.1 Crecimiento de Grupos	20
1.7.2 Crecimiento uniformemente exponencial del grupo fundamental	22
2 Isomorfismos entre grupos fundamentales de Variedades de Gráficas de dimensiones superiores preservan piezas	24
2.1 \tilde{M} como árbol de espacios	26
2.2 Propiedades métricas de \tilde{M}	31
2.3 Propiedades de los estabilizadores de paredes y cámaras	32
3 Variedades con descomposiciones cuspidales	41
3.1 Geometría de cámaras y paredes	42
3.2 Geometría de espacios relativamente hiperbólicos	44
3.3 Encajes casi-isométricos de paredes y cámaras	45

4 Acciones acilíndricas	52
5 Conclusiones	54
Índice	56
Bibliografía	59



Introducción

En teoría de 3-variedades, la primera definición de variedad de gráficas se debe a Waldhausen en 1967 [32]. Consideremos la siguiente familia de variedades, la cual es una extensión de las ideas de Frigerio, Lafont y Sisto [15].

Definición 1. [2, Definición 1]

1. Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.
2. Denotar por B_i la variedad diferenciable, compacta con frontera, obtenida por truncar las cúspides de V_i , es decir, por remover de V_i una vecindad abierta, horoesférica (no maximal) de cada cúspide.
3. Tomar un fibrado $Z_i \rightarrow B_i$ con fibra un cociente compacto N_i de un grupo de Lie aesférico, nilpotente, simplemente conexo \widetilde{N}_i por la acción de una retícula uniforme Γ_i de dimensión $n - n_i$, es decir, N_i es difeomorfo a \widetilde{N}_i/Γ_i , donde \widetilde{N}_i es un grupo de Lie simplemente conexo y Γ_i es una retícula uniforme.
4. Fijar un par de difeomorfismos entre los componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

Una variedad construida de esta forma la llamaremos *variedad de gráficas de dimensión superior*. Llamaremos a los Z_i las piezas de M y cuando $\dim(M_i) = n$, diremos que $Z_i = M_i$ es una pieza pura. Los componentes frontera de las piezas Z_i se llaman *paredes* y los denotaremos por W .

Estas variedades fueron introducidas por Bárcenas, Juan-Pineda y Suárez-Serrato [2]. En el mismo artículo, probaron que estas variedades satisfacen la conjetura de Borel para $n \geq 6$. Esta definición también incluye las variedades descritas por Connell y Suárez-Serrato [11].

Tam Nguyen Phan describió una familia de variedades de gráficas llamadas *variedades con descomposiciones cuspidales* [31]. Esta es una subfamilia de las variedades construidas como en la Definición 1 donde todas las piezas son piezas puras. Esta descomposición es análoga a la descomposición JSJ de 3-variedades. La familia de *twisted-doubles* descrita por Aravinda y Farrell también está incluida en las variedades con descomposiciones cuspidales [1].

Al cubriente universal de una variedad de gráficas de dimensiones superiores (y al de una variedad con descomposiciones cuspidales), es posible asociarle un árbol de Bass-Serre [28]. La preimagen de un vértice en el árbol de Bass-Serre se llama cámara y a la preimagen de una arista en el árbol de Bass-Serre se le llama pared, (ver Definición 30).

Decimos que una pieza Z de M es una *pieza de superficie* si la base del haz fibrado con el cual definimos a Z es una superficie hiperbólica.

Uno de los dos resultados principales de este trabajo es el siguiente.

Teorema 2. *Sean M_1, M_2 dos variedades de gráficas como en la definición 1. Sean $\Lambda_1 \leq \pi_1(M_1)$ un subgrupo conjugado al grupo fundamental $\pi_1(Z_{1,j})$ de una pieza $Z_{1,j}$ en M_1 y $\varphi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ un isomorfismo. Entonces $\varphi(\Lambda_1)$ es conjugado al grupo fundamental $\pi_1(Z_{2,\sigma(j)}) \leq \pi_1(M_2)$ de una pieza $Z_{2,\sigma(j)}$ en M_2 .*

Para probar este Teorema, comenzaremos explicando las propiedades del cubriente universal \tilde{M} como un árbol de espacios y analizaremos las propiedades del árbol de Bass-Serre T asociado a la descomposición en piezas de M . Con estas propiedades y el hecho de que el grupo fundamental de una variedad de gráficas de dimensiones superiores tiene crecimiento uniformemente exponencial (Lema 27), probamos en el



Lema 32 que el estabilizador de un vértice v en T no puede fijar ningún otro vértice. También, en el Lema 35 probamos la propiedad análoga para paredes. En el Lema 38, Corolario 39 y Corolario 40, describimos ciertas propiedades métricas de paredes y cámaras que nos permiten entender cuando dos paredes o dos cámaras son la misma. Después, probamos que todo subgrupo maximal nilpotente de $\pi_1(M)$ con longitud de Hirsch $(n - 1)$ es un estabilizador de una pared. Todos estos resultados auxiliares, la caracterización de los estabilizadores de paredes y cámaras y el Lema de Milnor-Svarč es lo que usamos para probar el Teorema 2, los detalles se encuentran en el Capítulo 2.

Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos. Una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ se dice que es un encaje (c, d) -casi-isométrico si existen constantes $c \geq 1$ y $d \geq 0$ tales que para todo $x, y \in X_1$

$$\frac{1}{c} d_1(x, y) - d \leq d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y) + d$$

Si además, existe una constante $k \geq 0$ tal que cada punto en X_2 está en una k -vecindad de la imagen de f , entonces f se dice que es una (c, d) -casi-isometría y decimos que X_1 y X_2 son casi-isométricos.

El concepto de *casi-isometría* juega un rol fundamental en Teoría Geométrica de Grupos. Una de las preguntas centrales es el entender que propiedades algebraicas son invariantes bajo casi-isometría. Stallings probó que la propiedad de partirse (o escindirse) sobre un grupo finito para un grupo finitamente generado es invariante bajo casi-isometría [29, 30]. Papasoglu mostró que para grupos finitamente presentados, el admitir partirse sobre grupos virtualmente cíclicos infinitos es un invariante de casi-isometría [23]. Papasoglu también probó que si los grupos de vértices son grupos fundamentales de variedades esféricas y los grupos de aristas son más pequeños que los grupos de vértices, entonces el partirse se preserva bajo casi-isometría [24]. Como consecuencia de este resultado, si un grupo G es un producto amalgamado de dos 3-variedades esféricas sobre un grupo de superficie, entonces cualquier grupo casi-isométrico a G también se parte sobre un grupo virtualmente de superficie. Bowditch



mostró que un grupo hiperbólico con un final que no es un grupo triangular se parte sobre un grupo de dos finales si y solo si su frontera de Gromov tiene puntos de corte locales. Entonces, el admitir tal partición es un invariante de casi-isometría [4, 5, 6]. Otro concepto fundamental es la descomposición JSJ de una variedad M . Esta descomposición canónica es única salvo isotopía y corresponde a la descomposición del grupo fundamental de M como una gráfica de grupos. Kapovich y Leeb probaron que esta descomposición canónica es invariante bajo casi-isometría y como consecuencia de esto es un invariante geométrico del grupo fundamental [21]. Kapovich y Leeb también estudiaron el problema de clasificación casi-isométrica de variedades de gráficas, mostraron que la existencia de componentes de Seifert en una 3-variedad Haken es un invariante de casi-isometría en su grupo fundamental [20]. Behrstock, Januszkiewicz y Neumann estudiaron el problema de clasificación casi-isométrica para una clase de grupos de ángulo recto de Artin, ellos caracterizaron cuando dos grupos de ángulo recto de grupos de n -árboles son casi-isométricos [3]. En este trabajo, estamos contribuyendo a comprender las propiedades que son invariantes bajo casi-isometría de variedades de gráficas de dimensiones superiores y de la subfamilia de variedades con descomposiciones cuspidales.

En esta dirección, el segundo resultado principal muestra que en una variedad con descomposiciones cuspidales M el grupo fundamental de paredes y piezas se encajan casi-isométricamente en $\pi_1(M)$.

Teorema 3. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales. Entonces, la inclusión de cada pared y pieza induce encajes casi-isométricos de sus grupos fundamentales en su imagen en $\pi_1(M)$.*

Este resultado generaliza el Teorema 0.16 de Frigerio, Lafont y Sisto [15]. Ellos mencionan que su estrategia para probar este resultado no se puede generalizar para el caso de variedades con descomposiciones cuspidales. Para poder generalizar este resultado para el caso de las variedades con descomposiciones cuspidales usamos las propiedades del *espacio eléctrico*. El espacio eléctrico es el espacio resultante de contraer a un punto



las fronteras de las horoesferas removidas en la variedad base B_i .

Como consecuencia del Lema 3.2 de Osin [25], en la Proposición 50 probamos que la longitud de las geodésicas que yacen en las horofronteras de las piezas está acotada por arriba por la longitud de las trayectorias que conectan diferentes horofronteras. Extendiendo los resultados de Farb [14], en el Lema 51 probamos que existe una constante positiva tal que la longitud de una trayectoria, que denominamos *buena*, entre cualesquiera dos puntos que se encuentren a una distancia pequeña en una pared, está acotada por arriba por el producto entre esta constante y la distancia entre estos dos puntos. De igual forma, usando las propiedades del espacio eléctrico, en la Proposición 52 construimos una trayectoria buena sin retroceso entre dos puntos en la misma pared interna. Así se logra obtener un resultado análogo para las variedades con descomposiciones cuspidales al Lema 7.8 en [15]. Como consecuencia de todo este trabajo, ya es posible probar que las inclusiones de paredes y cámaras con la métrica por trayectorias son encajes casi-isométricos en el cubriente universal \tilde{M} de M .

En el capítulo 1, damos un breve repaso a las nociones fundamentales de variedades de Hadamard, del espacio eléctrico, grupos nilpotentes y crecimiento de grupos. En el capítulo 2, empezamos a estudiar las propiedades métricas del cubriente universal de una variedad de gráficas de dimensiones superiores M y caracterizamos completamente al conjunto de estabilizadores de paredes. Con esto y el Lema de Milnor-Svarč probamos que un isomorfismo entre los grupos fundamentales de variedades de gráficas preserva la descomposición en piezas, Teorema 2. En el capítulo 3, centramos nuestra atención en las variedades con descomposiciones cuspidales y probamos el Teorema 3. Por último, en el capítulo 4, estudiamos la acilindricidad de la acción del grupo fundamental de una variedad de gráficas y probamos que dicha acción es 2-acilíndrica.



Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades de Hadamard

Sea V una **variedad de Hadamard**, es decir, una variedad Riemanniana, completa, simplemente conexa, de curvatura seccional no-positiva. Denotaremos por $d(x, y)$ a la métrica Riemanniana en V y vamos a asumir que todas las geodésicas en V son de velocidad unitaria.

Decimos que dos geodésicas α, β de velocidad unitaria son **asintóticas** si existe una constante $k > 0$ tal que $d(\alpha(t), \beta(t)) \leq k$ para todo $t \geq 0$. La relación de asintoticidad es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las geodésicas de V . Además, si dos geodésicas asintóticas en V tienen un punto en común, entonces son la misma salvo reparametrización. Al conjunto de clases de equivalencia de geodésicas asintóticas de V se les llama **puntos al infinito** y los denotaremos por $V(\infty)$. Si p, q son puntos distintos en V , entonces existe una única geodésica γ_{pq} que pasa por p y q . Si $p \in V$ y $x \in V(\infty)$ son puntos cualesquiera, entonces existe una única geodésica γ_{px} en V tal que $\gamma_{px}(0) = p$ y $\gamma_{px}(\infty) = x$. Denotaremos por $V(p, x)$ al vector unitario $\dot{\gamma}_{px}(0)$. Si $x \in V(\infty)$ es un punto fijo, entonces el campo vectorial $p \rightarrow V(p, x)$ es C^1 .

Una geodésica a través de un punto $x \in V(\infty)$, determina una **función de Busemann** $f = f_\gamma$ en x dada por $f(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, \gamma(t)) - t$. La diferencia entre dos funciones de Busemann en un punto x es constante. Una función de Busemann es C^2 y es convexa (ver [19]). Además, $\nabla f(p) = -V(p, x)$. A los conjuntos de nivel de una

función de Busemann en un punto x se les llama **horoesferas** en x . Si $L = f^{-1}(a)$ es una horoesfera en $x \in V(\infty)$, entonces los conjuntos $U = \{p \in V : f(p) < a\}$ y $B = \{p \in V : f(p) \leq a\}$ son las **horobolas** abiertas y cerradas respectivamente.

Denotemos por $I(V)$ al grupo de isometrías de V . Este grupo es un grupo de Lie con la topología compacto abierta. Sea φ una isometría de V , definimos la **función de desplazamiento** de φ como $d_\varphi(p) := d(p, \varphi(p))$. En una variedad de Hadamard, la función de desplazamiento es una función convexa. La función de desplazamiento divide al grupo de isometrías de V en tres clases:

1. Decimos que φ es **elíptica**, si d_φ tiene mínimo cero en V .
2. Decimos que φ es **hiperbólica**, si d_φ tiene mínimo estrictamente positivo en V .
3. Decimos que φ es **parabólica**, si d_φ no tiene mínimo en V .

Una isometría parabólica deja invariantes todas las horoesferas en sus puntos fijos $x \in V(\infty)$.

Un grupo $\Gamma \subseteq I(V)$ es una **retícula** en V si y sólo si Γ actúa libre, propia y discontinuamente en V y si la variedad cociente $M = V/\Gamma$ tiene volumen finito. Una retícula se dice que es **uniforme** si M es compacta y se dice que es **no uniforme** si M no es compacta.

Decimos que una variedad Riemanniana M es **reducible** si M es isométrica a un producto Riemanniano $M_1 \times M_2$ de dos variedades de dimensión positiva. Si M no es reducible se dice que es **irreducible**. Análogamente, una retícula Γ en V es **reducible** si $M = V/\Gamma$ tiene una cubierta Riemanniana finita M^* que es reducible y se dice que es **irreducible** si no es reducible.

Recordemos que una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos se llama **propia** si $f^{-1}(C) \subseteq X$ es compacto cuando $C \subseteq Y$ es compacto.

Sea X un espacio topológico. Un **rayo** en X es una función $r : [0, \infty) \rightarrow X$. Sean $r_1, r_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ rayos propios, decimos que r_1, r_2 **convergen al mismo final** si para cada compacto $C \subseteq X$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 [N, \infty)$ y $r_2 [N, \infty)$ están contenidos en la misma componente por trayectorias de $X \setminus C$. Esto define una relación de equivalencia entre rayos propios. La clase de equivalencia de r se denota por $\text{end}(r)$



(si no hay confusión vamos a denotarla también por E) y el conjunto de clases de equivalencia por $\text{Ends}(X)$. Si la cardinalidad de $\text{Ends}(X)$ es m , decimos que X tiene m **finés** o m **puntas**.

La convergencia en finés, se define por $\text{end}(r_n) \rightarrow \text{end}(r)$ si y sólo si, para cada conjunto compacto $C \subset X$, existe una sucesión de enteros N_n tales que $r_n [N_n, \infty)$ y $r(N_n, \infty)$ están en la misma componente por trayectorias de $X \setminus C$, cuando n es suficientemente grande. La topología en $\text{Ends}(X)$ se define con sus conjuntos cerrados. Un subconjunto $B \subset \text{Ends}(X)$ se define como cerrado si satisface la siguiente condición: si $\text{end}(r_n) \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{end}(r_n) \rightarrow \text{end}(r)$ implica que $\text{end}(r) \in B$.

Un fin E de M es **parabólico**, si existe un rayo geodésico invariante $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ que converge a E , y puede ser expresado como $\pi \circ \bar{\gamma}$, donde $\pi : V \rightarrow M$ es la proyección canónica y la geodésica $\bar{\gamma} \in V$ determina un punto fijo al infinito para algún elemento parabólico $\gamma \in I(V)$.

Un fin E de M es un **collar Riemanniano**, si existen una vecindad U de E , una subvariedad N de M de codimensión 1, compacta C^2 y un difeomorfismo $F : N \times (0, \infty) \rightarrow M$ de clase C^1 , tales que las curvas $t \mapsto F(n, t)$, con $n \in N$, son geodésicas de velocidad unitaria que minimizan distancia en M y que intersecan cada hipersuperficie $F(N \times \{s\})$ ortogonalmente.

Sea D un grupo propiamente discontinuo de isometrías de V . Si $M = V/D$ es una variedad completa con curvatura $K \leq 0$ que satisface que para cualesquiera dos puntos $x \neq y$ en $V(\infty)$ existe al menos una geodésica que los une, entonces decimos que M es una **variedad de visibilidad**. A esta propiedad se le llama el Axioma de visibilidad.

Teorema 4. (Eberlein [13, Theorem 3.1]) *Sea H una variedad de visibilidad que satisface la condición de curvatura $-b \leq K \leq 0$ para alguna constante positiva b . Si Γ es cualquier retícula no uniforme en H , entonces $M = H/\Gamma$ tiene solo un número finito de finés, cada uno es parabólico y tiene un collar Riemanniano. En particular, Γ es finitamente presentable.*

Corolario 5. (Eberlein [13, Corollary 3.3]) *Sea H una variedad que satisface la condición de curvatura $-b \leq K \leq -a < 0$ para algunas constantes positivas a, b . Y sea Γ una retícula no uniforme en H . Entonces, los subgrupos maximales casi nilpotentes de*



Γ son los estabilizadores no triviales Γ_x , con $x \in H(\infty)$. Más aún, cada grupo Γ_x es finitamente generado. Cada subgrupo casi nilpotente no trivial de Γ está contenido en un único subgrupo maximal casi nilpotente.

Teorema 6. (Heintze-Im Hof [19, Theorem 4.9]) Sea γ una geodésica tangente a una horoesfera S en una variedad de Hadamard V donde la curvatura seccional satisface la condición $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Si p, q son las proyecciones de $\gamma(\pm\infty)$ en S , entonces

$$\frac{2}{b} \leq d_S(p, q) \leq \frac{2}{a}.$$

Lema 7. Sea M una variedad Riemanniana de dimensión $\dim k$. Sea $\gamma \subseteq M$ una geodésica bi-infinita y G un grupo actuando en M isométricamente. Si $G\gamma = \gamma$ entonces $G \leq \mathbb{R} \times H$, donde $H \leq O(k-1) \times \mathbb{Z}_2$.

Demostración. Sea $\gamma : G \rightarrow M$ una geodésica bi-infinita en M , tal que $G\gamma = \gamma$. Consideremos una base ortonormal $\{\gamma'(0), e_1, \dots, e_{k-1}\}$ del espacio tangente en $\gamma(0)$. Usando transporte paralelo, podemos ver que tenemos una base ortonormal en cada $\gamma(t)$.

Sea $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$ un morfismo definido por $g \cdot \gamma(0) = \gamma(\rho(g))$, para cada $g \in G$.

Vamos a usar el transporte paralelo a lo largo de γ , con respecto a la acción de G para definir el morfismo ψ como sigue:

$$\begin{aligned} \psi : G &\rightarrow O(k) \\ g &\mapsto [T_{\gamma(0)}M \xrightarrow{d_g} T_{\gamma(\rho(g))}M] \end{aligned}$$

La imagen de cada vector tangente es $\gamma'(-t)$ o $\gamma'(t)$ y todos son vectores unitarios, entonces la imagen de ψ está en $O(k-1) \times \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, $G \leq \mathbb{R} \times H$, donde $H \leq O(k-1) \times \mathbb{Z}_2$. □

1.2 Grupos relativamente hiperbólicos

Los siguientes conceptos y resultados se basan en [14], [25].

Sea $\delta > 0$, un triángulo geodésico en un espacio métrico se dice que es δ -**delgado** si cada uno de sus lados está contenido en una δ -vecindad de la unión de sus otros



dos lados. Un espacio geodésico X se dice que es δ -**hiperbólico** si cada triángulo en X es δ -delgado.

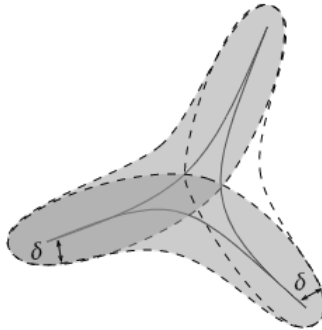


Figura 1.1: Triángulo δ -delgado.

Sea G un grupo y sea $S \subset G$ un conjunto generador de G . La **gráfica de Cayley** de G con respecto al conjunto generador S es la gráfica $Cay(G, S)$ cuyo conjunto de vértices es G y cuyo conjunto de aristas es $\{(g, g \cdot s) | g \in G, s \in S \setminus \{e\}\}$, es decir, dos vértices en la gráfica de Cayley son adyacentes si y sólo si difieren por un elemento en el conjunto generador. Sea $G = \mathbb{F}_2$ el grupo libre en dos generadores $\{a, b\}$, su gráfica de Cayley es un árbol y se puede representar como en la figura 1.2.

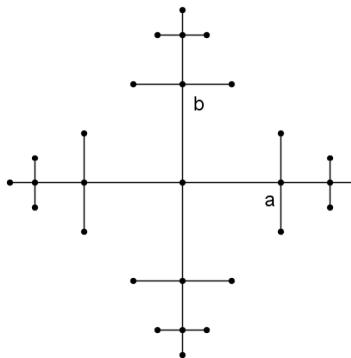


Figura 1.2: Comienzo de la Gráfica de Cayley del grupo libre en dos generadores $\mathbb{F}_2(a, b)$.

Sea G un grupo finitamente generado y H un subgrupo finito de generadores de G . Consideremos la gráfica de Cayley de G con respecto a H , $\Gamma = Cay(G, H)$, para



cada clase lateral por la izquierda gH de H en G , añadimos un vértice $v(gH)$ a Γ y añadimos una arista $e(gh)$ de longitud $1/2$ desde cada elemento gh de gH al nuevo vértice $v(gH)$. Esta nueva gráfica se llama el **cono de la gráfica de Cayley** de G con respecto a H y la denotaremos por $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(H)$. Vamos a dotar a esta gráfica con la métrica por trayectorias.

Sea $\Gamma = \mathbb{F}_2(a, b)$ el grupo fundamental del toro con un agujero y sea H su grupo de cúspide, el cual es el grupo cíclico $H = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle$. El cono de la gráfica de Cayley $\hat{\Gamma}$ de Γ relativo a H es casi-isométrico al 1-esqueleto de la teselación de Farey, figura 1.3.

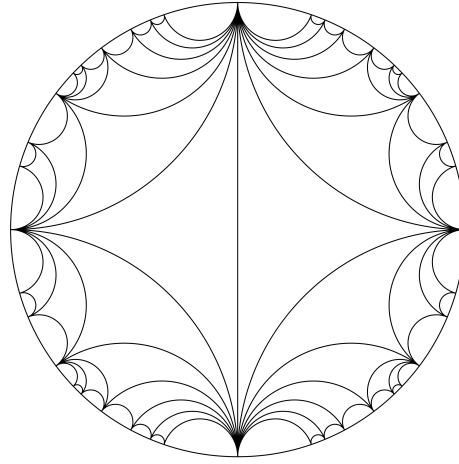


Figura 1.3: Cono de la gráfica de Cayley del grupo libre en dos generadores, $\mathbb{F}_2(a, b)$.

Decimos que el grupo G es **relativamente hiperbólico** a H si el cono de la gráfica de Cayley $\hat{\Gamma}$ de G con respecto a H es un espacio métrico de curvatura negativa.

Sea M una variedad Riemanniana completa, de volumen finito, de curvatura negativa pinchada, de dimensión n con una cúspide. Sea H el grupo fundamental de su cúspide. Entonces $\pi_1(M)$ es relativamente hiperbólico a H .

La propiedad de un grupo G de ser relativamente hiperbólico a un subgrupo H es independiente de la elección del conjunto generador finito de ambos grupos G, H [14, Corolario 3.3].



Ahora, vamos a definir la noción de grupo relativamente hiperbólico siguiendo la notación de Osin [25]. En la Sección 3.2, se usa la siguiente notación para probar la Proposición 50, en la cual se encuentra una cota de las curvas que unen dos fronteras de una variedad hiperbólica con respecto a las curvas que viajan sobre la frontera.

Sea G un grupo, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subgrupos de G , X un subconjunto de G . Decimos que G está generado por X con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (o equivalentemente, que X es un **conjunto generador relativo** de G con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$) si G es generado por el conjunto $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda\right) \cup X$. Donde X es un conjunto simétrico, es decir, $X = X^{-1}$.

El grupo G también puede ser pensado como el grupo cociente del producto libre

$$F = \left(*_{\lambda \in \Lambda} \widetilde{H}_\lambda\right) * F(X), \tag{1.1}$$

donde los grupos \widetilde{H}_λ son copias isomorfas a H_λ , y $F(X)$ es el grupo libre con base X . Vamos a denotar por \mathcal{H} a la unión ajena

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\widetilde{H}_\lambda \setminus \{1\}\right).$$

Vamos a denotar por $(X \cup \mathcal{H})^*$ al monoide libre generado por $X \cup \mathcal{H}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, S_λ denota al conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto $\widetilde{H}_\lambda \setminus \{1\}$ que representan la identidad en F . Los isomorfismos \widetilde{H}_λ y el mapeo identidad en X se pueden extender de forma única al homomorfismo $\epsilon : F \rightarrow G$, al kernel de este homomorfismo lo denotaremos por N .

Decimos que el grupo G tiene una **presentación relativa**

$$\langle X, \mathcal{H} \mid S = 1, S \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, R = 1, R \in \mathcal{R} \rangle, \tag{1.2}$$

con respecto a la colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde $\mathcal{R} \subseteq (X \cup \mathcal{H})^*$, si N es la cerradura normal del conjunto \mathcal{R} en el grupo F . Denotaremos a esta presentación por

$$\langle X, H_\lambda, \lambda \in \Lambda \mid R = 1, R \in \mathcal{R} \rangle.$$

La presentación relativa $\langle X, H_\lambda, \lambda \in \Lambda \mid R = 1, R \in \mathcal{R} \rangle$ es finita si los conjuntos \mathcal{R} y X son finitos. Si existe una presentación relativa finita de un grupo G con respecto



a una colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, decimos que G es **finitamente presentado relativo** a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Ejemplo 8. Sean H_1 y H_2 dos grupos arbitrarios. Sean K, L dos subgrupos de H_1, H_2 en ese orden y sea $\alpha : K \rightarrow L$ un isomorfismo. Entonces para el producto amalgamado $G = H_1 *_K=L H_2$, la presentación relativa de G con respecto a $\{H_1, H_2\}$ es:

$$\langle H_1, H_2 \mid k = \alpha(k), k \in K \rangle$$

Un mapeo Δ sobre una presentación $\langle Z | \mathcal{P} \rangle$ se dice que es un **diagrama de van Kampen** sobre dicha presentación si lo siguiente es cierto. Para cualquier celda Π de Δ , la etiqueta de la frontera $\phi(\partial\Pi)$ es igual a la permutación cíclica de una palabra $P^{\pm 1}$, donde $P \in \mathcal{P}$.

La gráfica de Cayley del grupo G dado por 1.2 con respecto al conjunto generador $X \cup \mathcal{H}$ la denotamos por $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.

Una gráfica de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, Z)$ de un grupo G generada por Z es un 1-complejo orientado y etiquetado donde el conjunto de vértices es $V(\Gamma) = G$ y el conjunto de aristas es $E(\Gamma) = G \times Z$. Una arista $e = (g, s) \in E(\Gamma)$ va del vértice g al vértice gs y tiene la etiqueta $\phi(e) = s$. El origen y el fin de la arista e , es decir, los vértices g y gs , se denotan por e_+ y e_- respectivamente.

La etiqueta de una trayectoria $p = e_1 e_2 \dots e_k \in \Gamma$, donde $e_1, \dots, e_k \in E(\Gamma)$ se denota por $\phi(p)$. El inicio y final de una trayectoria se denotan por $p_- = (e_1)_-$ y $p_+ = (e_k)_+$. Una trayectoria $p \in \Gamma$ se dice que es **irreducible**, si no contiene subtrayectorias del tipo ee^{-1} para $e \in E(\Gamma)$. Una **subtrayectoria** q de $p = e_1 e_2 \dots e_k$, es una trayectoria del tipo $e_i e_{i+1} \dots e_j$ para $1 \leq i \leq j \leq k$.

Dada una palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$, decimos que una subpalabra V de W es una H_λ -**subpalabra** de V si solo consiste en letras de \widetilde{H}_λ . Una H_λ -subpalabra de W se llama una H_λ -**sílaba** si es maximal, es decir, si no está contenido en una H_λ -palabra más grande de W .

Sea γ una trayectoria en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$. Una subtrayectoria γ' de γ se llama una H_λ -**subtrayectoria**, si la etiqueta de γ' es una H_λ -subpalabra de la palabra $\phi(\gamma)$.



Una H_λ -**componente** de γ es una H_λ -subtrayectoria de γ' tal que la etiqueta de γ' es una H_λ -sílabo de la palabra $\phi(\gamma)$.

Dos H_λ -componentes γ_1, γ_2 de una trayectoria γ en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ se dice que son **conexas** si existe una trayectoria α en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ que conecta algún vértice de γ_1 con algún vértice de γ_2 y $\phi(\alpha)$ es una palabra que consiste solo de letras en \widetilde{H}_λ . La trayectoria α se llama H_λ -**conector**. Una H_λ -componente γ' de una trayectoria γ se dice que es **aislada** si ninguna H_λ -componente está conectada a γ' .

Ejemplo 9. Sea $BS(1, 2) = \langle a, t \mid a^t = a^2 \rangle$ el grupo Baumslag-Solitar. Sea $H = \langle a \rangle$ y consideremos la palabra $W = a^2 a^t a^3$. Entonces las H -sílabas a^3 y a^2 están conectadas ya que a^t y a^2 representan al mismo elemento y la H -sílabo a de W es aislada.

Si γ es una trayectoria geodésica en una gráfica de Cayley $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, entonces toda componente de γ es aislada [25, Lemma 2.23].

Una presentación relativa de un grupo G como en 1.2 con respecto a una colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se dice que es **reducida** si cada $R \in \mathcal{R}$ tiene longitud mínima de entre todas las palabras de $(X \cup \mathcal{H})^*$ que representa al mismo elemento del grupo F . En particular, para cualquier $\lambda \in \Lambda$ y cualquier $R \in \mathcal{R}$, cada H_λ -sílabo de R consta de una única letra.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, se denota por Ω_λ al subconjunto de todos los elementos $g \in H_\lambda$ tales que existe un elemento $R \in \mathcal{R}$ y una H_λ -sílabo V de R tal que V representa a g en G . Y se denota por Ω a la unión de todos los Ω_λ , i.e.,

$$\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda. \quad (1.3)$$

El conjunto Ω es finito si el conjunto \mathcal{R} es finito.

Sea q un ciclo en la gráfica de Cayley $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$. Se define al **área relativa**, $\text{Área}^{rel}(q)$, con respecto a la presentación 1.2 como el mínimo número $N_{\mathcal{R}}(\Delta)$ de \mathcal{R} -células entre todos los diagramas de van Kampen Δ sobre 1.2 con etiqueta en la frontera $\phi(\partial\Delta) \equiv \phi(q)$.

El siguiente Lema será de utilidad para probar el Lema 11.

Lema 10. (Osin, [25, Lemma 2.27]) *Supongamos que un grupo G está dado por la presentación relativa, finita, reducida 1.2 con respecto a la colección de subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.*



Sea q un ciclo en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, p_1, \dots, p_k un conjunto de H_λ -componentes aisladas de q . Entonces

$$\overline{\phi(p_i)} \in \langle \Omega_\lambda \rangle$$

para cualquier $i = 1, \dots, k$. Más aún, la longitud de los elementos $\overline{\phi(p_1)}, \dots, \overline{\phi(p_k)}$ con respecto al conjunto generador Ω_λ del subgrupo $\langle \Omega_\lambda \rangle$ satisface la desigualdad

$$\sum_{i=1}^k |\overline{\phi(p_i)}|_{\Omega_\lambda} \leq M \cdot \text{Área}^{rel}(q),$$

donde $M = \max_{R \in \mathcal{R}} \|R\|$.

Supongamos que G está dado por la presentación relativa 1.2. Para una palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ tal que W representa al elemento identidad en G , existe una expresión

$$W =_F \prod_{i=1}^k f_i^{-1} R_i f_i \tag{1.4}$$

con la igualdad en el grupo F dada por 1.1, donde $R_i \in \mathcal{R}$ y $f_i \in F$ para todo i .

Decimos que una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una **función isoperimétrica relativa** a la presentación 1.2 con respecto a los subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier palabra $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ de longitud $\|W\| \leq n$ que representa la identidad en el grupo G , podemos escribir a W como en 1.4 con $k \leq f(n)$.

Una definición equivalente para una función isoperimétrica relativa que será de utilidad es la siguiente. Una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ se dice que es una **función isoperimétrica relativa** a la presentación 1.2 con respecto a los subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier ciclo q en la gráfica de Cayley $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ de longitud $l(q) \leq n$, el área relativa de q con respecto a la presentación 1.2 satisface

$$\text{Área}^{rel}(q) \leq f(n).$$

La función isoperimétrica relativa más pequeña de la presentación 1.2 se llama la **función de Dehn relativa** de 1.2 con respecto a los subgrupos $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Si la presentación 1.2 no posee una función isoperimétrica relativa finita, entonces se dice que la función relativa de Dehn no está bien definida.



Sea G un grupo y $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subgrupos de G . Se dice que G es **hiperbólico relativo a** $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si G es finitamente presentado con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ y la función de Dehn relativa de G con respecto a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es lineal.

El siguiente Lema se usará en el capítulo 3 para probar la Proposición 50.

Lema 11. (Osin [25, Lemma 3.2]) *Sea G un grupo finitamente generado, relativamente hiperbólico a una colección de subgrupos $\{H_1, \dots, H_m\}$. Entonces existe un conjunto generador finito X de G que satisface la siguiente condición. Sea q un ciclo en $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ y sean p_1, \dots, p_k cierto conjunto de H_i -componentes aisladas de q . Entonces*

$$\sum_{i=1}^k d_X((p_i)_-, (p_i)_+) \leq ML \cdot l(q),$$

donde M, L son constantes.

Demostración. Consideremos una presentación relativa, reducida, finita y arbitraria de G dada de la siguiente forma:

$$G = \langle X', H_1, \dots, H_m \mid R = 1, R \in \mathcal{R}' \rangle, \quad (1.5)$$

y sea Ω el conjunto finito dado por 1.3. Vamos a considerar al conjunto X como la unión de X' con Ω , i.e., $X = X' \cup \Omega$ y a \mathcal{R} como $R' \cup \{\omega W_\omega^{-1}, \omega \in \Omega\}$, donde W_ω es una palabra fija sobre X' que representa al elemento ω en G . Entonces, después de aplicar un número finito de transformaciones Tietze, podemos obtener la presentación relativa, finita del grupo G

$$G = \langle X, H_1, \dots, H_m \mid R = 1, R \in \mathcal{R} \rangle \quad (1.6)$$

con respecto al conjunto $\{H_1, \dots, H_m\}$ y tal que su función de Dehn relativa satisface la condición

$$\delta_G^{rel}(n) \leq L \cdot n \quad (1.7)$$

para alguna constante L .

Denotemos a $(p_i)_-$ por u_i y a $(p_i)_+$ por v_i . Por el Lema 10, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k |u_i^{-1} v_i|_\Omega \leq M' L' l(q)$$



donde $M' = \max_{R \in \mathcal{R}} \|R\| \leq M$, y donde la función de Dehn relativa de la presentación 1.5 no excede $L' \cdot n$. Incrementando la constante L de 1.7 si es necesario, podemos asumir que $L' \leq L$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k d_X((p_i)_-, (p_i)_+) \leq \sum_{i=1}^k |u_i^{-1}v_i|_X \leq \sum_{i=1}^k |u_i^{-1}v_i|_\Omega \leq M'L' \cdot l(q) \leq ML \cdot l(q).$$

Que es lo que queríamos probar. □

Este Lema nos garantiza que siempre es posible tener una presentación relativa finita de G como en 1.2 y escoger un conjunto X de tal forma que es posible acotar la longitud de un ciclo q del gráfico de Cayley $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ en términos de un subconjunto de componentes aisladas de q . En el Capítulo 3, vamos a usar este resultado para encontrar una cota de una trayectoria que conecta las paredes de una pieza en términos de una trayectoria que viaja sobre las fronteras, Proposición 50.

1.3 Espacio eléctrico

Sea \widetilde{M} una variedad de Hadamard pinchada en la cual $\pi_1(M)$ actúa libre, propia y discontinuamente por isometrías. Sea Γ la gráfica de Cayley asociada a $\pi_1(M)$ y $\widehat{\Gamma}$ el **cono** de la gráfica de Cayley Γ con respecto al subgrupo de cúspides H . Sea Γ_i un conjunto invariante de horobolas disjuntas centradas en puntos parabólicos fijos. Denotemos por Z el espacio resultante al borrar el interior de esas horobolas con la métrica por trayectorias. Cada componente frontera de Z es una horoesfera convexa, y Γ actúa libre y cocompactamente por isometrías en Z . Escojamos un punto base $x \in Z$ en una horoesfera, entonces, obtenemos una casi-isometría de Γ con Z dada por $\gamma \mapsto \gamma \cdot x$ [14].

El **espacio eléctrico** \widehat{Z} es el espacio cociente obtenido de Z por identificar puntos que viven en la misma componente frontera horoesférica de Z . La métrica por trayectorias d_Z de Z induce una pseudo-métrica $d_{\widehat{Z}}$ en \widehat{Z} como sigue. Sea

$$d_Y(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x, y \in S \text{ para alguna componente frontera de } Z \\ d_Z(x, y), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Entonces $d_{\widehat{Z}}(x, y)$ es igual al ínfimo de $\sum d_Y(x_i, x_{i+1})$ sobre todas las sucesiones de puntos $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$. Observemos que $d_{\widehat{Z}}$ coincide localmente con la métrica por trayectorias $d_{\widetilde{M}}$ fuera de las horoesferas.

Una trayectoria γ en \widehat{Z} se llama **trayectoria eléctrica**. La **longitud eléctrica** de una trayectoria eléctrica γ se denota por $l_{\widehat{Z}}(\gamma)$, y es la suma de las longitudes en Z de las subtrayectorias de γ que viven fuera de la horoesfera. Una **geodésica eléctrica** de x a y en \widehat{Z} es una trayectoria de x a y tal que $l_{\widehat{Z}}(\gamma)$ es minimal. Una **P-casi-geodésica eléctrica** es una P -casi-geodésica en el espacio pseudo-métrico \widehat{Z} .

Sean P, C dos constantes positivas. La (P, C) -casi isometría f de Γ a Z induce una casi-isometría $\widehat{f} : \widehat{\Gamma} \longleftrightarrow \widehat{Z}$, definida por $\widehat{f}(v) = f(v)$ para todo $v \in \Gamma$. Así, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\Gamma} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{Z} \end{array}$$

Observemos que \widehat{f} es una $(2RP, C+1)$ -casi-isometría, donde R es tal que la distancia en \widetilde{M} entre cualesquiera dos horoesferas en la colección de horoesferas removidas es al menos R .

Consideremos una geodésica $\gamma \in M$ que no interseca una horoesfera S . La **distancia visual** de S con respecto a γ es el diámetro del conjunto

$$T = \{s \in S \mid \exists t \text{ para el cual } \overline{\gamma(t)s} \cap S = \{s\}\}$$

en la métrica d_S . La **distancia visual** de S es el supremo de las distancias visuales de S con respecto a γ tomados sobre todas las geodésicas que no intersecan a S .

Lema 12. (Farb [14, Lemma 4.4]) *Horoeferas en una variedad de Hadamard pinchada Y tienen tamaño visual uniformemente acotado.*

Sea $S \subseteq \widetilde{M}$ una horoesfera y denotemos por π_S su proyección ortogonal sobre S . Sea γ una geodésica que no interseca a S y supongamos que existe otra geodésica de $x \in \gamma$ a algún punto $y \in S$. Entonces, si $d_S(y, \pi_S(x)) \leq C$ para alguna constante C , la distancia visual de S está acotada por $2/a + 2C$, donde a es una constante positiva tal que la curvatura seccional de la variedad satisface que $k \leq -a \leq 0$.



Lema 13. (Farb [14, Lema 4.5]) *Existen constantes $K = K(P)$, $L = L(P) > 0$ con $P > 0$ con la siguiente propiedad: sea β la P -casi-geodésica eléctrica de x a y , y sea γ una geodésica en \widetilde{M} de x a y . Entonces, cualquier segmento de β que vive fuera de $N_{\widehat{Z}}(\gamma, K)$ debe tener una longitud eléctrica de a lo más L . En particular, cualquier P -casi-geodésica eléctrica de x a y está completamente contenida en $N_{\widehat{Z}}(\gamma, K + L/2)$.*

Otra propiedad importante del espacio eléctrico es que es un pseudo-espacio δ -hiperbólico para algún $\delta > 0$ (Proposición 4.6 de [14]). Los siguientes lemas comparan las longitudes de casi-geodésicas eléctricas β que atraviesan una sucesión de horoesferas con la longitud de una geodésica α en \widetilde{M} con los mismos puntos finales. Una geodésica β de esta forma se dice que sigue eléctricamente a α .

Lema 14. (Farb [14, Lemma 4.7]) *Sea β una P -casi-geodésica eléctrica que no interseca a una horoesfera S . Entonces, existe una constante $D = D(P)$ tal que la proyección de β en S tiene una longitud en S de a lo más $D \cdot l_{\widehat{Z}}(\beta)$.*

Decimos que una casi-geodésica eléctrica $\beta \in \widehat{Z}$ es una **casi-geodésica sin retroceso** si para cada horoesfera $S \in \widehat{Z}$ a la cual β interseca, β nunca regresa a S después de salir de S . La imagen de $\widehat{f} : \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{Z}$ de cada geodésica en $\widehat{\Gamma}$ es una casi-geodésica sin retroceso en \widehat{Z} .

Lema 15. (Farb [14, Lemma 4.8]) *Sea β una P -casi-geodésica eléctrica sin retroceso que va de x a y y sea γ una geodésica en \widetilde{M} de x a y . Entonces, existe una constante $D = D(P)$ tal que si cualquiera de β o γ interseca a una horoesfera S , entonces la distancia en S del punto de entrada de esta trayectoria en S a su punto de salida es a lo más D .*

Lema 16. (Farb [14, Lemma 4.9]) *Sea β una P -casi-geodésica sin retroceso de x a y y sea γ una geodésica en \widetilde{M} de x a y . Entonces, existe una constante $D = D(P)$ tal que si β y γ intersecan alguna horoesfera S , entonces el punto de entrada de β en S está a distancia D en S del punto de entrada de γ en S ; análogamente para sus puntos de salida.*

Teorema 17. (Farb [14, Theorem 5.1]) *Sea M una n variedad Riemanniana completa, no-compacta, de volumen finito con curvatura seccional negativa pinchada y denotemos*



por Γ su grupo fundamental. Sean $\{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ los subgrupos de cúspides de Γ , entonces Γ es relativamente hiperbólico con respecto al conjunto $\{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ de los subgrupos de cúspides.

1.4 Grupos nilpotentes

Un grupo G decimos que es **soluble** si tiene una **serie abeliana**, es decir, una serie

$$\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

tal que cada factor G_{i+1}/G_i es abeliano.

Decimos que G es **nilpotente** si tiene una **serie central**, es decir una serie normal

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

tal que G_{i+1}/G_i está contenido en el centro de G/G_i para todo i . Es claro que un grupo nilpotente es soluble.

Un grupo G es **policíclico** si tiene una serie cíclica, es decir, si tiene una serie con factores cíclicos. Los grupos policíclicos son solubles también. Observemos además que si G es un grupo nilpotente entonces es policíclico. En un grupo policíclico G , el número de factores infinitos cíclicos en una serie cíclica es independiente de la serie y por lo tanto es un invariante de G al que se le conoce como la **longitud de Hirsch** [26, 5.4.13]. Vamos a denotar por $h(G)$ a la longitud de Hirsch de G , es decir, $h(G) = \#\{i \mid G_i/G_{i+1} \cong \mathbb{Z}\}$. Decimos que Γ tiene virtualmente una propiedad P si existe Γ_1 subgrupo de Γ de índice finito tal que Γ_1 tiene la propiedad P .

Teorema 18. (Robinson [26]) Para una sucesión exacta corta de grupos policíclicos

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 1$$

se cumple que

$$h(G) = h(H) + h(G/H).$$

Lema 19. (Robinson [26]) Si $H \leq G$ son grupos policíclicos, entonces $h(H) \leq h(G)$.



Sea G un grupo libre de torsión, consideremos los subgrupos de índice finito de G . Estos subgrupos tienen la misma dimensión cohomológica. A esta dimensión común se le llama **dimensión cohomológica virtual** y se denota por $\text{vcd}(G)$.

Teorema 20. (Brown [8]) *Si G es un grupo policíclico, entonces $h(G) = \text{vcd}(G)$, donde vcd denota la dimensión cohomológica virtual. Sea M una n variedad esférica cerrada. Entonces $\text{vcd}(\pi_1(M)) = n$.*

1.5 Gráficas de grupos

Sea X una gráfica con conjunto de vértices $V(X)$ y conjunto de aristas $E(X)$ orientado. Sea G un grupo que actúa en X . Una **inversión** es un par que consiste de un elemento $g \in G$ y una arista $x \in E(X)$ tal que $gx = \bar{x}$, donde \bar{x} denota la arista x con orientación contraria. Si no existe tal par, decimos que G actúa sin inversión en X . Si \mathcal{G} es una gráfica de grupos, el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G})$ actúa sin inversión de aristas en el árbol de Bass-Serre T asociado a \mathcal{G} [28, Sección 5.4].

Una **gráfica de grupos** $\mathcal{G} = (G, T)$ consiste de una gráfica T , un grupo G_P para cada vértice $P \in V(T)$ y un grupo G_e para cada arista $e \in E(T)$, junto con un monomorfismo $G_e \rightarrow G_{t(e)}$ (denotado por $a \mapsto a^e$). Adicionalmente pedimos que $G_{\bar{e}} = G_e$.

Tomamos T un segmento $P \xrightarrow{e} Q$. Tenemos tres grupos G_P, G_Q y $G_e = G_{\bar{e}}$ y dos monomorfismos $G_e \xrightarrow{\bar{e}} G_P$ y $G_e \xrightarrow{e} G_Q$; el grupo G_T es igual a $G_P *_{G_e} G_Q$.

Proposición 21. (Serre [28, Proposition 27]) *Sea G un grupo nilpotente finitamente generado actuando en un árbol T . Entonces solo uno de los siguientes casos se cumple:*

1. G tiene un punto fijo.
2. Existe una trayectoria T estable bajo G en la cual G actúa por traslaciones, es decir, por un homomorfismo no trivial $G \rightarrow \mathbb{Z}$.



1.6 Inyectividad del grupo fundamental

Denotemos por c_i al número de componentes frontera de cada pieza Z_i , i.e., $c_i = \#\pi_0(\partial Z_i)$. Vamos a denotar al conjunto de componentes frontera ajenos de Z_i, Z_j como sigue:

$$\begin{aligned}\partial Z_i &= \coprod_{\alpha=1}^{c_i} W_\alpha^i \\ \partial Z_j &= \coprod_{\alpha=1}^{c_j} W_\alpha^j.\end{aligned}$$

Al difeomorfismo de pegado entre las piezas Z_i, Z_j lo vamos a denotar por $d_{ij,k}$, donde el índice k denota la k -ésima pared de la pieza Z_i , es decir, $d_{ij,k} : W_k^i \rightarrow W_{d(k)}^j$. El índice k lo omitiremos cuando sea claro por el contexto. Este difeomorfismo induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales,

$$d_{ij*} : \pi_1(W^i) \rightarrow \pi_1(W^j).$$

Un fin de V_i lo vamos a denotar por $E_{i,j}$.

Por un resultado conocido de Eberlein [13, Theorem 3.3] tenemos lo siguiente. Cada V_i se puede retraer a $B_i = V_i - \cup_{i=1}^k S_i$. Donde los S_i denotan a las horoesferas no maximales que fueron removidas de V_i . Entonces, para cada fin E_i de V_i el mapeo $\pi_1(E_i) \rightarrow \pi_1(B_i)$ es inyectivo. Como consecuencia, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(W^{ij}) & \longrightarrow & \pi_1(E_i) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(N_i) & \longrightarrow & \pi_1(Z_i) & \longrightarrow & \pi_1(B_i) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Así, el mapeo $\pi_1(W^{ij}) \hookrightarrow \pi_1(Z_i)$ es inyectivo. Por lo tanto, el grupo fundamental de una variedad de gráficas de dimensiones superiores M construida como en la Definición 1 es isomorfo al grupo fundamental de una gráfica de grupos \mathcal{G}_M . Los grupos de vértices corresponden a los grupos fundamentales de las piezas $\pi_1(Z_i)$ y los grupos de aristas corresponden a los grupos $\pi_1(W^{ij})$, [12, Teorema 155].



1.7 Nociones de teoría geométrica de grupos

Dado un conjunto S , el conjunto de palabras en S lo denotaremos por $W(S)$ y es el conjunto de sucesiones finitas de elementos en S . El producto de dos palabras está dado por yuxtaposición y la unidad es la palabra vacía. Un elemento en $W(S)$ lo escribimos como $w = s_1 s_2 \cdots s_n$, donde $s_i \in S$. Al entero n le llamamos la **longitud** de w . Si la palabra es vacía, su longitud es 0.

Sean $(\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de grupos y $A = \amalg_{\iota \in I} \Gamma_\iota$. Sea \sim una relación de equivalencia en $W(S)$ generada por

- $w e_\iota w' \sim w w'$, donde e_ι es el elemento unidad de Γ_ι .
- $w a b w' \sim w c w'$ si se cumple que $c = a b$ para $a, b, c \in \Gamma_\iota$.

para todo $w, w' \in W(S)$. El cociente $W(S)/\sim$ es un grupo al que llamamos **producto libre** y se denota por $*_{\iota \in I} \Gamma_\iota$. El inverso de una clase representada por un elemento $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ es la clase representada por $s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \cdots s_1^{-1}$.

Una palabra $w = s_1 s_2 \cdots s_n \in W(S)$ con $s_j \in \Gamma_{\iota_j}$ se llama **reducida** si $\iota_j \neq \iota_{j+1}$ para $1 \leq j \leq n-1$ y si s_j es diferente del elemento unidad de Γ_{ι_j} para $1 \leq j \leq n$.

El **grupo libre** sobre S es el producto libre de una familia de copias del grupo \mathbb{Z} indexado por S y se denota por $F(S)$; $F(S)$ se puede identificar con el conjunto de palabras reducidas en $S \cup S^{-1}$. El producto en el grupo corresponde a la yuxtaposición de palabras seguidas por una multiplicación y reducción, es decir, borrar letras consecutivas de la forma $s s^{-1}$ o $s^{-1} s$.

Decimos que un grupo Γ es **finitamente generado** o de **tipo finito**, si existe un subconjunto finito $S \subset \Gamma$ tal que, para cualquier $\gamma \in \Gamma$ existe una sucesión de elementos $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ con $\gamma = s_1 s_2 \cdots s_n$. Por ejemplo, el grupo \mathbb{Z}^n es finitamente generado por cualquier entero n .

Sea Γ un grupo dado como un cociente $\pi : F(S) \rightarrow \Gamma$ de un grupo libre en el conjunto S . La **longitud de la palabra**, $l_S : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, $l_S(\gamma)$ de un elemento $\gamma \in \Gamma$, se define como el entero más pequeño n tal que existen elementos $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$



con $\gamma = \pi(s_1 \cdots s_n)$. La **métrica de la palabra** d_S se define en Γ como

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$

El grupo Γ es así un espacio métrico y Γ actúa en sí mismo por isometrías por la izquierda. Para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, la longitud de la palabra l_S , satisface $l_S(\gamma_1\gamma_2) \leq l_S(\gamma_1) + l_S(\gamma_2)$.

Consideremos dos espacios pseudo métricos X, Y . Una función $\phi : X \rightarrow Y$ se dice que es un **encaje casi-isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1, c \geq 0$ tales que

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - c \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. Si además, existe una constante $D \geq 0$, tal que cualquier punto en Y se encuentra a una distancia pequeña D de algún punto en $\phi(X)$ se dice que es una **casi-isometría**.

Equivalentemente, X, Y son **casi-isométricos**, si existen dos funciones

$$\phi : X \rightarrow Y \quad \text{y} \quad \psi : Y \rightarrow X$$

y constantes $\lambda \geq 1, c \geq 0, D \geq 0$ tales que

1. $d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$
2. $d_X(\psi(y_1), \psi(y_2)) \leq \lambda d_Y(y_1, y_2) + c$
3. $d_X(\psi\phi(x), x) \leq D$
4. $d_Y(\phi\psi(y), y) \leq D$

para todo $x, x_1, x_2 \in X$ y para todo $y, y_1, y_2 \in Y$.

Es fácil ver que las casi-isometrías entre espacios pseudo métricos definen una relación de equivalencia. Las casi-isometrías no preservan dimensión.

Proposición 22. (*Lema de Milnor-Svarč, [17]*) *Sea X un espacio métrico geodésico y propio. Sea Γ un grupo y sea $\Gamma \times X \rightarrow X$ una acción por isometrías por la izquierda. Asumimos que la acción es propia y que el cociente $\Gamma \backslash X$ es compacto. Entonces el grupo Γ es finitamente generado y casi-isométrico a X . Más aún, para cualquier $x_0 \in X$, el mapeo $\Gamma \rightarrow X$ dado por $\gamma \mapsto \gamma x_0$, es una casi-isometría.*



1.7.1 Crecimiento de Grupos

Sea Γ un grupo finitamente generado por un conjunto S . La **función de crecimiento** $\beta(\Gamma, S; k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es el número de elementos $\gamma \in \Gamma$ con $l_S(\gamma) \leq k$. A la siguiente serie de potencias

$$B(\Gamma, S; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta(\Gamma, S; k) z^k$$

se le conoce como **serie de crecimiento**.

Si no hay confusión se puede escribir $\beta(k), B(z)$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 23. 1. Consideremos el grupo cíclico infinito \mathbb{Z} generado por 1, su función de crecimiento esta dada por

$$\begin{aligned} \beta(\mathbb{Z}, \{1\}; r) &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ r &\mapsto 2r + 1 \end{aligned}$$

2. Para el grupo libre abeliano \mathbb{Z}^2 con dos generadores, tenemos que su función de crecimiento es

$$\begin{aligned} \beta(\mathbb{Z}^2, S; r) &= 1 + 4 \sum_{j=1}^r j \\ &= 1 + 4 \left(\frac{r(r+1)}{2} \right) \\ &= 1 + 2(r^2 + r) \\ &= 1 + 2r + 2r^2 \end{aligned}$$

3. Para \mathbb{Z} generado por el conjunto $\{2, 3\}$, su función de crecimiento está dada por

$$\beta(\mathbb{Z}, \{2, 3\}; r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 5 & \text{si } r = 1 \\ 6r + 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

4. Para el grupo libre en dos generadores \mathbb{F}_2 con conjunto generador $S = \{a, b\}$, tenemos que $\beta(0) = 1$, $\beta(1) = 5$ y

$$\beta(n) - \beta(n-1) = 4(3^{n-1})$$



entonces

$$\begin{aligned}\beta(\mathbb{F}^2, S; n) &= 1 + \sum_{i=1}^n 4 \cdot 3^{i-1} \\ &= 1 + 4 \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \\ &= 1 + 4 \frac{3^n - 1}{2} \\ &= 1 + 2(3^n - 1).\end{aligned}$$

5. En general, para el grupo libre F de rango finito $n \geq 2$, con respecto a un conjunto finito de generadores S tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(F, S; r) &= 1 + 2 \cdot n \sum_{j=0}^{r-1} (2 \cdot n - 1)^{j-1} \\ &= 1 + \frac{n}{n-1} ((2n-1)^r - 1).\end{aligned}$$

Sea Γ un grupo finitamente generado y S su conjunto finito de generadores.

- El grupo Γ es de **crecimiento exponencial**, si existen $A, B > 0$ tales que para $n \geq 0$,

$$\beta(\Gamma, S; n) \geq A \exp^{Bn}.$$

- El grupo Γ tiene **crecimiento polinomial**, si existen d, c tales que para todo $n \geq 1$,

$$\beta(\Gamma, S; n) \leq cn^d.$$

- El grupo Γ es de **crecimiento intermedio** si no es ni exponencial ni polinomial.

Es sencillo demostrar que el tipo de crecimiento no depende del conjunto generador.

Para el caso de los ejemplos anteriores tenemos lo siguiente.

1. La función de crecimiento del grupo cíclico \mathbb{Z} generado por 1 o generado por $\{2, 3\}$ es un polinomio de grado 1, entonces el grupo es de crecimiento polinomial.
2. La función de crecimiento del grupo libre abeliano \mathbb{Z}^2 con dos generadores es un polinomio de grado 2, entonces el crecimiento del grupo es polinomial.



3. La función de crecimiento del grupo libre en dos generadores \mathbb{F}^2 es exponencial⁵ entonces el tipo de crecimiento del grupo es exponencial. En general, un grupo libre F de rango finito $n \geq 2$ con respecto a un conjunto finito de generadores tiene crecimiento exponencial.

Corolario 24. *El tipo de crecimiento de grupos finitamente generados es un invariante casi-isométrico, es decir, grupos finitamente generados, casi-isométricos tienen el mismo tipo de crecimiento. En otras palabras, grupos finitamente generados que tienen diferente tipo de crecimiento no pueden ser casi-isométricos.*

Ejemplo 25. 1. \mathbb{Z}^m es casi-isométrico a \mathbb{Z}^n si y sólo si $m = n$.

2. Los grupos fundamentales de dos variedades Riemannianas con cubierta universal isométrica tienen el mismo tipo de crecimiento.

1.7.2 Crecimiento uniformemente exponencial del grupo fundamental

Sea Γ un grupo finitamente generado por un conjunto S y sea

$$\beta(\Gamma, S; k) = \beta_S(k)$$

su correspondiente función de crecimiento. El **tipo de crecimiento exponencial** del par (Γ, S) es

$$\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta_S(k)}.$$

Denotamos por $\omega(\Gamma)$ a

$$\omega(\Gamma) = \inf\{\omega(\Gamma, S) : S \text{ es un conjunto finito de generadores de } \Gamma\}.$$

El grupo Γ se dice que es de

1. **Crecimiento exponencial** si $\omega(\Gamma, S) > 1$.
2. **Crecimiento subexponencial** si $\omega(\Gamma, S) = 1$.
3. **Crecimiento uniformemente exponencial** si $\omega(\Gamma) > 1$.



Teorema 26. *(de la Harpe, P., & Bucher, M. [18, Theorem]) Sean A, B dos grupos finitamente generados y sea C un grupo dado como un subgrupo de A y de B . Asumir que $([A : C] - 1)([B : C] - 1) \geq 2$, donde $[A : C] \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ denota el índice de un subgrupo C en A . Entonces*

$$\omega(A *_C B) \geq \sqrt[4]{2}.$$

*En particular, el producto libre con amalgamación $A *_C B$ es de crecimiento uniformemente exponencial.*

El siguiente Lema es una consecuencia del Teorema 26. La prueba completa está en [12].

Lema 27. *El grupo fundamental de una variedad de gráficas M como en la definición 1 tiene crecimiento uniformemente exponencial.*



Capítulo 2

Isomorfismos entre grupos fundamentales de Variedades de Gráficas de dimensiones superiores preservan piezas

Consideremos la siguiente familia de variedades las cuales son una extensión de las variedades definidas por Frigerio, Lafont y Sisto [15].

Definición 28. [2, Definición 1]

1. Para cada $i = 1, \dots, r$ sean $2 \leq n_i \leq n$ y V_i una n_i -variedad de curvatura negativa pinchada, no compacta, completa y de volumen finito.
2. Denotar por B_i la variedad diferenciable, compacta con frontera, obtenida por truncar las cúspides de V_i , es decir, por remover de V_i una vecindad abierta, horoesférica (no maximal) de cada cúspide.
3. Tomar un fibrado $Z_i \rightarrow B_i$ con fibra un cociente compacto N_i de un grupo de Lie aesférico, nilpotente, simplemente conexo \widetilde{N}_i por la acción de una retícula uniforme Γ_i de dimensión $n - n_i$, es decir, N_i es difeomorfo a \widetilde{N}_i/Γ_i , donde \widetilde{N}_i es un grupo de Lie simplemente conexo y Γ_i es una retícula uniforme.

4. Fijar un par de difeomorfismos entre las componentes de frontera de distintos Z_i , e identificar pares de componentes frontera usando difeomorfismos, para obtener una variedad conexa de dimensión n .

Una variedad construida de esta forma la llamaremos **variedad de gráficas de dimensión superior**. Llamaremos a los Z_i las **piezas** de M y cuando $\dim(B_i) = n$, diremos que $Z_i = B_i$ es una **pieza pura**. Los componentes frontera de las piezas Z_i se llaman **paredes** y los denotaremos por W .

Estas variedades fueron introducidas por Bárcenas, Juan-Pineda y Suárez-Serrato [2], extendiendo la familia estudiada previamente por Connell y Suárez-Serrato [11].

El objetivo de este capítulo es probar el Teorema 29. Vamos a asumir que M es una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 28 y que \tilde{M} es su cubierta universal.

Teorema 29. *Sean M_1, M_2 dos variedades de gráficas como en la Definición 1. Sean $\Lambda_1 \leq \pi_1(M_1)$ un subgrupo conjugado al grupo fundamental $\pi_1(Z_{1,j})$ de una pieza $Z_{1,j}$ en M_1 y $\varphi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ un isomorfismo. Entonces $\varphi(\Lambda_1)$ es conjugado al grupo fundamental $\pi_1(Z_{2,\sigma(j)}) \leq \pi_1(M_2)$ de una pieza $Z_{2,\sigma(j)}$ en M_2 .*

Para probar este resultado, empezaremos explicando las propiedades de la cubierta universal \tilde{M} como un árbol de espacios y estudiaremos el árbol de Bass-Serre T asociado a la descomposición de M en piezas. Usando estas propiedades y que por el Lema 27 el grupo fundamental de una variedad de gráficas de dimensión superior tiene crecimiento uniformemente exponencial, en el Lema 32 probamos que el estabilizador de un vértice $v \in T$ no puede fijar otro vértice. En el Lema 35 probamos la propiedad análoga para paredes. En el Lema 38, Corolario 39 y Corolario 40, describimos ciertas propiedades métricas de las paredes y cámaras que nos permiten entender cuando dos paredes o dos cámaras son la misma. En la sección 2.3 probamos que los subgrupos maximales nilpotentes del grupo fundamental $\pi_1(M)$ con longitud de Hirsch $n - 1$ son los estabilizadores de las paredes. Con esta caracterización de los estabilizadores de paredes y cámaras y usando el Lema de Milnor-Svarč probamos el Teorema 29.



2.1 \widetilde{M} como árbol de espacios

Vamos a comenzar nuestro análisis estudiando algunas propiedades del cubriente universal \widetilde{M} de M .

Sea X una gráfica con vértices $V(X)$ y aristas orientadas $E(X)$. Sea G un grupo actuando en X . Una **inversión**, es un par que consiste de un elemento $g \in G$ y una arista $x \in E(X)$ tal que $gx = \bar{x}$, donde \bar{x} denota la arista x orientada en sentido contrario. Si no existe tal par, decimos que G actúa en X sin inversión de aristas. Recordemos que si \mathcal{G} es una gráfica de grupos, el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G})$ actúa sin inversión de aristas en el árbol de Bass-Serre T asociado a \mathcal{G} [28, Sección 5.4].

Un **árbol de espacios** (X, ϕ, T) es un espacio topológico X , con un mapeo ϕ en un árbol T con la siguiente propiedad: Para cualquier arista $e \in E(T)$ y t en la parte interior \mathring{e} de e , si $X_e = \phi^{-1}(t)$ entonces $\phi^{-1}(\mathring{e})$ es homeomorfo a $X_e \times (0, 1)$.

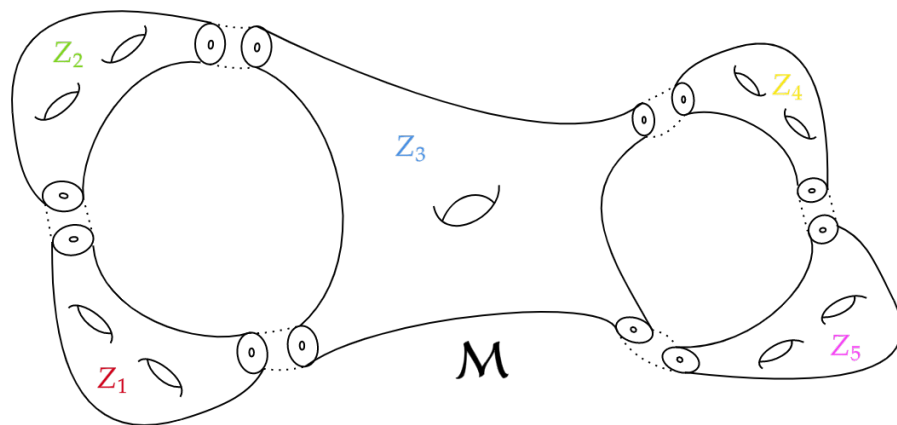
Supongamos que (\widetilde{M}, ϕ, T) es un árbol de espacios, donde \widetilde{M} es el cubriente universal de una variedad de gráficas M y T es el **árbol de Bass-Serre** asociado a la descomposición de piezas de M .

- Definición 30.**
1. Una **pared** W de \widetilde{M} es la cerradura de la preimagen bajo ϕ del interior de una arista de T . Vamos a denotar por d_W a la métrica por trayectorias inducida en W por la restricción a W de la estructura Riemanniana de \widetilde{M} .
 2. Una **cámara** $C \subseteq \widetilde{M}$ es la preimagen bajo ϕ de un vértice de T . Denotaremos por d_C a la métrica por trayectorias inducida en C por la restricción a C de la estructura Riemanniana de \widetilde{M} .

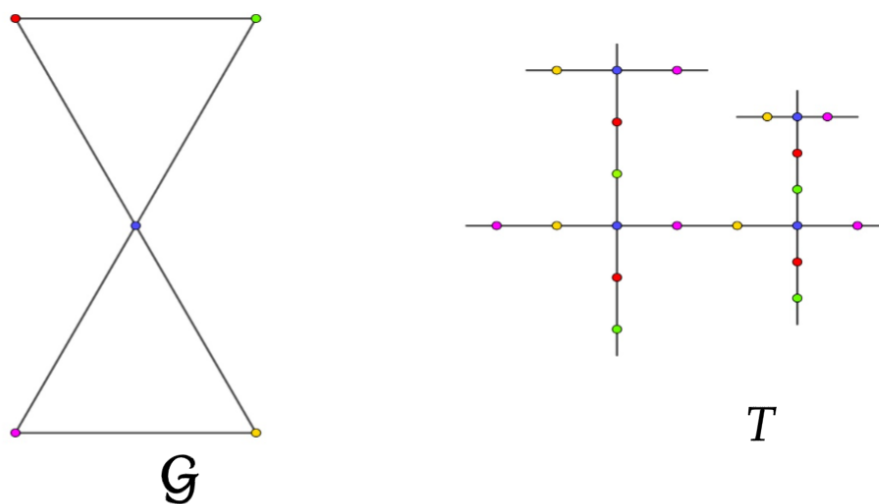
Decimos que dos cámaras son adyacentes, si los correspondientes vértices de T están unidos por una arista. Una pared W es adyacente a una cámara C si $W \cap C \neq \emptyset$. Si W es una pared, entonces W es adyacente a una cámara C si y sólo si el vértice correspondiente a C es el punto final de la arista correspondiente a W .

Como consecuencia del Teorema 4, tenemos que cada componente frontera de Z_i es π_1 -inyectivo en Z_i . Esto implica que cada pieza y cada componente frontera de una pieza son π_1 -inyectivas en M . Usando esto, la aesfericidad de las piezas de M y la construcción del árbol de Bass-Serre, tenemos el siguiente resultado.





(a) Variedad con descomposiciones cuspidales



(b) Gráfica asociada a \mathcal{M} y árbol de Bass-Serre asociado al cubriente universal de \mathcal{G} .

Figura 2.1: Ejemplo de una variedad de gráficas con piezas puras, su gráfica asociada y su árbol de Bass-Serre asociado.



Corolario 31. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1. Si \widetilde{M} es su cubriente universal y (\widetilde{M}, ϕ, T) denota el árbol de espacios, entonces tenemos lo siguiente.*

1. *Sea C una cámara de \widetilde{M} , entonces C es homeomorfa a $\widetilde{Z}_i \cong \widetilde{B}_i \times \widetilde{N}_i$, donde $\widetilde{Z}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{N}_i$ son los cubrientes universales de Z_i, B_i y N_i en ese orden.*
2. *Si W es una pared de \widetilde{M} , entonces W es homeomorfa a $\partial\widetilde{B}_i \times \widetilde{N}_i$ o $\partial\widetilde{B}_j \times \widetilde{N}_j$.*

Llamamos a \widetilde{B}_i la base de C y a \widetilde{N}_i la fibra de C . Sea (\widetilde{M}, ϕ, T) el árbol de espacios descrito en el Corolario 31, al árbol T se le llama el árbol de Bass-Serre de $\pi_1(M)$ con respecto al isomorfismo $\pi_1(M) \cong \pi_1(\mathcal{G}_M)$ (ver Figura 2.1). La acción de $\pi_1(M)$ en \widetilde{M} induce una acción de $\pi_1(M)$ en T . Además, el grupo fundamental de una pieza de M coincide con el estabilizador de un vértice de T y el grupo fundamental de una pared W_{ij} corresponde a los estabilizadores de aristas de T .

El siguiente resultado nos dice que los estabilizadores de vértices solo fijan un único vértice.

Lema 32. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1 y sea T el árbol de Bass-Serre asociado a la descomposición de M en piezas. Para cada vértice $v \in V(T)$ y cada arista $e \in E(T)$ denotamos por G_v, G_e a los estabilizadores en $\pi_1(M)$ de v y e respectivamente. Si v es un vértice de T , entonces v es el único vértice que es fijado por G_v .*

Demostración. Supongamos que G_v fija otro vértice $v' \neq v$, entonces G_v fija una arista e que contiene a v . Esto implica que G_v está contenido en el estabilizador de la arista e . Por el Corolario 3.3 de [13], sabemos que los estabilizadores de aristas son grupos virtualmente nilpotentes. Además, por un resultado conocido de Gromov, sabemos que los grupos virtualmente nilpotentes tienen crecimiento polinomial [16]. Como los grupos de vértices son grupos fundamentales de variedades de curvatura negativa, entonces los estabilizadores de vértices tienen crecimiento uniformemente exponencial. Por lo tanto, el estabilizador de una arista no puede estar contenido en el estabilizador de un vértice ya que el tipo de crecimiento es un invariante de casi-isometría. Con esto concluimos que G_v solo fija al vértice v . □



Lema 33. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición*

1. Sean Z_1, Z_2 dos piezas de M . Sean $G_i < \pi_1(M)$ grupos fundamentales (o conjugados a ellos) de Z_i para $i = 1, 2$. Entonces:

- 1. El normalizador de G_i en $\pi_1(M)$ es igual a G_i .*
- 2. Si G_1 es conjugado a G_2 en $\pi_1(M)$, entonces Z_1 es isométrico a Z_2 .*

Demostración. Vamos a considerar la acción de $\pi_1(M)$ en el árbol de Bass-Serre T .

1. Sin pérdida de generalidad, vamos a probar el resultado para G_1 . Sea $v_1 \in V(T)$, por el Lema 32, v_1 es el único vértice que es fijado por G_{v_1} , es decir, $G_{v_1}(v_1) = v_1$. Además, si G_{v_1} fija a v_1 , entonces también lo fija G_1 . Sea $g \in \pi_1(M)$ y supongamos que g normaliza a G_1 . Entonces, para todo $x \in G_1$ existe $y \in G_1$ tal que $gx = yg$. Esto implica que $gxv_1 = ygv_1$ ya que $xv_1 = v_1$, así $gv_1 = ygv_1$. Así, como G_1 fija a gv_1 y v_1 es el único vértice que es fijado por G_1 , entonces $gv_1 = v_1$. Por lo tanto, $g \in G_1$.
2. Supongamos que existe g tal que $gG_1g^{-1} = G_2$ y sean v_1, v_2 los vértices que son fijados por G_1 y G_2 , en ese orden. Como G_1 es conjugado a G_2 , entonces G_1 fija a v_2 y a $g(v_1)$, de donde $v_2 = g(v_1)$. Por lo anterior tenemos que el automorfismo cubriente $g : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, manda a la cámara que cubre a Z_1 en la cámara que cubre a Z_2 . Por lo tanto, Z_1 es isométrico a Z_2 . \square

Recordemos que una variedad de gráficas de dimensión superior M está formada por una unión finita de piezas Z_i y que cada una está definida por un haz fibrado con base B_i y fibra N_i . Diremos que un elemento $g \in \pi_1(M)$ corresponde a la dirección de la fibra de $\pi_1(Z_i)$ si para el morfismo $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(B_i)$ inducido por la proyección $M \rightarrow B_i$, tenemos que $\rho(g) = e \in \pi_1(B_i)$. Es decir, si fija a la dirección asociada a la base de la pieza de Z_i .

Lema 34. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1 y sea T el árbol de Bass-Serre asociado a la descomposición de M . Sean W_1, W_2 dos paredes distintas de \widetilde{M} y sea $v \in V(T)$ un vértice tal que cualquier trayectoria que*



conecta a W_1 con W_2 interseca a la cámara correspondiente a v . Si $g \in \pi_1(M)$ es tal que $g(W_i) = W_i$ para $i = 1, 2$. Entonces, g es un elemento que corresponde a la dirección de la fibra de $\pi_1(Z_i)$, donde Z_i es la pieza en M que corresponde al vértice $v \in T$.

Demostración. Sea $\widetilde{Z}_i \subset \widetilde{M}$ la cámara correspondiente al vértice v y denotemos la pieza de M correspondiente a \widetilde{Z}_i por Z_i . Sean Z_i^1, Z_i^2 dos componentes frontera de $\partial(\widetilde{Z}_i)$ tales que $g(\widetilde{Z}_i) = \widetilde{Z}_i$, $g(Z_i^1) = Z_i^1$ y $g(Z_i^2) = Z_i^2$. Entonces tenemos que $g \in G_v$.

Recordemos que G_v se identifica con el grupo fundamental de la pieza correspondiente a v , es decir, se identifica con $\pi_1(Z_i)$. Además, $\widetilde{Z}_i \cong \widetilde{B}_i \times \widetilde{N}_i$ por el Corolario 31. Sea $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(B_i)$ el morfismo inducido por la proyección $M \rightarrow B_i$. Sabemos también que los componentes frontera de \widetilde{Z}_i están en biyección con los componentes frontera de \widetilde{B}_i .

Sea γ una geodésica bi-infinita completamente contenida en B_i . Por definición, el estabilizador de γ satisface que $\text{Stab}(\gamma) = \gamma$, entonces por el Lema 7, $\text{Stab}(\gamma) \leq \mathbb{R} \times H$. Si $\rho(g)\gamma = \gamma$ entonces existe $p \in \gamma$ tal que $\rho(g)p = p$. Esto implica que $|\rho(g)| < \infty$ y así $\rho(g) = \text{Id}$. Por lo tanto $g \in \text{Ker}(\rho)$. \square

Lema 35. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1 y sea T el árbol de Bass-Serre asociado a la descomposición de M . Sea W una pared en \widetilde{M} y sea H su estabilizador en $\pi_1(M)$. Entonces, W es la única pared que es estabilizada por H .*

Demostración. Notemos que como H es aesférico, su longitud de Hirsch es $h(H) = n - 1$, donde n es la dimensión de M . Supongamos que H estabiliza otra pared $W' \neq W$. Por el Lema 34, H está contenido en $\pi_1(N_v)$, donde v es un vértice de T y N_v es la fibra correspondiente a la pieza asociada al vértice v . Como N_v es una variedad aesférica, por el Teorema 20, tenemos que la longitud de Hirsch de $\pi_1(N_v)$ es igual a su dimensión cohomológica virtual. Ahora, por el Teorema 18 tenemos que $h(\pi_1(N_v)) \leq n - 2$. Esto nos da una contradicción. Por lo tanto W es la única pared que es estabilizada por H . \square

Lema 36. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición*



1 y sea T el árbol de Bass-Serre asociado a la descomposición de M en piezas. Sean Z_1, Z_2 dos piezas de M y W_i un componente de ∂Z_i , $i = 1, 2$. Sean $H_i < \pi_1(M)$ los grupos fundamentales de (o conjugados a ellos) W_i respectivamente. Entonces:

1. El normalizador de H_1 en $\pi_1(M)$ es igual a H_1 .
2. Si H_1 es conjugado a H_2 en $\pi_1(M)$, entonces W_1 es isométrico a W_2 en M .

Demostración. Ambas pruebas son análogas a las del Lema 33. □

2.2 Propiedades métricas de \widetilde{M}

Vamos ahora a estudiar algunas propiedades métricas de \widetilde{M} . Denotemos por d a la distancia asociada a la estructura Riemanniana de \widetilde{M} . Para cada $r \geq 0$ y cada $X \subset \widetilde{M}$, denotaremos por $N_r(X) \subseteq \widetilde{M}$, a la vecindad de radio r de X , con respecto a la métrica Riemanniana d de \widetilde{M} . Recordemos que d_C denota a la métrica por trayectorias de una cámara $C \in \widetilde{M}$ y que está inducida por la métrica en C definida por la restricción de la estructura Riemanniana de \widetilde{M} .

Lema 37. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1. Si C es una cámara de \widetilde{M} , entonces existe una función $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $g(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Además, $d(x, y) \geq g(d_C(x, y))$ para cada $x, y \in C$.*

Demostración. Como d y d_C inducen la misma topología en C , es suficiente probar el resultado para un punto fijo x .

Sea $\{y_i\}$ un sucesión de puntos en C tal que $d_C(x, y_i) \rightarrow \infty$. Ahora, como \widetilde{M} es propia, si suponemos que $d(x, y_i)$ está acotada, entonces pasando a una subsucesión si es necesario, existe $y \in \widetilde{M}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$. Pero sabemos que C es cerrada en \widetilde{M} , entonces y debe estar necesariamente en C . Esto contradice que $d_C(x, y_i) \rightarrow \infty$. □

Lema 38. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1. Sean W_1 y W_2 dos paredes de \widetilde{M} y supongamos que existe una constante $r \geq 0$ tal que $W_1 \subset N_r(W_2)$, entonces, $W_1 = W_2$.*



Demostración. Consideremos la realización de \widetilde{M} como árbol de espacios. Podemos reducir al caso cuando W_1 y W_2 son paredes adyacentes a una cámara dada C . Por el Lema anterior, podemos asumir que W_1 está contenido en la r -vecindad de W_2 con respecto a la métrica de C .

Sea Z_i la pieza correspondiente a la cámara C , y sean B_i, N_i su base y fibra respectivamente. Por el Corolario 31, tenemos que $C \cong \widetilde{B}_1 \times \widetilde{N}_1$. Como B_i es una variedad que admite una métrica de curvatura negativa y que además le fueron removidas una cantidad finita de horoesferas no maximales, entonces por construcción podemos proyectar W_1, W_2 en dos horoesferas O_1, O_2 de tal forma que O_1 está contenido en la r -vecindad de O_2 con respecto a la métrica de \widetilde{B}_1 . Pero la métrica de \widetilde{B}_1 está acotada por abajo por la métrica localmente simétrica, lo cual fuerza que $O_1 = O_2$. Por lo tanto $W_1 = W_2$. \square

Como consecuencia de este Lema tenemos los dos siguientes Corolarios.

Corolario 39. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1. Sea W una pared de \widetilde{M} y sea C una cámara de \widetilde{M} . Si $W \subset N_r(C)$ para alguna constante $r \geq 0$, entonces W es adyacente a C .*

Demostración. Notemos que W está contenido en la r -vecindad de una pared adyacente a C . Usando el Lema 38 tenemos que W es adyacente a C . \square

Corolario 40. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1. Sean C_1, C_2 dos cámaras de \widetilde{M} y supongamos que existe una constante $r \geq 0$ tal que $C_1 \subset N_r(C_2)$, entonces $C_1 = C_2$.*

Demostración. Sean W_1, W_2 paredes distintas, ambas adyacentes a C_1 . Por el Corolario 39, son paredes adyacentes a C_2 . Por lo tanto $C_1 = C_2$. \square

2.3 Propiedades de los estabilizadores de paredes y cámaras

En esta Sección, vamos a caracterizar completamente los grupos fundamentales de las piezas de una variedad de gráficas M . Para esto, fijaremos nuestra atención en la acción



de $\pi_1(M)$ en el árbol de Bass-Serre T , y describiremos el conjunto de estabilizadores de paredes de \widetilde{M} .

Decimos que una pieza Z de M es una **pieza de superficie** si la base del haz fibrado que define a Z es una superficie hiperbólica.

Con la finalidad de entender los estabilizadores de paredes, vamos a definir el siguiente conjunto:

$$\mathcal{N}(\pi_1(M)) = \{H < \pi_1(M) \mid H \text{ es un subgrupo maximal nilpotente y } h(H) = n - 1\}$$

Donde $h(H)$ denota la longitud de Hirsch de H .

Proposición 41. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1 sin piezas de superficie. Sea H un subgrupo de $\pi_1(M)$. Entonces, $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$ si y sólo si, H es un subgrupo maximal nilpotente del estabilizador de un vértice v en el árbol de Bass-Serre T asociado a la descomposición de M en piezas y tiene longitud de Hirsch $h(H) = n - 1$.*

Demostración. Sea Z_v la pieza correspondiente al vértice v y sea N_v la fibra como en la definición 1.

Supongamos que $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$, entonces por la Proposición 21 tenemos los siguientes dos casos mutuamente excluyentes: H fija a un único vértice, o existe una trayectoria γ , a la cual H fija como conjunto, en la cual H actúa por traslaciones. Vamos a probar que H no puede actuar por traslaciones en γ .

Por contradicción, supongamos que H actúa por traslación en la trayectoria γ . Denotemos por $\varphi : H \rightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo por el cual H actúa por traslaciones en γ y sea $K = \text{Ker}(\varphi)$. Como $h(H) = n - 1$ y $h(\mathbb{Z}) = 1$, el Lema 18 implica que $h(K) = n - 2$. Más aún, K es un subgrupo de H el cual fija la trayectoria γ .

Para cada punto en γ , en particular para v , tenemos que K actúa en la cámara C_v correspondiente al punto v y K estabiliza dos paredes W_1, W_2 de C_v a través de las cuales γ entra y sale de C_v . Por el Lema 34, tenemos que $K \leq \pi_1(N_v)$. Además, la longitud de Hirsch de K es menor que la longitud de Hirsch de N_v , es decir, $h(K) < h(N_v)$. Por hipótesis no hay piezas de superficie, esto implica que la longitud de Hirsch



de las fibras es menor a $n - 3$, es decir $h(N_v) < n - 3$, lo cual es una contradicción. Así, K solo fija a un único vértice de γ . Por lo tanto, H está contenido en el estabilizador de un vértice.

Supongamos que H es un subgrupo maximal nilpotente del estabilizador de un vértice $v \in V(T)$ y su longitud de Hirsch es $h(H) = n - 1$. Sea H' un subgrupo maximal nilpotente de $\pi_1(M)$, con $h(H') = n - 1$ y que contiene a H . Existen dos casos a considerar.

Si v es el único vértice que fija H , entonces como $H < H'$, tenemos que H' también fija a v . Así H' está contenido en el estabilizador de v y por maximalidad $H = H'$.

Si H fija otro vértice $w \neq v$, entonces H debe de fijar también una arista e de T con punto final v . Como H es un subgrupo maximal nilpotente del estabilizador de v , entonces H coincide con el estabilizador de e .

En ambos casos podemos concluir que $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$. □

Lema 42. *Sean M una variedad de gráficas como en la Definición 1. Si $H < \pi_1(M)$ es un estabilizador de una pared, entonces $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$. Por otro lado, si $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$, entonces:*

1. H es un estabilizador de una pared, o
2. existe un único vértice $v \in V(T)$ fijado por H y este vértice corresponde a una pieza de superficie de M .

Demostración. Si H es un estabilizador de una pared, entonces H es un subgrupo maximal nilpotente del estabilizador de un vértice de T , entonces el Lema 41 implica que $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$.

Ahora, supongamos que $H \in \mathcal{N}(\pi_1(M))$ no es un estabilizador de una pared. Por el Lema 41, H está contenido en el estabilizador de un vértice $v \in V(T)$. Más aún, v es el único vértice que es fijado por H , ya que de otra forma H debería fijar una arista y por maximalidad H sería un estabilizador de una pared.

Sea Z_v la pieza correspondiente al vértice v y sean N_v^k, B_v^{n-k} la fibra y la base de Z_v en ese orden. Supongamos por contradicción que Z_v no es una pieza de superficie, entonces $k \leq n - 3$. Como la longitud de Hirsch de la proyección de H en $\pi_1(B_v)$ es al menos



$n - k - 1 \geq 2$, entonces está contenido en un subgrupo de cúspide. Por maximalidad, esto implica que H es un estabilizador de una pared, lo cual es una contradicción. \square

La prueba del siguiente Lema es similar a la del Lema 4.8 dada por Frigerio, Lafont y Sisto en [15].

Lema 43. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior como en la Definición 1. Sea C una cámara en \widetilde{M} . Sean W_1, W_2 dos paredes distintas adyacentes a C y H_1, H_2 sus estabilizadores. Sea $\overline{H} \in \mathcal{N}(\pi_1(M)) \setminus \{H_1, H_2\}$. Entonces, para cada $k \geq 0$, existen puntos $w_1 \in W_1 \cap C$, $w_2 \in W_2 \cap C$, los cuales se pueden unir por una trayectoria $\gamma : [0, l] \rightarrow C$ que no interseca la vecindad de radio k , $N_k(\overline{W})$, de \overline{W} , donde \overline{W} es la pared que es estabilizada por \overline{H} .*

Demostración. Como $\overline{H} \notin \{H_1, H_2\}$ podemos suponer que \overline{W} es ajeno a $C \cup W_1 \cup W_2$. Necesitamos considerar los siguientes dos casos:

1. \overline{W} está en la misma componente conexa $\widetilde{M} \setminus \{W_1, W_2\}$ que contiene a C .
2. \overline{W} y C están en diferentes componentes conexas de $\widetilde{M} \setminus \{W_1, W_2\}$.

Caso 1: Si \overline{W} está en la misma componente conexa de $\widetilde{M} \setminus \{W_1, W_2\}$ que contiene a C , entonces debe de existir una pared $W_3 \neq W_1, W_2$ adyacente a C tal que cualquier trayectoria que conecta \overline{W} con $W_1 \cup W_2$ debe pasar a través de W_3 .

Cualquier trayectoria que conecta W_1 con W_2 pero que no pasa a través de $N_k(W_3)$ no debe pasar por \overline{W} , ya que estamos asumiendo que \overline{W} es disjunto a $C \cup W_1 \cup W_2$ y que W_3 es adyacente a C . Sea d_C la métrica por trayectorias en C . Por el Lema 37, es suficiente con construir una trayectoria γ que una w_1 con w_2 y tal que para todo $t \in [0, l]$ y para una constante dada $k' > 0$ tengamos que $d_C(\gamma(t), W_3) \geq k'$.

Sea $p : C \rightarrow B$ el mapeo proyección de C en su base B . Para $i = 1, 2, 3$, sean ξ_i puntos al infinito en B y O_i las horoesferas centradas en ξ_i definidas como sigue:

1. $O_1 = p(W_1 \cap C)$
2. $O_2 = p(W_2 \cap C)$
3. $O_3 = p(W_3 \cap C)$



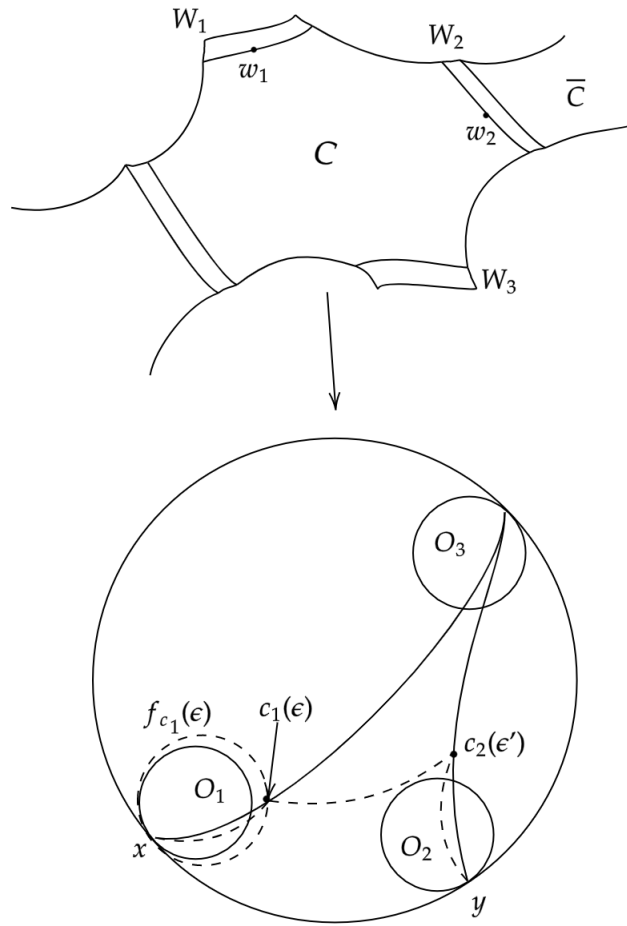


Figura 2.2: Construcción de la proyección de la trayectoria γ entre w_1 y w_2 , Lema 43.

Consideremos los puntos $x \in O_1, y \in O_2$ y los rayos geodésicos $c_1 : [0, \infty] \rightarrow B$ de x a ξ_3 y $c_2 : [0, \infty] \rightarrow B$ de y a ξ_3 . Para cada $t \in [0, \infty]$, consideremos la sucesión de horoesferas definidas por los conjuntos de nivel de las funciones de Busemann $f_{c_i}(t)$. Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, queremos construir una trayectoria de cualquier punto en O_1 a cualquier otro punto en O_2 de tal forma que esta trayectoria no interseque a la horoesfera O_3 . Consideremos la concatenación de las siguientes trayectorias:

1. La subtrayectoria de c_1 de x al punto de intersección $c_1(\epsilon)$, de la horoesfera



definida por $f_{c_1}(\epsilon)$ y c_1 .

2. Consideremos la horoesfera definida por la función de Busemann $f_{c_3}(t)$ que pasa por el punto $c_1(\epsilon)$, a esta horoesfera le llamaremos O_{c_3} .
3. La subtrayectoria de c_2 que va del punto y al punto de intersección $c_2(\epsilon')$, entre c_2 y la horoesfera del punto anterior.
4. La trayectoria que va de $c_1(\epsilon)$ a $c_2(\epsilon')$ a través de la horoesfera O_{c_3} .

Por construcción, la concatenación de esas tres trayectorias no interseca a O_3 . Sea $\gamma : [0, l] \rightarrow C$ el levantamiento de esta trayectoria a C . Entonces, existe una constante $K(\epsilon)$, la cual depende de ϵ tal que tiende a $+\infty$ cuando ϵ tiende a 0, además para cada $t \in [0, l]$, tenemos que $d_C(\gamma(t), \overline{W}) \geq K(\epsilon)$. Con esto, concluimos el primer caso.

Caso 2: Supongamos que \overline{W} y C están en diferentes componentes conexas de $\widetilde{M} \setminus \{W_1, W_2\}$. Entonces, tenemos que cualquier trayectoria que conecte a W_1 con \overline{W} debe pasar a través de W_2 y de igual forma, cada trayectoria que conecte a W_2 con \overline{W} debe pasar a través de W_1 . Vamos a suponer que sucede el primer caso, por simetría el segundo es análogo.

Entonces, existe una cámara \overline{C} diferente a C y adyacente a W_2 . Escojamos una fibra \overline{F} de $\overline{C} \cap W_2$ y sea F_2 el subespacio correspondiente a $W_2 \cap C$. Por el Lema 37, si k' es una constante dada, entonces queremos construir una trayectoria γ que conecte a W_2 con \overline{W} y tal que $d_C(\gamma(t), \overline{F}_2) \geq k'$ para todo $t \in [0, l]$.

Sean B, F la base y fibra de C , en ese orden. Entonces, podemos escoger un punto $p \in F$ tal que $B \times \{p\} \subseteq C$ interseque a F en un subespacio propio de $W \cap (B \times \{p\})$. Sabemos que B se puede identificar con un espacio de curvatura negativa con un número finito de horoesferas no maximales removidas. Entonces, podemos identificar a $W_2 \cap (B \times \{p\})$ con una horoesfera O_2 centrada en un punto al infinito y a $W_1 \cap (B \times \{p\})$ con una horoesfera O_1 , también centrada en un punto al infinito. Con la misma estrategia del caso 1, podemos construir una trayectoria γ como una concatenación de ciertas trayectorias especiales de tal forma que γ y la vecindad de radio finito \overline{O} de $F \cap (B \times \{p\})$ no se intersequen entre si. Finalmente, si la constante k' es suficientemente



grande, entonces cualquier trayectoria en $B \times \{p\}$ que conecte a W_2 y \overline{W} y que no interseque a la vecindad de radio k' de $F \cap (B \times \{p\})$ tampoco intersecará a la vecindad de radio k' de F . \square

Corolario 44. *Sean M_1, M_2 dos variedades de gráficas como en la Definición 1. Sea $\varphi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ un isomorfismo. Si H_1 es un subgrupo de $\pi_1(M_1)$, entonces H_1 es el estabilizador de una pared en \widetilde{M}_1 si y sólo si, $\varphi(H_1)$ es el estabilizador de una pared en \widetilde{M}_2 .*

Demostración. Supongamos que H_1 es el estabilizador de una pared en \widetilde{M}_1 , entonces H_1 está contenido en el estabilizador de una arista e del árbol de Bass-Serre T_1 asociado a \widetilde{M}_1 . Como φ es un isomorfismo, entonces $\varphi(H_1)$ está contenido en el estabilizador de una arista e_2 del árbol de Bass-Serre T_2 asociado a \widetilde{M}_2 , i.e., está contenido en gH_2g^{-1} . Solo nos falta probar que $\varphi(H_1)$ coincide con gH_2g^{-1} . El subgrupo $\varphi^{-1}(gH_2g^{-1})$ de $\pi_1(M_1)$ contiene a H_1 y está contenido en el estabilizador de una arista del árbol de Bass-Serre T_1 . Por lo tanto, $\varphi^{-1}(gH_2g^{-1}) = H_1$. \square

Proposición 45. *[15, Proposición 4.13] Sean M_1, M_2 dos variedades de gráficas como en la Definición 1. Sea $f : \widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_2$ una (k, c) -casi-isometría y sea g su casi-inversa. Supongamos que existe λ con la propiedad de que para cada pared W_1 de \widetilde{M}_1 , existe una pared W_2 de \widetilde{M}_2 con distancia de Hausdorff entre $f(W_1)$ y W_2 acotada por λ y que cambiando los papeles de W_1 con W_2 se cumple lo mismo para g .*

Entonces, existe una constante universal L , con la propiedad que para cada cámara C_1 en \widetilde{M}_1 , existe una única cámara C_2 en \widetilde{M}_2 tal que la distancia de Hausdorff entre $f(C_1)$ y C_2 está acotada por L .

La siguiente prueba es la presentada por Frigerio, Lafont y Sisto en [15], sin embargo también es válida para las variedades de gráficas de dimensiones superiores de la Definición 1. Incluimos la prueba por completitud.

Demostración. Sean W_1, W'_1 paredes adyacentes a una cámara fija $C_1 \subseteq \widetilde{M}_1$. Por hipótesis, existen dos paredes W_2, W'_2 de \widetilde{M}_2 tales que $f(W_1)$ y $f(W'_1)$ están a distancia de Hausdorff finita de W_2 y W'_2 respectivamente, además, el Lema 38 garantiza que esas paredes sean únicas.



Queremos probar que existe una cámara $C_2 \subseteq \widetilde{M}_2$ tal que W_2 y W'_2 son paredes adyacentes de C_2 .

Supongamos que existe una pared $P_2 \subseteq \widetilde{M}_2$ diferente a W_2 y W'_2 tal que cualquier trayectoria que conecta a W_2 con W'_2 pasa por P_2 . Entonces, existe una pared $P_1 \subseteq \widetilde{M}_1$ tal que $f(P_1)$ está a distancia a lo más λ de P_2 . Como f y g son casi-isometrías, tenemos que si P_2 separa a W_2 y W'_2 , esto implica que existe una constante $D > 0$ tal que cualquier trayectoria que conecta a W_1 con W'_1 debe intersectar a $N_D(P_1)$. Pero esto contradice el Lema 43. Así, W_2 y W'_2 son paredes adyacentes a C_2 .

Vamos a probar ahora que C_2 está a distancia de Hausdorff acotada de $f(C_1)$. Como las paredes son h -densas en \widetilde{M} para algún $h > 0$, entonces para cada $p_1 \in C_1$, existe un $p'_1 \in W_1$ con $d(p_1, p'_1) \leq h$, donde W_1 es una pared adyacente a C_1 . Así,

$$\begin{aligned} d(f(p_1), C_2) &\leq d(f(p_1), f(p'_1)) + d(f(p_1), C_2) \\ &\leq kh + c + \lambda. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $f(C_1)$ está contenido en una vecindad de radio $kh + c + \lambda$ de C_2 . Análogamente, podemos ver que $g(C_2)$ está en una vecindad de radio $kh + c + \lambda$ de alguna cámara C'_1 , pero por el Corolario 40 tenemos que $C_1 = C'_1$.

Como g es la casi-inversa de f , si $q_2 \in C_2$, entonces $d(q_2, f(g(q_2))) \leq c$ y además, existe $q_1 \in C_1$ con $d(g(q_2), q_1) \leq kh + c + \lambda$. Por último, queremos estimar la distancia entre cualquier elemento $q_2 \in C_2$ y $f(q_1)$, donde $q_1 \in C_1$:

$$\begin{aligned} d(q_2, f(q_1)) &\leq d(q_2, f(g(q_2))) + d(f(g(q_2)), f(q_1)) \\ &\leq c + kd(g(q_2), q_1) + c \\ &\leq 2c + k(kh + c + \lambda) \end{aligned}$$

Tomando $L = 2c + k(kh + c + \lambda)$, tenemos el resultado. Finalmente, la unicidad de C_2 es por el Lema 40. \square

Ahora, procederemos a demostrar el Teorema 29.

Demostración. Sea $\Lambda_1 < \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de una pieza Z_1 de M_1 . Como consecuencia de la Proposición 45 y el Lema de Milnor-Svarč ([17, Teorema 23]), la distancia entre $d_H(\varphi(\Lambda_1), g\Lambda_2g^{-1})$ está acotada por L para algún $\Lambda_2 < \pi_1(M_2)$ el cual es el grupo fundamental de una pieza de M_2 y algún $g \in \pi_1(M_2)$.



Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $g = id$. Si $h \in \Lambda_1$, entonces $\varphi(h)\varphi(\Lambda_1) = \varphi(h\Lambda_1) = \varphi(\Lambda_1)$.

Como la distancia de Hausdorff $d_H(\varphi(\Lambda_1), \Lambda_2)$ está acotada, entonces $\varphi(h)\Lambda_2$ está a distancia de Hausdorff acotada de Λ_2 . Por el Lema de Milnor-Svarč, si C_2 es una cámara que es fijada por Λ_2 , entonces $d_H(\varphi(h)C_2, C_2)$ es finita. De donde, $\varphi(h)C_2 = C_2$ y $\varphi(h) \in \Lambda_2$, por lo tanto $\varphi(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$.

Usando la casi-inversa φ^{-1} de φ se prueba que $\varphi^{-1}(\Lambda_2) \subseteq \Lambda_1$.

Por la Proposición 45, para $h \in \Lambda_1$ la distancia de Hausdorff $d_H(\varphi^{-1}(\Lambda_2), h\Lambda_1h^{-1}) < H$ donde H es la constante de la proposición. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $h = id$, entonces para $g \in \Lambda_2$ tenemos $\varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(\Lambda_2) = \varphi^{-1}(g\Lambda_2) = \varphi^{-1}(\Lambda_2)$. Así, como $d_H(\varphi^{-1}(\Lambda_2), g\Lambda_1g^{-1}) < H$, tenemos que $d_H(\varphi^{-1}(g)\Lambda_1, \Lambda_1)$ está acotada. Además, si Λ_1 fija una cámara $C_1 \in \widetilde{M}_1$, entonces $d_H(\varphi^{-1}(g)C_1, C_1)$ es finita. Por lo tanto, por el Corolario 40 $\varphi^{-1}(g)C_1 = C_1$, así $\varphi^{-1}(g) \in \Lambda_1$ y $\varphi^{-1}(\Lambda_2) \subseteq \Lambda_1$.

Con esto concluimos que $\varphi(\Lambda_1) = \Lambda_2$. □



Capítulo 3

Variedades con descomposiciones cuspidales

Frigerio, Lafont y Sisto mencionan que excepto por la Proposición 7.8, todos los resultados de su sección VII [15] pueden ser adaptados para las variedades que se descomponen por cúspides. Estas variedades fueron introducidas por Tam Nguyen Phan en [31] y son una subfamilia de las variedades de gráficas superiores de la definición 1 donde las piezas son piezas puras.

Sea V una variedad localmente simétrica, completa, de volumen finito, no compacta, conexa, de curvatura negativa y dimensión $n \geq 3$. Se sabe que una variedad de esta forma tiene una cantidad finita de cúspides, además, cada cúspide es difeomorfa a $[0, \infty) \times S$, donde S es una variedad compacta de dimensión $n - 1$. Borraremos $(b, \infty) \times S$ de cada cúspide de tal forma que el espacio obtenido sea una variedad compacta con frontera y denotemos a este espacio por Z . El valor de b debe ser lo suficientemente grande para que los componentes frontera de $b \times S$ no se intersequen. Observemos que los componentes frontera de Z se levantan a horoesferas en \tilde{Z} . Esta variedad se le llama **variedad de cúspides acotadas con horofrontera**.

Definición 46. (Tam Nguyen Phan, [31]) Una **variedad con descomposiciones cuspidales** M , es una variedad que se obtiene tomando una cantidad finita de variedades Z_i e identificar sus horofronteras por difeomorfismos afines.

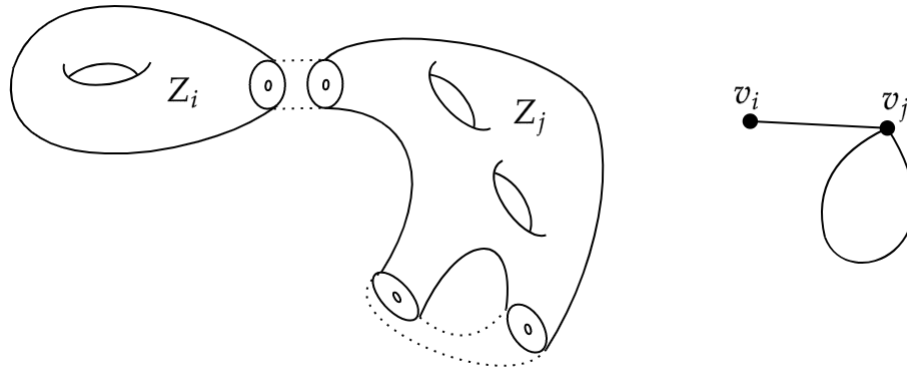


Figura 3.1: Variedad con descomposición cuspidal y gráfica asociada

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente Teorema para variedades M con descomposiciones cuspidales, el cual nos dice que las inclusiones de piezas y paredes en M , inducen encajes casi-isométricos a nivel de sus grupos fundamentales en \tilde{M} .

Teorema 47. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales. Entonces, la inclusión de cada pared y pieza induce encajes casi-isométricos de sus grupos fundamentales en su imagen en $\pi_1(M)$.*

3.1 Geometría de cámaras y paredes

Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . El cubriente universal \tilde{M} tiene una estructura natural como árbol de espacios de la siguiente forma. Una **cámara** $C \in \tilde{M}$ es la preimagen de una componente conexa en \tilde{Z} sin la cúspide borrada $S \times (b, \infty)$. Una **pared** $W \in \tilde{M}$ es la preimagen de una componente conexa de $S \times [0, b]$.

Para cada pared W de \tilde{M} su frontera se puede descomponer en dos componentes conexas W_+ y W_- que son la intersección de una cámara con una pared adyacente. Vamos a llamar a cada una de esas dos componentes W_+, W_- las **paredes delgadas** asociadas a W . Denotemos por d_{\pm} la métrica por trayectorias de W_{\pm} , inducida por la restricción de la estructura Riemanniana de \tilde{M} . Para cada pared W , sea $s_W : W_+ \rightarrow W_-$ el mapeo que envía un punto $p \in W_+$ al punto $s_W(p) \in W_-$ el cual está unido a p .



Vamos a pensar en s_W como el mapeo de pegado entre dos piezas.

Lema 48. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . Sea W una pared en \widetilde{M} . Si C es una cámara que contiene a la pared delgada W_+ , entonces la inclusión $(W_+, d_{W_+}) \hookrightarrow (C, d_C)$ es una isometría.*

Demostración. Recordemos que si Z es una pieza de la variedad M asociada a la cámara C , entonces cada componente de ∂C es una horoesfera convexa en sentido métrico (ver [14]).

Entonces, si W_+ es una pared delgada contenida en C , tenemos que W_+ es una hipersuperficie convexa de C . Por lo tanto, la métrica por trayectorias inducida en W_+ por la estructura Riemanniana de \widetilde{M} es isométrica a la restricción a d_C . \square

Proposición 49. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . La inclusión $(W_{\pm}, d_{W_{\pm}}) \hookrightarrow (W, d_W)$ es un encaje bi-Lipschitz y una casi-isometría.*

Demostración. Por definición de la métrica inducida, la inclusión $i : W_{\pm} \hookrightarrow W$ es 1-Lipschitz. Este mapeo induce un isomorfismo en los grupos fundamentales, entonces por el Lema de Milnor-Svarč i es una casi-isometría. Así, i es un encaje bi-Lipschitz a gran escala, i.e. existen constantes $b \geq 0$, $c \geq 1$ tales que si $d_{W_{\pm}}(x, y) \geq b$ entonces $d_{W_{\pm}}(x, y) \leq c \cdot d_W(x, y)$.

Solo nos falta analizar el caso de que $0 \leq d_{W_{\pm}}(x, y) \leq b$. Sea T el subconjunto de $W_{\pm} \times W_{\pm}$ definido por la desigualdad $0 \leq d_{W_{\pm}}(x, y) \leq b$. Sea Z una pieza de M y sea S una infranil variedad de su frontera. Entonces, \widetilde{S} es homeomorfo a W_+ y W_- . Consideremos la siguiente acción de $\pi_1(S)$ en T :

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(S) \times T &\rightarrow T \\ (g, (p, s_W(p))) &\mapsto (gp, s_W(gp)) \end{aligned}$$

Entonces, T es invariante bajo esta acción y el espacio cociente $T/\pi_1(S)$ es compacto. Definimos la función $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para cada par } (p, s_W(p)) \in (W_+, W_-), \\ d_{W_{\pm}}(x, y)/d_W(x, y) & \text{si } (x, y) \in T \setminus \{(p, s_W(p)) \mid p \in W_+ \text{ y } s_W(p) \in W_-\} \end{cases}$$



Esta función es una función continua y positiva, por la compacidad de $T/\pi_1(S)$ entonces la función f está acotada por abajo para alguna constante c' . Si $C = \max\{c, c'\}$, entonces la inclusión i es C -bi-Lipschitz y concluimos la prueba. \square

3.2 Geometría de espacios relativamente hiperbólicos

Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . Sean W_{\pm} una pared delgada y $x, y \in W_{\pm}$. Sea γ una trayectoria que conecta a x con y en \tilde{M} . Decimos que γ es una **curva sin retroceso** en W_{\pm} si γ solo interseca en sus puntos finales a la pared que contiene a W_{\pm} .

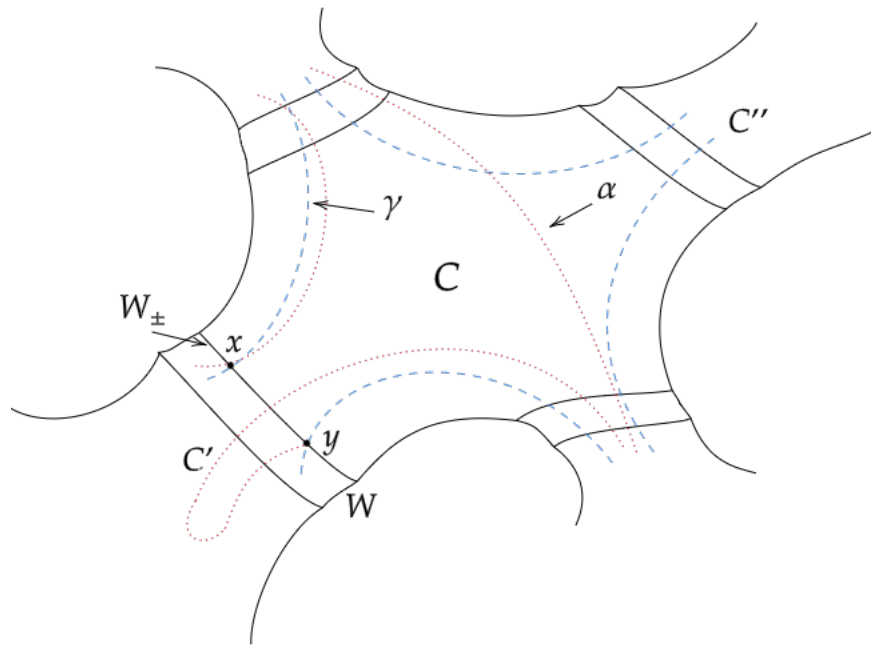


Figura 3.2: La geodésica γ es un ejemplo de una geodésica sin retroceso, mientras que la geodésica α es un ejemplo de una geodésica con retroceso.

La siguiente proposición es una consecuencia del Lema 3.2 de [25] y la prueba es la misma que la de la Proposición 7.4 de [15].



Proposición 50. *Sea V una variedad localmente simétrica, completa, de volumen finito, no compacta, conexa, de curvatura negativa y dimensión $n \geq 3$ y sea Z una variedad de cúspides acotadas con horofrontera. Entonces, existe una constante λ que solo depende de la geometría de Z tal que lo siguiente es cierto. Sea $\gamma \subseteq Z$ un lazo obtenido por concatenar un número finito de trayectorias $\alpha_1, \gamma_1, \dots, \alpha_n, \gamma_n$, donde*

- *Cada α_i es una geodésica en una horoesfera $S_i \subseteq \partial Z$.*
- *Cada γ_i es una trayectoria en Z que conecta el punto final de α_i con el punto inicial de α_{i+1} .*
- *Los puntos finales de cada γ_i están en distintas paredes.*

Sea $\Lambda \subseteq \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de índices distinguidos tales que $S_k \neq S_i$ para todo $k \in \Lambda, i \in \{1, \dots, n\}, i \neq k$. Entonces,

$$\sum_{k \in \Lambda} L(\alpha_k) \leq \lambda \cdot \sum_{i=1}^n L(\gamma_i).$$

3.3 Encajes casi-isométricos de paredes y cámaras

Decimos que γ es **minimal**, si para cada cámara C , el conjunto $\gamma \cap \overset{\circ}{C}$ es una colección finita de trayectorias y cada una de estas conecta distintas paredes de C . Más aún, decimos que γ es **buena** si es minimal y para cada pared delgada W_{\pm} contenida en C , hay a lo más dos puntos finales de trayectorias en $\gamma \cap \overset{\circ}{C}$ que pertenecen a W_{\pm} . Otra caracterización que nos será de utilidad de las trayectorias buenas es la siguiente. Sea W_{\pm} una pared delgada contenida en una pared W . Una trayectoria $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \widetilde{M}$ decimos que es **externa** a W_{\pm} si $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \in W_{\pm}$ y $\gamma|_{(t_0, t_1)}$ tiene soporte en $\widetilde{M} \setminus W$. Sea γ una trayectoria minimal y sea n el número de subtrayectorias externas de γ en W_{\pm} , el **número excedente** de γ en W_{\pm} se define como $\max\{0, n - 1\}$. El número excedente $e(\gamma)$ de γ se define como la suma sobre todas las paredes delgadas de los números excedentes de γ . Denotemos por $j(\gamma)$ a la suma sobre todas las cámaras de \widetilde{M} del número de componentes conexas de $\gamma \cap \overset{\circ}{C}$. Una trayectoria γ es buena si es minimal y $e(\gamma) = 0$.



Lema 51. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . Sean $x, y \in W \subset \widetilde{M}$ dos puntos en la misma pared y sea $\beta \geq 1$. Sea D la constante eléctrica del Lema 15. Si $d(x, y) \leq D$ entonces existe una trayectoria buena $\gamma \in \widehat{M}$ de x a y tal que $L(\gamma) \leq \beta d(x, y)$.*

Demostración. Consideremos el conjunto de pares $(x, y) \in W$ tales que $d(x, y) \leq D$. Este conjunto es un conjunto compacto. Ahora, tomemos trayectorias buenas γ_{xy} para cada uno de estos pares. Observemos que el mapeo $(x, y) \mapsto L(\gamma_{xy})$ es continuo y compacto, entonces este mapeo está acotado.

Así, para cada par x, y existe una constante β_{xy} tal que $L(\gamma_{xy}) \leq \beta_{xy} d(x, y)$. Si β es el máximo sobre todos los β_{xy} , obtenemos el resultado. \square

Proposición 52. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . Sean x, y puntos en la misma pared de \widetilde{M} . Entonces, existe una constante $\beta \geq 1$ que depende únicamente de la geometría de \widetilde{M} , tal que lo siguiente se cumple. Existe una trayectoria buena γ en \widehat{M} que conecta x con y y tal que $L(\gamma) \leq \beta \cdot d(x, y)$.*

Demostración. Sea \widehat{M} el espacio eléctrico asociado a M . Recordemos que R es la distancia entre cualesquiera dos horoesferas que fueron borradas de V . Por el Lema 12, sabemos que las horoesferas están visualmente acotadas. Sea $\Delta > 0$ una constante tal que cada componente horoesférica de cada Z_i está visualmente acotado por $\Delta/2$.

Sea γ_0 una geodésica que une a x con y en \widetilde{M} . Como las paredes delgadas son convexas, entonces cada geodésica en \widetilde{M} es minimal, es decir γ_0 es minimal.

Lo que queremos es modificar una trayectoria minimal γ_i con $e(\gamma_i) > 0$ por una nueva trayectoria minimal γ_{i+1} de tal forma que $j(\gamma_{i+1}) < j(\gamma_i)$ y $L(\gamma_{i+1}) \leq L(\gamma_i) + K$, donde K es una constante positiva. Como $j(\gamma_0) \leq L(\gamma_0)/R = d(x, y)/R$ entonces después de a lo más $d(x, y)/R$ pasos, vamos a obtener una nueva trayectoria minimal γ tal que $e(\gamma) = 0$.

Para la siguiente construcción, la figura 3.3 contiene la notación y ejemplifica el proceso. Supongamos que tenemos subtrayectorias externas $\alpha_1 = [x_1, y_1]$ y $\alpha_2 = [x_2, y_2]$ de γ_i , contenidas en el interior de C , y tales que $x_1, y_1, x_2, y_2 \in W_{\pm}$ donde W_{\pm} es una pared delgada de la cámara C . Vamos a escoger dos puntos $z_1, z_2 \in \gamma_i \cap \overset{\circ}{C}$ de tal forma



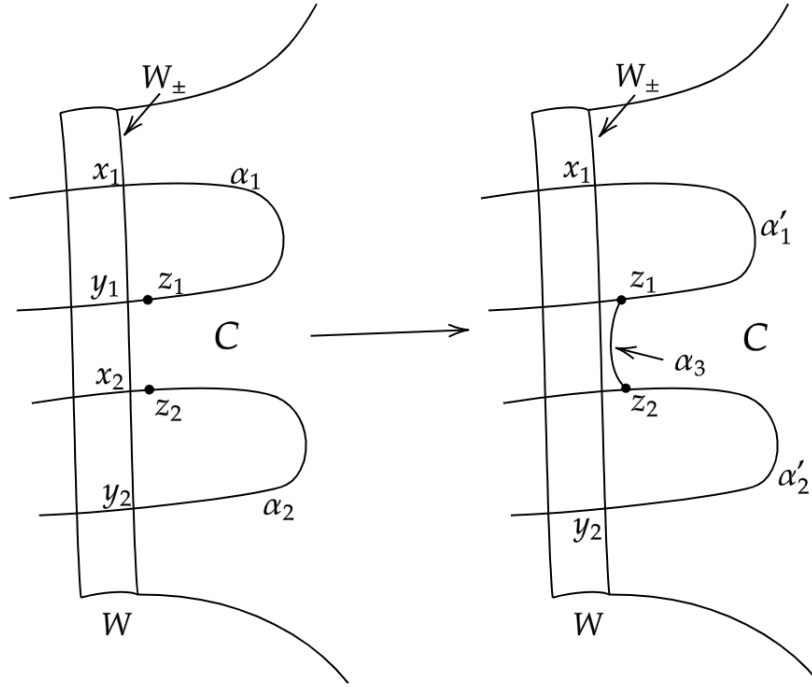


Figura 3.3: Construcción de una trayectoria buena entre los puntos x_1 y y_2 que pasa por los puntos z_1 y z_2 , Proposición 52.

que $L([z_1, y_1]) < 1/2$ y $L([x_2, z_2]) < 1/2$. La nueva trayectoria γ'_{i+1} se construye como sigue. Primero, consideremos la subtrayectoria $\alpha'_1 = [x_1, z_1]$, después sigamos sobre la trayectoria α_3 en \mathring{C} que va de z_1 a z_2 pero de tal forma que $L([z_1, z_2]) < \Delta + 1$, por último sigamos sobre la subtrayectoria $\alpha'_2 = [z_2, y_2]$.

La trayectoria γ'_{i+1} satisface que $j(\gamma'_{i+1}) = j(\gamma_i) - 1$ y que el número excedente es igual a cero. Entonces, tenemos una trayectoria buena entre los puntos x_1 y y_2 . Por el Lema 51, existe una constante $\beta(\Delta/2)$, tal que $L(\gamma'_{i+1}) \leq \beta(\Delta/2) \cdot d(x_1, y_2)$.

Este procedimiento se debe llevar a cabo con todas las subtrayectorias externas γ_i . Así, después de realizar todos estos reemplazos de trayectorias buenas, vamos a terminar con una trayectoria buena que satisface la condición deseada. \square

Lema 53. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . Sea $W \subseteq \widetilde{M}$ una pared fija, x, y puntos en W_{\pm} , y C la cámara que contiene a x, y . Supongamos que existe una constante $\alpha \geq 1$ tal que si x, y se pueden unir por una trayectoria*



sin retroceso γ en \widetilde{M} entonces

$$d_C(x, y) \leq \alpha \cdot L(\gamma).$$

Por lo tanto, la inclusión de W en \widetilde{M} es un encaje bi-Lipschitz.

Demostración. Como la inclusión de $(W, d_W) \hookrightarrow \widetilde{M}$ es 1-Lipschitz, solo necesitamos probar que existe una constante $k \geq 1$ tal que para todo $p, q \in W$ se cumpla que $d_W(p, q) \leq k \cdot d(p, q)$. Por la Proposición 52, existe una trayectoria buena γ que une a p y q de tal forma que $\beta \geq 1$, $L(\gamma) \leq \beta d(p, q)$.

Sea m el número de cámaras adyacentes a W cuyo interior interseca a γ .

Vamos a renombrar a las siguientes subtrayectorias de γ como sigue:

1. Para $i = 1, \dots, m$, sea γ_i^W una trayectoria contenida en W .
2. Para $i = 1, \dots, m$, sea $\gamma_i^{W_\pm}$ una trayectoria buena sin retroceso en W_\pm con puntos finales en las paredes delgadas W_\pm .

Usando esta descomposición vamos a descomponer a γ de la siguiente forma:

$$\gamma = \gamma_1^W \gamma_1^{W_\pm} \dots \gamma_m^W \gamma_m^{W_\pm} \gamma_{m+1}^W.$$

Sea C una cámara adyacente a W . Lo que queremos es reemplazar a las trayectorias $\gamma_i^{W_\pm}$ por trayectorias η_i en C de tal forma que la longitud total de la curva obtenida no exceda $\alpha \cdot L(\gamma)$.

Sean W_1, W_2 dos paredes diferentes de W y adyacentes a C . Como $\gamma_i^{W_\pm}$ es una trayectoria buena entonces existen subtrayectorias de $\gamma_i^{W_\pm}$ que conectan paredes diferentes y que además solo cruzan a las paredes en dos puntos.

En la Figura 3.4 se ilustra la siguiente construcción. Sean p', q' los puntos finales de la trayectoria $\gamma_1^{W_\pm}$. Supongamos que $\gamma_{1,1}^{W_\pm}$ es la subtrayectoria de $\gamma_1^{W_\pm}$ que conecta W con W_1 y $\gamma_{1,2}^{W_\pm}$ es la subtrayectoria de $\gamma_1^{W_\pm}$ que conecta W_1 con W_2 . Sea p_1 el punto de $W_{1,\pm}$ donde $\gamma_{1,1}^{W_\pm}$ cruza $W_{1,\pm}$ y sea q_1 el punto de $W_{1,\pm}$ donde $\gamma_{1,2}^{W_\pm}$ cruza $W_{1,\pm}$. Sea η_{p_1, q_1}^C la geodésica dentro de C entre p_1 y q_1 . Con este procedimiento estamos cortando las trayectorias dentro de W_1 y las estamos reemplazando por una trayectoria contenida en



C de tal forma que la longitud de la nueva trayectoria sea menor a k veces la longitud de la trayectoria dentro de W_1 , para alguna constante positiva k . Ahora, solo tenemos que repetir este procedimiento para todas las trayectorias $\gamma_{1,i}^{W_\pm}$ de $\gamma_1^{W_\pm}$ entre el resto de paredes adyacentes a C . Sea η_1 la trayectoria construida como sigue. Empecemos en p' y sigamos a través de la subtrayectoria de $\gamma_{1,1}^{W_\pm}$ entre p' y p_1 , después en p_1 cambiemos a la trayectoria η_{p_1,q_1}^C y repitamos este procedimiento hasta regresar a q' . La trayectoria η_1 entre p' y q' es una trayectoria completamente contenida en C y por hipótesis su longitud está acotada por $\alpha_1 \cdot L(\gamma_1^{W_\pm})$. Repitamos este procedimiento para todas las

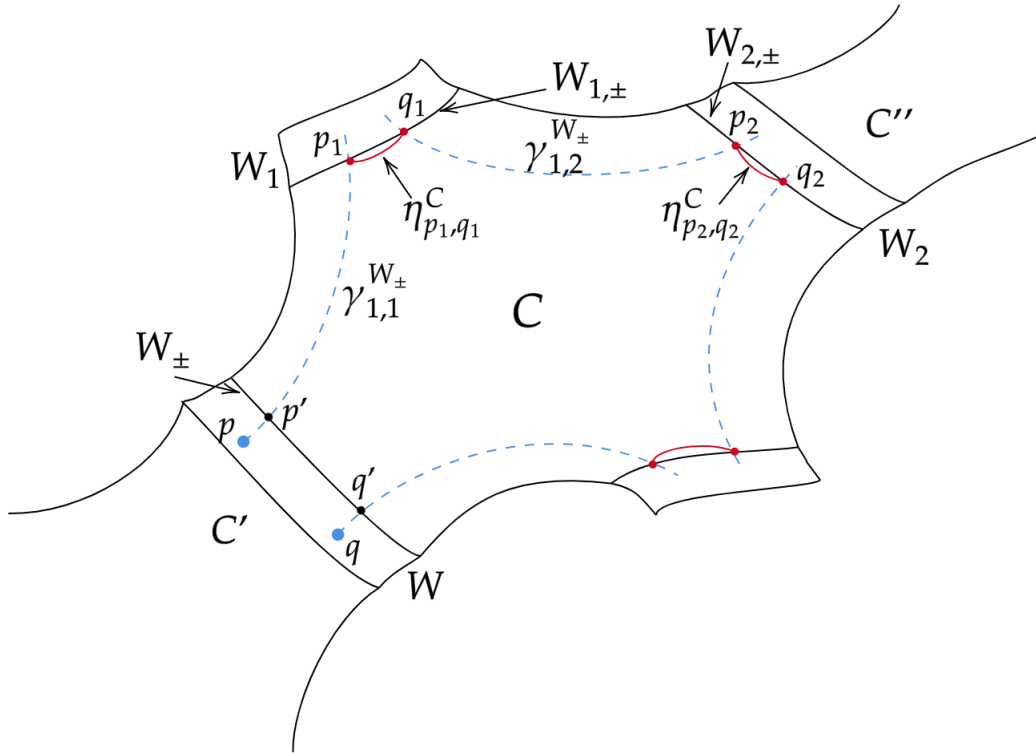


Figura 3.4: En esta figura ilustramos como las trayectorias η_{p_i,q_i}^C reemplazan a las trayectorias γ_i^W por trayectorias dentro de C . Con la misma notación que en el Lema 53, los puntos p', q' están sobre W_\pm y los puntos p_i, q_i están en las paredes delgadas $W_{i,\pm}$. Las trayectorias $\gamma_{i,j}^\pm$ son trayectorias buenas que unen las paredes delgadas $W_{i,\pm}, W_{j,\pm}$ y pasan por los puntos p_{i+1}, q_i .

trayectorias $\gamma_i^{W_\pm}$ en γ . Después de reemplazar todas las curvas, la curva resultante



$\eta = \gamma_1^W \eta_1 \dots \gamma_m^W \eta_m \gamma_{m+1}^W$ tiene longitud menor que $\alpha \cdot L(\gamma)$. Más aún, tenemos que

$$d_W(p, q) \leq L(\eta) \leq \alpha \cdot L(\gamma)$$

Si $k = \alpha \cdot \beta$ entonces hemos demostrado que $d_W(p, q) \leq k \cdot d(p, q)$. \square

Como una consecuencia de los resultados anteriores, vamos a probar que los encajes de cámaras y paredes \widetilde{M} son bi-Lipschitz.

Lema 54. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n y sea $W \subseteq \widetilde{M}$ una pared. Entonces la inclusión de $(W, d_W) \hookrightarrow \widetilde{M}$ es un encaje bi-Lipschitz. En particular, es un encaje casi-isométrico. Más aún, la constante bi-Lipschitz del encaje depende solo de la geometría de \widetilde{M} .*

Demostración. Sea W_+ una pared delgada de W y C la cámara que contiene a W_+ . Sean p, q dos puntos en W_+ . La Proposición 52 nos garantiza que existe una trayectoria buena γ en \widetilde{M} que une a p, q y sin retroceso en W_+ . Por el Lema 53, solo nos falta probar que existe una constante $\alpha \geq 1$ que solo depende de la geometría de \widetilde{M} y tal que la siguiente condición se cumple:

$$d_C(p, q) \leq \alpha \cdot L(\gamma).$$

Notemos que $d_C(p, q)$ es la métrica por trayectorias en C , y por definición es el ínfimo sobre todas las trayectorias que unen a p, q así, si $\alpha = 1$ tenemos el resultado deseado. \square

Proposición 55. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n , entonces la inclusión de cámaras en \widetilde{M} es un encaje bi-Lipschitz.*

Demostración. Sean p, q puntos en la cámara $C \in \widetilde{M}$ y sea γ una geodésica de p a q . Podemos descomponer a γ como sigue. Sean γ_i geodésicas en C y sean $p_i, q_i \in W_{i,+}$ los puntos finales de trayectorias η_i donde $W_{i,+}$ es una pared delgada adyacente a C . Así, podemos escribir a γ como sigue:

$$\gamma = \gamma_1 \eta_1 \dots \gamma_n \eta_n \gamma_{n+1}.$$



Por el Lema 53, existen una constante $a \geq 1$ tal que $d_{W_i}(p_i, q_i) \leq a \cdot d(p_i, q_i)$. Entonces $d_{W_{i,+}}(p_i, q_i) \leq a \cdot d(p_i, q_i)$. Podemos reemplazar cada η_i por una trayectoria $\eta'_i \in W_{i,+}$ con los mismos puntos finales que η_i pero de tal forma que su longitud sea menor que $a \cdot d(p_i, q_i)$. Así, la nueva trayectoria $\gamma' = \gamma_1 \eta'_1 \dots \gamma_n \eta'_n \gamma_{n+1}$ está completamente contenida en C y tiene longitud a los más $a' \cdot d(p, q)$. Por lo tanto, $d_C(p, q) \leq a' \cdot d(p, q)$. \square

Teorema 56. *Sea M una variedad con descomposiciones cuspidales de dimensión n . Entonces, las inclusiones de cámaras y paredes (con su métrica por trayectorias) en \widetilde{M} son encajes casi-isométricos.*

Demostración. El Lema 48 implica que $C, W \hookrightarrow \widetilde{M}$ son encajes isométricos. Por el Lema 54 y la Proposición 55 tenemos que $C, W \hookrightarrow \widetilde{M}$ son encajes bi-Lipschitz. Por lo tanto, cámaras y paredes se encajan casi-isométricamente en \widetilde{M} . \square



Capítulo 4

Acciones acilíndricas

La primera definición de acción k -acilíndrica en un árbol se debe a Sela [27]. Las definiciones que se presentan en este capítulo siguen la notación de Frigerio, Lafont y Sisto [15] y Cerocchi y Sambusetti [9], [10].

Sea M una variedad de gráficas como en la definición 1, y sean Z_i, Z_j un par de piezas adyacentes de M no necesariamente distintas. Decimos que dos piezas tienen **fibras transversas** a lo largo de una pared interna común W si bajo el difeomorfismo de pegado $\psi : W_i \rightarrow W_j$ del par de componentes frontera de W , la imagen de $\pi_1(N_i)$ bajo ψ_* interseca a $\pi_1(N_j)$ solo en el grupo trivial $\{0\}$, es decir

$$\psi_*(\pi_1(N_i)) \cup \pi_1(N_j) = \{0\}$$

Sea G un grupo actuando por automorfismos y sin inversión de aristas en un árbol simplicial T . Para $g \in G$, definimos la **longitud de traslación** como

$$\tau(g) = \inf_{v \in T} d_T(v, gv).$$

Donde d_T denota la distancia simplicial en T . Un elemento $g \in G$ se llama **elíptico** si $\tau(g) = 0$, en caso contrario se llama **hiperbólico**. Denotemos por T_G al subárbol minimal de T que es G -invariante. Una acción de G es **elíptica** si T_G es un punto y es **hiperbólica** si T_G es una línea. En ambos casos, la acción G se llama **elemental**.

Al conjunto de puntos fijos de un elemento elíptico g lo denotamos por $\text{Fix}(g)$. Una acción sin inversión de aristas se dice que es k -**acilíndrica** si el conjunto $\text{Fix}(g)$ tiene diámetro menor o igual a k para cualquier elemento elíptico $g \in G$.

La acción de $\pi_1(\mathcal{G})$ es K -acilíndrica si existe una constante K tal que cualquier elemento que fija punto a punto una trayectoria en T de longitud $\geq K$ es trivial. Se dice que la acción es acilíndrica si es K -acilíndrica para alguna $K \geq 0$.

La prueba del siguiente Lema es una consecuencia del Lema 34.

Lema 57. *Sea M una variedad de gráficas de dimensión superior, cerrada, orientable, lisa (como en la Definición 1) y sea T el árbol de Bass-Serre correspondiente a la descomposición de M en piezas. Sean e_1, e_2 dos aristas distintas de T que comparten el vértice v . Supongamos que existe un elemento $g \in \pi_1(M)$ tal que $g(e_i) = e_i$ para $i = 1, 2$. Entonces g es un elemento que corresponde a la dirección de la fibra en G_v .*

Demostración. Sea C_v la cámara en \widetilde{M} que corresponde al vértice v en T . Como e_1, e_2 son dos aristas en T adyacentes a v , entonces esas dos aristas corresponden a dos componentes frontera diferentes de C_v . Como g fija a las dos aristas entonces g también fija a los dos componentes frontera y por lo tanto fija también a la cámara C_v . Es decir, g está en G_v . □

Proposición 58. *Con la misma notación del Lema anterior, la acción de $\pi_1(M)$ en el árbol de Bass-Serre T es 2-acilíndrica.*

Demostración. Supongamos que existe una trayectoria $P_k \in T$ de longitud k y tal que un elemento no trivial $g \in \pi_1(M)$ fija P_k punto a punto.

Sean e_i, e_{i+1} dos aristas adyacentes de P_k y sea v_i su vértice común. Como g fija a e_i y a e_{i+1} entonces g está contenido en el estabilizador G_{e_i} de e_i , y en el estabilizador $G_{e_{i+1}}$ de e_{i+1} . Por los Lemas 34 y 35, sabemos que si H es un estabilizador de una pared \widetilde{W} en \widetilde{M} , entonces \widetilde{W} es la única pared estabilizada por H . Por lo tanto, si g es un elemento no trivial de $\pi_1(M)$ entonces g no puede estar contenido en ambos G_{e_i} y $G_{e_{i+1}}$. Así, podemos concluir que g debe ser el elemento trivial, es decir la acción es 2-acilíndrica. □



Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la rigidez de las variedades de gráficas en diferente sentido. En el capítulo 2, probamos que para las variedades de gráficas definidas como en la Definición 1, un isomorfismo entre los grupos fundamentales de dos variedades de gráficas preserva la descomposición en piezas, Teorema 29. La prueba de este resultado se basa en estudiar las propiedades de cámaras y paredes que conforman el cubriente universal y su relación con el árbol de Bass-Serre. Tam Nguayen Pham probó este resultado para las variedades con descomposiciones cuspidales [31, Lemma 7,8].

En el capítulo 3, estudiamos otro tipo de problema de rigidez para lo cual restringimos nuestro estudio a las variedades con descomposiciones cuspidales, las cuales son un caso particular de las variedades de gráficas antes mencionadas. En el teorema principal de este capítulo, probamos que las inclusiones de cámaras y paredes en el cubriente universal son encajes casi-isométricos. Para probar este resultado, estudiamos su espacio eléctrico asociado, así como las propiedades del grupo fundamental de ser relativamente hiperbólico con respecto a los subgrupos de cúspides.

En el caso de las variedades de gráficas de dimensiones superiores, este problema sigue abierto. Un proyecto a futuro en esta dirección es generalizar este resultado para las variedades de gráficas. Parte importante de la prueba de este resultado de rigidez para las variedades con descomposiciones cuspidales recae en el estudio del espacio eléctrico. Un problema a futuro es generalizar esto para el estudio de las variedades de gráficas de dimensiones superiores.

Uno de los problemas de interés en varias áreas ha sido la clasificación de objetos. En este sentido, Behrstock, Januszkiewicz y Neumann estudiaron el problema de clasificación bajo casi-isometría para variedades de gráficas de dimensiones superiores y obtuvieron avances para los grupos de Artín de ángulo recto [3]. Este problema lo estudiaron desde la bisimilitud de gráficas etiquetadas y coloreadas. En correspondencia con Behrstock, él mencionó que el Teorema 47 es un avance en esta dirección y propone estudiar la bisimilitud de las gráficas asociadas a los cubrientes universales para continuar con esta clasificación.

En el capítulo 4, estudiamos el concepto de acilindricidad, el cual es usado para probar escisiones de grupos. En este caso, probamos que la acción del grupo fundamental es 2-acilíndrica. Cerocchi y Sambusetti en [9, Theorem 1] dan unas cotas de la entropía en términos de la acilindricidad de una acción en un árbol y de la dimensión del conjunto generador del grupo. Como trabajo en proceso está el probar este resultado para las variedades de gráficas de dimensiones superiores usando el hecho que se probó en el capítulo 4, que la acción del grupo fundamental es 2-acilíndrica y ver que sucede en el caso de las variedades con descomposiciones cuspidales.



Índice alfabético

- H_λ —componente, 9
 - aislada, 9
 - conexa, 9
- H_λ —conector, 9
- H_λ —sílabas, 8
- H_λ —subpalabra, 8
- H_λ —subtrayectoria, 8
- k —acilíndrica, 52
- árbol
 - de Bass-Serre, 26
 - de espacios, 26
- área relativa, 9
- acción
 - elíptica, 52
 - elemental, 52
 - hiperbólica, 52
- cámara, 26, 42
- casi-geodésica
 - sin retroceso, 14
- casi-isométrico
 - encaje, 19
- casi-isométricos
 - espacios, 19
- casi-isometría, 19
- collar Riemanniano, 3
- conjunto
 - generador relativo, 7
 - simétrico, 7
- crecimiento
 - exponencial, 21
 - tipo de, 22
 - uniformemente, 22
- intermedio, 21
- polinomial, 21
- subexponencial, 22
- curva sin retroceso, 44
- diagrama de van Kampen, 8
- dimensión cohomológica virtual, 16
- distancia visual, 13
- eléctrica
 - geodésica, 13
 - longitud, 13
 - P-casi-geodésica, 13
 - trayectoria, 13
- elemento
 - elíptico, 52
 - hiperbólico, 52
- espacio

- δ -hiperbólico, 5
- eléctrico, 12
- etiqueta, 8
- fibra
 - dirección de la, 29
- Fibras transversas, 52
- fin, 3
 - parabólico, 3
- finitamente generado, 18
- función
 - de Busemann, 1
 - de crecimiento, 20
 - de Dehn, 10
 - de desplazamiento, 2
 - isoperimétrica relativa, 10
 - propia, 2
- geodésicas asintóticas, 1
- gráfica
 - de grupos, 16
- gráfica de Cayley, 5
 - cono, 6, 12
- grupo
 - finitamente presentado relativo a, 8
 - hiperbólico realtivo a, 11
 - libre, 18
 - nilpotente, 15
 - relativamente hiperbólico, 6
 - soluble, 15
- horobolas, 2
- horoesfera, 2
- inversión, 16, 26
- isometría, 2
 - elíptica, 2
 - hiperbólica, 2
 - parabólica, 2
- longitud
 - de Hirsch, 15
- longitud de traslación, 52
- número excedente, 45
- palabra
 - longitud de la, 18
 - métrica de la, 19
 - reducida, 18
- pared, iv, 25, 26, 42
 - delgada, 42
- pieza, iv, 25
 - de superficie, 33
 - pura, iv, 25
- policíclico, 15
- presentación
 - relativa, 7
 - relativa reducida, 9
- producto libre, 18
- puntas, 3
- puntos al infinito, 1
- rayo, 2
- retícula, 2



- irreducible, 2
 - no uniforme, 2
 - reducible, 2
 - uniforme, 2
- serie
- abeliana, 15
 - central, 15
 - de crecimiento, 20
- subtrayectoria, 8
- trayectoria
- buena, 45
 - externa, 45
 - irreducible, 8
 - minimal, 45
- triángulo
- δ -delgado, 4
- Variedad
- de Hadamard, 1
 - irreducible, 2
 - reducible, 2
- variedad
- con descomposiciones cuspidales, 41
 - de cúspides acotadas con horofrontera,
41
 - de visibilidad, 3
- Variedad de Gráficas, iv, 25



Bibliografía

- [1] ARAVINDA, C. S., & FARRELL, F. T., *Twisted doubles and nonpositive curvature*. Bulletin of the London Mathematical Society, 41(6), 1053-1059 (2009).
[v](#)
- [2] BÁRCENAS, N., JUAN-PINEDA, D., & SUÁREZ-SERRATO, P., *Topological rigidity of higher graph manifolds*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 23(1), 119-127 (2017). [iv](#), [v](#), [24](#), [25](#)
- [3] BEHRSTOCK, J., JANUSZKIEWICZ, T. & NEUMANN, W. D., *Quasi-isometric classification of some high dimensional right-angled Artin groups*. Groups Geom. Dyn. 4, no. 4, 681–692 (2010). [vii](#), [55](#)
- [4] BOWDITCH, B. H. *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Acta Math. 180, 145–186 (1998). [vii](#)
- [5] BOWDITCH, B. H. *Group actions on trees and dendrons*. Topology 37, 1275–1298 (1998). [vii](#)
- [6] BOWDITCH, B. H. *Treelike Structures Arising from Continua and Convergence Groups*. Mem. Amer. Math. Soc. 139, A. M. S., Providence, RI (1999). [vii](#)
- [7] BRIDSON, M. R., & HAEFLIGER, A. (2013). *Metric spaces of non-positive curvature* (Vol. 319). Springer Science & Business Media.
- [8] BROWN, K. S., *Cohomology of groups* (Vol. 87) Springer Science & Business Media (2012). [16](#)

- [9] CEROCCHI, F., & SAMBUSETTI, A. *Entropy and finiteness of groups with acylindrical splittings*. arXiv preprint arXiv:1711.06210. (2017) [52](#), [55](#)
- [10] CEROCCHI, F., & SAMBUSETTI, A. *Local topological rigidity of nongeometric 3-manifolds*. *Geometry & Topology*, 23(6), 2899–2927 (2019). [52](#)
- [11] CONNELL, C., & SUÁREZ-SERRATO, P., *On higher graph manifolds*. *International Mathematics Research Notices*, 2019(5), 1281–1311 (2019). [v](#), [25](#)
- [12] CONTRERAS-PERUYERO, H., *Sobre la geometría y topología de las variedades de gráficas.*, Master Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México (2016).
<http://132.248.9.195/ptd2016/agosto/0749031/Index.html> [17](#), [23](#)
- [13] EBERLEIN, P., *Lattices in spaces of nonpositive curvature*. *Annals of Mathematics*, 111(3), 435-476 (1980). [3](#), [17](#), [28](#)
- [14] FARB, B., *Relatively hyperbolic groups*. *Geometric and functional analysis*, 8(5), 810-840 (1998). [viii](#), [4](#), [6](#), [12](#), [13](#), [14](#), [43](#)
- [15] FRIGERIO, R., LAFONT, J.-F., & SISTO, A., *Rigidity of high dimensional graph manifolds*. *Astérisque*, 372 (2015). [iv](#), [vii](#), [viii](#), [24](#), [35](#), [38](#), [41](#), [44](#), [52](#)
- [16] GROMOV, M. *Groups of polynomial growth and expanding maps*. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 53(1), 53-78 (1981). [28](#)
- [17] DE LA HARPE, P., *Topics in geometric group theory*. University of Chicago Press (2000). [19](#), [39](#)
- [18] DE LA HARPE, P., & BUCHER, M., *Free products with amalgamation and HNN-extensions of uniformly exponential growth*. *Mathematical Notes*, 67(6), 686-689 (2000). [23](#)
- [19] HEINTZE, E., & IM HOF, H. C., *Geometry of horospheres*. *Journal of Differential Geometry*, 12(4), 481-491 (1977). [1](#), [4](#)



- [20] KAPOVICH, M., & LEEB, B. *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*. Geometric & Functional Analysis GAFA, 5(3), 582-603 (1995). [vii](#)
- [21] KAPOVICH, M., & LEEB, B. *Quasi-isometries preserve the geometric decomposition of Haken manifolds*. Inventiones mathematicae, 128(2), 393-416 (1997). [vii](#)
- [22] LÖH, C. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Springer International Publishing AG (2017).
- [23] PAPASOGLU, P., *Quasi-isometry invariance of group splittings*. Annals of mathematics, 759-830 (2005). [vi](#)
- [24] PAPASOGLU, P., *Group splittings and asymptotic topology*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2007(602), 1-16 (2007). [vi](#)
- [25] OSIN, D. V., *Relatively hyperbolic groups: intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems*. Memoirs American Mathematical Society, 843 (2006). [viii](#), [4](#), [7](#), [9](#), [11](#), [44](#)
- [26] ROBINSON, D. J., *A Course in the Theory of Groups*, Vol. 80 (2012), Springer Science & Business Media. [15](#)
- [27] SELA, Z. *Acylindrical accessibility for groups*. Inventiones mathematicae, 129(3), 527-565 (1997). [52](#)
- [28] SERRE, J. P., *Trees*. Springer (1980). [v](#), [16](#), [26](#)
- [29] STALLINGS, J. R. *On torsion-free groups with infinitely many ends*. Annals of Mathematics, 312-334 (1968). [vi](#)
- [30] STALLINGS, J. *Group theory and three-dimensional manifolds*. Yale Math. Monographs, Yale Univ. Press, New Haven, 241(4) (1971). [vi](#)
- [31] TAM NGUYEN PHAN, T., *Smooth (non) rigidity of cusp-decomposable manifolds*. Commentarii Mathematici Helvetici, 87, 789-804 (2012). [v](#), [41](#), [54](#)



- [32] WALDHAUSEN F., *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. I. Inventiones Mathematicae, 3(4), 308-333 (1967). [iv](#)

