



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

UNA INTRODUCCIÓN A LOS HACES DE HIGGS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
KENETT MARTÍNEZ RUIZ

DIRECTOR:
DR. SERGIO ANDRÉS HOLGUÍN CARDONA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM - OAXACA

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	III
Notación	IV
1. Introducción	1
1.1. Historia	1
1.2. Haces de Higgs y sus propiedades básicas	3
1.3. La conexión de Hitchin-Simpson	7
2. Curvatura media y métricas de Hermite-Yang-Mills (HYM)	11
2.1. La curvatura media de Hitchin-Simpson	11
2.2. Teoremas de anulamiento	12
2.3. Métricas de HYM	15
2.4. Estructuras aproximadas de HYM	19
2.5. Estabilidad de Mumford	22
3. Algunos funcionales para haces de Higgs	26
3.1. El funcional de Kobayashi	26
3.2. El funcional de Yang-Mills-Higgs	28
A. Haces holomorfos	32
A.1. Variedades complejas y haces holomorfos	32
A.2. Métricas Hermitianas y la conexión de Chern	37
A.3. Conexiones y métricas en haces asociados	40
B. Métricas de Hermite-Einstein	44
B.1. El operador de Hodge	44
B.2. Métricas de Hermite-Einstein	48
B.3. El funcional de Kobayashi	53
Referencias	56

Agradecimientos

Primero, agradezco enormemente a la UNAM por permitirme realizar mis estudios de maestría en el Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada, y al CONACyT por el apoyo mediante el programa de Becas Nacionales CONACyT durante el periodo académico 2020-2021.

Quiero agradecer a mi tutor y director de esta tesis, el Dr. Sergio Holguín (UNAM-CONACyT), por su ayuda y apoyo, académico y personal, recibido en los últimos dos años. Su apoyo ha sido fundamental para realizar y concluir este trabajo. También agradezco al Dr. Aldo Martínez (UDG) y Dr. Rafael Herrera (CIMAT) por sus comentarios acerca de este manuscrito que ayudaron a complementarlo, al Dr. Hugo Compeán (CINVESTAV) y Dr. Gerardo Arizmendi (UDLAP) por haber aceptado ser parte del jurado del presente trabajo y por leer detenidamente el mismo. También agradezco a la Dra. Raquel Perales, por haber leído de forma externa este trabajo y por sus sugerencias acerca del mismo.

Por último, agradezco a los profesores del Instituto de Matemáticas, a mi familia y a todas las personas que de alguna manera han contribuido a la realización de este trabajo.

Notación

M, N	variedades
U, V	vecindades abiertas
f, g	funciones entre variedades
E, F	haces vectoriales
\mathcal{E}, \mathcal{F}	haces de Higgs
$i, j, k, \alpha, \beta, \gamma$	índices
h, h'	métricas en un haz
ξ, η	secciones de un haz
ϕ, ψ	(p, q) -formas
Φ, Ψ	(p, q) -formas con coeficientes en un haz
(z^1, \dots, z^m)	coordenadas holomorfas
$(\theta^1, \dots, \theta^m)$	marco local unitario
(s_1, \dots, s_r)	marco local
D, \mathcal{D}	conexiones
R, \mathcal{R}	curvaturas
K, \mathcal{K}	curvaturas medias

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia

La noción de haz de Higgs fue introducida originalmente por Hitchin [19] como un par (E, Φ) , formado por un haz holomorfo de rango 2 sobre una superficie de Riemann compacta y un morfismo $\Phi : E \rightarrow E \otimes \Omega^{1,0}$ (el cual llama campo de Higgs) que satisface $\Phi \wedge \Phi = 0$. Siguiendo las ideas de Narasimhan y Seshadri [27] sobre estabilidad de Mumford y Atiyah y Bott [1, 3] sobre teoría de Yang-Mills, Hitchin [19] demostró la correspondencia que hay entre la existencia de soluciones no singulares para las ecuaciones de auto-dualidad en dos dimensiones (también conocidas como ecuaciones de Hitchin), y la existencia de un par (E, Φ) que satisface adicionalmente cierta condición de estabilidad, la cual es de forma natural una extensión de la condición de estabilidad de Mumford [23].

Siguiendo la técnica que Uhlenbeck y Yau utilizaron para métricas de Hermite-Einstein en haces holomorfos [32], Simpson extendió los resultados de Hitchin para un par (E, Φ) , donde $E \rightarrow M$ es un haz holomorfo sobre una variedad de Kähler compacta M con rango y dimensión arbitrarias y acuñó el término *haz de Higgs* para referirse a dichos pares (E, Φ) [29]. En este mismo trabajo Simpson define el funcional de Donaldson y una conexión $\mathcal{D}_h = D_h + \Phi + \bar{\Phi}_h$ asociadas a una métrica Hermitiana h en el haz. Esta conexión también fue introducida por Hitchin [19], por lo que es llamada la conexión de Hitchin-Simpson. En particular, puede decirse que la conexión de Hitchin-Simpson “captura la información del haz de Higgs”, *i.e.*, involucra el campo de Higgs Φ y la estructura holomorfa del haz. El resultado de Simpson establece que un haz de Higgs (E, Φ) es poliestable si y solo si existe una métrica Hermitiana que satisface la condición de Hermite-Yang-Mills: La curvatura media de Hitchin-Simpson es proporcional por una constante al endomorfismo identidad de E . Esta correspondencia es un resultado fundamental en geometría compleja comúnmente conocido como la correspondencia de Hitchin-Kobayashi y ha sido extendida para haces de Higgs, por ejemplo en los trabajos de Bruzzo y Graña [6], Cardona [12] y Li y Zhang [24]. Posteriormente, siguiendo las ideas de Uhlenbeck, Yau y Simpson, Bando y Siu demostraron la correspondencia de

Hitchin-Kobayashi para gavillas [4].

En las últimas tres décadas los haces de Higgs han sido estudiados de manera exhaustiva, principalmente estudiando objetos como la curvatura media de Hitchin-Simpson y los funcionales de Donaldson, Kobayashi y Yang-Mills-Higgs. Algunos de los resultados sobre la correspondencia de Hitchin-Kobayashi para haces de Higgs se basan esencialmente en analizar ciertas propiedades del funcional de Donaldson, por lo que en principio los funcionales mencionados anteriormente juegan un papel importante en la teoría de haces de Higgs. Para un haz holomorfo sobre una variedad de Kähler compacta, los funcionales de Kobayashi y Yang-Mills están definidos sobre el espacio de métricas Hermitianas del haz y se diferencian por una constante topológica [23]. Estos funcionales se pueden extender de manera natural para haces de Higgs y al contrario del caso clásico, la diferencia de estos funcionales es un término que depende de la métrica Hermitiana.

Recientemente, los haces de Higgs y las ecuaciones de Hitchin han sido de gran interés tanto en matemáticas como en física. Un claro ejemplo de esto son los artículos de Kapustin y Witten [22, 36] y de Gagliardo y Uhlenbeck [17]. En particular, en [22] se muestran ciertos vínculos entre el programa geométrico de Langlands, la teoría cuántica de campos supersimétrica y los haces de Higgs. También en el trabajo de Wijnholt [35] se muestra que los haces de Higgs tienen gran relevancia en la teoría de cuerdas. Por otro lado, Ward generalizó las ecuaciones de Hitchin para variedades complejas de dimensión arbitraria k [33, 34]. Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones $2k$ -Hitchin y han sido estudiadas desde el punto de vista físico-matemático y geométrico usando haces de Higgs [9, 21, 33, 34].

Los objetivos de esta tesis son principalmente dos: Dar una introducción a los haces de Higgs siguiendo la teoría clásica de haces holomorfos en geometría compleja, y exponer algunos de los resultados más importantes sobre dichos haces. En particular, en este trabajo el lector puede encontrar un análisis relativamente detallado sobre métricas de Hermite-Yang-Mills y los teoremas de anulamiento. En los apéndices A y B se da un breve repaso a la teoría de haces holomorfos y las herramientas que se utilizan a lo largo de este trabajo. Por ejemplo, se presenta un resumen de las definiciones y propiedades básicas del operador de Hodge, las clases de Chern y las formas diferenciales con valores en un haz. En el capítulo 1 se mencionan algunos hechos históricos sobre el desarrollo de la teoría de haces de Higgs y su importancia en la física y matemática, se dan las definiciones y propiedades básicas como los morfismos de Higgs, secciones Φ -invariantes, la conexión de Hitchin-Simpson y se muestran algunos ejemplos particulares. En el capítulo 2 se muestra un análisis detallado sobre la curvatura media de Hitchin-Simpson y las métricas de Hermite-Yang-Mills en haces asociados. Se demuestran algunos teoremas de anulamiento y se da un breve repaso de los resultados que hay sobre la correspondencia de Hitchin-Kobayashi para haces de Higgs. Finalmente, en el capítulo 3 se definen los funcionales de Kobayashi y Yang-Mills-Higgs para haces de Higgs, se exponen algunas de sus propiedades más importantes y se muestra cómo se comparan en analogía con las versiones clásicas de estas propiedades.

1.2. Haces de Higgs y sus propiedades básicas

En esta sección se dan algunas definiciones básicas de la teoría de haces de Higgs siguiendo los artículos pioneros de Simpson [29, 30]. Una aproximación más reciente se puede consultar en el artículo de Bruzzo [6]. Se definen algunas operaciones sobre haces de Higgs como la suma directa y el producto tensorial, y se muestran algunos ejemplos no triviales dados por Seaman en [28].

A lo largo de este manuscrito (M, g) denotará una variedad de Kähler compacta m -dimensional con forma de Kähler ω .

Definición 1.2.1. Un *haz de Higgs* es un par $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ con $E \rightarrow M$ un haz holomorfo de rango r sobre M , y $\Phi \in A^{1,0}(\text{End } E)$ una $(1, 0)$ -forma holomorfa con valores en $\text{End } E$ tal que

$$\Phi \wedge \Phi = 0. \quad (1.1)$$

La forma Φ es llamada el *campo de Higgs* de \mathcal{E} .

Sea (z^1, \dots, z^m) un sistema de coordenadas holomorfas de M y considere el marco holomorfo (dz^1, \dots, dz^m) de $\Omega^{1,0}$. Entonces Φ se expresa localmente como $\Phi = \sum \Phi_\alpha dz^\alpha$, donde cada Φ_α es un endomorfismo holomorfo de E . De la expresión

$$\Phi \wedge \Phi = \sum (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta) dz^\alpha \wedge dz^\beta = \sum_{\alpha < \beta} [\Phi_\alpha, \Phi_\beta] dz^\alpha \wedge dz^\beta, \quad (1.2)$$

se sigue que la condición $\Phi \wedge \Phi = 0$ es equivalente a que cada endomorfismo Φ_α conmute con los demás, *i.e.*,

$$[\Phi_\alpha, \Phi_\beta] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.3)$$

Se pueden definir algunas operaciones sobre haces de Higgs como el producto tensorial, la suma directa y el dual. Sean $\mathcal{E} = (E, \Phi)$, $\mathcal{E}_1 = (E_1, \Phi_1)$ y $\mathcal{E}_2 = (E_2, \Phi_2)$ haces de Higgs sobre M . Se define el producto tensorial $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ como

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = (E_1 \otimes E_2, \Phi_{1 \otimes 2}) \quad \text{con} \quad \Phi_{1 \otimes 2} = \Phi_1 \otimes I_{E_2} + I_{E_1} \otimes \Phi_2, \quad (1.4)$$

y la suma directa $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ como

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = (E_1 \oplus E_2, \Phi_{1 \oplus 2}) \quad \text{con} \quad \Phi_{1 \oplus 2} = \Phi_1 \oplus \Phi_2. \quad (1.5)$$

Se puede verificar directamente que $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ son haces de Higgs. En efecto, si

$\Phi_1 = \sum \Phi_{1\alpha} dz^\alpha$ y $\Phi_2 = \sum \Phi_{2\alpha} dz^\alpha$ entonces usando (1.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi_{1\otimes 2} \wedge \Phi_{1\otimes 2} &= (\Phi_1 \otimes I_{E_2}) \wedge (\Phi_1 \otimes I_{E_2}) + (\Phi_1 \otimes I_{E_2}) \wedge (I_{E_1} \otimes \Phi_2) \\
&\quad + (I_{E_1} \otimes \Phi_2) \wedge (\Phi_1 \otimes I_{E_2}) + (I_{E_1} \otimes \Phi_2) \wedge (I_{E_1} \otimes \Phi_2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} \left([\Phi_{1\alpha}, \Phi_{1\beta}] \otimes I_{E_2} + I_{E_1} \otimes [\Phi_{2\alpha}, \Phi_{2\beta}] \right) dz^\alpha \wedge dz^\beta \\
&\quad + \sum \Phi_{1\alpha} \otimes \Phi_{2\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta + \sum \Phi_{1\beta} \otimes \Phi_{2\alpha} dz^\alpha \wedge dz^\beta \\
&= 0, \\
\Phi_{1\oplus 2} \wedge \Phi_{1\oplus 2} &= \sum \begin{pmatrix} \Phi_{1\alpha} & 0 \\ 0 & \Phi_{2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{1\beta} & 0 \\ 0 & \Phi_{2\beta} \end{pmatrix} dz^\alpha \wedge dz^\beta \\
&= \sum \begin{pmatrix} \Phi_{1\alpha} \circ \Phi_{1\beta} & 0 \\ 0 & \Phi_{2\alpha} \circ \Phi_{2\beta} \end{pmatrix} dz^\alpha \wedge dz^\beta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $\Phi = \sum \Phi_\alpha dz^\alpha$ y $\Phi_\alpha^* : E^* \rightarrow E^*$ denota el operador dual de Φ_α , entonces $\mathcal{E}^* = (E^*, \Phi^*)$ es un haz de Higgs con $\Phi^* = \sum \Phi_\alpha^* dz^\alpha$. En efecto, para $L \in E^*$ se tiene que $\Phi_\alpha^* L = L \circ \Phi_\alpha$ y de la identidad $\Phi_\alpha^* \circ \Phi_\beta^* = (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha)^*$ se sigue

$$(\Phi_\alpha^* \circ \Phi_\beta^* - \Phi_\beta^* \circ \Phi_\alpha^*) L = L \circ (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha - \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta) = 0.$$

De manera análoga al caso anterior, sea $f : N \rightarrow M$ una función holomorfa sobre una variedad de Kähler compacta N y defina $f^* \Phi = \sum (f^* \Phi_\alpha) f^* dz^\alpha$, donde $f^* \Phi_\alpha$ y $f^* dz^\alpha$ denotan el pullback de Φ_α y dz^α por f , respectivamente. Entonces,

$$[f^* \Phi_\alpha, f^* \Phi_\beta] = f^* [\Phi_\alpha, \Phi_\beta] = 0$$

y por lo tanto $f^* \mathcal{E} = (f^* E, f^* \Phi)$ es un haz de Higgs.

Dado un haz holomorfo $E \rightarrow M$, el ejemplo más simple de un haz de Higgs (E, Φ) es el caso $\Phi = 0$. No obstante, como es mencionado por Hitchin en [19], este caso es de particular interés geométrico. Los primeros ejemplos no triviales de haces de Higgs aparecen en los artículos de Hitchin [19] y Simpson [29], los cuales son notablemente técnicos. En particular, para algunos de estos Hitchin considera haces asociados a raíces cuadradas del haz canónico de una superficie de Riemann compacta. Dicho ejemplo se discutirá con algún detalle al final de la sección 2.5, cuando se introduzca el concepto de estabilidad de Mumford y su relación con la existencia de métricas de Hermite-Yang-Mills. Por otro lado, Simpson introduce en [29] la noción de un sistema de haces de Hodge como un objeto que utiliza para estudiar las variaciones de estructuras de Hodge en geometría algebraica. Un *sistema de haces de Hodge* es una suma directa de haces holomorfos junto con morfismos holomorfos

$$E = \bigoplus_{p+q=w} E^{p,q}, \quad \Phi^{p,q} : E^{p,q} \rightarrow E^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{1,0}$$

tales que $\Phi^{p-1,q+1} \wedge \Phi^{p,q} = 0$. Note que a partir de los morfismos $\Phi^{p,q}$ se define de la manera obvia $\Phi : E \rightarrow E \otimes \Omega^{1,0}$, de modo que se satisface la condición $\Phi \wedge \Phi = 0$. Por lo tanto (E, Φ) es un haz de Higgs.

Otros ejemplos de haces de Higgs aparecen en el artículo de Seaman [28] como construcciones asociadas al haz cotangente de una variedad compleja. Suponga que existe una forma holomorfa $\lambda \in \Omega^{s,0}$ que no se anula con s impar. Sea $E = \bigoplus_{p=0}^m \Omega^{p,0}$ el haz holomorfo de $(p,0)$ -formas para cualquier p . Se define Φ mediante la condición $\Phi(v)\xi = (\iota_v \lambda) \wedge \xi$, donde v es un campo vectorial en M , ξ es una sección holomorfa de E y $\iota_v : \Omega^{p,0} \rightarrow \Omega^{p-1,0}$ denota el operador de contracción o producto interior por el campo vectorial v . Note que Φ aplicada a ξ se puede escribir como

$$\Phi \xi = \sum ((\iota_{\partial_\alpha} \lambda) \wedge \xi) dz^\alpha, \quad (1.6)$$

donde cada componente $(\iota_{\partial_\alpha} \lambda) \wedge \xi$ es holomorfa ya que λ es holomorfa. Se sigue que $\Phi : E \rightarrow E \otimes \Omega^{1,0}$ es una $(1,0)$ -forma holomorfa con valores en $\text{End } E$. Como $\iota_v \lambda$ es una forma de grado par, la condición $\Phi \wedge \Phi = 0$ se sigue de usar (1.3), *i.e.*,

$$[\iota_{\partial_\alpha} \lambda, \iota_{\partial_\beta} \lambda] = (\iota_{\partial_\alpha} \lambda) \wedge (\iota_{\partial_\beta} \lambda) - (\iota_{\partial_\beta} \lambda) \wedge (\iota_{\partial_\alpha} \lambda) = 0.$$

Por lo tanto el par $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ es un haz de Higgs. Por último, cabe mencionar que la forma λ puede definirse, por ejemplo, en el caso de una variedad de Calabi-Yau de dimensión impar. Para más detalles sobre los aspectos geométricos de este ejemplo ver [28].

Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs. Se define el *rango* de \mathcal{E} como el rango del haz subyacente E , esto es, $\text{rk } \mathcal{E} = \text{rk } E$. De manera similar, se definen la *primera y segunda clases de Chern*, el *grado* y el *slope* de \mathcal{E} , *i.e.*,

$$c_1(\mathcal{E}) = c_1(E), \quad c_2(\mathcal{E}) = c_2(E), \quad \deg \mathcal{E} = \deg E, \quad \mu(\mathcal{E}) = \mu(E), \quad (1.7)$$

donde la última igualdad es una consecuencia de la tercera y de la definición clásica (B.44) ya que $\mu(\mathcal{E}) = \deg \mathcal{E} / \text{rk } \mathcal{E}$. Siguiendo [6] se tienen las siguientes definiciones.

Definición 1.2.2. Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs. Una sección $\xi \in A^0(E)$ es Φ -*invariante* si existe una $(1,0)$ -forma holomorfa $\lambda \in A^{1,0}$ tal que $\Phi \xi = \xi \otimes \lambda$, *i.e.*, si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E \otimes \Omega^{1,0} \\ \xi \uparrow & \nearrow \xi \otimes \lambda & \\ M & & \end{array}$$

Note que, aplicando el campo de Higgs sobre el espacio de secciones Φ -invariantes, se tiene la siguiente expresión

$$\Phi \xi = (I \otimes \lambda) \xi, \quad (1.8)$$

donde la forma λ depende de cada sección ξ . Como se verá en la sección 2.1, algunos resultados de la teoría de haces holomorfos se extienden para haces de Higgs usando la noción de sección Φ -invariante (ver sección B.2).

Definición 1.2.3. Sean $\mathcal{E}_1 = (E_1, \Phi_1)$ y $\mathcal{E}_2 = (E_2, \Phi_2)$ haces de Higgs sobre la misma variedad M . Un *morfismo de Higgs* de \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 es un homomorfismo holomorfo de haces $f : E_1 \rightarrow E_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_2 \\ E_1 \otimes \Omega^{1,0} & \xrightarrow{f \otimes I} & E_2 \otimes \Omega^{1,0} \end{array}$$

Se sigue de esta definición que la composición de morfismos de Higgs es un morfismo de Higgs. En efecto, basta con observar que para morfismos de Higgs $f : (E_1, \Phi_1) \rightarrow (E_2, \Phi_2)$ y $g : (E_2, \Phi_2) \rightarrow (E_3, \Phi_3)$ se tiene el siguiente diagrama compuesto que conmuta ya que cada diagrama interior conmuta. Por lo tanto $g \circ f : (E_1, \Phi_1) \rightarrow (E_3, \Phi_3)$ es un morfismo de Higgs.

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 & \xrightarrow{g} & E_3 \\ \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_3 \\ E_1 \otimes \Omega^{1,0} & \xrightarrow{f \otimes I} & E_2 \otimes \Omega^{1,0} & \xrightarrow{g \otimes I} & E_3 \otimes \Omega^{1,0} \end{array}$$

Definición 1.2.4. Un haz de Higgs $\mathcal{F} = (F, \Psi)$ es un *subhaz de Higgs* del haz de Higgs $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ si F es un subhaz holomorfo de E y la inclusión $\iota : F \hookrightarrow E$ es un morfismo de Higgs.

Con relación a la definición de subhaz de Higgs se introduce la noción de subhaz Φ -invariante. Se dice que un subhaz holomorfo $F \subset E$ es Φ -*invariante* si satisface $\Phi(F) \subset F \otimes \Omega^{1,0}$. Suponga que $\mathcal{F} = (F, \Psi)$ es un subhaz de Higgs de $\mathcal{E} = (E, \Phi)$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\iota} & E \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ F \otimes \Omega^{1,0} & \xrightarrow{\iota \otimes I} & E \otimes \Omega^{1,0} \end{array}$$

Esto último, junto con el hecho de que Ψ sea campo de Higgs implican la contención

$$\Phi(F) = \Phi \circ \iota(F) = (\iota \otimes I) \circ \Psi(F) \subset (\iota \otimes I)(F \otimes \Omega^{1,0}) = F \otimes \Omega^{1,0}.$$

Por lo tanto F es un subhaz Φ -invariante. Por otro lado, se sigue que un subhaz Φ -invariante $F \subset E$ define un subhaz de Higgs de la manera obvia. Esto es, el par $(F, \Phi|_F)$ es un subhaz de Higgs. De lo anterior se concluye que las nociones de subhaz de Higgs y subhaz Φ -invariante son equivalentes.

Retomando el ejemplo del haz de p -formas $E = \bigoplus_{p=0}^m \Omega^{p,0}$, si $E^a = \bigoplus_{p=a}^m \Omega^{p,0}$ para $a \geq 0$ se define un campo de Higgs Φ^a en E^a de la misma forma que en (1.6) para cada $\xi \in A^0(E^a)$. Consecuentemente los pares $\mathcal{E}^a = (E^a, \Phi^a)$ forman una filtración de subhaces de Higgs, *i.e.*, una familia de haces de Higgs $\{\mathcal{E}^a\}_{a \geq 0}$ tal que

$$0 \subset \mathcal{E}^m \subset \mathcal{E}^{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}.$$

1.3. La conexión de Hitchin-Simpson

En esta sección se retoman algunos de los conceptos y resultados vistos en los apéndices A y B, y se extienden para el caso de haces de Higgs. Siguiendo [8] y [29] se define la conexión de Hitchin-Simpson y sus operadores asociados como la curvatura y curvatura media.

Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs y sea (dz^1, \dots, dz^m) el marco holomorfo de $\Omega^{1,0}$ asociado a las coordenadas y (s_1, \dots, s_r) un marco para E con marco dual (s^1, \dots, s^r) . Una *métrica Hermitiana* en \mathcal{E} es una métrica Hermitiana en el haz holomorfo $E \rightarrow M$. Considere h una métrica Hermitiana en \mathcal{E} . Siguiendo la sección B.1, si el campo de Higgs Φ se expresa como

$$\Phi = \sum \Phi_{\alpha j}^i s_i \otimes s^j dz^\alpha,$$

entonces el Hermitiano conjugado de Φ es el elemento $\bar{\Phi}_h \in A^{0,1}(\text{End } E)$ determinado por la fórmula (B.14), *i.e.*,

$$h(\bar{\Phi}_h \xi, \eta) = h(\xi, \Phi \eta) \quad (1.9)$$

para cualquier par de secciones $\xi, \eta \in A^0(E)$. La forma $\bar{\Phi}_h$ se expresa como

$$\bar{\Phi}_h = \sum \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}} dz^\beta = \sum \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}j}^i s_i \otimes s^j dz^\beta, \quad (1.10)$$

donde por (B.21), los endomorfismos Φ_β y $\bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}$ están relacionados por

$$\bar{\Phi}_{h\bar{\beta}j}^i = (-1)^{1 \cdot 0} \sum h_{j\bar{l}} \overline{\Phi_{\beta k}^l} h^{i\bar{k}} = \sum h_{j\bar{l}} \overline{\Phi_{\beta k}^l} h^{i\bar{k}}, \quad (1.11)$$

con $h_{i\bar{k}} = h(s_i, s_k)$. Cuando se elige un marco unitario para E de modo que $h_{i\bar{k}} = \delta_{i\bar{k}}$, la igualdad (1.11) se simplifica a

$$\bar{\Phi}_{h\bar{\beta}j}^i = \overline{\Phi_{\beta i}^j} \quad \text{o equivalentemente} \quad \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}} = \Phi_\beta^\dagger. \quad (1.12)$$

Es decir, la matriz que representa a $\bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}$ es formalmente el adjunto de la matriz que representa Φ_{β} . De la condición de Φ -invarianza (1.8) y la igualdad (1.12) se sigue que, en lo que compete a secciones Φ -invariantes, el Hermitiano conjugado $\bar{\Phi}_h$ satisface

$$\bar{\Phi}_h \xi = (I \otimes \bar{\lambda})\xi = \xi \otimes \bar{\lambda}. \quad (1.13)$$

Retomando la sección A.2, dado un haz Hermitiano holomorfo (E, h) , la proposición A.2.3 garantiza la existencia de una única conexión D_h en E , llamada la conexión de Chern, que es compatible con la métrica h y la estructura holomorfa, *i.e.*,

$$dh(\xi, \eta) = h(D_h \xi, \eta) + h(\xi, D_h \eta) \quad \forall \xi, \eta \in A^0(E), \quad (1.14)$$

y su descomposición en tipos está dada por $D_h = D'_h + d''$.

Lema 1.3.1. *Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs y h una métrica Hermitiana en \mathcal{E} . Entonces*

$$D'_h \bar{\Phi}_h = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\Phi}_h \wedge \bar{\Phi}_h = 0. \quad (1.15)$$

Demostración. Aplicando d' a la fórmula del Hermitiano conjugado $\bar{\Phi}_h$ en (1.9) y usando la fórmula (A.16) para la conexión de Chern $D_h = D'_h + d''$, se tiene

$$h(D'_h(\bar{\Phi}_h \xi), \eta) - h(\bar{\Phi}_h \xi, d'' \eta) = h(D'_h \xi, \Phi \eta) + h(\xi, d''(\Phi \eta)) \quad (1.16)$$

para secciones $\xi, \eta \in A^0(E)$. Como Φ y η son holomorfas se tiene $d'' \eta = 0$ y $d''(\Phi \eta) = 0$, y se sigue que el segundo término de cada lado de la igualdad (1.16) se anula. Observe que por la regla de Leibniz se tiene

$$D'_h(\bar{\Phi}_h \xi) = (D'_h \bar{\Phi}_h) \xi - \bar{\Phi}_h \wedge D'_h \xi$$

y la fórmula (1.16) implica

$$\begin{aligned} h((D'_h \bar{\Phi}_h) \xi, \eta) &= h(D'_h \xi, \Phi \eta) + h(\bar{\Phi}_h \wedge D'_h \xi, \eta) \\ &= h(D'_h \xi, \Phi \eta) - h(D'_h \xi, \Phi \eta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó la definición del Hermitiano conjugado y el signo menos aparece debido al intercambio de las formas $\bar{\Phi}_h$ y $D'_h \xi$. Como esto se cumple para cualesquiera ξ y η holomorfas, se concluye que $D'_h \bar{\Phi}_h = 0$.

Para demostrar que $\bar{\Phi}_h \wedge \bar{\Phi}_h = 0$ simplemente se usan las propiedades del Hermitiano conjugado. Esto es, para cualquier par de secciones holomorfas $\xi, \eta \in A^0(E)$ se tiene

$$h(\bar{\Phi}_h \wedge \bar{\Phi}_h \xi, \eta) = -h(\bar{\Phi}_h \xi, \Phi \eta) = -h(\xi, \Phi \wedge \bar{\Phi}_h \eta) = 0,$$

lo que implica $\bar{\Phi}_h \wedge \bar{\Phi}_h = 0$. □

Simpson define en [29] una conexión en un haz de Higgs \mathcal{E} usando la conexión de Chern del haz subyacente y el campo de Higgs. Dicha conexión está dada por

$$\mathcal{D}_h = D_h + \Phi + \bar{\Phi}_h \quad (1.17)$$

y es llamada la *conexión de Hitchin-Simpson*. Se sigue de la misma definición (1.17) que \mathcal{D}_h satisface la regla de Leibniz y en efecto es una conexión en \mathcal{E} . Note que \mathcal{D}_h se puede escribir como la suma de dos operadores

$$\mathcal{D}_h = \mathcal{D}'_h + \mathcal{D}'' , \quad \text{con} \quad \mathcal{D}'_h = D'_h + \bar{\Phi}_h \quad \text{y} \quad \mathcal{D}'' = d'' + \Phi , \quad (1.18)$$

enfaticando la dependencia sobre la métrica h solamente en el término \mathcal{D}'_h . Otro hecho notable es que de la definición de \mathcal{D}'' en (1.18) se sigue que Φ es un campo de Higgs si y solo si $\mathcal{D}''^2 = 0$. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}''^2 &= d''^2 + d'' \wedge \Phi + \Phi \wedge d'' + \Phi \wedge \Phi \\ &= d''\Phi + \Phi \wedge \Phi , \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó la regla de Leibniz y el hecho que $d''^2 = 0$. Se sigue que Φ es un campo de Higgs si y solo si $\mathcal{D}''^2 = 0$. El hecho anterior justifica que la condición $\Phi \wedge \Phi = 0$ usualmente sea llamada una *condición de integrabilidad* (ver [13, pp. 397-401]), pues en la definición de campo de Higgs usualmente se sobrentiende la holomorfía de Φ .

La curvatura de esta conexión se define como $\mathcal{R}_h = \mathcal{D}_h \wedge \mathcal{D}_h$ y es llamada la *curvatura de Hitchin-Simpson*. Como consecuencia del lema 1.3.1 se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2. *Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs y h una métrica Hermitiana en \mathcal{E} . Entonces la curvatura de Hitchin-Simpson está dada por*

$$\mathcal{R}_h = R_h + D'_h \Phi + d'' \bar{\Phi}_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h] . \quad (1.19)$$

Demostración. Usando la condición de integrabilidad y la identidad $\bar{\Phi}_h \wedge \bar{\Phi}_h = 0$ del lema 1.3.1, la curvatura de Hitchin-Simpson se expresa como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h &= (D_h + \Phi + \bar{\Phi}_h) \wedge (D_h + \Phi + \bar{\Phi}_h) \\ &= D_h \wedge D_h + D_h \wedge \Phi + \Phi \wedge D_h + D_h \wedge \bar{\Phi}_h + \bar{\Phi}_h \wedge D_h \\ &\quad + \Phi \wedge \bar{\Phi}_h + \bar{\Phi}_h \wedge \Phi \\ &= R_h + D_h \Phi + D_h \bar{\Phi}_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h] , \end{aligned}$$

donde R_h es la curvatura de Chern, $D_h \Phi$ y $D_h \bar{\Phi}_h$ son las derivadas covariantes de Φ y $\bar{\Phi}_h$, respectivamente, y el conmutador $[\Phi, \bar{\Phi}_h]$ queda determinado por la fórmula general (B.18), esto es,

$$[\Phi, \bar{\Phi}_h] = \Phi \wedge \bar{\Phi}_h + \bar{\Phi}_h \wedge \Phi .$$

Como Φ es holomorfa se sigue $D_h \Phi = D'_h \Phi$ y de la primera igualdad en (1.15) se tiene $D_h \bar{\Phi}_h = d'' \bar{\Phi}_h$. Por lo tanto la expresión de arriba para \mathcal{R}_h se simplifica a

$$\mathcal{R}_h = R_h + D'_h \Phi + d'' \bar{\Phi}_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h].$$

□

Al observar la expresión (1.19) queda claro que la curvatura de Hitchin-Simpson tiene componentes de tipo distinto. Más precisamente, $D'_h \Phi \in A^{2,0}(\text{End } E)$ ya que D'_h y Φ son de tipo $(1, 0)$, $d'' \bar{\Phi}_h \in A^{0,2}(\text{End } E)$ ya que d'' y $\bar{\Phi}_h$ son de tipo $(0, 1)$, mientras que el término restante $R_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h]$ está en $A^{1,1}(\text{End } E)$ ya que cada sumando es de tipo $(1, 1)$. Así, usando un coordenadas holomorfas (z_1, \dots, z_n) para M , la descomposición en tipos de \mathcal{R}_h se expresa como

$$\mathcal{R}_h^{2,0} = \sum \mathcal{R}_{h\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{R}_h^{1,1} = \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \quad (1.21)$$

$$\mathcal{R}_h^{0,2} = \sum \mathcal{R}_{h\bar{\alpha}\bar{\beta}} d\bar{z}^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \quad (1.22)$$

y cada parte está dada por

$$\mathcal{R}_h^{2,0} = D'_h \Phi, \quad \mathcal{R}_h^{1,1} = R_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h], \quad \mathcal{R}_h^{0,2} = d'' \bar{\Phi}_h. \quad (1.23)$$

Cabe mencionar que si se usa un marco unitario para $\Omega^{1,0}$ en lugar de un marco holomorfo, las expresiones (1.20)-(1.23) resultan análogas. En particular, la parte $(1, 1)$ de \mathcal{R}_h es de interés ya que como se verá, es la parte que interviene en la curvatura media de Hitchin-Simpson y se escribe explícitamente como

$$\mathcal{R}_h^{1,1} = \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta = \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i s_i \otimes s^j dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta. \quad (1.24)$$

Considerando la expresión (B.19) con respecto a un marco holomorfo en lugar de un marco unitario, se tiene

$$[\Phi, \bar{\Phi}_h] = \sum [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}] dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \quad (1.25)$$

donde las componentes del conmutador $[\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}]$ están dadas por

$$\begin{aligned} [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}]_j^i &= (\Phi_\alpha \circ \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}} - \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}} \circ \Phi_\alpha)_j^i \\ &= \sum (\Phi_{\alpha k}^i \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}j}^k - \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}k}^i \Phi_{\alpha j}^k). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Se sigue que

$$\mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}} = R_{h\alpha\bar{\beta}} + [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}], \quad (1.27)$$

y por lo tanto las componentes de $\mathcal{R}_h^{1,1}$ están dadas por

$$\mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i = R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i + \sum (\Phi_{\alpha k}^i \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}j}^k - \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}k}^i \Phi_{\alpha j}^k). \quad (1.28)$$

Capítulo 2

Curvatura media y métricas de Hermite-Yang-Mills (HYM)

En este capítulo se presentan algunos resultados sobre anulamiento y existencia de secciones holomorfas de haces de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta, más comúnmente conocidos como teoremas de anulamiento [23, 6, 12]. Como se mencionó anteriormente, algunos de estos resultados son una extensión de los teoremas clásicos de anulamiento para haces holomorfos. En esta sección se siguen principalmente los artículos de Bruzzo y Graña [6] y de Cardona [12].

2.1. La curvatura media de Hitchin-Simpson

Primero se darán algunas definiciones para la curvatura media de Hitchin-Simpson. Note que el producto wedge ω^{m-1} de la forma de Kähler es de tipo $(m-1, m-1)$ y por lo tanto

$$\mathcal{R}_h \wedge \omega^{m-1} = (\mathcal{R}_h^{2,0} + \mathcal{R}_h^{1,1} + \mathcal{R}_h^{0,2}) \wedge \omega^{m-1} = \mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \omega^{m-1}. \quad (2.1)$$

Se define la *curvatura media de Hitchin-Simpson* como el elemento $\mathcal{K}_h \in A^0(\text{End } E)$ tal que

$$im \mathcal{R}_h \wedge \omega^{m-1} = im \mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \omega^{m-1} = \mathcal{K}_h \omega^m \quad (2.2)$$

Observe que a partir de la definición (1.24) para $\mathcal{R}_h^{1,1}$, si se definen

$$\mathcal{K}_{hj}^i = \sum g^{\alpha\bar{\beta}} \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i \quad y \quad \mathcal{K}_{hj\bar{k}} = \sum h_{i\bar{k}} \mathcal{K}_{hj}^i, \quad (2.3)$$

entonces se puede considerar a la curvatura media de Hitchin-Simpson como el endomorfismo o la forma dadas por

$$\mathcal{K}_h = \sum \mathcal{K}_{hj}^i s_i \otimes s^j, \quad \hat{\mathcal{K}}_h = \sum \mathcal{K}_{hj\bar{k}} s^j \otimes \bar{s}^k. \quad (2.4)$$

De la definición anterior para \mathcal{K}_h y de (1.27) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{hj}^i &= \sum g^{\alpha\bar{\beta}} \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i \\ &= \sum g^{\alpha\bar{\beta}} \left(R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i + [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}]_j^i \right) \\ &= K_{hj}^i + \sum g^{\alpha\bar{\beta}} [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}]_j^i,\end{aligned}\tag{2.5}$$

Por lo tanto la curvatura media de Hitchin-Simpson se expresa como

$$\mathcal{K}_h = K_h + \sum g^{\alpha\bar{\beta}} [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}].\tag{2.6}$$

Dadas dos secciones $\xi = \sum \xi^i s_i$ y $\eta = \sum \eta^i s_i$, las aplicaciones $\mathcal{K}_h \xi$ y $\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \eta)$ se expresan localmente como

$$\mathcal{K}_h \xi = \sum \mathcal{K}_{hj}^i \xi^j s_i, \quad \hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \eta) = \sum \mathcal{K}_{hj\bar{k}} \xi^j \bar{\eta}^k.\tag{2.7}$$

Note que la curvatura media depende tanto de la métrica h en E como de la métrica g en M , y ambas definiciones en (2.4) están relacionadas mediante h como

$$\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \eta) = h(\mathcal{K}_h \xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta \in A^0(E).\tag{2.8}$$

De ahora en adelante se referirá indistintamente a \mathcal{K}_h y $\hat{\mathcal{K}}_h$ como la curvatura media de Hitchin-Simpson.

2.2. Teoremas de anulamiento

En esta sección se enuncian algunos de los resultados sobre existencia y anulamiento de secciones Φ -invariantes en un haz de Higgs siguiendo los artículos de Bruzzo y Graña [6] y de Cardona [12].

Teorema 2.2.1. *Sea (\mathcal{E}, h) un haz de Higgs Hermitiano sobre (M, g) . Entonces*

(a) *Si la curvatura media de Hitchin-Simpson $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida en todo M , entonces cada sección Φ -invariante $\xi \in A^0(E)$ satisface*

$$\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \xi) = 0,\tag{2.9}$$

y es paralela en el sentido clásico, i.e., $D_h \xi = 0$ donde D_h es la conexión de Chern.

(b) *Si la curvatura media de Hitchin-Simpson $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida en todo M y negativa definida en algún punto de M , entonces \mathcal{E} no tiene secciones Φ -invariantes no triviales.*

Demostración. (a) Sea ξ una sección no trivial Φ -invariante de \mathcal{E} y suponga que $\hat{\mathcal{K}}_h$ es semi-definida negativa en todo M . De la descomposición (1.19) para la curvatura de Hitchin-Simpson se tiene

$$\mathcal{R}_h \xi = R_h \xi + D'_h \Phi \xi + d'' \bar{\Phi}_h \xi + [\Phi, \bar{\Phi}_h] \xi. \quad (2.10)$$

Como ξ es Φ -invariante $\bar{\Phi} \xi = \xi \otimes \lambda$ y por (1.13) se tiene $\bar{\Phi}_h \xi = \xi \otimes \bar{\lambda}$, entonces

$$[\Phi, \bar{\Phi}_h] \xi = \xi \otimes \lambda \wedge \bar{\lambda} + \xi \otimes \bar{\lambda} \wedge \lambda = 0,$$

y por lo tanto la parte (1,1) de \mathcal{R}_h es simplemente R_h . Tomando la traza de (2.10) con respecto a g y aplicandolo a ξ se sigue que $\mathcal{K}_h \xi = K_h \xi$, o equivalentemente $\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \xi) = \hat{K}_h(\xi, \xi)$. Sustituyendo esta ultima igualdad en la fórmula de Weitzenböck (B.36) se obtiene

$$-\square h(\xi, \xi) = |D'_h \xi|^2 - \hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \xi) \geq 0, \quad (2.11)$$

ya que $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida. El principio maximal de Hopf implica que $h(\xi, \xi)$ es constante y por lo tanto $\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \xi) = 0$ y $|D'_h \xi|^2 = 0$, de modo que $D'_h \xi = 0$. Como ξ es holomorfa se sigue $D_h \xi = D'_h \xi + d'' \xi = 0$.

(b) Suponga que ξ es una sección no trivial Φ -invariante de \mathcal{E} y que $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida en todo M y negativa definida en algún punto de M . Entonces de (a) se sabe que ξ es paralela con respecto a D_h y por lo tanto no se anula en ningún punto de la variedad¹. Ahora, de la segunda igualdad en (2.7) con $\xi = \eta$ se obtiene

$$\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \xi) = \sum \mathcal{K}_{h_{j\bar{k}}} \xi^j \bar{\xi}^k.$$

Sea $x_0 \in M$ un punto en el que $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida y sean $\xi_0 = \xi(x_0)$, $K_{h_{j\bar{k}}}^0 = K_{h_{j\bar{k}}}(x_0)$. Ya que $\xi_0 \neq 0$ se sigue

$$\hat{\mathcal{K}}_h(\xi, \xi)(x_0) = \sum \mathcal{K}_{h_{j\bar{k}}}^0 \xi_0^j \bar{\xi}_0^k < 0,$$

lo cual es una contradicción, debido a que (a) implica $\hat{\mathcal{K}}(\xi, \xi) = 0$ en todo M . □

Teorema 2.2.2. Sean (\mathcal{E}_1, h_1) y (\mathcal{E}_2, h_2) haces de Higgs Hermitianos sobre una variedad Hermitiana de Kähler compacta (M, g) y sean $\hat{\mathcal{K}}_1$ y $\hat{\mathcal{K}}_2$ sus correspondientes curvaturas medias de Hitchin-Simpson. Sea $\Phi_{1 \otimes 2}$ el campo de Higgs de $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, h_{1 \otimes 2})$ con $h_{1 \otimes 2} = h_1 \otimes h_2$ y sea $\hat{\mathcal{K}}_{1 \otimes 2}$ la curvatura media de Hitchin-Simpson de este producto tensorial.

¹Si ξ es paralela entonces $dh(\xi, \xi) = h(D_h \xi, \xi) + h(\xi, D_h \xi) = 0$, de modo que $h(\xi, \xi)$ es constante. Si en un punto x' se tiene $\xi(x') \neq 0$, entonces $h(\xi(x), \xi(x)) = h(\xi(x'), \xi(x')) > 0$ y por lo tanto $\xi(x) \neq 0 \quad \forall x \in M$.

(a) Si ambas $\hat{\mathcal{K}}_1$ y $\hat{\mathcal{K}}_2$ son negativas semi-definidas en todo M , entonces cada sección $\Phi_{1\otimes 2}$ -invariante ξ de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ es paralela con respecto a la conexión de Chern $D_{1\otimes 2}$ relativa a $h_{1\otimes 2}$, i.e., $D_{1\otimes 2}\xi = 0$ y satisface

$$\hat{\mathcal{K}}_{1\otimes 2}(\xi, \xi) = 0.$$

(b) Si ambas $\hat{\mathcal{K}}_1$ y $\hat{\mathcal{K}}_2$ son negativas semi-definidas en todo M y alguna de las dos es negativa definida en algún punto de M , entonces $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ no admite secciones Φ -invariantes no triviales.

Demostración. Un cálculo directo usando la condición (1.9) para $\Phi_{1\otimes 2}$ muestra que

$$\bar{\Phi}_{h_{1\otimes 2}} = \bar{\Phi}_{h_1} \otimes I_2 + I_1 \otimes \bar{\Phi}_{h_2},$$

donde $\bar{\Phi}_{h_1}$ y $\bar{\Phi}_{h_2}$ son los correspondientes Hermitianos conjugados de los campos de Higgs de \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 . Sean $R_{1\otimes 2}$ y $\mathcal{R}_{1\otimes 2}$ las curvaturas de Chern y de Hitchin-Simpson de $E_1 \otimes E_2$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1\otimes 2}^{1,1} &= R_{1\otimes 2} + [\Phi, \bar{\Phi}_{h_{1\otimes 2}}] \\ &= (R_{h_1} + [\Phi_1, \bar{\Phi}_{h_1}]) \otimes I_2 + I_1 \otimes (R_{h_2} + [\Phi_2, \bar{\Phi}_{h_2}]) \end{aligned}$$

y por lo tanto la curvatura media de Hitchin-Simpson de $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, h_{1\otimes 2})$ satisface

$$\mathcal{K}_{1\otimes 2} = \mathcal{K}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathcal{K}_2. \quad (2.12)$$

Ya que usando marcos unitarios para E_1 y E_2 las formas $\hat{\mathcal{K}}_1$ y $\hat{\mathcal{K}}_2$ son diagonales, se sigue de (2.12) que $\hat{\mathcal{K}}_{1\otimes 2}$ también es diagonal y sus elementos no cero están dados por

$$\hat{\mathcal{K}}_{1\otimes 2}(s_i \otimes t_j, s_i \otimes t_j) = \hat{\mathcal{K}}_1(s_i, s_i) + \hat{\mathcal{K}}_2(t_j, t_j).$$

Por lo tanto $\hat{\mathcal{K}}_{1\otimes 2}$ es negativa semi-definida en todo M y negativa definida en el punto donde $\hat{\mathcal{K}}_1$, o bien $\hat{\mathcal{K}}_2$, es negativa definida. Finalmente, (a) y (b) se siguen de aplicar el teorema 2.2.1. \square

Los siguientes corolarios son consecuencia inmediata del teorema 2.2.2.

Corolario 2.2.3. *Sea (\mathcal{E}, h) un haz de Higgs Hermitiano sobre una variedad Hermitiana de Kähler compacta (M, g) . Sea $(\mathcal{E}^{\otimes p}, h_{\otimes p})$ el producto tensorial de (\mathcal{E}, h) p -veces y sea Ψ su campo de Higgs (construido a partir del campo de Higgs Φ de \mathcal{E}) y $\hat{\mathcal{K}}_{\otimes p}$ su curvatura media de Hitchin-Simpson. Entonces*

(a) Si $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida en todo M , entonces cada sección Ψ -invariante ξ de $\mathcal{E}^{\otimes p}$ es paralela en el sentido clásico, i.e., $D_{\otimes p}\xi = 0$ y satisface

$$\hat{\mathcal{K}}_{\otimes p}(\xi, \xi) = 0.$$

(b) Si $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida en todo M y negativa definida en algún punto de M , entonces $\mathcal{E}^{\otimes p}$ no admite secciones Φ -invariantes no triviales.

Siguiendo la notación del apéndice A, sea (\mathcal{E}, h) un haz de Higgs Hermitiano sobre (M, g) y considere los haces holomorfos (TM, g) y $(\Omega^{1,0}, g^*)$ como haces de Higgs Hermitianos con el campo de Higgs cero. Entonces la métricas h y g^* inducen una métrica k en el haz de Higgs $\Omega^{p,0}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes \Omega^{p,0}$, de modo que el par $(\Omega^{p,0}(\mathcal{E}), k)$ se puede considerar como un haz de Higgs Hermitiano sobre (M, g) . Sea \hat{K}_g la curvatura media de Chern de (TM, g) y $\hat{K}_{\Omega^{p,0}}$ la curvatura media de Hitchin-Simpson de $(\Omega^{p,0}(\mathcal{E}), k)$. Se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.2.4. *Sea (\mathcal{E}, h) un haz de Higgs Hermitiano sobre una variedad de Kähler compacta (M, g) con campo de Higgs Φ , y sea $\hat{\mathcal{K}}_h$ su curvatura media de Hitchin-Simpson. Entonces*

(a) Si $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida y \hat{K}_g es positiva semi-definida en todo M , entonces cada sección Φ -invariante ξ en $\Omega^{p,0}(\mathcal{E})$ es paralela en el sentido clásico y satisface

$$\hat{K}_{\Omega^{p,0}}(\xi, \xi) = 0.$$

(b) Si $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa semi-definida y \hat{K}_g es positiva semi-definida en todo M , y adicionalmente $\hat{\mathcal{K}}_h$ es negativa definida, o bien \hat{K}_g es positiva definida en algún punto, entonces $\Omega^{p,0}(\mathcal{E})$ no admite secciones Φ -invariantes no triviales.

2.3. Métricas de HYM

Retomando la sección B.3, dado un haz Higgs $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ se tiene el espacio de métricas Hermitianas en \mathcal{E} denota usualmente por $\text{Herm}^+(\mathcal{E})$.

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs sobre (M, g) . Una métrica $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ es una *métrica de Hermite-Yang-Mills (HYM) débil con factor f* si satisface $\mathcal{K}_h = fI$, o equivalentemente $\hat{\mathcal{K}}_h = fh$, donde f es una función C^∞ real sobre M . Si el factor $f = c$ es constante, entonces h es una *métrica de Hermite-Yang-Mills con factor c* si satisface

$$\mathcal{K}_h = fI, \quad \text{o equivalentemente} \quad \hat{\mathcal{K}}_h = fh. \quad (2.13)$$

Ambas ecuaciones en (2.13) se conocen como *la ecuación de Hermite-Yang-Mills*. Se tienen las siguientes propiedades sobre la condición de HYM para los haces de Higgs asociados.

Proposición 2.3.2. *Sean $(\mathcal{E}, h), (\mathcal{E}_1, h_1), (\mathcal{E}_2, h_2)$ haces de Higgs Hermitianos sobre una variedad de Kähler compacta. Entonces*

(a) *Cualquier métrica sobre un haz de línea de Higgs es necesariamente una métrica de HYM débil.*

(b) *h es una métrica de HYM (débil) con factor f para \mathcal{E} , si y solo si, la métrica dual h^* es una métrica de HYM (débil) con factor $-f$ para \mathcal{E}^* .*

(c) *Si h_1 y h_2 son dos métricas de HYM (débiles) con factor f_1 y f_2 para \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , respectivamente, entonces $h_{1\otimes 2}$ es de HYM (débil) con factor $f_1 + f_2$ para el producto tensorial $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.*

(d) *La métrica $h_{1\oplus 2} = h_1 \oplus h_2$ en $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ es de HYM (débil) con factor f si y solo si ambas métricas, h_1 y h_2 , son de HYM (débiles) con el mismo factor f .*

Demostración. (a) Es inmediato debido a que el rango del haz es 1.

(b) Ya que en términos matriciales las componentes del campo de Higgs dual están dadas por $\Phi_\alpha^* = {}^t\Phi_\alpha$, y la curvatura media de Chern relativa a h^* satisface $K_{h^*} = -{}^tK_h$ (ver apéndice A.3), de la fórmula (2.6) se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{h^*} &= -{}^tK_h + \sum g^{\alpha\bar{\beta}} [{}^t\Phi_\alpha, {}^t\bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}] \\ &= -{}^tK_h - \sum g^{\alpha\bar{\beta}} {}^t[\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}] \\ &= -{}^t\mathcal{K}_h \\ &= -fI. \end{aligned}$$

El recíproco se demuestra análogamente.

(c) Como se vió en la demostración de teorema 2.2.2, $\mathcal{K}_{1\otimes 2}$ satisface

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1\otimes 2} &= \mathcal{K}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathcal{K}_2 \\ &= (f_1 + f_2)(I_1 \otimes I_2). \end{aligned}$$

(d) Usando directamente la definición del Hermitiano conjugado se puede demostrar que $\bar{\Phi}_{h_{1\oplus 2}} = \bar{\Phi}_{h_1} \oplus \bar{\Phi}_{h_2}$, y consecuentemente

$$[\Phi_{1\oplus 2}, \bar{\Phi}_{h_{1\oplus 2}}] = [\Phi_1, \bar{\Phi}_{h_1}] \oplus [\Phi_2, \bar{\Phi}_{h_2}].$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R}_h^{1,1} = (R_{h_1} + [\Phi_1, \bar{\Phi}_{h_1}]) \oplus (R_{h_2} + [\Phi_2, \bar{\Phi}_{h_2}]),$$

y si $\mathcal{K}_{1\oplus 2}$ denota la curvatura media de Hitchin-Simpson en $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, se concluye $\mathcal{K}_{1\oplus 2} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 = f(I_1 \oplus I_2)$. □

Corolario 2.3.3. *Sea $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ una métrica de HYM (débil) para \mathcal{E} . Entonces*

(a) La métrica inducida en el producto tensorial $\mathcal{E}^{\otimes p} \otimes \mathcal{E}^{*\otimes q}$ es una métrica de HYM (débil) con factor $(p - q)f$.

(b) La métrica inducida en el producto wedge $\wedge^p \mathcal{E}$ es una métrica de HYM (débil) con factor pf para cada $p \leq r = \text{rk } \mathcal{E}$.

Al igual que en el caso de haces holomorfos para métricas de Hermite-Einstein, si h es una métrica Hermite-Yang-Mills débil con factor f para \mathcal{E} , el slope de \mathcal{E} (definido en (1.7)) se puede expresar en términos de f . Este hecho se demuestra a continuación.

Proposición 2.3.4. *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta. Si $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ es una métrica de HYM débil con factor f , entonces*

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{2m\pi} \int_M f \omega^m. \quad (2.14)$$

Demostración. Por hipótesis h es de HYM débil con factor f , entonces la curvatura media de Hitchin-Simpson satisface

$$im \mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \omega^{m-1} = \mathcal{K}_h \omega^m = fI \omega^m. \quad (2.15)$$

Tomando la traza de (2.15) se obtiene

$$im (\text{tr } R_h + \text{tr} [\Phi, \bar{\Phi}_h]) \wedge \omega^{m-1} = rf \omega^m, \quad (2.16)$$

donde $r = \text{rk } \mathcal{E}$. De (2.15) se tiene $\text{tr} [\Phi, \bar{\Phi}_h] = 0$ ya que la traza de un conmutador de endomorfismos es cero. Por otro lado, integrando (2.16) sobre M y usando la representación (B.38) para $c_1(\mathcal{E})$ se obtiene

$$r \int_M f \omega^m = im \int_M \text{tr } R_h \wedge \omega^{m-1} = 2\pi m \int_M c_1(\mathcal{E}) \wedge \omega^{m-1} = 2\pi m \deg \mathcal{E},$$

de donde se sigue (2.14). \square

Ahora, sea $a = a(x)$ una función real positiva sobre M , entonces el cambio conforme $h \mapsto h' = ah$ define una métrica Hermitiana en \mathcal{E} , i.e., $h' \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$. En particular, aplicando la definición del Hermitiano conjugado relativo a h' y ya que a nunca se anula, se sigue $\bar{\Phi}_{h'} = \bar{\Phi}_h$. Usando un marco unitario para $\Omega^{1,0}$ como se introdujo en la sección B.1 se tiene $g^{\alpha\bar{\beta}} = \delta^{\alpha\bar{\beta}}$, y usando (2.1), (1.23), (B.32), (B.42) y (B.17) se sigue que

$$\begin{aligned} im \mathcal{R}_{h'} \wedge \omega^{m-1} &= im (R_{h'} + [\Phi, \bar{\Phi}_h]) \wedge \omega^{m-1} \\ &= K_{h'} \omega^m + im [\Phi, \bar{\Phi}_h] \wedge \omega^{m-1} \\ &= \left(K_h + \square(\log a)I + \sum [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\alpha}}] \right) \omega^m \\ &= \left(K_h + \sum g^{\alpha\bar{\beta}} [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}] + \square(\log a)I \right) \omega^m \\ &= (K_h + \square(\log a)I) \omega^m, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó (2.6). Así, de la definición (2.2) se sigue que las curvaturas medias de Hitchin-Simpson relativas a h y h' se relacionan por

$$\mathcal{K}_{h'} = \mathcal{K}_h + \square(\log a)I, \quad \text{o bien} \quad \hat{\mathcal{K}}_{h'} = \hat{\mathcal{K}}_h + \square(\log a)h. \quad (2.17)$$

Esta relación es una extensión natural de la fórmula clásica (B.42) para la curvatura media de Chern y es importante en la teoría de haces de Higgs. El siguiente lema es una consecuencia de (2.17), y se usará para demostrar que dada una métrica h de Hermite-Yang-Mills débil es posible encontrar un cambio conforme apropiado $h \mapsto ah$, de tal manera que la nueva métrica es Hermite-Yang-Mills.

Lema 2.3.5. *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta. Sea $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ una métrica de HYM débil con factor f y sea $a = a(x)$ una función real C^∞ positiva sobre M . Entonces $h' = ah$ es una métrica de HYM débil con factor $f' = f + \square(\log a)$.*

Proposición 2.3.6. *Sean \mathcal{E} y h como en el lema 2.3.5. Entonces existe un cambio conforme $h \mapsto h' = ah$ tal que h' es una métrica de HYM con factor constante c dado por*

$$c \int_M \omega^m = \int_M f \omega^m. \quad (2.18)$$

Dicho cambio conforme es único salvo por una homotecia.

Demostración. Sea c como en (2.18), entonces

$$\int_M (c - f) \omega^m = 0. \quad (2.19)$$

Observe que, basta demostrar la existencia de una función u que satisfice

$$\square u = c - f, \quad (2.20)$$

de modo que aplicando el lema 2.3.5 con $a = e^u$ se tiene $\square(\log a) = c - f$ y el resultado se sigue.

De la teoría de Hodge es sabido que la ecuación (2.20) tiene una solución si y solo si la función $c - f$ es ortogonal a todas las funciones \square -armónicas. Ya que M es compacto, una función es \square -armónica si y solo si es constante (ver [23, p. 104] para más detalles). Note que por (2.19), la función $c - f$ es ortogonal a todas las funciones constantes y consecuentemente a las funciones \square -armónicas. Por lo tanto la ecuación (2.20) admite una solución.

Finalmente, si \tilde{u} es otra solución de (2.20), entonces $\tilde{u} - u$ es \square -armónica y por lo tanto $u' = u + b$, con b una constante. Así, $\tilde{a} = e^{\tilde{u}} = e^b e^u$ y la unicidad se sigue. \square

Debido a este resultado se puede evitar el uso de métricas de HYM débiles sin pérdida de generalidad, y de ahora en adelante se trabajará directamente con métricas de HYM.

Observe que, si se tiene una métrica de HYM con factor c , entonces la constante c se puede calcular directamente de la fórmula (2.14) como sigue

$$c = \frac{2\pi \mu(\mathcal{E})}{(m-1)! \text{Vol } M} = \frac{2\pi \deg \mathcal{E}}{r(m-1)! \text{Vol } M}. \quad (2.21)$$

Esta expresión depende de invariantes del haz. En particular, depende de las clases de cohomología $c_1(\mathcal{E})$ y $[\omega]$ (ver el argumento subsecuente a (B.44)). Observe que de la definición (1.7) se tiene $\mu(\mathcal{E}) = \mu(E)$, así la constante definida por (2.13) y (2.21) es la misma constante clásica definida por (B.37) y (B.47). Más aun, este hecho junto con (2.17) permanecen formalmente iguales a las correspondientes fórmulas clásicas (B.47) y (B.42), aun cuando los objetos que intervienen en el caso de haces de Higgs son distintos. Por ejemplo, en (B.42) interviene la curvatura media de Chern, mientras que en (2.17) lo hace la curvatura media de Hitchin-Simpson.

2.4. Estructuras aproximadas de HYM

Ahora se introduce la noción de estructura aproximada de Hermite-Yang-Mills en un haz de Higgs. Sea $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ y considere un marco unitario para E , i.e., $h_{i\bar{k}} = \delta_{i\bar{k}}$. Observe que de (1.12) y (1.26) se sigue

$$\begin{aligned} \overline{[\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\beta}]_j^i} &= \sum (\overline{\Phi_{\alpha k}^i \bar{\Phi}_{h\beta j}^k - \bar{\Phi}_{h\beta k}^i \Phi_{\alpha j}^k}) \\ &= \sum (\bar{\Phi}_{h\bar{\alpha} i}^k \Phi_{\beta k}^j - \Phi_{\beta i}^k \bar{\Phi}_{h\bar{\alpha} k}^j) \\ &= [\Phi_\beta, \bar{\Phi}_{h\bar{\alpha}}]_i^j. \end{aligned}$$

Esto junto con (A.22) implican que las componentes de $\mathcal{R}_h^{1,1}$ dadas por (1.28) satisfacen

$$\overline{\mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i} = \mathcal{R}_{h\beta\bar{\alpha}i}^j. \quad (2.22)$$

Tomando la traza con respecto a $g^{\beta\bar{\alpha}}$ de esta última expresión y usando (2.3) se sigue

$$\overline{\mathcal{K}_{hj}^i} = \mathcal{K}_{hi}^j \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathcal{K}_h^\dagger = \mathcal{K}_h, \quad (2.23)$$

y por lo tanto las normas locales de \mathcal{K}_h y $\mathcal{K}_h - cI$ definidas por la segunda igualdad en (B.29) y por (B.27) se expresan como

$$|\mathcal{K}_h|^2 = \text{tr}(\mathcal{K}_h \circ \mathcal{K}_h), \quad |\mathcal{K}_h - cI|^2 = \text{tr}[(\mathcal{K}_h - cI) \circ (\mathcal{K}_h - cI)]. \quad (2.24)$$

Definición 2.4.1. Un haz de Higgs \mathcal{E} sobre una variedad de Kähler compacta M admite una *estructura aproximada de Hermite-Yang-Mills (aprox. HYM)* si $\forall \varepsilon > 0$ existe una métrica h_ε tal que

$$\max_M |\mathcal{K}_{h_\varepsilon} - cI| < \varepsilon. \quad (2.25)$$

Una métrica Hermitiana en \mathcal{E} que satisface (2.25) es llamada una ε -métrica.

Comúnmente también se usa el término *métrica aprox. HYM* para referirse a una estructura aprox. HYM (ver sección B.2). Al igual que las estructuras aproximadas de Hermite-Einstein en la teoría clásica de haces holomorfos, la noción de estructura aproximada de Hermite-Yang-Mills satisface ciertas propiedades sobre los haces asociados de un haz de Higgs dado.

Proposición 2.4.2. *Sean $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1$ y \mathcal{E}_2 haces de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta. Entonces*

(a) *Si \mathcal{E} admite una estructura aprox. HYM, entonces \mathcal{E}^* también admite una estructura aprox. HYM.*

(b) *Si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 admiten estructuras aprox. HYM, entonces el producto tensorial $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ admite una estructura aprox. HYM.*

(c) *Si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 admiten estructuras aprox. HYM y adicionalmente $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{E}_2)$, entonces $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ admite una estructura aprox. HYM.*

Demostración. (a) De la proposición 2.3.2(b) se sabe que si \mathcal{E} tiene factor c , entonces \mathcal{E}^* tiene factor $-c$. Sea $\varepsilon > 0$ y $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ una ε -métrica. Entonces

$$|\mathcal{K}_{h^*} - (-c)I| = |{}^t(\mathcal{K}_h - cI)| = |\mathcal{K}_h - cI| < \varepsilon.$$

Así, \mathcal{E}^* admite una estructura aprox. HYM.

(b) Sea $\varepsilon > 0$ y suponga que \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 admiten estructuras aprox. HYM con factores c_1 y c_2 . Entonces existen métricas $h_1 \in \text{Herm}^+(\mathcal{E}_1)$ y $h_2 \in \text{Herm}^+(\mathcal{E}_2)$ tales que

$$\max_M |\mathcal{K}_1 - c_1 I_1| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{r_2}}, \quad \max_M |\mathcal{K}_2 - c_2 I_2| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{r_1}},$$

donde r_1, r_2 y I_1, I_2 son los rangos y los endomorfismos identidad de \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , respectivamente. Sea $\mathcal{K}_{1 \otimes 2}$ la curvatura media de Hitchin-Simpson relativa a $h_{1 \otimes 2}$ dada por (2.12). De la proposición 2.3.2(c) se tiene que el factor de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ es $c = c_1 + c_2$, y definiendo $I_{1 \otimes 2} = I_1 \otimes I_2$ se sigue

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_{1 \otimes 2} - c I_{1 \otimes 2}| &= |\mathcal{K}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathcal{K}_2 - (c_1 + c_2) I_1 \otimes I_2| \\ &\leq |(\mathcal{K}_1 - c_1 I_1) \otimes I_2| + |I_1 \otimes (\mathcal{K}_2 - c_2 I_2)| \\ &\leq \sqrt{r_2} |\mathcal{K}_1 - c_1 I_1| + \sqrt{r_1} |\mathcal{K}_2 - c_2 I_2| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ admite una estructura aprox. HYM.

(c) Si se supone adicionalmente que $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{E}_2)$, entonces de (2.21) se sigue $c_1 = c_2$. Sean h_1 y h_2 métricas en \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 tales que

$$|\mathcal{K}_1 - c_1 I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |\mathcal{K}_2 - c_2 I_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $c = c_1 = c_2$, $\mathcal{K}_{1\oplus 2} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ la curvatura media de Hitchin-Simpson relativa a $h_{1\oplus 2}$ dada en la demostración de la proposición 2.3.2(d) y $I_{1\oplus 2} = I_1 \oplus I_2$. Entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_{1\oplus 2} - c I_{1\oplus 2}| &= |\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 - c(I_1 \oplus I_2)| \\ &= \sqrt{\text{tr}(\mathcal{K}_1 - c_1 I_1)^2 + \text{tr}(\mathcal{K}_2 - c_2 I_2)^2} \\ &\leq |\mathcal{K}_1 - c_1 I_1| + |\mathcal{K}_2 - c_2 I_2| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ admite una estructura aprox. HYM. □

Se tiene el siguiente corolario como consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 2.4.3. *Si \mathcal{E} admite una estructura aprox. HYM con factor c , entonces tanto el producto tensorial $\mathcal{E}^{\otimes p} \otimes \mathcal{E}^{*\otimes q}$ como el producto wedge $\wedge^p \mathcal{E}$ ($p \leq \text{rk } \mathcal{E}$) admiten estructuras aprox. HYM con factores $(p - q)c$ y pc , respectivamente.*

Los siguientes resultados son una consecuencia del teorema de anulamiento 2.2.1 y la existencia de estructuras aprox. HYM. En particular, se necesita calcular el grado del producto tensorial de dos haces de Higgs $\text{deg}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$. Observe que esto se puede realizar de dos maneras distintas, calculando directamente la forma de Chern $c_1(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, h_{1\otimes 2})$ usando la representación (B.38) y la fórmula (A.30) para la curvatura de Chern $R_{1\otimes 2}$, o bien usando la proposición 2.4.2(b) y la fórmula (2.21). De esto último se sigue que si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 tienen factores constantes c_1 y c_2 , entonces el factor c para $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ está dado por $c = c_1 + c_2$ y se tiene

$$\frac{2\pi\mu(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)}{(m-1)!\text{Vol } M} = \frac{2\pi(\mu(\mathcal{E}_1) + \mu(\mathcal{E}_2))}{(m-1)!\text{Vol } M},$$

por lo tanto

$$\text{deg}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) = \text{rk } \mathcal{E}_2 \text{ deg } \mathcal{E}_1 + \text{rk } \mathcal{E}_1 \text{ deg } \mathcal{E}_2. \quad (2.26)$$

Proposición 2.4.4. *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta tal que $\text{deg } \mathcal{E} < 0$. Si \mathcal{E} admite una estructura aprox. HYM entonces \mathcal{E} no admite secciones Φ -invariantes no triviales.*

Demostración. Si \mathcal{E} admite una estructura aprox. HYM entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe una métrica $h_\varepsilon \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ tal que

$$\max_M |\mathcal{K}_{h_\varepsilon} - cI| < \varepsilon.$$

Sea $\mathcal{O}_\varepsilon = \mathcal{K}_{h_\varepsilon} - cI$ o equivalentemente $\hat{\mathcal{O}}_\varepsilon = \hat{\mathcal{K}}_{h_\varepsilon} - ch$. Ya que $\hat{\mathcal{O}}_\varepsilon$ es Hermitiana y el cuadrado de la norma que aparece en la desigualdad anterior es la traza dada por (2.24), se sigue que $\hat{\mathcal{O}}_\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, ya que $\deg \mathcal{E} < 0$ de (2.21) se sigue que $c < 0$. Por lo tanto para un ε lo suficientemente pequeño la curvatura media $\hat{\mathcal{K}}_{h_\varepsilon} = \hat{\mathcal{O}}_\varepsilon - ch$ será negativa definida. El resultado se sigue del teorema 2.2.1(b). \square

Proposición 2.4.5. *Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 haces de Higgs de rango r_1 y r_2 sobre una variedad de Kähler compacta. Si ambos admiten estructuras aprox. HYM y $\mu(\mathcal{E}_1) > \mu(\mathcal{E}_2)$, entonces no existen morfismos de Higgs de \mathcal{E}_1 en \mathcal{E}_2 .*

Demostración. Un morfismo de Higgs se puede considerar como una sección Φ -invariante del haz $\mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2$, donde Φ es el campo de Higgs inducido en dicho haz

$$\Phi = \Phi_1^* \otimes I_2 + I_1^* \otimes \Phi_2$$

como fue descrito en la sección 1.2. Si c_1 y c_2 están dadas por (2.21) para \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , respectivamente, entonces de (2.26) se sigue

$$\deg(\mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2) = -r_2 \deg \mathcal{E}_1 + r_1 \deg \mathcal{E}_2 < 0$$

ya que $\deg(\mathcal{E}_1^*) = -\deg(\mathcal{E}_1)$ y $\mu(\mathcal{E}_1) > \mu(\mathcal{E}_2)$. El resultado se sigue de la proposición 2.4.4. \square

2.5. Estabilidad de Mumford

Uno de los resultados más importantes sobre haces de Higgs es la extensión de la correspondencia de Hitchin-Kobayashi. En el caso clásico, dado un haz holomorfo sobre una variedad de Kähler compacta, la correspondencia de Hitchin-Kobayashi establece que dicho haz es poliestable si y solo si admite una métrica de Hermite-Einstein [23]. Kobayashi [23] y Lübke [26] demostraron que la existencia de una métrica de Hermite-Einstein implica la poliestabilidad, y el recíproco fue demostrado por Donaldson para variedades algebraicas [14, 16] y por Uhlenbeck y Yau para variedades de Kähler [32]. Esta correspondencia también es conocida como el teorema de Donaldson-Uhlenbeck-Yau [35]. La noción de estabilidad se puede extender al escenario de haces de Higgs, en donde se tiene un resultado análogo a esta equivalencia. Para definir estabilidad de haces de Higgs en variedades de dimensión mayor que uno se utiliza la noción de subgavilla de Higgs. Sin embargo, el uso de gavillas está fuera de los límites de este trabajo y por lo tanto nos limitaremos a dar las definiciones en el caso 1-dimensional, de modo que se omitirán los detalles sobre los resultados más generales que se exponen en esta sección. El lector puede consultar [7, 29] para más detalles sobre los casos de dimensión más alta.

Definición 2.5.1. Sea M una superficie de Riemann compacta. Un haz de Higgs \mathcal{E} sobre M es *estable (semi-estable)* si para cualquier subhaz de Higgs $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ se satisface

$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$ (respectivamente \leq). El haz de Higgs \mathcal{E} es *poliestable* si se descompone como una suma directa de haces de Higgs estables que tienen el mismo slope².

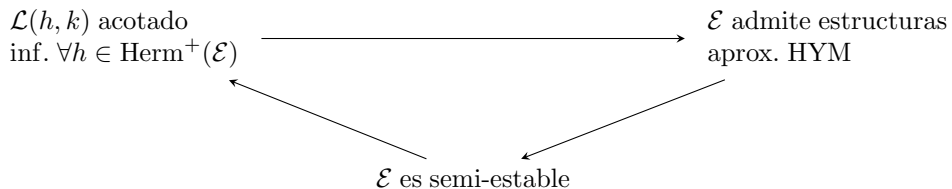
En [19] Hitchin demostró la correspondencia de Hitchin-Kobayashi para un haz de Higgs de rango 2 sobre una superficie de Riemann compacta. Este resultado fue extendido por Simpson para haces de Higgs de rango arbitrario sobre variedades de Kähler compactas y algunas no compactas [29].

Teorema 2.5.2 (Correspondencia de Hitchin-Kobayashi [29]). *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta M . El haz \mathcal{E} es poliestable si y solo si existe una métrica de Hermite-Yang-Mills h en \mathcal{E} , i.e., si y solo si existe una métrica Hermitiana h en \mathcal{E} que satisface $\mathcal{K}_h = cI$.*

Kobayashi introdujo la noción de estructura aproximada de Hermite-Einstein para haces holomorfos, y demostró que un haz holomorfo que admite una estructura aproximada de Hermite-Einstein necesariamente es semi-estable. Más aun, Kobayashi demostró la equivalencia entre estas nociones para variedades proyectivas y conjeturó que el resultado debería ser cierto para variedades de Kähler compactas en general [23]. Este resultado también se ha extendido para haces de Higgs. En [7] Bruzzo y Graña demostraron que un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta que admite una estructura aproximada de Hermite-Yang-Mills necesariamente es semi-estable. El recíproco de este resultado fue demostrado por Cardona [12] para superficies de Riemann compactas y posteriormente por Li y Zhang [24] para variedades de Kähler compactas de dimensión arbitraria.

Teorema 2.5.3 ([12, 24]). *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta. Entonces \mathcal{E} es semi-estable si y solo si \mathcal{E} admite una estructura aproximada de Hermite-Yang-Mills.*

Es importante mencionar que, como se muestra en [6, 12, 24], la demostración de la equivalencia entre la semi-estabilidad y la existencia de estructuras aproximadas de Hermite-Yang-Mills recae en el análisis del funcional de Donaldson $\mathcal{L}(h, k)$ (introducido por Simpson en [29] para haces de Higgs), el cual es un funcional definido sobre el espacio de métricas Hermitianas del haz de Higgs. La siguiente figura muestra, grosso modo, las implicaciones que hay entre el funcional de Donaldson, las estructuras aproximadas de Hermite-Yang-Mills y la semi-estabilidad.



²Note que en esta definición no se impone un mínimo en la cantidad de sumandos para la poliestabilidad, de modo que un haz estable es en particular poliestable.

Como una consecuencia del teorema 2.5.3, los resultados sobre haces de Higgs enunciados en términos de métricas aproximadas de Hermite-Yang-Mills se pueden reescribir en términos de semi-estabilidad. En particular, se tiene el siguiente resultado cuya demostración es inmediata de la proposición 2.4.2.

Teorema 2.5.4. *Sean $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1$ y \mathcal{E}_2 haces de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta.*

- (a) *Si \mathcal{E} es semi-estable, entonces \mathcal{E}^* es semi-estable.*
- (b) *Si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son semi-estables, entonces $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ es semi-estable.*
- (c) *Si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son semi-estables y $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{E}_2)$, entonces $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ es semi-estable.*

Los teoremas 2.5.2 y 2.5.3 permiten determinar la existencia de métricas y métricas aproximadas de Hermite-Yang-Mills en un haz de Higgs de manera indirecta, *i.e.*, verificando la condición de (semi)-estabilidad de dicho haz. Un ejemplo que muestra esta aplicación aparece en [19] y se describe a continuación.

Sea M una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y sea $K = \Omega^{1,0}$ su haz canónico. Una raíz cuadrada de K es un haz de línea holomorfo $K^{\frac{1}{2}}$ tal que $K = K^{\frac{1}{2}} \otimes K^{\frac{1}{2}}$. En general, el haz canónico de una superficie de Riemann compacta de género arbitrario g tiene 2^{2g} raíces cuadradas distintas [2, p. 48], y por lo tanto se puede fijar una raíz cuadrada $K^{\frac{1}{2}}$ para K . Considere el haz holomorfo de rango 2 definido por

$$E = K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.27)$$

y note que un campo de Higgs en E es un endomorfismo de la forma

$$\Phi : K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow (K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}) \otimes K. \quad (2.28)$$

Así, defina Φ como

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in A^{1,0}(\text{End } E) \quad (2.29)$$

donde 1 es el endomorfismo de $K^{\frac{1}{2}}$ en $K^{-\frac{1}{2}} \otimes K$ definido por el endomorfismo identidad de K . Observe que $\text{Hom}(K^{\frac{1}{2}}, K^{-\frac{1}{2}}) \otimes K$ es isomorfo a $K^* \otimes K$, por lo que el endomorfismo identidad define de manera natural un endomorfismo de $K^{\frac{1}{2}}$ en $K^{-\frac{1}{2}} \otimes K$. Se sigue de (2.29) que Φ satisface la condición de integrabilidad y es holomorfo, por lo tanto define un campo de Higgs en E . Más aun, de (2.29) se tiene que $\Phi(E) \subset K^{-\frac{1}{2}} \otimes K$ y $\Phi(K^{-\frac{1}{2}}) = \{0\} \subset K^{-\frac{1}{2}} \otimes K$. Por lo tanto $K^{-\frac{1}{2}}$ es el único subhaz Φ -invariante de E . De la representación (B.38) para $c_1(E)$ y la definición (B.43) para $\text{deg } E$ se obtiene

$$\text{deg } E = \text{deg } K^{\frac{1}{2}} + \text{deg } K^{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.30)$$

Por otro lado, ya que $\text{deg } K = 2g - 2$ (ver [13, p. 319]) la propiedad (2.26) implica

$$\text{deg } K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{deg}(K^{\frac{1}{2}} \otimes K^{\frac{1}{2}}) = \frac{\text{deg } K}{2} = g - 1, \quad (2.31)$$

y consecuentemente $\deg K^{-\frac{1}{2}} = 1 - g < 0$. Por lo tanto el haz de Higgs (E, Φ) es estable y en particular es poliestable, así el teorema 2.5.2 implica que (E, Φ) tiene una métrica de HYM.

Es importante mencionar que a diferencia del par (E, Φ) , el haz E no es estable como haz holomorfo ya que $\deg K^{\frac{1}{2}} = g - 1 > 0$ y la correspondencia de Hitchin-Kobayashi implica que E no tiene métricas de Hermite-Einstein.

Finalmente, en el caso $g = 1$ también existen raíces cuadradas de K y la fórmula $\deg K = 2g - 2$ sigue siendo válida. De (2.31) se tiene

$$\deg K^{\frac{1}{2}} = \deg K^{-\frac{1}{2}} = 0$$

y por (2.30) se sigue que (E, Φ) no es estable. El hecho de que este par no sea estable y el teorema 2.5.2 implican que (E, Φ) no tiene métricas de HYM.

Capítulo 3

Algunos funcionales para haces de Higgs

En este capítulo se presentan las extensiones para haces de Higgs sobre variedades de Kähler compactas de los funcionales de Yang-Mills y Kobayashi. El último fue introducido por Kobayashi en [23] esencialmente como la norma L^2 de la curvatura media de Chern y tiene una relación estrecha con la existencia de métricas de Hermite-Einstein sobre un haz holomorfo. Siguiendo [8, 9] se presentan algunas de las propiedades más importantes de dichos funcionales sobre haces de Higgs, y en particular se muestra que el funcional de Kobayashi está directamente relacionado con la existencia de métricas de Hermite-Yang-Mills en un haz de Higgs.

3.1. El funcional de Kobayashi

Sea $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta M m -dimensional y sea $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$ considerada como una variable. En lo que sigue se usarán marcos unitarios $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ para $\Omega^{1,0}$ en lugar de los marcos holomorfos usuales (dz^1, \dots, dz^m) . Como es bien sabido, el uso de marcos unitarios simplifica significativamente los cálculos (ver [23, p. 70]). En particular, el operador de Hodge se puede definir de manera mucho más simple (ver sección B.1). Se define el *funcional de Kobayashi* del haz de Higgs \mathcal{E} como

$$\mathcal{J} : \text{Herm}^+(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}(h) = \frac{1}{2} \int_M |\mathcal{K}_h|^2 \omega^m = \frac{m!}{2} \|\mathcal{K}_h\|^2, \quad (3.1)$$

donde $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son las normas definidas en (B.29). Note que por definición $\mathcal{J}(h)$ es no negativo, y cuando $\Phi = 0$ se sigue de (2.6) que $\mathcal{J}(h)$ coincide con el funcional de Kobayashi clásico $J(h)$ definido en (B.50). Es importante mencionar que los funcionales de Kobayashi en el caso clásico y de haces de Higgs tienen la misma cota inferior (B.54), como se muestra a continuación. Sea c como en (2.21) y $\sigma_h = \text{tr } \mathcal{K}_h$, entonces (2.24) se

obtiene

$$\begin{aligned}
0 \leq |\mathcal{K}_h - cI|^2 &= \operatorname{tr} [(\mathcal{K}_h - cI) \circ (\mathcal{K}_h - cI)] \\
&= \operatorname{tr} \mathcal{K}_h^2 - 2c \operatorname{tr} \mathcal{K}_h + rc^2 \\
&= |\mathcal{K}_h|^2 - 2c \sigma_h + rc^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Integrando σ_h y usando (2.2), (2.1), (B.38) y (B.43) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_M \sigma_h \omega^m &= \int_M \operatorname{tr} \mathcal{K}_h \omega^m \\
&= im \int_M \operatorname{tr} \mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \omega^{m-1} \\
&= im \int_M \operatorname{tr} R_h \wedge \omega^{m-1} \\
&= 2\pi m \operatorname{deg} \mathcal{E}.
\end{aligned}$$

De esta igualdad y de (2.21) se obtiene la fórmula

$$rc \int_M \omega^m = \int_M \sigma_h \omega^m. \tag{3.3}$$

Así, integrando (3.2) y usando (3.3) se tiene

$$\int_M |\mathcal{K}_h|^2 \omega^m \geq 2c \int_M \sigma_h \omega^m - rc^2 \int_M \omega^m = rc^2 \int_M \omega^m. \tag{3.4}$$

Usando la desigualdad (3.4) y la definición (3.1) se obtiene la siguiente cota

$$\mathcal{J}(h) \geq \frac{rc^2}{2} \int_M \omega^m = \frac{2m(\pi \operatorname{deg} \mathcal{E})^2}{r(m-1)! \operatorname{Vol} M} = \mathcal{C}. \tag{3.5}$$

Más aun, observe que $\mathcal{J}(h)$ alcanza su valor mínimo si y solo si se satisface $\mathcal{K}_h = cI$, *i.e.*, si y solo si la métrica h es de Hermite-Yang-Mills. Este resultado es análogo a la proposición B.3.1 en el caso de haces holomorfos y se enuncia como teorema a continuación.

Teorema 3.1.1. *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta m -dimensional M . Entonces el funcional de Kobayashi $\mathcal{J}(h)$ está acotado inferiormente por una constante que se expresa en términos de invariantes del haz de Higgs*

$$\mathcal{J}(h) \geq \frac{2m(\pi \operatorname{deg} \mathcal{E})^2}{r(m-1)! \operatorname{Vol} M}. \tag{3.6}$$

Más aun, $\mathcal{J}(h)$ alcanza su valor mínimo en $h = h_0$ si y solo si h_0 es una métrica de Hermite-Yang-Mills.

Observe que aunque los funcionales $\mathcal{J}(h)$ y $J(h)$ definidos en (3.1) y (B.50), respectivamente, son diferentes, tienen la misma cota inferior \mathcal{C} . Por otro lado, si se tiene una estructura de métricas aprox. HYM $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ en \mathcal{E} , de la desigualdad (3.2) y el teorema 3.1.1 se sigue que la constante \mathcal{C} es un ínfimo de $\mathcal{J}(h)$, *i.e.*,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}(h_\varepsilon) = \mathcal{C}.$$

Así, del teorema 3.1.1 junto con los teoremas 2.5.2 y 2.5.3 se concluye que la existencia de un mínimo o un ínfimo para el funcional de Kobayashi $\mathcal{J}(h)$ depende de una condición algebraica del haz de Higgs. Más precisamente, se tienen el siguiente resultado.

Corolario 3.1.2. *Sean \mathcal{E} y M como en el teorema 3.1.1. Entonces*

- (a) $\mathcal{J}(h)$ alcanza su valor mínimo \mathcal{C} dado por (3.5) si y solo si \mathcal{E} es poliestable.
- (b) La constante \mathcal{C} es un ínfimo de $\mathcal{J}(h)$ si y solo si \mathcal{E} es semi-estable.

Note que si \mathcal{E} es semi-estable pero no es poliestable, entonces el corolario anterior implica que $\mathcal{J}(h)$ se puede aproximar arbitrariamente a \mathcal{C} pero nunca alcanza dicho valor. En otras palabras, el corolario 3.1.2 relaciona las propiedades de acotamiento de $\mathcal{J}(h)$ con propiedades de estabilidad del haz de Higgs \mathcal{E} .

3.2. El funcional de Yang-Mills-Higgs

Como se muestra en la sección B.3, Kobayashi [23] define el funcional de Yang-Mills $I(h)$ sobre un haz holomorfo dado por (B.55), *i.e.*, como proporcional a la norma L^2 de la curvatura de Chern asociada a la métrica h . En analogía con lo ocurrido con el funcional de Kobayashi $\mathcal{J}(h)$, se define el *funcional de Yang-Mills-Higgs (YMH)* como

$$\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h) = \frac{1}{2} \int_M |\mathcal{R}_h|^2 \omega^m = \frac{m!}{2} \|\mathcal{R}_h\|^2, \quad (3.7)$$

donde \mathcal{R}_h es la curvatura de Hitchin-Simpson. Al igual que $\mathcal{J}(h)$, este funcional tiene algunas propiedades interesantes. En particular, de la definición (3.7) se tiene que $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ es no negativo y de (1.19) se sigue que si $\Phi = 0$, entonces $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ coincide con el funcional $I(h)$ definido en (B.55). Cabe mencionar que en física, usualmente $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ y $I(h)$ son llamados los funcionales de Yang-Mills al ser proporcionales a la norma L^2 de la curvatura completa y son de primer interés en teoría cuántica de campos. De (1.19) se sigue que $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ se expresa como

$$\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h) = \frac{m!}{2} \|\mathcal{R}_h\|^2 = \frac{m!}{2} \left\{ \|R_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h]\|^2 + \|D'_h \Phi\|^2 + \|d'' \bar{\Phi}_h\|^2 \right\}. \quad (3.8)$$

Otro funcional de interés se construye tomando solamente la parte (1, 1) de la curvatura de Hitchin-Simpson, esto es,

$$\mathcal{I}(h) = \frac{1}{2} \int_M \left| \mathcal{R}_h^{1,1} \right|^2 \omega^m = \frac{1}{2} \int_M |R_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h]|^2 \omega^m. \quad (3.9)$$

De igual manera, este funcional es no negativo y coincide con $I(h)$ si $\Phi = 0$. En el caso $m = 1$ se tiene que $D'_h \Phi = 0$ y $d'' \bar{\Phi}_h = 0$ y la expresión (1.19) para \mathcal{R}_h se simplifica a $\mathcal{R}_h = \mathcal{R}_h^{1,1}$. Considerando un marco unitario para $\Omega^{1,0}$ de modo que $\omega = i\theta \wedge \bar{\theta}$, de (2.2) se sigue que $i\mathcal{R}_h^{1,1} = i\mathcal{K}_h \theta \wedge \bar{\theta}$, *i.e.*, el endomorfismo asociado a $\mathcal{R}_h^{1,1}$ es \mathcal{K}_h y entonces $|\mathcal{R}_h^{1,1}|^2 = |\mathcal{K}_h|^2$. Así, de lo anterior y las definiciones (3.1), (3.7) y (3.9) se concluye que

$$\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h) = \mathcal{I}(h) = \mathcal{J}(h).$$

Esta coincidencia ocurre solamente en el caso $m = 1$, y cuando $m > 1$ el funcional $\mathcal{I}(h)$ es solamente una parte del funcional de Yang-Mills-Higgs.

Otra propiedad interesante en el caso clásico es que la expresión $I(h) - J(h)$ es una constante topológica dada por (B.59). Como se verá a continuación, esta relación entre los funcionales $\mathcal{I}(h)$, $\mathcal{J}(h)$ y $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ es ligeramente más compleja. Con el fin de estimar la diferencia $\mathcal{I}(h) - \mathcal{J}(h)$ se necesita el siguiente resultado.

Lema 3.2.1. *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta M con forma de Kähler ω de dimensión $m \geq 2$ y sea $h \in \text{Herm}^+(\mathcal{E})$. Entonces, la parte (1, 1) de la curvatura de Hitchin-Simpson satisface*

$$\text{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \mathcal{R}_h^{1,1} \right) \wedge \omega^{m-2} = \frac{1}{m(m-1)} \left(|\mathcal{R}_h^{1,1}|^2 - |\mathcal{K}_h|^2 \right) \omega^m. \quad (3.10)$$

Demostración. Sea $(\theta^\alpha)_{\alpha=1}^m$ un marco local unitario para $\Omega^{1,0}$ de modo que $g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}}$. Usando dicho marco en lugar de un marco holomorfo en (1.24) y (1.27) se sigue que $\mathcal{R}_h^{1,1}$ se expresa localmente como

$$\mathcal{R}_h^{1,1} = \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta, \quad \text{con} \quad \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}} = R_{h\alpha\bar{\beta}} + [\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{h\bar{\beta}}].$$

De la primera igualdad en (2.3) se tiene

$$\mathcal{K}_{hj}^i = \sum \delta^{\alpha\bar{\beta}} \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i = \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\alpha}j}^i,$$

de esto y de la primera igualdad en (2.24) se sigue que

$$|\mathcal{K}_h|^2 = \text{tr}(\mathcal{K}_h \circ \mathcal{K}_h) = \sum \mathcal{R}_{\alpha\bar{\alpha}j}^i \mathcal{R}_{\beta\bar{\beta}i}^j. \quad (3.11)$$

Por otro lado, de la definición (B.27) se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_h^{1,1}|^2 &= \sum \text{tr}(\mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}} \circ \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}}^\dagger) \\ &= \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i (\mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}}^\dagger)^j_i \\ &= \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i \overline{\mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i} \\ &= \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i \mathcal{R}_{h\beta\bar{\alpha}i}^j, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde en la última igualdad se ha usado la propiedad (2.22). El resultado se sigue de aplicar la fórmula (B.56) y usar las identidades (3.11) y (3.12), esto es,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \mathcal{R}_h^{1,1} \right) \wedge \omega^{m-2} &= \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i \mathcal{R}_{h\gamma\bar{\delta}i}^j \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta \wedge \theta^\gamma \wedge \bar{\theta}^\delta \wedge \omega^{m-2} \\
&= \frac{1}{m(m-1)} \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\beta}j}^i \mathcal{R}_{h\beta\bar{\alpha}}^j \omega^m \\
&\quad - \frac{1}{m(m-1)} \sum \mathcal{R}_{h\alpha\bar{\alpha}j}^i \mathcal{R}_{h\beta\bar{\beta}i}^j \omega^m \\
&= \frac{1}{m(m-1)} \left(|\mathcal{R}_h^{1,1}|^2 - |\mathcal{K}_h|^2 \right) \omega^m.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.2. *Sea \mathcal{E} un haz de Higgs sobre una variedad de Kähler compacta de dimensión $m \geq 2$ con forma de Kähler ω , y sean $\mathcal{J}(h)$ y $\mathcal{I}(h)$ los funcionales definidos por (3.1) y (3.9), respectivamente. Entonces*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(h) - \mathcal{J}(h) &= 2\pi^2 m(m-1) \int_M (2c_2(E) - c_1(E)^2) \wedge \omega^{m-2} \\
&\quad + m(m-1) \int_M \operatorname{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge [\Phi, \bar{\Phi}_h] \right) \wedge \omega^{m-2}.
\end{aligned}$$

Demostración. Usando la propiedad cíclica de la traza, la condición de integrabilidad $\Phi \wedge \Phi = 0$ y la propiedad $\bar{\Phi}_h \wedge \bar{\Phi}_h = 0$ descrita en (1.15) se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} [\Phi, \bar{\Phi}_h]^2 &= \operatorname{tr} (\Phi \wedge \bar{\Phi}_h \wedge \Phi \wedge \bar{\Phi}_h + \bar{\Phi}_h \wedge \Phi \wedge \bar{\Phi}_h \wedge \Phi) \\
&= \operatorname{tr} (\Phi \wedge \bar{\Phi}_h \wedge \Phi \wedge \bar{\Phi}_h) - \operatorname{tr} (\Phi \wedge \bar{\Phi}_h \wedge \Phi \wedge \bar{\Phi}_h) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

y junto con (1.23) se sigue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \mathcal{R}_h^{1,1} \right) &= \operatorname{tr} \left(R_h \wedge R_h + [\Phi, \bar{\Phi}_h] \wedge R_h + R_h \wedge [\Phi, \bar{\Phi}_h] + [\Phi, \bar{\Phi}_h]^2 \right) \\
&= \operatorname{tr} (R_h \wedge R_h) + 2 \operatorname{tr} (R_h \wedge [\Phi, \bar{\Phi}_h]).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Usando (B.38), el primer término del lado derecho en (3.14) se puede expresar como

$$\operatorname{tr} (R_h \wedge R_h) = 4\pi^2 (2c_2(E, h) - c_1(E, h)^2),$$

y observe que por (3.13) se puede reemplazar R_h por $\mathcal{R}_h^{1,1}$ en el segundo término del lado derecho en (3.14). De lo anterior se sigue que

$$\operatorname{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge \mathcal{R}_h^{1,1} \right) = 4\pi^2 (2c_2(E, h) - c_1(E, h)^2) + 2 \operatorname{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge [\Phi, \bar{\Phi}_h] \right). \tag{3.15}$$

Haciendo el producto wedge de (3.15) con ω^{m-2} , integrando sobre M y usando (3.1), (3.9) y el lema 3.2.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(h) - \mathcal{J}(h) &= \frac{1}{2} \int_M \left(|\mathcal{R}_h^{1,1}|^2 - |\mathcal{K}_2|^2 \right) \omega^m \\ &= 2\pi^2 m(m-1) \int_M (2c_2(E, h) - c_1(E, h)^2) \wedge \omega^{m-2} \\ &\quad + m(m-1) \int_M \text{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge [\Phi, \bar{\Phi}_h] \right) \wedge \omega^{m-2}. \end{aligned}$$

Finalmente, la primera integral en la última igualdad no depende de la métrica h ya que M es una variedad de Kähler compacta, y por lo tanto se puede escribir en términos de las clases de Chern $c_1(E)$ y $c_2(E)$ (ver sección B.2 para más detalles). \square

Ya que $\mathcal{I}(h)$ es solo una parte del funcional $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$, la proposición anterior da la siguiente relación entre los funcionales de Kobayashi y YMH para haces de Higgs.

Proposición 3.2.3. *Sean \mathcal{E} y M como en la proposición 3.2.2 y sean $\mathcal{J}(h)$ y $\mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ los funcionales dados por (3.1) y (3.8). Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{2}{m!} [\mathcal{J}(h) - \mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)] &= \|D'_h \Phi\|^2 + \|d'' \bar{\Phi}_h\|^2 + 2 \int_M \text{tr} \left(\mathcal{R}_h^{1,1} \wedge [\Phi, \bar{\Phi}_h] \right) \wedge \frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!} \\ &\quad + 4\pi^2 \int_M (2c_2(E) - c_1(E)^2) \wedge \frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!}. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de esta igualdad es precisamente la diferencia de los cuadrados de las normas globales de \mathcal{K}_h y \mathcal{R}_h . Note que si $\Phi = 0$, entonces de la proposición 3.2.3 se recupera la relación (B.59) para haces holomorfos sobre variedades de Kähler compactas, la cual dice que los funcionales de Kobayashi y Yang-Mills son esencialmente iguales. Por otro lado, en el caso general para haces de Higgs la expresión $\mathcal{J}(h) - \mathcal{F}_{\text{YMH}}(h)$ depende de tres términos que involucran la métrica h .

Existen otros funcionales para haces de Higgs de interés que se precinden en este trabajo, como el funcional de Donaldson y el funcional no abeliano de Seiberg-Witten. El último está estrechamente relacionado con el funcional de YMH y la existencia de soluciones a las ecuaciones 2k-Hitchin [9], mientras que el funcional de Donaldson juega un papel fundamental en las demostraciones de la correspondencia de Hitchin-Kobayashi para haces de Higgs [10, 29, 24].

Apéndice A

Haces holomorfos

En esta sección se resumen algunas de las nociones más importantes de la geometría compleja que se utilizan en esta tesis. Más detalles sobre estos conceptos pueden encontrarse en los textos clásicos [23, 18, 13]. Los haces holomorfos son objetos básicos en geometría compleja, en este apéndice se describen brevemente las propiedades más importantes de conexiones y métricas en dichos haces. En particular, la conexión de Chern juega un papel importante en esta tesis.

A.1. Variedades complejas y haces holomorfos

Definición A.1.1. Una *variedad compleja* M de *dimensión* m es un espacio topológico Hausdorff y segundo contable dotado de un cubrimiento abierto \mathcal{U} , tal que para cada $p \in M$ existe $U \in \mathcal{U}$ vecindad de p y un homeomorfismo $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ con la siguiente propiedad: Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$ la función

$$\phi_{UV} := \phi_U \circ \phi_V^{-1} : \phi_V(U \cap V) \rightarrow \phi_U(U \cap V) \quad (\text{A.1})$$

es holomorfa. Un par ordenado (U, ϕ_U) es llamado una *carta holomorfa* de M y la familia conformada por todas las cartas es llamada una *estructura holomorfa* en M .

Ya que la holomorfía implica la diferenciabilidad, se sigue de la definición anterior que una variedad compleja m -dimensional es una variedad C^∞ $2m$ -dimensional.

Ejemplo A.1.2. 1. \mathbb{C}^m es una variedad compleja m -dimensional. Dado el sistema coordenado $(x^1, y^1, \dots, x^m, y^m)$ para \mathbb{R}^{2m} y definiendo $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$ para $\alpha = 1, \dots, m$, se tiene la carta holomorfa (z^1, \dots, z^m) para \mathbb{C}^m .

2. El m -espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^m = (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia definida por

$$(w^1, \dots, w^{m+1}) \sim (z^1, \dots, z^{m+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} w^\alpha = \lambda z^\alpha, \\ 1 \leq \alpha \leq m+1, \end{matrix}$$

es una variedad compleja m -dimensional. Sea $[z^1 : \dots : z^{m+1}]$ la clase de equivalencia de (z^1, \dots, z^{m+1}) y $U_\alpha = \{[z^1 : \dots : z^{m+1}] \in \mathbb{C}P^m \mid z^\alpha \neq 0\}$, las cartas

holomorfas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^m$ están dadas por

$$\phi_\alpha[z^1 : \dots : z^{m+1}] = (z^1/z^\alpha, \dots, z^{\alpha-1}/z^\alpha, z^{\alpha+1}/z^\alpha, \dots, z^{m+1}/z^\alpha).$$

3. Todo subconjunto abierto U de una variedad compleja M es una variedad compleja de la misma dimensión que M bajo la restricción de las cartas holomorfas de M . En particular, $\text{GL}(m, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{m^2}$ es una variedad compleja m^2 -dimensional.

Definición A.1.3. Sean M y N variedades complejas de dimensión m y n , respectivamente. Una función continua $\Theta : M \rightarrow N$ es *holomorfa* si dadas dos cartas (U, ϕ_U) y (V, ψ_V) en M y N , respectivamente, la función $\psi_V \circ \Theta \circ \phi_U^{-1}$ es holomorfa. Se dice que Θ es *biholomorfa* si es biyectiva y es tal que Θ y Θ^{-1} son holomorfas. Si existe una función biholomorfa entre M y N , se dice que M y N son *biholomorfas*.

Definición A.1.4. Sea M una variedad diferenciable. Un *haz vectorial complejo diferenciable* (C^∞) *de rango r sobre M* es una variedad diferenciable E junto con una proyección diferenciable $\pi : E \rightarrow M$ tal que:

1. Para cada $p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial r -dimensional.
2. Existe un cubrimiento $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M y difeomorfismos

$$\theta_\alpha : E|_{V_\alpha} = \pi^{-1}(V_\alpha) \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{C}^r,$$

llamados *trivializaciones*, con la propiedad de que para cada $p \in V_\alpha$, la función $\theta_\alpha : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{C}^r \cong \mathbb{C}^r$ es un isomorfismo lineal.

De la definición anterior se sigue que la función $\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}$ restringida sobre $\{p\} \times \mathbb{C}^r$ es un isomorfismo lineal y para $(p, z) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{C}^r$ se tiene $\theta_{\alpha\beta}(p, z) = (p, g_{\alpha\beta}(p)z)$, donde $g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{C})$ es una función C^∞ . La colección $\{g_{\alpha\beta}\}$ define un *sistema de funciones de transición* del haz. Si $V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma \neq \emptyset$, se sigue que $\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} = \theta_{\alpha\gamma}$ y para $(p, z) \in (V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma) \times \mathbb{C}^r$ se tiene $(p, g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p)z) = (p, g_{\alpha\gamma}(p)z)$, i.e., las funciones de transición satisfacen la *condición de cociclo*

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{en } V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma. \quad (\text{A.2})$$

Recíprocamente, cualquier colección de funciones $\{g_{\alpha\beta}\}$ que satisface (A.2) define un haz vectorial complejo C^∞ sobre M .

La variedad producto $E = M \times \mathbb{C}^r$ es un haz vectorial complejo de rango r y es llamado el *haz trivial sobre M* . Si $E \rightarrow M$ y $F \rightarrow M$ son haces complejos de rango r y s , respectivamente, se define el *haz dual* $E^* \rightarrow M$ y el *haz complejo conjugado* $\overline{E} \rightarrow M$ de E de manera que $(E^*)_p = E_p^*$ y $(\overline{E})_p = \overline{E}_p$, para cada $p \in M$. La *suma directa* (o suma de Whitney) $E \oplus F \rightarrow M$ y el *producto tensorial* $E \otimes F \rightarrow M$ se definen como los haces complejos tales que

$$(E \oplus F)_p = E_p \oplus F_p, \quad \text{y} \quad (E \otimes F)_p = E_p \otimes F_p,$$

cuyos rangos son $\text{rk}(E \oplus F) = r + s$ y $\text{rk}(E \otimes F) = rs$. Para $1 \leq k \leq r$ se define el haz $\Lambda^k E \rightarrow M$ tal que $(\Lambda^k E)_p = E_p \wedge \cdots \wedge E_p$ (k veces), con $\text{rk} \Lambda^k E = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

Definición A.1.5. Un haz vectorial holomorfo de rango r sobre M es un haz vectorial complejo $\pi : E \rightarrow M$ (de rango r) con M y E variedades complejas, π holomorfa y cuyas trivializaciones son biholomorfismos.

Definición A.1.6. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz holomorfo. Una sección holomorfa de E es una función $\xi : U \rightarrow E|_U$ holomorfa sobre un abierto $U \subset M$ tal que $\pi \circ \xi = I_U$. Un marco local $s_U = (s_1, \dots, s_r)$ de E sobre U es holomorfo si cada sección $s_i : U \rightarrow E$ es holomorfa.

Definición A.1.7. Un homomorfismo holomorfo entre dos haces complejos $E \rightarrow M$ y $F \rightarrow M$ es una función holomorfa $\Psi : E \rightarrow F$, tal que $\Psi_x : E_x \rightarrow F_x$ es \mathbb{C} -lineal.¹ Si Ψ_x es un isomorfismo lineal para cada $x \in M$, se dice que Ψ es un isomorfismo (ver [18, p. 68]).

Definición A.1.8. Sea M una variedad diferenciable $2m$ -dimensional. Una estructura casi compleja sobre M es una sección J de $\text{End}(TM)$ tal que $J^2 = -I_{TM}$, donde I_{TM} es el endomorfismo identidad de TM . La variedad M es una variedad casi compleja si admite una estructura casi compleja.

Toda variedad compleja admite una estructura casi compleja. En efecto, considere una variedad compleja m -dimensional M con estructura holomorfa $\{(U, \phi_U)\}$, si $\phi_U = (z^1, \dots, z^m)$ y $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, los endomorfismos J_U tales que

$$J_U \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad \text{y} \quad J_U \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

definen una estructura casi compleja $J = \{J_U\}$ sobre M .

En lo que sigue, M denotará una variedad compleja m -dimensional y $E \rightarrow M$ un haz complejo C^∞ de rango r .

El haz tangente TM , sobre M como variedad real, tiene rango $2m$ y la complejización $T_{\mathbb{C}}M$ de TM es un haz complejo C^∞ sobre M de rango $2m$. Extendiendo J a un endomorfismo complejo de $T_{\mathbb{C}}M$ se tiene la descomposición en eigenespacios $T_{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$ para los eigenvalores $\pm i$ de J . Dadas coordenadas locales $(z^\alpha)_{\alpha=1}^m$ para M y definiendo $\partial_\alpha = \partial/\partial z^\alpha$, $\partial_{\bar{\beta}} = \partial/\partial \bar{z}^\beta$, se sigue que $(\partial_\alpha)_{\alpha=1}^m$ y $(\partial_{\bar{\beta}})_{\beta=1}^m$ forman marcos locales para $T'M$ y $T''M$, respectivamente, además se tiene $T''M = \overline{T'M}$. Entonces $(dz^\alpha)_{\alpha=1}^m$ y $(d\bar{z}^\beta)_{\beta=1}^m$ son marcos locales para los haces cotangentes $T'M^*$ y $T''M^*$, y el diferencial df de una función C^∞ y \mathbb{C} -evaluada se puede escribir como

$$df = \sum \partial_\alpha f dz^\alpha + \sum \partial_{\bar{\beta}} f d\bar{z}^\beta. \quad (\text{A.3})$$

¹Un subhaz $G \subset E$ es una colección $\{G_x \subset E_x\}_{x \in M}$ de subespacios de las fibras de E tal que $G = \bigcup G_x$ es una subvariedad de E . Note que $\ker \Psi = \bigcup \ker \Psi_x$ y $\text{Im} \Psi = \bigcup \text{Im} \Psi_x$ son subhaces de E y F si y solo si el rango de Ψ_x no depende del punto $x \in M$.

La función f es holomorfa sobre un abierto U si y solo si f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial_{\bar{\beta}} f = 0$ sobre U , $1 \leq \beta \leq m$.

Ejemplo A.1.9. 1. El haz trivial $M \times \mathbb{C}^r$ es un haz holomorfo de rango r .

2. El haz $T'M \rightarrow M$ es holomorfo con marco holomorfo $(\partial_\alpha)_{\alpha=1}^m$, y se indentifica con el haz TM mediante la asignación $X \in TM \mapsto \frac{1}{2}(X - iJX) \in T'M$. El haz $T'M$ es el llamado *haz tangente holomorfo* de M .

3. Si $E \rightarrow M$ y $F \rightarrow M$ son haces holomorfos de rango r y s , respectivamente, entonces el haz dual E^* , suma directa $E \oplus F$, producto tensorial $E \otimes F$ y el producto wedge $\wedge^k E$ ($1 \leq k \leq r$) son haces holomorfos sobre M de rango $r, r+s, rs$ y $\frac{r!}{k(r-k)!}$, respectivamente.

Sean $\Omega^{1,0} = T'M^*$ y $\Omega^{0,1} = T''M^*$. Para $0 \leq p, q \leq m$, se denota por $\Omega^{p,q}$ al haz sobre M obtenido al realizar el producto wedge entre $\Omega^{1,0}$ y $\Omega^{0,1}$ p y q veces, respectivamente. El espacio de secciones C^∞ de $\Omega^{p,q}$ se denota por $A^{p,q}$, *i.e.*, los elementos de $A^{p,q}$ son (p, q) -formas complejas sobre M . Se define el haz $\Omega^{p,q}(E) = \Omega^{p,q} \otimes E$, cuyo espacio de secciones C^∞ se denota por $A^{p,q}(E)$ y consiste de (p, q) -formas complejas sobre M con coeficientes en E . Para $0 \leq k \leq m$, se definen $\Omega^k = \wedge^k T_{\mathbb{C}}M^*$ y $\Omega^k(E) = \Omega^k \otimes E$, los espacios A^k y $A^k(E)$ se definen de manera análoga. En el caso $k = 0$, A^0 es el espacio de funciones C^∞ sobre M y $A^0(E)$ el espacio de secciones C^∞ de E . Por otro lado, para $k \geq 1$ se tiene la descomposición

$$A^k = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q} \quad \text{y} \quad A^k(E) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(E). \quad (\text{A.4})$$

Sea $(dz^\alpha)_{\alpha=1}^n$ un marco local para $\Omega^{1,0}$ y sean $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ multi-índices ordenados de manera estrictamente ascendente, *i.e.*, $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$ y $\beta_1 < \dots < \beta_q$, entonces se definen

$$dz^A = dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p}, \quad \text{y} \quad d\bar{z}^B = d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\beta_q}.$$

Usando la notación de arriba, cualquier sección C^∞ $\phi \in A^{p,q}$ se puede escribir como

$$\phi = \sum \phi_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^B, \quad (\text{A.5})$$

donde cada $\phi_{A\bar{B}}$ es una función C^∞ y \mathbb{C} -valuada.

La derivada exterior d sobre (p, q) -formas se descompone como $d = d' + d''$, donde

$$\begin{aligned} d' : A^{p,q} &\rightarrow A^{p+1,q}, & d'' : A^{p,q} &\rightarrow A^{p,q+1}, \\ d'\phi &= \sum \partial_\alpha \phi_{A\bar{B}} dz^\alpha \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B, & d''\phi &= \sum \partial_{\bar{\beta}} \phi_{A\bar{B}} d\bar{z}^{\bar{\beta}} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B. \end{aligned}$$

Definición A.1.10. Una *conexión* D en E es un homomorfismo $D : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$ sobre \mathbb{C} tal que

$$D(f\sigma) = \sigma df + fD\sigma, \quad \forall f \in A^0, \sigma \in A^0(E). \quad (\text{A.6})$$

Sea $s = (s_1, \dots, s_r)$ un marco local de E sobre U y D una conexión en E , entonces

$$Ds_i = \sum s_j \omega_j^i, \quad \omega_j^i \in A^1|_U. \quad (\text{A.7})$$

La 1-forma matricial $\omega = (\omega_j^i)$ es llamada la *forma de conexión de D con respecto a s* . Considerando a s como vector fila, la ecuación (A.7) se escribe como $Ds = s\omega$. Si $\xi \in A^0(E)$ es una sección sobre U , entonces $\xi = \sum \xi^i s_i$ con $\xi^i \in A^0|_U$ y se sigue que

$$D\xi = \sum s_i \left(d\xi^i + \sum \omega_j^i \xi^j \right), \quad (\text{A.8})$$

de modo que considerando a ξ como vector columna la expresión anterior se reescribe como $D\xi = d\xi + \omega\xi$. A $D\xi$ se le llama *derivada covariante* de ξ , si $X \in T_x M$ la *derivada covariante de ξ en la dirección de X* se define como $D_X \xi := (D\xi)(X) \in E_x$.

Definición A.1.11. Una sección local $\xi \in A^0(E)$ es *paralela* si $D\xi = 0$. Si $0 \leq t \leq a$ y $c = c(t)$ es una curva C^∞ en M , una sección ξ definida a lo largo de c es *paralela a lo largo de c* si $D_{c'(t)}\xi = 0$ para cada t .

De (A.8) se sigue que la condición de paralelismo a lo largo de una curva c es precisamente el sistema de EDO's

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \sum \omega_j^i(c'(t))\xi^j = 0. \quad (\text{A.9})$$

Si $\xi_0 \in E_{c(0)}$, se define de manera única una sección paralela a lo largo de c resolviendo el sistema (A.9) con condición inicial $\xi_0^i = \xi^i(0)$. Dicha sección se llama el *transporte paralelo de ξ_0 a lo largo de c* . En particular, si $x_0 = c(0) = c(a)$ el transporte paralelo a lo largo de c induce una transformación lineal sobre E_{x_0} . El conjunto de endomorfismos de E_{x_0} obtenido de tomar todas las curvas cerradas c con punto inicial x_0 se llama el *grupo de holonomía* de la conexión D con respecto a x_0 .

Sea $s' = (s'_1, \dots, s'_r)$ otro marco local de E sobre U . Entonces s y s' están relacionados por $s = s'a$, donde $a : U \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ es una función C^∞ . Sea ω' la forma de conexión de D con respecto a s' , entonces las formas de conexión ω y ω' están relacionadas por $\omega = a^{-1}\omega'a + a^{-1}da$.

La conexión $D : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$ se extiende naturalmente a un homomorfismo \mathbb{C} -lineal $D : A^k(E) \rightarrow A^{k+1}(E)$ para $k \geq 0$, definiendo

$$D(\sigma\varphi) = (D\sigma) \wedge \varphi + \sigma d\varphi, \quad \forall \sigma \in A^0(E), \varphi \in A^k.$$

La *curvatura* de D se define como $R = D \wedge D : A^0(E) \rightarrow A^2(E)$. Se sigue que R es A^0 -lineal, i.e., si $f \in A^0$ y $\sigma \in A^0(E)$ entonces $R(f\sigma) = fR(\sigma)$. Por lo tanto R es una 2-forma con valores en $\text{End } E$. Para $1 \leq i \leq r$, se tiene que $Rs_i = \sum s_j \Omega_j^i$, con $\Omega_j^i \in A^2|_U$ y se define $\Omega = (\Omega_j^i)$ como la *forma de curvatura* de la conexión D , la cual está determinada por $s\Omega = D^2s$, de donde se obtiene la fórmula

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (\text{A.10})$$

Aplicando d a (A.10) se obtiene la identidad de Bianchi

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \quad (\text{A.11})$$

Note que si Ω' es la forma de curvatura de D con respecto a s' , entonces Ω y Ω' están relacionadas por $\Omega = a^{-1}\Omega'a$.

Sea $\mathcal{U} = \{U, V, \dots\}$ el cubrimiento abierto de M definido por las trivializaciones de E , y sean s_U y s_V los marcos correspondientes a U y V asociados a la base usual de \mathbb{C}^r .² Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces s_U y s_V están relacionadas por $s_U = s_V g_{VU}$ sobre $U \cap V$, donde g_{VU} es la función de transición mencionada después de la definición A.1.4. Si D es una conexión en E con forma de conexión ω_U relativo a s_U , entonces

$$\omega_U = g_{VU}^{-1} \omega_V g_{VU} + g_{VU}^{-1} dg_{VU} \quad \text{sobre } U \cap V. \quad (\text{A.12})$$

Recíprocamente, dado un sistema de 1-formas $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ -valuadas ω_U que satisface (A.12), se obtiene una conexión que tiene a $\{\omega_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ como forma de conexión. Si Ω_U es la forma de curvatura de D relativa a s_U , entonces $\Omega_U = g_{VU}^{-1} \Omega_V g_{VU}$ sobre $U \cap V$.

De la descomposición (A.4) se sigue que una conexión admite una única descomposición $D = D' + D''$ en conexiones de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente, donde una conexión de tipo $(1, 0)$ es un operador $D' : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p+1,q}(E)$ que satisface la siguiente propiedad

$$D'(\sigma\varphi) = D'\sigma \wedge \varphi + \sigma d'\varphi, \quad \forall \sigma \in A^0(E), \varphi \in A^{p,q}.$$

La definición de una conexión D'' de tipo $(0, 1)$ es análoga.

A.2. Métricas Hermitianas y la conexión de Chern

Definición A.2.1. Una *métrica Hermitiana* o *estructura Hermitiana* h en E es un campo C^∞ de productos internos Hermitianos en las fibras de E , i.e., $h = \{h_x\}_{x \in M}$ tal que para cada $\xi, \eta \in E_x$,

1. $h_x(\xi, \eta)$ es \mathbb{C} -lineal en ξ .
2. $h_x(\xi, \eta) = \overline{h_x(\eta, \xi)}$.
3. $h_x(\xi, \xi) > 0$ para $\xi \neq 0$.
4. $h(\xi, \eta)$ es una función C^∞ si ξ y η son secciones C^∞ .

El par (E, h) es llamado un *haz vectorial Hermitiano*.

²El marco $s_U = (s_{U1}, \dots, s_{Ur})$ está dado por $s_{U_i}(p) = \theta_U^{-1}(p, e_i)$ para cada $p \in U$, donde $(e_i)_{i=1}^r$ es la base usual de \mathbb{C}^r . Análogamente se define $s_V = (s_{V1}, \dots, s_{Vr})$ usando θ_V^{-1} .

Dado un marco local $s_U = (s_1, \dots, s_r)$ de E sobre un abierto U , se definen $h_{i\bar{j}} = h(s_i, s_j)$ y $H_U = (h_{i\bar{j}})$. Se sigue que H_U es una matriz Hermitiana positiva definida en cada punto de U . Se dice que s_U es un *marco local unitario* si H_U es la matriz identidad. Si s_V es un marco local sobre un abierto V , entonces del cambio de marcos $s_U = s_V g_{VU}$ se sigue la relación $H_U = {}^t g_{VU} H_V \bar{g}_{VU}$ sobre $U \cap V$.

Definición A.2.2. Una conexión D en un haz Hermitiano (E, h) es *compatible con h* o es una *h -conexión* si satisface

$$dh(\xi, \eta) = h(D\xi, \eta) + h(\xi, D\eta), \quad \forall \xi, \eta \in A^0(E). \quad (\text{A.13})$$

Si $\omega = (\omega_j^i)$ es la forma de conexión de D con respecto al marco $s_U = (s_1, \dots, s_r)$ y fijamos $\xi = s_i, \eta = s_j$ en (A.13), entonces se tiene

$$dh_{i\bar{j}} = \sum \left(\omega_i^k h_{k\bar{j}} + h_{i\bar{k}} \bar{\omega}_j^k \right). \quad (\text{A.14})$$

En notación matricial, la ecuación anterior se escribe como $dH = {}^t \omega H + H \bar{\omega}$, de donde se sigue ${}^t \Omega H + H \bar{\Omega} = 0$. En particular, si el marco s_U es unitario, entonces las ecuaciones anteriores se simplifican a ${}^t \omega + \bar{\omega} = 0$ y ${}^t \Omega + \bar{\Omega} = 0$, *i.e.*, ω y Ω son matrices anti-Hermitianas con respecto a un marco unitario, lo que significa que ω y Ω toman valores en el algebra de Lie $\mathfrak{u}(r)$ del grupo unitario $U(r)$.

Cabe mencionar que usando (A.14), la condición de compatibilidad (A.13) se puede reescribir de manera más general como

$$dh(\varphi, \psi) = h(D\varphi, \psi) + (-1)^p h(\varphi, D\psi) \quad \forall \varphi \in A^p(E), \psi \in A^q(E), \quad (\text{A.15})$$

y esta fórmula se puede descomponer en dos fórmulas correspondientes a los grados $(1, 0)$ y $(0, 1)$. En efecto, como $d = d' + d''$ y $D = D' + D''$ se sigue

$$d' h(\varphi, \psi) = h(D'\varphi, \psi) + (-1)^p h(\varphi, D''\psi), \quad (\text{A.16})$$

$$d'' h(\varphi, \psi) = h(D''\varphi, \psi) + (-1)^p h(\varphi, D'\psi). \quad (\text{A.17})$$

Proposición A.2.3. *Dada una métrica Hermitiana h en un haz holomorfo E , existe una única h -conexión D_h tal que $D_h'' = d''$.*

Una demostración de este resultado fundamental puede encontrarse en [23, p. 9] y [18, p. 73].

Para un marco holomorfo $s = (s_1, \dots, s_r)$, la forma de conexión ω en la proposición A.2.3 es de tipo $(1, 0)$ y está dada por

$${}^t \omega = (d'H)H^{-1}. \quad (\text{A.18})$$

Dicha conexión es llamada la *conexión de Chern* o *conexión Hermitiana* del haz holomorfo (E, h) , y en lo que sigue se denotará por D_h con curvatura R_h . Su curvatura

$R_h = D_h \wedge D_h$ no tiene componentes de tipo $(2, 0)$ ni $(0, 2)$, por lo que la curvatura es la $(1, 1)$ -forma con valores en $\text{End } E$ dada por

$$R_h = D'_h \wedge d'' + d'' \wedge D'_h, \quad (\text{A.19})$$

con forma de curvatura $\Omega = d''\omega$. De (A.18) se obtiene la relación matricial

$${}^t\Omega = (d''d'H)H^{-1} + (d'H)H^{-1} \wedge (d''H)H^{-1}. \quad (\text{A.20})$$

Escribiendo localmente la curvatura de Chern

$$R_{hj}^i = \sum R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

y definiendo $R_{h\alpha\bar{\beta}j\bar{k}} = \sum h_{i\bar{k}} R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i$, se obtiene la siguiente expresión para $R_{h\alpha\bar{\beta}j\bar{k}}$ en términos de la métrica h

$$R_{h\alpha\bar{\beta}j\bar{k}} = -\partial_{\bar{\beta}} \partial_\alpha h_{j\bar{k}} + \sum h^{i\bar{l}} \partial_\alpha h_{j\bar{l}} \partial_{\bar{\beta}} h_{i\bar{k}}. \quad (\text{A.21})$$

Usando un marco unitario, de la expresión anterior se sigue que las componentes de la curvatura de Chern satisfacen

$$\overline{R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i} = R_{h\beta\bar{\alpha}i}^j. \quad (\text{A.22})$$

Se enuncia el siguiente resultado clásico en forma de lema, el cual se utiliza para deducir la identidad de Weitzenböck (ver sección B.2). Su demostración es una aplicación directa de las fórmulas (A.16) y (A.17).

Lema A.2.4. *Si ξ es una sección holomorfa de un haz Hermitiano (E, h) , entonces*

$$d'd''h(\xi, \xi) = h(D'_h \xi, D'_h \xi) - h(R_h \xi, \xi). \quad (\text{A.23})$$

Definición A.2.5. Sea g una métrica Hermitiana en el haz tangente holomorfo $TM = T'M$. La métrica g es llamada una *métrica Hermitiana* en M y el par (M, g) es llamado una *variedad Hermitiana*.

Si $g_{\alpha\bar{\beta}} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$, entonces se puede escribir $g = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$, y asociada a cada métrica Hermitiana g en M se tiene la *forma de Kähler*, definida como la $(1, 1)$ -forma³

$$\omega = i \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta. \quad (\text{A.24})$$

Note que ω es real, *i.e.*, $\bar{\omega} = \omega$ y

$$\omega^m = i^m m! \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^m \quad (\text{A.25})$$

nunca se anula y el volumen de M está dado por

$$\text{vol } M = \int_M \omega^m / m!. \quad (\text{A.26})$$

Si la $(1, 1)$ -forma ω es cerrada, se dice que g es una *métrica de Kähler* y (M, g) es llamada una *variedad de Kähler*.

³No confundir esta forma con la definición de ω para la forma de conexión de una conexión D .

Proposición A.2.6. *Para una métrica Hermitiana g , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *La métrica g es de Kähler, i.e., $d\omega = 0$.*
- (b) $\partial_\gamma g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha g_{\gamma\bar{\beta}}$.
- (c) $\partial_{\bar{\gamma}} g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\gamma}}$.
- (d) *Existe una función real local f tal que $\omega = id'd''f$, i.e., $g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} f$.*
- (e) *La conexión de Chern tiene torsión cero.*

Para una demostración de este resultado ver [23, p. 27].

A.3. Conexiones y métricas en haces asociados

Sean $E \rightarrow M$ y $F \rightarrow M$ haces complejos C^∞ de rango r y r' , respectivamente, con conexiones D_E y D_F . Para cada $x \in M$, la función evaluación $E_x^* \times E_x \rightarrow \mathbb{C}$ induce un *pairing* $\langle \cdot, \cdot \rangle : A^0(E^*) \times A^0(E) \rightarrow A^0$ tal que $\langle \eta, \xi \rangle(x) = \langle \eta(x), \xi(x) \rangle_x$. Se define una conexión D_{E^*} en E^* de la siguiente manera. Si $\eta \in A^0(E^*)$, entonces $D_{E^*}\eta \in A^1(E^*)$ está definida por la fórmula

$$d\langle \eta, \xi \rangle = \langle D_{E^*}\eta, \xi \rangle + \langle \eta, D_E\xi \rangle, \quad \forall \xi \in A^0(E). \quad (\text{A.27})$$

Sea $s = (s_1, \dots, s_r)$ un marco local de E y $t = (t^1, \dots, t^r)$ el marco de E^* dual a s , i.e., $\langle t^i, s_j \rangle = \delta_j^i$. Considerando a t como vector columna se tiene $D_{E^*}t = -\omega_E t$ y $R_{E^*}t = -\Omega_E t$, i.e., las formas de conexión y curvatura de D_{E^*} con respecto a t son los inversos aditivos de las formas de conexión y curvatura de D_E con respecto a s .

Al igual que en E^* , se puede definir una conexión en \bar{E} . Existe una aplicación de conjugación natural $\bar{\cdot} : E \rightarrow \bar{E}$ tal que $\overline{\lambda\xi} = \bar{\lambda}\bar{\xi}$ para cada $\xi \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, con la cual se define una conexión en el haz \bar{E} como

$$D_{\bar{E}}\bar{\xi} = \overline{D_E\xi}, \quad \forall \xi \in A^0(E). \quad (\text{A.28})$$

Un marco local para \bar{E} está formado por los complejos conjugados de las componentes de s , i.e., $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_r)$ y se sigue que $D_{\bar{E}}\bar{s} = \bar{s}\bar{\omega}_E$ y $R_{\bar{E}}\bar{s} = \bar{s}\bar{\Omega}_E$. i.e., las formas de conexión y curvatura de $D_{\bar{E}}$ con respecto a \bar{s} son los complejos conjugados de las formas de conexión y curvatura de D_E con respecto a s .

Sea $v = (v_1, \dots, v_{r'})$ un marco local para F con ω_F y Ω_F las formas de conexión y curvatura de D_F con respecto a v . En la suma directa $E \oplus F$ se define una conexión a partir de D_E y D_F como $D_{E \oplus F} = D_E \oplus D_F$ cuya curvatura es $R_{E \oplus F} = R_E \oplus R_F$, i.e., las formas de conexión y curvatura de $D_{E \oplus F}$ están dadas por

$$\omega_{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \omega_E & 0 \\ 0 & \omega_F \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Omega_{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \Omega_E & 0 \\ 0 & \Omega_F \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

También se puede definir una conexión en $E \otimes F$ como $D_{E \otimes F} = D_E \otimes I_F + I_E \otimes D_F$ con curvatura $R_{E \otimes F} = R_E \otimes I_F + I_E \otimes R_F$, *i.e.*,

$$\omega_{E \otimes F} = \omega_E \otimes I_{r'} + I_r \otimes \omega_F \quad \text{y} \quad \Omega_{E \otimes F} = \Omega_E \otimes I_{r'} + I_r \otimes \Omega_F, \quad (\text{A.30})$$

donde I_r y $I_{r'}$ son las matrices identidad de rango r y r' , respectivamente.

Lo anterior se extiende de manera obvia a la suma directa y producto tensorial de un número finito de haces. En particular, se tienen fórmulas para la conexión y curvatura en $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$ inducidas de la conexión D_E . Un caso de interés es el haz $\text{End } E = E \otimes E^*$. Sea $\xi \in A^p(\text{End } E)$, así $\xi = \sum \xi_j^i s_i \otimes t^j$ con $\xi_j^i \in A^0(\text{End } E)$ y la conexión inducida en $\text{End } E$ aplicada a ξ se escribe localmente como

$$D_{\text{End } E} \xi = \sum \left(d\xi_j^i + (-1)^p \sum \left(\xi_j^k \wedge \omega_k^i - \xi_k^i \wedge \omega_j^k \right) \right) s_i \otimes t^j, \quad (\text{A.31})$$

donde ω_k^i es una abreviación para las componentes de la forma de conexión D_E . Como se mencionó antes $R_E \in A^2(\text{End } E)$, escribiendo $R_E = \sum \Omega_j^i s_i \otimes t^j$ y la identidad (A.11) en componentes se sigue que

$$D_{\text{End } E} R_E = \sum \left(d\Omega_j^i + \sum \left(\omega_k^i \wedge \Omega_j^k - \Omega_k^i \wedge \omega_j^k \right) \right) s_i \otimes t^j = 0. \quad (\text{A.32})$$

Considere el haz $\wedge^p E$ para $1 \leq p \leq r$, un marco local para $\wedge^p E$ está dado por $(s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p})_{i_1 < \cdots < i_p}$ con $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, r\}$. La conexión en $E^{\otimes p}$ inducida por D_E deja invariante a $\wedge^p E$, por lo tanto induce una conexión $D_{\wedge^p E} : A^0(\wedge^p E) \rightarrow A^1(\wedge^p E)$. Si $p = 3$, entonces para una sección $\xi \in A^0(\wedge^3 E)$ se tiene que

$$\xi = \sum \xi^{ijk} s_i \wedge s_j \wedge s_k \quad \text{y} \quad D_{\wedge^3 E} \xi = \sum \nabla \xi^{ijk} s_i \wedge s_j \wedge s_k,$$

donde por definición

$$\nabla \xi^{ijk} = d\xi^{ijk} + \sum \left(\omega_l^i \xi^{ljk} + \omega_l^j \xi^{ilk} + \omega_l^k \xi^{ijl} \right).$$

Si $p = r$, se define el haz *determinante* de E como el haz de línea⁴ $\det E = \wedge^r E$. Entonces $(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)$ es un marco local para $\det E$ y se tiene

$$\begin{aligned} D_{\det E} (s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) &= \left(\sum \omega_i^i \right) s_1 \wedge \cdots \wedge s_r, \\ R_{\det E} (s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) &= \left(\sum \Omega_i^i \right) s_1 \wedge \cdots \wedge s_r, \end{aligned}$$

i.e., las formas de conexión y curvatura de $D_{\det E}$ con respecto a $(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)$ son las trazas de las formas de conexión y curvatura de D_E con respecto a s .

Sea N una variedad compleja. Dada una función $f : M \rightarrow N$ se define un haz inducido $f^* E \rightarrow M$, llamado el *pullback de E sobre f*, con el siguiente diagrama conmutativo:

⁴Para referirse a un haz vectorial de rango 1 se usó el término *haz de línea*, el cual es la traducción usual de *line bundle*, como se muestra en la traducción al español del libro clásico [20, p. 11].

$$\begin{array}{ccc}
f^*E & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
N & \xrightarrow{f} & M
\end{array}$$

Si el marco s de E está definido sobre $U \subset M$, entonces se tiene un marco local f^*s de f^*E sobre $f^{-1}(U)$. De manera que se puede inducir una conexión D_{f^*E} en f^*E a partir de D_E , cuyas formas de conexión y curvatura de f^*E con respecto a f^*s son los pullbacks sobre f de las formas de conexión y curvatura de E con respecto a s .

Sea h una métrica Hermitiana y D_E una conexión en E . Se puede considerar a h como una sección de $E^* \otimes \bar{E}^*$, i.e., h se escribe en términos del marco dual t como

$$h = \sum h_{i\bar{j}} t^i \otimes \bar{t}^j.$$

Entonces la conexión inducida en $E^* \otimes \bar{E}^*$ aplicada a h se escribe como

$$D_{E^* \otimes \bar{E}^*} h = \sum \left(dh_{i\bar{j}} - \sum \left(h_{k\bar{j}} \omega_i^k + h_{i\bar{k}} \bar{\omega}_j^k \right) \right) t^i \otimes \bar{t}^j. \quad (\text{A.33})$$

Finalmente, se define una métrica Hermitiana h_{E^*} sobre E^* a partir de h como

$$h_{E^*} = \sum h^{i\bar{j}} s_i \otimes \bar{s}_j, \quad (\text{A.34})$$

donde $(h^{i\bar{j}})$ denota la traspuesta de la matriz inversa de $(h_{i\bar{j}})$, esto es $\sum h^{i\bar{k}} h_{j\bar{k}} = \delta_j^i$. Note que de (A.14) se sigue que D_E es compatible con h si y solo si $D_{E^* \otimes \bar{E}^*} h = 0$. Un cálculo directo muestra que si $D_{E^* \otimes \bar{E}^*} h = 0$, entonces $D_{E \otimes \bar{E}} h_{E^*} = 0$ y así D_{E^*} es compatible con h_{E^*} . En particular, si E es holomorfo y D_E es la conexión de Chern, entonces D_{E^*} es la conexión de Chern del haz dual.

En el haz complejo conjugado \bar{E} se tiene una métrica Hermitiana dada por

$$h_{\bar{E}} = \sum \bar{h}_{i\bar{j}} \bar{t}^i \otimes t^j = \sum h_{j\bar{i}} \bar{t}^i \otimes t^j. \quad (\text{A.35})$$

Las métricas definidas en (A.34) y (A.35) suelen denotarse por h^* y \bar{h} (ver [23, p. 19]).

Dadas métricas Hermitianas h_E y h_F en los haces E y F , se tienen las métricas inducidas $h_{E \oplus F} = h_E \oplus h_F$ y $h_{E \otimes F} = h_E \otimes h_F$ en $E \oplus F$ y $E \otimes F$, respectivamente. Sean $\xi, \eta \in A^0(E)$ y $\xi', \eta' \in A^0(F)$, entonces $h_{E \oplus F}$ y $h_{E \otimes F}$ se definen como

$$h_{E \oplus F}((\xi, \xi'), (\eta, \eta')) = h_E(\xi, \eta) + h_F(\xi', \eta'), \quad (\text{A.36})$$

$$h_{E \otimes F}(\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta') = h_E(\xi, \eta) h_F(\xi', \eta'). \quad (\text{A.37})$$

Un marco local para el haz $\wedge^p E$ está dado por $(s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p})_{i_1 < \cdots < i_p}$, y se puede

definir una métrica Hermitiana en $\wedge^p E$ como sigue

$$h_{\wedge^p E}(s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}, s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p}) = \det \begin{pmatrix} h_{i_1 \bar{j}_1} & \cdots & h_{i_1 \bar{j}_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i_p \bar{j}_1} & \cdots & h_{i_p \bar{j}_p} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

En particular si $H = (h_{i\bar{j}})$, la métrica inducida en el haz determinante está dada por

$$h_{\det E}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r, s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) = \det H. \quad (\text{A.39})$$

Apéndice B

Métricas de Hermite-Einstein

En esta sección se describen algunos conceptos que resultarán fundamentales para el trabajo de tesis. Más detalles sobre estos temas pueden consultarse en [23, 31, 26]. El operador de Hodge juega un papel crucial tanto en geometría diferencial como en teoría de Yang-Mills y es usado para inducir productos Hermitianos en espacios de formas con coeficientes en haces. Las métricas de Hermite-Einstein y el funcional de Kobayashi ocupan una parte importante del texto clásico [23] y han sido objeto de investigación durante algún tiempo en geometría y física-matemática.

B.1. El operador de Hodge

Sea (M, g) una variedad de Kähler m -dimensional. Se pueden elegir $(1, 0)$ -formas $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ tales que forman un marco unitario del haz cotangente holomorfo $\Omega^{1,0}$. De manera que la métrica g y la forma de Kähler ω se escriben localmente como

$$g = \sum \theta^\alpha \otimes \bar{\theta}^\alpha \quad \text{y} \quad \omega = i \sum \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\alpha. \quad (\text{B.1})$$

Siguiendo la notación de multi-índices definida en la sección A.1, sean $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ y $B = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ multi-índices ordenados de manera estrictamente creciente con $1 \leq p, q \leq m$. Se define el multi-índice complementario de A como $A' = (\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_m)$ con $\alpha_{p+1} < \dots < \alpha_m$ y se denota el signo de la permutación AA' por $\sigma^{AA'}$. Una (p, q) -forma $\psi \in A^{p,q}$ se escribe localmente como $\psi = \sum \psi_{A\bar{B}} \theta^A \wedge \bar{\theta}^B$, entonces su complejo conjugado está dado por

$$\bar{\psi} = \sum (-1)^{pq} \overline{\psi_{A\bar{B}}} \theta^B \wedge \bar{\theta}^A = \sum \bar{\psi}_{B\bar{A}} \theta^B \wedge \bar{\theta}^A,$$

i.e., $\bar{\psi}$ es un elemento de $A^{q,p}$ con $\bar{\psi}_{B\bar{A}} = (-1)^{pq} \overline{\psi_{A\bar{B}}}$. En particular, si $\lambda = \sum \lambda_{\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta$ es una $(1, 1)$ -forma, se tiene la siguiente fórmula

$$\lambda \wedge \omega^{m-1} = \frac{1}{im} \left(\sum \lambda_{\alpha\bar{\alpha}} \right) \omega^m. \quad (\text{B.2})$$

Definición B.1.1. El operador $*$ de Hodge es el operador A^0 -lineal definido por

$$* : A^{p,q} \longrightarrow A^{m-q,m-p}, \quad *(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) = i^m \varepsilon^{AB} \theta^{B'} \wedge \bar{\theta}^{A'}, \quad (\text{B.3})$$

con $\varepsilon^{AB} = (-1)^{mp+m(m+1)/2} \sigma^{AA'} \sigma^{BB'} = \pm 1$.

De la definición de ε^{AB} y la identidad $\sigma^{A'A} = (-1)^{p(m-p)} \sigma^{AA'}$ se sigue que

$$\varepsilon^{BA} = (-1)^{m(p+q)} \varepsilon^{AB}, \quad \varepsilon^{AB} \varepsilon^{B'A'} = (-1)^{m+p+q}. \quad (\text{B.4})$$

Un cálculo directo usando (B.3) muestra que para un elemento $\phi \in A^{p,q}$

$$*^2 \phi = (-1)^m \sum \phi_{A\bar{B}} \varepsilon^{AB} \varepsilon^{B'A'} \theta^A \wedge \bar{\theta}^B,$$

y de la segunda identidad en (B.4) se tiene la siguiente propiedad del operador $*$

$$*^2 \phi = (-1)^{p+q} \phi. \quad (\text{B.5})$$

Ahora, se define el *complejo conjugado* $\bar{*}$ de $*$ como el operador

$$\bar{*} : A^{p,q} \longrightarrow A^{m-p,m-q}, \quad \bar{*} \phi = * \bar{\phi}. \quad (\text{B.6})$$

Note que a diferencia de $*$, el operador $\bar{*}$ es A^0 -antilineal. La primera identidad de (B.4) implica que $\bar{*} \phi = \overline{* \phi}$, y de esta última se tiene la siguiente fórmula

$$\bar{*}(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) = (-1)^{pq} i^m \varepsilon^{BA} \theta^{A'} \wedge \bar{\theta}^{B'}. \quad (\text{B.7})$$

Usando (B.4), (B.7) y la identidades

$$\bar{\theta}^B \wedge \theta^{A'} = (-1)^{q(m-p)} \theta^{A'} \wedge \bar{\theta}^B, \quad \omega^m = i^m m! \theta^1 \wedge \bar{\theta}^1 \wedge \cdots \wedge \theta^m \wedge \bar{\theta}^m.$$

se obtiene $m!(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) \wedge \bar{*}(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) = \omega^m$. Por otro lado, sean $C = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ y $D = (\delta_1, \dots, \delta_q)$ multi-índices, entonces de (B.7) se sigue que $(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) \wedge \bar{*}(\theta^C \wedge \bar{\theta}^D) \neq 0$ si y solo si $A = C$ y $B = D$. De esto se tiene la siguiente fórmula

$$(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) \wedge \bar{*}(\theta^C \wedge \bar{\theta}^D) = \begin{cases} \frac{\omega^m}{m!} & \text{si } A = C \text{ y } B = D, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Si $\phi, \psi \in A^{p,q}$ se escriben como $\phi = \sum \phi_{A\bar{B}} \theta^A \wedge \bar{\theta}^B$ y $\psi = \sum \psi_{C\bar{D}} \theta^C \wedge \bar{\theta}^D$, entonces de (B.8) se sigue la fórmula

$$\phi \wedge \bar{*} \psi = \sum \phi_{A\bar{B}} \overline{\psi_{AB}} \frac{\omega^m}{m!}. \quad (\text{B.9})$$

Como ω es real la igualdad (B.9) implica

$$\overline{\phi \wedge \bar{*} \psi} = \psi \wedge \bar{*} \phi. \quad (\text{B.10})$$

De (B.10) junto con las propiedades del operador $*$ y las (p, q) -formas vistas arriba, se tiene el siguiente resultado clásico en geometría compleja (ver [23, p. 61], [9, p. 9]).

Proposición B.1.2. *Sea (M, g) una variedad compacta de Kähler m -dimensional con forma de Kähler ω . Entonces*

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi \wedge \bar{*} \psi = \int_M (\phi, \psi) \frac{\omega^m}{m!}, \quad \forall \phi, \psi \in A^{p,q} \quad (\text{B.11})$$

define un producto interno Hermitiano sobre $A^{p,q}$, con

$$(\phi, \psi) = \sum \phi_{A\bar{B}} \overline{\psi_{A\bar{B}}}. \quad (\text{B.12})$$

De los productos internos Hermitianos (B.11) y (B.12) se tiene una norma global y una norma local en $A^{p,q}$, definidas por

$$\|\phi\|^2 = \langle \phi, \phi \rangle, \quad |\phi|^2 = (\phi, \phi). \quad (\text{B.13})$$

Note que el marco unitario $(\theta)_{\alpha=1}^m$ depende de g , así el operador $*$ y consecuentemente los productos (\cdot, \cdot) y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dependen de g .

Al igual que $A^{p,q}$ tiene un producto interno Hermitiano definido por (B.11), si $E \rightarrow M$ es un haz holomorfo de rango r entonces se puede definir un producto interno Hermitiano en $A^{p,q}(\text{End } E)$. Considere una métrica Hermitiana h en E y $\Psi \in A^{p,q}(\text{End } E)$, se define el *Hermitiano conjugado* (con respecto a h) de Ψ como el elemento $\bar{\Psi}_h \in A^{q,p}(\text{End } E)$ tal que

$$h(\bar{\Psi}_h \xi, \eta) = h(\xi, \Psi \eta) \quad \forall \xi, \eta \in A^0(E), \quad (\text{B.14})$$

donde h denota una extensión natural de la métrica en E , actuando de manera usual en la parte de formas y dejando fija la parte de endomorfismos (ver [29, p. 875] o [28, p. 3]). Un cálculo directo muestra que el Hermitiano conjugado de $\bar{\Psi}_h$ es de nuevo Ψ . El operador de Hodge se puede extender como

$$* : A^{p,q}(\text{End } E) \rightarrow A^{m-q, m-p}(\text{End } E)$$

dejando fijos a los endomorfismos de E . Usando este operador extendido se define el *Hermitiano conjugado* $\bar{*}_h$ (con respecto a h) de $*$ como

$$\bar{*}_h : A^{p,q}(\text{End } E) \rightarrow A^{m-p, m-q}(\text{End } E), \quad \bar{*}_h \Psi = *(\bar{\Psi}_h). \quad (\text{B.15})$$

Sean $\Phi \in A^{p,q}(\text{End } E)$, $\Psi \in A^{p',q'}(\text{End } E)$. Se puede tomar el producto wedge entre Φ y Ψ componiendo la parte de endomorfismos y tomando el producto wedge usual en la parte de formas. Si $s = (s_i)_{i=1}^r$ es un marco de E con $(s^i)_{i=1}^r$ su marco dual, entonces Φ se escribe como

$$\Phi = \sum \Phi_{A\bar{B}} \theta^A \wedge \bar{\theta}^B = \sum \Phi_{A\bar{B}j}^i s_i \otimes s^j \theta^A \wedge \bar{\theta}^B,$$

donde los $\Phi_{A\bar{B}j}^i$ son las componentes del endomorfismo local $\Phi_{A\bar{B}}$, y se tiene

$$\begin{aligned} \Phi \wedge \Psi &= \sum (\Phi_{A\bar{B}} \circ \Psi_{C\bar{D}}) \theta^A \wedge \bar{\theta}^B \wedge \theta^C \wedge \bar{\theta}^D \\ &= (-1)^{qp'} \sum (\Phi_{A\bar{B}} \circ \Psi_{C\bar{D}}) \theta^A \wedge \theta^C \wedge \bar{\theta}^B \wedge \bar{\theta}^D. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Observe que si $\Phi \in A^{1,1}(\text{End } E)$ está dada por $\Phi = \sum \Phi_{\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta$, entonces de la fórmula (B.2) se sigue

$$\Phi \wedge \omega^{m-1} = \frac{1}{im} \left(\sum \Phi_{\alpha\bar{\alpha}} \right) \omega^m. \quad (\text{B.17})$$

Se define el conmutador $[\Phi, \Psi]$ como el elemento en $A^{p+p', q+q'}(\text{End } E)$ dado por

$$[\Phi, \Psi] = \Phi \wedge \Psi - (-1)^{(p+q)(p'+q')} \Psi \wedge \Phi, \quad (\text{B.18})$$

donde \wedge denota el producto wedge definido en (B.16). Note que el conmutador $[\Phi, \Psi]$ se puede escribir en componentes como

$$[\Phi, \Psi] = \sum [\Phi_{A\bar{B}}, \Psi_{C\bar{D}}] \theta^A \wedge \bar{\theta}^B \wedge \theta^C \wedge \bar{\theta}^D \quad (\text{B.19})$$

$$= (-1)^{qp'} \sum [\Phi_{A\bar{B}}, \Psi_{C\bar{D}}] \theta^A \wedge \theta^C \wedge \bar{\theta}^B \wedge \bar{\theta}^D. \quad (\text{B.20})$$

Por otro lado, si el Hermitiano conjugado de Φ se expresa como

$$\bar{\Phi}_h = \sum \bar{\Phi}_{hB\bar{A}} \theta^B \wedge \bar{\theta}^A = \sum \Phi_{hB\bar{A}j}^i s_i \otimes s^j \theta^B \wedge \bar{\theta}^A,$$

se sigue de (B.14) que las componentes $\bar{\Phi}_{hB\bar{A}}$ se expresan en términos de las componentes $\Phi_{A\bar{B}}$ como

$$\bar{\Phi}_{hB\bar{A}j}^i = (-1)^{pq} \sum h_{j\bar{l}} \overline{\Phi_{A\bar{B}k}^l} h^{i\bar{k}}, \quad (\text{B.21})$$

con $h_{i\bar{k}} = h(s_i, s_k)$. En particular, cuando el marco s es unitario la identidad anterior se simplifica a

$$(-1)^{pq} \bar{\Phi}_{hB\bar{A}j}^i = \overline{\Phi_{A\bar{B}i}^j}. \quad (\text{B.22})$$

Se define el *adjunto matricial* Φ^\dagger de Φ como

$$\Phi^\dagger = \sum \Phi_{A\bar{B}}^\dagger \theta^A \wedge \bar{\theta}^B = \sum (\Phi_{A\bar{B}}^\dagger)_j^i s_i \otimes s^j \theta^A \wedge \bar{\theta}^B, \quad (\text{B.23})$$

con $(\Phi_{A\bar{B}}^\dagger)_j^i = \overline{\Phi_{A\bar{B}i}^j}$. De la identidad (B.22) se sigue que $(-1)^{pq} \bar{\Phi}_{hA\bar{B}} = \Phi_{A\bar{B}}^\dagger$ y consecuentemente se obtiene la expresión

$$\bar{*}_h \Phi = (-1)^{pq} \sum \bar{\Phi}_{hB\bar{A}} \bar{*}(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B) = \sum \Phi_{B\bar{A}}^\dagger \bar{*}(\theta^A \wedge \bar{\theta}^B). \quad (\text{B.24})$$

De las identidades (B.8) y (B.24) se sigue que la traza de $\Phi \wedge \bar{*}_h \Psi$ está dada por

$$\text{tr}(\Phi \wedge \bar{*}_h \Psi) = \sum \text{tr} \left(\Phi_{A\bar{B}} \circ \Psi_{A\bar{B}}^\dagger \right) \frac{\omega^m}{m!}, \quad (\text{B.25})$$

y por lo tanto

$$\overline{\text{tr}(\Phi \wedge \bar{*}_h \Psi)} = \text{tr}(\Psi \wedge \bar{*}_h \Phi). \quad (\text{B.26})$$

De modo que se define un producto interno Hermitiano local en $A^{p,q}(\text{End } E)$ como

$$(\Phi, \Psi) = \sum \text{tr} \left(\Phi_{A\bar{B}} \circ \Psi_{A\bar{B}}^\dagger \right). \quad (\text{B.27})$$

De lo visto arriba se tiene el siguiente resultado en geometría compleja, comúnmente usado en teoría de Yang-Mills con un enfoque geométrico [23, p. 64], [1, p. 13].

Proposición B.1.3. *Sea E un haz holomorfo sobre una variedad de Kähler compacta M con forma de Kähler ω y sea h una métrica Hermitiana en E , entonces*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_M \text{tr}(\Phi \wedge \bar{*}_h \Psi) = \int_M (\Phi, \Psi) \frac{\omega^m}{m!}, \quad \forall \Phi, \Psi \in A^{p,q}(\text{End } E) \quad (\text{B.28})$$

define un producto interno Hermitiano global en $A^{p,q}(\text{End } E)$, donde (Φ, Ψ) está localmente definido por (B.27).

De los productos internos definidos en (B.28) y (B.27) se tiene una norma global y una norma local en $A^{p,q}(\text{End } E)$, definidas por

$$\|\Phi\|^2 = \langle \Phi, \Phi \rangle, \quad |\Phi|^2 = (\Phi, \Phi). \quad (\text{B.29})$$

Al igual que en el caso de $A^{p,q}$, los productos internos definidos en (B.27) y (B.28) dependen de las métricas h y g . Note que tanto en el caso de la proposición B.1.2 como en la proposición B.1.3, los productos se extienden diagonalmente al espacio de todas las formas, *i.e.*, el producto de formas de diferente tipo es cero.

B.2. Métricas de Hermite-Einstein

Sea (E, h) un haz holomorfo Hermitiano de rango r sobre una variedad Hermitiana (M, g) m -dimensional. Sea $(z^\alpha)_{\alpha=1}^m$ un sistema coordinado en M y $s = (s_i)_{i=1}^r$ un marco de E con marco dual $(s^i)_{i=1}^r$. Retomando la sección A.2, considere D_h la conexión de Chern de (E, h) , entonces su curvatura $R_h \in A^{1,1}(\text{End } E)$ se expresa como

$$R = \sum R_{h\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta = \sum R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i s_i \otimes s^j dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Si $h_{i\bar{j}} = h(s_i, s_j)$ y $g = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$, sean

$$K_{hj}^i = \sum g^{\alpha\bar{\beta}} R_{h\alpha\bar{\beta}j}^i, \quad K_{hj\bar{k}} = \sum h_{i\bar{k}} K_{hj}^i. \quad (\text{B.30})$$

Entonces $K_h = (K_{hj}^i)$ y $\hat{K}_h = (K_{hj\bar{k}})$ definen un endomorfismo y una forma Hermitiana en E dados por

$$K_h \xi = \sum K_{hj}^i \xi^j s_i, \quad \hat{K}_h(\xi, \eta) = \sum K_{hj\bar{k}} \xi^j \bar{\eta}^k, \quad (\text{B.31})$$

para secciones $\xi = \sum \xi^i s_i$, $\eta = \sum \eta^i s_i$ de E . Usualmente K_h y \hat{K}_h son llamadas la *transformación* y la *forma de curvatura media*, respectivamente. En lo que sigue nos referiremos indistintamente a K_h y \hat{K}_h como la curvatura media. Dicho endomorfismo también imponiendo la condición

$$K_h \omega^m = im R_h \wedge \omega^{m-1}, \quad (\text{B.32})$$

o bien como el endomorfismo dado por

$$K_h = i\Lambda R_h, \quad (\text{B.33})$$

donde $L : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q+1}$ está dado por $L\phi = \omega \wedge \phi$ y Λ es el operador adjunto de L , i.e., $\Lambda = *^{-1}L*$.

Sea $\xi = \sum \xi^i s_i$ una sección de E y escriba la expresión (A.8) para $D'_h \xi$ como

$$D'_h \xi = \sum \left(d' \xi^i + \sum \omega_j^i \xi^j \right) s_i = \sum (\nabla_\alpha \xi^i dz^\alpha) s_i. \quad (\text{B.34})$$

Usando (B.34) la fórmula (A.23) se reescribe como

$$\partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} h(\xi, \xi) = \sum h_{i\bar{k}} \nabla_\alpha \xi^i \overline{\nabla_\beta \xi^k} - \sum h_{i\bar{k}} R_{h\alpha\bar{\beta}}^i \xi^j \bar{\xi}^k. \quad (\text{B.35})$$

Defina el operador $\square = -\sum g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}}$ y la norma usual de $D'_h \xi$ con respecto a h y g

$$|D'_h \xi|^2 = \sum h_{i\bar{k}} g^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\alpha \xi^i \overline{\nabla_\beta \xi^k}.$$

Entonces tomando la traza de (B.35) con respecto a g y usando (B.30) y (B.31) se obtiene la identidad de Weitzenböck

$$-\square h(\xi, \xi) = |D'_h \xi|^2 - \hat{K}_h(\xi, \xi). \quad (\text{B.36})$$

La identidad de Weitzenböck junto con el principio maximal de Hopf (que se enuncia a continuación), juegan un papel importante en la demostración del teorema 2.2.1 al igual que en su versión clásica para haces holomorfos (ver [23, pp. 52-53]).

Teorema B.2.1 (Principio maximal de Hopf). *Sea U un dominio en \mathbb{R}^n . Sean f, g^{ij}, h^i para $1 \leq i, j \leq n$ funciones real-valuadas C^∞ sobre U tales que la matriz (g^{ij}) es simétrica y positiva definida sobre U . Si*

$$L(f) = \sum g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum h^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \geq 0 \quad \text{sobre } U$$

y f tiene un maximal relativo en el interior de U , entonces f es una función constante.

Definición B.2.2. El haz (E, h) sobre (M, g) *satisface la condición de Einstein débil con factor f si $K_h = fI_E$, donde $f \in A^0$. Si $f = c$ es constante, entonces (E, h) *satisface la condición de Einstein. En el último caso el par (E, h) es llamado un haz vectorial Hermite-Einstein (HE).**

Si E es un haz holomorfo sobre (M, g) , se dice que una métrica Hermitiana h en E satisface la ecuación de *Hermite-Einstein* si (E, h) es un haz HE, *i.e.*, si h satisface cualquiera de las ecuaciones

$$K_h = cI_E \quad \text{ó} \quad \hat{K}_h = ch, \quad (\text{B.37})$$

donde K_h y \hat{K}_h denotan la curvatura media de Chern definida por h . En tal caso se dice que h es una métrica *Hermite-Einstein* (HE) o *Hermite-Yang-Mills* (HYM). Los nombres HE y HYM fueron introducidos originalmente por Kobayashi [23] y Uhlenbeck y Yau [32], respectivamente. La misma terminología es usada para el caso de haces de Higgs [9], aunque las ecuaciones no sean las mismas que en el contexto clásico de geometría compleja. Es importante mencionar que (B.37) puede considerarse como una generalización de la ecuación de Kähler-Einstein cuando (M, g) es Kähler, en cuyo caso la curvatura media y el tensor de Ricci coinciden [23, p. 28]. En efecto, tomando $E = TM$ y $h = g$, si (M, g) es Kähler entonces $R_{g\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = R_{g\gamma\bar{\delta}\alpha\bar{\beta}}$ y se sigue

$$K_{g\alpha\bar{\beta}} = \sum g^{\gamma\bar{\delta}} R_{g\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \sum g^{\gamma\bar{\delta}} R_{g\gamma\bar{\delta}\alpha\bar{\beta}} = R_{g\alpha\bar{\beta}},$$

donde en la última igualdad se ha hecho uso de la definición de las componentes del tensor de Ricci (ver [23, p. 26]). En este caso, (B.37) se vuelve la ecuación de Kähler-Einstein $\text{Ric}_g = cg$.

Algunas consecuencias de la condición de Einstein se listan en la siguiente proposición (ver demostración en [23, p. 100]).

Proposición B.2.3. *Sean (E, h) , (E_1, h_1) y (E_2, h_2) haces holomorfos Hermitianos sobre una variedad Hermitiana (M, g) .*

1. *Cada haz de línea Hermitiano (E, h) sobre una variedad compleja M satisface la condición de Einstein débil con respecto a cualquier métrica Hermitiana g en M .*

2. *Si (E, h) sobre (M, g) satisface la condición de Einstein (débil) con factor f , entonces (E^*, h_{E^*}) satisface la condición de Einstein (débil) con factor $-f$.*

3. *Si (E_1, h_1) y (E_2, h_2) sobre (M, g) satisfacen la condición de Einstein (débil) con factores f_1 y f_2 , respectivamente, entonces el producto tensorial $(E_1 \otimes E_2, h_{E_1 \otimes E_2})$ satisface la condición de Einstein (débil) con factor $f_1 + f_2$.*

4. *La suma de Whitney $(E_1 \oplus E_2, h_{E_1 \oplus E_2})$ satisface la condición de Einstein (débil) con factor f , si y solo si ambos sumandos (E_1, h_1) y (E_2, h_2) satisfacen la condición de Einstein (débil) con el mismo factor f .*

Corolario B.2.4. *Si (E, h) sobre (M, g) satisface la condición de Einstein (débil) con factor f , entonces los haces $(E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}, h_{E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}})$ y $(\wedge^p E, h_{\wedge^p E})$ satisfacen la condición de Einstein (débil) con factores $(p - q)f$ y pf , respectivamente.*

Es bien sabido (ver [23, p. 39]) que si (E, h) es un haz Hermitiano holomorfo, entonces la primera y segunda clases de Chern, $c_1(E)$ y $c_2(E)$, pueden representarse por las formas

$$c_1(E, h) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{tr} R_h, \quad c_2(E, h) = -\frac{1}{8\pi^2} (\operatorname{tr} R_h \wedge \operatorname{tr} R_h - \operatorname{tr}(R_h \wedge R_h)). \quad (\text{B.38})$$

Usualmente $c_1(E, h)$ y $c_2(E, h)$ son llamadas la *primera y segunda forma de Chern*.

Usando la definición de K_h dada en (B.32) se obtiene el siguiente resultado.

Proposición B.2.5. *Si M es compacto y (E, h) sobre (M, g) satisface la condición de Einstein (débil) con factor f , entonces*

$$\int_M c_1(E, h) \wedge \omega^{m-1} = \frac{r}{2\pi m} \int_M f \omega^m. \quad (\text{B.39})$$

Sea $a \in A^0$ una función positiva y considere la métrica Hermitiana $h' = ah$. Si $\omega = (\omega_j^i)$ y $\omega' = (\omega_j^i)$ denotan las formas de conexión de Chern asociadas a h y h' , entonces

$$\omega_j^i = \omega_j^i + d'(\log a) \delta_j^i. \quad (\text{B.40})$$

Aplicando d'' a (B.40) se obtiene $\Omega_j^i = \Omega_j^i + d'' d'(\log a) \delta_j^i$, y de esto se sigue

$$R_{\alpha\bar{\beta}j}^i = R_{\alpha\bar{\beta}j}^i - \delta_j^i \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}}(\log a). \quad (\text{B.41})$$

Definiendo $\square = -\sum g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}}$ y tomando la traza de (B.41) con respecto a g se obtiene la relación

$$K_{h'} = K_h + \square(\log a)I. \quad (\text{B.42})$$

De lo visto arriba se tiene el siguiente resultado.

Lema B.2.6. *Si el haz (E, h) sobre (M, g) satisface la condición de Einstein débil con factor f , entonces (E, h') con $h' = ah$ y $a = a(x)$ una función C^∞ positiva satisface la condición de Einstein débil con factor $f + \square(\log a)$.*

Proposición B.2.7. *Si el haz (E, h) sobre una variedad Kähler compacta (M, g) satisface la condición de Einstein débil con factor f , entonces existe un cambio conforme $h' = ah$, con $a \in A^0$, tal que (E, h') satisface la condición de Einstein con un factor constante c . Dicho cambio conforme es único hasta por homotecia.*

Sea (M, g) Kähler compacto. Se define el *grado* de E como

$$\deg E = \int_M c_1(E) \wedge \omega^{m-1} = \int_M c_1(E, h) \wedge \omega^{m-1}. \quad (\text{B.43})$$

y el *slope* de E como el cociente

$$\mu(E) = \frac{\deg E}{r}. \quad (\text{B.44})$$

De la proposición 2.2.23 en [23, p. 41] se tiene que cualquier representante de $c_1(E)$ es una forma de Chern $c_1(E, h')$ para alguna métrica Hermitiana h' . Por otro lado, si $c_1(E, h')$ está en la clase de cohomología $c_1(E)$ entonces $c_1(E, h) - c_1(E, h') = d\phi$ para alguna 0-forma ϕ y se tiene

$$\int_M c_1(E, h) \wedge \omega^{m-1} - \int_M c_1(E, h') \wedge \omega^{m-1} = \int_M d\phi \wedge \omega^{m-1} = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del teorema de Stokes y el hecho de que ω es cerrada. Un argumento análogo muestra que el valor de la integral en (B.43) no cambia cuando se usa otro representante de la clase de cohomología $[\omega]$. En otras palabras, el grado de E depende solamente de las clases de cohomología $[\omega]$ y $c_1(E)$. Usando un argumento similar al anterior y bajo las mismas condiciones, se puede demostrar que las integrales de $c_1(E, h)^2 \wedge \omega^{m-2}$ y $c_2(E, h) \wedge \omega^{m-2}$ están bien definidas y dependen solamente de las clases $c_1(E), c_2(E)$ y $[\omega]$, *i.e.*, se puede escribir

$$\int_M c_1(E)^2 \wedge \omega^{m-2} = \int_M c_1(E, h)^2 \wedge \omega^{m-2}, \quad (\text{B.45})$$

$$\int_M c_2(E) \wedge \omega^{m-2} = \int_M c_2(E, h) \wedge \omega^{m-2}. \quad (\text{B.46})$$

De (B.39) se obtiene la siguiente fórmula para el factor c dado en (B.37)

$$c = \frac{2\pi \deg E}{r(m-1)! \text{vol } M}, \quad (\text{B.47})$$

i.e., el factor c de la condición de Einstein depende solamente de invariantes del haz.

Definición B.2.8. El haz E admite una *métrica aproximada de Hermite-Einstein (aprox. HE)* si $\forall \varepsilon > 0$, existe una métrica Hermitiana h_ε tal que la curvatura media satisface $\max_M |K_{h_\varepsilon} - c I_E| < \varepsilon$. Tal h_ε es llamada una ε -*métrica de Hermite-Einstein*.

Sea (M, g) una variedad de Kähler compacta. A continuación se enuncian algunos resultados sobre métricas aproximadas HE. Las demostraciones se pueden encontrar en [23, pp. 118-120].

Proposición B.2.9. Sean E, E_1 y E_2 haces holomorfos sobre (M, g) .

1. Si E admite una métrica aprox. HE, entonces E^* admite una métrica aprox. HE.
2. Si E_1 y E_2 admiten métricas aprox. HE, entonces $E_1 \otimes E_2$ admite una métrica aprox. HE.

3. Si E_1 y E_2 admiten métricas aprox. HE y $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, entonces $E_1 \oplus E_2$ admite una métrica aprox. HE.

Proposición B.2.10. Sea E un haz holomorfo sobre (M, g) . Si E admite una métrica aprox. HE y $\deg E < 0$, entonces E no tiene secciones holomorfas no triviales.

Proposición B.2.11. Sean E_1 y E_2 haces holomorfos sobre (M, g) . Si E_1 y E_2 admiten métricas aprox. HE y $\mu(E_1) > \mu(E_2)$, entonces no existen homomorfismos no cero de E_1 a E_2 .

Finalmente, la noción de métrica HE encuentra una noción dual en geometría algebraica. Más precisamente, la existencia de una métrica HE en un haz holomorfo es equivalente a que dicho haz sea poliestable en el sentido de Mumford [32, 29, 14]. En geometría compleja esta equivalencia es conocida como la correspondencia de Hitchin-Kobayashi. Una versión extendida para haces de Higgs de la correspondencia de Hitchin-Kobayashi fue probada por Simpson en [29].

B.3. El funcional de Kobayashi

En la teoría de haces holomorfos existen algunos funcionales definidos sobre el espacio de métricas Hermitianas de un haz, y que están estrechamente relacionados con la ecuación de HE. Más precisamente, una métrica HE en el haz es un punto crítico de dichos funcionales. En esta sección se definen los funcionales de Kobayashi y Yang-Mills [23], se describen algunas de sus propiedades y se muestra cómo se relacionan dichos funcionales.

Sea $E \rightarrow M$ un haz holomorfo de rango r sobre una variedad compleja m -dimensional M , y sea $\text{Herm}(E)$ el espacio vectorial de dimensión infinita que consiste de todas las formas Hermitianas v en E . Cada elemento de E define una forma Hermitiana bilineal $v_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{C}$ en cada punto $x \in M$. Sea $\text{Herm}^+(E)$ el conjunto de métricas Hermitianas en E , entonces $\text{Herm}^+(E)$ es un dominio convexo de $\text{Herm}(E)$ y se puede identificar al espacio tangente de $\text{Herm}^+(E)$ en cada punto h con $\text{Herm}(E)$, i.e.,

$$T_h \text{Herm}^+(E) = \text{Herm}(E).$$

Sea $\text{GL}(E)$ el grupo de automorfismos complejos de E , usualmente llamado el *grupo gauge complejo* de E . Entonces $\text{GL}(E)$ actúa sobre $\text{Herm}(E)$ mediante

$$v \mapsto a \cdot v = {}^t \bar{a} v a, \quad v \in \text{Herm}(E), a \in \text{GL}(E). \quad (\text{B.48})$$

El algebra de Lie $\mathfrak{gl}(E)$ de $\text{GL}(E)$ es el espacio de secciones del haz $\text{End } E$.

Considere $k \in \text{Herm}^+(E)$ una métrica Hermitiana fija como el origen del espacio tangente $\text{Herm}(E)$, y denote por $\text{U}(E)$ al subgrupo de $\text{GL}(E)$ formado por las transformaciones unitarias con respecto a k , esto es

$$\text{U}(E) = \{a \in \text{GL}(E) : a \cdot k = k\}.$$

Usualmente el subgrupo $U(E)$ es llamado el *grupo gauge* de (E, k) , y su algebra de Lie $\mathfrak{u}(E)$ consiste de los endomorfismos de E que son anti-Hermitianos con respecto a k . La acción de $GL(E)$ sobre $\text{Herm}^+(E)$ es transitiva y se puede realizar la identificación $\text{Herm}^+(E) = GL(E)/U(E)$. Para un análisis detallado sobre el espacio de métricas Hermitianas ver [23, pp. 193-197].

Sea (E, h) sobre (M, g) un haz Hermitiano holomorfo sobre una variedad de Kähler compacta. Sea K_H la curvatura media de Chern, retomando la sección B.2 se tiene la norma local y global de K_h

$$|K_h|^2 = \sum K_{hj}^i K_{hi}^j, \quad \|K_h\|^2 = \int_M \text{tr}(K_h \wedge \bar{*}_h K_h) = \int_M |K_h|^2 \frac{\omega^m}{m!}. \quad (\text{B.49})$$

Se define el *funcional de Kobayashi* como

$$J : \text{Herm}^+(E) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad J(h) = \frac{1}{2} \int_M |K_h|^2 \omega^m. \quad (\text{B.50})$$

Note que J es no negativo y se puede expresar en términos de la norma global como

$$J(h) = \frac{m!}{2} \|K_h\|^2. \quad (\text{B.51})$$

Se define la *curvatura escalar* como $\sigma = \text{tr} K_h$. De un cálculo directo se obtiene la fórmula $(2m\pi) c_1(E, h) \wedge \omega^{m-1} = \sigma \omega^m$ y se sigue

$$c r \int_M \omega^m = \int_M \sigma \omega^m, \quad (\text{B.52})$$

donde c es la constante dada por (B.47). Por otro lado, se tiene la desigualdad

$$0 \leq |K_h - cI|^2 = \text{tr}(K_h^2 - 2cK_h + c^2I) = |K_h|^2 - 2c\sigma + c^2r. \quad (\text{B.53})$$

Integrando (B.53) y usando (B.52) se obtiene el siguiente resultado.

Proposición B.3.1. *Sea $E \rightarrow M$ un haz holomorfo sobre una variedad de Kähler compacta m -dimensional. Entonces el funcional J definido en (B.50) está acotado inferiormente por una constante que se expresa en términos de invariantes del haz*

$$J(h) \geq \frac{2m(\pi \deg E)^2}{r(m-1)! \text{vol } M}. \quad (\text{B.54})$$

Más aun, J alcanza la cota inferior en $h = h_0$ si y solo si h_0 es una métrica HE.

Note que si el haz $E \rightarrow M$ admite una métrica aprox. HE y $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una familia de ε -métricas, entonces integrando (B.53) se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(h_\varepsilon) = \frac{2m(\pi \deg E)^2}{r(m-1)! \text{vol } M}.$$

De manera similar a (B.50), se define el *funcional de Yang-Mills* como

$$I(h) = \frac{1}{2} \int_M |R_h|^2 \omega^m. \quad (\text{B.55})$$

Sea $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ un marco unitario para el haz cotangente $\Omega^{1,0}$. Usando la fórmula

$$m(m-1)\theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta \wedge \theta^\gamma \wedge \bar{\theta}^\delta \wedge \omega^{m-2} = \begin{cases} -\omega^m & \text{si } \alpha = \beta \neq \gamma = \delta, \\ \omega^m & \text{si } \alpha = \delta \neq \beta = \gamma, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

se obtiene la identidad

$$m(m-1) \operatorname{tr}(R_h \wedge R_h) \wedge \omega^{m-2} = (|R_h|^2 - |K_h|^2) \omega^m. \quad (\text{B.57})$$

Por otro lado, note que el lado izquierdo de (B.57) se puede expresar como

$$m(m-1) \operatorname{tr}(R_h \wedge R_h) \wedge \omega^{m-2} = 4\pi^2 m(m-1) (2c_2(E, h) - c_1(E, h)^2) \wedge \omega^{m-2},$$

donde $c_1(E, h)$ y $c_2(E, h)$ son las formas de Chern dadas por (B.38). Finalmente, integrando (B.57) y usando la fórmula anterior se obtiene la siguiente identidad

$$I(h) = J(h) + 2\pi^2 m(m-1) \int_M (2c_2(E, h) - c_1(E, h)^2) \wedge \omega^{m-2}. \quad (\text{B.58})$$

Ya que (M, g) es Kähler, un argumento similar al que se usó para justificar que el grado del haz solo depende de las clases de cohomología $c_1(E)$ y $[\omega]$, muestra que la integral en el lado derecho de (B.58) depende solamente de las clases de Chern $c_1(E)$, $c_2(E)$ y de $[\omega]$. Por lo tanto la diferencia entre los funcionales de Yang-Mills y Kobayashi, en el caso de un haz Hermitiano holomorfo (E, h) sobre una variedad de Kähler compacta (M, g) , es una constante topológica y se puede escribir

$$I(h) = J(h) + 2\pi^2 m(m-1) \int_M (2c_2(E) - c_1(E)^2) \wedge \omega^{m-2}. \quad (\text{B.59})$$

Note que la integral en (B.59) no depende de la métrica, por lo tanto ambos funcionales tienen los mismos puntos críticos.

Finalmente, como veremos en este trabajo de tesis, dichos funcionales se relacionan de una manera menos simple que en (B.59) cuando se definen en haces de Higgs [9].

Referencias

- [1] M. F. ATIYAH, *Geometry of Yang-Mills fields*, Lezioni Fermiane, Scuola Normale Superiore di Pisa (1979).
- [2] M. F. ATIYAH, *Riemann surfaces and spin structures*, Ann. scien. de l'É.N.S. **4** (1971), pp. 47-62.
- [3] M. F. ATIYAH AND R. BOTT, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A. **308** (1983), pp. 532-615.
- [4] BANDO AND Y.-T. SIU, *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics*, Geometry and analysis on complex manifolds, World Sci. Pub.. River Edge, NJ (1994), pp. 39-50.
- [5] I. BISWAS Y G. SCHUMACHER, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Commun. Pure Appl. Math. **39** (1986), pp. S257-S293.
- [6] U. BRUZZO AND B. GRAÑA OTERO, *Metrics on semistable and numerically effective Higgs bundles*, J. Reine Angew. Math. **612** (2007), pp. 59-79.
- [7] U. BRUZZO AND B. GRAÑA OTERO, *Approximate Hitchin-Kobayashi correspondence for Higgs G-bundles*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., Vol. 11, No. 7 (2014), 1460015 (7 pages).
- [8] S. A. H. CARDONA AND C. MENESES, *On a functional of Kobayashi for Higgs Bundles*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., Vol. 17, No. 13 (2020), 2050200 (16 páginas).
- [9] S. A. H. CARDONA AND H. GARCÍA-COMPEÁN AND A. MARTÍNEZ-MERINO, *On 2k-Hitchin equations and Higgs bundles: A survey*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., Vol 19, No. 2 2130003 (2022).
- [10] S. A. H. CARDONA, *Approximate Hermitian-Yang-Mills structures and semistability for Higgs bundles. I: generalities and the one dimensional case*, Ann. Glob. Anal. Geom. **42**, Number 3 (2012), pp. 349-370.

- [11] S. A. H. CARDONA, *Approximate Hermitian-Yang-Mills structures and semistability for Higgs bundles. II: Higgs sheaves and admissible structures*, Ann. Glob. Anal. Geom. **44**, Number 4 (2013), pp. 455-469.
- [12] S. A. H. CARDONA, *On vanishing theorems for Higgs bundles*, Differential Geometry and its Applications **35** (2014), pp. 95-102.
- [13] J. P. DEMAILLY, *Complex analytic and differential geometry*, Institut Fourier (2012). <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>.
- [14] S. K. DONALDSON, *Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **3** (1985), pp. 1-26.
- [15] S. K. DONALDSON, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Diff. Geom. **18** (1983), pp. 269-278.
- [16] S. K. DONALDSON, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J **54** (1987), pp. 231-247.
- [17] M. GAGLIARDO AND K. UHLENBECK, *Geometric aspects of the Kapustin-Witten equations*, J. Fixed Point Theory Appl., **85** (2012), pp. 185-198. arXiv:1401.7366v1.
- [18] P. GRIFFITHS AND J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, Vol. 52 (1978).
- [19] N. J. HITCHIN, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London. Math. **55** (1987), pp. 59-126.
- [20] J. MILNOR Y J. STASHEFF, *Clases Características*, traductores C. Lozano y M. Londoño, Papirhos 1ra Edición (2017).
- [21] R. A. MOSNA AND M. JARDIM, *Nonsingular solutions of Hitchin's equations for noncompact gauge groups*, Nonlinearity **20** (2007).
- [22] A. KAPUSTIN AND E. WITTEN, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program*, Commun. Number Theory Phys. 1, 1 (2007); arXiv:hep-th/0604151v3
- [23] S. KOBAYASHI, *Differential geometry of complex vector bundles*, Iwanami Shoten Publishers and Princeton Univ. Press. (1987).
- [24] J. LI AND X. ZHANG, *Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on semistable Higgs bundles*, Proc. of Calculus of Variations and P.D.E.. **52** (2015), pp. 783-795.
- [25] M. LÜBKE, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*, Manuscripta Math.. **42** (1983), pp. 245-257.

- [26] M. LÜBKE AND A. TELEMAN, *The Kobayashi-Hitchin Correspondence*, World Scientific, Birkhäuser (1995).
- [27] M. S. NARASIMHAN AND C. SESHADRI, *Stable and unitary bundles on a compact Riemann surface*, Math. Ann. **82** (1965), pp. 540-564.
- [28] W. SEAMAN, *Higgs bundles and holomorphic forms*, Differential Geometry and its Applications **12** (2000), pp. 291-311.
- [29] C. T. SIMPSON, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), pp. 867-918.
- [30] C. T. SIMPSON, *Higgs bundles and local systems*, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. Tome **75** (1992), pp. 5-95.
- [31] Y-T. SIU, *Lectures on Hermite-Einstein metrics for stable vector bundles and Kähler-Einstein metrics*, DMV Seminar, Birkhäuser (1987).
- [32] K. UHLENBECK AND S.-T. YAU, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Commun. Pure Appl. Math. **39** (1986), pp. S257-S293.
- [33] R. S. WARD, *Geometry of solutions of Hitchin equations on \mathbb{R}^2* , London Mathematical Society, Nonlinearity **29** (2016), pp. 756-765.
- [34] R. S. WARD, *Integrable $2k$ -dimensional Hitchin equations*, Lett. Math. Phys. (2016), 106: 951-958.
- [35] M. WIJNHOLT, *Higgs bundles and string phenomenology*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. **85**, (2011). arXiv:1201.2520v1.
- [36] E. WITTEN, *More On Gauge Theory And Geometric Langlands*, Inst. for Adv. Study, (2017). arXiv:1506.04293v3.