



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

COMPLEJOS SILTING DE N-TÉRMINOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
LUIS ARMANDO MARTÍNEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS  
OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
CHRISTOF GEISS HAHN, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS  
VALENTE SANTIAGO VARGAS, FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2021.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Introducción

## 0.1. Antecedentes

La teoría inclinante comenzó como una interpretación de los funtores de reflexión en la teoría de representaciones de módulos sobre un álgebra de dimensión finita  $A$ , introducidos por I. N. Bernstein, I. M. Gelfand y V. A. Ponomarev a principios de la década de 1970. Estos funtores fueron categorizados en la categoría de  $A$ -módulos finitamente generados  $\text{mod}(A)$ , por Brenner y Butler [BB80], mediante los módulos inclinantes. Cuando  $T$  es un módulo inclinante, se sabe que hay un par de torsión asociado  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ , donde  $\mathcal{T} = \text{gen}(T)$  es la clase de  $A$ -módulos generados por  $T$ ; y para  $B := \text{End}_A(T)^{op}$  hay 2 funtores fieles  $\text{Hom}_A(T, -) : \mathcal{T} \rightarrow \text{mod}(B)$  y  $\text{Ext}_A^1(T, -) : \mathcal{F} \rightarrow \text{mod}(B)$ . El resultado anterior puede verse como una generalización de la equivalencia de Morita (ver [Mo58]) que se recupera si  $T$  es un progenerador, este último es un módulo proyectivo que genera la categoría de módulos. El siguiente teorema de M. Hoshino y S. O. Smalø muestra la relación entre módulos inclinantes y ciertas clases de torsión.

**Teorema 0.1.1.** [Ho83, Sm84] *Para  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  *$\mathcal{T}$  es una clase de torsión funtorialmente finita e  $\text{inj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{T}$ , donde  $\text{inj}(\Lambda)$  es la clase de  $\Lambda$ -módulos inyectivos finitamente generados.*
- (b) *Existe un  $\Lambda$ -módulo inclinante  $T$  tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}(T)$ .*

En el caso de que  $\mathcal{T}$  sea una clase de torsión funtorialmente finita, en [AIR14], se demostró que hay un módulo  $\tau$ -inclinante de soporte  $M$  tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}(M)$ , donde  $\tau$  es la translación de Auslander-Reiten [AR75]. Además, dicha asignación define una biyección entre las clases de torsión funtorialmente finitas  $\text{f-tors}(\Lambda)$  y los módulos  $\tau$ -inclinantes de soporte  $\text{s}\tau\text{-tilt}(\Lambda)$ .

**Teorema 0.1.2.** [AIR14, Teorema 2.7] *Para  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin, existe una biyección  $\Phi : \text{s}\tau\text{-tilt}(\Lambda) \rightarrow \text{f-tors}(\Lambda)$ ,  $M \mapsto \text{gen}(M)$ , con inversa  $\mathcal{T} \mapsto \mathbb{P}(\mathcal{T})$ , donde  $\mathbb{P}(\mathcal{T})$  denota al módulo básico que es la suma directa de los  $\Lambda$ -módulos inescindibles Ext-proyectivos en  $\mathcal{T}$ .*

Muchos temas han utilizado la teoría inclinante como una herramienta fundamental para obtener resultados; dentro de estos destacan: álgebra homológica relativa de subfuntores del bifunctor  $\text{Ext}_\Lambda^1$  [ASII93], teoría sedimentada [AIR14] y álgebras estandardmente estratificadas [Ri91].

El estudio del álgebra homológica relativa sobre un álgebra de Artin  $\Lambda$ , se debe a Auslander y Solberg [AS93, ASII93], y ha sido muy útil para estudiar los módulos inclinante relativos usando módulos inclinante parciales y sus complementos [ASIII93]. En [AS93] y [ASII93], M. Auslander y Ø. Solberg encontraron métodos más generales que permiten la construcción de nuevas subcategorías que son homológicamente finitas; así como también, una generalización al contexto relativo de la teoría inclinante y coinclinante, dando nuevas relaciones entre álgebras.

La teoría de sedimentación es un tema que se originó en la teoría de representaciones de álgebras de Artin y es una extensión de la teoría inclinante mediante categorías trianguladas. Abarca métodos para estudiar equivalencias derivadas que se emplean ampliamente en muchas áreas de investigación [AH19]. El concepto de categoría triangulada, introducido por J. L. Verdier en [Ve96], ha sido muy útil para estudiar la categoría  $\text{mod}(\Lambda)$ . Esto se debe a que ciertas categorías trianguladas se vuelven bastante accesibles si se aplican los métodos de la teoría de representaciones [Ha88]. El ejemplo [Ha88] más famoso de una categoría triangulada es la categoría derivada  $D^b(\text{mod}(\Lambda))$  de cocomplejos acotados sobre  $\text{mod}(\Lambda)$  y pueden identificarse con la categoría homotópica  $K^{-,b}(\text{proj}(\Lambda))$  de cocomplejos que están acotados superiormente y tienen cohomología acotada sobre la clase  $\text{proj}(\Lambda)$  de  $\Lambda$ -módulos proyectivos finitamente generados. En [AIR14, Lema 3.4] se demuestra que un  $\Lambda$ -módulo  $M$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si, la resolución proyectiva minimal de  $M$  truncada brutalmente en grado  $-1$   $P_{\geq -1}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $K^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Es bien sabido, ver [F113, Teorema 3.9.7], que  $\text{Ext}_\Lambda^j(M, M) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_{K^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet(M), P^\bullet(M)[j]) = 0$ . Por lo que la resolución proyectiva minimal de  $M$   $P^\bullet(M)$  es presedimentado en  $K^b(\text{proj}(\Lambda))$  si, y sólo si,  $\text{Ext}_\Lambda^m(M, M) = 0 \forall m \in \mathbb{N}^+$ . Una aplicación de la teoría  $\tau$ -inclinante e inclinante es el siguiente resultado.

**Teorema 0.1.3.** *Para  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ , las siguientes condiciones se satisfacen.*

- [AIR14, Proposición 3.7]  *$M$  es  $\tau$ -inclinante si, y sólo si,  $P_{\geq -1}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $K^b(\text{proj}(\Lambda))$ .*
- [We13, Corolario 3.7]  *$M$  es inclinante si, y sólo si,  $P^\bullet(M)$  es sedimentado en  $K^b(\text{proj}(\Lambda))$ .*

Ahora, para completar la caracterización de los cocomplejos sedimentados de 2 términos, es necesario el concepto de pares  $\tau$ -inclinante de soporte. Este concepto está fuertemente relacionado con las álgebras de conglomerado ya que categorifica muchas de sus propiedades. Las álgebras de conglomerado fueron concebidas por S. Fomin y A. Zelevinsky en [FZ02], como una herramienta para estudiar la positividad total y las bases canónicas duales en la Teoría de Lie. Hablando informalmente, un álgebra de conglomerado  $A$  de rango  $n$  es un tipo de subanillo de  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A diferencia de la mayoría de los anillos conmutativos, un álgebra de conglomerado no tiene un conjunto explícito de generadores y relaciones. Dichos generadores y relaciones se definen recursivamente a partir de una semilla, que es un conjunto de  $n$  generadores llamados variables de conglomerado junto con una matriz de intercambio. A partir de la semilla y la matriz de intercambio, se utiliza un proceso iterativo, llamado mutación, para producir el resto de las variables de conglomerado. En particular,

cada variable de conglomerado nueva es un cociente de las variables de conglomerado iniciales. El álgebra de conglomerado es el subanillo de  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  generado por todas las variables de conglomerado. El conjunto de variables de conglomerado tiene estructura de complejo simplicial, llamado complejo de conglomerado. Los variables de conglomerado están relacionados entre sí por transformaciones birracionales (llamadas mutaciones) definidas de la siguiente forma: para cada conglomerado  $\mathbf{x}$  y cada variable de conglomerado  $x \in \mathbf{x}$ , existe otro conglomerado  $\mathbf{x}' := (\mathbf{x} - \{x\}) \cup \{x'\}$ , donde la nueva variable de conglomerado  $x'$  está determinada por la siguiente relación de intercambio  $xx' = y^+ M^+ + y^- M^-$ , donde  $y^+$  y  $y^-$  pertenecen a un semicampo de coeficientes y  $M^+$  y  $M^-$  son monomios en los elementos de  $\mathbf{x} - \{x\}$ . Una de las principales características de la mutación es que es idempotente. En la clase de álgebras de conglomerado, hay dos dinámicas en juego en las relaciones de intercambio: la de los monomios y la de los coeficientes, ambos codificados en la matriz de intercambio.

Otra utilidad de la teoría  $\tau$ -inclinante es el concepto de álgebra  $\tau$ -inclinante finita. En [DIJ17] se introdujo el concepto de álgebra  $\tau$ -rígida finita, la cual es una álgebra de Artin  $\Lambda$  tal que el conjunto de  $\Lambda$ -módulos  $\tau$ -rígidos inescindibles es finito. En dicho trabajo se probó el siguiente resultado que refleja su analogía con un resultado clásico para álgebras de tipo de representación finito [AR91, Proposición 1.2].

**Teorema 0.1.4.** [DIJ17, Teorema 3.1] *Para una  $R$ -álgebra de Artin  $\Lambda$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *El álgebra  $\Lambda$  es  $\tau$ -rígida finita.*
- (b) *Toda clase de torsión en  $\text{mod}(\Lambda)$  es funtorialmente finita.*
- (c) *Toda clase libre de torsión en  $\text{mod}(\Lambda)$  es funtorialmente finita.*

Por otro lado, T. Adachi y Y. Mizuno en [AM17] introdujeron la noción de categoría sedimentada discreta, la cual es una categoría triangulada  $\mathcal{T}$  tal que, para todo objeto presedimentado  $S \in \mathcal{T}$ , existe  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $S \oplus T$  es sedimentado en  $\mathcal{T}$ .

En otro tema, I. Agoston, V. Dlab y E. Lukacs introducen en [ADL98] a la clase de álgebras estandardmente estratificadas, con respecto a un orden lineal, que es una generalización de las llamadas álgebras casi-hereditarias. Una de las propiedades más interesantes de las álgebras estandardmente estratificadas es su conexión con la teoría inclinante, establecida por C. M. Ringel [Ri91], cuando estudiaba las propiedades homológicas de la categoría de los módulos  $\Delta$ -filtrados  $\mathcal{F}(\Delta)$  en un álgebra casi-hereditaria. Dada la importancia de los módulos estándar  $\Delta$ , K. Erdmann y C. Sáenz presentan en [ES03] una generalización de éstos introduciendo los sistemas estratificantes. Más adelante, E. Marcos, O. Mendoza y C. Sáenz presentan una caracterización de dichos sistemas, la cual recordamos a continuación.

**Definición 0.1.5.** [MMS04, Caracterización 1.6] *Sean  $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^n$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $\leq$  un orden lineal en  $[1, n] := \{1, 2, \dots, n\}$ . Decimos que el par  $(\Theta, \leq)$  es un **sistema estratificante de talla  $n$**  si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- (a)  $\text{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0 \quad \forall j > i;$

- (b)  $\text{Ext}_\Lambda^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0 \forall j \geq i$ ;
- (c)  $\Theta(i)$  es inescindible  $\forall i \in [1, n]$ .

Otro concepto a considerar, y en el cual muchos resultados y ejemplos se han inspirado en los temas anteriores, es el de subcategoría inclinante de  $n$ -conglomerado. A continuación se muestran algunas de sus aplicaciones:

- (a) Teorías altas de Auslander-Reiten. [IY08, Teorema 3.10] Si  $\mathcal{T}$  es una  $R$ -categoría de Artin y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$  es una subcategoría inclinante de  $n$ -conglomerado, que es una subcategoría funtorialmente finita y maximal respecto a ser  $n - 1$ -rígido, entonces todo objeto  $X \in \mathcal{T}$  admite un  $n + 2$ -ángulo de Auslander-Reiten.
- (b) Categorificación de  $m$ -conglomerados. [?] Si  $\mathcal{T}$  es la categoría de conglomerado, entonces los objetos inclinantes de 2-conglomerado son una categorificación de los 1-conglomerados.
- (c) Teoría  $\tau$ -inclinante. [AIR14, Teorema 4.1] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría de Artin 2-Calabi-Yau,  $X \in \mathcal{T}$  un objeto inclinante de 2-conglomerado y  $\Lambda := \text{End}_\tau(X)^{op}$ . Entonces, hay una biyección entre las subcategorías inclinantes de 2-conglomerado en  $\mathcal{T}$  y pares  $\tau$ -inclinantes de soporte en  $\text{mod}(\Lambda)$ .

## 0.2. Resumen de resultados de la tesis

Dentro de los resultados que desarrollamos en esta tesis, están las respectivas extensiones de algunos de los teoremas ya mencionados en la sección de antecedentes y algunas aplicaciones a la categoría de módulos.

El Capítulo 2 forma parte de un artículo de investigación [MM21], el cual se encuentra en proceso de revisión por una revista internacional con arbitraje. En dicho capítulo, motivados por algunas propiedades que cumplen las clases de torsión, presentamos el concepto de clases de torsión relativa a un subfunctor aditivo  $F$  de  $\text{Ext}_\Lambda^1$ . Una subcategoría  $\mathcal{T}$  es una clase de  $F$ -torsión si es cerrada por  $F$ -extensiones y  $F$ -cocientes. Este concepto, y su dual, generalizan la noción de par de torsión y tiene una interesante relación con los módulos inclinante relativos. El propósito de este capítulo es describir varias clases de  $F$ -torsión a través de módulos finitamente generados. También damos algunas generalizaciones de resultados clásicos en la teoría inclinante clásica y la teoría  $\tau$ -inclinante.

En la segunda sección, estudiamos cómo clasificar las clases de  $F$ -torsión que son  $F$ -preenvolventes a partir de los módulos  $F$ -inclinantes. También definimos los conceptos relativos a la clase de módulos generados por una subcategoría (ver 2.2.3) y módulo gen-minimal (ver 2.2.10). Uno de los resultados principales de dicho capítulo es una generalización de los presentados en [Ho83] y [Sm84].

**Teorema 0.2.1.** [Teorema 2.2.17] Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\text{add}(X)}$  el subfunctor aditivo del functor  $\text{Ext}_\Lambda^1$  cuyos módulos  $F$ -proyectivos es la subcategoría  $\text{add}(X \oplus \Lambda)$  y  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a)  $\mathcal{T}$  es una clase de  $F$ -torsión y  $F$ -preenvolvente.

(b) Existe  $T \in \text{mod}(\Lambda)$   $F$ -inclinante tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(T)$ .

Por otra lado, en el capítulo 2, también se intenta describir una familia más extensa de clases de  $F$ -torsión (clases de  $F$ -torsión preenvolventes), donde  $F := F_{\text{add}(X)}$ , con  $X$  un generador aditivo. La descripción anterior está hecha para el caso  $F := \text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$  en [AIR14, Teorema 2.7]. Por lo que necesitaremos las siguientes bases, las cuales introducimos a continuación. Para cada  $\Lambda$ -módulo  $M$ , fijamos una resolución  $F$ -proyectiva minimal de  $M$

$$\cdots \rightarrow P_{\mathbb{F}}^{-n}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-n}} P_{\mathbb{F}}^{-n+1}(M) \rightarrow \cdots \rightarrow P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(M) \xrightarrow{\pi_F^0} M \rightarrow 0.$$

Asociado a la resolución  $F$ -proyectiva minimal de  $M$ , tenemos el cocomplejo  $P^\bullet(M)$  en la categoría  $\mathcal{C}(\text{add}(X))$  que concuerda con dicha resolución en grado  $i \leq 0$  y se anula para los grados  $i > 0$ . Para cualquier cocomplejo  $X^\bullet \in \mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y cualquier entero  $n$ , tenemos el subcomplejo truncado  $X_{\geq n}^\bullet$  de  $X^\bullet$ , donde  $X_{\geq n}^i := X^i$  si  $i \geq n$  y  $X_{\geq n}^i := 0$  en los otros casos. De manera similar, tenemos el cocomplejo cociente truncado  $X_{\leq n}^\bullet$  de  $X^\bullet$ .

**Definición 0.2.2.** Sean  $M, X \in \text{mod}(\Lambda)$ , con  $X$  un generador aditivo y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Decimos que  $M$  es **F-sedimentado** (**F-presedimentado**) si  $P_{\mathbb{F}\geq -1}^\bullet(M)$  es sedimentado (presedimentado) en  $\mathcal{K}^b(\text{add}(X))$ .

Una propiedad de los módulos  $F$ -presedimentados es la siguiente: [Proposición 2.3.3 y Lema 2.2.9] Si  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $F$ -presedimentado, entonces  $\text{gen}_F(M)$  es una clase de  $F$ -torsión. Una desventaja es que si  $M$  es  $F$ -presedimentado se tiene que  $\text{gen}_F(M)$  no necesariamente es una clase preenvolvente (Ejemplo 2.3.11). Cabe destacar que esto no sucede para los módulos  $\tau$ -rígidos, como puede verse en el Lema 1.8.8. Por lo anterior, se necesitó introducir la definición de álgebra  $F$ -admisibles para atacar el problema. Decimos que el álgebra  $\Lambda$  es **F-admisibles** si,  $\forall M \in \text{mod}(\Lambda)$ ,  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(M, M) = 0$  implica que  $\text{Hom}_\Lambda(\pi_{\mathbb{F}}^{-2}, M) = 0$ . El siguiente resultado es otro de los resultados principales del capítulo 2 y es una generalización de [AIR14, Teorema 2.7], para el caso en que  $F := \text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ .

**Teorema 0.2.3.** [Teorema 2.3.19] Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo y  $F := F_{\text{add}(X)}$ , tal que  $\Lambda$  es  $F$ -admisibles. Consideremos las siguientes clases:

(a)  $\text{F-tor-preen}(\Lambda)$  cuyos elementos son las clases de  $F$ -torsión preenvolventes no nulas de  $\text{mod}(\Lambda)$ ;

(b)  $\text{F-presilt-esp}(\Lambda)$  cuyos elementos son las iso-clases  $[M]$ , con  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $F$ -presedimentado especial básico tal que  $\text{gen}_F(M)$  es preenvolvente.

Entonces, la aplicación  $[M] \mapsto \text{gen}_F(M)$  induce una biyección entre  $\text{F-tor-preen}(\Lambda)$  y  $\text{F-presilt-esp}(\Lambda)$ .

En el Capítulo 3, el cual es el tema de un artículo de investigación en proceso, presentamos la noción de módulo  $\tau_n$ -rígido y  $\tau_n$ -inclinante, con  $n \geq 2$ . Ésto con la finalidad de dar respuesta a la pregunta ¿Cuándo un módulo  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  satisface que  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es un cocomplejo presedimentado y sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ ? Un primer acercamiento a esta pregunta se encuentra en [AIR14], donde se introduce el concepto de módulo  $\tau$ -rígido y  $\tau$ -inclinante.

En la primera sección del Capítulo 3, se presenta la siguiente definición, propuesta en esta tesis, la cual será de mucha utilidad en la solución del problema para determinar cuando  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$ . Para lograr lo anterior, necesitaremos las siguientes categorías bien conocidas.

**Notación 0.2.4.** *Para una categoría abeliana  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ , se tienen los siguientes complementos ortogonales en  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{X}$*

- (a) Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{X}^{\perp i} := \{Y \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) = 0 \forall X \in \mathcal{X}\}$ ;
- (b)  $\mathcal{X}^\perp := \bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} \mathcal{X}^{\perp i}$ ;
- (c) Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  ${}^{\perp i} \mathcal{X} := \{Y \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(Y, X) = 0 \forall X \in \mathcal{X}\}$ ;
- (d)  ${}^\perp \mathcal{X} := \bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} {}^{\perp i} \mathcal{X}$ .

**Definición 0.2.5.** *Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $n \in \mathbb{N}^+$ .*

- La **categoría  $\tau_n$ -perpendicular** de  $\mathcal{X}$  es  $\mathcal{X}^{\perp \tau_n} := {}^{\perp 0} \tau_n \mathcal{X} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}^{\perp i}$ .
- Decimos que un  $\Lambda$ -módulo  $M$  es  **$\tau_n$ -rígido** si  $M \in M^{\perp \tau_n}$ .

Uno de los resultados principales del Capítulo 3, muestra que un módulo  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $\tau_n$ -rígido si, y sólo si,  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  (ver Teorema 3.1.6).

En la segunda sección, del Capítulo 3, se introduce el concepto de módulo  $\tau_n$ -inclinante completo basado en las siguientes observaciones: Si  $M$  es un  $\Lambda$ -módulo  $n$ -inclinante, entonces  $\text{inj}(\Lambda) \subseteq M^\perp = M^{\perp \tau_n}$ . Mientras que, si  $M$  es  $\tau$ -inclinante, se desprende del [AIR14, Teorema 2.12 (c)] que  $\text{inj}(\Lambda/\text{ann}(M)) \subseteq \text{gen}(M) = {}^{\perp 0} \tau(M) =: M^{\perp \tau_1}$ . Por lo que se sugieren las siguientes definiciones.

**Definición 0.2.6.** *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Decimos que  $M$  es:*

- (a)  **$\tau_n$ -inclinante** si  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .
- (b)  **$\tau_n$ -inclinante completo** si es  $\tau_n$ -inclinante y  $\text{inj}(\Lambda/\text{ann}(M)) \subseteq M^{\perp \tau_n}$ .

Por lo expuesto anteriormente, se sigue que tanto los módulos  $n$ -inclinante, como los  $\tau$ -inclinante, son ejemplos de módulos  $\tau_n$ -inclinante completos. La clase de módulos  $\tau_n$ -inclinantes completos contiene estrictamente a la clase de módulos  $n$ -inclinantes y  $\tau$ -inclinantes ya que, en el Ejemplo 3.2.22, se muestra a un  $\Lambda$ -módulo que es  $\tau_n$ -inclinante completo de

dimensión proyectiva infinita, donde  $\Lambda$  es un álgebra autoinyectiva. Sin embargo, el único módulo inclinante básico en un álgebra autoinyectiva básica  $\Lambda$  es  $\Lambda$ .

La definición de los módulos  $\tau_n$ -inclinantes completos  $M$  tiene como base el álgebra cociente  $\Lambda/\text{ann}(M)$ . Este hecho ya lo había notado anteriormente G. Jasso en [Ja15, Proposición 2.14], ya que probó que un  $\Lambda$ -módulo  $M$  sincero y  $\tau$ -rígido es  $\tau$ -inclinante en  $\text{mod}(\Lambda)$  si, y sólo si,  $M$  es 1-inclinante en  $\text{mod}(\Lambda/\text{ann}(M))$ . Otro resultado principal de dicho capítulo, generaliza el de G. Jasso y es el siguiente.

**Teorema 0.2.7.** [Teorema 3.2.19] *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -rígido y sincero. Entonces  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante completo si, y sólo si,  $M$  es  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\Lambda/\text{ann}(M))$ .*

Hasta este momento, no se ha encontrado un ejemplo de un módulo  $\tau_n$ -inclinante tal que no sea completo. Tampoco, un  $\Lambda$ -módulo  $M$   $\tau$ -rígido tal que su rango  $\text{rk}(M)$  sea igual al del álgebra  $\Lambda$  y no sea  $\tau_n$ -tiling completo.

En la tercera sección, introducimos el concepto de módulo  $\tau^{-n}$ -coinclinante, que es el dual de  $\tau_n$ -inclinante, con el cual se obtuvo el siguiente resultado.

**Proposición 0.2.8.** [Proposición 3.3.6] *Para una álgebra de Artin  $\Lambda$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a)  $\Lambda$  es  $n$ -Gorenstein.
- (b)  $D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda_\Lambda)$  es  $\tau_n$ -inclinante.
- (c)  $\Lambda$  es  $\tau^{-n}$ -coinclinante.

En la sección 4, del Capítulo 3, se introduce el concepto de álgebra  $\tau_n$ -rígida finita (el conjunto de módulos  $\tau_n$ -inclinantes básicos es un conjunto finito). Lo anterior generaliza la definición de álgebra  $\tau$ -rígida finita [DIJ17]. También es un tipo de álgebra en la cual se cumple la siguiente hipótesis, acerca de la caracterización de módulos inclinantes expuesta en [RS89]: Si  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  satisface que  $\text{pd}(M) \leq n$ ,  $M \in M^\perp$  y  $\text{rk}(M) = \text{rk}(\Lambda)$ , entonces  $M$  es  $n$ -inclinante. Si fuera cierta esta hipótesis se resolvería la “conjetura Gorenstein” establecida en el contexto de álgebras de Artin por M. Auslander e I. Reiten en [AR91] que indica que si  $\text{id}_\Lambda(\Lambda)$  es finita, entonces  $\text{id}(\Lambda_\Lambda)$  es finita y  $\text{id}_\Lambda(\Lambda) = \text{id}(\Lambda_\Lambda)$ . Ésta última, bajo la condición de que  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) < \infty$ , es equivalente (ver [AR91, Proposición 6.10]) a la famosa “conjetura de la dimensión finitista” establecida por H. Bass en [Ba60], la cual dice que  $\text{fin.dim}(\Lambda) := \sup\{M \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{pd}(M) < \infty\} < \infty$ . Por lo tanto, obtenemos una nueva clase de álgebras donde se cumple la conjetura Gorenstein, esto se expresa mediante el siguiente resultado obtenido en esta tesis.

**Proposición 0.2.9.** [Corolario 3.4.10] *Sea  $\Lambda$  un álgebra sedimentada discreta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -rígido tal que  $\text{rk}(M) = \text{rk}(\Lambda)$ . Entonces,  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante.*
- (b) *Sea  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\text{pd}(T) \leq n$ ,  $T \in T^\perp$  y  $\text{rk}(T) = \text{rk}(\Lambda)$ . Entonces,  $T$  es  $n$ -inclinante.*

(c) Si  $\text{id}(\Lambda) \leq n$ , entonces  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ .

En la quinta sección, del Capítulo 3, se da la definición de una  $n$ -tupla sedimentada, cuya idea se basa en hacer el símil de los pares  $\tau$ -inclinantes de soporte.

**Definición 0.2.10.** *Decimos que  $(M_1, \dots, M_n) \in (\text{mod}(\Lambda))^{n-1} \times (\text{proj}(\Lambda))$  es una **n-tupla presedimentada (sedimentada)** si  $\bigoplus_{i=1}^{n-1} P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[i-1] \oplus M_n[n-1] \in K^b(\text{proj}(\Lambda))$  es presedimentado (sedimentado).*

La definición anterior es un ejemplo de par  $\tau$ -rígido y de un sistema estratificante en el sentido de K. Erdman y E. Sáenz en [ES03].

Una muestra de la importancia de la clase de álgebras estandardmente estratificadas  $\Lambda$  es que, para una tal álgebra  $\Lambda$ , los módulos estándar forman una  $\text{rk}(\Lambda)$ -tupla sedimentada (ver Teorema 3.5.8). El Ejemplo 3.5.9 muestra que es necesaria la hipótesis de que el álgebra  $\Lambda$  sea estandardmente estratificada. De acuerdo a H. Thomas en [Th07], una categorificación de los  $(n-1)$ -conglomerados necesita la siguiente propiedad: para un  $\Lambda$ -módulo inescindible  $M$  tal que  $M \mid M_k$ , para alguna  $k \in [1, n]$ , la  $n$ -tupla sedimentada  $(M_1, \dots, M/M_k, \dots, M_n)$  admite exactamente  $n$  módulos inescindibles no isomorfos dos a dos tales que al sumarlos a la  $n$ -tupla presedimentada  $(M_1, \dots, M/M_k, \dots, M_n)$  forman una  $n$ -tupla sedimentada. Esto no sucede para las  $n$ -tuplas sedimentada y está exhibido en el Ejemplo 3.5.10. También se muestra, en el Ejemplo 3.5.11, un cocomplejo sedimentado  $P^\bullet$  tal que no existe una 3-tupla sedimentada  $(M_1, M_2, M_3)$  que satisfice que  $P^\bullet = P_{\geq -2}^\bullet(M_1) \oplus P_{\geq -1}^\bullet(M_2) \oplus M_3[2]$ . Lo que no sucede para el caso  $n = 2$ , (ver [AIR14, Teorema 3.2]).

El Capítulo 4, es inicio de otra de investigación y se basa en los resultados obtenidos en [AIR14, Sección 4.1], los cuales dicen: que para una categoría triangulada 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$ , con objeto inclinante de 2-conglomerado  $X \in \mathcal{T}$ , existe una biyección entre objetos inclinantes de 2-conglomerado básicos en  $\mathcal{T}$  y pares  $\tau$ -inclinantes de soporte en  $\text{mod}(\text{End}_{\mathcal{T}}(X)^{op})$  (ver [AIR14, Teorema 4.1]). El principal resultado de éste capítulo es una caracterización de los objetos  $\tau$ -rígidos en  $\text{mod}(\text{End}_{\mathcal{T}}(X)^{op})$ , donde  $X$  es un objeto inclinante de  $n+1$ -conglomerado y  $\mathcal{T}$  es una categoría triangulada  $n+1$ -Calabi-Yau. En lo que sigue, enunciamos dicho resultado.

**Proposición 0.2.11.** [Proposición 4.1.6] *Sean  $\mathcal{T}$   $n+1$ -Calabi-Yau,  $T \in \mathcal{T}$  inclinante de  $n+1$ -conglomerado, con  $n > 1$ ,  $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)^{op}$  y  $X \in \mathcal{T}$  tal que  $\text{resdim}_{\text{add}(T)}(X) \leq 1$ . Entonces,  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[n]) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X)$  es  $\tau$ -rígido.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
0.1. Antecedentes . . . . .	I
0.2. Resumen de resultados de la tesis . . . . .	IV
<b>1. Nociones y resultados preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Clases funtorialmente finitas y el radical . . . . .	1
1.2. Álgebras de Artin . . . . .	4
1.3. Categorías trianguladas . . . . .	8
1.4. Homología relativa . . . . .	14
1.5. Módulos inclinantes . . . . .	17
1.6. Teoría sedimentada . . . . .	19
1.7. Subfuntores del $\text{Ext}_\Lambda^1(-,-)$ . . . . .	23
1.8. Módulos $\tau$ -rígidos . . . . .	27
1.9. Teoría inclinante de conglomerado . . . . .	29
1.10. Sistemas estratificantes lineales . . . . .	29
<b>2. Clases relativas de aproximación, torsión relativa e inclinante relativo</b>	<b>31</b>
2.1. $(X,Y)$ precubiertas y preenvolventes . . . . .	31
2.2. Clases de $F$ -torsión . . . . .	35
2.3. Módulos $F$ -sedimentados . . . . .	47
<b>3. Cocomplejos sedimentados de <math>n</math>-términos</b>	<b>59</b>
3.1. Módulos $\tau_n$ -rígidos . . . . .	59
3.2. Módulos $\tau_n$ -inclinantes completos . . . . .	66
3.3. Módulos $\tau^{-n}$ -coinclinante . . . . .	83
3.4. Álgebras $\tau_n$ -rígidas finitas . . . . .	85
3.5. $n$ -tuplas presedimentadas . . . . .	90
3.6. Cocomplejos presedimentados de $n$ -términos . . . . .	95
<b>4. Teoría inclinante de conglomerado</b>	<b>105</b>
4.1. Conexión con teoría $\tau$ -inclinante . . . . .	105
<b>Índice alfabético</b>	<b>111</b>



# Capítulo 1

## Nociones y resultados preliminares

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Todas las subcategorías de  $\mathcal{C}$  serán consideradas plenas. Escribiremos  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ , para decir que  $\mathcal{X}$  es una subcategoría de  $\mathcal{C}$ . Por otro lado  $A \in \mathcal{C}$ , significará que  $A$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ .

Dada  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ , tenemos las siguientes subcategorías en una categoría aditiva  $\mathcal{C}$  :

$$\text{smd}(\mathcal{X}) := \{Z \in \mathcal{C} \mid \exists Y \text{ tal que } Z \oplus Y = X, \text{ para algún } X \in \mathcal{X}\};$$

$$\mathcal{X}^\oplus := \{Z \in \mathcal{C} \mid Z = \bigoplus_{i=1}^n X_i, \text{ con } n \in \mathbb{N}, X_i \in \mathcal{X} \forall i \in [1, n]\};$$

$$\text{add}(\mathcal{X}) := \text{smd}(\mathcal{X}^\oplus).$$

Decimos que  $\mathcal{C}$  es una categoría **Krull – Schmidt** si  $\mathcal{C}$  es aditiva y cada  $X \in \mathcal{C} - \{0\}$  admite una descomposición en suma directa finita  $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ , donde  $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$  es un anillo local  $\forall i \in [1, n]$ .

### 1.1. Clases funtorialmente finitas y el radical

La noción de morfismo minimal, clase funtorialmente finita fue introducida por M. Auslander y S. Smalø (1980) para mostrar la existencia de particiones preproyectivas y preinjectivas. Al año siguiente, dichas clases fueron usadas para dar condiciones necesarias y suficientes en la existencia de sucesiones que casi se parten en subcategorías cerradas por extensiones.

El objetivo principal de esta sección es introducir el concepto de morfismo minimal y de clase funtorialmente finita.

**Definición 1.1.1.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en una categoría aditiva  $\mathcal{C}$ .

(a)  $f$  es **minimal a derecha** si para todo diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow h & \searrow f & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

se tiene que  $h$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}$ .

- (b) Decimos que  $g : K \rightarrow X$  es un **pseudokernel** de  $f$  si  $fg = 0$  y para todo  $g' : L \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $fg' = 0$  existe  $g'' : L \rightarrow K$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $gg'' = g'$ . Más aún, si  $g''$  es único, decimos que  $g''$  es el **kernel** de  $f$ . En tal caso, escribimos  $K := \text{Ker}(f)$ .

Los conceptos duales de morfismo minimal a derecha, pseudokernel y kernel son morfismo minimal a izquierda, pseudokernel y cokernel.

**Definición 1.1.2.** Para una categoría  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  y  $A \in \mathcal{C}$ , decimos que:

- (a) un morfismo  $t : X \rightarrow A$  es una  **$\mathcal{X}$ -precubierta** de  $A$  si  $X \in \mathcal{X}$  y  $\forall r : X' \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}$ , con  $X' \in \mathcal{X}$ , existe  $s : X' \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $r = ts$ . Una  $\mathcal{X}$ -precubierta  $f$  de  $A$  es una  **$\mathcal{X}$ -cubierta** de  $A$  si  $f$  es minimal a derecha;
- (b)  $\mathcal{X}$  es una clase **precubriente (cubriente)** si todo  $C \in \mathcal{C}$  tiene una  $\mathcal{X}$ -precubierta ( $\mathcal{X}$ -cubierta);
- (c)  $\mathcal{X}$  es **functorialmente finita** si es precubriente y preenvolvente, donde clase preenvolvente es el concepto dual de la clase precubriente;
- (d) Denotaremos por  $\text{proj}(\mathcal{C})$  a la subcategoría de  $\mathcal{C}$  cuyos objetos son todos los objetos proyectivos en  $\mathcal{C}$ ;
- (e) Denotaremos por  $\text{inj}(\mathcal{C})$  a la subcategoría de  $\mathcal{C}$  cuyos objetos son todos los objetos inyectivos en  $\mathcal{C}$ .

A continuación se presentan algunas de las cubiertas y envoltentes mas importantes.

**Definición 1.1.3.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos. Para  $X \in \mathcal{A}$ , decimos que:

- (a)  $\pi^0 : P^0(X) \rightarrow X$  es una **cubierta proyectiva** de  $X$  si  $\pi^0$  es una  $\text{proj}(\mathcal{C})$ -cubierta de  $X$ . Note que toda  $\text{proj}(\mathcal{A})$ -precubierta de  $X \in \mathcal{A}$  es un epimorfismo ya que  $\mathcal{A}$  tiene suficientes proyectivos. Por otro lado, la siguiente sucesión exacta en  $\mathcal{A}$ ,

$$P^{-1}(X) \xrightarrow{\pi^{-1}} P^0(X) \xrightarrow{\pi^0} X \rightarrow 0,$$

es una **presentación proyectiva minimal** de  $X$ , si  $\pi^{-1}$  es la composición del kernel de  $\pi^0$  y la cubierta proyectiva de  $\text{Ker}(\pi^0)$ ;

- (b)  $\iota^0 : X \rightarrow I^0(X)$  es una **envolvente inyectiva** de  $X$  si  $\iota^0$  es una  $\text{inj}(\mathcal{A})$ -envolvente de  $X$ . Note que toda  $\text{inj}(\mathcal{A})$ -preenvolvente de  $X \in \mathcal{A}$  es un monomorfismo ya que  $\mathcal{A}$  tiene suficientes inyectivos. Por otro lado, la siguiente sucesión exacta en  $\mathcal{A}$ ,

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\iota^0} I^0(X) \xrightarrow{\iota^1} I^1(X),$$

es una **presentación inyectiva minimal** de  $X$ , si  $\iota^1$  es la composición del cokernel de  $\iota^0$  y la envolvente inyectiva de  $\text{Coker}(\iota^0)$ .

**Definición 1.1.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $R$  un anillo. Decimos que  $\mathcal{C}$  es una *R-categoría* si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un  $R$ -módulo para cualesquiera objetos  $A, B$  en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.1.5.** En una  $\mathbb{Z}$ -categoría  $\mathcal{C}$ , el **radical** de  $X, Y \in \mathcal{C}$  es el siguiente conjunto  $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \mid fg \in \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(Y)), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)\}$ .

El siguiente resultado, bien conocido, nos dice que la definición de radical es simétrica. La prueba se hará, ya que es difícil encontrarla explícitamente en la literatura.

**Lema 1.1.6.** Sean  $X, Y$  objetos en una  $\mathbb{Z}$ -categoría  $\mathcal{C}$  con objeto cero. Entonces,

$$\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid gf \in \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(X)), \forall g : Y \rightarrow X\}.$$

*Demostración.* ( $\subseteq$ ) Sean  $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  y  $g : Y \rightarrow X$ . Por [Fl10, Proposición 2.6.8], existe  $f' \in \text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$  tal que  $1_Y = f'(1_Y + fg)$ . Para probar que  $gf \in \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(X))$ , por [Fl10, Proposición 2.6.8], es suficiente probar que  $1_X + gf$  tiene inversa izquierda. En efecto,

$$(1_X - gf'f)(1_X + gf) = 1_X + gf - g(f' + f'fg)f = 1_X + gf - g1_Y f = 1_X.$$

Por lo tanto,  $gf \in \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(X))$ .

( $\supseteq$ ) Es análoga a la contención anterior. □

**Definición 1.1.7.** [ASS06] Sea  $\mathcal{C}$  una  $R$ -categoría, donde  $R$  un anillo aditivo con unidad. Un ideal  $I \trianglelefteq \mathcal{C}$  es una clase de morfismos  $I = \{I(X, Y)\}_{(X, Y) \in \mathcal{C}^2}$  en  $\mathcal{C}$  que satisfacen las siguientes condiciones

- (a)  $I(X, Y)$  es un  $R$ -submódulo de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ;
- (b) para toda sucesión  $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  en  $\mathcal{C}$ , si  $f \in I(X, Y)$  entonces  $gf \in I(X, Z)$  y  $fh \in I(W, Y)$ .

El próximo resultado muestra que el radical es un ideal de una  $R$ -categoría y generaliza al radical de un anillo.

**Lema 1.1.8.** [Kr15, Proposición 2.9] Sea  $\mathcal{C}$  una  $R$ -categoría aditiva. El radical  $\text{rad}_{\mathcal{C}}$  es un ideal en  $\mathcal{C}$  tal que  $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, X) = \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(X)) \forall X \in \mathcal{C}$ .

El siguiente resultado muestra la relación que tienen el radical y los morfismos minimales a izquierda. También este resultado fue usado para mostrar la existencia de triángulos de Auslander-Reiten en subcategorías trianguladas  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  funtorialmente finitas, cuando  $\mathcal{C}$  tiene triángulos de Auslander-Reiten.

**Lema 1.1.9.** [ABM98, Lema 2.5] Sean  $\mathcal{C}$  una categoría Krull-Schmidt con pseudocokernelles y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $f$  es minimal a izquierda.
- (b)  $g \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \forall g : Y \rightarrow Z$  pseudocokernel de  $f$ .
- (c) Existe  $g : Y \rightarrow Z$  pseudocokernel de  $f$  tal que  $g \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ .

## 1.2. Álgebras de Artin

El objetivo principal de esta sección es introducir el concepto de álgebra de Artin, el proceso de proyectivización y la existencia de una dualidad en la categoría de módulos finitamente generados sobre una álgebra de Artin.

En esta sección  $R$  denotará a un anillo asociativo con unidad.

**Definición 1.2.1.** Sea  $K$  un anillo conmutativo. Una  $K$ -álgebra es una terna  $(R, K, \varphi)$  tal que  $\varphi : K \times R \rightarrow R$ ,  $(k, r) \mapsto k \cdot r$ , es una función (acción izquierda de  $K$  en  $R$ ) que satisface los siguientes axiomas.

- $k \cdot (r + s) = k \cdot r + k \cdot s \quad \forall k \in K, \forall r, s \in R.$
- $(k + l) \cdot r = k \cdot r + l \cdot r \quad \forall k, l \in K, \forall r \in R.$
- $(kl) \cdot r = k \cdot (l \cdot r) \quad \forall k, l \in K, \forall r \in R.$
- $1_K \cdot r = r \quad \forall r \in R.$
- $k \cdot (rs) = (k \cdot r)s = r(k \cdot s) \quad \forall k \in K, \forall r, s \in R.$

Denotaremos por  $\text{Mod}(R)$  cuyos objetos son todos los  $R$ -módulos.

**Definición 1.2.2.** Sean  $M$  y  $N \in \text{Mod}(R)$ . Decimos que  $M$  está **generado** por  $N$  si existe un epimorfismo  $g : N^{(I)} \rightarrow M$ , para algún conjunto  $I$ , donde  $N^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} N$ . En tal caso, decimos que  $M$  es finitamente generado por  $N$  si  $|I| = n \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $M$  está **finitamente generado** si está finitamente generado por  $R$ .

Denotaremos por  $\text{mod}(R)$  a la subcategoría plena de  $\text{Mod}(R)$  cuyos objetos son todos los  $R$ -módulos finitamente generados.

**Definición 1.2.3.** Sea  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra. Decimos que  $\Lambda$  es una  $R$ -álgebra de Artin si  $R$  es un anillo artiniiano y  $\Lambda \in \text{mod}(R)$ .

**Definición 1.2.4.** Sean  $M \in \text{Mod}(R)$  y  $N \leq M$ . Decimos que  $N$  es un **submódulo maximal** de  $M$  si  $N \neq M$  y  $\forall L \leq M$ , con  $L \neq M$ , tal que  $N \leq L$  se tiene que  $N = L$ . Denotamos por

$$\mathcal{M}_M := \{N \in M \mid N \text{ es un submódulo maximal de } M\}.$$

El **radical** de  $M$  es el  $R$ -submódulo

$$\text{rad}(M) := \bigcap_{X \in \mathcal{M}_M} X.$$

Si  $\mathcal{M}_M = \emptyset$ , se define  $\text{rad}(M) = M$ . Por último, se define el **top** de  $M$  como el  $R$ -módulo cociente  $\text{top}(M) := M/\text{rad}(M)$ .

El siguiente resultado es conocido como el **Lema de Nakayama**.

**Lema 1.2.5.** *Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin e  $I \trianglelefteq \Lambda$ . Entonces  $I \subseteq \text{rad}(\Lambda)$  si, y sólo si,  $\forall M \in \text{mod}(\Lambda)$ ,  $\forall N \leq M$ , la igualdad  $M = IM + N$  implica  $M = N$ .*

Es bien conocido el siguiente resultado, que puede verse en [ARS95, Teorema II. 3.3].

**Teorema 1.2.6.** *Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y  $\mathbb{I}^0(\text{top}(R))$  la envolvente inyectiva en  $\text{Mod}(R)$  de  $\text{top}(R)$ . Entonces, el funtor*

$$D_\Lambda := \text{Hom}_R(-, \mathbb{I}^0(\text{top}(R))) : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda^{op})$$

*es una  $R$ -dualidad de categorías y  $D_{\Lambda^{op}} : \text{mod}(\Lambda^{op}) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es un casi-inverso, esto es,  $D_\Lambda \circ D_{\Lambda^{op}} \simeq 1_{\text{mod}(\Lambda^{op})}$  y  $D_{\Lambda^{op}} \circ D_\Lambda \simeq 1_{\text{mod}(\Lambda)}$ .*

El siguiente resultado es fundamental en la teoría de las aproximaciones, ya que uno de los resultados a partir de este es mostrar que una clase es funtorialmente finita si, y sólo si, tiene una cubierta y cocubierta finita, [AS80, Teorema 4.5].

**Lema 1.2.7.** [AS80, Proposición 4.2] *Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $\text{add}(M)$  es una clase funtorialmente finita.*

En particular,  $\text{proj}(\Lambda) = \text{add}(\Lambda)$  y  $\text{inj}(\Lambda) = \text{add}(D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda))$  son clases funtorialmente finitas.

Para una  $R$ -álgebra de Artin  $\Lambda$ , se tiene el **funtor estrella**

$$* := \text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda^{op}).$$

Se sabe que dicho funtor se restringe a una equivalencia de categorías entre  $\text{proj}(\Lambda)$  y  $\text{proj}(\Lambda^{op})$ .

Sea  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin. Consideremos  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y la resolución proyectiva minimal  $P^{-1}(M) \xrightarrow{\pi^{-1}} P^0(M) \xrightarrow{\pi^0} M \rightarrow 0$  de  $M$ . Se define el **transpuesto** de  $M$  como el siguiente  $\Lambda^{op}$ -módulo

$$\text{Tr}(M) := \text{Coker}(\text{Hom}_\Lambda(\pi^{-1}, \Lambda)).$$

Por lo que se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P_0(M), \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P_1(M), \Lambda) \rightarrow \text{Tr}(M) \rightarrow 0$$

en  $\text{mod}(\Lambda^{op})$ .

**Definición 1.2.8.** *Sea  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin. Las composiciones*

$$\tau := D_{\Lambda^{op}} \text{Tr} \quad \text{y} \quad \tau^{-1} := \text{Tr} D_\Lambda$$

*son llamadas **translaciones de Auslander-Reiten**.*

El trasladado de Auslander-Reiten es de vital importancia en la teoría de representaciones de álgebras, ya que permiten describir las sucesiones que casi se parten. Con estas sucesiones se puede hacer una representación gráfica de la categoría de módulos finitamente generados, mediante el carcaj de Auslander-Reiten (ver [AR75]).

A continuación se presentaran algunas propiedades básicas del trasladado de Auslander-Reiten.

**Lema 1.2.9.** *Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin,  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $\{M_i\}_{i=1}^n \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . Las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) [ASS06, Corolario IV.2.14] Si  $\text{pd}(M) \leq 1$ , entonces  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(M, N) \cong \text{D}_R(\text{Hom}_{\Lambda}(N, \tau M))$ .
- (b) [ASS06, Lema IV.2.7]  $\text{pd}(M) \leq 1$ , si y sólo si,  $\text{Hom}_{\Lambda}(\text{D}_{\Lambda^{op}} \Lambda, M) = 0$ .
- (c) [ARS95, Proposición IV.1.7]  $\tau(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \bigoplus_{i=1}^n \tau(M_i)$ .
- (d) [ARS95, IV.1 Proposición 1.10 (c)] Si  $I \in \text{inj}(\Lambda)$  e  $I \mid \tau(M)$ , entonces  $I = 0$ .

El **functor de Nakayama**  $\nu : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es la composición de los funtores  $\text{mod}(\Lambda) \xrightarrow{\text{D}_{\Lambda}} \text{mod}(\Lambda^{op}) \xrightarrow{*} \text{mod}(\Lambda)$ , el cual se restringe a una equivalencia de categorías entre  $\text{proj}(\Lambda)$  e  $\text{inj}(\Lambda)$ .

El siguiente resultado muestra la relación del trasladado de Auslander-Reiten con el functor de Nakayama.

**Proposición 1.2.10.** [ASS06, Proposición IV. 2.4 (a)] *Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin,  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y*

$$\text{P}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi^{-1}} \text{P}^0(M) \xrightarrow{\pi^0} M \rightarrow 0$$

*una presentación proyectiva minimal de  $M$ . Entonces*

$$0 \rightarrow \tau(M) \rightarrow \nu(\text{P}^{-1}(M)) \rightarrow \nu(\text{P}^0(M)) \rightarrow \nu(M) \rightarrow 0$$

*es una sucesión exacta de  $R$ -módulos.*

El siguiente resultado es conocido como el **proceso de proyectivización**, que es bastante útil, ya que los endomorfismos  $f : M \rightarrow M$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  pueden ser considerados endomorfismos entre módulos proyectivos.

**Lema 1.2.11.** [ASS06, Lema VI.3.1] *Para  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $\Gamma := \text{End}_{\Lambda}(M)^{op}$ , las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) *Sean  $M' \in \text{add}(M)$  y  $N \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces, el morfismo*

$$\Psi : \text{Hom}_{\Lambda}(M', N) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(\text{Hom}_{\Lambda}(M, M'), \text{Hom}_{\Lambda}(M, N)),$$

$$f \mapsto \text{Hom}_{\Lambda}(M, f)$$

*es un isomorfismo de  $R$ -módulos.*

(b) El funtor **evaluación**  $e_M(-) := \text{Hom}_\Lambda(M, -) : \text{add}(M) \rightarrow \text{proj}(\Gamma)$  es una  $R$ -equivalencia de categorías.

**Definición 1.2.12.** Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin,  $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ ,  $C \in \mathcal{C}$  y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ .

(a) Decimos que  $M$  es  $\mathcal{C}$  – **filtrado** si existe una cadena  $F$  de submódulos de  $M$ ,

$$F : 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

tal que  $M_k/M_{k-1} \cong C_k \in \mathcal{C} \forall 1 \leq k \leq n$ . A  $F$  la llamamos  $\mathcal{C}$  – **filtración** de  $M$ . Si  $\mathcal{C}$  es la clase de los  $\Lambda$ -módulos simples, decimos que  $F$  es una **serie de composición** de  $M$ . Denotamos por  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  a la subcategoría plena de  $\text{mod}(\Lambda)$  cuyos objetos son los  $\Lambda$ -módulos  $\mathcal{C}$ -filtrados. Note que  $0 \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ . Más aún,  $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{0\}$  si  $\mathcal{C} = \emptyset$ .

(b) La **multiplicidad** de  $C$  en  $M$ , con respecto a una filtración  $F$ , es

$$m_C^F(M) := |\{i \in \mathbb{N} \mid M_i/M_{i-1} \cong C\}|.$$

(c) Para  $M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ , se define la  $\mathcal{C}$ -longitud de  $M$

$$\ell_C(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M \text{ una } \mathcal{C} \text{ – filtración de } M\}.$$

Si  $\mathcal{C}$  es la clase de los  $\Lambda$ -módulos simples, escribimos  $\ell(M) := \ell_C(M)$ .

Se sabe que todo  $0 \neq M \in \text{mod}(\Lambda)$  admite una serie de composición. Mas aún,  $\forall M \in \text{mod}(\Lambda)$ , se tiene que  $\ell(M) = 0$  si, y sólo si,  $M = 0$ .

A continuación presentamos algunas propiedades básicas de los módulos simples.

**Lema 1.2.13.** [ARS95, Proposición I.1.1] Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $\ell(M) = \ell(K) + \ell(N)$ .

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Jordan-Hölder.

**Teorema 1.2.14.** [ARS95, Teorema I.1.2] Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin,  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ ,  $F$  y  $G$  series de composición de  $M$  y  $S$  un  $\Lambda$ -módulo simple. Entonces

$$m_S(M) := m_S^F(M) = m_S^G(M).$$

El siguiente resultado nos da una forma efectiva, para decidir si un módulo tiene un simple en su serie de composición.

**Lema 1.2.15.** [ASS06, Corolario III.3.6] Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin,  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $S$  un  $\Lambda$ -módulo simple. Entonces  $\text{Hom}_\Lambda(P^0(S), M) = 0$  si, y sólo si,  $m_S(M) = 0$ .

### 1.3. Categorías trianguladas

La noción de categoría derivada fue introducida por Jean-Louis Verdier (1963) en su tesis doctoral, usando para ello algunas ideas de Grothendieck. También, J. L. Verdier definió la noción de categoría triangulada, basándose en la observación de que una categoría derivada tiene sucesiones especiales (triángulos), al escribir en forma de axiomas las propiedades básicas que dichos triángulos satisfacen en las categorías derivadas.

El objetivo principal de esta sección es introducir los conceptos de categoría triangulada y de categoría homotópica.

**Definición 1.3.1.** Sean  $\mathcal{C}$  una  $R$ -categoría aditiva y  $[1] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  una  $R$ -equivalencia de categorías.

- (a) Un **triángulo** en  $\mathcal{C}$  es un diagrama  $\eta : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$  de morfismos en  $\mathcal{C}$ .
- (b) Sean  $\eta$  y  $\xi$  triángulos en  $\mathcal{C}$ . Un morfismo  $\eta \rightarrow \xi$  de triángulos es un triple  $(u, v, w)$  de morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ \xi : & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1]. \end{array}$$

Decimos que  $(u, v, w)$  es un isomorfismo de triángulos si  $u, v$  y  $w$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}$ . En tal caso, escribimos  $\eta \cong \xi$  para decir que el triángulo  $\eta$  es isomorfo a  $\xi$ .

**Definición 1.3.2.** Una  $R$ -categoría **triangulada** es un triple  $(\mathcal{T}, [1], \Delta)$ , donde  $\mathcal{T}$  es una  $R$ -categoría aditiva,  $[1] : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  es una  $R$ -equivalencia de categorías y  $\Delta$  es una familia de triángulos, llamados **triángulos distinguidos** en  $\mathcal{T}$ , que verifican los siguientes axiomas.

- (a)  $X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1] \in \Delta \forall X \in \mathcal{T}$ .
- (b) Si  $\eta \in \Delta$  y  $\eta \cong \xi$ , entonces  $\xi \in \Delta$ .
- (c) Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo en  $\mathcal{T}$ , entonces existe  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \in \Delta$ .
- (d)  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \in \Delta$  si, y sólo si,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \in \Delta$ .
- (e) Si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ ,  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1] \in \Delta$  y existen  $u : X \rightarrow X'$ ,  $v : Y \rightarrow Y'$  tales que  $vf = f'u$ , entonces existe  $w : Z \rightarrow Z'$  tal que

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

es un morfismo de triángulos.

(f) El siguiente axioma es llamado el **axioma del octaedro**. Si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ ,  $Y \xrightarrow{j} A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{l} Y[1]$  y  $X \xrightarrow{jf} A \xrightarrow{t} C \xrightarrow{s} X[1]$  son triángulos distinguidos, entonces existen morfismos  $F$  y  $G$  en  $\mathcal{T}$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$\eta$

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow j & & \downarrow F & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{jf} & A & \xrightarrow{t} & C & \xrightarrow{s} & X[1] \\
 \downarrow f & & \parallel & & \downarrow G & & \downarrow f[1] \\
 Y & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{k} & B & \xrightarrow{l} & Y[1] \\
 & & & & \downarrow g[1]l & & \downarrow g[1] \\
 & & & & Z[1] & = & Z[1]
 \end{array}$$

y  $\eta : Z \xrightarrow{F} C \xrightarrow{G} B \xrightarrow{g[1]l} Z[1]$  es un triángulo distinguido.

Sea  $(\mathcal{T}, [1], \Delta)$  una  $R$ -categoría triangulada. Por simplicidad, escribiremos  $\mathcal{T}$  en lugar de la terna anterior.

El siguiente resultado asemeja la existencia del pull-pullbacks y push-outs en estas categorías.

**Lema 1.3.3.** [Ne01, Proposición 1.4.6] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

un triángulo distinguido en  $\mathcal{T}$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) **Cambio de base.** Si  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z \xrightarrow{h'} X[1]$  es un triángulo distinguido en  $\mathcal{T}$ , entonces existe un diagrama conmutativo en  $\mathcal{T}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X' & = & X' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow f' & & \\
 X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow g' & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow h' & & \\
 & & X'[1] & = & X'[1] & & 
 \end{array}$$

donde todas las filas y columnas son triángulos distinguidos.

- (b) **Cambio de cobase.** Si  $X' \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g'} Z \xrightarrow{h'} X'[1]$  es un triángulo distinguido en  $\mathcal{T}$ , entonces existe un diagrama conmutativo en  $\mathcal{T}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & & \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow g' & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X[1] \\
 & & \downarrow h' & & \downarrow & & \\
 & & X'[1] & \xlongequal{\quad} & X'[1] & & 
 \end{array}$$

donde todas las filas y columnas son triángulos distinguidos.

**Definición 1.3.4.** Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$  una subcategoría aditiva. Decimos que  $\mathcal{X}$  es un subcategoría **triangulada** de  $\mathcal{T}$  si satisface las siguientes condiciones:

- (a) si  $X \in \mathcal{X}$ , entonces  $X[1] \in \mathcal{X}$  y  $X[-1] \in \mathcal{X}$ ;
- (b) si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \in \Delta$  y  $X, Y \in \mathcal{X}$ , entonces existe  $Z' \in \mathcal{X}$  tal que  $Z \cong Z'$ .

Además, si  $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ , diremos que  $\mathcal{X}$  es **gruesa**. Denotaremos por  $\text{thick}(\mathcal{X})$  a la subcategoría triangulada gruesa mas pequeña de  $\mathcal{T}$  que contiene a  $\mathcal{X}$ .

A continuación presentamos la categoría homotópica, que es la categoría triangulada más importante en este trabajo.

**Definición 1.3.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva. Un cocomplejo  $X^\bullet$  de objetos en  $\mathcal{C}$  es una sucesión  $X^\bullet : \dots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} X^{n+1} \rightarrow \dots$  de morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que  $d_{X^\bullet}^{n+1} d_{X^\bullet}^n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 1.3.6.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva,  $X^\bullet$  y  $Y^\bullet$  cocomplejos en  $\mathcal{C}$ . Una familia  $\varphi := \{\varphi^i : X^i \rightarrow Y^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , de morfismos en  $\mathcal{C}$ , es un morfismo de cocomplejos  $\varphi : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  si  $\forall n \in \mathbb{Z}$  el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X^n & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^n} & X^{n+1} \\
 \varphi^n \downarrow & & \downarrow \varphi^{n+1} \\
 Y^n & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^n} & Y^{n+1}
 \end{array}$$

Sean  $\varphi : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  y  $\psi : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$  morfismos de cocomplejos. La composición de morfismos está dada por  $\psi \circ \varphi := \{\psi^i \varphi^i : X^i \rightarrow Z^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ .

Sea  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  una subcategoría aditiva. Denotaremos por  $C(\mathcal{X})$  a la categoría de cocomplejos con objetos en  $\mathcal{X}$ . Ya que los morfismos de cocomplejos son definidos entero a entero, como morfismos en la categoría aditiva  $\mathcal{X}$ , es fácil ver que los cocomplejos forman una categoría aditiva. Note que  $C(\mathcal{C})$  es abeliana si  $\mathcal{C}$  lo es.

**Definición 1.3.7.** *Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. Dado un objeto  $X^\bullet$  en  $C(\mathcal{A})$ , se definen los siguientes conceptos.*

- (a) *El **n-cociclo** de  $X^\bullet$  es  $Z^n(X^\bullet) := \text{Ker}(d_{X^\bullet}^n)$ .*
- (b) *La **n-cofrontera** de  $X^\bullet$  es  $B^n(X^\bullet) := \text{Im}(d_{X^\bullet}^{n-1})$ .*
- (c) *La inclusión  $\gamma_{X^\bullet}^n : Z^n(X^\bullet) \rightarrow X^n$ .*
- (d) *Dado que  $d_{X^\bullet}^n \cdot d_{X^\bullet}^{n-1} = 0$ , se tiene una inclusión  $\beta_{X^\bullet}^n : B^n(X^\bullet) \rightarrow Z^n(X^\bullet)$ .*
- (e) *La factorización de  $d_{X^\bullet}^n$  a través de su imagen*

$$X^n \xrightarrow{\alpha_{X^\bullet}^n} B^{n+1}(X^\bullet) \xrightarrow{\gamma_{X^\bullet}^{n+1} \beta_{X^\bullet}^{n+1}} X^{n+1}.$$

Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $X^\bullet$  un cocomplejo en  $\mathcal{A}$ . La  $n$ -ésima **cohomología** de  $X^\bullet$  es

$$H^n(X^\bullet) := Z^n(X^\bullet)/B^n(X^\bullet),$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Ahora, para  $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  en  $C(\mathcal{A})$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B^n(X^\bullet) & \longrightarrow & Z^n(X^\bullet) & \longrightarrow & H^n(X^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ & & \bar{f}^n \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow \exists! H^n(f^\bullet) & & \\ 0 & \longrightarrow & B^n(Y^\bullet) & \longrightarrow & Z^n(Y^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Y^\bullet) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde  $\bar{f}^n$  y  $f^n$  están dadas por la propiedad universal del kernel y cokernel. Por lo que se tiene, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , el  $n$ -ésimo functor de cohomología  $H^n(-) : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ . Decimos que  $X^\bullet \in C(\mathcal{A})$  es **acíclico** si  $H^n(X^\bullet) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 1.3.8.** *Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  morfismos en  $C(\mathcal{C})$ . Decimos que  $f^\bullet$  es homotópico a  $g^\bullet$  si existe una familia de morfismos  $\{h^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tales que  $f^n - g^n = h^{n+1} d_{X^\bullet}^n + d_{Y^\bullet}^{n-1} h^n \forall n \in \mathbb{Z}$ . En tal caso, escribiremos  $f^\bullet \sim g^\bullet$ .*

Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva,  $X^\bullet$  y  $Y^\bullet$  cocomplejos en  $\mathcal{C}$ . Consideremos

$$\mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet) := \{f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \mid f^\bullet \sim 0\}.$$

Note que  $\mathcal{H}$  es un ideal de  $C(\mathcal{C})$ .

**Definición 1.3.9.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva. La **categoría homotópica de cocomplejos** es el cociente  $\mathbf{K}(\mathcal{C}) := \mathcal{C}(\mathcal{C})/\mathcal{H}$ . Recordemos que :

(a)  $\text{Obj}(\mathbf{K}(\mathcal{C})) := \text{Obj}(\mathcal{C}(\mathcal{C}))$ ;

(b) Para  $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Obj}(\mathbf{K}(\mathcal{C}))$ ,  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{C})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{C})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$ .

**Observación 1.3.10.** Note que  $\pi : \mathcal{C}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$ ,  $(X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet) \mapsto (X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet + \mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)} Y^\bullet)$ , es un funtor pleno y aditivo que satisface la siguiente propiedad universal: para toda categoría aditiva  $\mathcal{B}$  y todo funtor aditivo  $F : \mathcal{C}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $F(f) = 0 \forall f \in \mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$  existe un único funtor  $\bar{F} : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\bar{F}\pi = F$ .

**Definición 1.3.11.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva,  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\mathcal{C})$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Se tiene el nuevo cocomplejo  $X^\bullet[n]$  en  $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ , donde  $X^i[n] := X^{i+n}$  y  $d_{X[n]}^i := (-1)^n d_X^{i+n}$ ; y el siguiente morfismo  $f^\bullet[n] : X^\bullet[n] \rightarrow Y^\bullet[n]$  en  $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ , donde  $f^i[n] := f^{i+n} \forall i \in \mathbb{Z}$ .

Notemos que  $[n] : \mathcal{C}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C})$ ,  $(X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet) \mapsto (X^\bullet[n] \xrightarrow{f^\bullet[n]} Y^\bullet[n])$  define una  $R$ -equivalencia de categorías, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Mas aún, dicho funtor se extiende a una  $R$ -equivalencia

$$[n] : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C}), \quad (X^\bullet \xrightarrow{\pi(f^\bullet)} Y^\bullet) \mapsto (X^\bullet[n] \xrightarrow{\pi(f^\bullet[n])} Y^\bullet[n]).$$

**Definición 1.3.12.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ . El **cono de  $f$**  es el siguiente cocomplejo  $C(f)^\bullet$ , donde

(a)  $C(f)^n := X^n[1] \oplus Y^n \forall n \in \mathbb{Z}$ ,

(b)  $d_{C(f)}^n := \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f[1]_n & d_Y^n \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1.3.13.** [GM03, Teorema IV.9] Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. Entonces,

$$(\mathbf{K}(\mathcal{A}), [1], \Delta)$$

es una categoría triangulada, donde  $\Delta$  es la clase de todos los triángulos isomorfos a los de la forma

$$X^\bullet \xrightarrow{\pi(f^\bullet)} Y^\bullet \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \pi(1_{Y^\bullet}) \end{pmatrix}} C(f)^\bullet \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi(1_{X^\bullet[1]}) & 0 \end{pmatrix}} X^\bullet[1].$$

**Definición 1.3.14.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  y  $n, m \in \mathbb{Z}$ , con  $n < m$ . Definimos las siguientes subcategorías plenas de  $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ .

(a)  $\mathcal{C}^b(\mathcal{X}) := \{C^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) \mid \text{existe } k \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que } X^i = 0 \forall |i| > k\}$ .

(b)  $\mathcal{C}^{\leq n}(\mathcal{X}) := \{C^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) \mid X^i = 0 \forall i > n\}$ .

(c)  $C^{[n,m]}(\mathcal{X}) := \{C^\bullet \in C(\mathcal{X}) \mid X^i = 0 \forall i \notin [n, m]\}$ .

Se definen las subcategorías plenas de  $K(\mathcal{X})$ , denotadas por  $K^b(\mathcal{X})$  y  $K^{\leq n}(\mathcal{X})$ , cuyos objetos son, respectivamente, los objetos de  $C^b(\mathcal{X})$  y  $C^{\leq n}(\mathcal{X})$ .

**Definición 1.3.15.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $n \in \mathbb{Z}$ . Denotamos por  $C^{b, \leq 0}(\mathcal{A})$  a la subcategoría plena de  $C^b(\mathcal{A})$  definida por los objetos  $X^\bullet \in C^b(\mathcal{A})$  para los cuales  $H^m(X^\bullet) = 0 \forall m > 0$ . Se define la subcategoría plena  $K^{b, \leq 0}(\mathcal{A})$  de  $K(\mathcal{A})$  cuyos objetos son los objetos de  $C^{b, \leq 0}(\mathcal{A})$ .

El siguiente resultado exhibe la relación que hay entre los triángulos distinguidos en  $K(\mathcal{A})$  y las cohomologías de dichos triángulos, mediante una sucesión exacta larga.

**Teorema 1.3.16.** [GM03, IV.1.6] Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. Entonces, cada

$$X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[1] \in \Delta$$

en  $K(\mathcal{A})$  induce la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(Z^\bullet) \rightarrow H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet) \rightarrow H^i(Z^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(X^\bullet) \rightarrow \dots$$

de grupos abelianos.

El siguiente resultado muestra que, bajo ciertas restricciones en la cohomologías de los cocomplejos, un morfismo en una categoría abeliana se extiende a un único morfismo en la categoría homotópica.

**Lema 1.3.17.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana,  $P^\bullet \in C^{\leq 0}(\text{proj}(\mathcal{A}))$ ,  $X^\bullet \in C^{\leq 0}(\mathcal{A})$  tal que  $H^i(X^\bullet) = 0 \forall i < 0$  y  $f : H^0(P^\bullet) \rightarrow H^0(X^\bullet)$  un morfismo en  $\mathcal{A}$ . Entonces, existe un único morfismo  $\pi(f^\bullet) : P^\bullet \rightarrow X^\bullet$  en  $K(\mathcal{A})$  tal que  $H^0(f^\bullet) = f$ .

**Notación 1.3.18.** (1) Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $X^\bullet \in C(\mathcal{C})$ . Se tienen los siguientes cocomplejos truncados  $X_{\geq n}^\bullet$  y  $X_{\leq n}^\bullet$  inducidos por  $X^\bullet$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$(a) X_{\geq n}^i := \begin{cases} X^i & \text{si } n \leq i \\ 0 & \text{si } i < n, \end{cases} \text{ con diferenciales } d_{\geq n}^i := \begin{cases} d_X^i & \text{si } n \leq i \\ 0 & \text{si } i < n. \end{cases}$$

$$(b) X_{\leq n}^i := \begin{cases} X^i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } n < i, \end{cases} \text{ con diferenciales } d_{\leq n}^i := \begin{cases} d_X^i & \text{si } i < n \\ 0 & \text{si } n \leq i. \end{cases}$$

(2) Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Denotaremos por

$$P^\bullet(M) : \dots \rightarrow P^{-(n+1)}(M) \xrightarrow{\pi^{-(n+1)}} P^{-n}(M) \rightarrow \dots \rightarrow P^0(M) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

al cocomplejo asociado a la resolución proyectiva minimal de  $M$ .

El siguiente resultado muestra que el funtor  $\text{Ext}^n_{\Lambda}(M, -)$  se puede interpretar como un funtor representable en la categoría homotópica de módulos proyectivos.

**Lema 1.3.19.** [Fl13, Teorema 3.9.7] Sean  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}^{\bullet}(M), \mathbf{P}^{\bullet}(N)[k]) \cong \text{Ext}_{\Lambda}^k(M, N) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

El próximo resultado muestra una forma canónica de convertir una sucesión exacta de módulos a un triángulo distinguido en la categoría homotópica de módulos proyectivos.

**Lema 1.3.20.** Sea  $\epsilon : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $\epsilon$  induce el siguiente triángulo

$$\mathbf{P}^{\bullet}(A) \rightarrow \mathbf{P}^{\bullet}(B) \rightarrow \mathbf{P}^{\bullet}(C) \rightarrow \mathbf{P}^{\bullet}(A)[1]$$

distinguido en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.* Ver [Zi14, Lemma 3.5.50, Proposición 3.5.51 y Proposición 3.5.14]. □

## 1.4. Homología relativa

En [AB89] M. Auslander y R. O. Buchweitz iniciaron la teoría de aproximaciones en el contexto de las categorías abelianas. Dicho trabajo fue desarrollado con la finalidad de tener un marco teórico en el cual la teoría de aproximaciones Cohen-Macaulay maximales puede ser desarrollada.

El objetivo principal de esta sección es presentar algunos de los conceptos introducidos en [AB89].

**Definición 1.4.1.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana,  $\omega, \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$  y  $Z \in \mathcal{A}$ .

(a) La **dimensión proyectiva relativa** de  $Z$ , con respecto a  $\mathcal{X}$ , es

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(Z) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid Z \in {}^{\perp_j} \mathcal{X} \ \forall j > n\}.$$

En caso de que el conjunto anterior sea vacío, escribiremos  $\text{pd}_{\mathcal{X}}(Z) = \infty$ . Si  $\mathcal{X} = \mathcal{C}$ , escribimos  $\text{pd}(Z) := \text{pd}_{\mathcal{X}}(Z)$ .

(b) Decimos que  $\omega$  es un **generador relativo en  $\mathcal{X}$**  si  $\omega \in \mathcal{X}$  y  $\forall X \in \mathcal{X}$  existe una sucesión  $0 \rightarrow X' \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow 0$  exacta en  $\mathcal{C}$ , con  $W \in \omega$  y  $X' \in \mathcal{X}$ . Decimos que  $\omega$  es  **$\mathcal{X}$ -proyectivo** si  $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$ .

(c) La **dimensión de  $\mathcal{X}$ -resolución** de  $Z$  es  $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(Z) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe una sucesión exacta } 0 \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow Z \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{C} \text{ con } X_i \in \mathcal{X} \ \forall 0 \leq i \leq n\}$ . En caso de que el conjunto anterior sea vacío, escribiremos  $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(Z) = \infty$ . Se tiene la siguiente clase  $\mathcal{X}^{\wedge} := \{Y \in \mathcal{C} \mid \text{resdim}_{\mathcal{X}}(Y) \in \mathbb{N}\}$ .

Dualmente se definen la **dimensión inyectiva relativa** de  $Z$   $\text{id}_{\mathcal{X}}(Z)$ , **cogenerador relativo en  $\mathcal{X}$**  y  **$\mathcal{X}$ -inyectivo** y **dimensión de  $\mathcal{X}$ -coresolución** de  $Z$ .

Los siguientes enunciados están basados en resultados clásicos de teoría de homología relativa que se encuentran en [AB89] y [AR91]. El primer inciso del siguiente resultado tiene sus orígenes en [AB89, Teorema 1.1] y da una relación de estos conceptos con el de par de cotorsión completo. El tercer inciso puede encontrarse en [AB89, Lema 3.7] nos permite calcular a un cogenerador  $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en  $\mathcal{X}$ , con ayuda del inciso (b). La versión aquí presentada puede encontrarse en [BMPS18].

En lo que sigue, la expresión  $\text{resdim}_{\omega}(K) = -1$  (obtenida de  $\text{resdim}_{\omega}(K) = n - 1$ , al tomar  $n = 0$ ) significará que  $K = 0$ .

**Lema 1.4.2.** *Sea  $(\mathcal{X}, \omega)$  un par de subcategorías en una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ , con  $\omega$  un cogenerador relativo en  $\mathcal{X}$ . Las siguientes condiciones se satisfacen:*

- (a) [BMPS18, Teorema 2.8] *Si  $0 \in \mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}$  es cerrado por extensiones. Entonces,  $\forall C \in \mathcal{A}$  tal que  $n := \text{resdim}_{\mathcal{X}}(C) < \infty$  existen sucesiones exactas  $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  y  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} H \rightarrow X' \rightarrow 0$ , con  $X, X' \in \mathcal{X}$ ,  $\text{resdim}_{\omega}(K) = n - 1$  y  $\text{resdim}_{\omega}(H) \leq n$ . Más aún, si  $\omega$  es  $\mathcal{X}$ -inyectivo, entonces  $g$  es una  $\mathcal{X}$ -precubierta,  $f$  es una  $\omega^{\wedge}$ -preenvolvente,  $\text{id}_{\mathcal{X}}(K) = 0$  y  $\text{pd}_{\omega^{\wedge}}(X') = 0$ .*
- (b) [BMPS18, Teorema 2.13] *Si  $\mathcal{X}$  es cerrado por extensiones y  $\omega = \text{smd}(\omega)$  es  $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en  $\mathcal{X}$ . Entonces,  $\omega^{\wedge} = \mathcal{X}^{\perp} \cap \mathcal{X}^{\wedge}$ .*
- (c) [BMPS18, Proposición 2.7] *Si  $\omega = \text{smd}(\omega)$  es  $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en  $\mathcal{X}$ . Entonces,*

$$\omega = \mathcal{X}^{\perp} \cap \mathcal{X} = \mathcal{X} \cap \omega^{\wedge}.$$

Siguiendo la notación introducida en [BMPS18], recordaremos las siguientes nociones.

**Definición 1.4.3.** *Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ . Decimos que :*

- (a)  $\mathcal{X}$  es **pre-resolvente** si es cerrada por extensiones y kerneles de epimorfismos entre objetos de  $\mathcal{X}$ ;
- (b)  $\mathcal{X}$  es **resolvente** si es pre-resolvente y  $\text{proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ ;
- (c)  $\mathcal{X}$  es **pre-corresolvente** si es cerrada por extensiones y cokernels de monomorfismos entre objetos de  $\mathcal{X}$ ;
- (d)  $\mathcal{X}$  es **corresolvente** si es pre-corresolvente e  $\text{inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ ;
- (e)  $\mathcal{X}$  es **gruesa a izquierda** si es pre-resolvente y cerrada bajo sumandos directos en  $\mathcal{C}$ ;
- (f)  $\mathcal{X}$  es **saturada a izquierda** si es gruesa a izquierda y  $\text{proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ ;
- (g)  $\mathcal{X}$  es **gruesa a derecha** si es pre-corresolvente y cerrada bajo sumandos directos en  $\mathcal{A}$ ;

(h)  $\mathcal{X}$  es **gruesa** si es gruesa a derecha y a izquierda.

Denotaremos por  $\text{Thick}^-(\mathcal{X})$  a la clase gruesa a izquierda de  $\mathcal{A}$  mas pequeña que contiene a  $\mathcal{X}$ . Análogamente,  $\text{Thick}^+(\mathcal{X})$  es la clase gruesa a derecha de  $\mathcal{A}$  mas pequeña que contiene a  $\mathcal{X}$ , y  $\text{Thick}(\mathcal{X})$  es la clase gruesa de  $\mathcal{A}$  mas pequeña que contiene a  $\mathcal{X}$ .

**Definición 1.4.4.** [BMPS18, Definición 2.5] Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $(\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{A}^2$ . Decimos que  $(\mathcal{X}, \omega)$  es un **par de Frobenius a izquierda** en  $\mathcal{A}$  si las siguientes condiciones se satisfacen:

(a)  $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$ ;

(b)  $\omega = \text{smd}(\omega)$ ;

(c)  $\omega$  es un cogenerador  $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en  $\mathcal{X}$ .

El siguiente resultado es fundamental para demostrar una boyección entre ciertos tipos de pares de Frobenius y contextos débiles de Auslander-Buchweitz a izquierda (ver [BMPS18, Corolario 5.14]).

**Lema 1.4.5.** [BMPS18, Proposición 5.12] Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana Krull-Schmidt, con suficientes proyectivos y  $\mathcal{Z}$  una subcategoría gruesa de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{X}$  es una subclase precubriente de  $\mathcal{Z}$  y saturada a izquierda en  $\mathcal{A}$ , entonces las siguientes condiciones se satisfacen :

(a) para todo  $Z \in \mathcal{Z}$ , existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$  tal que  $g$  es una  $\mathcal{X}$ -cubierta y  $K \in \mathcal{X}^{\perp 1}$ ;

(b)  $\mathcal{X}^{\perp 1} = \mathcal{X}^{\perp}$ .

**Definición 1.4.6.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ . Decimos que  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  es :

(a) un **par de cotorsión** si  $\mathcal{X} = {}^{\perp 1}\mathcal{Y}$  y  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp 1}$ ;

(b) un **par hereditario** si  $\text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ .

El siguiente resultado es conocido como el **Lema de García Rozas** y caracteriza a los pares de cotorsión hereditarios.

**Lema 1.4.7.** [GT06, Lema 2.2.10] Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos y  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$  un par de cotorsión. Entonces,  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  es hereditario si, y sólo si,  $\mathcal{Y}$  es corresolvente si, y sólo si,  $\mathcal{X}$  es resolvente.

## 1.5. Módulos inclinantes

En esta sección  $\Lambda$  denotará una  $R$ -álgebra de Artin.

**Definición 1.5.1.** [Mi86] Sean  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $T$  es **n-inclinante** si :

- (a)  $\text{pd}(T) \leq n$ ;
- (b)  $T \in T^\perp$ ;
- (c)  $\text{coresdim}_{\text{add}(T)}(\Lambda\Lambda) \leq n$ .

Si no queremos ser explícitos con el natural  $n$ , diremos simplemente *inclinante*. La noción dual de  $\Lambda$ -módulo inclinante es  $\Lambda$ -módulo **coinclinante**.

Recordemos que para un anillo  $R$ , un  $R$ -módulo  $M$  es **fiel** si  $\text{ann}_R(M) = 0$ , donde  $\text{ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \forall m \in M\}$ . El siguiente resultado muestra que los módulos inclinantes son fieles.

**Lema 1.5.2.** [ASS06, Lema VI.2.2] Para  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ , las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $M$  es fiel.
- (b) Existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow \Lambda \rightarrow M' \rightarrow K \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $M' \in \text{add}(M)$ .
- (c) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow M'' \rightarrow D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda\Lambda) \rightarrow 0$$

en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $M'' \in \text{add}(M)$ .

La siguiente definición es debida a M. Auslander e I. Reiten [AR91] y ayuda a caracterizar los módulos inclinantes, su clase perpendicular derecha y ver como esta última forma un par de cotorsión completo.

**Definición 1.5.3.** Sea  $\mathcal{Y} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . Denotaremos por  $\mathcal{X}_{\mathcal{Y}}$  a la subcategoría de los  $\Lambda$ -módulos  $Z$  tales que  $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(Z) = 0$  y existe una sucesión exacta infinita  $0 \rightarrow Z \rightarrow Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_2 \rightarrow \dots$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(\text{Im}(f_i)) = 0$  y  $Y_i \in \mathcal{Y} \cup \{0\} \forall i \in \mathbb{N}$ .

Dualmente, se define la subcategoría  ${}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}$ .

**Lema 1.5.4.** Para  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $T \in T^\perp$ , las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $T$  es inclinante si, y sólo si,  $({}_{\text{add}(T)}\mathcal{X})^\vee = \text{mod}(\Lambda)$ .
- (b) Si  $T$  es inclinante, entonces  ${}_{\text{add}(T)}\mathcal{X} = T^\perp$ .

(c) Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Si  $T$  es inclinante, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0,$$

con  $X \in T^\perp$ .

*Demostración.* (a) y (b) se siguen del dual de [AR91, Teorema 5.4]. La primera parte de (c) se sigue de (a) y (b).  $\square$

La siguiente caracterización muestra como identificar a los módulos inclinantes a partir de su clase perpendicular derecha y su clase de Ext-inyectivos.

**Lema 1.5.5.** *Sea  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\text{pd}(T) \leq n$ . Entonces  $T$  es  $n$ -inclinante si, y sólo si,  $T^\perp$  es una clase preenvolvente y  $\text{add}(T) = T^\perp \cap {}^\perp(T^\perp)$ .*

*Demostración.* Ver el dual de [AR91, Proposición 5.11].  $\square$

La siguiente definición nos da un criterio para decidir si un módulo es inclinante.

**Definición 1.5.6.** *Sean  $\mathcal{C}$  una  $R$ -categoría Krull-Schmidt y  $X \in \mathcal{C}$ , con  $X \neq 0$ . En tal caso,  $X$  tiene una descomposición  $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i^{r_i}$  única (hasta isomorfismos) en suma directa finita de objetos inescindibles  $X_i$  no isomorfos dos a dos. En el caso anterior, diremos que el **rango** de  $X$  es  $n$ , y escribiremos  $\text{rk}(X) := n$ . Por convención, el rango del objeto cero es 0.*

**Lema 1.5.7.** [Mi86, Corolario 1, Sección 1] *Para  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  inclinante, se tiene que  $\text{rk}(T) = \text{rk}(\Lambda)$ .*

**Definición 1.5.8.** *Decimos que  $\Lambda$  es **n-Gorenstein** si  $\text{id}(\Lambda) = n = \text{id}(\Lambda^{op}) < \infty$ . En caso de que no queramos explicitar dicho natural  $n$ , en un álgebra  $n$ -Gorenstein, diremos simplemente que  $\Lambda$  es Gorenstein.*

Notemos el hecho de que  ${}_\Lambda\Lambda$  sea Gorenstein es equivalente a que  $\Lambda$  sea un  $\Lambda$ -módulo coinclinante y que con  $\text{id}(\Lambda) < \infty$  y  $\text{id}(\Lambda^{op}) < \infty$ , se sigue necesariamente que  $\text{id}(\Lambda) = \text{id}(\Lambda^{op})$  [AR91, Lema 6.9].

El siguiente resultado caracteriza a las álgebras Gorenstein mediante los  $\Lambda$ -módulos inclinantes y coinclinantes.

**Lema 1.5.9.** [HU96, Lema 1.3] *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *Todo  $\Lambda$ -módulo inclinante es coinclinante.*
- (b) *Existe un  $\Lambda$ -módulo inclinante que es coinclinante.*
- (c)  *$\Lambda$  es Gorenstein.*

El siguiente resultado da una caracterización de los módulos inclinantes a partir de una igualdad de subcategorías.

**Definición 1.5.10.** Sea  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . Decimos que  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  está **n-generado** por  $\mathcal{X}$  si existe una sucesión exacta  $X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow M \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde  $X_i \in \mathcal{X}^\oplus \forall i \in [1, n]$ . Escribimos

$$\text{gen}_n(\mathcal{X}) := \{M \in \text{mod}(\Lambda) \mid M \text{ está } n\text{-generado por } \mathcal{X}\}$$

y  $\text{gen}(\mathcal{X}) := \text{gen}_1(\mathcal{X})$ . Si  $\text{gen}(\mathcal{X}) = \text{mod}(\Lambda)$  y  $\text{add}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ , diremos que  $\mathcal{X}$  es una subcategoría **generadora**. Decimos que  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  es un **generador aditivo** si  $\text{add}(M)$  es una subcategoría generadora.

**Lema 1.5.11.** [We10, Corolario 3.11] Sea  $T \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $T$  es  $n$ -inclinante si, y sólo si,  $\text{gen}_n(T) = T^\perp$ .

El último teorema de esta sección está destinado a probar que los módulos inclinantes pueden ser parametrizados por algunas subcategorías de la categoría de módulos.

Recordamos que un  $\Lambda$ -módulo  $M$  es **básico** si en su descomposición en  $\Lambda$ -módulos indecomponibles  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ , se tiene que  $M_j$  no es isomorfo a  $M_k$  para  $j \neq k$ .

**Teorema 1.5.12.** Para  $T \in \text{mod}(\Lambda)$ , la correspondencia  $T \mapsto T^\perp$  es una biyección entre las iso-clases de  $\Lambda$ -módulos inclinantes básicos y las subcategorías  $\mathcal{X}$  de  $\text{mod}(\Lambda)$  que son saturadas a derecha, preenvolventes y tales que  $\text{mod}(\Lambda) = \mathcal{X}^\vee$ .

*Demostración.* Ver el dual de [AR91, Teorema 5.5]. □

## 1.6. Teoría sedimentada

En [AI12] T. Aihara y O. Iyama mostraron la utilidad de las subcategorías sedimentadas en categorías trianguladas. Dicho trabajo fue desarrollado con la finalidad de tener un marco teórico en el cual mejorar la mutación de objetos inclinantes, al encontrar triángulos distinguidos, mediante preenvolventes y precubiertas, que al mutar un objeto sedimentado nos otorga otro objeto sedimentado, [AI12, Teorema 2.31].

El objetivo principal de ésta sección es presentar algunos de los conceptos introducidos en [MSSS11] y varios resultados de [AI12].

**Notación 1.6.1.** Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Se tienen los siguientes complementos ortogonales en  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{X}$ :

- (a)  $\mathcal{X}^{\perp > n} := \{Y \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[j]) = 0 \forall X \in \mathcal{X} \forall j > n\}$ ;
- (b)  $\mathcal{X}^{\perp < n} := \{Y \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[j]) = 0 \forall X \in \mathcal{X} \forall j < n\}$ ;
- (c)  $\mathcal{X}^{\perp n} := \{Y \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[n]) = 0 \forall X \in \mathcal{X}\}$ .

**Definición 1.6.2.** [AI12, Definición 2.1] Sea  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada. Para  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  y  $S \in \mathcal{T}$ , decimos que:

- (a)  $\mathcal{S}$  es **presedimentada** si  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\perp > 0}$  y  $\mathcal{S} = \text{add}(\mathcal{S})$ ;
- (b)  $\mathcal{S}$  es **sedimentada** si  $\mathcal{S}$  es presedimentada y  $\text{thick}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$ ;
- (c)  $\mathcal{S}$  es **sedimentado** (presedimentado) si  $\text{add}(\mathcal{S})$  es sedimentada (presedimentada).

Denotamos por  $\text{silt}(\mathcal{C})$  a una clase de representantes de iso-clases de objetos sedimentados básicos en  $\mathcal{T}$ .

Los siguientes resultados muestran que la definición de objeto sedimentado le da una interpretación triangulada a la noción de módulo inclinante.

**Lema 1.6.3.** Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y  $T \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $T$  es inclinante si, y sólo si,  $P^\bullet(T)$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.* Ver [We13, Observación 3.3 y Corolario 3.7]. □

**Notación 1.6.4.** Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{T}$ , no necesariamente trianguladas.

$$\mathcal{X} * \mathcal{Y} := \{Z \in \mathcal{T} \mid \exists X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X[1] \in \Delta, \text{ con } X \in \mathcal{X} \text{ y } Y \in \mathcal{Y}\}.$$

**Definición 1.6.5.** [MSSS11, Definición 3.1] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , las subcategorías  $\epsilon_n^\wedge(\mathcal{X})$  y  $\epsilon_n^\vee(\mathcal{X})$  se definen recursivamente como sigue:

- $\epsilon_0^\wedge(\mathcal{X}) := \mathcal{X}$ ;
- para  $n \geq 1$ , definimos  $\epsilon_{n+1}^\wedge(\mathcal{X}) := \mathcal{X} * \epsilon_n^\wedge(\mathcal{X})[1]$ .

Para  $Z \in \mathcal{C}$ , la **dimensión de  $\mathcal{X}$ -resolución** de  $Z$  es

$$\text{resdim}_{\mathcal{X}}(Z) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid Z \in \epsilon_n^\wedge(\mathcal{X})\},$$

donde  $\min(\emptyset) := \infty$ . Se tiene la subcategoría  $\mathcal{X}^\wedge := \{Y \in \mathcal{T} \mid \text{resdim}_{\mathcal{X}}(Y) \in \mathbb{N}\}$ .

- $\epsilon_0^\vee(\mathcal{X}) := \mathcal{X}$ ;
- para  $n \geq 1$ , definimos  $\epsilon_{n+1}^\vee(\mathcal{X}) := \epsilon_n^\vee(\mathcal{X})[-1] * \mathcal{X}$ .

Para  $Z \in \mathcal{C}$ , la **dimensión de  $\mathcal{X}$ -corresolución** de  $Z$  es

$$\text{coresdim}_{\mathcal{X}}(Z) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid Z \in \epsilon_n^\vee(\mathcal{X})\},$$

donde  $\min(\emptyset) := \infty$ . Se tiene la subcategoría  $\mathcal{X}^\vee := \{Y \in \mathcal{T} \mid \text{coresdim}_{\mathcal{X}}(Y) \in \mathbb{N}\}$ .

**Lema 1.6.6.** Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin y  $P^\bullet \in \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Entonces  $P^\bullet$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  si, y sólo si, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que satisface las siguientes propiedades:

- (a)  $P^\bullet \in \epsilon_n^\wedge(\text{add}(\Lambda[0]))$ ;

(b)  $P^\bullet \in (P^\bullet)^{\perp_{>0}}$ ;

(c)  $\Lambda[0] \in \epsilon_n^\vee(\text{add}(P^\bullet))$ .

*Demostración.* Ver [We13, Observación 3.3 y Teorema 3.5]. □

El siguiente resultado muestra que el rango en los objetos sedimentados son un invariante en una  $R$ -categoría triangulada Krull-Schmidt, que es una propiedad que también tienen los módulos inclinantes.

**Lema 1.6.7.** [AI12, Corolario 2.28] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada Krull-Schmidt y  $S \in \mathcal{T}$  sedimentado. Si  $T \in \mathcal{T}$  es sedimentado, entonces  $\text{rk}(S) = \text{rk}(T)$ .

El siguiente resultado muestra que las subcategorías sedimentadas estratifican ciertas categorías trianguladas y forman un par de torsión canónico.

**Definición 1.6.8.** [AI12, Definición 1.4] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  un par de subcategorías de objetos de  $\mathcal{T}$  cerradas por sumandos directos. Decimos que  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  es un **par de torsión** si  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$  y  $\mathcal{X} * \mathcal{Y} = \mathcal{C}$ .

**Lema 1.6.9.** [AI12, Proposición 2.23] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada Krull-Schmidt y  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  sedimentada. Entonces:

(a)  $\mathcal{T} = \cup_{i \in \mathbb{N}^+} \mathcal{S}[-i] * \cdots * \mathcal{S}[i] = \text{thick}(\mathcal{S})$ ;

(b)  $\mathcal{S}^{\perp_{>0}} = \mathcal{S}^\wedge$ ;

(c)  $({}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}), \mathcal{S}^{\perp_{>0}})$  es un par de torsión en  $\mathcal{T}$ .

Los próximos resultados están orientados a dar una caracterización de los objetos sedimentados en la categoría homotópica de módulos proyectivos.

**Lema 1.6.10.** Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada Krull-Schmidt,  $X \in \mathcal{T}$  presedimentado y  $Y \in X^{\perp_{>0}}$ . Si  $\eta : Z \rightarrow X' \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z[1] \in \Delta$  en  $\mathcal{C}$ , donde  $f$  es una  $\text{add}(X)$ -precubierta, entonces  $Z \in X^{\perp_{>0}}$ .

*Demostración.* Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, -)$  a  $\eta$  se tienen las siguientes sucesiones exactas, ya que  $X$  es presedimentado en  $\mathcal{T}$  y  $Y \in X^{\perp_{>0}}$ ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, f)} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Z[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X'[1]) = 0,$$

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[k]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Z[1+k]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X'[1+k]) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

Por lo tanto,  $Z \in X^{\perp_{>0}}$ . □

**Proposición 1.6.11.** Sea  $P^\bullet \in \mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \cap \mathbb{K}^{\leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$  presedimentado en  $\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , donde  $\Lambda$  es una  $R$ -álgebra de Artin. Entonces,  $P^\bullet$  es sedimentado en  $\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  si, y sólo si,  $(P^\bullet)^{\perp_{>0}} \cap \mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \subseteq \mathbb{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $Q^\bullet \in (P^\bullet)^{\perp > 0} \cap \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Lema 1.6.9 (b) se tiene que  $Q^\bullet \in \epsilon_m^\wedge(\text{add}(P^\bullet))$ , con  $m \in \mathbb{N}$ . Haremos la prueba por inducción sobre  $m$ .

Para  $m = 0$ , se sigue que existe  $P^\bullet \in \text{add}(P^\bullet)$  tal que  $Q^\bullet \cong P^\bullet$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  y así  $Q^\bullet \in \mathbf{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ .

Sea  $m \geq 1$ . Existe  $R^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \bar{P}^\bullet \rightarrow Q^\bullet \rightarrow R^\bullet[1]$ , con  $R^\bullet \in \epsilon_{m-1}^\wedge(\text{add}(P^\bullet))$  y  $\bar{P}^\bullet \in \text{add}(P^\bullet)$ . Por hipótesis de inducción se tiene que  $R^\bullet \in \mathbf{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ ; y dado que  $Q^\bullet$  es isomorfo al cono de  $f^\bullet$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , se concluye que  $Q^\bullet \in \mathbf{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ .

$\Leftarrow$ ) Dado que  $P^\bullet \in \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \cap \mathbf{K}^{\leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$  existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $P^\bullet \in \mathbf{K}^{[-s, 0]}(\text{proj}(\Lambda))$ . Construiremos

$$\{\eta_k : P_k^\bullet \rightarrow Q_k^\bullet \rightarrow \Lambda[k] \rightarrow P_k^\bullet[1] \in \Delta\}_{k=0}^s$$

en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  tales que  $Q_k^\bullet \in \epsilon_{s-k}^\vee(\text{add}(P^\bullet))$  y  $P_k^\bullet \in (P^\bullet)^{\perp > 0} \cap \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Para  $k = s$ , sea  $f^\bullet : Q_s^\bullet \rightarrow \Lambda[s]$  una  $\text{add}(P^\bullet)$ -precubierta. Luego, completamos  $f^\bullet$  a un triángulo distinguido  $\eta_s : P_s^\bullet \rightarrow Q_s^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \Lambda[s] \rightarrow P_s^\bullet[1]$ , en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Lema 1.6.10, se tiene que  $P_s^\bullet \in (P^\bullet)^{\perp > 0}$ .

Supongamos que está construido  $\eta_{j+1}$ . Veamos como construir  $\eta_j$  a partir de  $\eta_{j+1}$ . En efecto, sea  $g^\bullet : \bar{P}^\bullet \rightarrow P_{j+1}^\bullet$  una  $\text{add}(P^\bullet)$ -precubierta y  $P_j^\bullet \rightarrow \bar{P}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} P_{j+1}^\bullet \rightarrow P_j^\bullet[1] \in \Delta$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por cambio de base aplicado a los triángulos  $P_j^\bullet \rightarrow \bar{P}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} P_{j+1}^\bullet \rightarrow P_j^\bullet$  y  $Q_{j+1}^\bullet[-1] \rightarrow \Lambda[j] \rightarrow P_{j+1}^\bullet \rightarrow Q_{j+1}^\bullet$  se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , con filas y columnas triángulos distinguidos,

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_j^\bullet & \xlongequal{\quad} & P_j^\bullet & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Q_{j+1}^\bullet[-1] & \longrightarrow & Q_k^\bullet & \longrightarrow & \bar{P}^\bullet & \longrightarrow & Q_{j+1}^\bullet \\ & & \downarrow & & \downarrow^{g^\bullet} & & \downarrow \\ Q_{j+1}^\bullet[-1] & \longrightarrow & \Lambda[j] & \longrightarrow & P_{j+1}^\bullet & \longrightarrow & Q_{j+1}^\bullet \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & P_j^\bullet[1] & \xlongequal{\quad} & P_j^\bullet[1] & & \end{array}$$

Notemos que  $Q_{j+1}^\bullet[-1] \in \epsilon_{s-(j+1)}^\vee(\text{add}(P^\bullet))[-1]$  y

$$Q_k^\bullet \in \epsilon_{s-(j+1)}^\vee(\text{add}(P^\bullet))[-1] * \text{add}(P^\bullet) = \epsilon_{s-j}^\vee(\text{add}(P^\bullet)).$$

Por el Lema 1.6.10 se concluye que  $P_j^\bullet \in (P^\bullet)^{\perp > 0} \cap \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Finalmente, consideremos el triángulo distinguido  $\eta_0 : P_0^\bullet \rightarrow Q_0^\bullet \rightarrow \Lambda[0] \xrightarrow{h^\bullet} P_0^\bullet[1]$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Ahora, como  $P_0^\bullet \in (P^\bullet)^{\perp > 0} \cap \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \subseteq \mathbf{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ , se tiene que  $H^0(P_0^\bullet[1]) = 0$ , por lo que  $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\Lambda[0], P_0^\bullet[1]) = 0$  y así  $h^\bullet = 0$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por lo cual,  $P^\bullet \oplus \Lambda[0] = Q_0^\bullet \in \epsilon_s^\vee(\text{add}(P^\bullet)) \subseteq \text{thick}(\text{add}(P^\bullet))$ . Por lo tanto,  $\Lambda[0] \in \text{thick}(\text{add}(P^\bullet))$  y así  $P^\bullet$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .  $\square$

Las siguientes definiciones están orientadas a definir las categorías sedimentadas-discretas, que tienen una propiedad interesante. Puesto que todo objeto presedimentado es sumando directo de uno sedimentado.

**Definición 1.6.12.** [MS16, Definición 3.2] Decimos que una  $R$ -categoría  $\mathcal{T}$  es una  $R$ -categoría triangulada de Artin si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a)  $\mathcal{T}$  es **Hom-finita**, esto es,  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \in \text{mod}(R) \forall X, Y \in \mathcal{C}$ ;
- (b)  $\mathcal{T}$  es *Krull-Schmidt*;
- (c)  $\mathcal{T}$  es una  $R$ -categoría triangulada, con  $R$  artiniano.

**Definición 1.6.13.** [AI12, Definición 2.10] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $S, T \in \mathcal{T}$  objetos sedimentados. Escribimos  $T \leq S$  si  $T \in S^{\perp > 0}$ .

**Definición 1.6.14.** [AM17, Definición 2.2] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada. Decimos que  $\mathcal{T}$  es **sedimentada-discreta** si  $\forall S \in \text{silt}(\mathcal{T})$  y  $n \in \mathbb{N}^+$ , el conjunto

$$\{T \in \text{silt}(\mathcal{T}) \mid S[n] \leq T \leq S\}$$

es *finito*.

**Lema 1.6.15.** [Ai13, Proposición 3.8] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada de Artin. Entonces,  $\mathcal{T}$  es *sedimentada-discreta* si, y sólo si, existe  $S \in \text{silt}(\mathcal{C})$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ , el conjunto  $\{T \in \text{silt}(\mathcal{C}) \mid S[n] \leq T \leq S\}$  es *finito*.

Una de las principales características de las categorías sedimentadas-discretas es el siguiente resultado.

**Teorema 1.6.16.** [AM17, Teorema 2.15] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada de Artin y *sedimentada-discreta*. Si  $S \in \mathcal{C}$  es *sedimentado*, entonces existe  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $S \oplus T$  es *sedimentado*.

## 1.7. Subfuntores del $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$

En esta sección,  $\Lambda$  denotará a una  $R$ -álgebra de Artin.

El objetivo es introducir los subfuntores aditivos del  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ , los cuales se aplicarán para estudiar subcategorías homológicamente finitas en  $\text{mod}(\Lambda)$ . También se introducirán y estudiarán los  $\Lambda$ -módulos inclinantes relativos. Para ello, seguiremos el tratamiento dado por M. Auslander y Ø. Solberg en [AS93] y [ASII93].

**Definición 1.7.1.** Sea  $F : (\text{mod}(\Lambda))^{\text{op}} \times \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{Sets}$  un *funtor*.

- (a) Decimos que  $G : (\text{mod}(\Lambda))^{\text{op}} \times \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{Sets}$  es un **subfuntor** de  $F$  si existe un *monomorfismo natural*  $\eta : G \rightarrow F$ .

(b) Decimos que un subfunctor  $G : (\text{mod}(\Lambda))^{op} \times \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  de  $F$  es un **subfunctor aditivo** si  $G(X, -) : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  y  $G(-, Y) : (\text{mod}(\Lambda))^{op} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  son funtores aditivos  $\forall X, Y \in \text{mod}(\Lambda)$ .

Sean  $\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  y  $\epsilon : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C \rightarrow 0$  sucesiones exactas en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Recordamos que  $\eta$  y  $\epsilon$  son equivalentes si existe un isomorfismo  $v : B \rightarrow B'$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Se puede ver que la relación anterior es una relación de equivalencia en la clase de sucesiones exactas cortas en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Denotaremos por  $[\eta]$  a la clase de equivalencia de la sucesión exacta corta  $\eta$ .

**Definición 1.7.2.** [AS93, Sección 1] Sean  $\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ . Decimos que  $\eta$  es **F-exacta** si  $[\eta] \in F(C, A)$ .

Los siguientes resultados muestra algunas propiedades básicas de las sucesiones  $F$ -exactas.

**Lema 1.7.3.** [AS93] Sea  $F$  un subfunctor de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ . Entonces, la clase de sucesiones  $F$ -exactas es cerrada por pullbacks, pushouts y sumas directas finitas.

*Demostración.* Para mas detalles, se puede consultar en [Sa12, Corolario 1.1.10].  $\square$

**Lema 1.7.4.** [Sa12, Lema 2.2.16] Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\mathcal{X}}$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A & \equiv & A & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Entonces la primera columna y el primer renglón del diagrama anterior son  $F$ -exactos si, y sólo si, la segunda columna y el segundo renglón son  $F$ -exactos.

**Definición 1.7.5.** [AS93, Sección 1] Sea  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ .

- (a) La clase  $\mathcal{P}(F)$  de **F-proyectivos** es una subclase de  $\text{mod}(\Lambda)$  cuyos objetos son los  $\Lambda$ -módulos  $P$  tales que la sucesión  $0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, A) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, B) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, C) \rightarrow 0$  es exacta, para toda sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ . En particular, se tiene que  $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{P}(F)$ .
- (b) Decimos que  $F$  tiene **suficientes proyectivos** si  $\forall C \in \text{mod}(\Lambda)$  existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ , con  $P \in \mathcal{P}(F)$ .

Los conceptos de módulos  $F$ -inyectivos y subfunctor con suficientes inyectivos se definen dualmente.

El siguiente resultado nos da una descripción completa de los módulos  $F$ -proyectivos y  $F$ -inyectivos, a través de las translaciones de Auslander-Reiten.

**Notación 1.7.6.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{C}^2$ . Se tiene la siguiente subcategoría  $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} := \{X \oplus Y \in \mathcal{C} \mid X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$ .

**Lema 1.7.7.** [AS93, Corolario 1.6 (a), (b)] Para un subfunctor aditivo  $F$  de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ , se tiene que  $\mathcal{I}(F) = \tau(\mathcal{P}(F)) \oplus \text{inj}(\Lambda)$  y  $\mathcal{P}(F) = \tau^{-1}(\mathcal{I}(F)) \oplus \text{proj}(\Lambda)$ .

Como una aplicación de la definición anterior, tenemos un criterio para decidir cuando una sucesión es  $F$ -exacta.

**Lema 1.7.8.** [AS93, Proposición 1.5 (a)] Sean  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$  con suficientes proyectivos y  $\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $\eta$  es una sucesión  $F$ -exacta si, y sólo si,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, A) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, B) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, C) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta  $\forall P \in \mathcal{P}(F)$ .

El siguiente resultado caracteriza a los  $F$ -proyectivos en ciertos subfuntores de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ . Los cuales caracterizan a los subfuntores de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$  que tienen suficientes  $F$ -proyectivos [AS93, Teorema 1.12]

**Notación 1.7.9.** [AS93, Sección 1] Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ ,  $A, C \in \text{mod}(\Lambda)$ . Se tiene el subfunctor  $F_{\mathcal{X}} : \text{mod}(\Lambda)^{op} \times \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(R)$  de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ , dado por las siguientes asignaciones:

- (a)  $F_{\mathcal{X}}(C, A)$  consta de las clases  $[\eta]$  de sucesiones exactas  $\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  tales que  $\text{Hom}_\Lambda(X, B) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, C)$  es un epimorfismo  $\forall X \in \mathcal{X}$ .
- (b)  $F_{\mathcal{X}}(\alpha, \beta) := \text{Ext}_\Lambda^1(\alpha, \beta)$ .

**Lema 1.7.10.** [AS93, Proposición 1.10] Sea  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ . Entonces,  $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X} \oplus \text{proj}(\Lambda)$ . En particular,  $\mathcal{P}(F_{\text{add}(X)}) = \text{add}(X)$  si  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  es un generador aditivo.

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos la siguiente caracterización de las clases funtorialmente finitas.

**Lema 1.7.11.** *Sea  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X} = \text{add}(\mathcal{X})$ . Entonces,  $F_{\mathcal{X}}$  tiene suficientes proyectivos e inyectivos si, y sólo si,  $\mathcal{X}$  es funtorialmente finita.*

*Demostración.* Se sigue de [AS93, Corolario 1.13] y del Lema 1.7.10.  $\square$

**Notación 1.7.12.** *Para  $\mathcal{Y} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ ,  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$  con suficientes proyectivos e inyectivos y  $n \in \mathbb{N}^+$ , se consideran las subcategorías*

$$\mathcal{Y}^{F \perp n} := \{Z \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_{\mathbb{F}}^n(Y, Z) = 0 \forall Y \in \mathcal{Y}\},$$

$${}^{F \perp n} \mathcal{Y} := \{Z \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_{\mathbb{F}}^n(Z, Y) = 0 \forall Y \in \mathcal{Y}\}.$$

**Definición 1.7.13.** [ASII93, Sección 2] *Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ ,  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ .*

(a) *Decimos que una sucesión exacta  $0 \rightarrow X_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} X_r \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  es  $F$ -exacta si  $0 \rightarrow K_{i+1} \rightarrow X_{i+1} \rightarrow K_i \rightarrow 0$  es  $F$ -exacta  $\forall 0 \leq i \leq r-1$ , donde  $K_0 := X_0$ ,  $K_i := \text{Ker}(d_i)$  para  $i \in [1, r]$  y  $K_r := X_{r+1}$ .*

(b) *La **dimensión  $(\mathcal{X}, F)$ -resolución** de  $M$  es  $\text{resdim}_{(\mathcal{X}, F)}(M) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid \text{existe una sucesión } F\text{-exacta } 0 \rightarrow X_r \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ con } X_i \in \mathcal{X} \forall 0 \leq i \leq r\}$ . En caso de que el conjunto anterior sea vacío, escribiremos  $\text{resdim}_{(\mathcal{X}, F)}(M) := \infty$ .*

(c) *Si  $F$ -tiene suficientes proyectivos, la **F-dimensión proyectiva relativa** de  $M$  es*

$$\text{pd}_F(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid M \in {}^{F \perp n+k} \text{mod}(\Lambda) \forall k \in \mathbb{N}^+\}.$$

*Se definen dualmente los conceptos de la dimensión de  $(\mathcal{X}, -F)$ -corresolución y  $F$ -dimensión inyectiva relativa.*

Lo siguiente es introducir el análogo relativo de los módulos inclinantes y ver que la condición del rango cambia, como sería lo esperado.

**Definición 1.7.14.** [ASII93, Sección 3] *Sean  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$  con suficientes proyectivos e inyectivos. Decimos que  $T$  es **n-F-inclinante** si:*

(a)  $\text{pd}_F(T) \leq n$ ;

(b)  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^i(T, T) = 0 \forall 1 \leq i \leq n$ ;

(c)  $\text{coresdim}_{(\text{add}(T), F)}(P) < \infty$ , para todo  $P \in \mathcal{P}(F)$ .

*Decimos que  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $F$ -inclinante si  $M$  es  $n$ - $F$ -inclinante para algún  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Lema 1.7.15.** *Sean  $X$  un generador aditivo,  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$ , tales que,  $\text{pd}_F(T) \leq 1$  y  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(T, T) = 0$ . Entonces,  $T$  es 1- $F$ -inclinante si, y sólo si,  $\text{rk}(T) = \text{rk}(X)$ .*

*Demostración.* Se sigue de [ASII93, Proposición 3.25 (b)], ya que por el Lema 1.7.10  $\mathcal{P}(F)$  es de tipo finito.  $\square$

**Definición 1.7.16.** [ASII93, Sección 1] Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ .

(a) Una  $(\mathcal{X}, \mathbf{F})$ -preenvolvente de  $C \in \text{mod}(\Lambda)$  está dada por una  $F$ -sucesión exacta

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} X \rightarrow A \rightarrow 0$$

en  $\text{mod}(\Lambda)$  tal que  $f$  es una  $\mathcal{X}$ -preenvolvente de  $C$ . Si  $f$  es minimal a izquierda, decimos que  $f$  es una  $(\mathcal{X}, \mathbf{F})$ -envolvente.

(b) Decimos que  $\mathcal{X}$  es  $F$ -preenvolvente si todo  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  admite una  $(\mathcal{X}, F)$ -preenvolvente.

El siguiente resultado caracteriza las subcategorías  $F$ -preenvolventes a partir de las clases preenvolventes y los módulos  $F$ -inyectivos.

**Lema 1.7.17.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\mathcal{Y}}$  tales que  $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{Y} = \text{add}(\mathcal{Y})$  y  $\mathcal{X} = \text{smd}(\mathcal{X})$ . Entonces,  $\mathcal{X}$  es  $F$ -preenvolvente si, y sólo si,  $\mathcal{X}$  es preenvolvente en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{X}$ .

*Demostración.* Se sigue de [AS93, Proposición 4.2 (b)] ya que por el Lema 1.7.10 se tiene que  $\mathcal{P}(F) = \mathcal{Y}$ .  $\square$

**Definición 1.7.18.** Sean  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$  con suficientes proyectivos y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Decimos que  $\pi_F^0 : P_F^0(M) \rightarrow M$  es una **F-cubierta proyectiva** de  $M$ , si  $\pi_F^0$  es una  $\mathcal{P}(F)$ -cubierta de  $M$ . Note que toda  $\mathcal{P}(F)$ -cubierta es un epimorfismo ya que  $\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{P}(F)$ . Por otro lado, la siguiente  $F$ -sucesión exacta,

$$P_F^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} P_F^0(M) \xrightarrow{\pi_F^0} M \rightarrow 0$$

es una **F-presentación proyectiva minimal** de  $M$  si  $\pi_F^{-1}$  es la composición del kernel de  $\pi_F^0$  y la  $F$ -cubierta proyectiva de  $\text{Ker}(\pi_F^0)$ .

Denotaremos por

$$P_F^{\bullet}(M) : \cdots \rightarrow P_F^{-(n+1)}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-(n+1)}} P_F^{-n}(M) \rightarrow \cdots \rightarrow P_F^0(M) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

al cocomplejo asociado a la  $F$ -resolución proyectiva minimal de  $M$ .

## 1.8. Módulos $\tau$ -rígidos

La noción de módulos  $\tau$ -inclinantes de soporte fueron introducidos en [AIR14] para caracterizar las clases de torsión funtorialmente finitas, dar una categorificación de las variables de conglomerado y como una generalización de los módulos 1-inclinantes.

El objetivo principal de esta sección es introducir el concepto de módulo  $\tau$ -rígido.

En esta sección,  $\Lambda$  denotará a una  $R$ -álgebra de Artin.

**Lema 1.8.1.** [AS81, Proposición 5.8] Para  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$ , se tiene que  $\tau(N) \in M^{\perp_0}$  si, y sólo si,  $\text{gen}(M) \subseteq N^{\perp_1}$ .

Las siguientes definiciones aparecen en [AIR14].

**Definición 1.8.2.**  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $\tau$ -rígido si  $\text{Hom}_\Lambda(M, \tau(M)) = 0$ .

**Notación 1.8.3.** Sea  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$ . Denotaremos por  $\mathbb{P}(\mathcal{T})$  a la suma directa de representantes (tomar uno por clase) de las iso-clases de  $\Lambda$ -módulos inescindibles  $\text{Ext}^1$ -proyectivos en  $\mathcal{T}$ . Esto es,  $\mathbb{P}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{M \in \text{ind}(\mathcal{T} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{T})} M$ .

El siguiente resultado muestra como los módulos  $\tau$ -rígidos generan clases de torsión functorialmente finitas.

**Lema 1.8.4.** [AS81, Teorema 5.10] Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau$ -rígido básico. Entonces,  $\text{gen}(M)$  es una clase de torsión functorialmente finita y  $M$  es sumando directo de  $\mathbb{P}(\text{gen}(M))$ .

**Lema 1.8.5.** [AIR14, Proposición 2.4 (b) y Lema 3.4] Sean  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$  y

$$P^{-1}(M) \xrightarrow{\pi^{-1}} P^0(M) \xrightarrow{\pi^0} M \rightarrow 0$$

una presentación proyectiva minimal de  $M$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $\text{Hom}_\Lambda(\pi^{-1}, N) : \text{Hom}_\Lambda(P^0(M), N) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P^{-1}(M), N)$  es un epimorfismo.
- (b)  $\tau(M) \in N^{\perp_0}$ .
- (c)  $P_{\geq -1}^\bullet(N)[1] \in P_{\geq -1}^\bullet(M)^{\perp_0}$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

En particular,  $M$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si,  $P_{\geq -1}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Lo anterior nos dice la relación que tienen los cocomplejos presedimentados y los módulos  $\tau$ -rígidos.

**Lema 1.8.6.** [AIR14, Lema 2.1] Sean  $e = e^2 \in \Lambda$ ,  $I := \Lambda e \Lambda$ ,  $\bar{\Lambda} := \Lambda/I$ ,  $M$  y  $N \in \text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Entonces,  $\text{Hom}_\Lambda(M, \tau_\Lambda N) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}} N) = 0$ .

El siguiente resultado caracteriza las clases de torsión functorialmente finitas en la categoría de módulos.

**Definición 1.8.7.** Sea  $(M, P)$  un par, con  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $P \in \text{proj}(\Lambda)$ .

- (a) Decimos que  $(M, P)$  es  $\tau$ -rígido si  $M$  es  $\tau$ -rígido y  $\text{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$ .
- (b) Decimos que  $(M, P)$  es  $\tau$ -inclinante de soporte si  $(M, P)$  es  $\tau$ -rígido y

$$\text{rk}(M) + \text{rk}(P) = \text{rk}(\Lambda).$$

**Lema 1.8.8.** [AIR14, Teorema 2.7] Sea  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  una clase de torsión. Entonces,  $\mathcal{T}$  es functorialmente finita si, y sólo si, existe  $P \in \text{proj}(\Lambda)$  tal que  $(\mathbb{P}(\mathcal{T}), P)$  es un par  $\tau$ -inclinante de soporte y  $\text{gen}(\mathbb{P}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ .

## 1.9. Teoría inclinante de conglomerado

La noción de subcategoría inclinante de  $n$ -conglomerado fue introducida en [IY08]. Dichas categorías sirvieron para exhibir la existencia de  $n + 2$ -ángulos de Auslander-Reiten, dar una categorificación de las variables cluster y mostrar que la categoría cociente de una subcategoría inclinante de  $n$ -conglomerado es abeliana.

El objeto principal de esta sección es introducir el concepto de subcategoría inclinante de  $n$ -conglomerado.

**Definición 1.9.1.** [IY08, Sección 3] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  y  $n \in \mathbb{N}^+$ . Decimos que:

- (a)  $\mathcal{X}$  es  **$n$ -rígida** si  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}[i]) = 0 \forall 0 < i < n$ ;
- (b)  $\mathcal{X}$  es **inclinante de  $n$ -conglomerado** si  $\mathcal{X}$  es funtorialmente finita y

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}[-i]^{\perp_0} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}[i]^{\perp_0}.$$

**Lema 1.9.2.** [MSSS11, Proposición 3.2 (b)] Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$  y  $Z \in \mathcal{T}$ . Entonces,

- (a)  $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(Z) \leq n$  si, y sólo si,  $Z \in \mathcal{X} * \mathcal{X}[1] * \cdots * \mathcal{X}[n]$ ;
- (b)  $\text{coresdim}_{\mathcal{X}}(Z) \leq n$  si, y sólo si,  $Z \in \mathcal{X}[-n] * \cdots * \mathcal{X}[-1] * \mathcal{X}$ .

**Lema 1.9.3.** Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$  una subcategoría inclinante de  $n + 1$ -conglomerado. Entonces,  $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq n \forall C \in \mathcal{T}$ .

*Demostración.* Se sigue de [IY08, Teorema 3.1] y el Lema 1.9.2. □

El resultado anterior prueba que las subcategorías inclinantes de conglomerado estratifican las categorías trianguladas de forma finita a diferencia de las subcategorías sedimentadas.

## 1.10. Sistemas estratificantes lineales

En esta sección,  $\Lambda$  denotará a una  $R$ -álgebra de Artin.

La noción de módulos sistemas estratificantes fueron introducidos en [ES03] para estudiar las álgebras estandarmente estratificadas. Más adelante, en [MMS04], sirvieron para categorizar los módulos estándar en un álgebra estandarmente estratificada.

**Definición 1.10.1.** [MMS04, Caracterización 1.6] Sean  $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^n$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $\leq$  un orden lineal en  $[1, n] := \{1, 2, \dots, n\}$ . Decimos que el par  $(\Theta, \leq)$  es un **sistema estratificante de talla  $n$**  si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a)  $\text{Hom}_{\Lambda}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0 \forall j > i$ ;

- (b)  $\text{Ext}_\Lambda^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0 \forall j \geq i$ ;
- (c)  $\Theta(i)$  es inescindible  $\forall i \in [1, n]$ .

**Definición 1.10.2.** [MMS05, Definición 2.1] Sean  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $Q := \{Q(i)\}_{i=1}^n \subseteq \text{ind}(\Lambda)$ ,  $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^n \subseteq \text{mod}(\Lambda) - \{0\}$  y  $\leq$  un orden lineal en  $[1, n]$ . Decimos que  $(\Theta, Q, \leq)$  es un sistema estratificante **Ext-proyectivo de talla n** si satisface las siguientes condiciones.

- (a)  $\text{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0 \forall 1 \leq i < j \leq n$ .
- (b) Para cada  $i \in [1, n]$ , existe una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$0 \rightarrow K(i) \rightarrow Q(i) \rightarrow \Theta(i) \rightarrow 0,$$

tal que  $K(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ .

- (c)  $Q \in {}^{\perp 1}\mathcal{F}(\Theta)$ , donde  $Q := \bigoplus_{i=1}^n Q(i)$ .

**Definición 1.10.3.** Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . La **traza**  $\text{Tr}_{\mathcal{X}}(M)$  de  $\mathcal{X}$  en  $M$  es el submódulo de  $M$  generado por  $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \bigcup_{f \in \text{Hom}_\Lambda(X, M)} \text{Im}(f)$ .

**Definición 1.10.4.** [Ri91, Sección 3] Sean  $([1, n], \leq)$  un conjunto linealmente ordenado y  $\{P(i)\}_{i=1}^n$  una familia completa de  $\Lambda$ -módulos proyectivos inescindibles no isomorfos dos a dos. Para cada  $i \in [1, n]$ ,  $\Delta(i) := P(i)/\text{Tr}_{\{P(>i)\}}(P(i))$  es el **i-ésimo módulo estándar**, donde  $P(>i) := \bigoplus_{j>i} P(j)$ .

**Definición 1.10.5.** [ADL98, Definición 1.3] Decimos que  $(\Lambda, \leq)$  es una **álgebra estandarmente estratificada** si  $\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$ . En caso de que no se mencione el orden, se asumirá que se está considerando el orden natural en  $[1, n]$ .

**Ejemplo 1.10.6.** [MMS05, Sección 2] Sean  $(\Lambda, \leq)$  una álgebra estandarmente estratificada,  $P := \{P(i)\}_{i=1}^n$  y  $\Delta := \{\Delta(i)\}_{i=1}^n$ . Entonces  $(\Delta, P, \leq)$  es un sistema estratificante Ext-proyectivo de talla  $n$ .

# Capítulo 2

## Clases relativas de aproximación, torsión relativa e inclinante relativo

Un objetivo de este capítulo es explorar, en el contexto dado en [AB89] y [AR91], resultados análogos a los de Auslander-Reiten y Auslander-Buchweitz a partir de la noción de  $(X, Y)$ -precubierta, que es una generalización de precubierta. Las aplicaciones se concentran en los pares de Frobenius a izquierda y pares de cotorsión en categorías abelianas.

En este capítulo  $\Lambda$  denotará una  $R$ -álgebra de Artin.

El otro objetivo es iniciar la investigación de clases de torsión relativas a un subfunctor aditivo del  $\text{Ext}_{\Lambda}^1$ , para una  $R$ -álgebra de Artin  $\Lambda$ , y encontrar un análogo relativo al de la teoría  $\tau$ -inclinante para subfuntores aditivos del  $\text{Ext}_{\Lambda}^1$ .

### 2.1. $(X, Y)$ precubiertas y preenvolventes

El objetivo principal de esta sección es explorar el concepto de  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precubierta para desarrollar en un contexto más amplio algunos resultados obtenidos en [AB89] y [AR91].

**Definición 2.1.1.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría,  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$  y  $C \in \mathcal{C}$ . Decimos que  $f : X \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$  es una  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precubierta si  $X \in \mathcal{X}$  y  $\forall g : Y \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$ , con  $Y \in \mathcal{Y}$ , existe  $k : Y \rightarrow X$  tal que  $g = fk$ . Denotaremos por  $\text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  a la subcategoría de los objetos  $C \in \mathcal{C}$  que admiten una  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precubierta.

Dualmente se tiene la noción de  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -preenvolvente y la subcategoría  $\text{preen}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ .

Note que  $\text{preen}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \text{prec}(\mathcal{Y}^{op}, \mathcal{X}^{op})^{op}$ .

Las siguientes observaciones muestran que la definición anterior generaliza varias nociones importantes en la teoría.

**Observación 2.1.2.** Para una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ , con suficientes proyectivos, y  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$  se tiene que  $\text{gen}(\mathcal{X}) = \text{prec}(\mathcal{X}^{\oplus}, \text{proj}(\mathcal{A}))$ .

**Observación 2.1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Para  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ , las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a)  $\text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \{C \in \mathcal{C} \mid \exists f : X \rightarrow C \text{ una } \mathcal{X}\text{-precubierta de } C\}$ ;
- (b)  $\mathcal{X}$  es precubriente si, y sólo si,  $\text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{C}$ ;
- (c)  $\text{prec}(\mathcal{X}, 0) = \mathcal{C}$  si  $\mathcal{C}$  tiene objeto cero;
- (d)  $\mathcal{X} \subseteq \text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ;
- (e) si  $\mathcal{C}$  es abeliana,  $\mathcal{Y} \subseteq \text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\mathcal{X}$  es cerrado por sumandos directos, entonces  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ ;
- (f) si  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ , entonces  $\mathcal{Y} \subseteq \text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ;
- (g)  $\mathcal{Y}^{\perp_0} \subseteq \text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  si  $\mathcal{C}$  tiene objeto cero.

El siguiente resultado nos permite calcular la subcategoría  $\text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  en situaciones familiares de la teoría de Auslander-Buchweitz y dar algunas aplicaciones conocidas en álgebras Gorenstein.

**Proposición 2.1.4.** *Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $(\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{A}^2$  tales que  $\mathcal{X}$  es cerrada por extensiones,  $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{A}$  y  $\omega = \text{smd}(\omega)$  es un cogenerador  $\mathcal{X}$ -inyectivo relativo en  $\mathcal{X}$ . Entonces,  $\text{prec}(\omega, \mathcal{X}) = \omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in \text{prec}(\omega, \mathcal{X})$ . Dado que  $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{A}$ , por el Lema 1.4.2 (a), existe una sucesión exacta  $\eta : 0 \rightarrow Y \rightarrow X \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ , con  $X \in \mathcal{X}$  y  $Y \in \omega^\wedge$ . Ahora, como  $A \in \text{prec}(\omega, \mathcal{X})$  y  $g$  es un epimorfismo en  $\mathcal{A}$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

con  $W \in \omega$ . Dado que el cuadrado izquierdo, del diagrama anterior, es un push-out, se obtiene la siguiente sucesión exacta  $0 \rightarrow Y \rightarrow Y' \oplus X \rightarrow W \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ . Por el Lema 1.4.2 (b) se tiene que  $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp$ , y así  $\omega^\wedge$  es gruesa a derecha. Por la sucesión exacta anterior tenemos que  $X \in \omega^\wedge$ ; y por  $\eta$ , se tiene que  $A \in \omega^\wedge$ . Por lo tanto,  $\text{prec}(\omega, \mathcal{X}) \subseteq \omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp$ .

Sea  $Z \in \omega^\wedge$ . Por el Lema 1.4.2 (a), existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow Y \rightarrow X \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ , con  $g$  una  $\mathcal{X}$ -precubierta y  $Y \in \omega^\wedge$ . Del Lema 1.4.2 (b) se tiene que  $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp$ ; y así  $\omega^\wedge$  es cerrada por extensiones. Luego, del Lema 1.4.2 (c), concluimos que  $X \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$ . Por lo tanto,  $\omega^\wedge \subseteq \text{prec}(\omega, \mathcal{X})$ .  $\square$

**Proposición 2.1.5.** *Sea  $(\mathcal{X}, \omega)$  un par de Frobenius a izquierda en una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a)  $\text{prec}(\omega, \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\wedge = \omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge$ .
- (b)  $\text{preen}(\omega^\wedge, \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\wedge = \text{preen}(\omega^\wedge, \omega) \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}$ .

*Demostración.* (a) Por el Lema 1.4.2 (b) se tiene que  $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge$ .

Sea  $A \in \text{prec}(\omega, \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\wedge$ . Idénticamente a la Proposición 2.1.4 se sigue que  $A \in \omega^\wedge$ .

Veamos ahora que  $\omega^\wedge \subseteq \text{prec}(\omega, \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\wedge$ . En efecto, sean  $Y \in \omega^\wedge$  y

$$0 \rightarrow Z \rightarrow W \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$$

una sucesión exacta en  $\mathcal{A}$ , con  $W \in \omega$  y  $Z \in \omega^\wedge$ .

Veamos que  $g$  es una  $(\omega, \mathcal{X})$ -precubierta. En efecto, sea  $X \in \mathcal{X}$ . Por [AB89, Lema 2.2],  $\text{Ext}_\Lambda^1(X, Z) = 0$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\mathcal{A}(X, -)$  a la sucesión exacta anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta,

$$\text{Hom}_\mathcal{A}(X, W) \xrightarrow{\text{Hom}_\mathcal{A}(X, g)} \text{Hom}_\mathcal{A}(X, Y) \rightarrow 0.$$

Por lo que,  $A \in \text{prec}(\omega, \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\wedge$ .

(b) Sea  $Y \in \text{preen}(\omega^\wedge, \mathcal{Z}) \cap \mathcal{X}^\wedge$ , con  $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathcal{X}\}$ . Por el Lema 1.4.2 (a), existe una sucesión exacta  $\eta : 0 \rightarrow Y \xrightarrow{f} H \rightarrow X \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ , con  $H \in \omega^\wedge$  y  $X \in \mathcal{X}$ . Como  $Y \in \text{preen}(\omega^\wedge, \mathcal{Z})$  y  $f$  es un monomorfismo en  $\mathcal{A}$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & H & \longrightarrow & X \longrightarrow 0, \end{array}$$

con  $Z \in \mathcal{Z}$ . Dado que el cuadrado derecho, del diagrama anterior, es un pull-back, se obtiene la siguiente sucesión exacta  $0 \rightarrow Z \rightarrow H \oplus X' \rightarrow X \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ . Ahora, usando que  $\mathcal{X}$  es cerrado por extensiones y sumandos directos, se tiene que  $Z \in \mathcal{X}$ . Como  $\mathcal{X}$  es pre-resolvente, de la primera sucesión exacta del diagrama anterior, concluimos que  $Y \in \mathcal{X}$ . Por lo tanto,  $\text{preen}(\omega^\wedge, \mathcal{Z}) \cap \mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X}$ , para  $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathcal{X}\}$ .

Sea  $X \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ . Por el Lema 1.4.2 (a), existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} H \rightarrow X' \rightarrow 0$$

en  $\mathcal{A}$ , con  $f$  una  $\omega^\wedge$ -preenvolvente y  $X' \in \mathcal{X}$ . Dado que  $\mathcal{X}$  es cerrado por extensiones y por el Lema 1.4.2 (c), se sigue que  $H \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega \subseteq \mathcal{X}$ . Por lo que,

$$X \in \text{preen}(\omega^\wedge, \mathcal{X}) \cap \text{preen}(\omega^\wedge, \omega).$$

Por lo tanto,  $\mathcal{X} \subseteq \text{preen}(\omega^\wedge, \mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\wedge \cap \text{preen}(\omega^\wedge, \omega)$ . □

**Definición 2.1.6.** Decimos que  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es **Gorenstein proyectivo** si existe un complejo acíclico  $P_\bullet := \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \rightarrow \cdots$  en  $\text{proj}(\Lambda)$  tal que  $\text{Im}(d_0) = M$  y  $\text{Hom}_\Lambda(P_\bullet, P) = 0$  es acíclico  $\forall P \in \text{proj}(\Lambda)$ .

Denotaremos por  $\text{Gproj}(\Lambda)$  a la subcategoría de los  $\Lambda$ -módulos Gorenstein proyectivos en  $\text{mod}(\Lambda)$ .

**Ejemplo 2.1.7.** Para una álgebra  $n$ -Gorenstein  $\Lambda$ , se tiene que

$$\text{prec}(\text{proj}(\Lambda), \text{Gproj}(\Lambda)) = \mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda) := \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{pd}(X) < \infty\},$$

$$\text{preen}(\mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda), \text{Gproj}(\Lambda)) = \text{preen}(\mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda), \text{proj}(\Lambda)) = \text{Gproj}(\Lambda).$$

En efecto, se tiene que  $\text{Gproj}(\Lambda) = \mathcal{X}_{\text{add}(\Lambda)}$ . Además, el par  $(\text{Gproj}(\Lambda), \text{proj}(\Lambda))$  es de Frobenius a izquierda en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Por ser  $\Lambda$  una álgebra  $n$ -Gorenstein, se tiene que  $\Lambda$  es  $n$ -coinclinante y, por el Lema 1.5.4,  $\text{Gproj}(\Lambda)^\wedge = \text{mod}(\Lambda)$  y  $\text{Gproj}(\Lambda) = {}^\perp\Lambda$ .

El siguiente resultado nos permite calcular la subcategoría  $\text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  en situaciones familiares de la teoría de Auslander-Reiten y dar algunas aplicaciones conocidas en módulos inclinantes.

**Proposición 2.1.8.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana Krull-Schmidt, con suficientes proyectivos, y  $\mathcal{Z}$  una subcategoría gruesa en  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{X}$  es una subclase precubriente de  $\mathcal{Z}$  y saturada a izquierda en  $\mathcal{A}$ , entonces  $\text{prec}(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp, \mathcal{X}) \cap \mathcal{Z} = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Z}$ .

*Demostración.* Sea  $Z \in \text{prec}(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp, \mathcal{X}) \cap \mathcal{Z}$ . Por el Lema 1.4.5, se tiene la sucesión exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  en  $\mathcal{C}$ , con  $K \in \mathcal{X}^{\perp 1} = \mathcal{X}^\perp$  y  $g$  una  $\mathcal{X}$ -cubierta de  $Z$ . Dado que  $Z \in \text{prec}(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp, \mathcal{X})$  existe  $h : W \rightarrow Z$  una  $(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp, \mathcal{X})$ -precubierta de  $Z$ . Ya que  $h : W \rightarrow Z$  es una  $(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp, \mathcal{X})$ -precubierta de  $Z$  existe  $k : X \rightarrow W$  tal que  $hk = g$  y como  $g$  una  $\mathcal{X}$ -cubierta de  $Z$  existe  $k' : W \rightarrow X$  tal que  $h = gk'$ . Por lo que  $g = gk'k$ , puesto que  $g$  es minimal a derecha,  $k$  es invertible a izquierda. Con lo cual,  $X \mid W$  y así  $X \in \mathcal{X}^\perp$ . Luego, como  $\mathcal{X}^\perp$  es gruesa a derecha, de la sucesión exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  se sigue que  $Z \in \mathcal{X}^\perp$ .

Sea  $Z \in \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Z}$ . Por el Lema 1.4.5, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0,$$

con  $g$  una  $\mathcal{X}$ -cubierta y  $K \in \mathcal{X}^{\perp 1} = \mathcal{X}^\perp$ . Por lo que  $X \in \mathcal{X}^\perp$ , dado que  $\mathcal{X}^\perp$  es cerrada por extensiones. Por lo tanto,  $g : X \rightarrow Z$  es una  $(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp, \mathcal{X})$ -precubierta de  $Z$ .  $\square$

**Ejemplo 2.1.9.** Sea  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  coinclinante. Entonces por el Lema 1.5.5, la Proposición 2.1.8, 2.1.5 y [AR91, Teorema 5.5] se tienen las siguientes igualdades

$$\text{add}(T)^\wedge = \text{prec}(\text{add}(T), {}^\perp T) = ({}^\perp T)^\perp$$

$$\text{y } \text{preen}(\text{add}(T)^\wedge, {}^\perp T) = \text{preen}(\text{add}(T)^\wedge, \text{add}(T)) = {}^\perp T.$$

El próximo resultado nos permite describir la subcategoría  $\text{prec}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , cuando el par  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  es de cotorsión. Más aún, se caracterizan los pares hereditarios a partir de  $\text{prec}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ .

**Lema 2.1.10.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana con suficientes proyectivos y  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$  tales que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si  $\text{prec}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$ , entonces  $\mathcal{Y}$  es cerrada por cokernels de monomorfismos entre sus objetos.

(b) Si  $\text{proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp 1}$  y  $\mathcal{Y}$  es cerrada por cokernels de monomorfismos entre sus objetos, entonces  $\text{prec}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ .

*Demostración.* (a) Sean  $X \in \mathcal{X}$  y  $0 \rightarrow Y \rightarrow Y' \rightarrow Z \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\mathcal{A}$ , con  $Y, Y' \in \mathcal{Y}$ . Aplicando el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$  a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0$ . Por lo que,  $Z \in \mathcal{B}$ .

(b) Sean  $Z \in \text{prec}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ . Consideremos  $p : P \rightarrow Z$  un epimorfismo, con  $P \in \text{proj}(\mathcal{A})$ , y  $f : B \rightarrow Z$  una  $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ -precubierta. Por lo que existe  $g : P \rightarrow B$  tal que  $p = fg$ . Así  $f$  es un epimorfismo. Consideremos la sucesión exacta  $\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow B \xrightarrow{f} Z \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$  y  $X \in \mathcal{X}$ . Aplicando el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$  a la sucesión exacta anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, f)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, K) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, B) = 0$ . Por lo que  $K \in \mathcal{X}^{\perp 1} = \mathcal{Y}$ ; y como  $\mathcal{Y}$  es cerrada por cokernels de monomorfismos entre sus objetos, de la sucesión exacta  $\eta$  concluimos que  $Z \in \mathcal{Y}$ . Finalmente, por la Observación 2.1.3 (d), se tiene que  $\mathcal{Y} \subseteq \text{prec}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ .  $\square$

**Proposición 2.1.11.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, para un par de cotorsión  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  en  $\mathcal{A}$ , las siguientes condiciones son equivalentes.

(a)  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  es hereditario.

(b)  $\text{prec}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ .

(c)  $\text{preen}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X}$ .

*Demostración.* Se sigue del Lema 2.1.10, su dual y el Lema de García Rozas.  $\square$

## 2.2. Clases de $F$ -torsión

El objetivo principal es introducir las clases de  $F$ -torsión y  $F$ -preenvolventes en  $\text{mod}(\Lambda)$  y ver su relación con los  $\Lambda$ -módulos 1- $F$ -inclinante como una generalización dada en [Ho83].

**Definición 2.2.1.** Sean  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ . Decimos que:

(a)  $g : L \rightarrow N$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  es un **F-epimorfismo** si existe una sucesión  $F$ -exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \rightarrow 0.$$

En tal caso, diremos que  $N$  es un **F-cociente** de  $L$ .

Dualmente, se define **F-monomorfismo** y **F-subobjeto**.

(b)  $\mathcal{T}$  es una **clase de F-torsión** si  $\mathcal{T}$  es cerrada bajo  $F$ -extensiones y  $F$ -cocientes.

**Lema 2.2.2.** Sea  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(-, -)$ . Si  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  es una clase de  $F$ -torsión, entonces  $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$ .

*Demostración.* Dado que toda sucesión exacta que se escinde es  $F$ -exacta, de la sucesión exacta  $0 \rightarrow T \xrightarrow{1_T} T \rightarrow 0 \rightarrow 0$ , con  $T \in \mathcal{T}$ , se sigue que  $0 \in \mathcal{T}$ . Ahora, por ser  $\mathcal{T}$  cerrada por  $F$ -extensiones y  $F$ -cocientes, se tiene que  $\text{add}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ .  $\square$

**Definición 2.2.3.** Para  $\mathcal{Y} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ , denotaremos por  $\text{gen}_F(\mathcal{Y})$  a la clase de los  $Z \in \text{mod}(\Lambda)$  para los cuales existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ , con  $Y \in \mathcal{Y}^\oplus$ .

El siguiente resultado muestra como calcular la subcategoría  $\text{gen}_F(\mathcal{Y})$ , más fácilmente.

**Lema 2.2.4.** Sean  $\mathcal{Y} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$ . Entonces

$$\text{gen}_F(\mathcal{Y}) = \text{gen}_F(\text{add}(\mathcal{Y})).$$

*Demostración.* ( $\subseteq$ ) Es clara.

( $\supseteq$ ) Sea  $M \in \text{gen}_F(\text{add}(\mathcal{Y}))$ . Por lo que existe una sucesión  $F$ -exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow Y' \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con  $Y' \oplus Y'' = Y^m$  y  $Y \in \mathcal{Y}$ . Dado que  $0 \rightarrow Y'' \rightarrow Y'' \rightarrow 0 \rightarrow 0$  es una sucesión  $F$ -exacta. Por el Lema 1.7.3 se tiene que  $0 \rightarrow K \oplus Y'' \rightarrow Y^m \rightarrow M \rightarrow 0$  es una sucesión  $F$ -exacta. Por lo tanto,  $M \in \text{gen}_F(\mathcal{Y})$ .  $\square$

El siguiente resultado es la versión relativa de [AS80, Proposición 4.6], el cual fue usado para las subcategorías  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  que tienen cubierta finita y son funtorialmente finita, cuando  $\mathcal{X}$  es cerrada por cocientes. Para lo cual, se necesitan los siguientes lemas.

**Lema 2.2.5.** Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ ,  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ ,  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$  y  $f : M \rightarrow X$  una  $\mathcal{X}$ -preenvolvente. Si  $M$  es un  $F$ -subobjeto de algún  $X' \in \mathcal{X}$ , entonces  $f$  es un  $F$ -monomorfismo.

*Demostración.* Dado que  $f : M \rightarrow X$  es una  $\mathcal{X}$ -preenvolvente y  $M$  es un  $F$ -subobjeto de  $X' \in \mathcal{X}$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por lo tanto, el resultado se sigue del Lema 1.7.3.  $\square$

**Lema 2.2.6.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  cerrada por coproductos finitos y

$$\{f_i : M_i \rightarrow X_i\}_{i=1}^n$$

una familia de  $\mathcal{X}$ -preenvolventes de  $M_i$ . Entonces,  $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n X_i$  es una  $\mathcal{X}$ -preenvolvente de  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\bigoplus_{i=1}^n f_i$  está dado por la propiedad universal del coproducto, vía el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xrightarrow{f_i} & X_i \xrightarrow{\mu_i} \bigoplus_{i=1}^n X_i \\
 \mu'_i \downarrow & \nearrow \text{---} & \text{---} \\
 \bigoplus_{i=1}^n M_i & & \bigoplus_{i=1}^n f_i
 \end{array} \quad (\text{I})$$

donde  $\mu_i$  y  $\mu'_i$  denotan, respectivamente, las inclusiones naturales. Sea  $g : \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow X'$ , con  $X' \in \mathcal{X}$ . Dado que  $f_i$  es una  $\mathcal{X}$ -preenvolvente, se tienen los siguientes diagramas conmutativos para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xrightarrow{f_i} & X_i \\
 \mu'_i \downarrow & \nearrow \text{---} & \\
 \bigoplus_{i=1}^n M_i & & \exists h_i \\
 g \downarrow & \nearrow \text{---} & \\
 X' & &
 \end{array} \quad (\text{II})$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & & \\
 \mu_i \downarrow & \searrow h_i & \\
 \bigoplus_{i=1}^n X_i & \xrightarrow{\exists! h} & X'
 \end{array} \quad (\text{III})$$

Por último, de los diagramas (I), (II) y (III), se tienen las siguientes igualdades

$$h(\bigoplus_{i=1}^n f_i)\mu'_i = h\mu_i f_i = h_i f_i = g\mu'_i,$$

para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo tanto, de la unicidad del coproducto se concluye que  $h(\bigoplus_{i=1}^n f_i) = g$ .  $\square$

**Proposición 2.2.7.** *Para un generador aditivo  $X \in \text{mod}(\Lambda)$ ,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ , las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) *Si  $\mathcal{T}$  es una clase de  $F$ -torsión preenvolvente. Entonces,  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(\mathcal{T})$ , donde  $f : X \rightarrow T$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente de  $X$ .*
- (b) *Si  $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{T} = \text{gen}_F(\mathcal{T})$ , para algún  $T \in \mathcal{T}$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*
  - (b1)  $\forall X' \in \text{add}(X)$  existe una  $(\mathcal{T}, F)$ -preenvolvente  $f : X' \rightarrow T'$ , con  $T' \in \text{add}(T)$ .
  - (b2)  $\mathcal{T}$  es  $F$ -preenvolvente.

*Demostración.* (a) Supongamos que  $\mathcal{T}$  es una clase de  $F$ -torsión preenvolvente. Sea

$$f : X \rightarrow T$$

una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente de  $X$ . Veamos que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(T)$ .

( $\supseteq$ ) Es claro, ya que  $\mathcal{T}$  es cerrada por  $F$ -cocientes y coproductos finitos.

( $\subseteq$ ) Sea  $T' \in \mathcal{T}$ . Por ser  $X$  un generador aditivo, y como  $F := F_{\text{add}(X)}$ , por el Lema 1.7.10 se tiene la siguiente sucesión  $F$ -exacta  $\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow X' \rightarrow T' \rightarrow 0$ , con  $X' \oplus X'' = X^m$ . Dado que  $\xi : 0 \rightarrow X'' \rightarrow X'' \rightarrow 0 \rightarrow 0$  es  $F$ -exacta, del Lema 1.7.3, se sigue que

$$0 \rightarrow K \oplus X'' \rightarrow X^m \rightarrow T' \rightarrow 0$$

es una sucesión  $F$ -exacta. Por el Lema 2.2.6 se tiene que  $f^m$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente. Por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K \oplus X'' & \longrightarrow & X^m & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f^m & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & T^m & \xrightarrow{h} & T' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por el Lema 1.7.3 se concluye que  $h : T^m \rightarrow T'$  es un  $F$ -epimorfismo. Luego  $T' \in \text{gen}_F(T)$ ; probándose que  $\mathcal{T} \subseteq \text{gen}_F(T)$ .

(b) Sean  $X' \in \text{add}(X)$  y  $g : X' \rightarrow T'$  una  $\text{add}(T)$ -preenvolvente.

(b1) Veamos que  $g$  es una  $(\mathcal{T}, F)$ -preenvolvente. En efecto, sean  $Z \in \text{gen}_F(T)$ ,  $k : T^m \rightarrow Z$  un  $F$ -epimorfismo y  $h : X' \rightarrow Z$ . Dado que  $X'$  es  $F$ -proyectivo existe  $l : X' \rightarrow T^m$  tal que  $h = kl$ . Como  $g : X' \rightarrow T'$  es una  $\text{add}(T)$ -preenvolvente existe  $r : T' \rightarrow T^m$  tal que  $rg = l$ . Por lo que  $krh = kl = h$ , probándose que  $g$  es una  $\text{gen}_F(T)$ -preenvolvente. Ahora bien, por el Lema 1.7.11 existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow X' \rightarrow I \rightarrow K \rightarrow 0$ , con  $I \in \mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{T}$ . Por el Lema 2.2.5 concluimos que  $g$  es una  $(\mathcal{T}, F)$ -preenvolvente.

(b2) Sea  $N \in \text{mod}(\Lambda)$ . Veamos que  $N$  admite una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente. En efecto, por el Lema 1.7.10 existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow A \rightarrow X' \xrightarrow{p} N \rightarrow 0$  con  $X' \in \text{add}(X)$ . Ahora, por (b1) existe una  $(\mathcal{T}, F)$ -preenvolvente  $0 \rightarrow X' \xrightarrow{w} \bar{T} \rightarrow C \rightarrow 0$ , con  $\bar{T} \in \text{add}(T)$ . Haciendo el push-out de  $p$  con  $w$ , obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & A & \xlongequal{\quad} & A & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{w} & \bar{T} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow p & & \downarrow p' & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{w'} & Z & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Por el Lema 1.7.4 se tiene que  $0 \rightarrow N \xrightarrow{w'} Z \rightarrow C \rightarrow 0$  y  $0 \rightarrow A \rightarrow \bar{T} \xrightarrow{p'} Z \rightarrow 0$  son sucesiones  $F$ -exactas. Luego, por el Lema 2.2.4, se sigue que  $Z \in \text{gen}_F(\text{add}(T)) = \text{gen}_F(T) = \mathcal{T}$ . Veamos que  $w' : N \rightarrow Z$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente. En efecto, sean  $Y \in \mathcal{T}$  y  $g : N \rightarrow Y$ . Dado que  $w : X' \rightarrow \bar{T}$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente existe  $t : \bar{T} \rightarrow Y$  tal que  $tw = gp$ . Por la propiedad universal del pushout, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{w} & \bar{T} \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 N & \xrightarrow{w'} & Z \\
 g \downarrow & \swarrow \exists g' & \\
 Y & & 
 \end{array}$$

$\nearrow t$

Así pues,  $w' : N \rightarrow Z$  es una  $(\mathcal{T}, F)$ -preenvolvente. Por lo tanto,  $\mathcal{T}$  es  $F$ -preenvolvente.  $\square$

El siguiente teorema es una versión relativa del resultado principal en [Ho83, Sm84]. Los cuales caracterizan el par de torsión que está formado a partir de un módulo 1-inclinante  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  y el cual mediante el Teorema de Brenner y Butler nos da una caracterización completa de la categoría de módulos finitamente generados del álgebra inclinante  $\text{End}_\Lambda(T)^{op}$ , por medio de los funtores  $\text{Hom}_\Lambda(T, -)$  y  $\text{Ext}_\Lambda^1(T, -)$ .

**Lema 2.2.8.** *Sean  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow K$  morfismos en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $F$  un subfunctor aditivo de  $\text{Ext}_\Lambda^1(-, -)$  con suficientes proyectivos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si  $gf$  es un  $F$ -epimorfismo, entonces  $g$  es un  $F$ -epimorfismo.*

(b) *Si  $f$  y  $g$  son  $F$ -epimorfismos, entonces  $gf$  es un  $F$ -epimorfismo.*

*Demostración.* (a) Dado que  $gf$  es un epimorfismo se sigue que  $g$  es un epimorfismo. Por el Lema 1.7.8 es suficiente probar que  $\text{Hom}_\Lambda(P, g) : \text{Hom}_\Lambda(P, N) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, K)$  es un epimorfismo  $\forall P \in \mathcal{P}(F)$ . En efecto, sea  $P \in \mathcal{P}(F)$ . Por el Lema 1.7.8 se sigue que  $\text{Hom}_\Lambda(P, gf) = \text{Hom}_\Lambda(P, g)\text{Hom}_\Lambda(P, f)$  es un epimorfismo; y así, se tiene que  $\text{Hom}_\Lambda(P, g)$  es un epimorfismo. Por lo tanto,  $g$  es un  $F$ -epimorfismo.

(b) Dado que  $f$  y  $g$  son epimorfismos se sigue que  $gf$  es un epimorfismo. Por el Lema 1.7.8 es suficiente probar que  $\text{Hom}_\Lambda(P, gf) : \text{Hom}_\Lambda(P, M) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, K)$  es un epimorfismo  $\forall P \in \mathcal{P}(F)$ . En efecto, sea  $P \in \mathcal{P}(F)$ . Por el Lema 1.7.8 se sigue que  $\text{Hom}_\Lambda(P, g)$  y  $\text{Hom}_\Lambda(P, f)$  son epimorfismos y así se tiene que  $\text{Hom}_\Lambda(P, gf) = \text{Hom}_\Lambda(P, g)\text{Hom}_\Lambda(P, f)$  es un epimorfismo. Por lo tanto,  $gf$  es un  $F$ -epimorfismo.  $\square$

El siguiente resultado es la versión relativa del Lema 1.8.4.

**Lema 2.2.9.** *Sean  $X, M \in \text{mod}(\Lambda)$  tales que  $X$  es un generador aditivo,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $M \in {}^{F^\perp} \text{gen}_F(M)$ . Entonces,  $\text{gen}_F(M)$  es una clase de  $F$ -torsión.*

*Demostración.* Veamos que  $\text{gen}_F(M)$  es cerrada por  $F$ -cocientes. Sea  $p : L \rightarrow L'$  un  $F$ -epimorfismo, con  $L \in \text{gen}_F(M)$ . En particular, existe un  $F$ -epimorfismo  $q : M^r \rightarrow L$  un  $F$ -epimorfismo. Por el Lema 2.2.8 (b)  $pq : M^r \rightarrow L'$  es un  $F$ -epimorfismo. Así pues,  $\text{gen}_F(M)$  es cerrada por  $F$ -cocientes.

Veamos finalmente que  $\text{gen}_F(M)$  es cerrada por  $F$ -extensiones. Sea

$$\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

una sucesión  $F$ -exacta, con  $A, C \in \text{gen}_F(M)$ . Consideremos  $h : M' \rightarrow B$  una  $\text{add}(M)$ -precubierta. Aseguramos que  $h$  es un  $F$ -epimorfismo. Dado que  $F = F_{\text{add}(X)}$  y  $C \in \text{gen}_F(M)$  se tienen  $k : X' \rightarrow B$  y  $h' : M^n \rightarrow C$   $F$ -epimorfismos, con  $X' \in \text{add}(X)$ . Por lo que existe  $k' : X' \rightarrow M^n$  tal que  $h'k' = gk$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(M^n, -)$  a  $\eta$ , se obtiene la siguiente sucesión exacta  $\text{Hom}_\Lambda(M^n, B) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(M^n, g)} \text{Hom}_\Lambda(M^n, C) \rightarrow 0$ , puesto que  $\text{add}(M) \subseteq {}^{F\perp_1}\text{gen}_F(M)$ . Así pues, existe  $h'' : M^n \rightarrow B$  tal que  $h' = gh''$ . Luego,  $g(h''k' - k) = h'k' - gk = 0$ , y por la propiedad universal del kernel, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & X' & & & \\ & & \exists! t & \swarrow & \downarrow h''k' - k & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0. \end{array}$$

Dado que  $A \in \text{gen}_F(M)$ , existe un  $F$ -epimorfismo  $l : M^m \rightarrow A$ . Luego, existe  $s : X' \rightarrow M^m$  tal que  $t = ls$ . Dado que  $h : M' \rightarrow B$  es una  $\text{add}(M)$ -precubierta, existe  $q : M^m \rightarrow M'$  tal que  $fl = hq$ . Por último, ya que  $h : M' \rightarrow B$  es una  $\text{add}(M)$ -precubierta, existe  $q' : M^n \rightarrow M'$  tal que  $h'' = hq'$ . Por lo que  $h(q'k' - qs) = h''k' - hqs = h''k' - ft = k$  y  $h$  es un epimorfismo. Dado que  $k$  es un  $F$ -epimorfismo, del Lema 2.2.8 (a) y la igualdad  $h(q'k' - qs) = k$ , se sigue que  $h$  es un  $F$ -epimorfismo. Luego  $B \in \text{gen}_F(M)$ , probándose que  $\text{gen}_F(M)$  es cerrada por  $F$ -extensiones y por lo tanto una clase de  $F$ -torsión.  $\square$

**Definición 2.2.10.** Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Decimos que  $M$  es **gen $_F$ -minimal** si  $M \neq 0$  y  $\forall M' \mid M$  ( $M' \in \text{gen}_F(M/M') \Rightarrow M' = 0$ ).

**Proposición 2.2.11.** Sean  $M, X \in \text{mod}(\Lambda)$ , con  $M \neq 0$ , tales que  $X$  es un generador aditivo y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Entonces existe  $M' \mid M$  tal que  $M'$  es  $\text{gen}_F$ -minimal y

$$\text{gen}_F(M') = \text{gen}_F(M).$$

*Demostración.* La prueba la haremos por inducción sobre  $n := \text{rk}(M)$ .

$n = 1$ . Es claro.

$n > 1$ . Si  $M$  es  $\text{gen}_F$ -minimal no hay nada que probar. Por lo que, podemos asumir que  $M$  no es  $\text{gen}_F$ -minimal. Entonces existe  $M' \neq 0$  tal que  $M' \mid M$  y  $M' \in \text{gen}_F(M/M')$ . Por hipótesis de inducción existe  $Y \mid (M/M')$   $\text{gen}_F$ -minimal tal que  $\text{gen}_F(Y) = \text{gen}_F(M/M')$ .

Note que  $\text{gen}_F(Y) \subseteq \text{gen}_F(M)$  ya que  $Y \mid M$ . Veamos que  $\text{gen}_F(M) \subseteq \text{gen}_F(Y)$ . En efecto, sean  $Z \in \text{gen}_F(M)$ . Luego, existen  $F$ -epimorfismos  $(f, g) : (M/M')^m \oplus (M')^m \rightarrow Z$

y  $h : (M/M')^s \rightarrow (M')^m$ . Ahora, usando que  $X$  es un generador aditivo, por el Lema 1.7.10 y el Lema 1.7.11, existen  $X' \in \text{add}(X)$  y un  $F$ -epimorfismo  $k : X' \rightarrow Z$ . Por el Lema 1.7.10 existe  $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} : X' \rightarrow (M/M')^m \oplus (M')^m$  tal que  $(f, g) \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = k$  y  $h' : X' \rightarrow (M/M')^s$  tal que  $hh' = g'$ . Así pues,  $k = ff' + gg' = ff' + gh'h' = (f, gh) \begin{pmatrix} f' \\ h' \end{pmatrix}$ . Por el Lema 2.2.8 (a) se sigue que  $(f, gh) : (M/M')^m \oplus (M/M')^s \rightarrow Z$  es un  $F$ -epimorfismo. Ahora, del Lema 2.2.4 se tiene que  $Z \in \text{gen}_F(\text{add}(M/M')) = \text{gen}_F(M/M')$ . Por lo tanto,  $Z \in \text{gen}_F(M/M') = \text{gen}_F(Y)$ .  $\square$

La primera parte del siguiente resultado es debido a M. Auslander y se puede encontrar en [Au73].

**Lema 2.2.12.** Sean  $X, N \in \text{mod}(\Lambda)$ , con  $X$  un generador aditivo,  $\Gamma := \text{End}_\Lambda(X)^{op}$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a)  $\text{Hom}_\Lambda(X, -) : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Gamma)$  es fiel y pleno;
- (b)  $\text{Ext}_F^i(-, N) \cong \text{Ext}_\Gamma^i(\text{Hom}_\Lambda(X, -), \text{Hom}_\Lambda(X, N)) \forall i \geq 1$ .

*Demostración.* Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Por el Lema 1.7.10 y el Lema 1.7.11 existe una  $F$ -resolución proyectiva  $X_\bullet : \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$ , con  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{add}(X)$ . En particular, se tiene el siguiente complejo (acíclico en los primeros dos lugares)

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(f_0, N)} \text{Hom}_\Lambda(X_0, N) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(f_1, N)} \text{Hom}_\Lambda(X_1, N) \rightarrow \dots$$

Mas aún, se tiene la resolución proyectiva de  $\Gamma$ -módulos

$$\dots \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, X_1) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, X_0) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, M) \rightarrow 0$$

de  $\text{Hom}_\Lambda(X, M)$ .

(a) Por el Lema 1.2.11 y la propiedad universal del kernel se tienen los siguientes isomorfismos donde las columnas son exactas

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_\Lambda(M, N) & \xrightarrow{\eta_N} & \text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_\Lambda(X, M), \text{Hom}_\Lambda(X, N)) \\ \text{Hom}_\Lambda(f_0, N) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_\Lambda(X, f_0), \text{Hom}_\Lambda(X, N)) \\ \text{Hom}_\Lambda(X_0, N) & \xrightarrow{\eta_{X_0}} & \text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_\Lambda(X, X_0), \text{Hom}_\Lambda(X, N)) \\ \text{Hom}_\Lambda(f_1, N) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_\Lambda(X, f_1), \text{Hom}_\Lambda(X, N)) \\ \text{Hom}_\Lambda(X_1, N) & \xrightarrow{\eta_{X_1}} & \text{Hom}_\Gamma(\text{Hom}_\Lambda(X, X_1), \text{Hom}_\Lambda(X, N)). \end{array}$$

Por el Lema de los cinco se concluye que  $\eta_N$  es un isomorfismo y así

$$\text{Hom}_\Lambda(X, -) : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Gamma)$$

es fiel y pleno.

(b) Por el Lema 1.2.11 se tiene que los morfismos horizontales son isomorfismos  $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Lambda(X_i, N) & \xrightarrow[\sim]{\eta_{X_0}} & \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X_i), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)) \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(f_{i+1}, N) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f_{i+1}), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)) \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(X_{i+1}, N) & \xrightarrow[\sim]{\eta_{X_{i+1}}} & \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X_{i+1}), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)). \end{array}$$

Por lo que los cocomplejos  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, N)$  y  $\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X_\bullet), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N))$  son isomorfos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_F^i(M, N) &= \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, N)) \\ &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X_\bullet), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N))) \\ &= \mathrm{Ext}_F^i(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)) \quad \forall i \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.2.13.** Sean  $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $f : M \rightarrow N$  un morfismo en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$  y  $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(X)^{op}$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $f$  es minimal a izquierda en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$  si, y sólo si,  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)$  es minimal a izquierda en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$ .
- (b)  $f$  es minimal a derecha en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$  si, y sólo si,  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)$  es minimal a derecha en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$ .
- (c) Si  $F := F_{\mathrm{add}(X)}$ . Entonces,  $f$  es un  $F$ -epimorfismo si, y sólo si,  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)$  es un epimorfismo en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$ .

*Demostración.* (a) ( $\Rightarrow$ ) Sea  $g : \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X, N)$  un morfismo en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$  tal que  $g\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)$ . Por el Lema 2.2.12 (a) existe un morfismo  $k : N \rightarrow N$  tal que  $g = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, k)$ . Así pues,  $kf = f$ . Por lo tanto,  $k$  es un isomorfismo y así  $g$  es un isomorfismo.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $h : N \rightarrow N$  tal que  $hf = f$ . Por lo que  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, h)\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)$  y  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, h)$  es un isomorfismo. Por el Lema 2.2.12 (a) se sigue que  $h$  es un isomorfismo.

(b) Es análogo a (a).

(c) ( $\Rightarrow$ ) Se concluye del Lema 1.7.8 y el Lema 1.7.10.

( $\Leftarrow$ ) Por el Lema 1.7.10 y el Lema 1.7.11 existe una sucesión  $F$ -exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow X' \xrightarrow{g} N \rightarrow 0,$$

con  $X' \in \mathrm{add}(X)$ . Así pues, existe  $X'' \in \mathrm{add}(X)$  tal que  $X' \oplus X'' = X^m$ , para algún  $m \in \mathbb{N}^+$ . Por el Lema 1.7.3 se tiene que  $0 \rightarrow K \oplus X'' \rightarrow X^m \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$  es una  $F$ -sucesión exacta. Dado que  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)$  es un epimorfismo en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$  y  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X^m) \in \mathrm{proj}(\Gamma)$ , por Lema 2.2.12 (a) existe  $k : X^m \rightarrow M$  tal que  $g = fk$ . Luego, por el Lema 2.2.8,  $f$  es un  $F$ -epimorfismo. □

**Proposición 2.2.14.** *Para  $X, Y$  objetos inescindibles en una categoría Krull-Schmidt  $\mathcal{C}$ , las siguientes condiciones se satisfacen :*

- (a)  $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{f : X \rightarrow Z \mid f \text{ no es invertible a izquierda}\};$
- (b)  $\text{rad}_{\mathcal{C}}(Z, Y) = \{f : Z \rightarrow Y \mid f \text{ no es invertible a derecha}\};$
- (c)  $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ no es isomorfismo}\}.$

*Demostración.* (a) ( $\subseteq$ ) Sea  $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ . Supongamos que  $f$  es invertible a izquierda. Entonces existe  $g : Z \rightarrow X$  tal que  $gf = 1_X$ . Por el Lema 1.1.8 se tiene que  $1_X \in \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(X))$ , lo cual es una contradicción. Por lo que  $f$  no es invertible a izquierda.

( $\supseteq$ ) Sea  $f \notin \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ . Por el Lema 1.1.6 existe  $g : Z \rightarrow X$  tal que  $gf \notin \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(X))$ . Puesto que  $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$  es un anillo local, se tiene que  $gf$  es invertible. Luego, existe

$$k \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$$

tal que  $kgf = 1_X$ . Por lo tanto,  $f$  es invertible a izquierda.

- (b) Es análoga a la prueba en (a).
- (c) Se sigue de (a) y (b). □

El siguiente resultado es la versión relativa de [AS81, Proposición 5.1] y es fundamental para la prueba del Lema 1.8.4.

**Proposición 2.2.15.** *Sean  $M, X \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$  tales que  $X$  es un generador aditivo en  $\text{mod}(\Lambda)$ ,  $M$  es  $\text{gen}_F$ -minimal y  $\text{gen}_F(M)$  es una clase de  $F$ -torsión. Entonces  $M \in {}^{F^{\perp 1}}\text{gen}_F(M)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $M \notin {}^{F^{\perp 1}}\text{gen}_F(M)$ . Entonces existen  $Y \in \text{ind}(\Lambda)$  tal que  $Y \mid M$ ,  $Z \in \text{gen}_F(M)$  y una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow Z \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$  que no se escinde. Por la Proposición 2.2.14 (b) se tiene que  $g \in \text{rad}_{\Lambda}(E, Y)$ ; y por el Lema 1.1.9, se sigue que  $f$  es un morfismo minimal a izquierda. Por la Proposición 2.2.13 (a) se tiene que  $\text{Hom}_{\Lambda}(X, f)$  es minimal a izquierda. Por el Lema 1.7.10 se tiene que

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(X, Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\Lambda}(X, f)} \text{Hom}_{\Lambda}(X, E) \xrightarrow{\text{Hom}_{\Lambda}(X, g)} \text{Hom}_{\Lambda}(X, Y) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta; y así, del Lema 1.1.9 se sigue que

$$\text{Hom}_{\Lambda}(X, g) \in \text{rad}_{\Gamma}(\text{Hom}_{\Lambda}(X, E), \text{Hom}_{\Lambda}(X, Y)),$$

donde  $\Gamma := \text{End}_{\Lambda}(X)^{op}$ . Puesto que  $\text{gen}_F(M)$  es cerrada por extensiones, existe un  $F$ -epimorfismo  $(h, k) : Y^m \oplus (M/Y)^m \rightarrow E$ , con  $h = (h_1, \dots, h_m)$ . Ahora, del Lema 2.2.8 se tiene que  $(gh, gk)$  es un  $F$ -epimorfismo y por el Lema 1.7.8 se sigue que

$$(\text{Hom}_{\Lambda}(X, gh), \text{Hom}_{\Lambda}(X, gk)) : \text{Hom}_{\Lambda}(X, Y^m) \oplus \text{Hom}_{\Lambda}(X, (M/Y)^m) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(X, Y)$$

es un epimorfismo. Por lo que se tiene la siguiente igualdad

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Hom}_\Lambda(X, gh_i)(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)) + \mathrm{Hom}_\Lambda(X, gk)(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, (M/Y)^m)).$$

Dado que  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, g) \in \mathrm{rad}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, E), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y))$  se concluye del Lema 1.1.8 que  $\sum_{i=1}^m \mathrm{Hom}_\Lambda(X, gh_i)(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)) \subseteq \mathrm{rad}_\Gamma(\mathrm{End}_\Lambda(X, Y))$ . Luego, del Lema 1.2.5 se sigue que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, gk)(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, (M/Y)^m)).$$

Por lo que  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, gk)$  es un epimorfismo en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$ , y de la Proposición 2.2.13 (b), se tiene que  $gk : (M/Y)^m \rightarrow Y$  es un  $F$ -epimorfismo, lo cual es una contradicción ya que  $M$  es  $\mathrm{gen}_F$ -minimal. Por lo tanto,  $M \in {}^{F^{\perp 1}}\mathrm{gen}_F(M)$ .  $\square$

**Lema 2.2.16.** *Sean  $F$  un subfunctor aditivo de  $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(-, -)$  con suficientes proyectivos e inyectivos y  $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ . Entonces  $\mathrm{pd}_F(M) \leq n$  si, y sólo si,  $\mathrm{Ext}_F^{n+1}(M, N) = 0 \forall N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Es claro.

$\Leftarrow$ ) Sean  $j \geq 1$  y  $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ . Dado que  $F$  tiene suficientes inyectivos, existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow N \rightarrow I_0 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{j-1} \rightarrow K \rightarrow 0$ , donde  $I_k \in \mathcal{I}(F) \forall k \in [0, j-1]$ . Aplicando el Lema del corrimiento, se tiene que  $\mathrm{Ext}_F^{n+j+1}(M, N) \cong \mathrm{Ext}_F^{n+1}(M, K) = 0$ . Por lo tanto,  $\mathrm{pd}_F(M) \leq n$ .  $\square$

**Teorema 2.2.17.** *Sean  $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\mathrm{add}(X)}$  y  $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a)  $\mathcal{T}$  es una clase de  $F$ -torsión y  $F$ -preenvolvente.

(b) Existe un 1- $F$ -inclinante  $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$  tal que  $\mathcal{T} = \mathrm{gen}_F(T)$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Sea  $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ , donde  $X_i \in \mathrm{ind}(\Lambda) \forall i \in [1, n]$ . Por la Proposición 2.2.7 (a) existe  $T' \in \mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{T} = \mathrm{gen}_F(T')$ . Por la Proposición 2.2.11 existe  $T'' \mid T'$   $\mathrm{gen}_F$ -minimal tal que  $\mathcal{T} = \mathrm{gen}_F(T'')$ . Por otro lado, al ser  $\mathcal{T}$  preenvolvente, se tiene por el Lema 1.7.17 que  $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{T}$ . Luego, por la Proposición 2.2.7 (b1), para cada  $k \in [1, n]$ , existe una sucesión  $F$ -exacta  $\eta_k : 0 \rightarrow X_k \xrightarrow{i_k} \bar{T}_k \rightarrow \bar{C}_k \rightarrow 0$  tal que  $i_k : X_k \rightarrow \bar{T}_k$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente y  $\bar{T}_k \in \mathrm{add}(T'')$ . Ahora, por el Lema 1.7.3 se tiene la siguiente sucesión  $F$ -exacta  $\eta := \bigoplus_{k=1}^n \eta_k : 0 \rightarrow X \xrightarrow{i} \bar{T} \rightarrow \bar{C} \rightarrow 0$ , donde  $\bar{T} := \bigoplus_{k=1}^n \bar{T}_k$ ,  $\bar{C} := \bigoplus_{k=1}^n \bar{C}_k$  y  $i := \bigoplus_{k=1}^n i_k$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente por el Lema 2.2.6. Veamos que  $T := \bar{T} \oplus \bar{C}$  es 1- $F$ -inclinante y  $\mathcal{T} = \mathrm{gen}_F(T)$ . Dividiremos dicha prueba en las siguientes partes a verificar:

(i)  $\mathcal{T} = \mathrm{gen}_F(T)$ :

En efecto, para ello, es suficiente probar  $\mathrm{gen}_F(T) = \mathrm{gen}_F(T'')$ . Dado que  $\bar{T} \in \mathrm{add}(T'')$ , por el Lema 2.2.4 se tiene que  $\mathrm{gen}_F(\bar{T}) \subseteq \mathrm{gen}_F(\mathrm{add}(T'')) = \mathrm{gen}_F(T'')$ . Ahora, por el Lema 1.7.10 existe una sucesión  $F$ -exacta  $\epsilon : 0 \rightarrow K \rightarrow X^m \xrightarrow{g} T'' \rightarrow 0$ . De la sucesión  $F$ -exacta

$\eta$ , por el Lema 1.7.3, se tiene la sucesión  $F$ -exacta  $\eta^m : 0 \rightarrow X^m \xrightarrow{i^m} \bar{T}^m \rightarrow \bar{C}^m \rightarrow 0$ . Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & K & \xlongequal{\quad} & K & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
\eta^m : & 0 \longrightarrow & X^m & \xrightarrow{i^m} & \bar{T}^m & \longrightarrow & \bar{C}^m \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow g & & \downarrow g' & & \parallel \\
\lambda : & 0 \longrightarrow & T'' & \xrightarrow{j} & E & \longrightarrow & \bar{C}^m \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 
\end{array}$$

Dado que  $i^m : X^m \rightarrow \bar{T}^m$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente (ver Lema 2.2.6) y  $T'' \in \mathcal{T}$ , se tiene que  $g$  se factoriza a través de  $i^m$  y por lo tanto  $\lambda$  se escinde. Por lo que existe  $j' : E \rightarrow T''$  tal que  $j'j = 1_{T''}$ . En particular,  $j'$  es un  $F$ -epimorfismo. Ahora bien, por el Lema 1.7.4 se tiene que  $g'$  es un  $F$ -epimorfismo. Luego, por el Lema 2.2.8 (b)  $j'g' : \bar{T}^m \rightarrow T''$  es un  $F$ -epimorfismo, y así se concluye que  $\text{gen}_F(T'') \subseteq \text{gen}_F(\bar{T})$ .

(ii)  $T \in {}^{F\perp_1}\mathcal{T}$ :

Dado que  $T''$  es  $\text{gen}_F$ -minimal, se concluye de la Proposición 2.2.15 que  $\bar{T} \in {}^{F\perp_1}\mathcal{T}$ . Sólo basta probar que  $\bar{C} \in {}^{F\perp_1}\mathcal{T}$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, Y)$ , con  $Y \in \mathcal{T}$ , a la sucesión  $F$ -exacta  $\eta$  se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\text{Hom}_\Lambda(\bar{T}, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(i, Y)} \text{Hom}_\Lambda(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_F^1(\bar{C}, Y) \rightarrow \text{Ext}_F^1(\bar{T}, Y) = 0.$$

Puesto que  $i$  es una  $\mathcal{T}$ -preenvolvente, se sigue que  $\text{Ext}_F^1(\bar{C}, Y) = 0$ .

(iii)  $T \in {}^{F\perp_1}\mathcal{T}$ :

Se sigue de (ii), ya que  $T \in \mathcal{T}$ .

(iv)  $\text{coresdim}_{(\text{add}(T), F)}(X') \leq 1 \forall X' \in \mathcal{P}(F)$ :

En efecto, sea  $X' \in \mathcal{P}(F)$ , por el Lema 1.7.10 se sigue que  $\mathcal{P}(F) = \text{add}(X)$ . Dado que  $\{\eta_k\}_{k=1}^n$  son sucesiones  $F$ -exactas, del Lema 1.7.3, existe una sucesión  $F$ -exacta

$$0 \rightarrow X' \rightarrow T^* \rightarrow C^* \rightarrow 0,$$

donde  $T^* \in \text{add}(\bar{T}) \subseteq \text{add}(T)$  y  $C^* \in \text{add}(\bar{C}) \subseteq \text{add}(T)$ . Así,  $\text{coresdim}_{(\text{add}(T), F)}(X') \leq 1$ .

(v)  $\text{pd}_F(T) \leq 1$ :

En efecto, por el Lema 2.2.16, basta ver que  $\text{mod}(\Lambda) \subseteq T^{F\perp_2}$ . Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Por el Lema 1.7.11 y el Lema 1.7.17, existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow 0$ , con  $I \in \mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{T}$ . Por ser  $\mathcal{T}$  de  $F$ -torsión, se tiene que  $L \in \mathcal{T}$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(T, -)$  a la sucesión  $F$ -exacta anterior, se tiene la siguiente sucesión exacta por (ii)

$$0 = \text{Ext}_F^1(T, L) \rightarrow \text{Ext}_F^2(T, M) \rightarrow \text{Ext}_F^2(T, I) = 0.$$

Por lo tanto,  $M \in T^{F\perp 2}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  un 1- $F$ -inclinante tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(T)$ . Veamos que  $\text{gen}_F(T)$  es una clase de  $F$ -torsión, para lo cual (ver Lema 2.2.9) basta ver que  $\mathcal{T} \subseteq {}^{F\perp 1}\text{gen}_F(T)$ . Sea  $M \in \text{gen}_F(T)$ . Luego, existe una sucesión  $F$ -exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow T^m \rightarrow M \rightarrow 0$ , y así se obtiene la sucesión exacta  $0 = \text{Ext}_F^1(T, T^m) \rightarrow \text{Ext}_F^1(T, M) \rightarrow \text{Ext}_F^2(T, K) = 0$ , ya que  $\text{pd}_F(T) \leq 1$ . Así pues,  $\text{gen}_F(T)$  es una clase de  $F$ -torsión. Ahora, para terminar la prueba, por la Proposición 2.2.7 (b), basta ver que  $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{T}$ . Sea  $I \in \mathcal{I}(F)$ . Por el Lema 1.7.10 y el Lema 1.7.11 existe un  $F$ -epimorfismo  $p : X' \rightarrow I$ , con  $X' \in \text{add}(X)$ . Ahora, como  $\text{coresdim}_{(\text{add}(T), F)}(X') \leq 1$ , se tiene una sucesión  $F$ -exacta  $\eta : 0 \rightarrow X' \xrightarrow{i} T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$ , con  $T', T'' \in \text{add}(T)$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \eta : & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i} & T' & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow p & & \downarrow h & & \parallel & & \\ \epsilon : & 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{j} & E & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por la Proposición 1.7.4, se tiene que  $h$  es un  $F$ -epimorfismo. Dado que  $\eta$  es  $F$ -exacta y  $I \in \mathcal{I}(F)$ , se tiene que  $p$  se factoriza a través de  $i$ , y así,  $\epsilon$  se escinde. Por lo que existe  $j' : E \rightarrow I$  tal que  $j'j = 1_I$ . Por el Lema 2.2.8 se sigue que  $j'h : T' \rightarrow I$  es un  $F$ -epimorfismo. Dado que  $T' \in \mathcal{T}$  y como  $\mathcal{T}$  es de  $F$ -torsión se concluye que  $I \in \mathcal{T}$ .  $\square$

**Lema 2.2.18.** Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  1- $F$ -inclinante. Entonces,  $\text{gen}_F(T) = T^{F\perp 1}$ .

*Demostración.* Sea  $M \in T^{F\perp 1}$ . Por los Lemas 1.7.10 y 1.7.11 existen  $m \in \mathbb{N}$  y un  $F$ -epimorfismo  $p : X^m \rightarrow M$ . Ahora, por el Lema 1.7.3 se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas  $F$ -exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X^m & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow p & & \downarrow p' & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

con  $T', T'' \in \text{add}(T)$ . Se sigue del Lema 1.7.4 que  $p' : T' \rightarrow E$  es un  $F$ -epimorfismo. Dado que  $M \in T^{F\perp 1}$  existe  $q : E \rightarrow M$  tal que  $qi = 1_M$ . En particular,  $q$  es un  $F$ -epimorfismo. Entonces, del Lema 2.2.8 (b), se tiene que  $qp' : T' \rightarrow M$  es un  $F$ -epimorfismo. Luego, del Lema 2.2.4 concluimos que  $M \in \text{gen}_F(T)$ . Por lo tanto,  $T^{F\perp 1} \subseteq \text{gen}_F(T)$ .

Sea  $N \in \text{gen}_F(T)$ . Consideremos  $0 \rightarrow K \rightarrow T^n \rightarrow N \rightarrow 0$  una sucesión  $F$ -exacta. Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(T, -)$  a la sucesión exacta anterior, se tiene la siguiente sucesión exacta,  $0 = \text{Ext}_F^1(T, T^n) \rightarrow \text{Ext}_F^1(T, N) \rightarrow \text{Ext}_F^2(T, K) = 0$  ya que  $T$  es 1- $F$ -inclinante. Por lo tanto,  $N \in T^{F\perp 1}$ .  $\square$

**Corolario 2.2.19.** Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Entonces, la correspondencia  $T \mapsto \text{gen}_F(T)$  es una biyección entre iso-clases de  $\Lambda$ -módulos básicos 1- $F$ -inclinantes y  $\mathcal{T} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\mathcal{T}$  es  $F$ -torsión y  $F$ -preenvolvente.

*Demostración.* Por el Teorema 2.2.17, la asignación  $T \mapsto \text{gen}_F(T)$  es suprayectiva.

Sean  $T, S \in \text{mod}(\Lambda)$  1- $F$ -inclinantes básicos tales que  $\text{gen}_F(T) = \text{gen}_F(S)$ . En particular, existen un  $F$ -epimorfismo  $p : T^m \rightarrow S$  y una  $\text{add}(T)$ -precubierta  $f : T' \rightarrow S$ . Por lo que existe  $h : T^m \rightarrow T'$  tal que  $p = fh$ . Luego, por el Lema 2.2.8 (a), se tiene que  $f$  es un  $F$ -epimorfismo. Consideremos la sucesión  $F$ -exacta  $\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow T' \xrightarrow{f} S \rightarrow 0$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(T, -)$  a  $\eta$ , se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\text{Hom}_\Lambda(T, T') \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(T, f)} \text{Hom}_\Lambda(T, S) \rightarrow \text{Ext}_F^1(T, K) \rightarrow \text{Ext}_F^1(T, T') = 0.$$

Así pues,  $K \in T^{F^\perp 1}$ . Por el Lema 2.2.18, se tiene que

$$K \in T^{F^\perp 1} = \text{gen}_F(T) = \text{gen}_F(S) = S^{F^\perp 1}.$$

Se sigue que  $\eta$  se escinde y por ende  $S \in \text{add}(T)$ . Análogamente,  $T \in \text{add}(S)$ . Por lo tanto,  $S \cong T$ .  $\square$

**Corolario 2.2.20.** *Sean  $\Lambda$  de tipo de representación finito,  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $\mathcal{T}$  una clase de  $F$ -torsión. Entonces, existe un  $\Lambda$ -módulo 1- $F$ -inclinante  $T$  tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(T)$  si, y sólo si,  $\tau(\text{add}(X)) \oplus \text{inj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{T}$ .*

*Demostración.* Note primero que, por los Lemas 1.7.7 y 1.7.10, se tiene la siguiente igualdad  $\mathcal{I}(F) = \tau(\text{add}(X)) \oplus \text{inj}(\Lambda)$ .

( $\Rightarrow$ ) Se sigue del Teorema 2.2.17 y el Lema 1.7.17.

( $\Leftarrow$ ) Por el Teorema 2.2.17, el Lema 1.7.17 y el Lema 2.2.4, basta ver que  $\mathcal{T}$  es preenvolvente. Ahora bien, por ser  $\mathcal{T}$  de  $F$ -torsión, se sigue que  $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T})$ ; y por ser  $\Lambda$  de tipo de representación finito, existe  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\mathcal{T} = \text{add}(M)$ . En particular,  $\mathcal{T}$  es preenvolvente.  $\square$

## 2.3. Módulos $F$ -sedimentados

Sea  $X$  un generador aditivo en  $\text{mod}(\Lambda)$ . El objetivo principal de esta sección es introducir los  $\Lambda$ -módulos  $F$ -presedimentados y ver su relación con los  $\Gamma$ -módulos  $\tau$ -rígidos en  $\text{mod}(\Gamma)$ , donde  $\Gamma := \text{End}_\Lambda(X)^{op}$ .

El siguiente resultado es una generalización del Lema 1.8.5 y sirve como motivación de la próxima definición.

**Lema 2.3.1.** *Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\text{add}(X)}$ ,  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $P_F^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} P_F^0(M) \xrightarrow{\pi_F^0} M \rightarrow 0$  una  $F$ -presentación proyectiva minimal de  $M$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a)  $\text{Hom}_\Lambda(\pi_F^{-1}, N) : \text{Hom}_\Lambda(P_F^0(M), N) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P_F^{-1}(M), N)$  es un epimorfismo.

(b)  $P_{F \geq -1}^\bullet(N)[1] \in P_{F \geq -1}^\bullet(M)^{\perp 0}$  en  $\mathbf{K}^b(\text{add}(X))$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Sean  $P_F^{-1}(N) \xrightarrow{\pi_F'^{-1}} P_F^0(N) \xrightarrow{\pi_F'^0} N \rightarrow 0$  una  $F$ -presentación proyectiva minimal de  $N$  y  $f : P_F^{-1}(M) \rightarrow P_F^0(N)$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , el cual induce el morfismo de cocomplejos  $f^\bullet : P_{F \geq -1}^\bullet(M) \rightarrow P_{F \geq -1}^\bullet(N)[1]$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_F^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_F^{-1}} & P_F^0(M) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_F^{-1}(N) & \xrightarrow{\pi_F'^{-1}} & P_F^0(N) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Por hipótesis, existe  $g : P_F^0(M) \rightarrow N$  tal que  $g\pi_F^{-1} = \pi_F'^0 f$ . Ahora bien, dado que  $P_F^0(M)$  es  $F$ -proyectivo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & P_F^0(M) \\ & \swarrow \exists h_0 & \downarrow g \\ P_F^0(N) & \xrightarrow{\pi_F'^0} & N \end{array}$$

Consideremos la factorización de  $\pi_F^{-1}$  a través de su imagen  $P_F^{-1}(N) \xrightarrow{p} \text{Im}(\pi_F'^{-1}) \xrightarrow{i} P_F^0(N)$ . Luego, como  $\pi_F'^0(f - h_0\pi_F^{-1}) = \pi_F'^0 f - g\pi_F^{-1} = 0$ , existe  $k : P_F^{-1}(M) \rightarrow \text{Im}(\pi_F'^{-1})$  tal que  $ik = f - h_0\pi_1$ , donde  $i : \text{Im}(\pi_F'^{-1}) \rightarrow P_F^0(N)$  es la inclusión canónica. Puesto que  $P_F^{-1}(M)$  es  $F$ -proyectivo y  $p$  es un  $F$ -epimorfismo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & P_F^{-1}(M) \\ & \swarrow \exists h_1 & \downarrow k \\ P_F^{-1}(N) & \xrightarrow{p} & \text{Im}(\pi_F'^{-1}) \end{array}$$

Con lo cual  $\pi_F'^{-1}h_1 = ik = f - h_0\pi_F^{-1}$ . Esto es  $f^\bullet \sim 0$ . Por lo tanto, se sigue (b).

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $f : P_F^{-1}(M) \rightarrow N$ . Dado que  $P_F^{-1}(M)$  es  $F$ -proyectivo y  $\pi_F'^0$  es un  $F$ -epimorfismo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & P_F^{-1}(M) \\ & \swarrow \exists g & \downarrow f \\ P_F^0(N) & \xrightarrow{\pi_F'^0} & N \end{array}$$

Por hipótesis, existen  $h_0 : P_F^0(M) \rightarrow P_F^0(N)$  y  $h_1 : P_F^{-1}(M) \rightarrow P_F^{-1}(N)$  tales que

$$\pi_F'^{-1}h_1 + h_0\pi_F^{-1} = g.$$

Por último, tenemos las siguientes igualdades  $f = \pi_F'^0 g = \pi_F'^0(\pi_F'^{-1}h_1 + h_0\pi_F^{-1}) = \pi_F'^0 h_0 \pi_F^{-1}$ .  $\square$

**Definición 2.3.2.** Sean  $M, X \in \text{mod}(\Lambda)$ , con  $X$  un generador aditivo y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Decimos que  $M$  es **F-sedimentado** (**F-presedimentado**) si  $P_{\mathbb{F}^{\bullet} \geq -1}^{\bullet}(M)$  es sedimentado (presedimentado) en  $\mathbf{K}^b(\text{add}(X))$ .

Aquí se presentan algunas caracterizaciones de los módulos  $F$ -presedimentados y su relación con los módulos  $\tau$ -rígidos.

**Proposición 2.3.3.** Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $\Gamma := \text{End}_{\Lambda}(X)^{op}$ ,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $M$  es  $F$ -presedimentado.
- (b)  $\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-2}, M) = 0$  y  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(M, M) = 0$ .
- (c)  $\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-2}, M) = 0$  y  $M \in {}^{F \perp 1} \text{gen}_F(M)$ .
- (d)  $\text{Hom}_{\Lambda}(X, M)$  es  $\tau$ -rígido en  $\text{mod}(\Gamma)$ .

*Demostración.* Sea  $\cdots \rightarrow P_{\mathbb{F}}^{-2}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-2}} P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(M) \rightarrow M \rightarrow 0$  la resolución  $F$ -proyectiva minimal de  $M$ . De esta resolución obtenemos el siguiente complejo de cadenas  $(P_{\mathbb{F}}^{\bullet}(M), M)$

$$(*) \quad \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^0(M), M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-1}, M)} \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M), M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-2}, M)} \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{-2}(M), M)$$

(a)  $\Rightarrow$  (b) Por el Lema 2.3.1 se tiene que

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-1}, M) : \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^0(M), M) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M), M)$$

es un epimorfismo, con lo cual  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(M, M) := H^1(\text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{\bullet}(M), M)) = 0$ . Más aún, para cualquier  $\theta \in \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M), M)$  existe  $\theta' \in \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^0(M), M)$  tal que  $\theta = \theta' \pi_F^{-1}$ . Se concluye que  $\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-2}, M)(\theta) = \theta \pi_F^{-2} = \theta' \pi_F^{-1} \pi_F^{-2} = 0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Del complejo (\*), tenemos que

$$\text{Im}(\pi_F^{-1}, M) = \text{Ker}(\pi_F^{-2}, M) = \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M), M)$$

ya que  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(M, M) = 0$  y  $\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-2}, M) = 0$ . Por el Lema 2.3.1, obtenemos (a).

(b)  $\Rightarrow$  (c) Por lo probado anteriormente, tenemos que  $M$  es  $F$ -presedimentado.

Veamos que  $M \in {}^{F \perp 1} \text{gen}_F(M)$ . Consideremos  $N \in \text{gen}_F(M)$ . Entonces, existe un  $F$ -epimorfismo  $p : M^n \rightarrow N$ . Para probar que  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(M, N) = 0$ , usando la resolución  $F$ -proyectiva de  $M$ , es suficiente demostrar que

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-1}, N) : \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^0(M), N) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M), N)$$

es un epimorfismo. Sea  $f : P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \rightarrow N$ . Ahora, ya que  $p : M^n \rightarrow N$  es un  $F$ -epimorfismo, existe  $g : P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \rightarrow M^n$  tal que  $pg = f$ . Por el Lema 2.3.1 existe  $h : P_{\mathbb{F}}^0(M) \rightarrow M^n$  tal que  $g = h \pi_F^{-1}$ . Concluimos que  $\text{Hom}_{\Lambda}(\pi_F^{-1}, N)$  es un epimorfismo, puesto que  $(ph) \pi_F^{-1} = pg = f$ .

(a)  $\Leftrightarrow$  (d) Sea  $P_F^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} P_F^0(M) \xrightarrow{\pi_F^0} M \rightarrow 0$  la presentación  $F$ -proyectiva minimal de  $M$ . Por el Lema 1.7.10, el Lema 1.2.11 (b) y la Proposición 2.2.13 (c), se sigue que  $\text{Hom}_\Lambda(X, P_F^{-1}(M)) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(X, \pi_F^{-1})} \text{Hom}_\Lambda(X, P_F^0(M)) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(X, \pi_F^0)} \text{Hom}_\Lambda(X, M) \rightarrow 0$  es una presentación proyectiva minimal en  $\text{mod}(\Gamma)$ . Más aún, del Lema 1.2.11, se muestra que  $P_{F \geq -1}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{add}(X))$  si, y sólo si,  $P_{\geq -1}^\bullet(\text{Hom}_\Lambda(X, M))$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Gamma))$ . Finalmente, por el Lema 1.8.5, lo último es equivalente a que  $\text{Hom}_\Lambda(X, M)$  sea  $\tau$ -rígido.  $\square$

Los siguientes resultados están orientados a mostrar como la teoría de módulos presedimentados generalizan la  $\tau$ -inclinante.

**Definición 2.3.4.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $X^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ . La **longitud** de  $X^\bullet$  es  $\ell(X^\bullet) := \min\{m - n \mid X^{m+k} = 0 \text{ y } X^{n-k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}^+\}$ .

**Observación 2.3.5.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $X^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ . Note que:

$$\ell(X^\bullet) \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}.$$

Más aún:

- (1)  $\ell(X^\bullet) = 0$  si, y sólo si, existe un único  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $X^i \neq 0$ ;
- (2)  $\ell(X^\bullet) = -\infty$  si, y sólo si,  $X^\bullet = 0$ ;
- (3)  $\ell(X^\bullet) = +\infty$  si, y sólo si,  $\forall j \in \mathbb{Z}$  existe  $r > j$  tal que  $X^r \neq 0$  o existe  $r < j$  tal que  $X^r \neq 0$ .

**Lema 2.3.6.** Sea  $X \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces  $X[0]$  es un complejo sedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{add}(X))$ .

*Demostración.* Ya que es claro que  $X[0]$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{add}(X))$ , es suficiente probar que  $\forall X^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{add}(X))$  se tiene que  $X^\bullet \in \text{thick}(X[0])$ . Lo haremos por inducción sobre la longitud del complejo  $X^\bullet$ . Podemos suponer que  $X^\bullet \neq 0$  y que esta concentrado hasta grado 0.

Si  $\ell(X^\bullet) = 0$ , es claro.

Sea  $n := \ell(X^\bullet) \geq 1$ . Supongamos que

$$X^\bullet := \dots \rightarrow 0 \rightarrow X^{-(n+1)} \xrightarrow{d^{-(n+1)}} X^{-n} \rightarrow \dots \rightarrow X^0 \rightarrow 0 \dots$$

Consideramos el morfismo  $f^\bullet : X^{-(n+1)}[n] \rightarrow X^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{add}(X))$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{-(n+1)} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow d^{-(n+1)} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{-n} & \longrightarrow & X^{-(n-1)} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \dots \end{array}$$

Dado que  $X^{-(n+1)}[n] \in \text{thick}(X[0])$ , por hipótesis inductiva  $X^\bullet \in \text{thick}(X[0])$  y puesto que  $X^\bullet = C(f^\bullet)$  concluimos que  $X^\bullet \in \text{thick}(X[0])$ .  $\square$

**Notación 2.3.7.** Sea  $M^\bullet := \cdots \rightarrow 0 \rightarrow M^{-1} \rightarrow M^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \in \mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$ . Escribimos  $(M^{-1} \rightarrow M^0) := M^\bullet$ .

**Lema 2.3.8.** Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\text{add}(X)}$ ,  $M \in \text{ind}(\Lambda)$  y  $P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(M) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^0} M \rightarrow 0$  una  $F$ -presentación proyectiva minimal de  $M$ . Entonces  $(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(M)) \in \text{ind}(\mathcal{K}^b(\text{add}(X)))$ . En particular, si  $N \in \text{mod}(\Lambda)$  se tiene que  $\text{rk}(P_{\mathbb{F}}^{-1}(N) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(N)) = \text{rk}(N)$ .

*Demostración.* Sean  $(P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0) \oplus (P'^{-1} \xrightarrow{d'^{-1}} P^0) = (P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(M))$ ,  $d^{-1} = id^{-1}$  y  $d'^{-1} = jd'^{-1}$  las factorizaciones a través de su imagen de  $d^{-1}$  y  $d'^{-1}$ , respectivamente. Notemos que  $\text{Coker}(d^{-1}) \oplus \text{Coker}(d'^{-1}) = \text{Coker}(\pi_{\mathbb{F}}^{-1}) = M$ . Dado que  $M \in \text{ind}(\Lambda)$ , sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\text{Coker}(d'^{-1}) = 0$ .

Veamos que  $P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$  es una  $F$ -presentación proyectiva de  $M$ . Por los Lemas 1.7.8 y 1.7.11, es suficiente probar que  $\text{Hom}_{\Lambda}(P, \bar{d}^{-1})$  y  $\text{Hom}_{\Lambda}(P, p)$  son epimorfismos  $\forall P \in \mathcal{P}(F)$ . Sean  $P \in \mathcal{P}(F)$ ,  $f : P \rightarrow M$  y  $g : P \rightarrow \text{Im}(d^{-1})$  morfismos en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Dado que

$(P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} P_{\mathbb{F}}^0(M) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^0} M \rightarrow 0) = (P^{-1} \oplus P'^{-1} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d'^{-1} \end{pmatrix} \rightarrow P^0 \oplus P^0 \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M \rightarrow 0)$  es una  $F$ -presentación proyectiva, existen  $f' : P \rightarrow P^0$ ,  $f'' : P \rightarrow P^0$ ,  $g' : P \rightarrow P^{-1}$  y  $g'' : P \rightarrow P'^{-1}$  tales que  $\begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = f$  y  $\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g' \\ g'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \end{pmatrix}$ . Así pues,  $P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$  es una  $F$ -presentación proyectiva de  $M$ , ya que  $f = pf'$  y  $g = \bar{d}^{-1}g'$ . Más aún, se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones  $F$ -exactos

$$\begin{array}{ccccccc} P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} & P_{\mathbb{F}}^0(M) & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow l & & \downarrow k & & \parallel & & \\ P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{p} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow l' & & \downarrow k' & & \parallel & & \\ P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^{-1}} & P_{\mathbb{F}}^0(M) & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{F}}^0} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De la minimalidad a derecha de  $\pi_{\mathbb{F}}^0$  y  $\pi_{\mathbb{F}}^{-1}$  se sigue que  $k$  y  $l$  son homomorfismo inyectivo escindibles. Puesto que  $P^{-1} \mid P_{\mathbb{F}}^{-1}(M)$  y  $P^0 \mid P_{\mathbb{F}}^0(M)$ , concluimos que  $k$  y  $l$  son isomorfismos. Por lo tanto,

$$P^{-1} \oplus P'^{-1} = P_{\mathbb{F}}^{-1}(M) = P^{-1} \quad \text{y} \quad P^0 \oplus P^0 = P_{\mathbb{F}}^0(M) = P^0,$$

de donde se sigue que  $(P'^{-1} \xrightarrow{d'^{-1}} P^0) = (0 \rightarrow 0)$ .  $\square$

**Definición 2.3.9.** Sean  $X$  un generador aditivo en  $\text{mod}(\Lambda)$ ,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $(M, X')$  un par con  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $X' \in \text{add}(X)$ .

(a) Decimos que el par  $(M, X')$  es **F-presedimentado** si  $M$  es  $F$ -presedimentado y

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X', M) = 0.$$

(b) Decimos que el par  $(M, X')$  es **F-sedimentado de soporte** si  $(M, X')$  es  $F$ -presedimentado y  $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(M) + \mathrm{rk}(X')$ .

(c) Decimos que  $M$  es **F-presedimentado especial** si  $M$  es  $F$ -presedimentado y

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M \oplus M') \notin \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M))))$$

$$\forall 0 \neq M' \in \mathrm{mod}(\Lambda) \text{ tal que } \mathrm{add}(M) \cap \mathrm{add}(M') = 0.$$

**Corolario 2.3.10.** Sean  $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo,  $F := F_{\mathrm{add}(X)}$  y  $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(X)^{\mathrm{op}}$ . Si  $(M, X')$  es un par  $F$ -presedimentado ( $F$ -sedimentado de soporte) en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$ , entonces  $(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, X'))$  es un par  $\tau$ -rígido ( $\tau$ -inclinante de soporte) en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$ . Mas aún, la asignación

$$(M, X') \xrightarrow{\Phi} (\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, X'))$$

entre el conjunto de los pares  $F$ -presedimentado en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$  y los pares  $\tau$ -rígidos en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$  induce una correspondencia inyectiva entre las respectivas clases de isomorfía.

*Demostración.* Sea  $(M, X')$  un par  $F$ -presedimentado en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$ . Por la Proposición 2.3.3 se tiene que  $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)$  es  $\tau$ -rígido. Mas aún, por el Lema 2.2.12 (a)

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X'), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(X', M) = 0;$$

y así  $\Phi(M, X')$  es un par  $\tau$ -rígido en  $\mathrm{mod}(\Gamma)$ . Supongamos que  $(M, X')$  es  $F$ -sedimentado de soporte. Luego, por el Lema 2.2.12 (a) y el Lema 1.2.11 se consigue la siguiente igualdad  $\mathrm{rk}(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)) + \mathrm{rk}(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X')) = \mathrm{rk}(M) + \mathrm{rk}(X') = \mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(\Gamma)$ . Por lo tanto,  $\Phi(M, X')$  es  $\tau$ -inclinante de soporte.

Sea  $(M', X'')$  un par  $F$ -presedimentado en  $\mathrm{mod}(\Lambda)$ . Note que si  $(M, X') \cong (M', X'')$ , necesariamente  $\Phi(M, X') \cong \Phi(M', X'')$ . Por lo que  $\Phi$  induce una función bien definida entre las respectivas clases de isomorfía. Veamos que es inyectiva.

En efecto, supongamos que  $\Phi(M, X') \cong \Phi(M', X'')$ . Luego,

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M') \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_\Lambda(X, X') \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(X, X'').$$

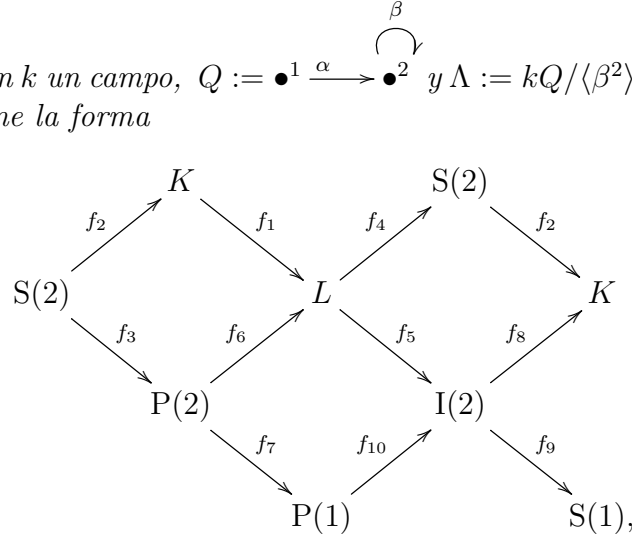
Por otro lado, del Lema 2.2.12 (a), tenemos que

$$(**) \quad \begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M') &\cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M')), \quad \text{y} \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(X', X'') &\cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X'), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, X'')) \end{aligned}$$

Por lo que, aplicando (\*) al par de isomorfismos en (\*\*), concluimos que  $M \cong M'$  y  $X' \cong X''$ .  $\square$

El siguiente ejemplo exhibe la existencia de un  $\Lambda$ -módulo  $M$  y un generador aditivo  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que,  $F := F_{\text{add}(X)}$ ,  $M \in {}^{F^{-1}}\text{gen}_F(M)$  y  $M$  no es  $F$ -presedimentado. Lo anterior no sucede para los módulos  $\tau$ -rígidos (ver Lema 1.8.1).

**Ejemplo 2.3.11.** Sean  $k$  un campo,  $Q := \bullet^1 \xrightarrow{\alpha} \bullet^2$  y  $\Lambda := kQ/\langle \beta^2 \rangle$ . El carcaj de Auslander-Reiten de  $\text{mod}(\Lambda)$  tiene la forma



donde  $K := P(1)/S(1)$  y  $L$  es el único  $\Lambda$ -módulo inescendible con vector de dimensión  $(1, 2)$  y  $L/\text{rad}(L) = S(1) \oplus S(2)$ .

Consideremos  $X := \Lambda \oplus K$ ,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $M := I(2)$ . Notemos que  $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^1(M, M) = 0$  ya que  $M$  es inyectivo.

Veamos que  $M$  no es  $F$ -presedimentado. La  $(\mathcal{P}(F), F)$ -cubierta de  $M$  esta dada por la siguiente  $F$ -sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow S(2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_7 f_3 \\ -f_2 \end{pmatrix}} P(1) \oplus K \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_{10} & f_5 f_1 \end{pmatrix}} M \rightarrow 0.$$

Ahora, la  $(\mathcal{P}(F), F)$ -cubierta de  $S(2)$  esta dada por la siguiente  $F$ -sucesión exacta

$$0 \rightarrow S(2) \xrightarrow{f_3} P(2) \xrightarrow{f_4 f_6} S(2) \rightarrow 0.$$

Con lo cual, la  $F$ -presentación proyectiva minimal de  $M$  esta dada por

$$P(2) \xrightarrow{\pi_F^{-1}} P(1) \oplus K \xrightarrow{\pi_F^0} M \rightarrow 0.$$

Supongamos que  $M$  es  $F$ -presedimentado. Consideremos la inclusión  $f_7 : P(2) \rightarrow P(1)$  y el morfismo  $f^\bullet : P_{\mathbb{F} \geq -1}^\bullet(M) \rightarrow P_{\mathbb{F} \geq -1}^\bullet(M)[1]$  dado por el siguiente morfismo de cocomplejos

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P(2) & \xrightarrow{\pi_F^{-1}} & P(1) \oplus K \\ 0 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} f_7 \\ 0 \end{pmatrix} & & 0 \downarrow \\ P(2) & \xrightarrow{\pi_F^{-1}} & P(1) \oplus K & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ya que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{add}(X))}(\mathbf{P}_{\mathbb{F}^{\geq -1}}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\mathbb{F}^{\geq -1}}^\bullet(M)[1]) = 0$ , existen morfismos  $s : \mathbf{P}(2) \rightarrow \mathbf{P}(2)$  y  $s' : \mathbf{P}(1) \oplus K \rightarrow \mathbf{P}(1) \oplus K$  tales que  $\begin{pmatrix} f_7 \\ 0 \end{pmatrix} = s'\pi_F^{-1} + \pi_F^{-1}s$ . Más aún, usando que

$$\pi_F^{-1} = \begin{pmatrix} f_7 f_3 f_4 f_6 \\ -f_2 f_4 f_6 \end{pmatrix} \in \text{rad}_\Lambda^2(\mathbf{P}(2), \mathbf{P}(1) \oplus K)$$

y  $\text{rad}_\Lambda^2$  es un ideal, obtenemos que  $\begin{pmatrix} f_7 \\ 0 \end{pmatrix} = \pi_F^{-1}s + s'\pi_F^{-1} \in \text{rad}_\Lambda^2(\mathbf{P}(2), \mathbf{P}(1) \oplus K)$  y entonces  $f_7 \in \text{rad}^2(\mathbf{P}(2), \mathbf{P}(1))$ , lo cual es una contradicción ya que  $f_7$  es un morfismo irreducible. Por lo que  $M$  no es  $F$ -presedimentado.

Calculando la subcategoría  $\text{gen}_F(M)$ , obtenemos que  $\text{ind}(\text{gen}_F(M)) := \{M, \mathbf{S}(1)\}$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, \mathbf{S}(1))$  a  $\eta$ , conseguimos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \text{Hom}_\Lambda(\mathbf{S}(2), \mathbf{S}(1)) \rightarrow \text{Ext}_F^1(M, \mathbf{S}(1)) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto,  $M \in {}^{F\perp}\text{gen}_F(M)$  y por el Lema 2.2.9 se concluye que  $\text{gen}_F(M)$  es una clase de  $F$ -torsión.

Los siguientes resultados se enfocan a dar una extensión de [AIR14, Teorema 2.7] en álgebras  $F$ -admisibles.

**Definición 2.3.12.** Sean  $0 \neq M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i^{m_i}$  su descomposición en  $\Lambda$ -módulos  $M_1, M_2, \dots, M_n$  no isomorfos e inescindibles dos a dos. La parte básica de  $M$  es el  $\Lambda$ -módulo  $b(M) := \bigoplus_{i=1}^n M_i$ .

**Lema 2.3.13.** Para un generador aditivo  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$ , las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) Si  $M$  es  $\text{gen}_F$ -minimal, entonces  $b(M)$  es  $\text{gen}_F$ -minimal.
- (b)  $\text{gen}_F(M) = \text{gen}_F(b(M)) \forall M \in \text{mod}(\Lambda)$ .
- (c) Sean  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $\Gamma := \text{End}_\Lambda(X)^{op}$ . Si  $\text{gen}_F(M) = \text{gen}_F(N)$ , entonces

$$\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M)) = \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N))$$

en  $\text{mod}(\Gamma)$ .

*Demostración.* (a) Supongamos que  $M$  es  $\text{gen}_F$ -minimal. Sea  $N \mid b(M)$  tal que

$$N \in \text{gen}_F(b(M)/N).$$

Veamos que  $N = 0$ . De hecho, ya que  $b(M)/N$  es un sumando directo de  $M/N$ , tenemos del Lema 1.7.3 que  $N \in \text{gen}_F(b(M)/N) \subseteq \text{gen}_F(M/N)$ , entonces  $N = 0$ , puesto que  $M$  es  $\text{gen}_F$ -minimal.

(b) Se sigue del Lema 2.2.4, ya que  $\text{add}(b(M)) = \text{add}(M)$ .

(c) Sea  $H \in \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N))$ . Entonces, existe un epimorfismo  $p : \text{Hom}_\Lambda(X, N^n) \rightarrow H$  en  $\text{mod}(\Gamma)$ . Dado que  $\text{gen}_F(M) = \text{gen}_F(N)$  existe un  $F$ -epimorfismo  $q : M^m \rightarrow N^n$ . Por la Proposición 2.2.13, se sigue que  $\text{Hom}_\Lambda(X, q) : \text{Hom}_\Lambda(X, M^m) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, N^n)$  es un epimorfismo en  $\text{mod}(\Gamma)$  y así  $p\text{Hom}_\Lambda(X, q) : \text{Hom}_\Lambda(X, M)^m \rightarrow H$  es un epimorfismo, probando que  $\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N)) \subseteq \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M))$ . De una forma similar, se puede demostrar que  $\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M)) \subseteq \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N))$ .  $\square$

**Proposición 2.3.14.** *Sean  $X$  un generador aditivo en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Si  $\mathcal{T}$  es una clase de  $F$ -torsión preenvolvente no nula, entonces existe  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  básico y  $\text{gen}_F$ -minimal tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(M)$  y  $M \in {}^{F^\perp} \mathcal{T}$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 2.2.7 (a) existe  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(T)$ . Note que  $T \neq 0$ , puesto que  $\mathcal{T} \neq 0$ . Entonces, por la Proposición 2.2.11 y el Lema 2.3.13, existe  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  que es básico,  $\text{gen}_F$ -minimal y  $\text{gen}_F(M) = \text{gen}_F(T) = \mathcal{T}$ . Finalmente, por la Proposición 2.2.15, obtenemos que  $M \in {}^{F^\perp} \mathcal{T}$ .  $\square$

El siguiente es un ejemplo de un  $\Lambda$ -módulo inescindible y  $F$ -presedimentado  $M$  tal que  $\text{gen}_F(M)$  no es preenvolvente. En caso contrario a los  $\Lambda$ -módulos  $\tau$ -rígidos  $M$  que tienen la propiedad que  $\text{gen}(M)$  es funtorialmente finita (ver Lema 1.8.4). Se usará la descripción de la categoría  $\text{mod}(\Lambda)$  del álgebra de Kronecker dada en [ARS95, VIII.7].

**Definición 2.3.15.** [AP78] *Sean  $\Lambda$  una  $R$ -álgebra de Artin,  $\bigoplus_{i=1}^n M_i =: M \in \text{mod}(\Lambda)$ , donde  $M_i \in \text{ind}(\Lambda) \forall i \in [1, n]$  y  $N \in \text{ind}(\Lambda)$ . Decimos que :*

- (a)  $N$  es *preinyectivo* si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\tau^{-n}(N) \in \text{inj}(\Lambda)$ ;
- (b)  $M$  es **preinyectivo** si  $M_i$  es preinyectivo  $\forall i \in [1, n]$ ;

Denotamos por  $\widetilde{\text{inj}}(\Lambda)$  a la categoría de  $\Lambda$ -módulos preinyectivos.

**Ejemplo 2.3.16.** *Sean  $k$  un campo,  $Q := \circ^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \circ^2$  y  $\Lambda := kQ$ . Consideremos las siguientes representaciones sobre  $Q$ :*

$$J_n := k^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{(1_{k^n}, 0)} \\ \xrightarrow{(0, 1_{k^n})} \end{array} k^n \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

$$R_{p,n} := k^n \begin{array}{c} \xrightarrow{1_{k^n}} \\ \xrightarrow{J_{n,p}} \end{array} k^n \quad n \in \mathbb{N}^+, p \in \mathbb{P}^1(k);$$

$X := \Lambda \oplus R_{(1,1),1}$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tienen las siguientes sucesiones exactas en  $\text{mod}(\Lambda)$   $0 \rightarrow S(2) \rightarrow R_{(1,1),1}^{n+1} \xrightarrow{g_n} J_n \rightarrow 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $g_n$  es una  $\text{add}(R_{(1,1),1})$ -precubierta  $\forall n \in \mathbb{N}$ , dichas sucesiones son  $F$ -exactas. Por lo cual,

$$\mathcal{Y} := \text{gen}_F(R_{(1,1),1}) = \widetilde{\text{inj}}(\Lambda) \oplus \text{add}(R_{(1,1),1}).$$

Veamos que  $R_{(1,0),1}$  no admite una  $\mathcal{Y}$ -preenvolvente. Supongamos lo contrario. Así, existe una  $\mathcal{Y}$ -preenvolvente  $f : R_{(1,0),1} \rightarrow Y$ . Puesto que  $\text{Hom}_A(R_{(1,0),1}, R_{(1,1),1}) = 0$ , se tiene que  $Y \in \widetilde{\text{inj}}(\Lambda)$ . Por lo que existe  $r \in \mathbb{N}^+$  tal que  $\text{Hom}_A(Y, J_r) = 0$ . Consideramos la siguiente sucesión exacta  $0 \rightarrow S(2) \rightarrow R_{(1,0),1}^{r+1} \xrightarrow{p} J_r \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Por el Lema 2.2.6, se tiene que  $\bigoplus_{i=1}^{r+1} f : R_{(1,0),1}^{r+1} \rightarrow Y^{r+1}$  es una  $\mathcal{Y}$ -preenvolvente. Así pues, existe  $g : Y^{r+1} \rightarrow J_r$  tal que  $p = g(\bigoplus_{i=1}^{r+1} f) = 0$ . Lo cual, es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathcal{Y}$  no es una clase preenvolvente.

La siguiente definición muestra una clase de álgebras tal que las clases de  $F$ -torsión preenvolventes están  $F$ -generadas por un módulo  $F$ -presedimentado (ver Proposición 2.3.3 y Proposición 2.3.14).

**Definición 2.3.17.** Sean  $X$  un generador aditivo en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $F := F_{\text{add}(X)}$ . Decimos que el álgebra  $\Lambda$  es **F-admisibile** si,  $\forall M \in \text{mod}(\Lambda)$ ,

$$\text{Ext}_F^1(M, M) = 0 \implies \text{Hom}_\Lambda(\pi_F^{-2}, M) = 0.$$

Es claro que si todo  $\Lambda$ -módulo  $M$  tiene dimensión  $F$ -proyectiva menor o igual a 1, entonces  $\Lambda$  es  $F$ -admisibile.

**Lema 2.3.18.** Sean  $X$  un generador aditivo en  $\text{mod}(\Lambda)$ ,  $\Gamma := \text{End}_\Lambda(X)^{op}$ ,  $F := F_{\text{add}(X)}$  y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Si  $\text{Hom}_\Lambda(X, M)$  es un  $\Gamma$ -módulo  $\tau$ -rígido, entonces  $\text{gen}_F(M)$  es una clase de  $F$ -torsión.

*Demostración.* Por el Lema 2.2.9, es suficiente probar que  $\text{Ext}_F^1(M, \text{gen}_F(M)) = 0$ . Ya que  $\text{Hom}_\Lambda(X, M)$  es un  $\Gamma$ -módulo  $\tau$ -rígido, se sigue del Lema 1.8.1 que

$$\text{Ext}_\Gamma^1(\text{Hom}_\Lambda(X, M), \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M))) = 0.$$

Entonces, por la inclusión  $\text{Hom}_\Lambda(X, \text{gen}_F(M)) \subseteq \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M))$  y el Lema 2.2.12 (b), se concluye que  $\text{Ext}_F^1(M, \text{gen}_F(M)) = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.3.19.** Sean  $X \in \text{mod}(\Lambda)$  un generador aditivo y  $F := F_{\text{add}(X)}$ , tal que  $\Lambda$  es  $F$ -admisibile. Consideremos las subcategorías:

- (a)  $F\text{-tor-preen}(\Lambda)$  cuyos elementos son las clases de  $F$ -torsión preenvolventes no nulas de  $\text{mod}(\Lambda)$ ;
- (b)  $F\text{-presilt-esp}(\Lambda)$  cuyos elementos son las iso-clases  $[M]$ , con  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $F$ -presedimentado especial básico tal que  $\text{gen}_F(M)$  es preenvolvente.

Entonces, la aplicación  $[M] \mapsto \text{gen}_F(M)$  induce una biyección entre  $F\text{-tor-preen}(\Lambda)$  y  $F\text{-presilt-esp}(\Lambda)$ .

*Demostración.* Sea  $M$  un  $\Lambda$ -módulo  $F$ -presedimentado especial básico tal que  $\text{gen}_F(M)$  es preenvolvente. Entonces, por la Proposición 2.3.3 y el Lema 2.3.18, tenemos que  $\text{gen}_F(M)$  es  $F$ -torsión y así la aplicación

$$F\text{-presilt-esp}(\Lambda) \rightarrow F\text{-tor-preen}(\Lambda), \quad [M] \mapsto \text{gen}_F(M)$$

esta bien definida.

Veamos que la aplicación es inyectiva. En efecto, sean  $M, N$   $\Lambda$ -módulos  $F$ -presedimentados especiales básicos tales que  $\text{gen}_F(M) = \text{gen}_F(N)$ . Por el Lema 2.3.13 (c), obtenemos que

$$\mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M))) = \mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N))).$$

Del Lema 1.8.4, se sigue que  $\text{Hom}_\Lambda(X, M) \mid \mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N)))$ . Ahora, sea  $M' \mid M$  inescindible. Puesto que  $\text{Hom}_\Lambda(X, N \oplus M') \mid \mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, N)))$ , y dado que  $N$  es  $F$ -presedimentado especial, se sigue que  $M' \in \text{add}(N)$ . Por ende,  $\text{add}(M) \subseteq \text{add}(N)$ . Análogamente, se puede mostrar que  $\text{add}(N) \subseteq \text{add}(M)$  y por ende  $M \cong N$ , puesto que  $M$  y  $N$  son básicos.

Afirmamos que la correspondencia es suprayectiva. Consideremos  $\mathcal{T} \in F\text{-tor-preen}(\Lambda)$  y  $\Gamma := \text{End}_\Lambda(X)^{op}$ . Entonces, por la Proposición 2.3.14 y la Proposición 2.3.3, existe  $T \in \mathcal{T}$   $F$ -presedimentado básico tal que  $\text{gen}_F(T) = \mathcal{T}$  y  $\text{Hom}_\Lambda(X, T)$  es  $\tau$ -rígido. Del Lema 1.8.4, se sigue que  $\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T))$  es una clase de torsión functorialmente finita y

$$(i) : \quad \text{Hom}_\Lambda(X, T) \mid \mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T))).$$

Además, del Lema 1.8.8, obtenemos que

$$(ii) : \quad \mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T))) \text{ es } \tau\text{-rígido en } \text{mod}(\Gamma); \text{ y}$$

$$(iii) : \quad \text{gen}(\mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T)))) = \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T)).$$

Por (i), existe  $N \in \text{mod}(\Lambda)$  que es cero o básico que satisface las siguientes dos condiciones:

$$(C1) \text{ add}(T) \cap \text{add}(N) = 0 \text{ y } \text{Hom}_\Lambda(X, T \oplus N) \mid \mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T))).$$

$$(C2) \forall K \in \text{mod}(\Lambda) - \{0\} \text{ con } \text{add}(K) \cap \text{add}(T \oplus N) = 0, \text{ tenemos que}$$

$$\text{Hom}_\Lambda(X, T \oplus N \oplus K) \notin \text{add}(\mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T)))).$$

Consideremos  $M := T \oplus N$ . Notemos que  $M$  es básico. Más aún, por (C1) y (ii), obtenemos que  $\text{Hom}_\Lambda(X, M)$  es  $\tau$ -rígido en  $\text{mod}(\Gamma)$ . Por la Proposición 2.3.3,  $M$  es  $F$ -presedimentado.

Veamos que  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(M)$ .

( $\subseteq$ ) Dado que  $M = T \oplus N$  y  $\text{gen}_F(T) = \mathcal{T}$ , se sigue que  $\mathcal{T} \subseteq \text{gen}_F(M)$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $p : M^n \rightarrow L$  un  $F$ -epimorfismo. Por la Proposición 2.2.13 (c),

$$\text{Hom}_\Lambda(X, p) : \text{Hom}_\Lambda(X, M)^n \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, L)$$

es un epimorfismo en  $\text{mod}(\Gamma)$  y así, por (C1) y (iii),

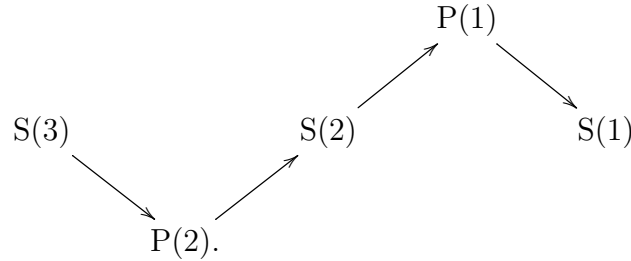
$$\text{Hom}_\Lambda(X, L) \in \text{gen}(\mathbb{P}(\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T)))) = \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T)).$$

En particular, existe un epimorfismo  $\text{Hom}_\Lambda(X, T^m) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, L)$ . Ahora, por el Lema 2.2.12 (a) y la Proposición 2.2.13 (c), existe  $q : T^m \rightarrow L$  un  $F$ -epimorfismo. Se concluye que  $L \in \text{gen}_F(T) = \mathcal{T}$ .

Dado que tenemos que  $\text{gen}_F(M) = \mathcal{T} = \text{gen}_F(T)$ , por el Lema 2.3.13 (c), se sigue que  $\text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, M)) = \text{gen}(\text{Hom}_\Lambda(X, T))$ . Por lo tanto, de (C2)  $M$  es  $F$ -especial; probando el resultado.  $\square$

En lo que sigue, damos un ejemplo donde podemos aplicar el Teorema 2.3.19 pero no el Teorema 2.2.17.

**Ejemplo 2.3.20.** Sean  $k$  un campo,  $Q := \circ^1 \xrightarrow{\alpha} \circ^2 \xrightarrow{\beta} \circ^3$ ,  $\Lambda := kQ/R^2$  y  $X := \Lambda \oplus S(2)$ . Entonces, el carcaj de Auslander-Reiten de  $\text{mod}(\Lambda)$  es el siguiente



Consideremos la subcategoría  $\mathcal{T} = \text{gen}(P(1))$ . Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1)  $\text{gl.dim}_F(\Lambda) = 1$ . En particular,  $\Lambda$  es  $F$ -admisibile.

En efecto, ya que  $\text{pd}_F(X) = 0$  y  $\text{mod}(\Lambda) = \text{add}(X \oplus S(1))$ , es suficiente probar que  $\text{pd}_F(S(1)) = 1$ . Pero, esto se sigue del carcaj de Auslander-Reiten de  $\text{mod}(\Lambda)$  puesto que  $0 \rightarrow S(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$  es una sucesión  $F$ -exacta.

- (2)  $\mathcal{T}$  es  $F$ -torsión y preenvolvente pero no  $F$ -preenvolvente. En particular, del Teorema 2.2.17,  $\mathcal{T} \neq \text{gen}_F(T)$  para cualquier  $\Lambda$ -módulo  $T$   $F$ -inclinante. Sin embargo, por el Teorema 2.3.19, existe  $M \in F\text{-presilt-esp}(\Lambda)$  con  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(M)$ .

De hecho, notemos primero  $\mathcal{T} = \text{add}(P(1) \oplus S(1)) = \text{gen}_F(P(1))$  y así  $\mathcal{T}$  es funtorialmente finita. Más aún, puesto que  $P(1)$  es proyectivo, por el Lema 2.2.9, obtenemos que  $\mathcal{T}$  es  $F$ -torsión. Por otro lado, por el Lema 1.7.7,  $\mathcal{I}(F) = \text{add}(S(3)) \not\subseteq \text{gen}_F(P(1))$ . Por lo tanto, por el Lema 1.7.17,  $\mathcal{T} = \text{gen}_F(P(1))$  no es  $F$ -preenvolvente.

- (3)  $\mathcal{T} \neq \text{gen}_F(M)$  para cualquier par  $(M, X')$   $F$ -sedimentado de soporte.

Los únicos pares  $F$ -presedimentado básicos  $(M, X')$  tales que  $\text{gen}_F(M) = \text{gen}_F(P(1))$  son los siguientes:  $(P(1), S(3))$ ,  $(P(1) \oplus S(1), S(3))$ ,  $(P(1), 0)$  y  $(P(1) \oplus S(1), 0)$ . Notemos que ninguno de los pares anteriores es  $F$ -sedimentado de soporte ya que  $\text{rk}(M) + \text{rk}(X') \leq 3$  y  $\text{rk}(X) = 4$ .

# Capítulo 3

## Cocomplejos sedimentados de $n$ -términos

En este capítulo,  $\Lambda$  denotará a una  $R$ -álgebra de Artin.

El objetivo principal de éste capítulo es dar una caracterización de los cocomplejos sedimentados de  $n$ -términos en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  a partir de ciertos métodos homológicos aplicados en la categoría  $\text{mod}(\Lambda)$ . En concreto, se quiere obtener una generalización de [AIR14, Teorema 3.2].

### 3.1. Módulos $\tau_n$ -rígidos

El objetivo principal de ésta sección es introducir los  $\Lambda$ -módulos  $\tau_n$ -rígidos y ver su relación con los objetos presedimentados en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Lo anterior es una extensión natural a la noción dada, en [AIR14], entre  $\Lambda$ -módulos  $\tau$ -rígidos y los cocomplejos presedimentados de 2-términos en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Recordemos que  $\pi : \mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda)) \rightarrow \mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda))$  denota el funtor canónico.

Los siguientes resultados se enfocan a realizar una caracterización de los cocomplejos presedimentados  $P_{\geq -n}^\bullet(M) \in \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , en la categoría de  $\Lambda$ -módulos, que extienda la hecha en el Lema 1.8.5.

**Lema 3.1.1.** *Para  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $P^\bullet \in \mathbf{C}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $M^\bullet \in \mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$ , las siguientes condiciones se satisfacen:*

- (a) *Sea  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$ , donde  $P^\bullet = P_{\geq m}^\bullet$ ,  $M^\bullet = M_{\leq m+n-1}^\bullet$  y  $H^{m+h}(M^\bullet) = 0 \forall h \in [0, n-1]$ . Si existen morfismos*

$$s^{m+n} : P^{m+n} \rightarrow M^{m+n-1} \quad \text{y} \quad s^{m+n-1} : P^{m+n-1} \rightarrow M^{m+n-2}$$

*en  $\text{mod}(\Lambda)$  tales que  $f^{m+n-1} = s^{m+n}d_{M^\bullet}^{m+n-1} + d_{P^\bullet}^{m+n-2}s^{m+n-1}$ , entonces  $\pi(f^\bullet) = 0$ .*

- (b) *Sea  $g^\bullet : P_{\geq m}^\bullet \rightarrow M_{\geq m}^\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$ . Si  $H^i(M^\bullet) = 0 \forall i \in [m-n-1, m]$ , entonces existe un morfismo  $\bar{g}^\bullet : P_{\geq m-n}^\bullet \rightarrow M_{\geq m-n}^\bullet$  en  $\mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $\bar{g}^\bullet|_{P_{\geq m}^\bullet} = g^\bullet$ .*

*Demostración.* (a) Note que  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  puede ser visto como sigue

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & P^m & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P^{m+k} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m+k}} & P^{m+k+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P^{m+n} \\
\downarrow & & \downarrow f^m & & & & \downarrow f^{m+k} & & \downarrow f^{m+k+1} & & & & \downarrow \\
M^{m-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-1}} & M^m & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & M^{m+k} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m+k}} & M^{m+k+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Veamos que el resultado se cumple por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , se cumple por las hipótesis dadas.

Sea  $n \geq 2$ . Consideremos  $P'^\bullet = P_{\geq m+1}^\bullet$  y  $f'^\bullet : P'^\bullet \rightarrow M^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  la restricción de  $f^\bullet$  sobre  $P'^\bullet$ . Por hipótesis de inducción, tenemos que  $\pi(f'^\bullet) = 0$ . Entonces, existen morfismos  $\{s^{m+k} : P^{m+k} \rightarrow M^{m+k-1}\}_{k=1}^n$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  tales que  $f^{m+k} = s^{m+k+1}d_{P^\bullet}^{m+k} + d_{M^\bullet}^{m+k-1}s^{m+k} \forall k \in [1, n]$ . Dado que  $f^{m+1} = s^{m+2}d_{P^\bullet}^{m+1} + d_{M^\bullet}^m s^{m+1}$ , se sigue que  $d_{M^\bullet}^m(f^m - s^{m+1}d_{P^\bullet}^m) = 0$  y así existe  $r : P^m \rightarrow B^m(M^\bullet)$  tal que  $\gamma_{M^\bullet}^m \beta_{M^\bullet}^m r = f^m - s^{m+1}d_{P^\bullet}^m$ . Usando que  $P^m$  es proyectivo, existe  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  con  $r = \alpha_{M^\bullet}^{m-1} s^m$ . Por lo tanto  $f^m = s^{m+1}d_{M^\bullet}^m + d_{P^\bullet}^{m-1} s^m$ , y entonces  $\pi(f^\bullet) = 0$ , ya que  $P^\bullet = P_{\geq m}^\bullet$ .

(b) Dado que  $d_{M^\bullet}^m g^m d_{P^\bullet}^{m-1} = g^{m+1}d_{P^\bullet}^m d_{P^\bullet}^{m-1} = 0$  existe  $t : P^{m-1} \rightarrow B^m(M^\bullet)$  tal que  $\gamma_{M^\bullet}^m \beta_{M^\bullet}^m t = g^m d_{P^\bullet}^{m-1}$ . Usando que  $P^{m-1}$  es proyectivo, existe  $g^{m-1} : P^{m-1} \rightarrow M^{m-1}$  con  $\alpha_{M^\bullet}^{m-1} g^{m-1} = t$  y entonces  $d_{M^\bullet}^{m-1} g^{m-1} = g^m d_{P^\bullet}^{m-1}$ . Repitiendo el procedimiento anterior, obtenemos morfismos  $g^{m-i} : P^{m-i} \rightarrow M^{m-i}$  en  $\text{mod}(\Lambda) \forall i \in [1, n]$  y así un morfismo  $\bar{g}^\bullet : P_{\geq m-n}^\bullet \rightarrow M_{\geq m-n}^\bullet$  tal que  $\bar{g}^\bullet|_{P_{\geq m}^\bullet} = g^\bullet$ .  $\square$

**Lema 3.1.2.** Sean  $P^\bullet, Q^\bullet \in \mathcal{K}^{\leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $n \geq 1$ . Entonces

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, Q_{\geq -n}^\bullet[j]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, Q^\bullet[j]) \forall j > 0.$$

*Demostración.* Sea  $j > 0$ . La sucesión exacta  $0 \rightarrow Q_{\geq -n}^\bullet[j] \rightarrow Q^\bullet[j] \rightarrow Q_{\leq -n-1}^\bullet[j] \rightarrow 0$  en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$  induce el siguiente triángulo distinguido

$$Q_{\geq -n}^\bullet[j] \rightarrow Q^\bullet[j] \rightarrow Q_{\leq -n-1}^\bullet[j] \rightarrow Q_{\geq -n}^\bullet[j+1] \quad \text{en } \mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda)).$$

Aplicando el funtor cohomológico  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, -)$  al triángulo anterior, y ya que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, Q_{\leq -n-1}^\bullet[j-1]) = 0$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, Q_{\leq -n-1}^\bullet[j]) = 0$ , tenemos el siguiente isomorfismo  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, Q_{\geq -n}^\bullet[j]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, Q^\bullet[j])$ .  $\square$

La siguiente definición fue introducida por O. Iyama, en [Iy07], para hacer caracterizaciones de las subcategorías inclinantes de conglomerado en  $\text{mod}(\Lambda)$  y mostrar la existencia de sucesiones de Auslander-Reiten más altas en ellas.

**Definición 3.1.3.** [Iy07, Sección 1.1] Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . El  $n$ -ésimo trasladado de Auslander-Reiten de  $M$  es  $\tau_n(M) := \tau(\Omega^{n-1}(M))$ , donde  $\Omega^n(M) := \text{Im}(\pi^{-n})$  es la  $n$ -ésima sizigia de  $M$  calculada usando la resolución proyectiva minimal de  $M$ .

**Proposición 3.1.4.** Para  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$ , las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Para  $1 \leq j \leq n$  : si  $\text{Hom}_\Lambda(N, \tau_j(M)) = 0$ , entonces

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[j]) = 0.$$

Más aún, la recíproca vale en éste caso para  $j = n$ ;

(b) Para  $n \geq 2$  y  $1 \leq j < n$  :  $\text{Ext}_\Lambda^j(M, N) = 0$  si, y sólo si,

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[j]) = 0.$$

*Demostración.* (a) Sean  $1 \leq j < n$  y  $f^\bullet : \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M) \rightarrow \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[j]$  en  $\mathbf{C}(\text{proj}(\Lambda))$ . El morfismo anterior induce el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^{-j}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-j}} & \mathbf{P}^{1-j}(M) \\ & & \downarrow f^{-j} \\ \mathbf{P}^{-1}(N) & \xrightarrow{\pi_N^{-1}} & \mathbf{P}^0(N), \end{array}$$

Dado que  $\text{Hom}_\Lambda(N, \tau_j(M)) = 0$  y  $\tau_j(M) = \tau(\Omega^{j-1}(M))$ , por el Lema 1.8.5, se tiene que  $\text{Hom}_{\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}((\mathbf{P}^{-j}(M) \rightarrow \mathbf{P}^{-j+1}(M)), (\mathbf{P}^{-1}(N) \rightarrow \mathbf{P}^0(N))[1]) = 0$ . Por lo que existen morfismos  $s : \mathbf{P}^{-j+1}(M) \rightarrow \mathbf{P}^0(N)$  y  $s' : \mathbf{P}^{-j}(M) \rightarrow \mathbf{P}^{-1}(N)$  tales que  $f^{-j} = s\pi_M^{-j} + \pi_N^{-1}s'$ . Luego, como  $j < n$ , podemos aplicar el Lema 3.1.1 (a) para obtener que  $\pi(f^\bullet) = 0$ . Así pues,  $\text{Hom}_{\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[j]) = 0$ .

Para el caso  $j = n$ , tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[n]) = \text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}((\mathbf{P}^{-n}(M) \rightarrow \mathbf{P}^{-n+1}(M)), (\mathbf{P}^{-1}(N) \rightarrow \mathbf{P}^0(N))).$$

Entonces, por el Lema 1.8.5, se concluye que  $\text{Hom}_{\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[n]) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_\Lambda(N, \tau_n(M)) = 0$ .

(b) Sean  $n \geq 2$  y  $1 \leq j < n$ . Por el Lema 1.3.19, se tiene que

$$\text{Ext}_\Lambda^j(M, N) = 0 \iff \text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}^\bullet(M), \mathbf{P}^\bullet(N)[j]) = 0.$$

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\text{Ext}_\Lambda^j(M, N) = 0$ . Por el Lema 3.1.2, es suficiente probar que

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}^\bullet(N)[j]) = 0.$$

Sea  $f^\bullet : \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M) \rightarrow \mathbf{P}^\bullet(N)[j]$  en  $\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))$ . Ya que  $\text{H}^k(\mathbf{P}^\bullet(N)[j]) = 0 \forall k \leq -j - 1$ , por el Lema 3.1.1 (b), existe  $\bar{f}^\bullet : \mathbf{P}^\bullet(M) \rightarrow \mathbf{P}^\bullet(N)[j]$  en  $\mathbf{C}(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $\bar{f}^\bullet|_{\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M)} = f^\bullet$ . Usando que  $\pi(\bar{f}^\bullet) = 0$ , obtenemos que  $\pi(f^\bullet) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $\text{Hom}_{\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M), \mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(N)[j]) = 0$ . Veamos que  $\text{Ext}_\Lambda^j(M, N) = 0$ . Por el Lema 1.3.19, es suficiente probar que

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{P}^\bullet(M), \mathbf{P}^\bullet(N)[j]) = 0.$$

Sea  $f^\bullet : P^\bullet(M) \rightarrow P^\bullet(N)[j]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Consideremos la restricción

$$g^\bullet := f^\bullet|_{P_{\geq -n}^\bullet(M)} : P_{\geq -n}^\bullet(M) \rightarrow P^\bullet(N)[j].$$

Por el Lema 3.1.2, se tiene que  $\pi(g^\bullet) = 0$  y como  $H^k(P^\bullet(N)[j]) = 0 \forall k \leq -j-1$ , concluimos del Lema 3.1.1 (a) que  $\pi(f^\bullet) = 0$ .  $\square$

**Definición 3.1.5.** Sea  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . La categoría  $\tau_n$ -perpendicular de  $\mathcal{X}$  es

$$\mathcal{X}^{\perp \tau_n} := {}^{\perp 0}\tau_n(\mathcal{X}) \cap (\cap_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}^{\perp i}).$$

Note que en el caso  $n = 1$ ,  $\mathcal{X}^{\perp \tau_1} = {}^{\perp 0}\tau(\mathcal{X})$ . Esto hace que la definición anterior, sea una generalización de la noción de ríidez.

**Teorema 3.1.6.** Sean  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $n \geq 1$ . Entonces,  $P_{\geq -n}^\bullet(N) \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp > 0}$  si, y sólo si,  $N \in M^{\perp \tau_n}$ . En particular,  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  si, y sólo si,  $M \in M^{\perp \tau_n}$ .

*Demostración.* Sean  $M, N \in \text{mod}(\Lambda)$ . Note que

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet(M), P_{\geq -n}^\bullet(N)[j]) = 0 \text{ para } j > n.$$

Luego, para  $n = 1$ , por la Proposición 3.1.4 (a) tenemos que  $P_{\geq -n}^\bullet(N) \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp 1}$ , si y sólo si,  $N \in M^{\perp \tau_1} = {}^{\perp 0}\tau(M)$ .

Para  $n \leq 2$ , por la Proposición 3.1.4 tenemos que  $P_{\geq -n}^\bullet(N) \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp 1}$ , si, y sólo si,  $N \in {}^{\perp 0}\tau_n(M) \cap \cap_{i=1}^{n-1} M^{\perp i}$ .  $\square$

**Definición 3.1.7.** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$ . Decimos que  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $\tau_n$ -rígido si  $M \in M^{\perp \tau_n}$ .

**Observación 3.1.8.** Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Para  $n = 1$ , tenemos que

$$M^{\perp \tau_1} = {}^{\perp 0}\tau_1(M) \cap_{i=1}^0 M^{\perp i} = {}^{\perp 0}\tau(M).$$

Por lo tanto,  $M$  es  $\tau_1$ -rígido si, y sólo si,  $M$  es  $\tau$ -rígido.

El siguiente resultado muestra en particular que los  $\Lambda$ -módulos  $\tau_n$ -rígidos son una generalización de los  $\Lambda$ -módulos  $n$ -inclinantes.

**Corolario 3.1.9.** Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $j \in \mathbb{N}^+$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen :

(a)  ${}^{\perp 0}\tau_j(M) \subseteq M^{\perp j}$ ;

(b) si  $\text{pd}(M) \leq j$ , entonces  ${}^{\perp 0}\tau_j(M) = M^{\perp j}$  y  $M^{\perp \tau_j} = M^{\perp}$ .

*Demostración.* (a) Se sigue de la Proposición 3.1.4, considerando  $n := j + 1$ .

(b) Notemos que  $\text{pd}(\Omega^{j-1}(M)) \leq 1$  ya que  $\text{pd}(M) \leq j$ . Entonces, por el Lema 1.2.9 (a), tenemos los siguientes isomorfismos

$$\text{Ext}_\Lambda^j(M, N) \cong \text{Ext}_\Lambda^1(\Omega^{j-1}(M), N) \cong \text{D}_R \text{Hom}_\Lambda(N, \tau_j(M)) \quad \forall N \in \text{mod}(\Lambda)$$

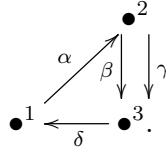
y así  ${}^{\perp 0}\tau_j(M) = M^{\perp j}$ . Por otro lado, como  $\text{pd}(M) \leq j$  se tiene que  $M^\perp = \bigcap_{i=1}^j M^{\perp i}$ . Por lo tanto  $M^{\perp \tau_j} = M^\perp$  ya que  ${}^{\perp 0}\tau_j(M) = M^{\perp j}$ .  $\square$

El próximo ejemplo nos muestra un  $\Lambda$ -módulo  $\tau_n$ -rígido de dimensión proyectiva infinita.

**Ejemplo 3.1.10.** Sean  $S \in \text{mod}(\Lambda)$  un simple inyectivo de dimensión proyectiva infinita. Entonces  $S$  es  $\tau_n$ -rígido  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ . En efecto, dado que  $S$  es inyectivo, es suficiente probar que  $\text{Hom}_\Lambda(S, \tau_n(S)) = 0$ . Supongamos que existe un morfismo no nulo  $f : S \rightarrow \tau_n(S)$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Puesto que  $S$  es simple inyectivo y  $f \neq 0$ , tenemos que  $S$  es un sumando directo de  $\tau_n(S)$  contradiciendo el Lema 1.2.9 (d).

En [AIR14, Teorema 2.10], se muestra que cualquier  $\Lambda$ -módulo  $\tau$ -rígido  $M$  admite un  $\Lambda$ -módulo  $\tau$ -rígido  $N$  tal que  $M \oplus N$  es  $\tau$ -rígido y  $\text{rk}(M) + \text{rk}(N) = \text{rk}(\Lambda)$ . El siguiente ejemplo nos muestra que esto no es necesariamente cierto para  $\Lambda$ -módulos  $\tau_n$ -rígidos con  $n \geq 2$ .

**Ejemplo 3.1.11.** [RS89, Ejemplo 2] Sean  $k$  un campo y  $A$  el cociente de la  $k$ -álgebra de caminos  $kQ/I$ , donde  $Q$  es el siguiente carcaj y  $I := \langle \beta\alpha, \alpha\delta, \delta\gamma \rangle$



Note que  $S(1)$  tiene dimensión proyectiva 2 y  $S(1) \in S(1)^\perp$ . Entonces por el Corolario 3.1.9 (b), tenemos que  $S(1)$  es  $\tau_2$ -rígido. Supongamos que existe  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  inescindible,  $M \neq S(1)$ , tal que  $S(1) \oplus M$  es  $\tau_2$ -rígido. Por el Corolario 3.1.9 (a) tenemos que  $(S(1) \oplus M)^{\perp \tau_2} \subseteq M^{\perp 1} \cap M^{\perp 2} \cap S(1)^{\perp 1} \cap S(1)^{\perp 2}$ . En particular, tenemos que  $\text{Ext}_\Lambda^2(M, S(1)) = 0$ ,  $\text{Ext}_\Lambda^2(S(1), M) = 0$  y  $\text{Ext}_\Lambda^1(M, M) = 0$ . Por los argumentos dados en [RS89, Ejemplo 2] concluimos que  $M$  tiene una representación

$$M = \begin{array}{ccc} & \bullet^{M(2)} & \\ M(\alpha) \nearrow & \downarrow M(\beta) & \downarrow M(\gamma) \\ \bullet^{M(1)} & \leftarrow M(\delta) & \bullet^{M(3)} \end{array}$$

donde  $M(\beta)$  es un monomorfismo y  $M(\gamma)$  es un epimorfismo. Puesto que  $M(\beta)M(\alpha) = 0$  y  $M(\delta)M(\gamma) = 0$  se tiene que  $M(\alpha) = 0$  y  $M(\delta) = 0$ . Usando que  $M$  es inescindible, se obtiene que  $M(1) = 0$  y que  $M(\beta)$  y  $M(\gamma)$  son isomorfismos. Por [ARS95, Teorema 7.5] se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^1(M, M) \neq 0$  lo cual es una contradicción probando que  $S(1) \oplus M$  no puede ser  $\tau_2$ -rígido para cualquier  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  inescindible y  $M \not\cong S(1)$ .

El siguiente resultado es una extensión de [AIR14, Proposición 2.5], el cual es fundamental para mostrar una función inyectiva entre clases de isomorfía de pares  $\tau$ -rígidos y el grupo de Grothendieck de  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , ver [AIR14, Teorema 5.5].

Para  $X := \bigoplus_{i=1}^n X_i$  y  $Y := \bigoplus_{j=1}^m Y_j$  en una categoría aditiva  $\mathcal{C}$ , a cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  lo podemos denotar por medio de una matriz  $f = (f_{ij})$ , con  $f_{ij} := \pi_i f \mu_j : X_j \rightarrow Y_i$ , donde  $\mu_j$  es la  $j$ -ésima inclusión natural y  $\pi_i$  es la  $i$ -ésima proyección natural.

**Lema 3.1.12.** *Sean  $Y := \bigoplus_{j=1}^m Y_j$  y  $X := \bigoplus_{i=1}^n X_i$  en una categoría aditiva  $\mathcal{C}$ . Entonces,  $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  si, y sólo si,  $f_{ji} \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq m$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Se sigue del Lema 1.1.8, ya que  $\text{rad}_{\mathcal{C}}$  es un ideal en  $\mathcal{C}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se sigue de que  $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_j f_{ji} \pi_i$  y que  $\text{rad}_{\mathcal{C}}$  es un ideal en  $\mathcal{C}$  por el Lema 1.1.8.  $\square$

**Corolario 3.1.13.** *Sean  $\mathcal{C}$  una categoría Krull-Schmidt y  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Entonces,*

$$\text{add}(X) \cap \text{add}(Y) = 0$$

*si, y sólo si,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .*

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Sea  $Z \in \text{ind}(\Lambda)$  tal que  $Z \mid X$  y  $Z \mid Y$ . Luego, se tiene la descomposición en inescindibles en  $\mathcal{C}$   $X = \amalg_{i=1}^n X_i$ ,  $Y = \amalg_{j=1}^m Y_j$  con  $X_1 = Z = Y_1$ . Consideremos las inclusiones  $\mu_i^X, \mu_j^Y$  y las proyecciones naturales  $\pi_i^X, \pi_j^Y$  correspondientes a cada descomposición en suma directa. Luego, para  $f : X \rightarrow Y$ , con  $f := \mu_1^Y \pi_1^X$ . tenemos la matriz  $f = [f_{ij}]_{m \times n}$ , donde  $f_{11} = \pi_1^Y (\mu_1^Y \pi_1^X) \mu_1^X = 1_Z$ . Ahora, por el Lema 3.1.12,  $1_Z = f_{11} \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(Z, Z)$ , lo cual contradice la Proposición 2.2.14 (c).

( $\Rightarrow$ ) Se sigue de la Proposición 2.2.14 (c) y el Lema 3.1.12.  $\square$

**Corolario 3.1.14.** *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -rígido. Entonces,  $\text{add}(P^0(M)) \cap \text{add}(P^{-n}(M)) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $f : P^{-n}(M) \rightarrow P^0(M)$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Consideremos el morfismo  $f^\bullet : P_{\geq -n}^\bullet(M) \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(M)[n]$ , dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^{-n}(M) & \xrightarrow{\pi^{-n}} & P^{1-n}(M) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow 0 & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & P^0(M) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \cdots \end{array}$$

Por el Teorema 3.1.6, se tiene que  $\pi(f^\bullet) = 0$  y con ello obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & P^{-n}(M) & \xrightarrow{\pi^{-n}} & P^{1-n}(M) \\ & \swarrow \exists g & \downarrow f & \searrow \exists g' \\ P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & P^0(M) & \end{array}$$

Por el dual del Lema 1.1.9, se tiene que

$$\pi^{-n} \in \text{rad}_\Lambda(P^{-n}(M), P^{1-n}(M))$$

y  $\pi^{-1} \in \text{rad}_\Lambda(P^{-1}(M), P^0(M))$ . Así pues,  $f \in \text{rad}_\Lambda(P^{-n}(M), P^0(M))$ . Por último, por el Corolario 3.1.13, se concluye que  $\text{add}(P^0(M)) \cap \text{add}(P^{-n}(M)) = 0$ .  $\square$

El último resultado de esta sección da una condición necesaria y suficiente, en la categoría de módulos, para que los módulos  $\tau_{n+1}$ -rígidos sean  $\tau_n$ -rígidos.

**Lema 3.1.15.** *Sean  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $m \in [1, n]$  y  $P^\bullet := \cdots 0 \rightarrow P^{-n-1} \rightarrow P^{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow P^0 \rightarrow 0 \cdots$  presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Entonces,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, P_{\geq -n}^\bullet[m]) = 0 \text{ si, y sólo si, } \text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}, H^{m-n}(P^\bullet)) = 0.$$

En particular,  $\text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}, H^{-k}(P^\bullet)) = 0 \forall k \in [0, n-1]$  si, y sólo si,  $P_{\geq -n}^\bullet$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.* Consideremos la siguiente sucesión exacta que se escinde (grado a grado)

$$0 \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet \rightarrow P^\bullet \rightarrow P^{-n-1}[n+1] \rightarrow 0$$

en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$ , la cual induce el siguiente  $\eta : P_{\geq -n}^\bullet \rightarrow P^\bullet \rightarrow P^{-(n+1)}[n+1] \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet[1] \in \Delta$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Usando que  $P^\bullet$  es presedimentado y aplicando el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(-, P^\bullet)$  a  $\eta$ , se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet, P^\bullet[m]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^{-n-1}[n], P^\bullet[m]) \rightarrow 0.$$

Luego, por el Lema 3.1.2, es suficiente probar que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^{-n-1}[n], P^\bullet[m]) = 0 \iff \text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}, H^{m-n}(P^\bullet)) = 0.$$

Usaremos para ello la sucesión exacta de cohomología

$$0 \rightarrow B^{m-n}(P^\bullet) \xrightarrow{\beta_{P^\bullet}^{m-n}} Z^{m-n}(P^\bullet) \xrightarrow{q} H^{m-n}(P^\bullet) \rightarrow 0.$$

( $\Rightarrow$ ) Sea  $f : P^{-n-1} \rightarrow H^{m-n}(P^\bullet)$ . Por lo que existe  $f' : P^{-n-1} \rightarrow Z^{m-n}(P^\bullet)$  tal que  $qf' = f$ . Notemos que tenemos el siguiente diagrama en  $\text{proj}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P^{-n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \gamma_{P^\bullet}^{m-n} f' & & \downarrow \\ P^{m-n-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-n-1}} & P^{m-n} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-n}} & P^{m-n+1}. \end{array}$$

Como  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^{-n-1}[n], P^\bullet[m]) = 0$ , existe  $g : P^{-n-1} \rightarrow P^{m-n-1}$  tal que

$$\gamma_{P^\bullet}^{m-n} f' = \gamma_{P^\bullet}^{m-n} \beta_{P^\bullet}^{m-n} \alpha_{P^\bullet}^{m-n-1} g;$$

y dado que  $\gamma_{P^\bullet}^{m-n}$  es un monomorfismo, se tiene que  $f' = \beta_{P^\bullet}^{m-n} \alpha_{P^\bullet}^{m-n-1} g$ . Luego,

$$f = qf' = q\beta_{P^\bullet}^{m-n} \alpha_{P^\bullet}^{m-n-1} g = 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Sea  $f^\bullet : P^{-n-1}[n] \rightarrow P^\bullet[m]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Luego,  $f := f^{-n} : P^{-n-1} \rightarrow P^{m-n}$  satisface que  $d_{P^\bullet}^{m-n} f = 0$ . Por lo que existe  $g : P^{-n-1} \rightarrow Z^{m-n}(P^\bullet)$  tal que  $\gamma_{P^\bullet}^{m-n} g = f$ . Dado que  $\text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}, H^{m-n}(P^\bullet)) = 0$ , se tiene que  $qg = 0$ . Por la propiedad universal del kernel, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P^{-n-1} & & \\ & & & & \downarrow g & & \\ & & & & \downarrow \exists h & & \\ P^{m-n-1} & \xleftarrow{\alpha_{P^\bullet}^{m-n-1}} & B^{m-n}(P^\bullet) & \xrightarrow{\beta_{P^\bullet}^{m-n}} & Z^{m-n}(P^\bullet) & \xrightarrow{q} & H^{m-n}(P^\bullet). \\ & & \swarrow k & & & & \end{array}$$

Puesto que  $P^{-n-1}$  es proyectivo, existe  $k : P^{-n-1} \rightarrow P^{m-n-1}$  tal que  $\alpha_{P^\bullet}^{m-n-1} k = h$ . Por lo tanto,  $f = \gamma_{P^\bullet}^{m-n} g = \gamma_{P^\bullet}^{m-n} \beta_{P^\bullet}^{m-n} h = \gamma_{P^\bullet}^{m-n} \beta_{P^\bullet}^{m-n} \alpha_{P^\bullet}^{m-n-1} k = d_{P^\bullet}^{m-n-1} k$  y así  $\pi(f^\bullet) = 0$ , por lo que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^{-n-1}[n], P^\bullet[m]) = 0$ .  $\square$

**Definición 3.1.16.** Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Decimos que  $M$  es **sincero** si  $\text{Hom}_\Lambda(P, M) \neq 0 \forall P \in \text{proj}(\Lambda)$ , con  $P \neq 0$ .

**Corolario 3.1.17.** Sean  $n \in \mathbb{N}^+$  y  $M$  un  $\Lambda$ -módulo  $\tau_{n+1}$ -rígido. Entonces  $M$  es  $\tau_n$ -rígido si, y sólo si,  $\text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}(M), M) = 0$ . En particular, si  $\text{pd}(M) > n$  y  $M$  es sincero, entonces  $M$  no es  $\tau_n$ -rígido.

*Demostración.* Del Teorema 3.1.6, se sigue que  $P_{\geq -n-1}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Lema 3.1.15, se tiene que  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  si, y sólo si,

$$\text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}(M), H^{-m}(P_{\geq -n-1}^\bullet(M))) = 0 \quad \forall m \in [0, n-1].$$

Dado que  $H^{-m}(P_{\geq -n-1}^\bullet(M)) = 0 \forall 1 \leq m \leq n-1$ , lo último es equivalente a que  $\text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}(M), H^0(P_{\geq -n-1}^\bullet(M))) = \text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}(M), M) = 0$ .

Por último, supongamos que  $\text{pd}(M) > n$  y  $M$  es sincero. Dado que  $\text{pd}(M) > n$ , se sigue que  $P^{-n-1}(M) \neq 0$ . Como  $M$  es sincero, se tiene que  $\text{Hom}_\Lambda(P^{-n-1}(M), M) \neq 0$ . Por lo anterior,  $M$  no es  $\tau_n$ -rígido.  $\square$

## 3.2. Módulos $\tau_n$ -inclinantes completos

El objetivo principal de esta sección es introducir los  $\Lambda$ -módulos  $\tau_n$ -inclinantes completos, ver su relación con los objetos sedimentados en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  y los  $\Lambda/I$ -módulos  $n$ -inclinantes, donde  $I \trianglelefteq \Lambda$  es sincero. Lo anterior es una extensión natural al resultado dado, en [Ja15], entre  $\Lambda$ -módulos  $\tau$ -inclinantes y  $\Lambda/I$ -módulos  $n$ -inclinantes, donde  $I \trianglelefteq \Lambda$ , es sincero y la relación dada en [AIR14] entre  $\Lambda$ -módulos  $\tau$ -inclinantes y los complejos sedimentados de 2-términos en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Decimos que  $M$  es:

- (a)  $\tau_n$ -**inclinante** si  $\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ ;
- (b)  $\tau_n$ -**inclinante completo** si es  $\tau_n$ -inclinante y  $\text{inj}(\Lambda/\text{ann}(M)) \subseteq M^{\perp \tau_n}$ .

El siguiente resultado muestra algunas caracterizaciones de los módulos  $n$ -inclinantes a partir de los módulos  $\tau_n$ -inclinantes.

**Lema 3.2.2.** Para un  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ , consideremos las propiedades.

- (a)  $M$  es  $n$ -inclinante.
- (b)  $\text{coresdim}_{\text{add}(M)}(\Lambda) \leq n$ .
- (c)  $M$  es fiel.
- (d)  $\text{pd}(M) \leq n$ .

Entonces, se tiene que (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c) se satisfacen. Más aún, (c)  $\Rightarrow$  (d) se satisface si  $M \in {}^{\perp 0}(\tau_n(M))$ ; y (d)  $\Rightarrow$  (a) se satisface si  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante. En particular, las condiciones anteriores son equivalentes si asumimos que  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante.

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Se sigue de la definición.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Se sigue del Lema 1.5.2.

(c)  $\Rightarrow$  (d) Sea  $M \in {}^{\perp 0}(\tau_n(M))$ , con  $M$  fiel. Por el Lema 1.5.2, existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow M' \rightarrow D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda_\Lambda) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $M' \in \text{add}(M)$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, \tau_n(M))$  a la sucesión exacta anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda_\Lambda), \tau_n(M)) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M', \tau_n(M)) = 0.$$

Por el Lema 1.2.9 (b), obtenemos que  $\text{pd}(M) \leq n$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $M$   $\tau_n$ -inclinante y  $\text{pd}(M) \leq n$ . Notemos que  $\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M) = \mathbf{P}^\bullet(M)$  y como  $\mathbf{P}_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  se concluye, del Lema 1.6.3, que  $M$  es  $n$ -inclinante.  $\square$

La siguiente observación justifica la definición anterior, ya que muestra que las nuevos módulos generalizan algunos trascendentes en la teoría de representaciones.

**Observación 3.2.3.** Para un  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ , tenemos lo siguiente.

- Si  $M$  es  $\tau$ -inclinante, entonces  $M$  es  $\tau_1$ -inclinante completo. En efecto, sea  $M$   $\tau$ -inclinante. Luego, por [AIR14, Proposición 3.7], se tiene que  $M$  es  $\tau_1$ -inclinante. Ahora, como  $M$  es fiel como  $\Lambda/\text{ann}(M)$ -módulo, se sigue del Lema 1.5.2 (c) que  $\text{inj}(\Lambda/\text{ann}(M)) \subseteq \text{gen}(M)$ . Finalmente, por [AIR14, Teorema 2.12], concluimos que  $\text{gen}(M) = {}^{\perp 0}(\tau(M)) = M^{\perp \tau_1}$ .

- Si  $M$  es  $n$ -inclinante, entonces  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante completo. En efecto, sea  $M$   $n$ -inclinante. Dado que  $P_{\geq -n}^\bullet(M) = P^\bullet(M)$ , se sigue del Lema 1.6.3 que  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante. Dado que  $M$  es fiel (ver Lema 3.2.2) como  $\Lambda$ -módulo, se tiene que

$$\text{ann}(M) = 0.$$

Luego, por el Corolario 3.1.9, tenemos que  $\text{inj}(\Lambda/\text{ann}(M)) = \text{inj}(\Lambda) \subseteq M^\perp = M^{\perp\tau_n}$ .

Los siguientes resultados técnicos se necesitan para el resultado principal de este trabajo. El cual es una caracterización de los  $\Lambda$ -módulos  $\tau_n$ -inclinantes completos en términos de módulos  $\tau_n$ -rígidos y conceptos conocidos en teoría de representaciones.

**Lema 3.2.4.** Para  $n \geq 1$  y una familia de triángulos distinguidos

$$\{\eta_i : P_i^\bullet \xrightarrow{f_i^\bullet} P_{\geq -n}^\bullet(M_i) \rightarrow P_{i+1}^\bullet \rightarrow P_i^\bullet[1]\}_{i=0}^{n-1}$$

en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , donde  $P_n^\bullet := P_{\geq -n}^\bullet(M_n)$  y  $P_0^\bullet \in \mathbf{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ , las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Para cada  $r \in [1, n-1]$ , existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow H^0(P_r^\bullet) \rightarrow M_r \rightarrow H^0(P_{r+1}^\bullet) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ .

(b) Existe una sucesión exacta  $H^0(P_0^\bullet) \xrightarrow{H^0(f_0^\bullet)} M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ .

*Demostración.* (a) Dividiremos esta prueba en las siguientes partes a verificar:

(i)  $H^k(P_{n-i}^\bullet) = 0 \forall k \in (-n+i, 0)$  y  $i \in [0, n-1]$ .

Procederemos por inducción sobre  $i \in [0, n-1]$ .

Es claro que  $P_n^\bullet := P_{\geq -n}^\bullet(M_n)$  cumple la afirmación.

Veamos que si  $P_{n-i}^\bullet$  cumple la afirmación, entonces  $P_{n-i-1}^\bullet$  la cumple, con  $i \leq n-2$ .

Aplicando el Teorema 1.3.16 al triángulo  $\eta_{n-i-1}$ , tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 = H^{k-1}(P_{n-i}^\bullet) \rightarrow H^k(P_{n-i-1}^\bullet) \rightarrow H^k(P_{\geq -n}^\bullet(M_{n-i-1})) = 0 \quad \forall k \in (-n+i+1, 0).$$

Por lo tanto,  $H^k(P_{n-i-1}^\bullet) = 0 \forall k \in (-n+i+1, 0)$ ; y por inducción se sigue (i).

(ii)  $P_r^\bullet \in \mathbf{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda)) \forall r \in [0, n]$ .

Procederemos por inducción sobre  $r \in [0, n]$ . En efecto, por hipótesis  $P_0^\bullet$  cumple la afirmación.

Aseguramos que si  $P_r^\bullet$  cumple la afirmación, entonces  $P_{r+1}^\bullet$  también la cumple, donde  $r \in [0, n-1]$ . Aplicando el Teorema 1.3.16 al triángulo

$$\eta_r = P_r^\bullet \xrightarrow{f_r^\bullet} P_{\geq -n}^\bullet(M_r) \rightarrow P_{r+1}^\bullet \rightarrow P_r^\bullet[1],$$

tenemos la sucesión exacta

$$0 = H^k(P_{\geq -n}^\bullet(M_r)) \rightarrow H^k(P_{r+1}^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(P_r^\bullet) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \cup \{-1\}.$$

Ya que  $H^{-1}(P_{r+1}^\bullet) = 0$  y  $H^1(P_r^\bullet) = 0 \forall r \in [1, n-1]$ , por el Teorema 1.3.16, se tienen las siguientes sucesiones exactas  $0 \rightarrow H^0(P_r^\bullet) \rightarrow M_r \rightarrow H^0(P_{r+1}^\bullet) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda) \forall r \in [1, n-1]$ .

(b) Aplicando el Teorema 1.3.16 al triángulo distinguido

$$\eta_0 = P_0^\bullet \xrightarrow{f_0^\bullet} P_{\geq -n}^\bullet(M_0) \rightarrow P_1^\bullet \rightarrow P_0^\bullet[1].$$

Ya que  $P_0^\bullet \in \mathcal{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ , se tiene la siguiente sucesión exacta, puesto que  $H^1(P_0^\bullet) = 0$ ,  $H^0(P_0^\bullet) \xrightarrow{H^0(f_0^\bullet)} M_0 \rightarrow H^0(P_1^\bullet) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Por (a), se obtiene la siguiente sucesión exacta  $H^0(P_0^\bullet) \xrightarrow{H^0(f_0^\bullet)} M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow H^0(P_n^\bullet) = M_n \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ .  $\square$

El siguiente resultado muestra como la categoría  $\tau_n$ -perpendicular en los módulos  $\tau$ -inclinantes, emula a la categoría perpendicular a derecha en los módulos  $n$ -inclinantes.

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -inclinante. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

- (a) Si  $P^\bullet \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp > 0}$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , entonces  $H^0(P^\bullet) \in \text{gen}_n(M)$ .
- (b)  $M^{\perp \tau_n} = \text{gen}_n(M)$ .
- (c)  $M^{\perp \tau_n}$  es preenvolvente.

*Demostración.* (a) Por el Lema 1.6.9 (b) existen triángulos distinguidos

$$\{\eta_i : P_i^\bullet \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1}) \rightarrow P_{i+1}^\bullet \rightarrow P_i^\bullet[1]\}_{i=0}^s$$

en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , donde  $P_{s+1}^\bullet := P^\bullet$ ,  $P_0^\bullet := P_{\geq -n}^\bullet(M_0)$  y  $\{M_k\}_{k=0}^{s+1} \subseteq \text{add}(M)$ .

Afirmamos que  $P_k^\bullet \in \mathcal{K}^{b, \leq 0}(\text{proj}(\Lambda)) \forall k \in [0, s+1]$

Es claro que  $P_0^\bullet := P_{\geq -n}^\bullet(M_0)$  cumple la afirmación.

Veamos que si  $P_k^\bullet$  cumple la afirmación entonces  $P_{k+1}^\bullet$  también, donde  $k \in [0, s]$ . Aplicando el Teorema 1.3.16 al triángulo distinguido  $\eta_k$ , tenemos la siguiente sucesión exacta  $0 = H^m(P_{\geq -n}^\bullet(M_{k+1})) \rightarrow H^m(P_{k+1}^\bullet) \rightarrow H^{m+1}(P_k^\bullet) = 0 \forall m \in \mathbb{N}^+$ .

Por el Lema 3.2.4 (b) se tiene una sucesión exacta

$$H^0(P_{s-(n-1)}^\bullet) \rightarrow M_{s-(n-1)+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_{s+1} \rightarrow H^0(P^\bullet) \rightarrow 0 \text{ en } \text{mod}(\Lambda).$$

Dado que  $H^1(P_{s-(n-1)-1}^\bullet) = 0$ , aplicando el Teorema 1.3.16 al triángulo distinguido  $\eta_{s-(n-1)-1}$ , obtenemos la siguiente sucesión exacta  $H^0(P_{s-(n-1)-1}^\bullet) \rightarrow M_{s-(n-1)} \rightarrow H^0(P_{s-(n-1)}^\bullet) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Con lo cual,  $M_{s-(n-1)} \rightarrow M_{s-(n-1)+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_{s+1} \rightarrow H^0(P^\bullet) \rightarrow 0$  es una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Por lo tanto,  $H^0(P^\bullet) \in \text{gen}_n(M)$ .

(b) Sea  $X \in M^{\perp \tau_n}$ . Por el Teorema 3.1.6 se sigue que  $P_{\geq -n}^\bullet(X) \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp > 0}$  y por (a)  $X = H^0(P_{\geq -n}^\bullet(X)) \in \text{gen}_n(M)$ .

Sean  $Y \in \text{gen}_n(M)$ . Por el Lema 1.3.20 existen

$$\{\eta_m : P_m^\bullet \rightarrow P^\bullet(M_m) \rightarrow P_{m-1}^\bullet \rightarrow P_m^\bullet[1] \in \Delta\}_{m=1}^n$$

en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ , donde  $P_0^\bullet = P^\bullet(Y)$  y  $\{M^m\}_{m=1}^n \subseteq \text{add}(M)$ . Sea  $k \in [1, n]$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet(M), -)$  a  $\eta_k$  se tienen las siguientes sucesiones exactas, por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.1.2,

$$0 = (P_{\geq -n}^\bullet(M), P^\bullet(M^k)[i]) \rightarrow (P_{\geq -n}^\bullet(M), P_{k-1}^\bullet[i]) \rightarrow (P_{\geq -n}^\bullet(M), P_k^\bullet[i+1]) \rightarrow (P_{\geq -n}^\bullet(M), P^\bullet(M^k)[i+1]) = 0,$$

$\forall i \in \mathbb{N}^+$ , donde  $(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ . Por lo que

$$(P_{\geq -n}^\bullet(M), P^\bullet(Y)[i]) \cong (P_{\geq -n}^\bullet(M), P_m^\bullet[i+m+1]) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^+.$$

Por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.1.2 se concluye que  $Y \in M^{\perp \tau_n}$ .

(c) Sea  $N \in \text{mod}(\Lambda)$ . Por el Lema 1.6.9 (c) existe

$$\eta : Q^\bullet \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(N) \xrightarrow{\pi(g^\bullet)} P^\bullet \rightarrow Q^\bullet[1] \in \Delta$$

en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , con  $P^\bullet \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp > 0}$  y  $Q^\bullet \in {}^{\perp 0}P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp > 0}$ .

Veamos que  $H^0(g^\bullet) : N \rightarrow H^0(P^\bullet)$  es una  $M^{\perp \tau_n}$ -preenvolvente. En efecto, por (a) y (b), se tiene que  $H^0(P^\bullet) \in M^{\perp \tau_n}$ . Sea  $f : N \rightarrow K$  un morfismo, con  $K \in M^{\perp \tau_n}$ . Por el Lema 1.3.17 existe un morfismo  $f^\bullet : P_{\geq -n}^\bullet(N) \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(K)$ ; por el Teorema 3.1.6 se sigue que  $P_{\geq -n}^\bullet(K) \in P_{\geq -n}^\bullet(M)^{\perp > 0}$ . Por lo que se tiene la siguiente sucesión exacta,

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P_{\geq -n}^\bullet(K)) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\pi(g^\bullet), P_{\geq -n}^\bullet(K))} \text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet(N), P_{\geq -n}^\bullet(K)) \rightarrow 0.$$

Así pues, existe  $h^\bullet : P^\bullet \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(K)$  tal que  $\pi(h^\bullet g^\bullet) = \pi(f^\bullet)$ . Se concluye que

$$H^0(h^\bullet)H^0(g^\bullet) = H^0(f^\bullet) = f.$$

Por lo tanto,  $H^0(g^\bullet) : N \rightarrow H^0(P^\bullet)$  es una  $M^{\perp \tau_n}$ -preenvolvente.  $\square$

**Lema 3.2.6.** *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -rígido. Entonces,  $M^{\perp \tau_n}$  es gruesa a derecha. Mas aún, si  $M^{\perp \tau_n} \subseteq \text{gen}(M)$  entonces  $\text{add}(M)$  es un generador relativo en  $M^{\perp \tau_n}$ .*

*Demostración.* Dado que  $M^{\perp i}$  y  ${}^{\perp 0}\tau_n(M)$  son cerradas por extensiones  $\forall i \in [1, n]$  se tiene que  $M^{\perp \tau_n}$  es cerrada por extensiones.

Sea  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $A, B \in M^{\perp \tau_n}$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(M, -)$  a la sucesión exacta anterior tenemos la siguiente sucesión exacta, por el Corolario 3.1.9 (a),  $0 = \text{Ext}_\Lambda^k(M, B) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^k(M, C) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{k+1}(M, A) = 0 \quad \forall k \in [1, n]$ . Luego, aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, \tau_n(M))$  a la misma sucesión exacta tenemos la siguiente sucesión exacta  $0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(C, \tau_n(M)) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(B, \tau_n(M)) = 0$ . Por lo que  $M^{\perp \tau_n}$  es pre-corresolvente y puesto que  $M^{\perp i}$  y  ${}^{\perp 0}\tau_n M$  son cerradas por sumandos directos  $\forall i \in [1, n]$ , concluimos que  $M^{\perp \tau_n}$  es gruesa a derecha.

Supongamos que  $M^{\perp \tau_n} \subseteq \text{gen}(M)$ . Sea  $X \in M^{\perp \tau_n}$ . Por hipótesis existe una sucesión exacta  $\eta : 0 \rightarrow Y \rightarrow M' \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$ , con  $g : M' \rightarrow X$  una  $\text{add}(M)$ -precubierta.

Veamos que  $Y \in M^{\perp \tau_n}$ . Por el Lema 1.3.20 aplicado a  $\eta$  existe un triángulo distinguido  $P^\bullet(Y) \rightarrow P^\bullet(M') \xrightarrow{\pi(g^\bullet)} P^\bullet(X) \rightarrow P^\bullet(Y)[1]$  en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ , donde  $H^0(g^\bullet) = g$ . Aplicando el

funtor  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), -)$ , se tienen las siguientes sucesiones exactas por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.1.2,

$$(\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(M')) \xrightarrow{(\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), g^{\bullet})} (\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(X)) \rightarrow (\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(Y)[1]) \rightarrow (\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(M')[1]) = 0,$$

$$0 = (\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(X)[k]) \rightarrow (\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(Y)[k+1]) \rightarrow (\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \mathbb{P}^{\bullet}(M')[k+1]) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

donde  $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}) := \text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(X^{\bullet}, Y^{\bullet})$ .

Aseguramos que  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M), \pi(g^{\bullet}))$  es un epimorfismo. En efecto, para un morfismo  $f^{\bullet} : \mathbb{P}_{\geq -n}^{\bullet}(M) \rightarrow \mathbb{P}^{\bullet}(X)$  en  $\mathbb{C}(\text{proj}(\Lambda))$ , existe  $k : M \rightarrow M'$  tal que  $H^0(f^{\bullet}) = gk$ , ya que  $g : M' \rightarrow X$  es una  $\text{add}(M)$ -precubierta. Por el Lema 1.3.17 existe un morfismo  $k^{\bullet} : \mathbb{P}^{\bullet}(M) \rightarrow \mathbb{P}^{\bullet}(M')$  en  $\mathbb{C}(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $H^0(k^{\bullet}) = k$ . De nuevo, por el Lema 1.3.17 se tiene que  $\pi(f^{\bullet}) = \pi(g^{\bullet}k^{\bullet})$ . Por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.1.2 se tiene que  $Y \in M^{\perp_{\tau_n}}$ . Por lo tanto  $\text{add}(M)$  es un generador relativo en  $M^{\perp_{\tau_n}}$ .  $\square$

**Lema 3.2.7.** Sean  $n < 0$  y  $P^{\bullet} \in \mathbb{C}^{[n,0]}(\text{proj}(\Lambda))$  tales que

$$H^m(P^{\bullet}) = 0 \quad \forall m \in (n, 0);$$

$P^k = 0 \quad \forall k < n$  y  $H^0(P^{\bullet}) = M$ . Entonces  $\mathbb{P}_{\geq n}^{\bullet}(M) \mid P^{\bullet}$  en  $\mathbb{C}(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.* Veamos que se cumple el resultado por inducción sobre  $-n$ .

Para  $-n = 1$ . Dado que  $P^0(M)$ ,  $P^{-1}(M)$ ,  $P^0$  y  $P^{-1}$  son  $\Lambda$ -módulos proyectivos, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) & \xrightarrow{\pi_M^0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow & & \parallel & & \\ P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^{\bullet}}^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \beta' \downarrow & & \beta \downarrow & & \parallel & & \\ P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) & \xrightarrow{\pi_M^0} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dado que  $\pi_M^0$  es minimal a derecha, existe  $\gamma : P^0(M) \rightarrow P^0(M)$  tal que  $\beta\alpha\gamma = 1_{P^0(M)} = \gamma\beta\alpha$ . Ya que  $\pi_M^0 = \pi_M^0\beta\alpha$  se sigue que  $\pi_M^0\gamma = \pi_M^0$ . Por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) & \xrightarrow{\pi_M^0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \gamma' \downarrow & & \gamma \downarrow & & \parallel & & \\ P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) & \xrightarrow{\pi_M^0} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Notemos que  $\pi_M^{-1} = \gamma\beta\alpha\pi_M^{-1} = \pi_M^{-1}\gamma'\beta'\alpha'$ . Puesto que  $\pi_M^{-1}$  es minimal a derecha se tiene que  $\gamma'\beta'\alpha'$  es un isomorfismo se tiene que el siguiente morfismo es un isomorfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) \\ \gamma'\beta'\alpha' \downarrow & & \parallel \\ P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \alpha \\ P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0. \end{array}$$

es invertible a izquierda en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ , ya que  $\alpha$  y  $\alpha'$  son invertibles a izquierda.

El caso  $-n - 1$ , es similar al caso  $-n = 1$ . □

**Proposición 3.2.8.** *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  inescindible. Entonces,  $P_{\geq -n}^\bullet(M) \in \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  es inescindible. En particular, si  $N \in \text{mod}(\Lambda)$ , entonces  $\text{rk}(N) = \text{rk}(P_{\geq -n}^\bullet(N))$ .*

*Demostración.* Sea  $P_{\geq -n}^\bullet(M) = P^\bullet \oplus Q^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Dado que el funtor de cohomología  $H^0(-) : \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es aditivo, se tiene que  $H^0(P^\bullet) \oplus H^0(Q^\bullet) = M$ . Ahora, ya que  $M$  es inescindible, se puede asumir que  $H^0(P^\bullet) = M$ . Análogamente, se sigue que  $H^k(P^\bullet) = 0 \forall k \in [1-n, -1]$ . Por el Lema 3.2.7 se obtiene que  $P_{\geq -n}^\bullet(M) \mid P^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Puesto que  $P^\bullet \mid P_{\geq -n}^\bullet(M)$  y  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  es una categoría Krull-Schmidt, se concluye que  $P_{\geq -n}^\bullet(M) \cong P^\bullet$  y así  $Q^\bullet = 0$ . Por lo tanto,  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es inescindible en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . □

**Lema 3.2.9.** *Sean  $n > 0$ ,  $P^\bullet \in C^{\leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$ ,  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  y  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(M')$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ , con  $M' \in \text{add}(M)$ . Si  $H^0(f^\bullet) : H^0(P^\bullet) \rightarrow M'$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente, entonces*

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(f^\bullet, P^\bullet(M'')) : \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet(M'), P^\bullet(M'')) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(M''))$$

es un epimorfismo  $\forall M'' \in \text{add}(M)$ .

*Demostración.* Sean  $M'' \in \text{add}(M)$  y  $h^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet(M'')$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Dado que  $H^0(f^\bullet)$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente existe  $t : M' \rightarrow M''$  tal que  $tH^0(f^\bullet) = H^0(h^\bullet)$ . Por el Lema 1.3.17, existe  $t^\bullet : P_{\geq -n}^\bullet(M') \rightarrow P^\bullet(M'')$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $H^0(t^\bullet) = t$ . Dado que  $H^0(t^\bullet f^\bullet) = tH^0(f^\bullet) = H^0(h^\bullet)$  se concluye del Lema 1.3.17 que  $\pi(t^\bullet)\pi(f^\bullet) = \pi(h^\bullet)$ . Por lo tanto,

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(f^\bullet, P^\bullet(M'')) : \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -n}^\bullet(M'), P^\bullet(M'')) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(M''))$$

es un epimorfismo. □

**Lema 3.2.10.** Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $M \in M^\perp$  y sucesiones exactas

$$\{\eta_i : 0 \rightarrow N_i \xrightarrow{f_i} M_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0\}_{i=0}^{n-1}$$

en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde  $\{M_i\}_{i=0}^{n-1} \subseteq \text{add}(M)$  y  $N_n \in \text{add}(M)$ . Si  $M \in N_n^\perp$ , entonces  $f_i$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente  $\forall i \in [0, n-1]$ .

*Demostración.* Sean  $j \in [0, n-1]$  y  $M' \in \text{add}(M)$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, M')$  a las sucesiones exactas  $\eta_{j+i} \forall i \in [0, n-1-j]$  se obtienen las siguientes sucesiones exactas  $\text{Hom}_\Lambda(M_j, M') \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(f_i, M')} \text{Hom}_\Lambda(N_j, M') \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(N_{j+1}, M') \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(M_j, M') = 0$ ,

$$0 = \text{Ext}_\Lambda^{i+1}(M_{i+1}, M') \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{i+1}(N_{i+1}, M') \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{i+2}(N_{i+2}, M') \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{i+2}(M_{i+2}, M') = 0.$$

Por lo cual se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^1(N_{j+1}, M') \cong \text{Ext}_\Lambda^{n-j}(N_n, M') = 0$ . Por lo tanto,  $f_j$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente.  $\square$

El siguiente resultado tiene sus orígenes en una igualdad en [AIR14, Lema 3.5].

**Lema 3.2.11.** Sean  $P^\bullet \in \text{C}^{\leq 0}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces  $\text{Hom}_\Lambda(\text{H}^0(P^\bullet), M) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_{\text{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(M)) = 0$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet(M)$  en  $\text{C}(\text{proj}(\Lambda))$ . Luego, existe  $f : \text{H}^0(P^\bullet) \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccccc} P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{p} & \text{H}^0(P^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ f^{-1} \downarrow & & \downarrow f^0 & & \downarrow f & & \\ P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) & \xrightarrow{\pi_M^0} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dado que  $\text{Hom}_\Lambda(\text{H}^0(P^\bullet), M) = 0$  se tiene que  $f = 0$ , con lo cual  $\pi_M^0 f^0 = 0$  y así existe  $t : P^0 \rightarrow P^{-1}(M)$  tal que  $\pi_M^{-1} t = f^0$ . Puesto que  $\text{H}^k(P^\bullet(M)) = 0 \forall k < -1$ , se sigue del Lema 3.1.1 (a) que  $\pi(f^\bullet) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $f : \text{H}^0(P^\bullet) \rightarrow M$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Por el Lema 1.3.17 existe un morfismo  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet(M)$  en  $\text{C}(\text{proj}(\Lambda))$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{p} & \text{H}^0(P^\bullet) \longrightarrow 0 \\ & & f^{-1} \downarrow & & \downarrow f^0 & & \downarrow f \\ \dots & \longrightarrow & P^{-1}(M) & \xrightarrow{\pi_M^{-1}} & P^0(M) & \xrightarrow{\pi_M^0} & M \longrightarrow 0. \end{array}$$

Dado que  $\text{Hom}_{\text{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(M)) = 0$ , existe  $t : P^0 \rightarrow P^{-1}(M)$  tal que  $\pi_M^{-1} t = f^0$  y así  $0 = \pi_M^0 \pi_M^{-1} t = \pi_M^0 f^0 = fp$ . Puesto que  $p$  es un epimorfismo, se concluye que  $f = 0$ .  $\square$

**Lema 3.2.12.** Sean  $P^\bullet$  un objeto presedimentado en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $Q^\bullet \in {}^{\perp > 0} P^\bullet$  en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ . Si  $\eta : Q^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} P^\bullet \rightarrow R^\bullet \rightarrow Q^\bullet[1]$  es un triángulo distinguido en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ , donde  $f^\bullet$  es una  $\text{add}(P^\bullet)$ -preenvolvente, entonces  $R^\bullet \in {}^{\perp > 0} P^\bullet$ .

*Demostración.* Aplicando el functor  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(-, P^\bullet)$  a  $\eta$  se tienen las siguientes sucesiones exactas, ya que  $P^\bullet$  es presedimentado en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $Q^\bullet \in {}^{\perp > 0} P^\bullet$ ,

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(f^\bullet, P^\bullet)} \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(Q^\bullet, P^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(R^\bullet, P^\bullet[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[1]) = 0,$$

$$0 = \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(Q^\bullet, P^\bullet[k]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(R^\bullet, P^\bullet[1+k]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[1+k]) = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}^+$ . Por lo tanto,  $R^\bullet \in {}^{\perp > 0} P^\bullet$ .  $\square$

**Lema 3.2.13.** Sea  $f^\bullet : P[m] \rightarrow P^\bullet \in \mathbf{C}(\text{proj}(\Lambda))$  con  $H^m(P^\bullet) = 0$ . Entonces,  $\pi(f^\bullet) = 0$ .

*Demostración.* Dado que  $d^m f^m = 0$  y  $H^m(P^\bullet) = 0$ , existe un morfismo  $g' : P \rightarrow Z^m(P^\bullet)$  tal que  $f^m = \gamma_{P^\bullet}^m g'$ . Dado que  $P$  es proyectivo existe  $g : P \rightarrow P^{m-1}$  tal que  $g' = \alpha_{P^\bullet}^{m-1} g$ . Por lo que  $f^m = d_{P^\bullet}^{m-1} g$ . Por lo tanto,  $\pi(f^\bullet) = 0$ .  $\square$

**Lema 3.2.14.** Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  sincero y  $\bar{\Lambda} := \Lambda/\text{ann}(M)$  tal que  $M$  es un  $\bar{\Lambda}$ -módulo inclinante. Entonces la subcategoría  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  con

$$\mathcal{X} := \{Z \in \text{mod}(\bar{\Lambda}) \mid \text{Ext}_{\bar{\Lambda}}^i(M, Z) = 0 \forall i \geq 1\},$$

satisface que  ${}^{\perp 0} \mathcal{X} = 0$ .

*Demostración.* Dado que  $M$  es sincero, se sigue que todo simple  $S \in \text{mod}(\Lambda)$  satisface que  $\text{ann}(S) \supseteq \text{ann}(M)$ . En particular, todo  $\Lambda$ -módulo simple es automáticamente un  $\bar{\Lambda}$ -módulo simple.

Sea  $S$  un  $\Lambda$ -módulo simple. Dado que  $S$  es  $\bar{\Lambda}$ -módulo y  $M$  es  $\bar{\Lambda}$ -inclinante, se tiene por el Lema 1.5.4 (c) que existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow S \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $X \in \mathcal{X}$ .

Aseguramos que, para  $N \in {}^{\perp 0} \mathcal{X}$ , se tiene que  $\text{Hom}_{\Lambda}(N, S) = 0$  para todo simple  $S$ . En efecto, sean  $N \in {}^{\perp 0} \mathcal{X}$  y  $S$  un  $\Lambda$ -módulo simple. Luego, existe una sucesión exacta  $\eta : 0 \rightarrow S \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$ , con  $X \in \mathcal{X}$ . Aplicando el functor  $\text{Hom}_{\Lambda}(N, -)$  a  $\eta$ , se tiene la siguiente sucesión exacta  $0 \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(N, S) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(N, X)$ ; y como  $\text{Hom}_{\Lambda}(N, X) = 0$ , concluimos que  $\text{Hom}_{\Lambda}(N, S) = 0$ .

Veamos ahora que  ${}^{\perp 0} \mathcal{X} = 0$ . Sea  $N \in {}^{\perp 0} \mathcal{X}$ . Supongamos que  $N \neq 0$ . Sea

$$0 \leq N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_n = N$$

una serie de composición de  $N$ . Luego, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow N_{n-1} \rightarrow N \xrightarrow{p} N/N_{n-1} \rightarrow 0$$

con  $N/N_{n-1}$  simple. Por lo que vimos antes, sabemos que  $p = 0$  y así  $N_{n-1} = N$ . Luego, por el Lema 1.2.13 se tiene  $\ell(N) = \ell(N_{n-1}) + 1 = \ell(N) + 1$ , lo cual es absurdo; probándose que  $N = 0$ .  $\square$

**Lema 3.2.15.** [Zi14, Proposición 3.5.19] Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $X \in \mathcal{A}$ . Entonces, para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , el cocomplejo  $X_{i,i+1}^\bullet : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$  que esta centrado en los grados  $i, i+1$  es cero en  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ .

**Lema 3.2.16.** Para  $X^\bullet \in \mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) Si  $X^j = 0 \forall j < n$  y  $d_{X^\bullet}^n$  es invertible a izquierda, entonces existe  $Y^\bullet \in \mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $Y^k = 0 \forall k < n+1$ ,  $Y^\bullet \mid X^\bullet$  en  $\mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y  $X^\bullet \cong Y^\bullet$  en  $\mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda))$ .
- (b) Si  $X^j = 0 \forall j > n$  y  $d_{X^\bullet}^{n-1}$  es un invertible a derecha, entonces existe  $Y^\bullet \in \mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $Y^k = 0 \forall k > n-1$ ,  $Y^\bullet \mid X^\bullet$  en  $\mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y  $X^\bullet \cong Y^\bullet$  en  $\mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda))$ .

*Demostración.* Dado que  $d_{X^\bullet}^n$  es invertible a izquierda, existe  $Y \mid X^{n+1}$  tal que

$$X^n \oplus Y = X^{n+1}.$$

Notemos que tenemos el siguiente isomorfismo  $X^\bullet \cong (X^n \xrightarrow{1_X^n} X^n)[-n] \oplus (Y \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \cdots)$  en  $\mathbf{C}(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Lema 3.2.15, se sigue que  $X^\bullet \cong Y \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \cdots$  en  $\mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda))$ .

(b) Es análogo a (a).  $\square$

**Proposición 3.2.17.** Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  sincero,  $\bar{\Lambda} := \Lambda/\text{ann}(M)$ , tal que  $M$  es un  $\bar{\Lambda}$ -módulo inclinante y  $P^\bullet \in \mathbf{C}^{[-s,0]}(\text{proj}(\Lambda))$ , con  $s > 0$ . Si  $P^\bullet(M) \in (P^\bullet)^{\perp_{\geq 0}}$ , entonces las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a)  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(X)) = 0 \forall X \in M^\perp$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ ;
- (b)  $H^0(P^\bullet) = 0$ ;
- (c)  $P^\bullet = 0$  en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.* (a) Sea  $X \in M^\perp$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Por el Lema 1.5.4 (b), se tiene una sucesión exacta  $\cdots \rightarrow M^1 \xrightarrow{f^1} M^0 \xrightarrow{f^0} X \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , donde  $\{M^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \text{add}(M)$ . Se consideran las siguientes sucesiones exactas  $0 \rightarrow \text{Im}(f^{k+1}) \rightarrow M^k \rightarrow \text{Im}(f^k) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda) \forall k \in \mathbb{N}$ . Por el Lema 1.3.20 se obtienen los siguientes triángulos distinguidos

$$\eta_k : P^\bullet(\text{Im}(f^{k+1})) \rightarrow P^\bullet(M^k) \rightarrow P^\bullet(\text{Im}(f^k)) \rightarrow P^\bullet(\text{Im}(f^{k+1}))[1]$$

en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda)) \forall k \in \mathbb{N}$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, -)$  a  $\eta_k$  se tienen las siguientes sucesiones exactas, ya que  $P^\bullet(M) \in (P^\bullet)^{\perp_{\geq 0}}$ ,

$$0 = (P^\bullet, P^\bullet(M^k)[k]) \rightarrow (P^\bullet, P^\bullet(\text{Im}(f^k))[k]) \rightarrow (P^\bullet, P^\bullet(\text{Im}(f^{k+1}))[k+1]) \rightarrow (P^\bullet, P^\bullet(M^k)[k+1]) = 0,$$

donde  $(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ . Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(\text{Im}(f^0))) \cong \text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(\text{Im}(f^{1+s}))[1+s]).$$

Dado que  $P^h = 0 \forall h < -s$ , se sigue que  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(\text{Im}(f^{1+s}))[1+s]) = 0$ . Por lo que  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(X)) = 0$ .

(b) Sea  $Z \in M^\perp$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Por (a) y el Lema 3.2.11 se tiene que  $\text{Hom}_\Lambda(H^0(P^\bullet), Z) = 0$  y por el Lema 3.2.14 se concluye que  $H^0(P^\bullet) = 0$ .

(c) Veamos que existen  $\{P_j^\bullet\}_{j \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}^+} \subseteq \text{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tales  $P_0^\bullet := P^\bullet$ ,  $P_{j-1}^\bullet \cong P_j^\bullet$  en  $\text{K}(\text{proj}(\Lambda))$ ,  $P_{j-1}^\bullet \mid P_j^\bullet$  en  $\text{C}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $P_j^\bullet \in \text{C}^{\leq j}(\text{mod}(\Lambda))$ . Note que  $P_{-s-1}^\bullet = 0$ , ya que  $P^\bullet \in \text{C}^{[-s, 0]}(\text{proj}(\Lambda))$ .

Supongamos que ya esta construido  $P_k^\bullet$  con  $k \leq 0$ . Notemos que

$$\text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_k^\bullet[k], P^\bullet(M)[j]) \cong \text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet(M)[j - k]) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Por (b) se tiene que  $H^k(P_k^\bullet) = 0$  y así  $d_{P_k^\bullet}^{k-1}$  es un homomorfismo sobreectivo escindible. Luego, por el Lema 3.2.16 (b) existe  $P_{k-1}^\bullet \in \text{C}^{\leq k-1}(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $P_{k-1}^\bullet \mid P_k^\bullet$  en  $\text{C}^b(\text{proj}(\Lambda))$  y  $P_{k-1}^\bullet \cong P_k^\bullet$  en  $\text{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Por lo anterior,  $P^\bullet \cong P_j^\bullet$  en  $\text{K}(\text{proj}(\Lambda))$  con  $P^\bullet \in \text{K}^{\leq -j}(\text{proj}(\Lambda)) \forall j \in \mathbb{N}^+$ . Por lo tanto,  $P^\bullet = 0$  en  $\text{K}(\text{proj}(\Lambda))$ .  $\square$

El siguiente lema es una observación estándar.

**Lema 3.2.18.** Sean  $\mathcal{T}$  una  $R$ -categoría triangulada y  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$  un triángulo distinguido en  $\mathcal{T}$ . Entonces,  $f$  es un isomorfismo en  $\mathcal{T}$  si, y sólo si,  $Z = 0$ .

**Teorema 3.2.19.** Sean  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -rígido sincero,  $I := \text{ann}(M)$  y  $\bar{\Lambda} := \Lambda/I$ . Entonces  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante completo si, y sólo si,  $M$  es  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Por la Proposición 3.2.5 (b) se tiene que  $M^{\perp \tau_n} = \text{gen}_n(M)$ , con lo cual la subcategoría  $M^{\perp \tau_n}$  se puede considerar en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Veamos que la subcategoría  $M^{\perp \tau_n}$  satisface las siguientes propiedades:

(i)  $M^{\perp \tau_n}$  es saturada a derecha en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ :

Por hipótesis  $\text{inj}(\bar{\Lambda}) \subseteq M^{\perp \tau_n}$  y por el Lema 3.2.6 se sigue que  $M^{\perp \tau_n}$  es saturada a derecha en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ .

(ii)  $M^{\perp \tau_n}$  es preenvolvente:

Se sigue de la Proposición 3.2.5 (c).

(iii)  $\text{mod}(\bar{\Lambda}) = (M^{\perp \tau_n})^\vee$ :

Sea  $N \in \text{mod}(\Lambda)$ . Consideremos sucesiones exactas  $\{0 \rightarrow N_i \rightarrow I_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0\}_{i=0}^{n-1}$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde  $\{I_k\}_{k=0}^{n-1} \subseteq \text{inj}(\bar{\Lambda})$  y  $N_0 := N$ . Es suficiente probar que  $N_n \in M^{\perp \tau_n}$ . En efecto, sea  $i \in [1, n)$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(M, -)$  a las sucesiones exactas anteriores, tenemos que  $\text{Ext}_\Lambda^1(M, N_n) \cong \text{Ext}_\Lambda^n(M, N_i)$ . Por el Corolario 3.1.9 (a) se tiene que  ${}^{\perp 0}\tau_n(M) \subseteq M^{\perp n}$  y se sigue que  $N_n \in M^{\perp i}$ . Ahora, como  $I_{n-1} \in {}^{\perp 0}\tau_n(M)$  se concluye que  $N_n \in {}^{\perp 0}\tau_n(M)$ .

Por las propiedades anteriores de  $M^{\perp \tau_n}$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , se sigue del Teorema 1.5.12 que existe un  $\bar{\Lambda}$ -módulo  $n$ -inclinante básico  $T$  tal que

$$\{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_\Lambda^m(T, X) = 0 \forall m \in \mathbb{N}^+\} = M^{\perp \tau_n}.$$

Veamos que  $\text{add}(M) = \text{add}(T)$ . Notemos que  $T \in M^{\perp \tau_n}$ . Por el Lema 3.2.6 se tiene una sucesión exacta  $0 \rightarrow K \rightarrow M' \rightarrow T \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , donde  $K \in M^{\perp \tau_n}$  y  $M' \in \text{add}(M)$ . Así

pues, la sucesión anterior se escinde. Dado que  $M$  es sincero, se tiene que  $\text{rk}(\Lambda) = \text{rk}(\bar{\Lambda})$ . Por el Lema 1.5.7, se tiene que  $\text{rk}(T) = \text{rk}(\bar{\Lambda})$  y por la Proposición 3.2.8 y el Lema 1.6.7 se concluye que  $\text{rk}(M) = \text{rk}(\Lambda)$ . Por lo que  $\text{rk}(T) = \text{rk}(M)$  y puesto que  $T \mid M$  se deduce que  $\text{add}(M) = \text{add}(T)$ .

( $\Leftarrow$ ) Puesto que  $M$  es un  $\bar{\Lambda}$ -módulo  $n$ -inclinante existen sucesiones exactas

$$0 \rightarrow N_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_{i+1} \rightarrow 0$$

en  $\text{mod}(\bar{\Lambda}) \forall i \in [0, n-1]$ , también en  $\text{mod}(\Lambda)$ , tales que  $N_0 := \bar{\Lambda}$ ,  $\{M_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq \text{add}(M)$  y  $N_n \in \text{add}(M)$ . En lo siguiente  $(-, -)$  denotará a  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(-, -)$ .

Construiremos  $\{\eta_i : P_i^\bullet \xrightarrow{f_i^\bullet} P_{\geq -n}^\bullet(M_i) \xrightarrow{g_i^\bullet} P_{i+1}^\bullet \rightarrow P_i^\bullet[1] \in \Delta\}_{i=0}^{n-1}$  en  $\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  que satisfacen las siguientes propiedades:

- (I)  $P_0^\bullet = \Lambda[0]$ ;
- (II)  $H^0(P_{i+1}^\bullet) = N_{i+1} \forall i \in [0, n-1]$ ;
- (III)  $H^k(P_{i+1}^\bullet) = 0 \forall k \in (-i-1, 0), i \in [0, n-1]$ ;
- (IV)  $P^\bullet(M) \in (P_{i+1}^\bullet)^{\perp_{>0}} \forall i \in [0, n-1]$ .

Para  $i = 0$ , sea  $p : \Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$  la proyección canónica. Por el Lema 3.2.15 existe un morfismo de cocomplejos  $f_0^\bullet : \Lambda[0] \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(M_0)$  tal que  $H^0(f_0^\bullet) = f_0 p$ . Consideremos el triángulo distinguido  $\eta_0 : \Lambda[0] \xrightarrow{f_0^\bullet} P_{\geq -n}^\bullet(M_0) \xrightarrow{g_0^\bullet} P_1^\bullet \rightarrow \Lambda[1]$  en  $\mathbb{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  formado a partir del cono de  $f_0^\bullet$ .

Verifiquemos que  $\eta_0$  satisface las propiedades requeridas.

(I). Se sigue de la definición.

(II). Aplicando el Teorema 1.3.16 a  $\eta_0$  se obtiene la siguiente sucesión exacta de  $\Lambda$ -módulos  $\Lambda \xrightarrow{f_0 p} M_0 \rightarrow H^0(P_1^\bullet) = N_1 \rightarrow 0$ .

(III). Es inmediato.

(IV). Por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.1.2, aplicando el funtor cohomológico  $(-, P^\bullet(M))$  a  $\eta_0$ , se tienen las siguientes sucesiones exactas

$$(P_{\geq -n}^\bullet(M_0), P^\bullet(M)) \xrightarrow{(f_0^\bullet, P^\bullet(M))} (\Lambda[0], P^\bullet(M)) \rightarrow (P_1^\bullet[1], P^\bullet(M)[1]) \rightarrow 0,$$

$0 = (\Lambda[0], P^\bullet(M)[k]) \rightarrow (P_1^\bullet, P^\bullet(M)[k+1]) \rightarrow (P_{\geq -n}^\bullet(M_0), P^\bullet(M)[k+1]) \rightarrow 0 \forall k \in \mathbb{N}^+$ . Basta probar que  $(f_0^\bullet, P^\bullet(M)) : (P_{\geq -n}^\bullet(M_0), P^\bullet(M)) \rightarrow (\Lambda[0], P^\bullet(M))$  es un epimorfismo. En efecto, por el Lema 3.2.9 es suficiente probar que  $f_0 p$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente. Sea  $f : \Lambda \rightarrow M'$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $M' \in \text{add}(M)$ . Dado que  $M' \in \text{mod}(\bar{\Lambda})$  existe  $p' : \bar{\Lambda} \rightarrow M'$  tal que  $p' p = f$  y por el Lema 3.2.10 existe un morfismo  $f' : M_0 \rightarrow M'$  tal que  $f' f_0 = p'$ . Así,  $f = p' p = f' f_0 p$ . Por lo que  $f_0 p$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente.

Caso 1.  $n = 1$ . Por el Lema 3.2.7 existe  $Q \in \text{proj}(\Lambda)$  tal que  $P_1^\bullet = P_{\geq -1}^\bullet(N_1) \oplus Q[1]$ . Por el Teorema 3.1.6 se tiene que  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(Q[1], P^\bullet(M)[1]) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P_1^\bullet, P^\bullet(M)[1]) = 0$ . Dado que  $M$  es sincero, se concluye del Lema 3.2.11 que  $Q = 0$ .

Caso 2.  $n > 1$ . Supongamos que  $\eta_i$  está construido con  $i \in [0, n - 2]$ . Consideremos

$$R^\bullet := 0 \rightarrow R^{-n} \xrightarrow{d_{R^\bullet}^{-n}} R^{-n+1} \rightarrow \dots \rightarrow R^{-1} \xrightarrow{d_{R^\bullet}^0} R^0 \rightarrow M_{i+1} \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva minimal en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Por el Lema 1.3.17 y como  $\text{pd}(M_i) \leq n$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , existen morfismos  $k^\bullet : P_{i+1}^\bullet \rightarrow R_{\leq 0}^\bullet$  y  $t^\bullet : P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1}) \rightarrow R_{\leq 0}^\bullet$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , tales que  $H^0(k^\bullet) = f_{i+1}$  y  $H^0(t^\bullet) = 1_{M_{i+1}}$ . Ahora, formemos  $\eta : P_{i+1}^\bullet \xrightarrow{k^\bullet} R_{\leq 0}^\bullet \rightarrow T_{i+1}^\bullet \rightarrow P_{i+1}^\bullet[1]$ ,  $\xi : Q_{i+1}^\bullet \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1}) \xrightarrow{t^\bullet} R_{\leq 0}^\bullet \rightarrow Q_{i+1}^\bullet[1] \in \Delta$  en  $\mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda))$ . Tomando el cambio de base de los triángulos  $\eta$  y  $\xi$  se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas triángulos distinguidos

$$\eta_{i+1} : \begin{array}{ccccccc} & & & Q_{i+1} & \xlongequal{\quad} & Q_{i+1} & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & P_{i+1}^\bullet & \xrightarrow{f_{i+1}^\bullet} & P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1}) & \xrightarrow{g_{i+1}^\bullet} & P_{i+2}^\bullet & \longrightarrow & P_{i+1}^\bullet[1] \\ & & & \parallel & & \downarrow t^\bullet & & \downarrow & & \parallel \\ & & & P_{i+1}^\bullet & \xrightarrow{k^\bullet} & R_{\leq 0}^\bullet & \longrightarrow & T_{i+1}^\bullet & \longrightarrow & P_{i+1}^\bullet[1] \\ & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & Q_{i+1}^\bullet[1] & \xlongequal{\quad} & Q_{i+1}^\bullet[1] & & \end{array}$$

Verifiquemos que  $\eta_{i+1}$  satisface las propiedades requeridas.

(II) y (III). Dado que  $t^\bullet f_{i+1}^\bullet = k^\bullet$ , se sigue que

$$H^0(f_{i+1}^\bullet) = 1_{M_{i+1}} H^0(f_{i+1}^\bullet) = H^0(k^\bullet) = f_{i+1}.$$

Aplicando el Teorema 1.3.16 a  $\eta_{i+1}$  se tienen la siguientes sucesiones exactas

$$0 \rightarrow H^{-1}(P_{i+2}^\bullet) \rightarrow N_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} H^0(P_{i+2}^\bullet) = N_{i+2} \rightarrow 0,$$

$0 = H^k(P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1})) \rightarrow H^k(P_{i+2}^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(P_{i+1}^\bullet) = 0 \forall k \in (-i-2, -1)$ . Ya que  $f_{i+1}$  es un monomorfismo se obtiene que  $H^{-1}(P_{i+2}^\bullet) = 0$ .

(IV). Por el Teorema 3.1.6 y el Lema 3.1.2, aplicando el funtor cohomológico  $(-, P^\bullet(M))$  a  $\eta_{i+1}$ , se tienen las siguientes sucesiones exactas

$$(P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1}), P^\bullet(M)) \xrightarrow{(f_{i+1}^\bullet, P^\bullet(M))} (P_{i+1}^\bullet, P^\bullet(M)) \rightarrow (P_{i+2}^\bullet[1], P^\bullet(M)[1]) \rightarrow 0,$$

$$0 = (P_{i+1}^\bullet, P^\bullet(M)[k]) \rightarrow (P_{i+2}^\bullet, P^\bullet(M)[k+1]) \rightarrow (P_{\geq -n}^\bullet(M_0), P^\bullet(M)[k+1]) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Basta probar que  $(f_{i+1}^\bullet, P^\bullet(M)) : (P_{\geq -n}^\bullet(M_{i+1}), P^\bullet(M)) \rightarrow (P_{i+1}^\bullet, P^\bullet(M))$  es un epimorfismo. En efecto, por el Lema 3.2.10  $f_{i+1}$  es una  $\text{add}(M)$ -preenvolvente y del Lema 3.2.9 se concluye que  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))}(f_{i+1}^\bullet, P^\bullet(M))$  es un epimorfismo.

Por el Teorema 3.1.6 se tiene que  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ ; por el Lema 1.6.6 es suficiente probar que  $P_n^\bullet \cong P_{\geq -n}^\bullet(N_n)$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . La sucesión exacta en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$   $0 \rightarrow (P_n^\bullet)_{\geq -n} \rightarrow P_n^\bullet \rightarrow (P_n^\bullet)_{\leq -n-1}[n+1] \rightarrow 0$ , la cual se escinde grado a grado, induce el siguiente  $\eta : (P_n^\bullet)_{\geq -n} \rightarrow P_n^\bullet \rightarrow (P_n^\bullet)_{\leq -n-1}[n+1] \rightarrow (P_n^\bullet)_{\geq -n}[1] \in \Delta$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Aplicando el Teorema 1.3.16 a  $\eta$  se obtiene que  $H^j(P_n^\bullet) \cong H^j((P_n^\bullet)_{\geq -n}) \forall j \in (-n, 0)$ . Por el Lema 3.2.7 existe  $Q \in \text{proj}(\Lambda)$  tal que  $(P_n^\bullet)_{\geq -n} = P_{\geq -n}^\bullet(N_n) \oplus Q[n]$  en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$ . Tomando el cambio de base del triángulo que se escinde

$$Q[n-1] \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(N_n) \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(N_n) \oplus Q[n] \rightarrow Q[n]$$

y  $\eta$  se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas triángulos distinguidos

$$\begin{array}{ccccccc}
& & Q[n-1] & \xlongequal{\quad} & Q[n-1] & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
P_n^\bullet[-1] & \longrightarrow & Q^\bullet & \longrightarrow & P_{\geq -n}^\bullet(N_n) & \longrightarrow & P_n^\bullet \\
& & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
P_n^\bullet[-1] & \longrightarrow & (P_n^\bullet)_{\leq -n-1}[n] & \longrightarrow & P_{\geq -n}^\bullet(N_n) \oplus Q[n] & \longrightarrow & P_n^\bullet \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & Q[n] & \xlongequal{\quad} & Q[n] & & 
\end{array}$$

Del primer triángulo vertical se desprende que  $Q^\bullet \in \mathcal{K}^{\leq -n+1}(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Teorema 3.1.6, el Lema 3.1.2 y como  $P^\bullet(M) \in (P_n^\bullet)^{\perp > 0}$ , aplicando el funtor al primer triángulo horizontal se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 = (P_{\geq -n}^\bullet(N_n), P^\bullet(M)[k]) \rightarrow (Q^\bullet, P^\bullet(M)[k]) \rightarrow (P_n^\bullet, P^\bullet(M)[k+1]) = 0 \quad \forall k \geq n-1.$$

Por la Proposición 3.2.17 se tiene que  $Q^\bullet = 0$  en  $\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))$  y aplicando el Lema 3.2.18 al primer triángulo horizontal se concluye que  $P_n^\bullet \cong P_{\geq -n}^\bullet(N_n)$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por lo que  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Por último, dado que  $\text{inj}(\bar{\Lambda}) \subseteq \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_{\bar{\Lambda}}^m(N, X) = 0\}$  y como  $M$  es  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , por el Lema 1.5.11 se sigue que  $\text{inj}(\bar{\Lambda}) \subseteq \text{gen}_n(M)$ . Puesto que  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante concluimos de la Proposición 3.2.5 (b) que  $\text{inj}(\bar{\Lambda}) \subseteq \text{gen}_n(M) = M^{\perp \tau_n}$ .  $\square$

**Corolario 3.2.20.** Sean  $M$  un  $\Lambda$ -módulo,  $I := \text{ann}(M)$  y  $\bar{\Lambda} := \Lambda/I$ . Entonces  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante completo si, y sólo si,  $M$  es  $\tau_n$ -rígido en  $\text{mod}(\Lambda)$ ,  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$  y sincero.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ )  $M$  es  $\tau_n$ -rígido por el Teorema 3.1.6.

Sea  $P \in \text{proj}(\Lambda)$  tal que  $\text{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$ . Por el Lema 3.2.13 y el Lema 3.2.11 se tiene que  $P[n] \oplus P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es presedimentado y dado que  $\text{thick}(P_{\geq -n}^\bullet(M)) \subseteq \text{thick}(P[n] \oplus P_{\geq -n}^\bullet(M))$  se concluye que  $P[n] \oplus P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por la Proposición 1.6.7 se tiene que  $\text{rk}(P[0]) = 0$  y así  $M$  es sincero.

Por el Teorema 3.2.19 concluimos que  $M$  es  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ .

( $\Leftarrow$ ) Se sigue del Teorema 3.2.19.  $\square$

**Corolario 3.2.21.** Sean  $M$  un  $\Lambda$ -módulo  $\tau_n$ -inclinante,  $I := \text{ann}(M)$  y  $\bar{\Lambda} := \Lambda/I$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes :

- (a)  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante completo.
- (b)  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ .
- (c)  $\{N \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_{\Lambda}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+\} = M^{\perp \tau_n}$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Por el Teorema 3.2.19 se tiene que  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Se sigue de la Observación 3.2.3.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Por el Lema 1.5.11  $\{N \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_{\Lambda}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+\} = \text{gen}_n(M)$  y por la Proposición 3.2.5 (b) se tiene que  $\text{gen}_n(M) = M^{\perp \tau_n}$ .

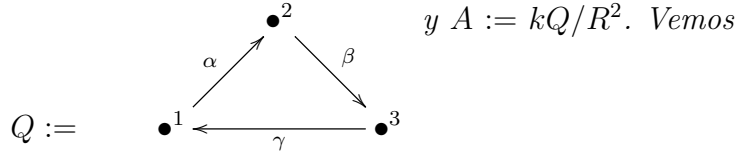
(c)  $\Rightarrow$  (a) Notemos que

$$\text{inj}(\bar{\Lambda}) \subseteq \{N \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}_{\Lambda}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+\} = M^{\perp \tau_n}.$$

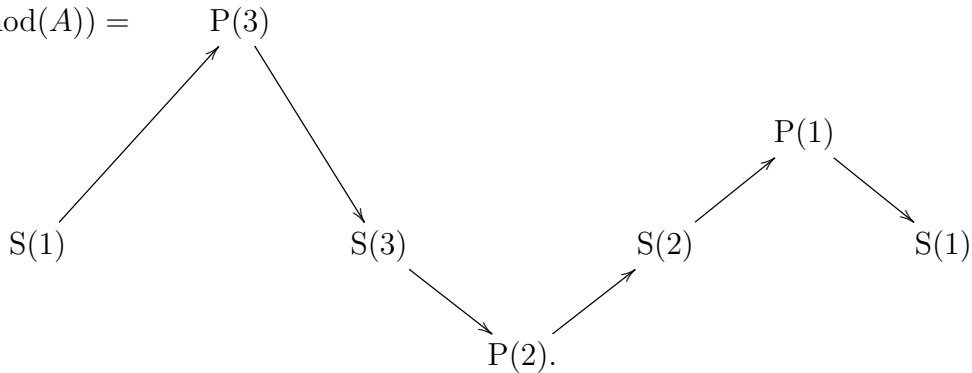
□

El siguiente ejemplo muestra un módulo  $\tau_2$ -inclinante completo de dimensión proyectiva infinita.

**Ejemplo 3.2.22.** Sean  $k$  un campo,



que  $\Gamma(\text{mod}(A)) =$



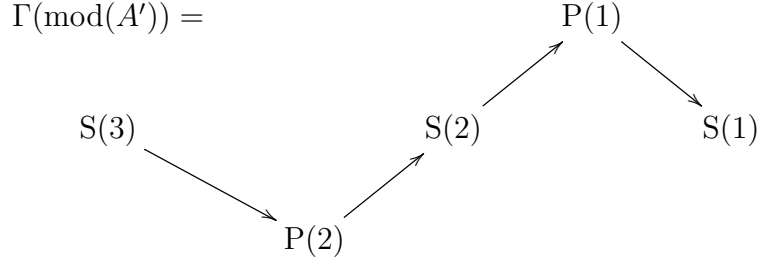
Sea  $M := P(2) \oplus P(1) \oplus S(1)$ . Notemos que  $M$  es sincero. Calculando las subcategorías

$$M^{\perp 1} = \text{add}(P(3) \oplus P(1) \oplus S(1) \oplus S(3) \oplus P(2))$$

y  ${}^{\perp 0}\tau_2(M) = \text{add}(P(3) \oplus P(1) \oplus S(1) \oplus S(3) \oplus P(2))$ , obtenemos que

$$M^{\perp \tau_2} = \text{add}(P(3) \oplus S(3) \oplus S(2)).$$

Considerando  $Q' := \bullet^1 \xrightarrow{\delta} \bullet^2 \xrightarrow{\epsilon} \bullet^3$  y  $A' := kQ'/R^2$ . Se tiene que  $A/\text{ann}(M) = A'$ . Calculando su carcaj de Auslander-Reiten



se desprende que  $\text{add}(M) = \text{inj}(A')$  y que  $M$  es 2-inclinante en  $\text{mod}(A')$ . Por el Corolario 3.2.20 se concluye que  $M$  es  $\tau_2$ -inclinante completo.

**Definición 3.2.23.** Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  y  $\omega$  un generador relativo en  $\mathcal{X}$ . Decimos que  $\omega$  es  $\mathcal{X}$ - $\tau_n$ -rígido si  $\mathcal{X} \subseteq \omega^{\perp \tau_n}$ .

Por el Corolario 3.1.9, si  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $n$ -inclinante, se tiene que  $\text{add}(T)$  es un generador  $\mathcal{X}$ -proyectivo para alguna subcategoría  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ , entonces es  $\mathcal{X}$ - $\tau_n$ -rígido.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 1.5.12.

**Teorema 3.2.24.** Existe una biyección  $\cup_{n \in \mathbb{N}^+} \text{c.}\tau_n\text{-tilt} \leftrightarrow \{(\mathcal{X}, \omega) \subseteq \text{mod}(\Lambda)^2 \mid \mathcal{X} \text{ es gruesa a derecha, preenvolvente y } \omega \text{ un generador relativo en } \mathcal{X} \text{ sincero y } \mathcal{X}\text{-}\tau_n\text{-rígido tal que } \text{mod}(\Lambda/I) = \mathcal{X}^\vee, \text{ donde } I := \text{ann}(\omega)\}$ , donde  $\text{c.}\tau_n\text{-tilt} := \{M \in \text{mod}(\Lambda) \mid M \text{ es } \tau_n\text{-inclinante completo básico}\}$ . Dada por  $M \in \text{c.}\tau_n\text{-tilt} \mapsto (M^{\perp \tau_n}, \text{add}(M))$ , con inversa  $(\mathcal{X}, \omega) \mapsto \bigoplus_{M \in \text{ind}(\omega)} M$ .

*Demostración.* Sea  $M \in \text{c.}\tau_n\text{-tilt}$ . Por el Lema 3.2.6 se tiene que  $M^{\perp \tau_n}$  es gruesa a derecha y por la Proposición 3.2.5 (c)  $M^{\perp \tau_n}$  es preenvolvente.

Luego, por la Proposición 3.2.5 (b)  $M^{\perp \tau_n} \subseteq \text{gen}(M)$  y del Lema 3.2.6 se tiene que  $M$  es un generador relativo en  $M^{\perp \tau_n}$  y es  $M^{\perp \tau_n}$ - $\tau_n$ -rígido claramente.

Dado que  $M$  es  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , por el Teorema 1.5.12, se tiene que

$$\text{mod}(\bar{\Lambda}) = \{N \in \text{mod}(\bar{\Lambda}) \mid \text{Ext}_{\bar{\Lambda}}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+\}^\vee$$

y por el Corolario 3.2.21 se sigue que  $\{N \in \text{mod}(\bar{\Lambda}) \mid \text{Ext}_{\bar{\Lambda}}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+\} = M^{\perp \tau_n}$ . Por lo tanto,  $\text{mod}(\bar{\Lambda}) = (M^{\perp \tau_n})^\vee$ .

Sea  $\mathcal{X}$  es gruesa a derecha, preenvolvente y  $\omega$  un generador relativo en  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}$ - $\tau_n$ -rígido tal que  $\text{mod}(\Lambda/I) = \mathcal{X}^\vee$ , donde  $I := \text{ann}(\omega)$ . Veamos que  $\mathcal{X}$  es una subcategoría saturada a derecha y preenvolvente en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Sea  $J \in \text{inj}(\bar{\Lambda})$ . Dado que  $\text{mod}(\Lambda/I) = \mathcal{X}^\vee$  existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow J \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , con  $X \in \mathcal{X}$  y  $N \in \mathcal{X}^\vee$ . Por lo que la sucesión exacta anterior se escinde y así  $J \in \mathcal{X}$ , ya que  $\mathcal{X}$  es gruesa. Dado que  $\mathcal{X}$  es gruesa a derecha en  $\text{mod}(\Lambda)$  se tiene que  $\mathcal{X}$  es saturada a derecha en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Como  $\mathcal{X}$  es preenvolvente en  $\text{mod}(\Lambda)$  se sigue que  $\mathcal{X}$  es preenvolvente en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Por el Teorema 1.5.12

existe un  $\bar{\Lambda}$ -módulo  $T$   $n$ -inclinante básico tal que  $\mathcal{X} = T^\perp$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Notemos que por el Lema 1.5.4 (b) se tiene que  $\text{add}(T)$  es un generador  $\mathcal{X}$ -proyectivo relativo en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ .

Afirmamos que  $\text{add}(T) = \omega$ .

( $\subseteq$ ) Dado que  $\omega$  un generador relativo en  $\mathcal{X}$  existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow T \rightarrow 0$$

en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $W \in \omega$  y  $X \in \mathcal{X}$ . Por lo que también es exacta en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ . Ya que  $\text{add}(T)$  es  $\mathcal{X}$ -proyectivo en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$  se concluye que la sucesión exacta anterior se escinde y así  $\text{add}(T) \subseteq \omega$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $W \in \omega$ . Puesto que  $\text{add}(T)$  es un generador  $\mathcal{X}$ -relativo en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$  existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow X \rightarrow T' \rightarrow W \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\bar{\Lambda})$ , con  $T' \in \text{add}(T)$  y  $X \in \mathcal{X}$ . Notemos que la sucesión anterior es exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$  y ya que  $X \in \omega^{\perp \tau_n}$  la sucesión anterior se escinde y así  $T' \in \omega$ .

Por último, por el Corolario 3.2.20, se tiene que  $T$  es  $\tau_n$ -inclinante completo.  $\square$

Con el resultado anterior el Teorema 1.5.12 puede ser visualizado por los pares de Frobenius a derecha correctos.

**Notación 3.2.25.** La subcategoría  $\text{rFrob}(\Lambda)$  esta constituida por los pares a Frobenius a derecha  $(\omega, \mathcal{X})$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\mathcal{X}$  es preenvolvente y  $\text{mod}(\Lambda) = \mathcal{X}^\vee$ .

**Corolario 3.2.26.** Hay una correspondencia biyectiva  $\text{tilt}(\Lambda) \rightarrow \text{rFrob}(\Lambda)$  dada por

$$[M] \mapsto (\text{add}(M), M^\perp),$$

con inversa  $\text{rFrob}(\Lambda) \rightarrow \text{tilt}(\Lambda) := \{M \in \text{mod}(\Lambda) \mid M \text{ es inclinante básico}\}$ , dada por  $(\omega, \mathcal{X}) \mapsto [\oplus_{W \in \text{ind}(\omega)} W]$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $M$  un  $\Lambda$ -módulo  $n$ -inclinante. Como  $M$  es fiel, tenemos que

$$\text{ann}(M) = 0$$

y por el Corolario 3.1.9  $M^{\perp \tau_n} = M^\perp$ . El resultado se sigue del Teorema 3.2.24.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $(\omega, \mathcal{X}) \in \text{rFrob}(\Lambda)$ . Afirmamos que  $\text{ann}(\omega) = 0$ . En efecto, como  $\mathcal{X}^\vee = \text{mod}(\Lambda)$ , existe un monomorfismo  $j : D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda) \rightarrow X$ , con  $X \in \mathcal{X}$ . Entonces, existe un epimorfismo  $p : X' \rightarrow D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda)$ . Dado que  $\omega$  es un generador relativo en  $\mathcal{X}$ , existe un epimorfismo  $q : W \rightarrow D_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda)$ . Con lo cual,  $\text{ann}(W) = 0$  y en consecuencia

$$\text{ann}(\omega) := \bigcap_{W' \in \omega} \text{ann}(W') \subseteq \text{ann}(W) = 0.$$

Por el Teorema 3.2.24 se tiene que  $T := \oplus_{W \in \text{ind}(\omega)} W$  es  $\tau_n$ -inclinante y ya que  $T$  es fiel, se sigue del Lema 3.2.2 que  $T$  es  $n$ -inclinante.  $\square$

### 3.3. Módulos $\tau^{-n}$ -coinclinante

El objetivo de esta sección es introducir los  $\Lambda$ -módulos  $\tau^{-n}$ -coinclinante, ver su relación con los  $\Lambda^{op}$ -módulos  $\tau_n$ -inclinantes y caracterizar las álgebras  $n$ -Gorenstein.

**Definición 3.3.1.** Decimos que  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  es  $\tau^{-n}$ -coinclinante si  $I_{\leq n}^\bullet(M)$  es cosedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{inj}(\Lambda))$ .

**Notación 3.3.2.** Sea  $M^\bullet \in C(\text{mod}(\Lambda))$ . Denotamos por

$$D_\Lambda(M)^\bullet := \cdots \rightarrow D_\Lambda(M^{i+1}) \xrightarrow{D_\Lambda(d^i)} D_\Lambda(M^i) \xrightarrow{D_\Lambda(d^{i-1})} D_\Lambda(M^{i-1}) \rightarrow \cdots$$

el **cocomplejo dual** en  $C(\text{mod}(\Lambda^{op}))$ . Si  $f^\bullet : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$  es un morfismo en  $C(\text{mod}(\Lambda))$ , el **morfismo dual**  $D_\Lambda(f)^\bullet : D_\Lambda(N)^\bullet \rightarrow D_\Lambda(M)^\bullet$  en  $C(\text{mod}(\Lambda^{op}))$  está dado por

$$D_\Lambda(f)^i := D_\Lambda(f^{-i}) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Esto induce el siguiente el **functor de dualidad**

$$\begin{aligned} D_\Lambda : C(\text{mod}(\Lambda)) &\rightarrow C(\text{mod}(\Lambda^{op})) \\ M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet &\mapsto D_\Lambda(N)^\bullet \xrightarrow{D_\Lambda(f)^\bullet} D_\Lambda(M)^\bullet. \end{aligned}$$

Dado que

$$D_\Lambda : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda^{op})$$

es una dualidad de categorías, se concluye que  $D_\Lambda : C(\text{mod}(\Lambda)) \rightarrow C(\text{mod}(\Lambda^{op}))$  es una dualidad de categorías que tiene a  $D_{\Lambda^{op}} : C(\text{mod}(\Lambda^{op})) \rightarrow C(\text{mod}(\Lambda))$  como cuasi-inversa.

**Lema 3.3.3.** El functor de dualidad  $D_\Lambda : C(\text{mod}(\Lambda)) \rightarrow C(\text{mod}(\Lambda^{op}))$  induce una dualidad de categorías entre  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  y  $\mathcal{K}^b(\text{inj}(\Lambda^{op}))$ , la cual la dualidad

$$D_{\Lambda^{op}} : C(\text{mod}(\Lambda^{op})) \rightarrow C(\text{mod}(\Lambda))$$

establece una cuasi-inversa.

*Demostración.* Veamos que el functor  $D_\Lambda : \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{inj}(\Lambda^{op}))$  está bien definido. En efecto, sea  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $\pi(f^\bullet) = 0$ . Puesto que  $D_\Lambda : \text{proj}(\Lambda) \rightarrow \text{inj}(\Lambda^{op})$  es una dualidad de categorías  $D_\Lambda(f)^\bullet \in C(\text{inj}(\Lambda))$ . Ahora, ya que  $\pi(f^\bullet) = 0$  existen  $\{s^j : P^j \rightarrow Q^{j-1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  tales que  $f^k = d^{k-1}s^k + s^{k+1}d^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ . Por lo cual  $D_\Lambda(f)^i = D_\Lambda(f^{-i}) = D_\Lambda(d^{-i-1}s^{-i} + s^{-i+1}d^{-i}) = D_\Lambda(s^{-i})D_\Lambda(d^{-i-1}) + D_\Lambda(d^{-i})D_\Lambda(s^{-i+1})$ . Así pues,  $\pi(D_\Lambda(f)^\bullet) = 0$ .

Similarmente, se tiene que  $D_{\Lambda^{op}} : \mathcal{K}^b(\text{inj}(\Lambda^{op})) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  está bien definida y puesto que  $D_\Lambda : C(\text{mod}(\Lambda)) \rightarrow C(\text{mod}(\Lambda^{op}))$  es una dualidad de categorías que tiene a

$$D_{\Lambda^{op}} : C(\text{mod}(\Lambda^{op})) \rightarrow C(\text{mod}(\Lambda))$$

como cuasi-inversa. Se concluye que  $D_\Lambda : \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda)) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{inj}(\Lambda^{op}))$  es una dualidad, cuya inversa es  $D_{\Lambda^{op}} : \mathcal{K}^b(\text{inj}(\Lambda^{op})) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .  $\square$

El siguiente resultado es bien conocido.

**Lema 3.3.4.** *Sea  $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$  un triángulo distinguido en  $\mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda))$ . Entonces,  $D_\Lambda(Z)^\bullet \rightarrow D_\Lambda(Y)^\bullet \rightarrow D_\Lambda(X)^\bullet \rightarrow D_\Lambda(Z)^\bullet[1] \in \Delta$  en  $\mathbf{K}(\text{mod}(\Lambda^{op}))$ . En particular, si  $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y  $X^\bullet \in \mathcal{X} * \mathcal{X}[1]$ , entonces  $D_\Lambda(X)^\bullet \in D_\Lambda(\mathcal{X})[-1] * D_\Lambda(\mathcal{X})$ .*

**Proposición 3.3.5.** *El funtor de dualidad  $D_\Lambda : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda^{op})$  establece una biyección entre  $\{M \in \text{mod}(\Lambda) \mid M \text{ es } \tau^{-n}\text{-coinclinante básico}\}$  y  $\{M \in \text{mod}(\Lambda^{op}) \mid M \text{ es } \tau_n\text{-inclinante básico}\}$ , con inversa  $D_{\Lambda^{op}} : \text{mod}(\Lambda^{op}) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$ .*

*Demostración.* Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau^{-n}$ -coinclinante básico. Veamos que  $D_\Lambda(M)$  es  $\tau_n$ -inclinante en  $\text{mod}(\Lambda^{op})$ . Es fácil notar que  $P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M)) \cong D_\Lambda(I_{\leq n}^\bullet(M))$  en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda^{op}))$ . Sean  $n > 0$  y  $f^\bullet : P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M)) \rightarrow P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M))[n]$  un morfismo en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda^{op}))$ . Por el Lema 3.3.3 existe un único morfismo  $g^\bullet : I_{\leq n}^\bullet(M)[-n] \rightarrow I_{\leq n}^\bullet(M)$  en  $\mathbf{K}^b(\text{inj}(\Lambda))$  tal que el siguiente diagrama conmuta en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda^{op}))$ , con morfismos verticales isomorfismos,

$$\begin{array}{ccc} D_\Lambda(I_{\leq n}^\bullet(M)) & \xrightarrow{D_\Lambda(g^\bullet)} & D_\Lambda(I_{\leq n}^\bullet(M)[-n]) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M)) & \xrightarrow{f^\bullet} & P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M))[n]. \end{array}$$

Puesto que  $I_{\leq n}^\bullet(M)$  es precosedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{inj}(\Lambda))$  se tiene que  $\pi(g^\bullet) = 0$  y por el cuadrado conmutativo anterior se concluye  $\pi(f^\bullet) = 0$ . Así pues,  $P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M))$  es presedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda^{op}))$ .

Por último, sea  $P^\bullet \in \mathbf{C}^b(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Lema 3.3.3 se tiene que  $D_\Lambda(P)^\bullet \in \mathbf{C}^b(\text{inj}(\Lambda^{op}))$ . Por el dual del Lema 1.6.9 (a) existe  $m \in \mathbb{N}^+$  tal que

$$D_\Lambda(P)^\bullet \in \text{add}(I_{\leq n}^\bullet(M)[-m]) * \cdots * \text{add}(I_{\leq n}^\bullet(M)[m]).$$

Por el Lema 3.3.3 y el Lema 3.3.4, se sigue que

$$P^\bullet \in \text{add}(P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M))[-m]) * \cdots * \text{add}(P_{\geq -n}^\bullet(D_\Lambda(M))[m]).$$

Por lo tanto,  $D_\Lambda(M)$  es  $\tau_n$ -inclinante en  $\text{mod}(\Lambda^{op})$ .

Se verifica dualmente que  $D_{\Lambda^{op}} : \text{mod}(\Lambda^{op}) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es la inversa.  $\square$

**Proposición 3.3.6.** *Para una álgebra de Artin  $\Lambda$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a)  $\Lambda$  es  $n$ -Gorenstein.
- (b)  $D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)$  es  $\tau_n$ -inclinante.
- (c)  $\Lambda$  es  $\tau^{-n}$ -coinclinante.

*Demostración.* Es suficiente probar que (a) es equivalente a (b), ya que, por la Proposición 3.3.5 (b) es equivalente (c).

(a)  $\Rightarrow$  (b). Dado que  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ , se tiene que  $\text{pd}(D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)) \leq n$ . Puesto que  $D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)$  es un  $\Lambda$ -módulo inyectivo se sigue que  $D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda) \in D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)^\perp$ . Luego, como  $\text{id}({}_\Lambda\Lambda) \leq n$  se concluye que  $D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)$  es  $n$ -inclinante. Por la Observación 3.2.3 se desprende que  $D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)$  es  $\tau_n$ -inclinante.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Del Lema 3.2.2 se tiene que  $D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)$  es  $n$ -inclinante. Por lo que

$$\text{pd}(D_{\Lambda^{op}}(\Lambda_\Lambda)) \leq n$$

y  $\text{id}({}_\Lambda\Lambda) \leq n$ . Así pues,  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ . Por lo tanto,  $\Lambda$  es  $n$ -Gorenstein.  $\square$

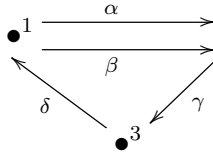
### 3.4. Álgebras $\tau_n$ -rígidas finitas

El objetivo principal de esta sección es introducir la noción de álgebra  $\tau_n$ -rígida finita, ver su relación con las álgebras  $\tau$ -rígidas finitas y las aplicaciones a los módulos  $\tau_n$ -rígidos.

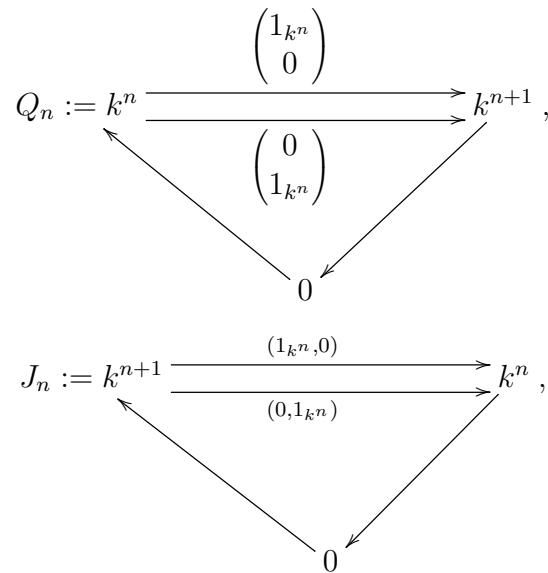
**Definición 3.4.1.** [DIJ17, Definición 1.1] Denotaremos por  $\tau\text{-rigid}(\Lambda)$  al conjunto de las isoclases de  $M \in \text{mod}(\Lambda)$  que son inescindibles y  $\tau$ -rígidos. Decimos que  $\Lambda$  es  $\tau$ -rígida finita si  $\tau\text{-rigid}(\Lambda)$  es finito.

El siguiente ejemplo muestra un álgebra que no es  $\tau$ -rígida finita, pero hay una cantidad finita de módulos  $\tau_3$ -inclinantes.

**Ejemplo 3.4.2.** Sean  $k$  un campo,  $Q := \bullet^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \bullet^2$ , y  $A := kQ/R^2$ . Las siguientes



representaciones ayudarán a describir los  $A$ -módulos inescindibles. Sean  $p \in \mathbb{P}^1(k)$  ( $\mathbb{P}^1(k)$  es la recta proyectiva) y  $n \in \mathbb{N}$ .

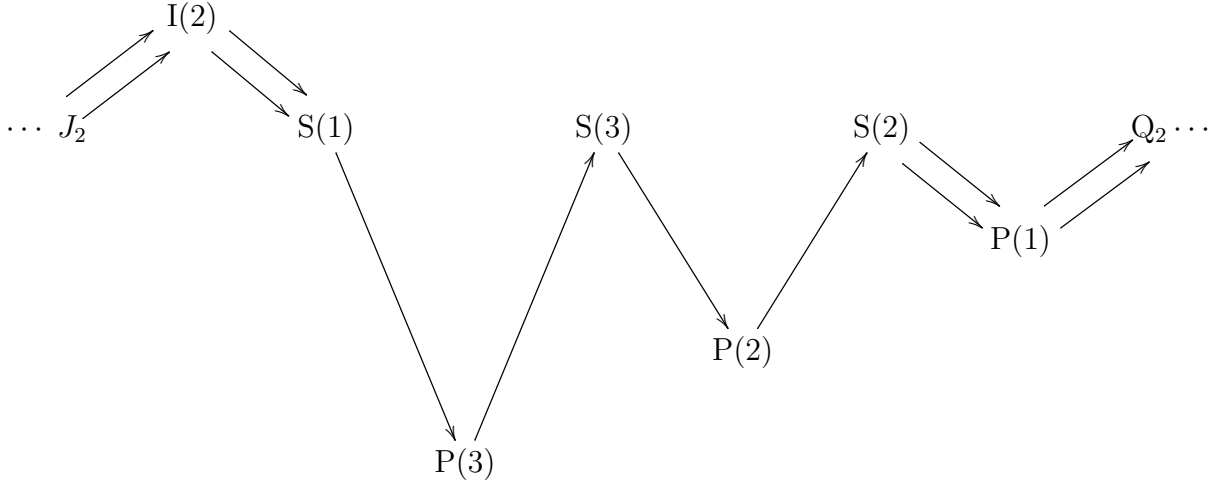


$$\begin{array}{ccc}
R_{p,n} := k^n & \xrightarrow{1_{k^n}} & k^n \\
& \xrightarrow{J_{n,p}} & \\
& \searrow & \swarrow \\
& 0 & 
\end{array}$$

donde  $J_{n,p}$  es el bloque de Jordan correspondiente al vector propio  $p$  de tamaño  $n$ .  
Por [ARS95, Teorema 7.5] se tiene que

$$\text{ind}(A) = \{Q_n, J_n, R_{p,n}, P(3), P(2), S(3) \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}^1(k)\}$$

y el carcaj de Auslander-Reiten está dado por las siguientes componentes



$$R_{p,0} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} R_{p,1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} R_{p,2} \cdots \quad \forall p \in \mathbb{P}^1(k).$$

Por el Lema 1.8.6 y [ARS95, Teorema 7.5] se tiene  $S(2)$  es  $\tau$ -rígido y  $S(2) \oplus X$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si,  $X \in \{P(2), P(1), P(2) \oplus P(1)\}$ . Luego,  $P(1)$  es  $\tau$ -rígido y  $P(1) \oplus X$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si,  $X \in \{P(2), P(3), S(2), Q_2, P(2) \oplus P(3), P(2) \oplus S(2), P(3) \oplus Q_2\}$ . Después,  $Q_{n+2}$  es  $\tau$ -rígido y  $Q_{n+2} \oplus X$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si,

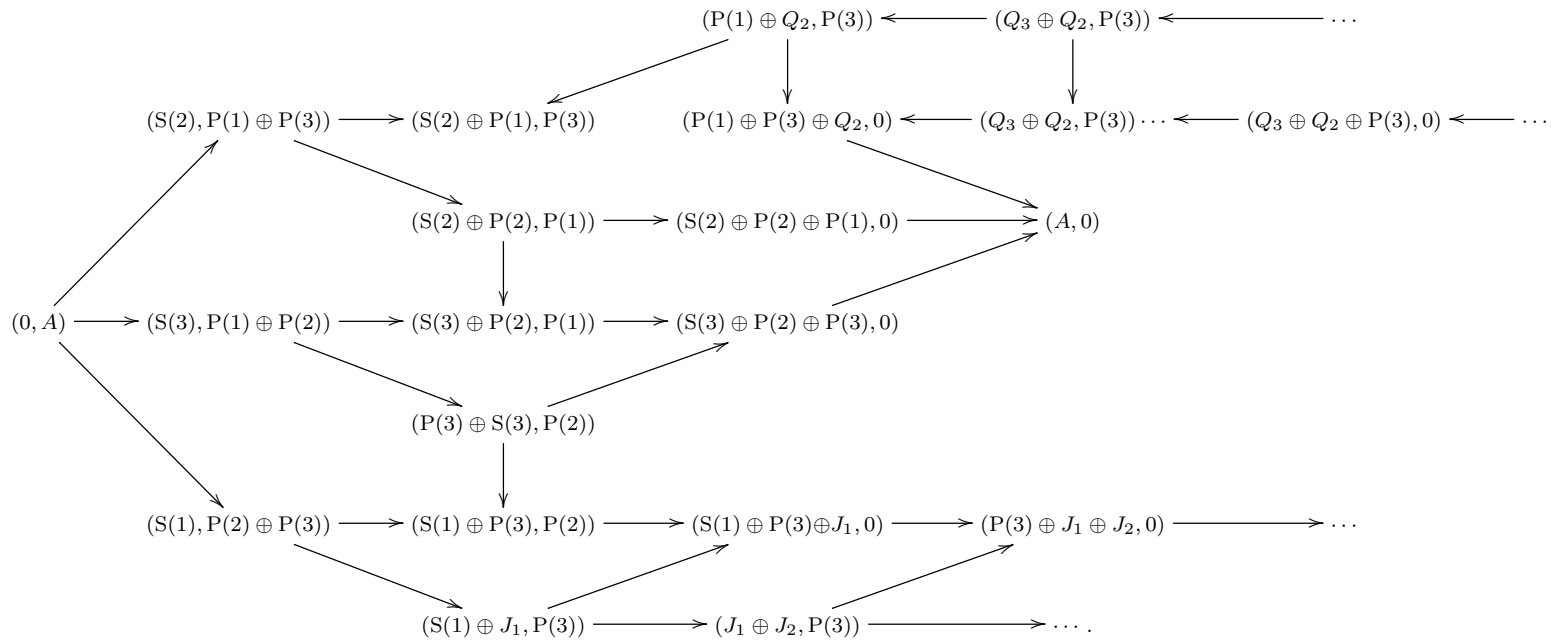
$$X \in \{P(3), Q_{n+1}, Q_{n+3}, P(3) \oplus Q_{n+1}, P(3) \oplus Q_{n+3}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Análogamente,  $S(1)$  es  $\tau$ -rígido y  $S(1) \oplus X$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si,

$$X \in \{I(2), P(3), I(2) \oplus P(3)\}.$$

Por último,  $J_{n+1}$  es  $\tau$ -rígido y  $J_{n+1} \oplus X$  es  $\tau$ -rígido si, y sólo si,

$$X \in \{J_{n+2}, J_n, P(3), J_{n+2} \oplus P(3), J_n \oplus P(3)\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Por último, veamos que  $\text{ind}(\mathcal{T}_3(A)) := \{P(1), P(2), P(3)\}$ . En efecto, sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $p \in \mathbb{P}^1(k)$ . Consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S(3)^{n+1} \rightarrow P(2)^{n+1} \rightarrow P(1)^{n+2} \rightarrow Q_{n+2} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow S(3)^{n+2} \rightarrow P(2)^{n+2} \rightarrow P(1)^n \rightarrow P_{p,n} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow S(3)^{n+2} \rightarrow P(2)^{n+2} \rightarrow P(1)^{n+1} \rightarrow J_n \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow S(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow S(2)^2 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

- $\text{Hom}_A(Q_{n+2}, \tau_3(Q_{n+2})) = \text{Hom}_A(Q_{n+2}, S(1)^{n+1}) \neq 0$ ,
- $\text{Hom}_A(P_{p,n}, \tau_3(P_{p,n})) = \text{Hom}_A(P_{p,n}, S(1)^{n+2}) \neq 0$ ,
- $\text{Hom}_A(J_n, \tau_3(J_n)) = \text{Hom}_A(J_n, S(1)^{n+2}) \neq 0$ ,
- $\text{Hom}_A(S(2), \tau_3(S(2))) = \text{Hom}_A(S(2), J_2) \neq 0$
- $\text{Hom}_A(S(3), \tau_3(S(3))) = \text{Hom}_A(S(3), S(3)^2) \neq 0$ .

Por lo tanto,  $A$  es el único  $A$ -módulo  $\tau_3$ -inclinante básico.

La siguiente definición está basada en la de álgebra  $\tau$ -rígida finita.

**Definición 3.4.3.** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$ . Decimos que  $\Lambda$  es  $\tau_n$ -**rígida finita** si el conjunto de  $\Lambda$ -módulos  $\tau_n$ -inclinantes básicos es finito.

El ejemplo anterior exhibe una álgebra  $\tau_3$ -rígida finita y no  $\tau$ -rígida finita.

**Definición 3.4.4.** Decimos que un cocomplejo  $M^\bullet$  en  $C(\text{mod}(\Lambda))$  es de  $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ -**términos** si  $M^j = 0 \forall j > 0, j < -n$ . Escribimos,  $M^\bullet := M^{-n} \rightarrow M^{1-n} \rightarrow \dots \rightarrow M^{-1} \rightarrow M^0$ .

**Ejemplo 3.4.5.** Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Entonces,  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es un cocomplejo de  $n + 1$ -términos.

Recordemos que para objetos sedimentados  $T, S \in \mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , denotamos por  $T \leq S$  si  $T \in S^{\perp > 0}$ .

**Lema 3.4.6.** Sea  $P^\bullet \in C(\text{proj}(\Lambda))$ . Entonces,  $P^\bullet$  es isomorfo a un cocomplejo de  $n + 1$ -términos en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  si, y sólo si,  $\Lambda[n] \leq P^\bullet \leq \Lambda[0]$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $Q^\bullet \in C(\text{proj}(\Lambda))$  de  $n+1$ -términos tal que  $P^\bullet \cong Q^\bullet$  en  $\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))$ . Es claro que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(Q^\bullet, \Lambda[n+k]) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\Lambda[0], Q^\bullet[k]) \forall k \in \mathbb{N}^+$ . Por lo que,  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, \Lambda[n+k]) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\Lambda[0], P^\bullet[k]) \forall k \in \mathbb{N}^+$  Así pues,  $\Lambda[n] \leq P^\bullet \leq \Lambda[0]$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que existe  $k > 1$  tal que  $P^{-n-k} \neq 0$  y  $P^{-n-k-j} = 0 \forall j \in \mathbb{N}^+$ . Consideremos la sucesión exacta que se escinde  $0 \rightarrow P^{-n-k} \xrightarrow{i} \Lambda^m \rightarrow Q' \rightarrow 0$  y el siguiente morfismo  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow \Lambda^m[n+k]$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^{-n-k} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-n-k}} & P^{1-n-k} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Lambda^m & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Puesto que  $\Lambda[n] \leq P^\bullet$  se sigue que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, \Lambda^m[n+k]) = 0$ . Entonces, existe  $s : P^{1-n-k} \rightarrow \Lambda^m$  tal que  $i = sd_{P^\bullet}^{-n-k}$ , ya que  $i$  es invertible a izquierda se tiene que  $d_{P^\bullet}^{-n-k}$  es invertible a izquierda. Por el Lema 3.2.16 existe  $Q^\bullet \in \mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $Q^j = 0 \forall j < -n-k+1$ ,  $Q^\bullet \mid P^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $Q^\bullet \cong P^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{mod}(\Lambda))$ . Procediendo recursivamente existe  $Q'^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $Q'^{-n-m} = 0 \forall m \in \mathbb{N}^+$  y  $P^\bullet \cong Q'^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

Por simplicidad, a partir de ahora asumiremos que  $P^{-n-k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}^+$ . Supongamos que existe  $k > 1$  tal que  $P^k \neq 0$  y  $P^{k+j} = 0 \forall j \in \mathbb{N}^+$ . Consideremos la sucesión exacta que se escinde  $0 \rightarrow T' \rightarrow \Lambda^m \xrightarrow{p} P^k \rightarrow 0$  y el siguiente morfismo  $g^\bullet : \Lambda^m[-k] \rightarrow P^\bullet$ , representado mediante el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Lambda^m & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & P^{k-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{k-1}} & P^k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Puesto que  $P^\bullet \leq \Lambda[0]$  se sigue que

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\Lambda^m[-k], P^\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(\Lambda^m[0], P^\bullet[k]) = 0.$$

Entonces, existe  $t : \Lambda^m \rightarrow P^{k-1}$  tal que  $p = d_{P^\bullet}^{k-1}t$ , ya que  $p$  es invertible izquierdo, se tiene que  $d_{P^\bullet}^{k-1}$  invertible izquierdo. Por el Lema 3.2.16 existe  $R^\bullet \in \mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $R^j = 0 \forall j > k-1$ ,  $R^\bullet \mid P^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $R^\bullet \cong P^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{mod}(\Lambda))$ . Procediendo recursivamente existe  $R'^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$  de  $n$ -términos y  $P^\bullet \cong R'^\bullet$  en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .  $\square$

**Corolario 3.4.7.**  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  es una categoría sedimentada-discreta si, y sólo si,  $\forall n \in \mathbb{N}^+$  existe una cantidad finita de isoclases de cocomplejos sedimentados básicos de  $n+1$ -términos.

*Demostración.* Se sigue del Lema 1.6.15 y el Lema 3.4.6.  $\square$

**Definición 3.4.8.** Decimos que  $\Lambda$  es una álgebra es **sedimentada-discreta** si  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  es una categoría sedimentada-discreta.

**Ejemplo 3.4.9.** Si  $\Lambda$  es una álgebra sedimentada-discreta, entonces  $\Lambda$  es  $\tau_n$ -rígida  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ .

El último resultado de esta sección demuestra que la clase de álgebra sedimentadas-discretas satisface la conjetura Gorenstein.

**Corolario 3.4.10.** *Sea  $\Lambda$  un álgebra sedimentada-discreta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

- (a) *Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$   $\tau_n$ -rígido tal que  $\text{rk}(M) = \text{rk}(\Lambda)$ . Entonces,  $M$  es  $\tau_n$ -inclinante.*
- (b) *Sea  $T \in \text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\text{pd}(T) \leq n$ ,  $T \in T^\perp$  y  $\text{rk}(T) = \text{rk}(\Lambda)$ . Entonces,  $T$  es  $n$ -inclinante.*
- (c) *Si  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ , entonces  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ .*

*Demostración.* (a) Por el Teorema 3.1.6 se tiene que  $P_{\geq -n}^\bullet(M) \in \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  es presedimentado. Por el Teorema 1.6.16 existe  $P^\bullet \in \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $P^\bullet \oplus P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado; por el Lema 3.2.8, el Lema 1.6.7 y ya que  $\text{rk}(M) = \text{rk}(\Lambda)$  se tiene que

$$\text{add}(P^\bullet) \subseteq \text{add}(P_{\geq -n}^\bullet(M)).$$

Por lo tanto,  $P_{\geq -n}^\bullet(M)$  es sedimentado en  $\mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

(b) Por el Corolario 3.1.9 se tiene que  $T$  es  $\tau_n$ -rígido. Dado que  $\text{rk}(T) = \text{rk}(\Lambda)$ , por (a) se sigue que  $T$  es  $\tau_n$ -inclinante. Luego, ya que  $\text{pd}(T) \leq n$  se obtiene la siguiente igualdad  $P_{\geq -n}^\bullet(T) = P^\bullet(T)$ . Por último, del Lema 1.6.3 se concluye que  $T$  es  $n$ -inclinante.

(c) Ya que  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ , se tiene que  $\text{pd}(D_\Lambda(\Lambda)_\Lambda) \leq n$ . Puesto que  $D_\Lambda(\Lambda)_\Lambda \in D_\Lambda(\Lambda)_\Lambda^\perp$  y  $\text{rk}(D_\Lambda(\Lambda)_\Lambda) = \text{rk}(\Lambda^{op})$ , por (b) se sigue que  $D_\Lambda(\Lambda)_\Lambda$  es  $n$ -inclinante en  $\text{mod}(\Lambda^{op})$ . Por lo que existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow \Lambda^{op} \rightarrow I^0 \rightarrow \dots \rightarrow I^n \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda^{op})$ , donde  $\{I^j\}_{j=0}^n \subseteq \text{inj}(\Lambda^{op})$ . Por lo tanto,  $\text{id}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ .  $\square$

### 3.5. $n$ -tuplas presedimentadas

El objetivo principal de esta sección es introducir las  $n$ -tuplas presedimentadas (sedimentadas). Se verá la relación que tiene con los sistemas estratificantes y en especial cuando  $\Lambda$  es un álgebra estandarmente estratificada.

**Definición 3.5.1.** *Decimos que  $(M_1, \dots, M_n) \in (\text{mod}(\Lambda))^{n-1} \times (\text{proj}(\Lambda))$  es una  **$n$ -tupla presedimentada (sedimentada)** si  $\bigoplus_{i=1}^{n-1} P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[i-1] \oplus M_n[n-1] \in \mathbf{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  es presedimentado (sedimentado).*

Los siguientes resultados muestran que la definición anterior generaliza dos conceptos importantes en la teoría de representaciones de álgebras.

**Observación 3.5.2.** *Sea  $(M_1, \dots, M_n) \in (\text{mod}(\Lambda))^{n-1} \times (\text{proj}(\Lambda))$  una  $n$ -tupla presedimentada, entonces  $(M_{n-1}, M_n)$  es un par  $\tau$ -rígido. Ver [AIR14, Teorema 3.2].*

**Lema 3.5.3.** *Sea  $(M_1, \dots, M_n) \in \text{ind}(\text{mod}(\Lambda))^{n-1} \times \text{ind}(\text{proj}(\Lambda))$  una  $n$ -tupla presedimentada. Entonces,  $(M_1, \dots, M_n)$  es un sistema estratificante.*

*Demostración.* Sean  $i, j \in [1, n]$ , con  $i < j$  y  $f : M_j \rightarrow M_i$ . Por el Lema 1.3.17 existe un morfismo  $f^\bullet : P^\bullet(M_j) \rightarrow P^\bullet(M_i)$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Dado que  $n - j < n - i$ ,  $f^\bullet$  se restringe a un morfismo  $f'^\bullet : P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j) \rightarrow P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Puesto que

$$P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j)[j-1] \oplus P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[i-1]$$

es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$ , se sigue que

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j)[j-1], P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[i-1+j-i]) = 0$$

y con ello  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j), P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)) = 0$ . Así, existe  $s : P^0(M_j) \rightarrow P^{-1}(M_i)$  tal que  $\pi_{M_i}^{-1}s = f^0$ . Por lo que  $f\pi_{M_j}^0 = \pi_{M_i}^0 f^0 = \pi_{M_i}^0 \pi_{M_i}^{-1}s = 0$ . Dado que  $\pi_{M_j}^0$  es un epimorfismo concluimos que  $f = 0$ .

Se nota que  $\text{Ext}_\Lambda^1(M_n, M_j) = 0 \forall j \in [1, n]$ , ya que  $M_n$  es proyectivo.

Luego, sean  $i, j \in [1, n]$ , con  $i \leq j$  y  $f^\bullet : P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j) \rightarrow P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_i)[1]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Dado que  $n - j < n - i$ ,  $f^\bullet$  se extiende a un morfismo  $f'^\bullet : P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j) \rightarrow P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[1]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Puesto que  $P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j)[j-1] \oplus P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[i-1]$  es presedimentado en  $\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))$  se tiene que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j)[j-1], P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[i-1+j+1-i]) = 0$ . Por lo que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -(n-j)}^\bullet(M_j), P_{\geq -(n-i)}^\bullet(M_i)[1]) = 0$  y en consecuencia  $\pi(f'^\bullet) = 0$  lo que implica que  $\pi(f^\bullet) = 0$ .

Caso 1.  $n - j = 1$ . Por el Lema 1.8.5 se tiene que  $\text{Hom}_\Lambda(M_i, \tau M_j) = 0$  y del Lema 1.8.1 se sigue que  $\text{Ext}_\Lambda^1(M_j, M_i) = 0$ .

Caso 2.  $n - j > 1$ . Por la Proposición 3.1.4 (b) se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^1(M_j, M_i) = 0$ .

Por lo tanto,  $(M_1, \dots, M_n)$  es un sistema estratificante.  $\square$

El siguiente es un sistema estratificante que no es una  $n$ -tupla presedimentada.

**Ejemplo 3.5.4.** Sean  $k$  un campo,  $Q := \bullet^3 \xrightarrow{\alpha} \bullet^1 \xleftarrow{\beta} \bullet^2 \xleftarrow{\gamma} \bullet^4$  y  $A := kQ/R^2$ . Por [MMS04, Observación 2.7] se tiene que  $(S(1), P(2), P(3), P(4), S(4))$  es un sistema estratificante. Mientras que no es una 5-tupla presedimentada, ya que

$$0 \neq \text{Hom}_\Lambda(P(3), \tau_2(S(4))) = \text{Hom}_\Lambda(P(3), P(3))$$

y por el Teorema 3.1.6 se tiene que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\text{proj}(\Lambda))}(P_{\geq -4}^\bullet(S(4)), P(3)[2]) \neq 0$ . Por lo tanto,  $(S(1), P(2), P(3), P(4), S(4))$  no es una 5-tupla presedimentada.

Los siguientes resultados se enfocan a demostrar que los módulos estándar forman una  $n$ -tupla sedimentada, en álgebras estandarmente estratificadas.

**Lema 3.5.5.** Sean  $\Lambda$  una álgebra estandarmente estratificada y  $n := \text{rk}(\Lambda)$ . Entonces

$$\text{pd}(\Delta(i)) \leq n - i \quad \forall i \in [1, n].$$

*Demostración.* Dado que  $\Delta(n) = P(n)$  se tiene  $\text{pd}(\Delta(n)) = 0$ .

Supongamos que la afirmación se cumple para  $m + 1$ . Veamos que se cumple para  $m$ . Dado que  $(\Delta, P)$  es un sistema estratificante Ext-proyectivo existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K(m) \rightarrow P(m) \rightarrow \Delta(m) \rightarrow 0$$

en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde  $K(m) \in \mathcal{F} := \mathcal{F}(\{\Delta(j) \mid j > m\})$ .

Aseguramos que  $\text{pd}(K(m)) \leq n - m - 1$ . Veamos por inducción sobre  $\ell_{\mathcal{F}}(K(m)) = k$ .

Para  $k = 1$ . Se tiene que  $K(m) \cong \Delta(m + j)$  para algún  $j \in \mathbb{N}^+$ . Por hipótesis se tienen la siguiente desigualdad  $\text{pd}(\Delta(m + j)) \leq n - m - j \leq n - m - 1$ .

Supongamos que que la afirmación se cumple para  $k$ . Veamos que se cumple para  $k + 1$ . Puesto que  $\ell_{\mathcal{F}}(K(m)) = k + 1$ , existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow X \rightarrow K(m) \rightarrow \Delta(m + i)$  en  $\text{mod}(\Lambda)$  para algún  $i \in \mathbb{N}^+$ . Por hipótesis se tiene la siguiente desigualdad

$$\text{pd}(K(m)) \leq \max\{\text{pd}(X), \Delta(m + i)\} = \max\{n - m - 1, n - m - i\} \leq n - m - 1.$$

Por lo tanto,  $\text{pd}(\Delta(m)) \leq \max\{0, n - m - 1 + 1\} \leq n - m$ .  $\square$

**Lema 3.5.6.** Sean  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$  e  $i \in \mathbb{N}^+$ . Si  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{\perp i}$ , entonces  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{X})^{\perp i}$ .

*Demostración.* Sea  $Z \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ . Veamos que el resultado se cumple por inducción sobre  $\ell_{\mathcal{F}(\mathcal{X})}(Z) := n$ .

Para  $n = 1$ . Se sigue por hipótesis.

Para  $n + 1$ . Sea  $0 \rightarrow W \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde  $X \in \mathcal{X}$  y  $\ell_{\mathcal{F}(\mathcal{X})}(W) = n$ . Por hipótesis de inducción, aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\Lambda}(-, Y)$ , con  $Y \in \mathcal{Y}$ , se tiene la siguiente sucesión exacta  $0 = \text{Ext}_{\Lambda}^i(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^i(Z, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^i(W, Y) = 0$ . Por lo tanto,  $\text{Ext}_{\Lambda}^i(Z, Y) = 0$ .  $\square$

**Lema 3.5.7.** Sea  $\mathcal{X} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ . Si  $M \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ , entonces  $\mathbf{P}^{\bullet}(M) \in \text{thick}(\mathbf{P}^{\bullet}(\mathcal{X}))$ .

*Demostración.* Veamos que la afirmación se cumple por inducción sobre  $n := \ell_{\mathcal{F}(\mathcal{X})}(M)$ .

Para  $n = 1$ . Es claro.

Para  $n + 1$ . Sea  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ , con  $X \in \mathcal{X}$  y  $n = \ell_{\mathcal{F}(\mathcal{X})}(N)$ . Por el Lema 1.3.20 se tiene el siguiente

$$\mathbf{P}^{\bullet}(N) \rightarrow \mathbf{P}^{\bullet}(M) \rightarrow \mathbf{P}^{\bullet}(X) \rightarrow \mathbf{P}^{\bullet}(N)[1] \in \Delta$$

en  $\mathbf{K}(\text{proj}(\Lambda))$ . Por hipótesis de inducción se deduce que  $\mathbf{P}^{\bullet}(N) \in \text{thick}(\mathbf{P}^{\bullet}(\mathcal{X}))$  y por lo tanto  $\mathbf{P}^{\bullet}(M) \in \text{thick}(\mathbf{P}^{\bullet}(\mathcal{X}))$ .  $\square$

**Teorema 3.5.8.** Sea  $\Lambda$  una álgebra estandarmente estratificada. Entonces  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es una  $n$ -tupla sedimentada.

*Demostración.* Veamos que  $(\Delta(m), \dots, \Delta(n))$  es una  $n - m + 1$ -tupla presedimentada  $\forall m \in [1, n]$ .

Para  $m = n$ . Es claro, ya que  $\Delta(n)$  es un  $\Lambda$ -módulo proyectivo.

Afirmamos que si la afirmación se cumple para  $m + 1$ , se cumple también para  $m$ . Dado que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante se tiene que

$$\text{Hom}_\Lambda(\Delta(n), \Delta(m)) = 0.$$

Ahora, aseguramos que  $\Delta(m) \in \Delta(j)^{\perp_{\tau_{n-j}}} \cap \Delta(j)^{\perp_0} \forall j \in (m, n - 1]$ .

Para  $j = n - 1$ . Dado que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante se tiene que  $\Delta(m) \in \Delta(n - 1)^{\perp_0}$ . Sea  $0 \rightarrow Y \rightarrow \Delta(m)^r \rightarrow X \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(\Delta(n - 1), -)$  a la sucesión exacta anterior se tiene la siguiente sucesión exacta, del hecho de que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante y por el Lema 3.5.5 se tiene que  $\text{pd}(\Delta(n - 1)) \leq 1$ ,  $0 = \text{Ext}_\Lambda^1(\Delta(n - 1), \Delta(m)^r) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(\Delta(n - 1), X) \rightarrow 0$ . Por el Lema 1.8.1 se sigue que  $\Delta(m) \in {}^{\perp_0}\tau\Delta(n - 1)$ . Así pues,

$$\Delta(m) \in \Delta(n - 1)^{\perp_{\tau_1}} \cap \Delta(n - 1)^{\perp_0}.$$

Supongamos que es válido para  $j + 1$ . Dado que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante  $\text{Ext}$ -proyectivo existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow K(j) \rightarrow P(j) \rightarrow \Delta(j) \rightarrow 0$ , en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde  $K(j) \in \mathcal{F}(\{\Delta(l) \mid l > j\})$  y  $P(j) \in \text{ind}(\text{proj}(\Lambda))$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, \Delta(m))$  a la sucesión exacta anterior se tienen la siguientes sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^k(K(j), \Delta(m)) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Delta(j), \Delta(m)) \rightarrow 0 \quad \forall k \in [1, n - j - 1].$$

Por hipótesis se tiene que  $\Delta(m) \in \Delta(j + 1)^{\perp_{\tau_{n-j-1}}}$  y por el Lema 3.5.6 se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Delta(j), \Delta(m)) \cong \text{Ext}_\Lambda^k(K(j), \Delta(m)) = 0 \forall k \in [1, n - j - 1]$ . Sea

$$0 \rightarrow Y \rightarrow \Delta(m)^r \rightarrow X \rightarrow 0$$

una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(\Delta(j), -)$  a la sucesión exacta anterior se tiene la siguiente sucesión exacta, ya que por el Lema 3.5.5 se tiene

$$\text{pd}(\Delta(j)) \leq n - j,$$

$0 = \text{Ext}_\Lambda^{n-j}(\Delta(j), \Delta(m)^r) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n-j}(\Delta(j), X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n-j+1}(\Delta(j), Y) = 0$ . Por el Lema 1.8.1 se tiene que  $\Delta(m) \in {}^{\perp_0}\tau_{n-j}\Delta(j)$ . Dado que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^1(\Delta(j), \Delta(m)) = 0 = \text{Hom}_\Lambda(-, \Delta(m))$ . Por lo que  $\Delta(m) \in \Delta(j)^{\perp_{\tau_{n-j}}} \cap \Delta(j)^{\perp_0}$ .

Luego, veamos que  $\Delta(j) \in \Delta(m)^{\perp_{\tau_{n-m}}} \forall j \in [m, n]$ . Sean  $j \in [m, n]$  y  $k \in [j, n - m - 1]$ . Dado que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante  $\text{Ext}$ -proyectivo existe una sucesión exacta  $0 \rightarrow K(m) \rightarrow P(m) \rightarrow \Delta(m) \rightarrow 0$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ , donde

$$K(m) \in \mathcal{F} := \mathcal{F}(\{\Delta(l) \mid l > m\})$$

y  $P(m) \in \text{ind}(\text{proj}(\Lambda))$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(-, \Delta(j))$  a la sucesión exacta anterior tenemos la siguiente sucesión exacta  $0 \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{k-1}(K(m), \Delta(j)) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^k(\Delta(m), \Delta(j)) \rightarrow 0$ . Dado que  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es un sistema estratificante se sigue del Lema 3.5.6 se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^k(\Delta(m), \Delta(j)) \cong \text{Ext}_\Lambda^{k-1}(K(m), \Delta(j)) = 0$ . Sea  $0 \rightarrow Y \rightarrow \Delta(j)^r \rightarrow X \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_\Lambda(\Delta(m), -)$  a la sucesión exacta anterior se

tiene la siguiente sucesión exacta, ya que por el Lema 3.5.5 se tiene que  $\text{pd}(\Delta(m)) \leq n - m$ ,  $0 = \text{Ext}_\Lambda^{n-m}(\Delta(m), \Delta(j)^r) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n-m+1}(\Delta(m), X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n-m}(\Delta(m), X) = 0$ . Por lo que  $\Delta(j) \in {}^{\perp_0}\tau_n \Delta(m)$  y así  $\Delta(j) \in \Delta(m)^{\perp_{\tau_n-m}}$ .

Por el Teorema 3.1.6 se tiene que  $(\Delta(m), \dots, \Delta(n))$  es una  $n - m + 1$ -tupla presedimentada.

Dado que  $\Lambda$  es estandarmente estratificada se tiene que  $\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$  y por el Lema 3.5.5 se sigue que  $\Lambda[0] \in \text{thick}(\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{P}^\bullet(\Delta(i)))$ . Dado que  $\text{pd}(\Delta(i)) \leq n - i \forall i \in [1, n]$  se sigue que  $\mathbf{P}^\bullet(\Delta(i)) = \mathbf{P}_{\geq i-n}^\bullet(\Delta(i)) \forall i \in [1, n - 1]$  se concluye que

$$\Lambda[0] \in \text{thick}(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_{\geq i-n}^\bullet(\Delta(i))[i - 1] \oplus M_n[n - 1]).$$

Por lo tanto,  $(\Delta(1), \dots, \Delta(n))$  es una  $n$ -tupla sedimentada.  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis que el álgebra sea estandarmente estratificada es necesaria.

**Ejemplo 3.5.9.** Sean  $k$  un campo,

$$Q := \begin{array}{ccc} & \bullet^1 & \\ \gamma \nearrow & & \searrow \alpha \\ \bullet^2 & & \bullet^3 \\ & \longleftarrow \beta & \end{array} \quad \text{y } A := kQ/R^3.$$

Veamos que  $(\Delta(1), \Delta(2), \Delta(3))$  no es una 3-tupla presedimentada. Afirmamos que

$$\text{Ext}_\Lambda^2(\Delta(1), \Delta(2)) \neq 0.$$

En efecto, consideremos la siguiente sucesión exacta que no es escinde

$$0 \rightarrow \Delta(2) \rightarrow \mathbf{P}(3) \rightarrow M \rightarrow \Delta(1) \rightarrow 0,$$

donde  $M := \mathbf{P}(1)/\mathbf{S}(2)$ . Por lo cual, se tiene que  $\text{Ext}_\Lambda^2(\Delta(1), \Delta(2)) \neq 0$  y por el Teorema 3.1.6 se tiene que  $(\Delta(1), \Delta(2), \Delta(3))$  no es una 3-tupla presedimentada.

El siguiente ejemplo muestra que las  $n$ -tuplas sedimentadas no son una categorificación de los conglomerados de acuerdo a [Th06] a diferencia a los pares  $\tau$ -inclinantes de soporte como lo muestran en [AIR14].

**Ejemplo 3.5.10.** Sean  $k$  un campo,  $Q := \bullet^1 \xrightarrow{\alpha} \bullet^2 \xrightarrow{\beta} \bullet^3$  y  $A := kQ/R^2$ .

- Por [AIR14, Ejemplo 6.4] se tiene que  $(M := \mathbf{P}(2) \oplus \mathbf{S}(1), 0, 0)$  es un 3-tupla presedimentada. Por otro lado, ya que  ${}^{\perp_0}M = \text{add}(\mathbf{S}(2))$ , se tiene que  $(M \oplus L, N, P)$  es una 3-tupla sedimentada si, y sólo si,  $(M \oplus L, N, P) \in \{(M \oplus \mathbf{P}(1), 0, 0), (M, \mathbf{S}(2), 0)\}$ .
- Por [AIR14, Ejemplo 6.4] y la Observación 3.5.2 se tiene que  $(0, \mathbf{S}(2), \mathbf{P}(1))$  es una 3-tupla presedimentada. Por [AIR14, Ejemplo 6.4] y la Observación 3.5.2

$$(0, \mathbf{S}(2) \oplus X, \mathbf{P}(1) \oplus Y)$$

es un 3-tupla sedimentada si, y sólo si,

$$(X, Y) \in \{(P(2), 0), (0, P(3))\}.$$

Luego,  $(Z, S(2), P(1))$  es un 3-tupla sedimentada si, y sólo si,  $Z \in \text{add}(P(2))$ , ya que  $P(2)$  es  $\tau_2$ -rígido,  $P(2) \in (S(2) \oplus P(1))^{\perp_0} \cap {}^{\perp_0}\tau(S(2))$  y  $S(2) \in {}^{\perp_0}\tau_2(P(2)) = \text{mod}(A)$ .

El anterior ejemplo nos muestra que  $P^\bullet := P_{\geq -2}^\bullet(S(1)) \oplus P(3)[2] \in K^b(\text{proj}(\Lambda))$  es presedimentado,  $\text{rk}(P^\bullet) = 2$  y  $\{P^\bullet \oplus P(2)[2], P^\bullet \oplus P(2)[1], P^\bullet \oplus (P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow 0)\}$  son sedimentados. Este cocomplejo casi completo sedimentado de 3 términos tienen 3 complementos a diferencia de los cocomplejos casi completos de 2 términos.

El siguiente ejemplo muestra como no hay una biyección entre  $n$ -tuplas sedimentadas y cocomplejos sedimentados de  $n$ -términos, con  $n > 2$ . A diferencia de la caracterización de los cocomplejos sedimentados de 2-términos por [AIR14].

**Ejemplo 3.5.11.** Sean  $k$  un campo,  $Q := \bullet^1 \xrightarrow{\alpha} \bullet^2 \xrightarrow{\beta} \bullet^3 \xrightarrow{\gamma} \bullet^4$  y  $A := kQ/\langle \beta\alpha \rangle$ .

Consideremos el siguiente cocomplejo presedimentado  $P^\bullet := (P(2) \oplus P(3) \oplus P(4))[2] \oplus Q^\bullet$  en  $K^b(\text{proj}(A))$ , donde  $Q^\bullet := P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1)$ . Se considera el siguiente morfismo

$$\begin{array}{cccccccccccc} f^\bullet : \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P(1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P(4) & \longrightarrow & P(2) & \longrightarrow & P(1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

en  $K^b(\text{proj}(A))$ . Se considera el cono de  $f^\bullet$  y se obtiene el siguiente

$$P(1)[0] \xrightarrow{\pi(f^\bullet)} Q^\bullet \rightarrow P_{\geq -2}^\bullet(P(2)/P(4))[1] \rightarrow P(1)[1] \in \Delta$$

en  $K^b(\text{proj}(A))$ . Dado que  $H^0(P^\bullet) = S(1)$ ,  $H^{-1}(P^\bullet) = S(3)$  y  $H^{-2}(P^\bullet) = P(2) \oplus P(3) \oplus P(4)$ . La única 3-tupla que tiene la misma cohomología es  $(S(1), S(3), P(2) \oplus P(3) \oplus P(4))$  la cual no es presedimentada, ya que  $\text{Hom}_A(P(3), S(3)) \neq 0$ .

## 3.6. Cocomplejos presedimentados de $n$ -términos

El objetivo principal de esta sección es dar condiciones suficientes y necesarias en la categoría de módulos finitamente generados, para que un cocomplejo sea presedimentado en la categoría homotópica de módulos proyectivos finitamente generados.

**Notación 3.6.1.** Sean  $M^\bullet, N^\bullet \in C(\text{mod}(\Lambda))$ ,  $P^\bullet \in C(\text{proj}(\Lambda))$  y  $m \in \mathbb{Z}$ .

(a) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto, formado a partir de las inclusiones canónicas,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^{m+1}(M^\bullet) & \longrightarrow & M^{m+1} & \longrightarrow & \text{Coker}(d_{M^\bullet}^m) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \epsilon_{M^\bullet}^{m+1} \\ 0 & \longrightarrow & Z^{m+1}(M^\bullet) & \longrightarrow & M^{m+1} & \longrightarrow & B^{m+2}(M^\bullet) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por el Lema de la serpiente existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^{m+1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta_{M^\bullet}^{m+1}} \text{Coker}(d_{M^\bullet}^m) \xrightarrow{\epsilon_{M^\bullet}^{m+1}} B^{m+2}(M^\bullet) \rightarrow 0.$$

- (b) Sea  $f : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \rightarrow H^m(N^\bullet)$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$ . La familia de morfismos  $\pi_{(P_{\geq m-1}^\bullet, N^\bullet)}^m(f) \subseteq \text{Hom}_{\text{C}(\text{mod}(\Lambda))}(P_{\geq m-1}^\bullet, N^\bullet)$

$$\begin{array}{ccccccc} P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^m} & P^{m+1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m+1}} & P^{m+2} \rightarrow \dots \\ f^{m-1} \downarrow & & \downarrow f^m & & 0 \downarrow & & 0 \downarrow \\ N^{m-1} & \xrightarrow{d_{N^\bullet}^{m-1}} & N^m & \xrightarrow{d_{N^\bullet}^m} & N^{m+1} & \xrightarrow{d_{N^\bullet}^{m+1}} & N^{m+2} \rightarrow \dots \end{array}$$

son aquellos que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m & \xrightarrow{p} & \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) & \longrightarrow & 0 \\ f^{m-1} \downarrow & & \downarrow g^m & & f \downarrow & & \\ N^{m-1} & \xrightarrow{\beta_{N^\bullet}^m \alpha_{N^\bullet}^{m-1}} & Z^m(N^\bullet) & \xrightarrow{q} & H^m(N^\bullet) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde  $f^m = \gamma_{N^\bullet}^m g^m$  y  $q : Z^m(N^\bullet) \rightarrow H^m(N^\bullet)$  es la proyección canónica.

- (c) Sea  $f^\bullet : P_{\geq m+1}^\bullet \rightarrow N^\bullet$  en  $\text{C}(\text{mod}(\Lambda))$ . Existe un único morfismo  $f : P^m \rightarrow Z^{m+1}(N^\bullet)$  tal que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} P^m & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^m} & P^{m+1} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{m+1} \\ Z^{m+1}(N^\bullet) & \xrightarrow{\gamma_{N^\bullet}^{m+1}} & N^{m+1}. \end{array}$$

Consideremos la proyección canónica  $p : Z^{m+1}(N^\bullet) \rightarrow H^{m+1}(N^\bullet)$ , a partir de ella se construye la asignación  $\gamma_m(f^\bullet) := pf : M^m \rightarrow H^{m+1}(N^\bullet)$ .

- (d) Sean  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  morfismos en  $\text{mod}(\Lambda)$ . La aplicación

$$\text{Hom}_\Lambda(f, g) : \text{Hom}_\Lambda(N', M) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(N, M')$$

$$h \mapsto fhg.$$

**Lema 3.6.2.** Sean  $P^\bullet \in \text{C}(\text{proj}(\Lambda))$ ,  $M^\bullet \in \text{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y  $f : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \rightarrow H^m(M^\bullet)$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Entonces  $\forall f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq m-1}^\bullet, M^\bullet)}^m(f)$

$$\begin{array}{ccccc} P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^m} & P^{m+1} \\ f^{m-1} \downarrow & & \downarrow f^m & & \downarrow 0 \\ M^{m-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-1}} & M^m & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^m} & M^{m+1} \end{array}$$

existen morfismos  $s^{m+1} : P^{m+1} \rightarrow M^m$  y  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  tales que  $f^m = s^{m+1}d_{P^\bullet}^m + d_{M^\bullet}^{m-1}s^m$  si, y sólo si,  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m))$ , donde

$$\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m) : \text{Hom}_\Lambda(P^{m+1}, \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{m-1})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}), \text{H}^m(M^\bullet)).$$

*Demostración.* Sean  $p' : M^m \rightarrow \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{m-1})$ ,  $q : P^m \rightarrow \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1})$  las proyecciones naturales y  $0 \rightarrow B^m(M^\bullet) \rightarrow Z^m(M^\bullet) \xrightarrow{p} H^m(M^\bullet) \rightarrow 0$  la sucesión exacta de cohomología.

( $\Rightarrow$ ) Dado que  $P^{m-1}$ ,  $P^m$  son  $\Lambda$ -módulos proyectivos, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\text{mod}(\Lambda)$

$$\begin{array}{ccccccc} P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m & \xrightarrow{q} & \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) & \longrightarrow & 0 \\ f^{m-1} \downarrow & & \downarrow g^m & & \downarrow f & & \\ M^{m-1} & \xrightarrow{\beta_{M^\bullet}^m \alpha_{M^\bullet}^{m-1}} & Z^m(M^\bullet) & \xrightarrow{p} & H^m(M^\bullet) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Consideremos el siguiente morfismo  $f^\bullet : P_{\geq m-1}^\bullet \rightarrow M^\bullet$  dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^m} & P^{m+1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m+1}} & P^{m+2} \longrightarrow \dots \\ f^{m-1} \downarrow & & \downarrow \gamma_{M^\bullet}^m \cdot g^m & & 0 \downarrow & & 0 \downarrow \\ M^{m-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-1}} & M^m & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^m} & M^{m+1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m+1}} & M^{m+2} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Por hipótesis existen morfismos de  $\Lambda$ -módulos  $s^{m+1} : P^{m+1} \rightarrow M^m$  y  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  tales que  $\gamma_{M^\bullet}^m \cdot g^m = s^{m+1}d_{P^\bullet}^m + d_{M^\bullet}^{m-1}s^m$ , con lo cual,  $p's^{m+1}d_{P^\bullet}^m = p'\gamma_{M^\bullet}^m \cdot g^m = \delta_{M^\bullet}^m \cdot f \cdot q$ . Considerando  $P^m \xrightarrow{q} \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \xrightarrow{\epsilon_{P^\bullet}^m} B^{m+1}(P^\bullet) \xrightarrow{\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}} P^{m+1}$  una factorización de  $d_{P^\bullet}^m$ , se sigue la siguiente igualdad  $p's^{m+1}\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m = \delta_{M^\bullet}^m \cdot f$ . Así,  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m))$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq m-1}^\bullet, M^\bullet)}^m(f)$ . Por la propiedad universal del cokernel y el kernel se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m & \xrightarrow{q} & \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \\ f^{m-1} \downarrow & & \downarrow f^m & & \downarrow \exists g \\ M^{m-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-1}} & M^m & \xrightarrow{p'} & \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{m-1}), \end{array}$$

de lo anterior y como  $M^m \xrightarrow{\epsilon_{M^\bullet}^m \cdot p'} B^{m+1}(M^\bullet) \xrightarrow{\gamma_{M^\bullet}^{m+1}\beta_{M^\bullet}^{m+1}} M^{m+1}$  es una factorización de  $d_{M^\bullet}^m$ , a través de su imagen se obtienen las siguientes igualdades  $\epsilon_{M^\bullet}^m \cdot g \cdot q = \epsilon_{M^\bullet}^m \cdot p' \cdot f^m = 0$ , así,  $\epsilon_{M^\bullet}^m \cdot g = 0$ . Por la propiedad universal del kernel existe  $k : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \rightarrow H^m(M^\bullet)$  tal que  $\delta_{M^\bullet}^m \cdot k = g$ . Por hipótesis existe  $s : P^{m+1} \rightarrow \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{m-1})$  tal que

$$s\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m = \delta_{M^\bullet}^m \cdot k = g.$$

Dado que  $P^{m+1}$  es proyectivo existe  $s^{m+1} : P^{m+1} \rightarrow M^m$  que satisface  $p's^{m+1} = s$ . Consideremos las siguientes igualdades  $p's^{m+1}d_{P^\bullet}^m = s\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m q = gq = p'f^m$ . Sea

$$M^{m-1} \xrightarrow{\alpha_{M^\bullet}^{m-1}} B^m(M^\bullet) \xrightarrow{\gamma_{M^\bullet}^m \beta_{M^\bullet}^m} P^m$$

la factorización de  $d_{P^\bullet}^{m-1}$  a través de su imagen. Por la propiedad universal del kernel existe  $r : P^m \rightarrow B^m(M^\bullet)$  tal que

$$\gamma_{M^\bullet}^m \beta_{M^\bullet}^m r = f^m - s^{m+1}d_{P^\bullet}^m.$$

y como  $P^m$  es proyectivo existe un morfismo  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  tal que  $\alpha_{M^\bullet}^{m-1}s^m = r$ . Por lo tanto  $d_{M^\bullet}^{m-1}s^m = \gamma_{M^\bullet}^m \beta_{M^\bullet}^m r = f^m - s^{m+1}d_{P^\bullet}^m$ .  $\square$

**Corolario 3.6.3.** Sean  $P^\bullet \in C^{\geq m}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $M^\bullet \in C^{\leq n}(\text{mod}(\Lambda))$ . Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) Para todo morfismo  $f^\bullet : P_{\geq n-1}^\bullet \rightarrow M^\bullet$

$$\begin{array}{ccccc} P^{n-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{n-1}} & P^n & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^n} & P^{n+1} \\ f^{n-1} \downarrow & & \downarrow f^n & & \\ M^{n-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{n-1}} & M^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existen morfismos de  $\Lambda$ -módulos  $s^{n+1} : P^{n+1} \rightarrow M^n$  y  $s^n : P^n \rightarrow M^{n-1}$  tales que  $f^n = s^{n+1}d_{P^\bullet}^n + d_{M^\bullet}^{n-1}s^n$  si, y sólo si, el morfismo

$$\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{n+1}\beta_{P^\bullet}^{n+1}\epsilon_{P^\bullet}^n, \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1})) : \text{Hom}_\Lambda(P^{n+1}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{n-1})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{n-1}), \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1}))$$

es un epimorfismo;

(b) todo morfismo  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  tal que  $f^{m+t} = 0 \forall t \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P^m & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^m} & P^{m+1} \\ & & f^m \downarrow & & \downarrow 0 \\ M^{m-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-1}} & M^m & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^m} & M^{m+1} \end{array}$$

$\pi(f^\bullet) = 0$  si, y sólo si, el morfismo

$$\text{Hom}_\Lambda(d_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m) : \text{Hom}_\Lambda(P^{m+1}, \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{m-1})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P^m, H^m(M^\bullet))$$

es un epimorfismo.

*Demostración.* (a) ( $\Rightarrow$ ) Sea  $f : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \rightarrow \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{m-1})$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$ . Dado que  $P^{n-1}$  y  $P^n$  son  $\Lambda$ -módulos proyectivos se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} P^{n-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{n-1}} & P^n & \longrightarrow & \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ f^{n-1} \downarrow & & \downarrow f^n & & \downarrow f & & \\ M^{n-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{n-1}} & M^n & \longrightarrow & \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

El diagrama anterior, induce un morfismo  $f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq n-1}, M^\bullet)}^n(f)$ . Por hipótesis y el Lema 3.6.2 se concluye que  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{n+1} \beta_{P^\bullet}^{n+1} \epsilon_{P^\bullet}^n, \delta_{M^\bullet}^n))$ , ya que  $\text{H}^n(M^\bullet) = \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1})$  implica que  $\text{H}^n(M^\bullet) \xrightarrow{\delta_{M^\bullet}^n} \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1}) = 1_{\text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1})}$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $f^\bullet : P_{\geq n-1}^\bullet \rightarrow M^\bullet$ . Por la propiedad universal del cokernel se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} P^{n-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{n-1}} & P^n & \longrightarrow & \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ f^{n-1} \downarrow & & \downarrow f^n & & \downarrow \exists! g & & \\ M^{n-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{n-1}} & M^n & \longrightarrow & \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Puesto que  $\text{H}^n(M^\bullet) = \text{Coker}(d_{M^\bullet}^{n-1})$  se tiene que  $f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq n-1}, M^\bullet)}^n(g)$ . Por hipótesis sucede que  $g \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{n+1} \beta_{P^\bullet}^{n+1} \epsilon_{P^\bullet}^n, \delta_{M^\bullet}^n))$  y por el Lema 3.6.2 existen morfismos de  $\Lambda$ -módulos  $s^{n+1} : P^{n+1} \rightarrow M^n$  y  $s^n : P^n \rightarrow M^{n-1}$  tales que  $f^n = s^{n+1} d_{P^\bullet}^n + d_{M^\bullet}^{n-1} s^n$ .

(b) ( $\Rightarrow$ ) Sean  $f : P^m \rightarrow \text{H}^m(M^\bullet)$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $q : \text{Z}^m(M^\bullet) \rightarrow \text{H}^m(M^\bullet)$  la proyección canónica. Dado que  $P^m$  es proyectivo existe  $f' : P^m \rightarrow \text{Z}^m(M^\bullet)$  tal que  $qf' = f$ . Consideremos el morfismo  $f^\bullet : P^\bullet = P_{\geq m-1}^\bullet \rightarrow M^\bullet$  dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P^m & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^m} & P^{m+1} \\ & & \downarrow \gamma_{M^\bullet}^m f' & & \downarrow 0 \\ M^{m-1} & \longrightarrow & M^m & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^m} & M^{m+1}. \end{array}$$

Notemos que  $f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq m-1}, M^\bullet)}^m(f)$ . Dado que  $\pi(f^\bullet) = 0$ , se sigue del Lema 3.6.2 que

$$f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{m+1} \beta_{P^\bullet}^{m+1} \epsilon_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m)),$$

ya que  $\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) = P^m$ , se tiene que  $\epsilon_{P^\bullet}^m = \alpha_{P^\bullet}^m$ , y se deduce que  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(d_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m))$ .

( $\Leftarrow$ ) Sean  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  tal que  $f^{m+t} = 0 \forall t \in \mathbb{N}^+$  y  $q : \text{Z}^m(M^\bullet) \rightarrow \text{H}^m(M^\bullet)$  la proyección canónica. Puesto que  $d_{M^\bullet}^m f^m = 0$ . Por la propiedad universal del kernel existe un único morfismo  $f : P^m \rightarrow \text{Z}^m(M^\bullet)$  tal que  $\gamma_{M^\bullet}^m f = f^m$ . Dado que  $\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) = P^m$  se tiene que  $f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq m-1}, M^\bullet)}^m(qf)$ . Por el Lema 3.6.2 existen morfismos  $s^{m+1} : P^{m+1} \rightarrow M^m$  y  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  tales que  $f^m = s^{m+1} d_{P^\bullet}^m + d_{M^\bullet}^{m-1} s^m$ . Por lo tanto,  $\pi(f^\bullet) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.6.4.** Sean  $P^\bullet \in \mathcal{C}(\text{proj}(\Lambda))$ ,  $M^\bullet \in \mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  y  $m \in \mathbb{Z}$ . Si  $\forall g^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $g^{m+k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $\pi(g^\bullet) = 0$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $\forall f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  en  $\mathcal{C}(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $f^{m+t} = 0 \forall t \in \mathbb{N}^+$  se tiene que  $\pi(f^\bullet) = 0$ .
- (b) Si  $\gamma_{m-1}(\pi_{(P_{\geq m-1}^m, M^\bullet)}(f)) = 0$ , entonces  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{m+1} \beta_{P^\bullet}^{m+1} \epsilon_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m))$  para todo morfismo  $f : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \rightarrow \text{H}^m(M^\bullet)$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Sean  $f : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{m-1}) \rightarrow \text{H}^m(M^\bullet)$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$  y  $f^\bullet \in \pi_{(P_{\geq m-1}^m, M^\bullet)}(f)$ . A partir del morfismo  $g^\bullet : P_{\leq m-2}^\bullet[-(m-1)] \rightarrow P_{\geq m-1}^\bullet$  basado en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{m-3} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-3}} & P^{m-2} & & \\ & & & & \downarrow d_{P^\bullet}^{m-2} & & \\ & & & & P^{m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-1}} & P^m \longrightarrow \dots, \end{array}$$

se forma el siguiente  $\eta : P_{\leq m-2}^\bullet[-(m-1)] \xrightarrow{\pi(g^\bullet)} P_{\geq m-1}^\bullet \xrightarrow{\pi(h^\bullet)} P^\bullet \rightarrow P_{\leq m-2}^\bullet[-(m-1)+1] \in \Delta$  en  $\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))$ . Aplicando el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{mod}(\Lambda))}(-, M^\bullet)$  a  $\eta$  se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$(P^\bullet, M^\bullet) \xrightarrow{([h^\bullet], M^\bullet)} (P_{\geq m-1}^\bullet, M^\bullet) \xrightarrow{([g^\bullet], M^\bullet)} (P_{\leq m-2}^\bullet[-(m-1)], M^\bullet) \quad (*)$$

donde  $(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{mod}(\Lambda))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ . Veamos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{mod}(\Lambda))}(\pi(g^\bullet), M^\bullet)(\pi(f^\bullet)) = \pi(f^\bullet g^\bullet) = 0.$$

En efecto, notemos que  $f^\bullet g^\bullet$  se puede representar mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{m-3} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-3}} & P^{m-2} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f^{m-1} d_{P^\bullet}^{m-2} & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & M^{m-2} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-2}} & M^{m-1} & \xrightarrow{d_{M^\bullet}^{m-1}} & M^m \longrightarrow \dots \end{array}$$

Dado que  $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{mod}(\Lambda))}(P_{\geq m-1}^\bullet, M^\bullet)$  existe un único morfismo  $f : P^{m-2} \rightarrow Z^{m-1}(M^\bullet)$  tal que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} P^{m-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-2}} & P^{m-1} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{m-1} \\ Z^{m-1}(M^\bullet) & \xrightarrow{\gamma_{M^\bullet}^{m-1}} & M^{m-1}. \end{array}$$

Ya que  $0 = \gamma_{m-1}(f^\bullet) := q'f$ , donde  $q' : Z^{m-1}(M^\bullet) \rightarrow H^{m-1}(M^\bullet)$  es la proyección canónica, existe un morfismo  $s' : P^{m-2} \rightarrow B^{m-1}(M^\bullet)$  tal que  $\beta_{M^\bullet}^{m-1}s' = f$ . Puesto que  $P^{m-1}$  es proyectivo existe  $s : P^{m-2} \rightarrow M^{m-2}$  tal que  $\alpha_{M^\bullet}^{m-2}s = s'$ . Por lo que

$$d_{M^\bullet}^{m-2}s = \gamma_{M^\bullet}^{m-1}\beta_{M^\bullet}^{m-1}\alpha_{M^\bullet}^{m-2}s = \gamma_{M^\bullet}^{m-1}f = f^{m-1}d_{P^\bullet}^{m-2}.$$

Así,  $\pi(f^\bullet g^\bullet) = 0$ . Por (\*) existe un morfismo  $f'^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  en  $C(\text{mod}(\Lambda))$  tal que la restricción  $f'^\bullet|_{P_{\geq m-1}^\bullet} = f^\bullet$ . Notemos que  $f'^{m+t} = 0 \forall t \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis existen morfismos  $s^{m+1} : P^{m+1} \rightarrow M^m$  y  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  tal que  $f^m = s^{m+1}d_{P^\bullet}^m + d_{M^\bullet}^{m-1}s^m$ . Por lo tanto, por el Lema 3.6.2 se concluye que  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{m+1}\beta_{P^\bullet}^{m+1}\epsilon_{P^\bullet}^m, \delta_{M^\bullet}^m))$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  en  $C(\text{mod}(\Lambda))$  tal que  $f'^{m+t} = 0 \forall t \in \mathbb{N}^+$ . Consideremos la restricción de  $f^\bullet$  a  $P_{\geq m-1}^\bullet$   $f_{|P_{\geq m-1}^\bullet}^\bullet : P_{\geq m-1}^\bullet \rightarrow M^\bullet$ .

Aseguramos que  $\gamma_{m-1}(f_{|P_{\geq m-1}^\bullet}^\bullet) = 0$ . En efecto, por la propiedad universal del kernel, existe un único morfismo  $f : P^{m-2} \rightarrow Z^{m-1}(M^\bullet)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} P^{m-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{m-2}} & P^{m-1} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{m-1} \\ Z^{m-1}(M^\bullet) & \xrightarrow{\gamma_{M^\bullet}^{m-1}} & M^{m-1}. \end{array}$$

Dado que  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow M^\bullet$  es un morfismo se tiene que  $f = \beta_{M^\bullet}^{m-1}\alpha_{M^\bullet}^{m-2}f^{m-2}$ , con lo cual, se tiene que  $\gamma_{m-1}(f_{|P_{\geq m-1}^\bullet}^\bullet) = q'\beta_{M^\bullet}^{m-1}\alpha_{M^\bullet}^{m-2}f^{m-2} = 0$ , donde  $q' : Z^{m-1}(M^\bullet) \rightarrow H^{m-1}(M^\bullet)$  es la proyección canónica.

Por hipótesis y el Lema 3.6.2 existen morfismos  $s^{m+1} : P^{m+1} \rightarrow M^m$  y  $s^m : P^m \rightarrow M^{m-1}$  tal que  $f^m = s^{m+1}d_{P^\bullet}^m + d_{M^\bullet}^{m-1}s^m$ . Así,  $\pi(f^\bullet) = \pi(g^\bullet)$ , donde  $g^{m+k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}$  y  $g^{m-t} = f^{m-t} \forall t \in \mathbb{N}^+$ . Por hipótesis se concluye que  $\pi(f^\bullet) = \pi(g^\bullet) = 0$ .  $\square$

Los siguientes resultados nos dan una caracterización de los complejos presedimentados en  $K^b(\text{proj}(\Lambda))$ .

**Teorema 3.6.5.** Sean  $\mathbb{N}^+$ ,  $P^\bullet \in C^{[-n,0]}(\text{proj}(\Lambda))$  y  $m \in [1, n-1]$ . Las siguientes condiciones son equivalentes.

(a)  $\text{Hom}_{K(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[m]) = 0$ .

(b) (b1) El morfismo

$$\text{Hom}_\Lambda(d_{P^\bullet}^{-n}, \delta_{P^\bullet}^{-n+m}) : \text{Hom}_\Lambda(P^{-n+1}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-n+m-1})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P^{-n}, H^{-n+m}(P^\bullet))$$

es un epimorfismo.

(b2) Para todo  $t \in [0, n-m-1]$ . Si  $\gamma_{-n+t}(\pi_{(P_{\geq -n+t}^\bullet, P^\bullet[m])}^{-n+t+1}(f)) = 0$ , entonces

$$f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{-n+t+2}\beta_{P^\bullet}^{-n+t+2}\epsilon_{P^\bullet}^{-n+t+1}, \delta_{P^\bullet}^{-n+t+1+m}))$$

para todo morfismo  $f : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-n+t}) \rightarrow H^{-n+t+1+m}(P^\bullet)$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b1) Sea  $g^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que

$$g^{-n+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Por hipótesis, se tiene que  $\pi(g^\bullet) = 0$ . Por el Corolario 3.6.3 (b), se concluye que

$$\text{Hom}_\Lambda(d_{P^\bullet}^{-n}, \delta_{P^\bullet}^{-n+m}) : \text{Hom}_\Lambda(P^{-n+1}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-n+m-1})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P^{-n}, H^{-n+m}(P^\bullet))$$

es un epimorfismo.

(a)  $\Rightarrow$  (b2) Sean  $t \in [0, n - m + 1]$ ,  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $f^{-n+t+1+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$ ,  $h : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-n+t}) \rightarrow H^{-n+t+1+m}(P^\bullet)$  un morfismo en  $\text{mod}(\Lambda)$  tal que  $\gamma_{-n}(\pi_{(P_{\geq -n}^\bullet, P^\bullet[m])}^{-n+1}(f)) = 0$ . Dado que  $\forall h^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $f^{-n+t+1+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , por hipótesis, se tiene que  $\pi(h^\bullet) = 0$  y también  $\pi(f^\bullet) = 0$ . Por la Proposición 3.6.4, se concluye que  $f \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{-n+t+2} \beta_{P^\bullet}^{-n+t+2} \epsilon_{P^\bullet}^{-n+t+1}, \delta_{P^\bullet}^{-n+t+1+m}))$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $f^{-n+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^{-n} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-n}} & P^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow f^{-n} & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & P^{-n+m-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-n+m-1}} & P^{-n+m} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-n+m}} & P^{-n+m+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Por el Corolario 3.6.3 (b) se tiene que  $\pi(f^\bullet) = 0$ .

Sea  $r \in [0, n - m - 1]$ . Veamos que si  $\pi(g^\bullet) = 0 \quad \forall g^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $g^{-n+r+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$ , entonces  $\pi(h^\bullet) = 0 \quad \forall h^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $h^{-n+r+1+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$ . En efecto, sea  $h : \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-n+r}) \rightarrow H^{-n+m+r+1}(P^\bullet)$  tal que  $\gamma_{-n+r}(\pi_{(P_{\geq -n+r}^\bullet, P^\bullet[m])}^{-n+r+1}(h)) = 0$ . Por hipótesis, se tiene que

$$h \in \text{Im}(\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^{-n+r+2} \beta_{P^\bullet}^{-n+r+2} \epsilon_{P^\bullet}^{-n+r+1}, \delta_{P^\bullet}^{-n+r+1+m})).$$

Haciendo  $m = -n + r + 1$  en la Proposición 3.6.4, se tiene que  $[h^\bullet] = 0 \quad \forall h^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[m]$  en  $C(\text{proj}(\Lambda))$  tal que  $h^{-n+r+1+k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$ .

Por lo tanto,  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[m]) = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.6.6.** Sean  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $P^\bullet \in C^{[-n, 0]}(\text{proj}(\Lambda))$  y

$$d_{P^\bullet}^{-n} = (d^{-n}, 0) = Q^{-n} \oplus Q'^{-n} \rightarrow P^{-n+1},$$

donde  $d^{-n} : Q^{-n} \rightarrow P^{-n+1}$  es la versión minimal a derecha de  $d_{P^\bullet}^{-n}$ . Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[m]) = 0$$

si, y sólo si,  $\text{Hom}_\Lambda(\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1}), \tau(\text{Coker}(d^{-n}))) = 0$  y  $\text{Hom}_\Lambda(Q'^{-n}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1})) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $Q^\bullet := \dots \rightarrow 0 \rightarrow Q^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-n+1} \rightarrow \dots \rightarrow P^0 \rightarrow 0 \dots$ . Notemos que  $P^\bullet = Q^\bullet \oplus Q'^{-n}[n]$ . Por el Lema 1.8.5 se sigue que  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(Q^\bullet, P^\bullet[n]) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_\Lambda(\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1}), \tau(\text{Coker}(d^{-n}))) = 0$ . Luego, por el Lema 3.2.11

$$\text{Hom}_\Lambda(Q'^{-n}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1})) = 0$$

es equivalente a que  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(Q'^{-n}[n], P^\bullet[n]) = 0$ .  $\square$

**Corolario 3.6.7.** *Sea  $P^\bullet \in C^{[-2,0]}(\text{proj}(\Lambda))$ . Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a)  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[1]) = 0$  si, y sólo si,

$$\text{Hom}_\Lambda(\gamma_{P^\bullet}^0 \beta_{P^\bullet}^0 \epsilon_{P^\bullet}^{-1}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1})) : \text{Hom}_\Lambda(P^0, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-2}), \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1}))$$

es un epimorfismo y  $\text{Hom}_\Lambda(d_{P^\bullet}^{-2}, \delta_{P^\bullet}^{-1}) : \text{Hom}_\Lambda(P^{-1}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-2})) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P^{-2}, H^{-1}(P^\bullet))$  es un epimorfismo.

(b) Sea  $d_{P^\bullet}^{-2} = (d^{-2}, 0) = Q^{-2} \oplus Q'^{-2} \rightarrow P^{-1}$ , donde  $d^{-2} : Q^{-2} \rightarrow P^{-1}$  es la versión minimal a derecha de  $d_{P^\bullet}^{-2}$ . Entonces,  $\text{Hom}_{\mathbb{K}(\text{proj}(\Lambda))}(P^\bullet, P^\bullet[2]) = 0$  si, y sólo si,

$$\text{Hom}_\Lambda(\text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1}), \tau(\text{Coker}(d^{-2}))) = 0$$

y  $\text{Hom}_\Lambda(Q'^{-2}, \text{Coker}(d_{P^\bullet}^{-1})) = 0$ .

*Demostración.* (a)  $(\Rightarrow)$  Se sigue del Corolario 3.6.3.

$(\Leftarrow)$  Sea  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[1]$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . El morfismo anterior induce el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P^{-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 \\ & & \downarrow f^{-2} & & \downarrow f^{-1} \\ P^{-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por el Corolario 3.6.3 (a) existen morfismos  $s^0 : P^0 \rightarrow P^0$  y  $s^{-1} : P^{-1} \rightarrow P^{-1}$  tales que  $f^{-1} = s^0 d_{P^\bullet}^{-1} + d_{P^\bullet}^{-1} s^{-1}$ . Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} P^{-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 \\ & & \downarrow f^{-2} - s^{-1} d_{P^\bullet}^{-2} & & \downarrow 0 \\ P^{-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

En efecto,  $d_{P^\bullet}^{-1}(f^{-2} - s^{-1} d_{P^\bullet}^{-2}) = f^{-1} d_{P^\bullet}^{-2} - d_{P^\bullet}^{-1} s^{-1} d_{P^\bullet}^{-2}$ . Dado que  $f^{-1} = s^0 d_{P^\bullet}^{-1} + d_{P^\bullet}^{-1} s^{-1}$ , se tiene que  $f^{-1} d_{P^\bullet}^{-2} = d_{P^\bullet}^{-1} s^{-1} d_{P^\bullet}^{-2}$ . Con lo cual,  $f^{-1} d_{P^\bullet}^{-2} - d_{P^\bullet}^{-1} s^{-1} d_{P^\bullet}^{-2} = 0$ . El diagrama anterior

define un morfismo  $g^\bullet : P^\bullet \rightarrow P^\bullet[1]$  un morfismo en  $C(\text{proj}(\Lambda))$ . Por el Corolario 3.6.3 (b) se tiene que  $\pi(g^\bullet) = 0$ . El morfismo  $f^\bullet - g^\bullet$  induce el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P^{-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 \\
 & & \downarrow s^{-1}d_{P^\bullet}^{-2} & & \downarrow f^{-1} & & \\
 P^{-2} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Sea  $s^{-2} = 0$ . Es claro que  $\{s^k\}_{k=-2}^0$  es una homotopía entre  $f^\bullet$  y  $g^\bullet$ . Por lo tanto,

$$\pi(f^\bullet) = \pi(g^\bullet) = 0.$$

(b) Se sigue del Teorema 3.6.6. □

# Capítulo 4

## Teoría inclinante de conglomerado

En este capítulo  $\mathcal{T}$  denotará una  $R$ -categoría de Artin triangulada.

### 4.1. Conexión con teoría $\tau$ -inclinante

El siguiente resultado está basado en [KR07] cuando  $T \in \mathcal{T}$  es inclinante de 2-conglomerado y  $\mathcal{T}$  es 2-Calabi-Yau.

**Lema 4.1.1.** *Sean  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $T \in \mathcal{T}$   $n + 1$ -rígido y  $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ . Entonces el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) : \text{add}(T) * \text{add}(T)[1]/[\text{add}(T)[1]] \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es una equivalencia de categorías.*

*Demostración.* Sea  $M \in \text{mod}(\Lambda)$ . Por el Lema 1.2.11, existe un morfismo  $f : T' \rightarrow T''$  en  $\mathcal{T}$ , con  $T', T'' \in \text{add}(T)$  y una sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f)} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'') \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Sea  $T' \xrightarrow{f} T'' \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} T'[1] \in \Delta$  en  $\mathcal{T}$  formado a partir del cono de  $f$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -)$  al triángulo anterior se tiene la siguiente sucesión exacta, ya que  $T$  es  $n + 1$ -rígido,  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f)} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'[1]) = 0$ . Por ende,  $M \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X)$  en  $\text{mod}(\Lambda)$ .

Luego, sean  $X, Y \in \mathcal{T}$  y  $t : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y)$ . Se consideran los siguientes triángulos distinguidos  $T_1 \xrightarrow{f} T_0 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} T_1 \in \Delta$  y  $T'_1 \xrightarrow{f'} T'_0 \xrightarrow{g'} Y \xrightarrow{h'} T'_1[1]$  en  $\mathcal{T}$ , con  $T_0, T_1, T'_0, T'_1 \in \text{add}(T)$ . Por el Lema 1.2.11 y la propiedad universal del Cokernel existen  $\{\alpha_i : T_i \rightarrow T'_i\}_{i \in \{0,1\}}$  y  $\alpha : X \rightarrow Y$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_0) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) & \longrightarrow & 0 \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \alpha_1) \downarrow & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \alpha_0) \downarrow & & \downarrow t & & \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'_0) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por lo que tenemos el siguiente morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_1 & \xrightarrow{f} & T_0 & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{h} & T_1[1] \\
 \alpha_1 \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha_1[1] \\
 T'_1 & \xrightarrow{f'} & T'_0 & \xrightarrow{g'} & Y & \xrightarrow{h'} & T'_1[1].
 \end{array}$$

Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -)$  al diagrama anterior, ya que  $T$  es  $n + 1$ -rígido

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_0) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_1[1]) = 0 \\
 \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_1) \downarrow & & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_0) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha) & & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f')} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'_0) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g')} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'_1[1]) = 0.
 \end{array}$$

Así pues,  $t = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha)$ .

Por último, sea  $k : X \rightarrow Y$  tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, k) = 0$  y puesto que  $X \in \text{add}(T) * \text{add}(T)[1]$  existe  $T_1 \rightarrow T_0 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{k} T_1[1] \in \Delta$  en  $\mathcal{T}$ . Por lo que  $kg = 0$ . Entonces, existe  $l : T_1[1] \rightarrow Y$  tal que  $k = lh$ . Así pues, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 T * T[1] & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)} & \text{mod}(\Gamma) \\
 \pi \downarrow & \nearrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) & \\
 T * T[1]/[\text{add}(T[1])] & & 
 \end{array}$$

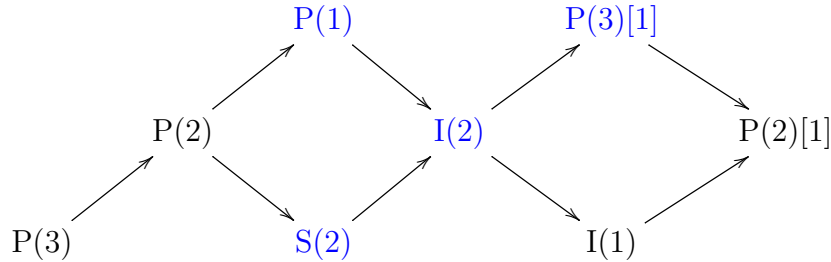
donde  $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/[\text{add}(T[1])]$  es la proyección canónica. Por lo tanto,

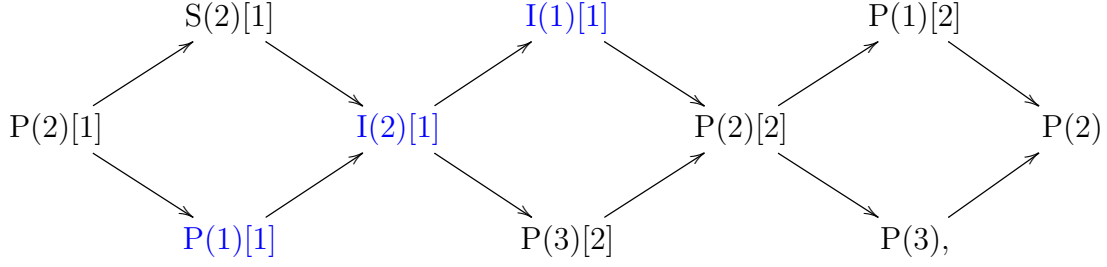
$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) : \text{add}(T) * \text{add}(T)[1]/[\text{add}(T)[1]] \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$$

es una equivalencia de categorías. □

El siguiente ejemplo muestra que si  $T \in \mathcal{T}$  es inclinante de  $n + 1$ -conglomerado y  $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)^{op}$ . Entonces el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) : \mathcal{T}/[T[1] * \dots * T[n]] \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  no es una equivalencia de categorías.

**Ejemplo 4.1.2.** Sean  $Q := \bullet^1 \xrightarrow{\alpha} \bullet^2 \xrightarrow{\beta} \bullet^3$  y  $\mathcal{C}_2(kQ) := \mathcal{D}^b(kQ)/\tau^{-1}[2]$  la categoría 2-cluster definida en [Tho07]. Notemos que  $T := I(1) \oplus P(3)[2] \oplus P(2)[2]$  es inclinante 3-conglomerado. Consideremos su carcaj de Auslander-Reiten





donde la parte azul es la correspondiente a  $T[1] * T[2]$ . Mientras que  $\Gamma := \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op} = kQ'$ , con  $Q' := \bullet^1 \quad \bullet^2 \xrightarrow{\alpha} \bullet^3$ . Por lo tanto  $\text{mod}(\Gamma)$  no es equivalente a  $\mathcal{C}/[T[1] * T[2]]$ .

El siguiente resultado es una generalización de [AIR14, 3.2]. El cual es determinante para la conexión de las subcategorías 2-inclinante de conglomerado con los pares  $\tau$ -inclinantes, cuando  $\mathcal{T}$  es 2-Calabi-Yau.

**Definición 4.1.3.** [IY08, Definición 2.8] Decimos que  $\mathcal{T}$  es una categoría **n-Calabi-Yau** si existen isomorfismos functoriales

$$\Phi_X : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, -) \rightarrow \text{D}_R \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X[n]) \quad \forall X \in \mathcal{T},$$

$$\Psi_Y : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y) \rightarrow \text{D}_R \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -[n]) \quad \forall Y \in \mathcal{T}.$$

**Lema 4.1.4.** Sean  $T \in \mathcal{T}$ , donde  $T$  es inclinante de  $n+1$ -conglomerado y  $\mathcal{T}$  es  $n+1$ -Calabi-Yau, y  $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)^{op}$ . Entonces los funtores

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -[n+1]), \nu \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) : \text{add}(T) \rightarrow \text{inj}(\Lambda)$$

son isomorfos, donde  $\nu : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es el funtor de Nakayama.

*Demostración.* Sean  $\Psi : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -[n+1]) \rightarrow \text{D}_R \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, T)$  el isomorfismo dado del hecho que  $\mathcal{T}$  es  $n+1$ -Calabi-Yau y  $\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, T) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -), \Lambda)$  el isomorfismo del Lema 1.2.11 restringido a  $\text{add}(T)$ . Por lo tanto,

$$\text{D}_R(\Phi^{-1})\Psi : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -[n+1]) \rightarrow \nu \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -)$$

es un isomorfismo. □

El siguiente lema es necesario para demostrar el resultado principal de esta sección.

**Lema 4.1.5.** Sean  $T \in \mathcal{T}$ , donde  $T$  es inclinante de  $n+1$ -conglomerado y  $\mathcal{T}$  es  $n+1$ -Calabi-Yau, y  $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)^{op}$ . Entonces, el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) : \mathcal{T} \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$  es pleno.

*Demostración.* Sean  $Z, Y \in \mathcal{T}$  y  $t : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Z)$ . Dado que  $T$  es inclinante de  $n+1$ -conglomerado se tiene que  $\text{resdim}_{\text{add}(T)}(Z) \leq n$  y  $\text{resdim}_{\text{add}(T)}(Y) \leq n$ , por lo que existen  $\{\eta_i : Y_{i+1} \xrightarrow{g_i} T_i \xrightarrow{f_i} Y_i \rightarrow Y_{i+1}[1] \in \Delta\}_{i=0}^{n-1}$  y  $\{\eta'_i : Z_{i+1} \xrightarrow{g'_i} T'_i \xrightarrow{f'_i} Z_i \rightarrow Z_{i+1}[1] \in \Delta\}_{i=0}^{n-1}$

en  $\mathcal{T}$ , con  $Y_n, Z_n \in \text{add}(T)$ . Por el Lema 1.2.11 existen morfismos  $\{\alpha_i : T_i \rightarrow T'_i\}_{i=0}^n$  en  $\mathcal{T}$  tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g_0)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_0) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f_0)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_0) & & \downarrow t & & \\
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Z_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g'_0)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'_0) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f'_0)} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Z) & \longrightarrow & 0, \\
\\
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_{i+1}) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g_i f_{i+1})} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_i) & & & & \forall i \in [0, n-1) \\
\downarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_{i+1}) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_i) & & & & \\
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'_{i+1}) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g'_i f'_{i+1})} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'_i) & & & & 
\end{array}$$

Por el proceso de proyectivización y la propiedad universal del kernel existe  $\alpha_n : Y_n \rightarrow Z_n$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y_n) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g_{n-1})} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_{n-1}) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f_{n-1})} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Y_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_n) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \alpha_{n-1}) & & & & \\
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Z_n) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, g'_{n-1})} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T'_{n-1}) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f'_{n-1})} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, Z_{n-1}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Por lo que tenemos una serie de morfismos  $\{\beta_i : Y_i \rightarrow Z_i\}_{i=0}^{n-1}$  tales que los siguientes son morfismos de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc}
Y_n & \xrightarrow{g_{n-1}} & T_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} & \longrightarrow & Y_n[1] \\
\downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \beta_{n-1} & & \downarrow \\
Z_n & \xrightarrow{g'_{n-1}} & T'_{n-1} & \xrightarrow{f'_{n-1}} & Z_{n-1} & \longrightarrow & Z_n[1] \\
\\
Y_{m+1} & \xrightarrow{g_m} & T_m & \xrightarrow{f_m} & Y_m & \longrightarrow & Y_{m+1}[1] \\
\downarrow \beta_{m+1} & & \downarrow \alpha_m & & \downarrow \beta_m & & \downarrow \\
Z_{m+1} & \xrightarrow{g'_m} & T'_m & \xrightarrow{f'_m} & Z_m & \longrightarrow & Z_{m+1}[1].
\end{array} \quad \forall m \in [0, n-1)$$

Así pues,  $t = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \beta_0)$ . □

**Proposición 4.1.6.** Sean  $\mathcal{T}$   $n+1$ -Calabi-Yau,  $T \in \mathcal{T}$  inclinante de  $n+1$ -conglomerado, con  $n > 1$ ,  $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)^{op}$  y  $X \in \mathcal{T}$  tal que  $\text{resdim}_{\text{add}(T)}(X) \leq 1$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

(a)  $\tau(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[n])$ .

(b)  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[n]) = 0$  si, y sólo si,  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X)$  es  $\tau$ -rígido.

*Demostración.* Sea  $\eta : T_1 \rightarrow T_0 \rightarrow X \rightarrow T_1[1] \in \Delta$ , donde  $T_1, T_0 \in \text{add}(T)$ .

(a) Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -)$  al triángulo anterior se tiene la siguiente sucesión exacta, ya que  $T$  es  $n + 1$ -rígido,

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_0[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[n+1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_1[n+1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_1[n+1]).$$

Por el Lema 1.2.10 se tiene la siguiente sucesión exacta y el siguiente diagrama conmutativo, donde los morfismos verticales son isomorfismos por el Lema 4.1.4

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X) & \longrightarrow & \nu\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_1) & \longrightarrow & \nu\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_0) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[n]) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_1[n+1]) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T_0[n+1]). \end{array}$$

Por lo que  $\tau(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[n])$ .

(b) Por el Lema 4.1.5, la aplicación

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -) : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X), \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[n]))$$

es un epimorfismo. Sea  $f : X \rightarrow X[n]$  tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, f) = 0$ . Por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} T_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & T_1[1] \\ & & \downarrow f & \swarrow \exists! g & \\ & & X[n] & & \end{array}$$

Veamos que  $g = 0$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_1[1], -)$  a  $\eta$  se tiene la siguiente sucesión exacta, ya que  $T$  es  $n + 1$ -rígido,

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_1, T_0[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_1, X[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_1, T_1[n+1]) = 0.$$

Concluimos que  $f = 0$  y así  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[n]) \cong \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X), \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[n]))$ . El resultado se sigue de (a).  $\square$



# Índice alfabético

- $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -
  - precubierta, 31
- $\mathcal{C}$ -filtración, 7
- álgebra
  - $\tau$ -rígida finita, 85
  - $\tau_n$ -rígida finita, 88
  - de artin, 4
  - estandarmente estratificada, 30
  - F-admisible, 56
  - n-Gorenstein, 18
  - sedimentada-discreta, 89
- axioma
  - del octaedro, 9
- cambio
  - de base, 9
  - de cobase, 10
- categoría
  - $\tau_n$ -perpendicular, 62
  - Hom-finita, 23
  - homotópica, 12
  - Krull-Schmidt, 1
  - n-Calabi-Yau, 107
  - sedimentada-discreta, 23
  - triangulada, 8
    - de Artin, 23
- clase
  - corresolvente, 15
  - cubriente, 2
  - funtorialmente finita, 2
  - gruesa, 16
  - gruesa a izquierda, 15
  - gruesa derecha, 15
  - pre-corresolvente, 15
  - pre-resolvente, 15
  - precubriente, 2
  - resolvente, 15
  - saturada a izquierda, 15
- cocomplejo, 10
  - acíclico, 11
  - n+1-términos, 88
- cocomplejo dual, 83
- cono, 12
- cubierta, 2
  - proyectiva, 2
    - F-, 27
- dimensión
  - de  $\mathcal{X}$ -corresolución, 20
  - de  $\mathcal{X}$ -resolución, 14, 20
  - de  $(\mathcal{X}, F)$ -resolución, 26
  - proyectiva relativa, 14
    - F-, 26
- envolvente
  - inyectiva, 2
- F-
  - cociente, 35
  - epimorfismo, 35
- funtor
  - de dualidad, 83
  - de Nakayama, 6
  - estrella, 5
  - evaluación, 7
- $\text{gen}_F$ -minimal, 40
- generador en  $\mathcal{X}$ 
  - $\mathcal{X}$ -proyectivo, 14
- generador relativo en  $\mathcal{X}$ , 14
- ideal

- de una categoría, 3
- isomorfismo
  - de triángulos, 8
- kernel, 2
- Lema de Nakayama, 5
- longitud
  - complejo, 50
- módulo
  - $\mathcal{C}$ -filtrado, 7
  - $\tau_n$ -inclinante, 67
    - completo, 67
  - $\tau_n$ -rígido, 62
  - coinclinante, 17
  - estándar, 30
  - F-presedimentado, 49
  - F-proyectivo, 25
  - F-sedimentado, 49
  - fiel, 17
  - finitamente generado, 4
  - generado, 4
  - Gorenstein proyectivo, 33
  - $n$ - $F$ -inclinante, 26
  - $n$ -generado, 19
  - $n$ -inclinante, 17
  - preinyectivo, 55
  - sincero, 66
  - transpuesto, 5
  - traza, 30
- morfismo
  - de cocomplejos, 10
  - de triángulos, 8
  - dual, 83
  - minimal a derecha, 1
- multiplicidad, 7
- $n$ -
  - cociclo, 11
  - cofrontera, 11
- $n$ -ésimo
  - trasladado de Auslander-Reiten, 60
- $n$ -tupla
  - presedimentada, 90
  - sedimentada, 90
- par
  - $F$ -presedimentado, 52
    - especial, 52
  - $F$ -sedimentado de soporte, 52
  - de cotorsión, 16
    - hereditario, 16
  - de Frobenius a izquierda, 16
  - de torsión, 21
- precubierta, 2
- presentación
  - inyectiva minimal, 2
  - proyectiva minimal, 2
    - $F$ -, 27
- pseudokernel, 2
- radical, 4
  - de una categoría, 3
- rango, 18
- serie de composición, 7
- sistema estratificante, 29
  - Ext-proyectivo, 30
- subcategoría
  - $F$ -preenvolvente, 27
  - generadora, 19
  - gruesa, 10
  - inclinante de  $n$ -conglomerado, 29
  - $n$ -rígida, 29
  - presedimentada, 20
  - sedimentada, 20
  - triangulada, 10
- subfunctor, 23
  - aditivo, 24
  - con suficientes proyectivos, 25
- sucesión
  - $F$ -exacta, 24
- top, 4
- traslaciones de Auslander-Reiten, 5
- triángulo, 8
  - distinguido, 8

# Bibliografía

- [AIR14] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten.  *$\tau$ -Tilting Theory*. Compos. Math. 150, 415-452, 2014.
- [ADL98] I. Ágoston, V. Dlab, E. Lukács. *Stratified Algebras*. R. Math. Rep. Acad. Sci. Can. 20 (1), 22-28, 1998.
- [Ai13] T. Aihara. *Tilting-Connected Symetric Algebras*. Algebr. Represent. Theory 16, 873-894, 2013.
- [AI12] T. Aihara, O. Iyama. *Silting Mutation in Triangulated Categories*. J. Lond. Math. Soc. 85, 633-668, 2012.
- [AM17] T. Aihara, Y. Mizuno. *Classifying Tilting Complexes over Preprojective Algebras of Dynkin Type*. Algebra Number Theory 11 (6), 1287-1315, 2017.
- [AH19] L. Angeleri Hügel. *Silting Objects*. Bull. Lond. Math. Soc. 51 (2019), 658-690.
- [ABM98] I. Assem, A. Beligiannis, N. Marmaridis. *Right Triangulated Categories with Right-Equivalences*. Can. Math. Soc. Conf. Proc. 24, 17-37, 1989.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol 1: Techniques of Representation Theory*. London Math. Soc. Stud. Texts 65, 2006.
- [Au73] M. Auslander. *Notes on Representation Theory*. Brandeis University, 1973.
- [AB89] M. Auslander, R. Buchweitz. *The Homological Theory of Maximal Cohen-Macaulay Approximations*. Soc. Math. de France 38, 5-37, 1989.
- [AP78] M. Auslander, M. Platzeck. *Representation Theory of Hereditary Artin Algebra*. Lect. Not. Pur. Appl. Math. 37. 389-424, 1978.
- [AR75] M. Auslander and I. Reiten, *Representation theory of Artin algebras III: almost split sequences*. Comm. Algebra 3, 239-294, 1975.
- [AR91] M. Auslander, I. Reiten. *Applications of Contravariantly Finite Subcategories*. Adv. Math. 86, 111-152, 1991.

- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [AS80] M. Auslander, S. Smalø. *Preprojective Modules over Artin Algebras*. J. Algebra 66, 61-122, 1980.
- [AS81] M. Auslander, S. Smalø. *Almost Split Sequences in Subcategories*. J. Algebra 69, 426-454, 1981.
- [AS93] M. Auslander, Ø. Solberg. *Relative Homology and Representation Theory I, Relative Homology and Homologically Finite Subcategories*. Comm. Algebra 21 (9), 2995-3031, 1993.
- [ASII93] M. Auslander, Ø. Solberg. *Relative Homology and Representation Theory II, Relative Cotilting Theory*. Comm. Algebra 21 (9), 3033-3079, 1993.
- [ASIII93] M. Auslander, Ø. Solberg. *Relative Homology and Representation Theory III, Cotilting Modules and Wedderburn Correspondence*. Comm. Algebra 21 (9), 3081-3097, 1993.
- [Ba60] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 466–488, 1960.
- [BMPS18] V. Becerril, O. Mendoza, M. Pérez, V. Santiago. *Frobenius pairs in abelian categories*. J. Homotopy Relat. Struct. 13, 1-50, 2018.
- [BB80] S. Brenner, M. C. R. Butler. *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*. In: Dlab V., Gabriel P. (eds) Repr. Theo. II. Lect. Not. in Math, vol 832. Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [BMRRT06] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. 204, 572-618, 2006.
- [DIJ17] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso.  *$\tau$ -Tilting Finite Algebras, Bricks, and  $g$ -Vectors*. Int. Math. Res. Not. 0, 1–41, 2017.
- [ES03] K. Erdmann, C. Sáenz. *On standardly stratified algebras*. Comm. Algebra 31 (7), 3429–3446, 2003.
- [F110] M. Flores. *Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras*. Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2010.
- [F113] M. Flores. *Categorías trianguladas*. Tesina de Maestría, UNAM, Instituto de Matemáticas, 2013.
- [FZ02] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*. J. Amer. Math. Soc. 15, no. 2, 497–529, 2002.

- [GM03] S. Gelfand, Y. Manin, *Methods of Homological Algebra*. 2nd. ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [GT06] R. Göbel, J. Trlifaj, *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*. de Gruyter Expositions in Mathematics 41, 2006.
- [Ha88] D. Happel. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 119, 1988.
- [Ha95] D. Happel. *Selforthogonal modules*. Abelian Groups and Modules, 257-276, 1995.
- [HU96] D. Happel, L. Unger. *Modules of Finite Projective Dimension and Cocovers*. Math. Ann. 306, 445-457, 1996.
- [Ho83] M. Hoshino. *On splitting torsion theories induced by tilting modules*. Comm. Algebra 11, 427-439, 1983.
- [Iy07] O. Iyama. *Higher-Dimensional Auslander-Reiten Theory on Maximal Orthogonal Subcategories*. Adv. Math. 210, 22-50, 2007.
- [IY08] O. Iyama, Y. Yoshino. *Mutation in Triangulated Categories and Rigid Cohen-Macaulay Modules*. Invent. Math. 172, 117-168, 2008.
- [Ja15] G. Jasso. *Reduction of  $\tau$ -Tilting Modules and Torsion Pairs*. Int. Math. Res. Not. IMRN 16, 7190-7237, 2015.
- [KR07] B. Keller, I. Reiten. *Cluster-Tilted Algebras are Gorenstein and Stably Calabi-Yau*. Adv. Math. 211, 123-151, 2007.
- [KZ08] S. Koenig, B. Zhu. *From Triangulated Categories to Abelian Categories: Cluster Tilting in a General Framework*. Math. Z. 258, 143-160, 2008.
- [Kr15] H. Krause. *Krull-Schmidt Categories and Projective Covers*. Expo. Math. 33, 535-549, 2015.
- [MMS04] E. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz. *Stratifying Systems Via Relative Simple Modules*. J. Algebra 280, 472-487, 2004.
- [MMS05] E. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz. *Stratifying Systems Via Relative Projective Modules*. Comm. Algebra 33, 1559-1573, 2005.
- [Mo58] K. Morita, *Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with Minimum Condition*, Sci. Rep. of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A, vol. 6, No. 150, 83-142, 1958.
- [Ma15] L. Martínez. *El Teorema de Brenner y Butler*. Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2015.

- [Ma17] L. Martínez. *Teoría Tau-Inclinante*. Tesis de maestría, UNAM, Instituto de Matemáticas, 2017.
- [MM21] L. Martínez, O. Mendoza. *Relative Torsion Classes, Relative Tilting and Relative Silting Modules*. <https://arxiv.org/abs/2103.09217>, 2021.
- [MSSS11] O. Mendoza, E. Sáenz, V. Santiago, M. Souto. *Auslander–Buchweitz Approximation Theory for Triangulated Categories*. Appl. Categ. Structures 21, 119-139, 2011.0
- [MS16] O. Mendoza, V. Santiago. *Homological Systems in Triangulated Categories*. Appl. Categ. Structures 24, 1-35, 2016.
- [Mi86] Y. Miyashita, *Tilting Modules of Finite Projective Dimensions*. Math. Z. 193, 113-146, 1986.
- [Ne01] A. Neeman, *Triangulated categories*. Princeton University Press, 2001.
- [Pa08] Y. Palu. *Cluster Characters for 2-Calabi-Yau Triangulated Categories*. Ann. Inst. Fourier 58 (6), 2221-2248, 2008.
- [RS89] J. Rickard, A. Schofield. *Cocovers and tilting modules*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 106 (1), 1-5, 1989.
- [Ri91] C. Ringel. *The Category of Modules with Good Filtrations over a Quasihereditary Algebra has Almost Split Sequences*. Math. Z. 208, 209-223, 1991.
- [Ro08] J. Rotman. *An introduction to Homological Algebra. Second edition*. Springer. Universitext, 2008.
- [Sa12] V. Santiago. *Homología Relativa, Sistemas Estratificantes y Categorías Trianguladas*. Tesis de doctorado, UNAM, Instituto de Matemáticas, 2012.
- [Sm84] S. O. Smalø, *Torsion theory and tilting modules*, Bull. Lond. Math. Soc. 16 (1984), 518-522.
- [Th07] H. Thomas. *Defining an  $m$ -Cluster Category*. J. Algebra 318, 37-46, 2007.
- [Ve96] J. L. Verdier. *Des categories Derivees, Des categories Abeliennes*. Societe Mathematique de France, Asterisque, 239, 256 pages, (1996).
- [We10] J. Wei. *A Note on Relative Tilting Modules*. J. Pure Appl. Algebra 214, 493-500, 2010.
- [We13] J. Wei. *Semi-Tilting Complexes*. Israel J. Math. 194, 871-893, 2013.
- [Zi14] A. Zimmermann. *Representation Theory A Homological Algebra Point of View*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

[Zw11] G. Zwara. *Singularities of Orbit Closures in Module Varieties*. Representation Theory of Algebras and Related Topics. EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc. Zürich, 661-725, 2011.